PEGEM EĞİTİM ve ÖĞRETİM DERGİSİ
PEGEM JOURNAL OF EDUCATION and INSTRUCTION

Article Type:
Research Paper

Original Title of Article:
Preservice mathematics teachers' competencies in the process of transformation between representations for the concept of limit: A qualitative study

Turkish Title of Article:
Matematik öğretmeni adaylarının limit kavramına yönelik temsiller arası dönüşüm süreci yeterlikleri: Nitel bir çalışma

Author(s):
Okan KUZU

For Cite in:
Kuzu, O. (2020). Preservice mathematics teachers' competencies in the process of transformation between representations for the concept of limit: A qualitative study. *Pegem Eğitim ve Öğretim Dergisi, 10*(4), 1037-1066. http://dx.doi.org/10.14527/pegegog.2020.032

Makale Türü:
Özgün Makale

Orijinal Makale Başlığı:
Preservice mathematics teachers' competencies in the process of transformation between representations for the concept of limit: A qualitative study

Makalenin Türkçe Başlığı:
Matematik öğretmeni adaylarının limit kavramına yönelik temsiller arası dönüşüm süreci yeterlikleri: Nitel bir çalışma

Yazar(lar):
Okan KUZU

Kaynak Gösterimi İçin:
Kuzu, O. (2020). Preservice mathematics teachers' competencies in the process of transformation between representations for the concept of limit: A qualitative study. *Pegem Eğitim ve Öğretim Dergisi, 10*(4), 1037-1066. http://dx.doi.org/10.14527/pegegog.2020.032

PEGEMAKADEMİ

Pegem Eğitim ve Öğretim Dergisi, 10(4), 2020, 1037-1066

www.pegegog.net

Preservice mathematics teachers' competencies in the process of transformation between representations for the concept of limit: A qualitative study

Okan KUZU [*a]

[a] Kirsehir Ahi Evran University, Faculty of Education, Kirsehir/Turkey

Article Info

DOI: 10.14527/pegegog.2020.032

Article History:
Received 31 January 2020
Revised 30 May 2020
Accepted 31 August 2020
Online 08 October 2020

Keywords:
External representations,
Limit,
Multiple representations.

Article Type:
Research paper

Abstract

In this study, external representations and the problems encountered related transformation process between representations towards limit concept were investigated. "Limit Representation Conversion Test" was administered to 41 preservice mathematics teachers studying at a state university in central Turkey during 2018–2019 academic years. In this study, which was designed with the case study model, which is one of the qualitative research models, the data were analyzed by content analysis. Unstructured interviews were made with preservice mathematics teachers whose explanations were insufficient or differed and the problems encountered were determined. It was observed that preservice mathematics teachers had most difficulties in the verbal representation type questions. It was revealed that preservice mathematics teachers who gave the wrong answers mostly had deficiencies in the concept and the process and could not fully understand the limit problems. It was determined that preservice mathematics teachers had difficulties in knowing the concept of limit point, determining the function and interpreting verbal data. It was seen that preservice mathematics teachers who proceeded towards the concept and process answered wrong due to mathematical operations errors and carelessness. When the wrong answers were examined, it was observed that errors were gathered under the themes "lack of content knowledge" and "lack of reading comprehension" for verbal type input; under the theme "carelessness" for graphical type input; under the theme "lack of content knowledge" for algebraic and numerical type input.

Matematik öğretmeni adaylarının limit kavramına yönelik temsiller arası dönüşüm süreci yeterlikleri: Nitel bir çalışma

Makale Bilgisi

DOI: 10.14527/pegegog.2020.032

Makale Geçmişi:
Geliş 31 Ocak 2020
Düzeltme 30 Mayıs 2020
Kabul 31 Ağustos 2020
Çevrimiçi 08 Ekim 2020

Anahtar Kelimeler:
Dış temsiller,
Limit,
Çoklu temsiller.

Makale Türü:
Özgün makale

Öz

Bu çalışmada, matematik öğretmeni adaylarının limit kavramına yönelik kullandıkları temsiller dış temsillere göre belirlenmiş ve temsiller arası dönüşüm sürecine ilişkin karşılaşılan sorunlar araştırılmıştır. Bu bağlamda, 2018–2019 eğitim-öğretim yılında Türkiye'nin İç Anadolu Bölgesindeki bir devlet üniversitesinde öğrenim görmekte olan 41 matematik öğretmeni adayına "Limit Temsil Dönüşüm Testi" uygulanmıştır. Nitel araştırma modellerinden durum çalışması modeli ile tasarlanan bu çalışmada, içerik analizi ile veriler çözümlenmiştir. Verilerin çözümlenmesinde, açıklamaları yetersiz veya farklılık gösteren adaylar ile yapılandırılmamış görüşmeler yapılmış ve karşılaşılan sorunlar belirlenmiştir. Analiz sonuçlarına göre, adayların en çok girdi temsil türü sözel olan sorularda zorlandıkları görülmüştür. Yanlış cevap veren adayların ağırlıklı olarak, kavram ve süreçte eksikliklerinin olduğu, limit problemini tam anlamlandıramadığı ortaya çıkmıştır. Özellikle, limit noktası kavramını bilmede, fonksiyonu belirlemede ve sözel veriyi yorumlamada güçlükler yaşandığı belirlenmiştir. Kavram ve süreçte doğru ilerleyen adayların ise işlem hatası ve dikkatsizlik nedeniyle yanlış yaptıkları görülmüştür. Hataların, girdi temsili sözel olan sorularda ağırlıklı olarak "alan bilgisi eksikliği" ve "okuduğunu anlama eksikliği" temalarında; girdi temsili grafik olan sorularda "dikkatsizlik" temasında; girdi temsili cebir ve nümerik olan sorularda ise "alan bilgisi eksikliği" teması altında toplandığı görülmüştür.

[*] **Author:** okan.kuzu@ahievran.edu.tr **Orcid ID:** https://orcid.org/0000-0003-2466-4701

Introduction

Mathematics that consists of related topics, which are built on one another, and related to other disciplines, can be built on weak foundations because of the topics that are too difficult to learn. This difficulty may cause issues in learning and teaching related mathematics topics. The concept of limit, which requires strong mathematical thinking skills and is among the fundamental concepts of mathematics, is included in many important mathematics topics, and researchers (Artigue, 2000; Cornu, 1991) emphasize that it has a unifying role rather than providing solutions to problems.

In the literature, limit has been conceptualized in two ways: dynamic (informal) and static (formal) (Cornu, 1991; Tall & Vinner, 1981). Dynamic form defined by Tall and Vinner (1981) relies on the following statement:

"$x \to a \Rightarrow f(x) \to L$" (verbally when x approaches a, then $f(x)$ approaches L).

On the other hand, the static form refers to $\delta - \epsilon$ definition, which is accepted by many mathematicians, and expressed as

"$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \text{For } \forall\epsilon > 0$ there is $\exists\delta > 0$ that satisfies $\ni |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$."

When studies on limit concept are examined, it is seen that only a limited number of students developed a clear understanding of formal definition (Quesada, Einsporn, & Wiggins, 2008). One of the reasons why students have difficulty in conceptualizing the limit concept formally is the "each" and "at least one" quantifiers used in the formal definition (Cottrill et al., 1996; Tall & Vinner, 1981). Tall and Vinner (1981) stated that students could not make sense of the "each" and "at least one" quantifiers, so they had difficulty in proving the existence of the limit. This situation may cause the concepts such as derivative, integral, and Taylor series that are built on the formal definition of the limit to be incomprehensible (Kuzu, 2017). In order to develop advanced mathematical thinking skills, students need to have abstract thinking skills. Therefore, developing abstract thinking skills for the limit concept is only possible by understanding the formal definition. Thus, it is important to examine preservice teachers' formal and informal definitions of the limit concept and their interpretations of these definitions. According to Delice and Sevimli (2016), it is necessary to have a good command of mathematical language in order to make sense, use, and transfer of mathematical knowledge. The elements that make up this language are symbols, tables, graphics, figures, and similar representations.

Representations are forms of displaying mathematical ideas, phenomena, objects or realities that aim at editing, recording, transferring, modeling, and interpreting science or social contexts (NCTM, 2000). A mathematical object has more than one representation, and establishing relationships among these representations is necessity for conceptual understanding (Hiebert & Carpenter, 1992). For instance, the use of different representations in formal and informal definitions of concepts such as limit that require high level thinking skills will be beneficial for learning these concepts. The American National Research Council (NRC, 1989) stated that in order to learn and apply mathematics, it is not enough to use only symbols in mathematics; it is also necessary to be able to coordinate these symbols, interpret mathematical relationships, and select the appropriate language for specific situations. The competence to explain a problem situation and to develop appropriate material to draw conclusions from the problem depends on the use of this language with the use of different representations (graphs, tables, symbols, diagrams, verbal expressions or other representations. (NRC, 1989; as cited in: Schoenfeld, 1992, p.338).

In addition, in 1989, the importance of using multiple representations was emphasized in the "Curriculum and Evaluation Standards for Schools" published by the National Council of Mathematics Teachers (NCTM) in the United States (NCTM, 1989). In the literature, there are various definitions for the multiple representations concept. While Keller and Hirsch (1998) described multiple representations as tools that provide the opportunity to present different information, meanings, and contents of a mathematical concept by associating them together, Duval (1993) stated that it is a special language consisting of signs and symbols that are used to express mathematical objects (either physically or mentally). Goldin and Kaput (1996) defined multiple representations as a characteristic arrangement that allows the symbolization of a thing with images or concrete objects. Furthermore, according to Prain and Waldrip (2006), multiple representations mean that a concept is repeatedly represented by different types of expressions, such as verbal, graphical, and mathematical, and students are exposed to the same concept several times.

Representations can be classified according to their role in problem solving process. Dufour-Janvier, Bednarz and Belanger (1987) stated that in the most general sense, the representation concept can be classified as the internal and external representations. The internal representations are structures that consist of mental pictures, information or images that individuals see, formulates, and reconstructs within the framework of their knowledge (Goldin & Kaput, 1996). On the other hand, the external representations are observable tools that enable understanding and transfer of mathematical concepts and ideas (Goldin, 1998). Examples of external representations include verbal, graphical, algebraic or symbolic representations (Girard, 2002; Kendal & Stacey, 2003). Internal and external representation systems are not independent of each other but have a network of relations between them. In comparison to the internal representations, most studies in mathematics education accept external representations as theoretical frameworks (Delice & Sevimli, 2016). The reason for this is that at least one type of external representation is encountered in all subjects of mathematics, and many mathematical concepts can be explained more easily using this type of representations (Kendal & Stacey, 2003). Hence, more emphasis was given to the external representations, and Goldin and Kaput (1996) focused on graphical, numerical, and algebraic representations, which are referred to as “Representation Systems in Mathematics,” that are presented as fundamental representation forms of formal mathematics. These three representations are emphasized as the “Rule of Three” approach, and a “Rule of Four” approach has emerged with the addition of verbal representations to these three (Girard, 2002; Kendal & Stacey, 2003). In addition, in the representation transformation process, if there is a transition between different systems or between different types of representations of the same system, it is called an “inter representation transformation.” If there is a transition within the same system and the same kind of representations, it is called as “within representation transition” (Goldin, 1998). When the studies on limit concept in the literature, it is mostly focused on the difficulties experienced, misconceptions and the effect of different teaching methods on the learning process (Akbulut & Işık, 2005; Bezuidenhout, 2001; Cornu, 1991; Davis & Vinner, 1986; Sierpinska, 1987; Szydlik, 2000; Tall & Vinner, 1981; Williams, 1991).

In this study, the concept of limit, which is stated as difficult by the majority of students, was discussed on the basis of multiple representations approach. Representations used by preservice mathematics teachers (PMTs) towards limit concept were determined according to external representations and problems encountered related to transformation process between representations were investigated.

Method

Research Design

This study was designed as a case study, which is one of the qualitative research models, as an existing situation was tried to be described in its own conditions. The case study model is described as an in-depth description and examination of a limited system (Merriam & Tisdell, 2015).

Participants

The participants of the study consisted of 41 PMTs (27 females and 14 males) who were studying in the faculty of education of a state university in central Turkey during 2018-2019 academic year. While the simple random sampling method is used in the selection of the relevant university, criterion sampling, one of the purposive sampling methods, was used to determine PMTs. Purposive sampling method is a non-probabilistic sampling method and the researcher determines the sampling according to their own criteria (Cohen, Manion, & Morrison, 2000, p.103). Criteria sampling involves the selection of cases that meet some predetermined important criteria (Patton, 2002, p.238). In this study, whether or not PMTs have seen the limit issue during their undergraduate education was taken as a criterion.

