INTERACCIÓN CON REPRESENTACIONES DINÁMICAS PARA ARGUMENTAR SOBRE LA VALIDEZ DE UNA CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA

INTERACTION WITH DYNAMIC REPRESENTATIONS TO ARGUE ABOUT THE VALIDITY OF A GEOMETRY CONSTRUCTION

María Alejandra Calderón González
CINVESTAV
alejandra.calderon@cinvestav.mx

Luis Enrique Moreno Armella
CINVESTAV
lmorenoa@cinvestav.mx

Desde la matemática educativa, gran variedad de estudios se ha enfocado en analizar la presencia de la tecnología digital desde diferentes puntos de vista. Quienes abordan la prueba y la argumentación se han resistido a que se presenten resultados con un componente tecnológico, debido a la idea de formalidad asociada estos términos, lo que ha aumentado la tensión existente entre la naturaleza teórica y empírica de la matemática. Teniendo en cuenta que con la presencia de entornos como DGS el estudiante puede acceder a representaciones dinámicas, nosotros buscando entender el impacto de la interacción con estas representaciones en los argumentos que proponen los estudiantes. Para esto realizamos un estudio de tipo exploratorio y descriptivo cuyos resultados muestran que la interacción con representaciones dinámicas brinda a los estudiantes herramientas de validación diferentes a las del papel.

Palabras clave: Razonamiento y prueba.

Introducción y antecedentes

Argumentar y validar proposiciones son habilidades que el ser humano necesita para desenvolverse en sociedad. Desde muy temprano, uno de los objetivos educativos consiste en promover la participación de los estudiantes para la comprensión y desarrollo de argumentos. Por ejemplo, la NCTM (2000) propone que "Al final de la escuela secundaria, los alumnos deberían estar capacitados para comprender y elaborar demostraciones matemáticas, es decir, argumentos que consisten en deducciones o conclusiones lógicamente rigurosas a partir de hipótesis" (p. 59). Todo esto es analizado desde la perspectiva del profesor (Bleiler et al, 2014; Lesseig et al, 2019; Dickerson y Doerr, 2014), desde las producciones del estudiante (Buchbinder y Zaslavsky, 2011), y desde la incorporación de la tecnología digital (Leung y Or, 2007; Olivero y Robutti, 2001; Sinclair y Robutti, 2012).

En el salón de clases el profesor es quien usualmente promueve el desarrollo de argumentos y pruebas, por lo que se han desarrollado investigaciones en las que se exploran las ideas que tienen los profesores sobre este tema (Bleiler et al, 2014; Lesseig et al, 2019). Un hallazgo en este sentido es que los profesores consideran la formalidad y la lógica como factores relevantes para determinar la validez de un argumento y más aún cuando son profesores con pocos años de experiencia (Dickerson y Doerr, 2014). Sin embargo, para algunos autores (Wittmann, 2021; de Villiers, 2004) este énfasis formalista sobre la prueba inhibe la importancia de la comprensión, por lo que se propone que para la educación matemática el objetivo sea que los estudiantes desarrollen distintos tipos de *razonamientos* que les permitan comprender y argumentar por qué una proposición es válida (Hanna, 2014).

La geometría es una de las áreas de las matemáticas en la que el desarrollo de argumentos y pruebas se puede dar de manera natural, ya que "los métodos geométricos son, hasta cierto punto, una combinación de ver y razonar, ya que, allí, la razón comprueba los desarrollos lógicos, y los guía sobre lo que los ojos ven en la figura" (Northrop, 1968, p.131). En particular, el razonamiento se desarrolla sobre una figura, de modo que la figura es parte constitutiva del proceso argumentativo. Esta misma idea es compartida por Netz (1988) quien afirma que, en el caso de la geometría griega clásica, el diagrama es la esencia de la prueba.

En clase de geometría se busca que los estudiantes expresen sus razonamientos para ilustrar la generalidad de un hecho a partir del diagrama, sin embargo, esto no siempre es posible debido a que generalizan a partir de un solo caso (Stylianides y Stylianides, 2017). Por ejemplo, piensan que la mediana y la mediatriz de un triángulo son el mismo objeto