Data Collection and Analysis

"Limit Representation Conversion Test (LRCT)" developed by the researcher and consisting of a total of four open-ended questions was used as data collection tool. Each question in this test was prepared with only one of verbal (V), graphical (G), algebraic (A) and numerical (N) representations. LRCT consisted of a total of 12 open-ended questions, supported by three different questions to examine the transformation between representations. The expression of the related problem is defined as input representation and its solution is defined as output representation. For example, an item shown in VG format was prepared with verbal representation and the participants were expected to answer with graphical representation. In this study, since the problems faced in the process of transformation between the representations of PMTs were tried to be determined, each question in the test was examined separately and if the concept, process and answer were correct, it was coded as "1 (True)" and in other cases, it was coded as "0 (False)". The obtained data were analyzed by TAP (Test Analysis Program) and Kuder-Richardson 20 (KR-20) reliability coefficient was found as .81. Mean item difficulty index .46; mean discrimination index .56; mean point biserial correlation value was calculated as .46. On the other hand, the data obtained from PMTs were analyzed by content analysis and the findings were interpreted. In the content analysis method, the obtained data is created within a certain scheme, the codes and categories emerge and concretized (Yaman, 2010b). In this process, unstructured interview form was applied to PMTs whose explanations were insufficient or different and who gave wrong answers other than mathematical operations errors. The interview form was applied to PMTs face to face and it was stated that the name of PMTs would be kept confidential. The interviews were made for an average of 25.00-30.00 minutes, were recorded with a voice recorder and played back to PMTs again. In this process, gestures and facial expressions that directly affect them were avoided. In this context, codes and categories were formed independently by two academicians who are expert in mathematics education. In order to determine whether the codes under the revealed category represent the relevant category and whether the categories represent the relevant theme, the Kendall's W coefficient of fit was calculated and found as .91 for the categories and .93 for the themes. It has been stated that Kendall's W coefficient should be at least .80 (Howell, 2013; Salkind, 2010; Szymanski & Linkowski, 1993). The codes that cause differences of opinion were discussed by the researchers and placed under a suitable category and theme with a common judgment. It was observed that the emerging categories were gathered under three themes: "lack of reading comprehension", "lack of subject matter knowledge" and "lack of attention". Reading comprehension can be defined as an effective process that covers both the information in the text and the reader's comments, and the messages that the author wishes to give are logically structured (Radojevic, 2006, p.14). Subject matter knowledge is the knowledge of the structures that make up the space and the principles that organize them conceptually (Shulman, 1986). Lack of attention, on the other hand, can be defined as doing a job randomly without care or not being able to gather emotion and thought on a topic.

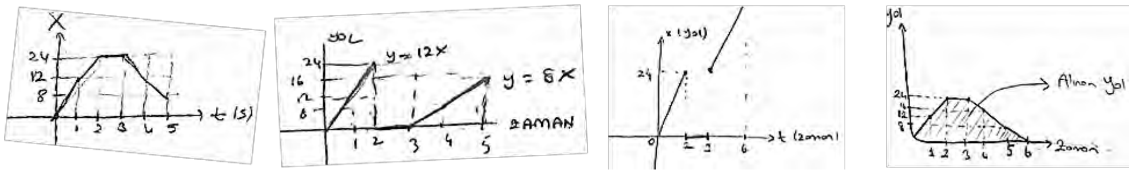
Findings

In this section, findings related to competencies of interrepresentational transformation process used by preservice mathematics teachers in the process of solving limit problems were presented as examples.

Question 1 (Verbal): Ahmet starts running at a constant speed of 12.00 km/h. Two hours later, he's taking one-hour break. After the break, he goes back to the point where he started by running at a constant speed of 8.00 km/h. According to this, how many kilometers has Ahmet started to complete as he approaches the 5.00th hour of the race.

(Graphical): Present with Distance-Time graph

When the answers given by PMTs for this question were examined, it was observed that 7 PMTs answered correctly, 34 PMTs answered incorrectly. The expression "…he goes back to the point where he started…" caused a common misconception in PMTs and 8 PMTs focused on location-time graphs and drew a graph similar to Figure 1a. PMTs drew a downward graph from the moment t = 3.00. On the other hand, 13 PMTs drew a graph as in Figure 1b and Figure 1c, focusing on "… taking one-hour break" in the question sentence. Then, they drew on the y = .00 axis for between t = 2.00 and t = 3.00 hours. 7 PMTs thought that the area under the distance-time graph was a displacement and drew one of the graphs in Figure 1d. 6 PMTs did not answer this question.



a b c d

Figure 1. Incorrect examples of the item VG.

(Numerical): Explain which value it approaches using the table x | f(x)

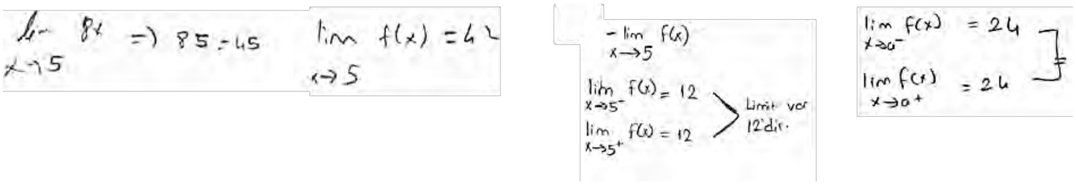
When the answers given by PMTs for this question were examined, it was seen that 2 PMTs answered correctly, 39 PMTs answered incorrectly and the answers of PMTs who gave wrong answers were examined. In this question, 2 PMTs gave the same wrong answer. For the values of x variable close to 5.00, finding which number the function $f(x)$ approaches, PMTs applied an approach by considering each t point instead of values close to 5.00 point, and presented a table as in Figure 2a. If the function $f(x)$ was not defined at 5.00, it would be difficult to find the limit of this function. Since ϵ was a positive number, 5.00 was the accumulation point and also there were infinitely many elements belonging to the definition set of the function in the each ϵ neighborhood, it should be approached with neighboring elements adjacent to 5.00 instead of each t point. On the other hand, 12 PMTs who showed a solution similar to Figure 2b said that they wrote 40.00 directly to the table, knowing that the result was 40.00, and did not know how to approach it. It was determined that PMTs had deficiencies in the concept and process as a result of the interviews. 9 PMTs who formed tables similar to Figure 2c and Figure 2d stated that they focused on "Two hours later..." in item text, therefore they approached x value to 2.00 point. In addition, it was seen that 6 PMTs had unrelated responses such as Figure 2e and 10 PMTs did not give any responses.

a b c d e

Figure 2. Incorrect examples of the item VN.

(Algebraic): Calculate the result using $\lim_{x \to a} f(x)$

When the responses given by PMTs for this question were examined, it was seen that 3 PMTs answered correctly, 38 PMTs answered incorrectly. When the answers of PMTs who gave wrong answers are examined, was is determined that 3 PMTs gave some correct responses and made a solution similar to Figure 3a. When the responses given were examined, it was seen that PMTs determined the function, took the right step in the concept and process, however made a mistake in mathematical calculation. 27 PMTs who gave the incorrect response had difficulty in identifying the functions and presented a solution as in Figure 3b, Figure 3c and Figure 3d. 11 PMTs did not respond.



a b c d

Figure 3. Incorrect examples of the item VA.

Question 2 (Graphical): It is desired to calculate the limit at 2.00 point of the function given in the Figure 4. According to this;

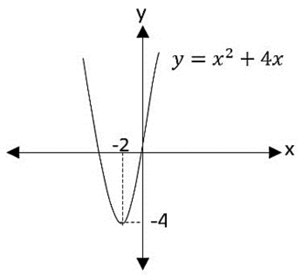


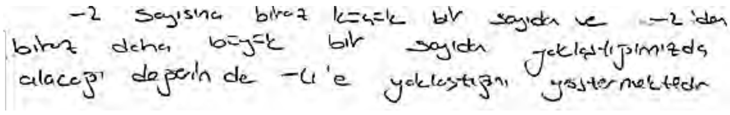
Figure 4. Graph of Question 2.

(Verbal): Explain what the limit of the function at 2.00 point means.

When the responses given by PMTs for this question were examined, it was seen that 14 PMTs answered correctly, 27 PMTs answered incorrectly. When the responses given by PMTs for this item were examined, it was seen that 7 PMTs gave responses similar to Figure 5a. As a result of the interview, PMTs stated that they did not read the item completely and focused directly on -2.00 point, since only -2.00 point was given on the x axis in the graph. On the other hand, one PMT who answered wrong used a statement like in Figure 5b. As a result of the interview, PMT stated that the derivative should be used when calculating the limit in the graphic representations of the functions and it was determined that the limit concept included in the geometric interpretation of the derivative caused concept confusion in PMT. One PMT used an expression as in Figure 5c. As a result of the interview, PMT stated that the point $(-2.00,4.00)$ is the peak point and for $x \to -2.00$ the function approaches-4.00. PMT stated that for the other points, the end points of the function should be examined. In this item, Since the left end point of the function approaches $-\infty$, the right end point approaches $+\infty$, PMT expressed that function have to approach $-\infty$ for $x < -2.00$; $+\infty$ for $x > -2.00$. It was observed that 18 PMTs did not respond this item.

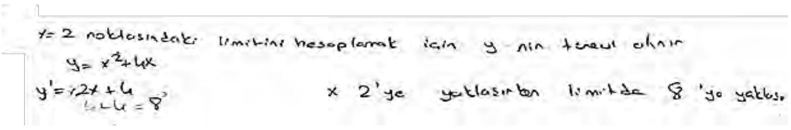
(Numerical): Explain which value it approaches using the table x | f(x)

When the responses given by PMTs for this question were examined, it was seen that 18 PMTs answered correctly, 23 PMTs answered incorrectly. When the answers of PMTs who gave wrong answers were examined, it was observed that the same 8 PMTs who responded partially correctly to Figure 5a showed an approach to -2.00 instead of 2.00 point and formed a table similar to Figure 6a. As a result of the interview with PMTs, it was determined that PMTs have not had any deficiencies in the concept and process, they have created a wrong table due to carelessness and calculation errors. It was seen that one PMT who responded partially correctly took the 2.00 point into consideration and found the result correct, however approached the correct with incorrect values due to the calculation error (Figure 6b). Only one of PMTs who responded incorrectly performed the derivative of the function and presented a table as in Figure 6c. In this question, it was seen that 9 PMTs gave irrelevant responses and 5 PMTs did not give any responses.



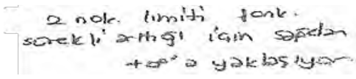
(When we approach -2.00 with a slightly smaller and slightly larger from-2.00, it is showed that the value will take approximates to -4.00)

a



(To calculate the limit on the point $x = 2.00$, the derivative of y is taken. When approaching x 2.00, the limit approaches 8.00.)

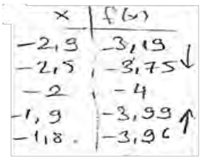
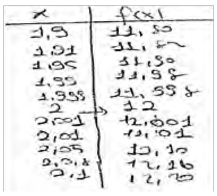
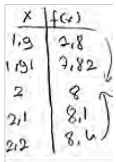
b



(Since the limit function increases continuously at 2.00, it approaches from right to $+\infty$.)

c

Figure 5. Incorrect examples of the item GV.

a b c

Figure 6. Incorrect examples of the item GN.

(Algebraic): Calculate the result using $\lim_{x \to a} f(x)$

When the answers given by PMTs for this question were examined, it was seen that 21 PMTs answered correctly, 20 PMTs answered incorrectly. It was determined that 6 PMTs who answered wrong, brought the x variable closer to -2.00 instead of 2.00 point (Figure 7a), and 4 PMTs reached the incorrect result due to the calculation error (Figure 7b). One of PMTs who responded incorrectly executed the operation by taking the derivative of the function (Figure 7c). Another PMT stated the result as $+\infty$. In the interview, this PMT stated that they gave this response due to the approach of the right end point to $+\infty$ (Figure 7d). It was observed that 8 PMTs did not give any responses.

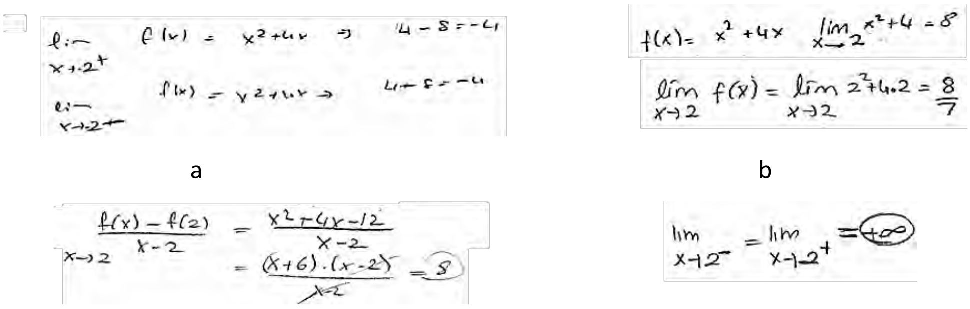
Question 3 (Algebraic): $f(x)$ function is given as

$$f(x) = \begin{cases} 2x\,;\ x < 1 \\ x + 1\,;\ x > 1 \end{cases}$$

Then, for $\lim_{x \to 1} f(x)$,

(Graphical): Present with graph.

When the answers given by PMTs for this question were examined, it was seen that 29 PMTs answered correctly, 12 PMTs answered incorrectly. 2 PMTs who answered wrong showed $x = 1.00$ point as defined (Figure 8a). 7 PMTs who responded incorrectly presented a graph similar to the graphs in Figure 8b and Figure 8c, and it was revealed that PMTs did not know how to draw the graphs of the lines $y = 2$x and $y = x + 1$. One PMT found the $f(x)$ values corresponding to the specific x value and showed these values in the graph point by point. PMT did not determine the points corresponding to each x value and did not draw the line consisting of these points (Figure 8d). It was observed that 2 PMTs did not give any response to this item.



a b c d

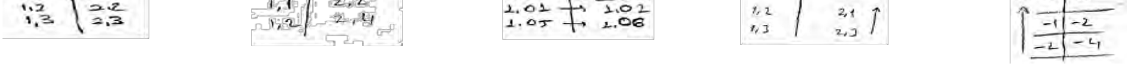
Figure 7. Incorrect examples of the item GA.

a b c d

Figure 8. Incorrect examples of the item AG.

(Numerical): Explain which value it approaches using the table x | f(x)

When the answers given by PMTs for this question were examined, it was seen that 24 PMTs answered correctly, 17 PMTs answered incorrectly. When the responses given by PMTs for this question were examined, it was seen that 7 PMTs made the same mistake and presented as defined at $x = 1.00$ (Figure 9a). It was determined that 3 PMTs created an incorrect table due to the calculation error. 2 PMTs who made a calculation error stated that $y = x + 1$ for $x < 1.00$; For $x > 1.00$, it processed $y = 2x$ line and as a result of the interview, it was determined that these 3 PMTs made such a mistake as a result of lack of attention (Figure 9b). One PMT made a calculation error for $x < 1.00$ and created a table similar to Figure 9c. 2 PMTs presented a table as in Figure 9d. As a result of the interview with these 2 PMTs, they stated that the function limit could not be mentioned since the function was not defined at the point $x = 1.00$ and it was determined that PMTs were conceptually deficient. It was observed that 3 PMTs created an unrelated table similar to Figure 9e, 2 PMTs did not give any responses.



a b c d e

Figure 9. Incorrect examples of the item AN.

(Verbal): Express verbally.

When the answers given by PMTs for this question are examined, it was observed that 35 PMTs answered correctly, 6 PMTs answered incorrectly**.** 2 PMTs who gave the wrong answer used a statement similar to Figure 10. 4 PMTs did not give any responses.

Fonksiyon 1'de tanımlı olmadığı için limitinden
söz edemeyiz

(Since the function is not defined in 1.00 point, we cannot talk about its limit.)

Figure 10. Incorrect examples of the item AV

Question 4 (Numerical): For a limit problem, the following table is presented and as a result of some values given to the variable x, the values taken by the $f(x)$ function are shown. Accordingly, what does the table present to us?

x	$f(x)$
1,9	3,80
1,91	3,82
1,95	3,90
1,99	3,98
1,999	3,998
2	4
2,001	4,002
2,01	4,02
2,05	4,10
2,08	4,16
2,1	4,20

Figure 11. Table of Question 4.

(Verbal): Express verbally.

When the answers given by PMTs for this question were examined, it was observed that 35 PMTs answered correctly, 6 PMTs answered incorrectly. It was seen that one PMT used expressions similar to Figure 12a. As a result of interview, this PMT stated that the limit concept was an approach. PMT stated that this approach would start with the function and stated that PMT gave priority to the function while expressing the table. However, finding the value that x is approaching based on the value to which $f(x)$ approaches may give erroneous or incomplete results. For example, the function $f(x) = x^2$ approaches 1.00 for $x \to 1.00$. On the other hand, if function $f(x) = x^2$ approaches 1.00, the value x is both 1.00 and -1.00 may approach. When the responses of 4 PMTs who responded incorrectly were examined, it was seen that expressions similar to Figure 12b were used.

Tablo bize f(x)'in 4'e yaklaşırken x değerinin
2'ye yaklaştığını anlatmaktadır.

(The table tells us that $f(x)$ approaches 4.00 while x approaches 2.00.)

a

x'in yaklaşık olduğu değerleri ve fonksiyon içindeki
x'in aldığı değerleri yansıtır.

(It express the values where x is approximate and the values of x in the function.)

x'e verdiğimiz değerler artarken f(x) 'de artmış. Yani
bu fonksiyon artan bir fonksiyondur.

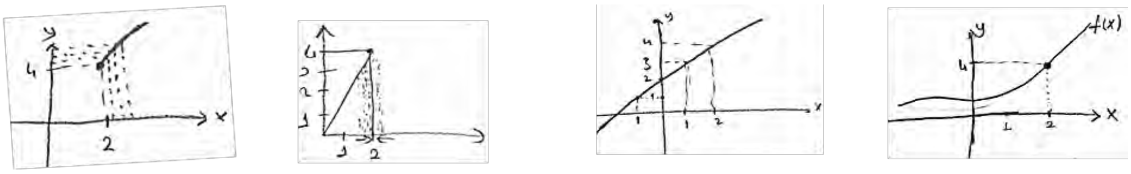
(While the values we gave to x increased, f increased. So this function is an increasing function.)

b

Figure 12. Incorrect examples of the item NV.

(Graphical): Present with graph.

When the answers given by PMTs for this question were examined, it was seen that 22 PMTs answered correctly, 19 PMTs answered incorrectly. 6 PMTs answered wrong, approached $x = 2.00$ point either from the right or from the left and drew a graph as in Figure 13a and Figure 13b. It was determined that 11 PMTs had difficulty in creating the function $f(x) = 2x$. It was also observed that they did not try to graph putting the x values given in the table in place on the coordinate axis (Figure 13c, Figure 13d). It was observed that 2 PMTs did not give any responses.



a b c d

Figure 13. Incorrect examples of the item NG

(Algebraic): Calculate the result using $\lim_{x \to a} f(x)$

When the answers given by PMTs for this question were examined, it was seen that 23 PMTs answered correctly, 18 PMTs answered wrong. 15 PMTs who responded incorrectly could not determine the function and presented a solution as in Figure 14. 3 PMTs did not give any responses.

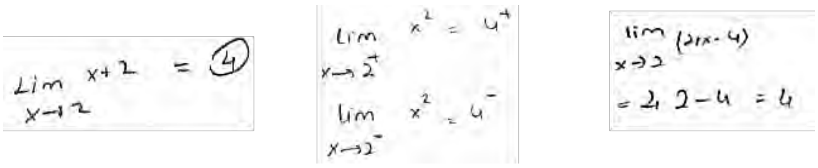


Figure 14. Incorrect examples of the item NA.

Findings regarding the code, category, theme and views that emerged in the transformation process between representations were presented in Table 1. When Table 1 is examined, it is seen that the PMTs had most difficulties in the verbal representation type questions. For verbal input representation type questions, it was observed that PMTs could not interpret verbal data (f = 37), could not determine the function (f = 27), could not know the concept of limit point (f = 20) and made mathematical operation errors (f = 3). For verbal input representation type questions, some PMTs' views regarding category of inability to interpret verbal data were presented as follows:

"Since Ahmet returned to the point where he started, he came back the way he had gone. So he has never gone."

"Ahmet waited where he was because he did not go to way during the break and did not move at all. Since he did not move, he went .00 km way."

For graphical input representation type questions, it was observed that the PMTs did not fully read the questions (f = 20), made a mathematical operation error (f = 5) and confused mathematical concepts (f = 3). For graphical input representation type questions, some PMTs' views regarding categories of confusing mathematical concepts and not knowing the limit point concept were presented as follows respectively:

"Limit is the approach. Derivative is also the approximate value at that point… The result of the derivative gives the limit."

Table 1.
Code, Category and Themes Related to Transformation Process between Representations.

Rep.		Thm	Category	Code	f_1	f_2
VERBAL	G	LRC	Inability to interpret verbal data	Taking an hour break	13	34
				Go back to where it started	8	
				Replacement	7	
	N	LRC	Inability to interpret verbal data	After running for two hours	9	39
		LSMK	Not knowing the concept of limit point	Not knowing how to approach	12	
				Faulty approach	2	
				Irrelevant answer	6	
	A	LSMK	Inability to determine the function	Incorrect function determination	27	38
		LA	Making a mathematical operation error	Incorrect calculation	3	
GRAPHICAL	V	LA	Not fully reading the question	Focus on the graph instead of question	7	27
		LSMK	Confusing mathematical concepts	Taking derivate instead of limit	1	
			Not knowing the concept of limit poir	Faulty approach	1	
	N	LA	Not fully reading the question	Focus on the graph instead of question	7	23
			Making a mathematical operation error	Incorrect calculation	1	
		LSMK	Confusing mathematical concepts	Taking derivate instead of limit	1	
			Not knowing the concept of limit point	Irrelevant answer	9	
	A	LA	Not fully reading the question	Focus on the graph instead of question	6	20
			Making a mathematical operation error	Incorrect calculation	4	
		LSMK	Confusing mathematical concepts	Taking derivate instead of limit	1	
			Not knowing the concept of limit poir	Faulty approach	1	
ALGEBRAIC	A	LSMK	Not knowing the concept of limit point	Showing undefined point as defined point	2	12
			Not drawing the function graph	Drawing graphics incorrectly	7	
				Not combining values shown as point	1	
	N	LSMK	Not knowing the concept of limit point	Showing undefined point as defined point	7	17
				No limit can be mentioned at undefined point	2	
				Irrelevant answer	3	
		LA	Making a mathematical operation error	Incorrect calculation	3	
	V	LSMK	Not knowing the concept of limit point	No limit can be mentioned at undefined point	2	6
NUMERICAL	V	LSMK	Not knowing the concept of limit point	Faulty approach	1	6
				Irrelevant answer	4	
	G	LSMK	Not knowing the concept of limit point	Incomplete approach	6	19
			Not drawing the function graph	Drawing graphics incorrectly	11	
	A	LSMK	Not determining the function	Determining incorrect function	15	18

LRC: Lack of Reading Comprehension; LSMK: Lack of Subject Matter Knowledge; LA: Lack of Attention
f_1: Frequency of codes other than empty answers; f_2: Frequency of total wrong including empty answers

“Point x = -2.00 has values just around the right and left. Because it's the peak. Then if we approach from the right and left, it becomes -4.00. But there is no other peak. So there is no other limit. If we look at the limit of x = 2.00 point, we can say that there is no limit. But if we are going to find the necessity, the answer is $+\infty$, since 2.00 is greater than -2.00 and the right side is increasing, that is, goes to $+\infty$“

For algebraic input representation type questions, it was observed that the PMTs could not know the concept of limit point (f = 16), could not draw the function graph (f = 8) and made mathematical operation errors (f = 3). For algebraic input representation type questions, PMT’s view regarding category of not knowing the limit point concept were presented as follows:

"Since the function is not defined at x = 1.00 point, we cannot talk about its limit."

For numerical input representation type questions, it was observed that the PMTs could not determine the function (f = 25), could not draw the function graph (f = 11) and could not know the concept of limit point (f = 11). For numerical input representation type questions, PMT’s view regarding category of not knowing the limit point concept were presented as follows:

”*The important thing for calculating the limit is the function. The value approximating the function gives us the limit ... Let's consider the equation $y = x + 2$. If y get closer to 5.00, then where should x approach? Of course, it should approach 3.00. So the limit of the function is 3.00*."

As a result of the analysis, it was observed that the PMTs had deficiencies in knowing the concept of limit point (f = 58), determining the function (f = 52), and interpreting verbal data (f = 37). It was revealed that PMTs who gave the wrong answers mostly had deficiencies in the concept and the process and could not fully understand the limit problems. It was seen that PMTs who proceeded towards the concept and process answered wrong due to mathematical operations errors and inattention. When the wrong answers were examined, it was observed that errors were gathered under the themes of "lack of subject matter knowledge” (f = 47) and "lack of reading comprehension" (f = 37) for verbal input representation type; under the theme of "lack of attention" (f = 28) for graphical input representation type; under the theme of "lack of subject matter knowledge" for algebraic (f = 24) and numerical (f = 37) input representation types.

Discussion, Conclusion and Implications

In this study, the errors encountered in the transformation process between representations by PMTs about the limit concept were investigated and the PMTs were found to have most difficulties in making transformations in the verbal representation type questions. When the wrong answers in the verbal input representation type were examined, it was observed that errors were mostly gathered under the themes of lack of subject matter knowledge and lack of reading comprehension. The PMTs either could not make sense or misunderstood the limit problems given by verbal representations, and they could not calculate the solution by transforming verbal representations into other types of representations. It was observed that the PMTs could not mostly interpret verbal data in the question that was asked to transform from verbal to graphical representation. For example, in the verbal item, although distance-time graph was requested, the statement “…he goes back to the point where he started…” led the PMTs to focus on the location-time graph, and the statement “… taking one hour break” caused them to draw on the y-axis. Although the area under the speed-time graph corresponds to the displacement, the fact that the PMTs’ responding the area under the distance-time graph as a displacement and calculating incorrect results may show that they had misconceptions. In the study conducted by Hale (1996) on misconceptions, students had difficulty in finding the displacement from the speed-time graph, could not choose the graphs suitable for verbal expressions, and could not make transformations between graphs on the same subject. In the transformation process from verbal to numerical representation, it was seen that the PMTs could not mostly know the concept of limit point. One of the mistakes made by the PMTs during the transformation process from verbal representation to numerical representation was that they approached 5.00 point by considering each t moment instead of considering ϵ neighboring values. If the function $f(x)$ had not been defined at 5.00 point, it would be difficult to estimate the value of this function with a table based on each t moment. In other words, ϵ being a positive number, because of the definition of the limit, 5.00 is an accumulation point. Hence, there are infinitely many elements belonging to the input domain of the function in the ϵ neighboring of this function. Therefore, instead of approaching 5.00 point by considering each t moments, approaching to this point with the elements in the neighborhood of ϵ will lead us to obtaining the limit of this function. The fact that numerical representations are the least used representation types in problem solving and that the PMTs are not being successful in such problems (Delice & Sevimli, 2010a) can be the reason of why the limit problems given with verbal representations could not be solved with numerical representations. In the transformation process from verbal to algebraic representation, it was seen that the PMTs could not mostly determine the function. The fact that PMTs tend to memorize the definition of functions rather than learning in detail (Polat & Şahiner, 2007) may be a reason for PMTs to have difficulty in determining the function. In addition, algebraic representation type was considered difficult to understand by PMTs (Kaya, 2017), and PMTs got away from the function's algebraic definition which is formal definition. These may be another reason that the limit problems given by the verbal representation cannot be solved by PMTs with algebra representation.

When the errors made in the solution of the questions which are graphical input representation type, it was seen that the errors are mostly gathered on the theme of lack of attention. It was determined that PMTs did not fully read the question and focused on the graphic instead of the question, then started to solve the question. For example, some PMTs who answered wrong were expressed that they did not fully read the expression of "...the limit at 2.00…" in the question sentence and they focused on -2.00 given on the x axis in the graph. For this reason, in the transformation from graphical to the other representations, operations were made based on the $x = -2.00$ point and errors occurred in the solution of the problem for each representation. In the transformation process from graphical to algebraic and numerical representation, it was observed that the PMTs made relatively less mistakes. In some studies, it was stated that PMTs made less mistakes in the transformation from graphical to numerical representation (Delice & Sevimli, 2010b) and to algebra representation (Elia & Spyrou, 2006). This may be due to the fact that the values given to the function for each x value in the items can be easily seen in the graph.

In this study, it was observed that fewer errors were made in the solution of questions with algebraic and numerical input representation type than the other representation types. When the errors were examined, it was determined that the errors were gathered under the theme of lack of subject matter knowledge. Although the number of the PMTs who could make transformations from verbal representations to numerical and algebraic representations (VN and VA) was not that high, there were quite high number of PMTs who could make transformations from numerical and algebraic representations to verbal representations (NV and AV). Considering that it is more comfortable to express a problem verbally (Yaman, 2010a), it can be explained why the PMTs made less errors in NS and CS. For example, although the function $f(x) = x^2$ approaches 1 for $x \to 1.00$, while function $f(x) = x^2$ approaches 1.00, the value x is both 1.00 and -1.00 may approach. In the solution of the questions with algebraic input representation type, it was observed that the PMTs could not mostly know the concept of limit point and could not draw the function. For example, although the function was not defined at x = 1.00 point, some PMTs emphasized that the limit of the function must be defined at the desired point. For this reason, they stated that the limit of the function cannot be mentioned at the point x = 1.00. However, it is sufficient that there is an accumulation point rather than a defined point. Therefore, it was determined that the PMTs were deficient in terms of concepts. In addition, it was observed that the PMTs could not represent an algebraic function in a coordinate system and could not draw their graphics. Zachariades, Christou and Papageorgiou (2002) noted that students had difficulties with establishing the relationship between algebraic and graphical representations of functions. The PMTs' preference to the algebraic representations could be explained by the fact that the instruction of analysis subject in universities and mathematical knowledge needed for learning analysis topics are being dominated by algebraic knowledge, and the analysis topics have been taught in the form of "definition-theorem-proof-applications, and test" approach, which does not use daily-life experiences (Delice & Sevimli, 2010b). These may be a reason for the PMTs to focus on the type of algebraic representation.

In this study, the PMTs were asked to solve given limit problems with different types of representations, and it was found that the PMTs had difficulties in some types of representation and made some mistakes during the representation transformation processes. It was observed that errors were mostly gathered under the themes of lack of subject matter knowledge and lack of reading comprehension for verbal input representation type; under the theme of lack of attention for graphical input representation type; under the theme lack of subject matter knowledge for algebraic and numerical input representation types. The PMTs' difficulties in the representation transformation processes and solving problem by a single representation type indicated that their conceptual understanding levels did not sufficiently develop (Lesh & Doerr, 2003). In addition, the use of process-based teaching approaches that involve students in the process and ensure their active participation instead of traditional methods in concept teaching, transferring mathematical knowledge and skills to daily life will enable more meaningful learning (Çil, Kuzu, & Şimşek, 2019). Hence, multiple representations can be used when teaching concepts and solving problems in order to improve the PMTs' conceptual understanding levels and cognitive process skills. In addition, the course content can be enriched by including various technological processes such as digital storytelling, digital modeling and animations and real-life problems that enable representation transformation.

Turkish Version

Giriş

Kendi içinde ve diğer disiplinlerle ilişkili olan ve birbiri üzerine konumlandırılmış konulardan oluşan matematik, öğrenme güçlüğü çekilen ve zor öğrenilen konular yüzünden zayıf temeller üzerine inşa edilebilmektedir. Bu durum ise ilişkili konuların öğrenilmesinde ve öğretilmesinde zorluklarla karşılaşılmasına sebep olabilmektedir. Güçlü bir matematiksel düşünme becerisi gerektiren ve matematiğin en temel kavramları arasında yer alan limit kavramı, matematikteki pek çok önemli konu içerisinde yer almakta ve problemlere çözüm getirmeden ziyade birleştirici bir rolünün olduğu önemle vurgulanmaktadır (Artigue, 2000; Cornu, 1991).

Literatürde, limit, dinamik (informal) ve statik (formal) olmak üzere iki şekilde kavramsallaştırılmıştır (Cornu, 1991; Tall & Vinner, 1981). Tall ve Vinner (1981) tarafından tanımlanan dinamik form

"$x \to a \Rightarrow f(x) \to L$ (sözel olarak "x'ler a'ya yaklaşırken $f(x)$'ler L'ye yaklaşır)"

ifadesine dayanmaktadır. Statik form ise $\delta - \epsilon$ tanımı olarak da bilinen ve birçok matematikçi tarafından kabul edilen

$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \forall \epsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ vardır $\ni |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$ olur"

ifadesini kastetmektedir. Yapılan çalışmalar incelendiğinde, öğrencilerin çok azının formal tanıma yönelik kesin bir anlama geliştirdikleri görülmüştür (Quesada, Einsporn, & Wiggins, 2008). Öğrencilerin limiti formal olarak kavramsallaştırmada zorlanmalarının nedenlerinden biri, limitin formal tanımındaki "her" ve "en az bir" niceleyicileridir (Cottrill et al., 1996; Tall & Vinner, 1981). Tall ve Vinner (1981), öğrencilerin limitin formal tanımında yer alan "her" ve "en az bir" niceleyicilerini anlamlandıramadıklarını, bu nedenle limitin varlığını ispat etmede zorlandıklarını belirtmiştir. Bu durum ise limitin formal tanımı üzerine inşa edilen türev, integral ve Taylor serileri gibi birbiri üzerine konumlandırılmış kavramların tam olarak anlamlandırılamamasına neden olabilmektedir (Kuzu, 2017). İleri düzeyde matematiksel düşünebilme becerisine sahip olmak için öncelikle soyut düşünebilme becerisine sahip olmak gereklidir ve limit kavramı için bu durum formal tanımının kavranması ile mümkündür. Bu nedenle limit kavramının formal ve informal tanımları üzerinde durulmalı ve nasıl anlamlandırıldığı araştırmalıdır. Delice ve Sevimli (2016) tarafından yapılan çalışmaya göre, matematiksel bilgilerin anlamlandırılması, kullanılması ve aktarılabilmesi için ise matematik diline hâkim olmak gereklidir. Bu dili oluşturan unsurlar ise semboller, tablolar, grafikler, şekiller vb. temsillerdir.

Temsiller; matematiksel fikir, olgu, nesne veya gerçeklerin düzenlenmesi, kaydedilmesi, aktarılması, modellenmesi, fen veya sosyal bağlamlar üzerinden yorumlanabilmesini sağlayan gösterim biçimleridir (NCTM, 2000). Bir matematiksel nesnenin birden fazla temsili vardır ve bu temsiller arasında kurulacak ilişkiler, kavramsal anlama için bir gerekliliktir (Hiebert & Carpenter, 1992). Örneğin, limit gibi üst düzey düşünme becerisi gerektiren kavramların formal ve informal tanımında farklı temsillerden yararlanılması kavramın öğrenilmesi açısından fayda sağlayacaktır. Amerikan Ulusal Araştırma Konseyi (NRC, 1989), matematiği öğrenmek ve uygulamak için matematiksel ilişkileri yorumlayabilmenin, sembolleri kullanabilmenin ve uygun matematiksel dili seçebilmenin gerekli olduğunu belirtmiştir. Ayrıca, problem durumunu açıklamak ve uygun materyalleri geliştirmek için de bu dilin farklı temsil türleri (grafik, tablo, semboller, diyagramlar, sözel ifadeler veya diğer temsiller) ile kullanılmasına bağlı olduğunu vurgulamıştır (NRC, 1989; cite in: Schoenfeld, 1992, p.338).

Ayrıca, Amerika'daki Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (NCTM) tarafından 1989 yılında yayınlanan "Okullar için program ve değerlendirme standartları"nda, çoklu temsillerin önemine vurgu yapılmıştır (NCTM, 1989). Çoklu temsiller için literatürde farklı tanımlamalar mevcuttur. Keller ve Hirsch (1998) çoklu temsilleri, bir matematiksel kavrama yönelik farklı bilgi, anlam ve içeriklerin bir arada ilişkilendirilerek sunulmasına fırsat sağlayan araçlar olarak tanımlarken; Duval (1993) ise Matematiksel nesneleri (fiziksel veya zihinsel olarak) ifade edebilmek için kullanılan işaret ve simgelerden oluşan özel bir dil olarak belirtmiştir. Goldin ve Kaput (1996) ise çoklu temsilleri, imge veya somut nesneler ile bir başka şeyin sembolize edilmesini sağlayan karakteristik düzenleme olarak tanımlamıştır. Prain ve Waldrip (2006)'e göre çoklu temsiller, bir kavramın sözlü, grafiksel, matematiksel temsiller gibi farklı temsil türleri tarafından tekrar tekrar temsil edildiği ve öğrencilerin aynı konsepte birkaç kez maruz kaldıkları anlamına gelir.

Temsiller problem çözme sürecinde üstlendikleri rollere göre sınıflandırılabilirler. Dufour-Janvier, Bednarz ve Belanger (1987), temsil kavramının en genel anlamda iç (internal) ve dış (external) temsiller olarak sınıflandırılabileceğini ifade etmiştir. İç temsiller; bireyin etrafında gördüğü, formülleştirdiği ve kendi bilgisi çerçevesinde yeniden yapılandırdığı zihinsel şekil, bilgi veya imgelerden oluşan yapılardır (Goldin & Kaput, 1996). Dış temsiller ise matematiksel kavram ve fikirlerin anlaşılması ve aktarılmasını sağlayan gözlemlenebilir araçlardır (Goldin, 1998). Dış temsillere örnek olarak sözel temsil, grafik temsili, cebirsel ve nümerik temsil verilebilir (Girard, 2002; Kendal & Stacey, 2003). İç ve dış temsil sistemler birbirinden bağımsız olmayıp kendi aralarında bir ilişki ağına sahiptir. İç temsillere kıyasla matematik eğitimindeki çalışmaların büyük çoğunluğu dış temsilleri teorik çerçeve kabul etmektedir (Delice & Sevimli, 2016). Bunun nedeni ise, matematiğin tüm konularında dış temsil türlerinden en az biri ile karşılaşılıyor olması ve birçok matematiksel kavramın bu temsiller üzerinden daha kolay açıklanabilmesidir (Kendal & Stacey, 2003). Bu nedenle dış temsillere daha çok vurgu yapılmış, Goldin ve Kaput'un (1996) formal matematiğin temel sunum biçimleri olarak gösterdiği ve "Matematikte Temsil Sistemleri" olarak adlandırılan grafik, nümerik, cebirsel temsiller üzerinde durulmuştur. "Üçler Kuralı" yaklaşımı olarak vurgu yapılan bu temsil türlerine, sözel temsillerin de eklenmesi ile "Dörtler Kuralı" yaklaşımı ortaya çıkmıştır (Girard, 2002; Kendal & Stacey, 2003). Ayrıca, farklı sistemler arasında veya aynı sistemdeki farklı temsil türleri arasında bir geçiş varsa "temsiller arası dönüşüm"; aynı sistem ve aynı temsil çeşidi içerisinde bir geçiş varsa "temsil içi geçiş" olarak belirtilmiştir (Goldin, 1998). Literatürde limit konusu üzerine yapılan çalışmalar incelendiğinde çoğunlukla yaşanan zorluklara, kavram yanılgılarına ve farklı öğretim yöntemlerinin öğrenme sürecine etkisine odaklanılmıştır (Akbulut & Işık, 2005; Bezuidenhout, 2001; Cornu, 1991; Davis & Vinner, 1986; Sierpinska, 1987; Szydlik, 2000; Tall & Vinner, 1981; Williams, 1991).

Bu araştırmada, öğrencilerin büyük çoğunluğu tarafından öğrenilmesinde güçlük çekilen limit kavramı, çoklu temsil yaklaşımı temelinde ele alınmıştır. Matematik öğretmeni adaylarının limit kavramına yönelik kullandıkları temsiller, dış temsillere göre belirlenmiş ve temsiller arası dönüşüm sürecine ilişkin karşılaşılan hatalar araştırılmıştır.

Yöntem

Araştırma Modeli

Bu araştırma, mevcut olan bir durum kendi koşulları içerisinde betimlenmeye çalışıldığından nitel araştırma modellerinden durum çalışması modeli ile tasarlanmıştır. Durum çalışması modeli, sınırlı bir sistemin derinlemesine betimlenmesi ve incelenmesi olarak tanımlamaktadır (Merriam & Tisdell, 2015).

Katılımcılar

Bu araştırmanın katılımcılarını 2018-2019 eğitim öğretim yılı güz döneminde Türkiye'nin İç Anadolu Bölgesindeki bir devlet üniversitesinin eğitim fakültesinde öğrenim görmekte olan ve lisans öğretim programında limit kavramı yer alan 41 matematik öğretmeni adayı (Kadın:27; Erkek:14) oluşturmaktadır. İlgili üniversitenin seçiminde basit seçkisiz örnekleme yöntemi kullanılırken; bu okullardaki öğretmen adaylarının belirlenmesinde amaçsal örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Amaçlı örnekleme yöntemi olasılığa dayalı olmayan bir örnekleme yöntemidir ve araştırmacı örneklemi kendi belirlediği ölçütlere göre belirler (Cohen, Manion, & Morrison, 2000, p.103). Ölçüt örnekleme ise önceden belirlenmiş bazı önemli kriterleri karşılayan vakaların seçilmesini içerir (Patton, 2002, p.238). Bu araştırmada, adayların lisans öğrenimi süresince limit konusunu görmüş olmaları ölçüt olarak alınmıştır.

Verilerin Toplanması ve Analizi

Veri toplama aracı olarak araştırmacı tarafından geliştirilen ve toplam dört açık uçlu sorudan oluşan "Limit Temsil Dönüşüm Testi (LTDT)" kullanılmıştır. Bu testteki her bir soru sözel (S), grafik (G), cebir (C) ve nümerik (N) temsillerden yalnız biri ile hazırlanmış ve temsiller arası dönüşümü incelemek amacıyla birbirinden farklı üç soru ile desteklenerek toplam 12 açık uçlu sorudan oluşmuştur. İlgili problemin ifadesi girdi temsili, çözümü ise çıktı temsili olarak nitelendirilmiştir. Örneğin SG biçiminde gösterilen bir soru sözel temsil ile hazırlanmış ve katılımcıların grafik temsil ile cevaplaması beklenmiştir. Bu çalışmada, adayların limit kavramına yönelik temsiller arası dönüşüm sürecine ilişkin karşılaşılan sorunlar belirlenmek istendiğinden testteki her bir soru ayrı ayrı incelenmiş ve kavram, süreç, cevap doğru ise "1 (Doğru)", diğer durumlarda ise "0 (Yanlış)" olarak kodlanmıştır. Elde edilen veriler, TAP (Test Analysis Program) ile analiz edilmiş ve Kuder-Richardson 20 (KR-20) güvenirlik katsayısı .81 olarak bulunmuştur. Ortalama madde güçlük indeksi .46; ortalama ayırt edicilik indeksi .56; ortalama nokta çift serili korelasyon değeri ise .46 olarak hesaplanmıştır. Diğer taraftan, adaylardan elde edilen veriler içerik analizi ile çözümlenmiş ve elde edilen bulgular yorumlanmıştır. İçerik analizi yönteminde, elde edilen verilerin anlamlandırılarak belirli bir şema dâhilinde oluşturulması, kod ve kategorilerin ortaya çıkarak somutlaşması sağlanmaktadır (Yaman, 2010b). Bu süreçte açıklamaları yetersiz veya farklılık gösteren ve işlem hatası dışında yanlış cevap veren adaylara yapılandırılmamış görüşme formu uygulanmıştır. Görüşme formu adaylara yüz yüze uygulanmış ve verilerin katılımcı ismi belirtilmeden kullanılacağı konusunda güvence verilmiştir. Görüşmeler ortalama 25.00-30.00 dakikada sürecek şekilde yapılmış, ses kayıt cihazı ile kayıt altına alınmış ve katılımcılara tekrar dinletilerek onaylatılmıştır. Bu süreçte katılımcıları doğrudan etkileyecek jest ve mimiklerden kaçınılmıştır. Bu kapsamda her bir veri kendi içerisinde analiz edilmiş ve matematik eğitimi alanında uzman iki akademisyen tarafından kodlar ve kategoriler birbirinden bağımsız şekilde katılımcıların verdiği cevaplardan çıkarılmıştır. Ortaya çıkarılan kategori altındaki kodların ilgili kategoriyi, kategorilerin de ilgili temayı temsil edip etmediğini belirlemek amacıyla Kendall W uyum katsayısı hesaplanmış ve kategoriler için .91, temalar için ise .93 olarak bulunmuştur. Kendall W uyum katsayısının en az .80 olması gerektiği ifade edilmiştir (Howell, 2013; Salkind, 2010; Szymanski & Linkowski, 1993). Görüş ayrılıklarına neden olan kodlar ise araştırmacılar tarafından tartışılmış ve ortak bir yargı ile uygun kategori ve tema altına yerleştirilmiştir. Ortaya çıkan kategorilerin "Okuduğunu anlama eksikliği", "Alan bilgisi eksikliği" ve "Dikkatsizlik" şeklinde üç tema altında toplandığı görülmüştür. Okuduğunu anlama, hem metindeki bilgiler hem de okuyucunun yorumlarını kapsayan, yazarın vermek istediği mesajların mantıksal olarak yapılandırıldığı etkin bir süreç olarak tanımlanabilir (Radojevic, 2006, p.14). Alan bilgisi, alanı oluşturan yapıların ve kavramsal olarak organize eden prensiplerin bilgisidir (Shulman, 1986). Dikkatsizlik ise, bir işi özen göstermeden gelişigüzel yapma ya da duygu ve düşünceyi bir konu üzerinde toplayamama durumu olarak tanımlanabilir.

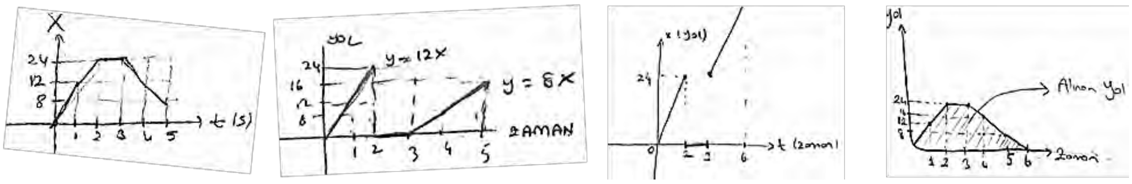
Bulgular

Bu bölümde matematik öğretmeni adaylarının limit problemlerine yönelik temsiller arası dönüşüm sürecine ilişkin bulgular örnekler halinde sunulmuştur.

Soru 1 (Sözel): Saatte 12.00 km/s sabit hızla koşmaya başlayan Ahmet iki saat koştuktan sonra bir saatlik mola veriyor. Molanın ardından 8.00 km/s sabit hızla koşarak başladığı noktaya geri dönüyor. Buna göre, Ahmet koşusunun 5.00. saatine yaklaşırken toplam kaç kilometrelik yolu tamamlamaya başlamıştır.

(Grafik): Yol - Zaman grafiği ile gösteriniz.

Bu soru için adayların verdikleri cevaplar incelendiğinde 7 adayın doğru; 34 adayın ise yanlış cevap verdiği görülmüş ve yanlış cevap veren adayların cevapları incelenmiştir. Soru cümlesinde yer alan *"… başladığı noktaya geri dönüyor"* ifadesi adaylarda ortak bir yanılgıya sebep olmuş ve 8 aday konum-zaman grafiğine odaklanarak bir saatlik molanın ardından ki grafiği Şekil 1a'ya benzer çizmiştir. Burada adaylar t = 3.00 anından itibaren aşağı yönlü bir grafik çizmiştir. Diğer taraftan 13 aday ise soru cümlesinde yer alan "… *bir saatlik mola veriyor*" ifadesine odaklanarak Şekil 1b ve Şekil 1c'deki gibi bir grafik çizmiştir. Adaylar burada ise, t = 2.00 ve t = 3.00 saatleri arasındaki grafiği y = .00 ekseni üzerinde çizmiştir. 7 aday Şekil 1d'de yer alan yol zaman grafiklerden birini çizmiş ve grafiğinin altında kalan alanı yer değiştirme olarak düşünmüştür. Oysaki hız zaman grafiğinin altında kalan alan yer değiştirmeyi vermektedir. 6 aday ise bu soruya hiçbir cevap vermemiştir.

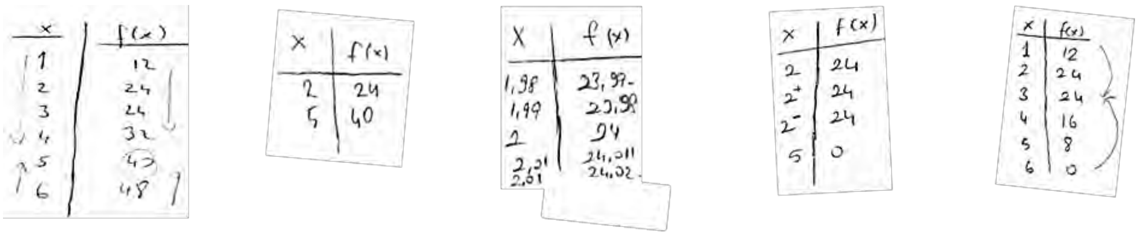


a b c d

Şekil 1. SG sorusuna ait yanlış çözüm örnekleri.

(Nümerik): x|f(x) tablosu ile hangi değere yaklaştığını gösteriniz.

Bu soru için adayların verdikleri cevaplar incelendiğinde 2 adayın doğru; 39 adayın ise yanlış cevap verdiği görülmüş ve yanlış cevap veren adayların cevapları incelenmiştir. 2 aday bu sorunun çözümünde, x değişkeninin 5.00'a yakın değerlerine karşılık $f(x)$ fonksiyonunun alacağı değerlerin hangi sayıya doğru bir yaklaşma içinde olduğunu bulurken 5.00'a yakın değerler yerine her bir t anını göz önüne alarak yaklaşma uygulamış ve Şekil 2a'daki gibi bir tablo sunmuştur. Eğer bu soruda $f(x)$ fonksiyonu 5.00 noktasında tanımlı olmasaydı yapılan bu yaklaşımla fonksiyonun limitini bulmak zor olacaktı. ϵ bir pozitif sayı ve 5.00 noktası fonksiyonun bir yığılma noktası olmak üzere her ϵ komşuluğunda fonksiyonun tanım kümesine ait sonsuz çoklukta eleman bulunduğundan 5.00 noktasına her bir t anı yerine ϵ komşuluğundaki elemanlar ile yaklaşmak gerekmektedir. Diğer taraftan 12 aday, Şekil 2b'ye benzer bir çözüm sergilemiş ve yapılan görüşmeler sonucunda adayların kavram ve süreçte eksiklikleri olduğu tespit edilmiştir. Bu adaylar, limit sorusunun sonucunun 40.00 olduğunu bildiği için tabloya doğrudan 40.00 yazdığını, nasıl yaklaşım yapacağını bilmediğini söylemiştir. Şekil 2c ve Şekil 2d'ye benzer tablolar oluşturan 9 aday ise soruda verilen "… *Ahmet iki saat koştuktan sonra…*" ifadesine yoğunlaştıklarını ve bu yüzden x değerini 2.00 noktasına yaklaştırdıklarını belirtmiştir. Ayrıca, 6 adayın Şekil 2e'deki gibi ilgisiz cevap verdiği, 10 adayın ise hiçbir cevap vermediği görülmüştür.

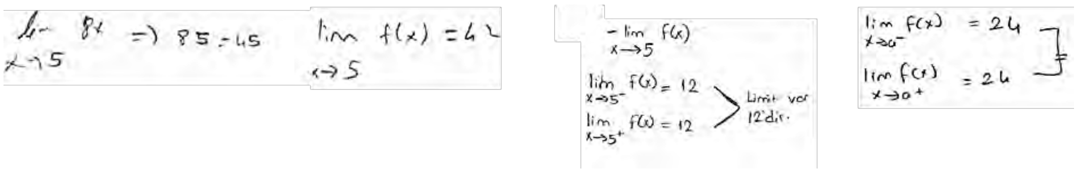


a b c d e

Şekil 2. SN sorusuna ait yanlış çözüm örnekleri.

(Cebir): $\lim_{x \to a} f(x)$ ifadesi ile sonucu hesaplayınız.

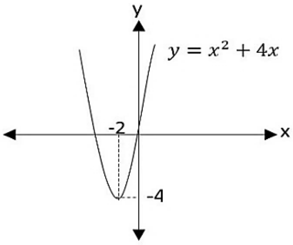
Bu soru için adayların verdikleri cevaplar incelendiğinde 3 adayın doğru; 38 adayın ise yanlış cevap verdiği görülmüştür. Bu soru için yanlış cevap veren adayların cevapları incelendiğinde 3 adayın Şekil 3a'ya benzer bir çözüm yaptığı, adayların fonksiyonu doğru belirledikleri, kavram ve süreçte de doğru ilerledikleri ancak işlem hatası yaptığı görülmüştür. Yanlış cevap veren 27 aday fonksiyonu belirlemede güçlük yaşamış ve Şekil 3b, Şekil 3c ve Şekil 3d'deki gibi bir çözüm sunmuştur. 8 aday ise hiçbir cevap vermemiştir.



a b c d

Şekil 3. SC sorusuna ait yanlış çözüm örnekleri.

Soru 2 (Grafik): Grafikte verilen fonksiyonun 2.00 noktasındaki limitinin hesaplanması isteniyor. Buna göre;



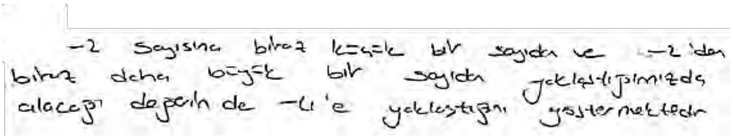
Şekil 4. Soru 2'ye ait grafik.

Bu soru için adayların verdikleri cevaplar incelendiğinde 14 adayın doğru; 27 adayın ise yanlış cevap verdiği görülmüştür Bu soru için adayların verdikleri yanlış cevaplar incelendiğinde 7 adayın Şekil 5a'ya benzer bir cevap verdiği görülmüştür. Yapılan görüşme sonucunda adaylar, soruyu tam okumadıklarını ve grafikte x ekseni üzerinde sadece -2.00 verildiği için doğrudan -2.00'a odaklandıklarını belirtilmiştir. Diğer taraftan yanlış cevap veren 1 aday Şekil 5b'deki gibi bir ifade kullanmıştır. Yapılan görüşme sonucunda aday, fonksiyonların grafik gösterimlerinde limit hesaplarken türevin kullanılması gerektiğini belirtmiş ve türevin geometrik yorumunda yer alan limit kavramının adayda kavram kargaşasına neden olduğu belirlenmiştir. 1 aday ise Şekil 5c'deki gibi bir ifade kullanmıştır. Yapılan görüşme sonucunda aday $(-2.00,4.00)$ noktasının tepe noktası olduğunu ve $x \to -2.00$ için fonksiyonun -4.00'a yakınsadığını belirtmiştir. Aday diğer noktalar için ise fonksiyonun uç noktalarına bakılması gerektiğini ifade etmiştir. Bu soruda fonksiyonun sol uç noktasının $-\infty$ a; sağ uç noktasının ise $+\infty$ yaklaşması nedeniyle aday $x < -2.00$ için fonksiyonun $-\infty$ a; $x > -2.00$ için $+\infty$ a yaklaşması gerektiği belirtmiştir. Bu soruya 18 adayın ise hiçbir cevap vermediği görülmüştür.

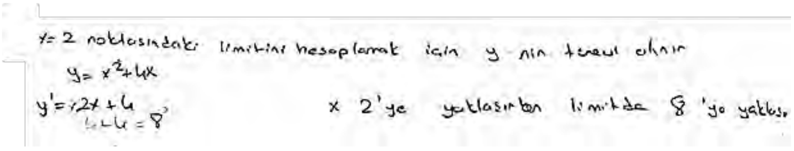
Bu soru için adayların verdikleri cevaplar incelendiğinde 18 adayın doğru; 23 adayın ise yanlış cevap verdiği görülmüştür. Yanlış cevap veren adayların verdikleri cevaplar incelendiğinde Şekil 5a'ya benzer cevap veren aynı 7 adayın yine 2.00 noktası yerine -2.00 noktasına yaklaşım sergilediği ve Şekil 6a'ya benzer bir tablo oluşturduğu görülmüştür. Adaylarla yapılan görüşme sonucunda adayların kavram ve süreçte eksikliklerinin olmadığı soruyu tam okumadıklarından dolayı yanlış bir tablo oluşturduğu belirlenmiştir. 1 adayın 2.00 noktasını dikkate aldığı, sonucu da doğru bulduğu ancak işlem hatası nedeniyle doğru sonuca yanlış değerler ile yaklaştığı görülmüştür (Şekil 6b). Yanlış cevap veren diğer 1 aday ise fonksiyonun türevini alarak işlemi yürütmüş ve Şekil 6c'deki gibi bir tablo sunmuştur. Bu soruda 9 adayın çözüm ile ilgisiz cevap verdiği, 5 adayın ise hiçbir cevap vermediği görülmüştür.

Bu soru için adayların verdikleri cevaplar incelendiğinde 21 adayın doğru; 20 adayın ise yanlış cevap verdiği görülmüştür. Yanlış cevap veren 6 adayın x değişkenini 2.00 noktası yerine yine -2.00 noktasına yaklaştırdığı (Şekil 7a), 4 adayın ise işlem hatası nedeniyle yanlış sonuca ulaştığı belirlenmiştir (Şekil 7b). Yanlış cevap veren adaylardan biri fonksiyonun türevini alarak işlemi yürütmüştür (Şekil 7c). Bir diğer aday ise sonucu $+\infty$ olarak ifade etmiştir. Yapılan görüşmede fonksiyonun sağ uç noktasının $+\infty$ a yaklaşması nedeniyle bu şekilde bir çözüm yaptığını belirtmiştir (Şekil 7d). 8 adayın ise hiçbir cevap vermediği görülmüştür.

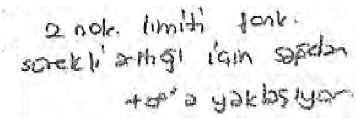
(Sözel): Fonksiyonun 2.00 noktasındaki limitinin ne anlama geldiğini ifade ediniz.



a



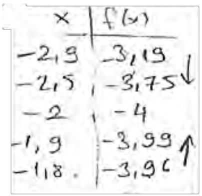
b

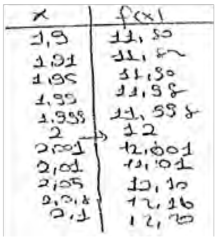


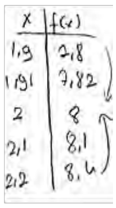
c

Şekil 5. GS sorusuna ait yanlış çözüm örnekleri.

(Nümerik): x|f(x) tablosu ile hangi değere yaklaştığını gösteriniz.



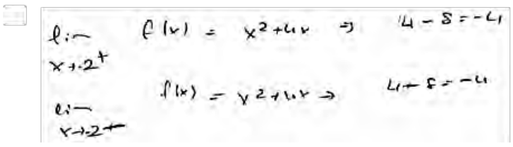


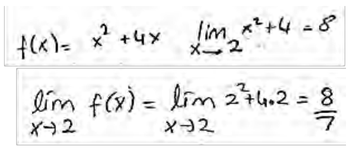


a b c

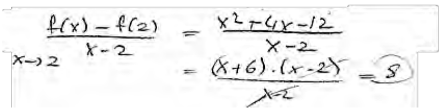
Şekil 6. GN sorusuna ait yanlış çözüm örnekleri.

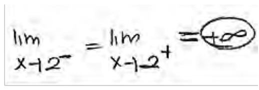
(Cebir): $\lim_{x \to a} f(x)$ ifadesi ile sonucu hesaplayınız.





a b





c d

Şekil 7. GC sorusuna ait yanlış çözüm örnekleri.

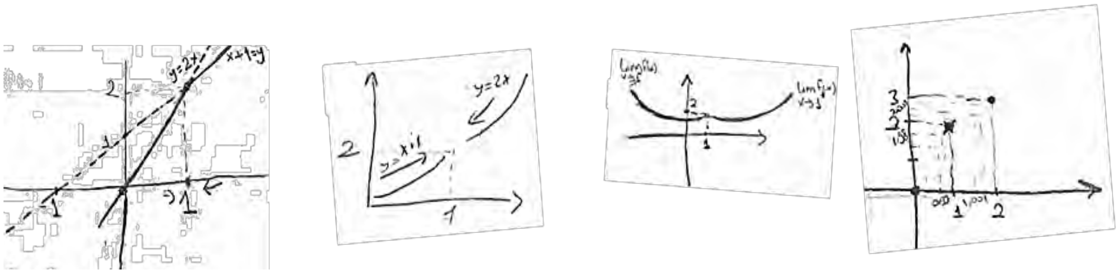
Soru 3 (Cebir): $f(x)$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} 2x\ ;\ x < 1 \\ x + 1\ ;\ x > 1 \end{cases}$$

şeklinde veriliyor. Buna göre $\lim_{x \to 1} f(x)$ limitini

(Grafik): Grafik ile gösteriniz.

Bu soru için adayların verdikleri cevaplar incelendiğinde 29 adayın doğru; 12 adayın ise yanlış cevap verdiği görülmüştür. Yanlış cevap veren 2 aday fonksiyon grafiğinde $x = 1.00$ noktasını tanımlı olarak göstermiştir (Şekil 8a). Yanlış cevap veren 7 aday Şekil 8b ve 8c'de yer alan grafiklere benzer bir grafik çizmiş ve adayların $y = 2x$ ve $y = x + 1$ doğrularına ait grafikleri nasıl çizeceklerini bilmedikleri ortaya çıkmıştır. Bir aday ise belirli x değerine karşılık gelen $f(x)$ değerlerini bulmuş ve bu değerleri grafikte noktasal olarak göstermiştir. Her x değerine karşılık gelen noktaları belirleyip bu noktaların birleşiminden oluşan doğruyu çizmemiştir (Şekil 8d). Bu soruya 2 adayın ise hiçbir cevap vermediği görülmüştür.

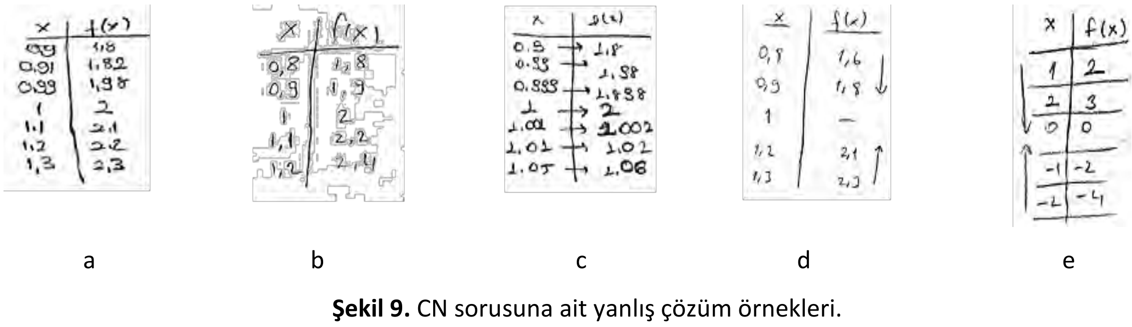


a b c d

Şekil 8. CG sorusuna ait yanlış çözüm örnekleri.

(Nümerik): x|f(x) tablosu ile hangi değere yaklaştığını gösteriniz.

Bu soru için adayların verdikleri cevaplar incelendiğinde 24 adayın doğru; 17 adayın ise yanlış cevap verdiği görülmüştür. Yanlış cevap veren adayların oluşturdukları tablolar incelendiğinde 7 adayın aynı şekilde hata yaptığı ve fonksiyonu $x = 1.00$ noktasında tanımlı olarak ele aldığı görülmüştür (Şekil 9a). 3 adayın ise işlem hatasından dolayı yanlış bir tablo oluşturduğu belirlenmiştir. İşlem hatası yapan 2 aday $x < 1$ için $y = \mathrm{x} + 1$ doğrusunu; $x > 1.00$ için ise $y = 2x$ doğrusunu işleme almış ve yapılan görüşme sonucunda bu 2 adayın dikkatsizlik sonucu böyle bir hataya düştüğü tespit edilmiştir (Şekil 9b). Bir aday ise $x < 1.00$ için işlem hatası yapmış ve Şekil 9c'ye benzer bir tablo oluşturmuştur. 2 adayın ise Şekil 9d'deki gibi bir tablo sunduğu görülmüştür. Bu adaylar ile yapılan görüşme sonucunda fonksiyon $x = 1.00$ noktasında tanımlı olmadığı için fonksiyonunu limitinden söz edilemeyeceğini belirtilmiş ve kavramsal olarak eksik oldukları belirlenmiştir. 3 adayın Şekil 9e'ye benzer ilgisiz bir tablo oluşturduğu, 2 adayın ise hiçbir cevap vermediği görülmüştür.

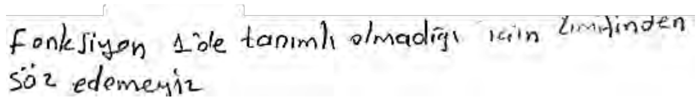


a b c d e

Şekil 9. CN sorusuna ait yanlış çözüm örnekleri.

(Sözel): Sözel olarak ifade ediniz.

Bu soru için adayların verdikleri cevaplar incelendiğinde 35 adayın doğru; 6 adayın ise yanlış cevap verdiği görülmüştür. Yanış cevap veren 2 aday Şekil 10'a benzer bir ifade kullanmıştır. 4 aday ise hiçbir cevap vermemiştir.



Şekil 10. CV sorusuna ait yanlış çözüm örneği.

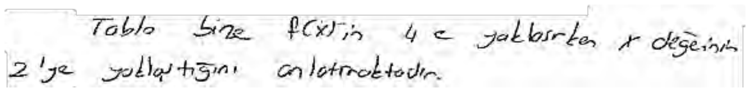
Soru 4 (Nümerik): Bir limit problemi için yandaki tablo oluşturulmuş ve x değişkenine verilen bazı değerler sonucunda $f(x)$ fonksiyonunun aldığı değerler gösterilmiştir. Buna göre, tablonun bize sunduğu limiti,

x	$f(x)$
1,9	3,80
1,91	3,82
1,95	3,90
1,99	3,98
1,999	3,998
2	4
2,001	4,002
2,01	4,02
2,05	4,10
2,08	4,16
2,1	4,20

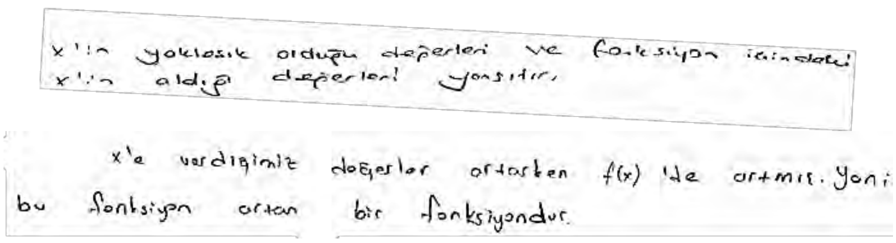
Şekil 11. Soru 4'e ait tablo.

(Sözel): Sözel olarak ifade ediniz.

Bu soru için adayların verdikleri cevaplar incelendiğinde 35 adayın doğru; 6 adayın ise yanlış cevap verdiği görülmüştür. Yanlış cevap veren 1 aday Şekil 12a'daki gibi bir ifade kullanmıştır. Bu bir aday ile yapılan görüşme sonucunda aday limit kavramını bir yaklaşma olarak bildiğini ifade etmiştir. Ancak, aday bu yaklaşmanın fonksiyon ile başlayacağını dile getirmiş ve tabloyu ifade ederken önceliği fonksiyona verdiğini belirtmiştir. Oysaki $f(x)$ fonksiyonun yaklaştığı değerden yola çıkılarak x'in yaklaştığı değeri bulmak hatalı ya da eksik sonuçlar verebilir. Örneğin, $x \to 1.00$ için $f(x) = x^2$ fonksiyonu 1.00'a yaklaşmasına rağmen, fonksiyonun yaklaştığı değerden yola çıkılıp $f(x) = x^2$ fonksiyonu 1.00'a yaklaştırılırsa, x değeri hem 1.00'a hem de -1.00'a yaklaşabilir. Yanlış cevap veren 4 adayın kâğıtları incelendiğinde ise Şekil 12b'ye benzer ilgisiz ifadelerin kullanıldığı görülmüştür. 1 adayın ise hiçbir cevap vermediği görülmüştür.



a

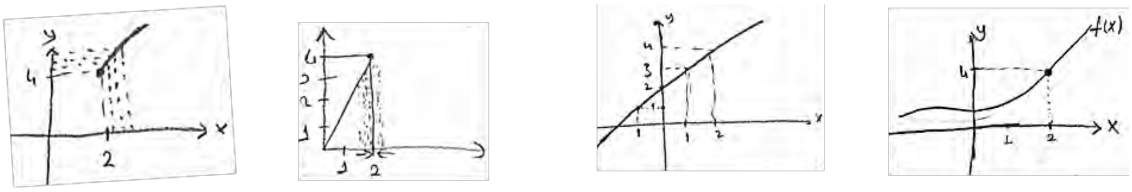


b

Şekil 12. NS sorusuna ait yanlış çözüm örnekleri.

(Grafik): Grafik ile gösteriniz.

Bu soru için adayların verdikleri cevaplar incelendiğinde 22 adayın doğru; 19 adayın ise yanlış cevap verdiği görülmüştür. Yanlış cevap 6 adayın $x = 2.00$ noktasına ya sağdan ya da soldan yaklaştığı ve Şekil 13a ve Şekil 13b'deki gibi bir grafik çizdiği görülmüştür. 11 adayın $f(x) = 2x$ fonksiyonu oluşturmada güçlük çektiği belirlenmiştir. Ayrıca tabloda verilen x değerlerini koordinat düzleminde yerine koyarak fonksiyonun grafiğini oluşturmayı da denemedikleri görülmüş ve Şekil 13c ve Şekil 13d'ye benzer bir grafik sunmuştur. 2 adayın ise hiçbir cevap vermediği görülmüştür.

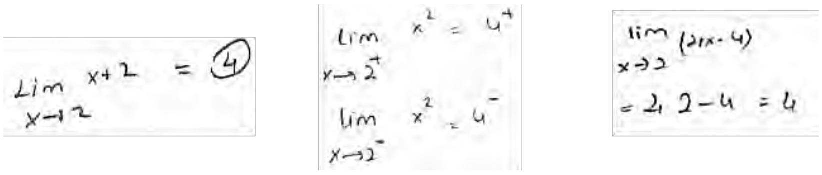


a b c d

Şekil 13. NG sorusuna ait yanlış çözüm örnekleri.

(Cebir): $\lim_{x \to a} f(x)$ ifadesi ile sonucu hesaplayınız.

Bu soru için adayların verdikleri cevaplar incelendiğinde 23 adayın doğru; 18 adayın ise yanlış cevap verdiği görülmüştür. Yanlış cevap 15 adayın fonksiyonu belirleyemediği ve Şekil 14'deki gibi bir çözüm sunduğu görülmüştür. 3 aday ise hiçbir cevap vermemiştir.



Şekil 14. NC sorusuna ait yanlış çözüm örnekleri.

Temsiller arası dönüşüm sürecinde ortaya çıkan kod, kategori, tema ve görüşlere dair bulgular Tablo 1'de sunulmuştur. Tablo 1 incelendiğinde, matematik öğretmeni adaylarının en çok girdi temsil türü sözel olan sorularda zorlandıkları görülmüştür. Girdi temsil türü sözel olan sorularda adayların ağırlıklı olarak sözel veriyi yorumlayamadığı ($\mathrm{f} = 37$), fonksiyonu belirleyemediği ($\mathrm{f} = 27$), limit noktası kavramını bilemediği ($\mathrm{f} = 20$) ve işlem hatası yaptığı ($\mathrm{f} = 3$) görülmüştür. Girdi temsil türü sözel olan sorularda sözel veriyi yorumlamaya ilişkin bazı aday görüşleri şu şekildedir:

"Ahmet başladığı noktaya geri döndüğüne göre gittiği yolu tekrar gelmiştir. Yani hiç yol gitmemiştir."

"Ahmet mola süresince yol almadığı için olduğu yerde beklemiş ve hiç hareket etmemiştir. Hareket etmediğine göre de .00 km yol almıştır."

Girdi temsil türü grafik olan sorularda adayların ağırlıklı olarak soruyu eksik okuduğu ($\mathrm{f} = 20$), limit noktası kavramını bilemediği ($\mathrm{f} = 11$), işlem hatası yaptığı ($\mathrm{f} = 5$) ve matematiksel kavramları karıştırdığı ($\mathrm{f} = 3$) görülmüştür. Girdi temsil türü grafik olan sorularda matematiksel kavramları karıştırma ve limit noktası kavramını bilememe kategorilerine ilişkin bazı aday görüşleri sırasıyla şu şekildedir:

"Limit yaklaşmadır. Türev de o noktadaki yaklaşık değerdir… Türevin sonucu limiti verir."

"x = -2.00 noktasının hemen sağı ve solu var. Çünkü tepe noktası. O zaman sağdan ve soldan yaklaşırsak -4.00 olur. Ama başka tepe noktası yok. Demek ki başka bir limit yok. x = 2.00 noktasının limitine bakarsak limiti yok diyebiliriz. Ama illaki bulacaksak, 2.00, -2.00 den büyük olduğundan ve sağ taraf artan olduğundan yani $+\infty$ a gittiğinden cevap $+\infty$ olur."

Tablo 1.
Temsiller Arası Dönüşüm Sürecinde Ortaya Çıkan Kod, Kategori ve Temalar.

Temsil		Tema	Kategori	Kod	f_1	f_2
SÖZEL	G	OAE	Sözel veriyi yorumlayamama	Bir saatlik mola verme	13	34
				Başladığı noktaya geri dönme	8	
				Yer değiştirme	7	
	N	OAE	Sözel veriyi yorumlayamama	İki saat koştuktan sonra	9	39
		ABE	Limit noktası kavramını bilememe	Nasıl yaklaşım yapılacağını bilememe	12	
				Hatalı yaklaşım sergileme	2	
				İlgisiz cevap verme	6	
	C	ABE	Fonksiyonu belirleyememe	Hatalı fonksiyon belirleme	27	38
		D	İşlem hatası yapma	Hatalı hesaplama	3	
GRAFİK	S	D	Soruyu eksik okuma	Soru yerine grafiğe odaklanma	7	27
		ABE	Matematiksel kavramları karıştırma	Limit yerine türev alma	1	
			Limit noktası kavramını bilememe	Hatalı yaklaşım sergileme	1	
	N	D	Soruyu eksik okuma	Soru yerine grafiğe odaklanma	7	23
			İşlem hatası yapma	Hatalı hesaplama	1	
		ABE	Matematiksel kavramları karıştırma	Limit yerine türev alma	1	
			Limit noktası kavramını bilememe	İlgisiz cevap verme	9	
	C	D	Soruyu eksik okuma	Soru yerine grafiğe odaklanma	6	20
			İşlem hatası yapma	Hatalı hesaplama	4	
		ABE	Matematiksel kavramları karıştırma	Limit yerine türev alma	1	
			Limit noktası kavramını bilememe	Hatalı yaklaşım sergileme	1	
CEBİR	G	ABE	Limit noktası kavramını bilememe	Tanımlı olmayan noktayı tanımlı gösterme	2	12
			Fonksiyonun grafiğini çizememe	Hatalı grafik çizme	7	
				Noktasal gösterilen değerleri birleştirmeme	1	
	N	ABE	Limit noktası kavramını bilememe	Tanımlı olmayan noktayı tanımlı gösterme	7	17
				Tanımlı olmayan noktada limitten söz edilemez	2	
				İlgisiz cevap verme	3	
		D	İşlem hatası yapma	Hatalı hesaplama	3	
	S	ABE	Limit noktası kavramını bilememe	Tanımlı olmayan noktada limitten söz edilemez	2	6
NÜMERİK	S	ABE	Limit noktası kavramını bilememe	Hatalı yaklaşım sergileme	1	6
				İlgisiz cevap verme	4	
	G	ABE	Limit noktası kavramını bilememe	Eksik yaklaşım sergileme	6	19
			Fonksiyonun grafiğini çizememe	Hatalı grafik çizme	11	
	C	ABE	Fonksiyonu belirleyememe	Hatalı fonksiyon belirleme	15	18

OAE: Okuduğunu anlama eksikliği; ABE: Alan bilgisi eksikliği; D: Dikkatsizlik; f_1: Boş cevaplar hariç ortaya çıkan kodların frekansı; f_2: Boş cevaplar dâhil yanlış yapan toplam katılımcı frekansı

Girdi temsil türü cebir olan sorularda adayların ağırlıklı olarak limit noktası kavramını bilemediği $(f = 16)$, fonksiyonunun grafiğini çizemediği $(f = 8)$ ve işlem hatası yaptığı $(f = 3)$ görülmüştür. Girdi temsil türü cebir olan sorularda limit noktası kavramını bilememe kategorisine ilişkin aday görüşü şu şekildedir:

"Fonksiyon x = 1.00 noktasında tanımlı olmadığı için limitinden söz edemeyiz."

Girdi temsil türü nümerik olan sorularda adayların ağırlıklı olarak fonksiyonu belirleyemediği $(f = 25)$, fonksiyonunun grafiğini çizemediği $(f = 11)$ ve limit noktası kavramını bilemediği $(f = 11)$ görülmüştür. Girdi temsil türü nümerik olan sorularda limit noktası kavramını bilememe kategorisine ilişkin aday görüşü şu şekildedir:

"Limite bakmak için önemli olan fonksiyondur. Fonksiyonu yaklaştıran değer bizi limite götürür… Yani, örnek verecek olursam $y = x + 2$ denklemini düşünelim. y 5.00'a yaklaşsın. O zaman x nereye yaklaşmalıdır. Tabiki de 3'e. Demek ki fonksiyonun limiti 3.00'dır. "

Yapılan analizler sonucunda adayların, limit noktası kavramını bilmede ($\mathrm{f} = 58$), fonksiyonu belirlemede ($\mathrm{f} = 52$), ve sözel veriyi yorumlamada ($\mathrm{f} = 37$) eksikliklerinin olduğu belirlenmiştir. Yanlış cevap veren adayların ağırlıklı olarak kavram ve süreçte eksikliklerinin olduğu ve limit problemlerini tam anlamlandıramadıkları ortaya çıkmıştır. Kavram ve süreçte doğru ilerleyen adayların ise işlem hatası ve dikkatsizlik nedeniyle yanlış yaptıkları görülmüştür. Yapılan hatalar incelendiğinde, girdi temsili sözel olan sorulardaki hataların ağırlıklı olarak alan bilgisi eksikliği ($\mathrm{f} = 47$) ve okuduğunu anlama eksikliği ($\mathrm{f} = 37$) temalarında; girdi temsili grafik olan sorulardaki hataların dikkatsizlik ($\mathrm{f} = 28$) temasında; girdi temsili cebir ($\mathrm{f} = 24$) ve nümerik ($\mathrm{f} = 37$) olan sorulardaki hataların ise alan bilgisi eksikliği teması altında toplandığı görülmüştür.

Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmada, matematik öğretmeni adaylarının limit kavramına yönelik temsiller arası dönüşüm sürecine ilişkin karşılaşılan hatalar araştırılmış ve adayların en çok girdi temsil türü sözel olan sorularda dönüşüm yapmakta zorlandıkları görülmüştür. Sözel temsil türünde yapılan hatalar incelendiğinde hataların ağırlıklı olarak alan bilgisi eksikliği ve okuduğunu anlama eksikliği temalarında toplandığı görülmüştür. Adayların, sözel temsil ile verilen limit problemlerini anlamlandıramadıkları ya da yanlış anlamlandırdıkları ve diğer temsil türlerine dönüşüm yaparak çözümü bulmada zorlandıkları belirlenmiştir. Sözel temsilden grafik temsile dönüşüm yapılması istenilen soruda adayların ağırlıklı olarak sözel veriyi yorumlayamadıkları görülmüştür. Örneğin, soruda yol-zaman grafiğinin çizilmesi istenmesine rağmen *"… başladığı noktaya geri dönüyor"* ifadesi adayların konum-zaman grafiğine odaklanmalarına; *"… bir saatlik mola veriyor*" ifadesi ise adayların y ekseni üzerinde çizim yapmalarına neden olmuştur. Hız-zaman grafiği altında kalan alanın yer değiştirmeye karşılık gelmesine rağmen adayların yol-zaman grafiğinin altında kalan alanı yer değiştirme olarak düşünmesi ve hatalı sonuçlar bulması ise adayların kavram yanılgısına sahip olduklarını gösterebilir. Hale (1996) tarafından kavram yanılgıları üzerine yapılan çalışmada adayların hız-zaman grafiğinden yer değiştirmeyi bulmada zorlandıkları, sözel ifadelere uygun grafikleri seçemedikleri ve aynı konu ile ilgili grafikler arasında dönüşüm yapamadıkları belirtilmiştir. Sözel temsilden nümerik temsile dönüşüm sürecinde adayların ağırlıklı olarak limit noktası kavramını bilemedikleri görülmüş ve yapılan hatalardan 5.00 noktasına ϵ komşuluğundaki değerler yerine her bir t anı göz önüne alarak yaklaşması olmuştur. Eğer bu soruda $f(x)$ fonksiyonu 5.00 noktasında tanımlı olmasaydı, her bir t anını göz önüne alarak yapılan bu yaklaşımla fonksiyonun hangi değere yaklaştığını tablo ile kestirmek zor olacaktı. Şöyle ki, ϵ bir pozitif sayı olmak üzere limitin tanımı gereğince 5.00 noktası fonksiyonun bir yığılma noktası olduğundan her ϵ komşuluğunda fonksiyonun tanım kümesine ait sonsuz çoklukta eleman bulunmaktadır. Bu nedenle, 5.00 noktasına her bir t anını göz önüne alarak yaklaşmak yerine ϵ komşuluğundaki elemanlar ile yaklaşmak bizi limite ulaştıracaktır. Nümerik temsilerin problem çözümlerinde en az kullanılan temsil türü olması ve adayların bu tür problemlerde başarılı olamaması (Delice & Sevimli, 2010a) sözel temsil ile verilen limit problemlerinin adaylar tarafından nümerik temsil ile çözülememesinin bir nedeni olabilir. Sözel temsilden cebir temsile dönüşüm sürecinde ise adayların ağırlıklı olarak fonksiyonu belirleyemedikleri görülmüştür. Adayların fonksiyon tanımını detaylı öğrenmek yerine ezberlemeye yönelmesi (Polat & Şahiner, 2007), adayların fonksiyon belirleme sürecinde zorlanmalarının bir nedeni olabilir. Ayrıca, cebir temsil türünün adaylar tarafından anlaşılması zor ve çaba gerektiriyor görülmesi (Kaya, 2017) ve adayların fonksiyonun formal tanımı olan cebirsel tanımından uzaklaşması sözel temsil ile verilen limit problemlerinin adaylar tarafından cebir temsil ile çözülememesinin bir diğer nedeni olabilir.

Adayların girdi temsil türü grafik olan soruların çözümünde yapılan hatalar incelendiğinde hataların ağırlıklı olarak dikkatsizlik temasında toplandığı görülmüştür. Adayların soruyu tam okumadıklarından ve soru yerine grafiğe odaklanıp soruyu çözmeye başladıklarından kaynaklı olduğu belirlenmiştir. Örneğin, yanlış yapan bazı adaylar, soru cümlesinde yer alan *"…2.00 noktasındaki limitinin…"* ifadesini tam okumadıklarını ve grafikte x ekseni üzerinde verilen -2.00 a odaklandıklarını belirtmiştir. Bu nedenle, grafik temsilden diğer temsillere dönüşümde $x = -2.00$ noktası baz alınarak işlemler yapılmış ve her bir temsil için sorunun çözümünde hatalar ortaya çıkmıştır. Grafik temsilden cebir ve nümerik temsile dönüşüm sürecinde ise adayların nispeten daha az hatalar yaptığı görülmüştür. Yapılan bazı çalışmalarda da adayların grafik temsilden nümerik temsile (Delice & Sevimli, 2010b) ve cebir temsile (Elia & Spyrou, 2006) dönüşümlerde daha az hata yaptıkları belirtilmiştir. Bunun nedeni, sorudaki her bir x değerine karşılık fonksiyonun aldığı değerlerin grafikte rahatlıkla görülebiliyor olmasından kaynaklı olabilir.

Bu çalışmada, girdi temsil türü cebir ve nümerik olan soruların çözümünde adayların diğer temsil türlerine oranla daha az hata yaptığı görülmüştür. Yapılan hatalar incelendiğinde hataların alan bilgisi eksikliği teması altında toplandığı belirlenmiştir. Sözel temsilden nümerik ve cebir temsile dönüşümde (SN ve SC) yanlış yapan adayların sayısı oldukça fazla olmasına rağmen sözel temsile dönüşümde (NS ve CS) yanlış yapan adayların sayısının oldukça az olduğu görülmüştür. Verilen bir problemi sözel olarak ifade etmenin daha rahat olduğu göz önüne alındığında (Yaman, 2010a) adayların neden NS ve CS de daha az yanlış yaptığı açıklanabilir. Girdi temsil türü nümerik olan soruların çözümünde yapılan hatalar incelendiğinde, adayların fonksiyonu belirlemede, grafiği çizmede ve limit noktasını belirlemede güçlükler yaşadığı belirlenmiştir. Aday fonksiyonun limiti alınırken yaklaşmanın fonksiyon ile başlayacağını ve fonksiyonun yaklaştığı değerden yola çıkılacağını belirtmiştir. Oysaki bu durum hatalı ya da eksik sonuçlar çıkarabilir. Örneğin, $x \to 1.00$ için $f(x) = x^2$ fonksiyonu 1.00'a yaklaşmasına rağmen, $f(x) = x^2$ fonksiyonu 1.00'a yaklaşırken, x değeri hem 1.00'a hem de -1.00'a yaklaşabilir. Girdi temsil türü cebir olan soruların çözümünde ise adayların ağırlıklı olarak limit noktası kavramını bilemedikleri ve fonksiyonun grafiğini çizemedikleri görülmüştür. Örneğin, fonksiyon $x = 1.00$ noktasında tanımlı olmamasına rağmen bazı adaylar fonksiyonun limitinin alınabilmesi için istenilen noktada tanımlı olması gerektiğini vurgulamışlardır. Bu nedenle, $x = 1.00$ noktasında fonksiyonun limitinden söz edilemeyeceğini belirtmişlerdir. Oysaki ilgili noktanın tanımlı olmasından ziyade bir yığılma noktası olması yeterlidir. Bu nedenle, adayların kavramsal olarak eksik oldukları tespit edilmiştir. Ayrıca, adayların cebirsel olarak verilen bir fonksiyonu koordinat sisteminde gösteremedikleri ve grafiklerini çizemedikleri görülmüştür. Zachariades, Christou ve Papageorgiou (2002) tarafından yapılan çalışmada öğrencilerin fonksiyonun cebirsel ve grafiksel gösterimleri arasında ilişki kurmada güçlük çektiği vurgulanmıştır. Analiz öğretiminin ve matematiksel bilginin cebirsel ağırlıklı, günlük hayat problemlerinden uzak, "tanım-teorem-ispat-uygulamalar ve test" şeklinde olması (Delice & Sevimli, 2010b) adayların cebir temsil türüne ağırlık vermesinin bir nedeni olabilir.

Bu çalışmada, matematik öğretmeni adaylarının verilen limit problemlerini farklı temsil türleri ile çözmeleri istenmiş ve adayların bazı temsil türlerinde zorlandıkları ve temsil dönüşüm süreçlerinde bazı hatalar yaptıkları belirlenmiştir. Girdi temsili sözel olan sorulardaki hataların ağırlıklı olarak alan bilgisi eksikliği ve okuduğunu anlama eksikliği temalarında; girdi temsili grafik olan sorulardaki hataların dikkatsizlik temasında; girdi temsili cebir ve nümerik olan sorulardaki hataların ise alan bilgisi eksikliği teması altında toplandığı görülmüştür. Adayların temsil dönüşüm süreçlerinde zorluk yaşaması ve tek temsil türüne bağlı kalarak problem çözmeleri kavramsal anlama düzeylerinin yeterli ölçüde gelişemeyeceğini göstermektedir (Lesh & Doerr, 2003). Ayrıca, kavram öğretiminde geleneksel yöntemlerin yerine öğrenciyi sürece dâhil eden ve aktif katılımını sağlayan süreç temelli öğretim yaklaşımlarının kullanılması, matematiksel bilgi ve becerilerin günlük hayata transfer edilmesi daha anlamlı öğrenmenin oluşmasına imkân sunacaktır (Çil, Kuzu, & Şimşek, 2019). Bu bağlamda adayların kavramsal anlama düzeylerini ve bilişsel süreç becerilerini geliştirmek amacıyla kavram öğretimlerinde ve problem çözümlerinde birden çok temsil kullanılabilir. Ayrıca, temsil dönüşümüne imkân sunan dijital öyküleme, dijital modelleme ve animasyonlar gibi çeşitli teknolojik süreçlere ve gerçek hayat problemlerine yer verilerek ders içerikleri daha zengin hale getirilebilir.

References

Akbulut, K., & Işık, A. (2005). Limit kavramının anlaşılmasında etkileşimli öğretim stratejisinin etkinliğinin incelenmesi ve bu süreçte karşılaşılan kavram yanılgıları. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 13*(2), 497-512.

Artigue, M. (2000). Teaching and learning calculus: What can be learned from education research and curricular changes in France?. *Research in collegiate mathematics education 4*(8), 1-15.

Bezuidenhout, J. (2001). Limits and continuty: Some conceptions of first-year students. *International Journal of Mathematics Education in Science and Techonolgy*, *32*(4), 487-500.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2000). *Research methods in education*. London: Routledge Falmer

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp.153-166). Dordrect: Kluwer Academic.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwinngendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavior*, *15*, 17-192.

Çil, O., Kuzu, O., & Şimşek, A.S. (2019). 2018 Ortaöğretim matematik programının revize edilmiş Bloom taksonomisine ve programın ögelerine göre incelenmesi. *YYÜ Eğitim Fakültesi Dergisi, 16*(1), 1402-1418.

Davis, R. B., & Vinner, S. (1986). The notion of limit; some seemingly an avoidable misconception stages, *Journal of Mathematical Behavior*, *5*, 281-303.

Delice, A., & Sevimli, E. (2010a). Matematik öğretmeni adaylarının belirli integral konusunda kullanılan temsiller ile işlemsel ve kavramsal bilgi düzeyleri. *Gaziantep Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, *9*(3), 581-605.

Delice, A., & Sevimli, E. (2010b). Öğretmen adaylarının çoklu temsil kullanma becerilerinin problem çözme başarıları yönüyle incelenmesi: Belirli integral örneği. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri, 10(1)*, 111-149.

Delice, A., & Sevimli, E. (2016). *Matematik eğitiminde teoriler*: *Matematik eğitiminde çoklu temsiller*. Ankara: Pegem Akademi Yayıncılık.

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp.109-122). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. *5*(1), 37-65.

Elia, I., & Spyrou, P. (2006). How students conceive function: A triarchic conceptual-semiotic model of the understanding of a complex concept. *TMME, 3*(2), 256-272.

Goldin, G. A. (1998). Representations, learning, and problem solving in mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 137-165.

Goldin, G. A., & Kaput, J. J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. *Theories of mathematical learning*, 397-430.

Girard, N. R. (2002). *Students' representational approaches to solving calculus problem: Examining the role of graphing calculators*. Unpublished doctorate dissertation, University of Pittsburg, USA.

Hale, P.L. (1996). *Building conceptions and repairing misconceptions in student understanding of kinematic graphs-using student discourse in calculator based laboratories*. Unpublished doctorate dissertation, Oregon State University, USA.

Hiebert, J., & Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.65-100). Reston, VA.

Howell, D.C. (2013). *Statistical methods for psychology*. Wadsworth: Cengage Learning.

Kaya, Y. S. (2017). Öğretmen adaylarının matematiksel örnekleri algılayışları üzerine bir metafor analizi. *Bartın Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 6*(1), 48-67.

Keller, B. A., & Hirsch, C. R. (1998). Student preferences for representations of functions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *29*(1), 1-17.

Kendal, M., & Stacey, K. (2003). Tracing learning of three representations with the differentiation competency framework. *Mathematics Education Research Journal*, *15*(1), 22-41.

Kuzu, O. (2017). Matematik ve fen bilgisi öğretmen adaylarının integral konusundaki kazanımlarının incelenmesi. *Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi*, *18*(3), 948-970.

Lesh, R., & Doerr, H. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In R. Lesh & H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism* (pp. 3-34). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Merriam, S. B., & Tisdell, E. J. (2015). *Qualitative research: A guide to design and implementation*. John Wiley & Sons.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.

National Research Council (NRC) (1989). *Everybody counts: A report to the nation on the future of mathematics education*. Washington, DC: National Academy Press.

Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research and evaluation methods.* Thousand Oaks, CA: Sage.

Prain, V., & Waldrip, B. (2006). An exploratory study of teachers' and students' use of multi-modal representations of concepts in primary science. *International Journal of Science Education*, *28*(15), 1843-1866.

Polat, Z. S., & Şahiner, Y. (2010). Bağıntı ve fonksiyonlar konusunda yapılan yaygın hataların belirlenmesi ve giderilmesi üzerine boylamsal bir çalışma. *Eğitim ve Bilim, 32*(146), 89-95.

Radojevic, N. (2006). *Exploring the use of effective learning strategies to increase students' reading comprehension and test taking skills.* Unpublished master's thesis, The Brock University, Canada.

Quesada, A., Einsporn, R. L., & Wiggins, M. (2008). The impact of the graphical approach on students' understanding of the formal definition of limit. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, *15*(3), 95-102.

Salkind, N. J. (2010). *Encyclopedia of research design*. London: SAGE Publications.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 334-370.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, *15*(2), 4-14.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, *18*, 371-397.

Szydlik, J.E. (2000). Mathematical beliefs and conceptual understanding of the limit of a function. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(3), 258-276.

Szymanski, E. M., & Linkowski, D. C. (1993). Human resource development: An examination of perceived training needs of certified rehabilitation counselors. *Rehabilitation Counseling Bulletin, 37*(2), 163-176.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educatfmional Studies in Mathematics, 12*, 151-169.

Williams, S. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(3), 219-236.

Yaman, H. (2010a). Ö*ğrencilerinin matematiksel örüntülerdeki ilişkileri algılayışları üzerine bir inceleme.* Unpublished doctorate dissertation, Hacettepe Üniversitesi, Ankara.

Yaman, E. (2010b). Psikoşiddete (Mobbinge) maruz kalan öğretim elemanlarının örgüt kültürü ve iklimi algıları. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri, 10*(1), 567-578.

Zachariades, T., Christou, C., & Papageorgiou, E. (2002). The difficulties and reasoning of undergraduate mathematics students in the identification of functions. *Proceedings in the 10th ICME Conference*, Crete, Greece.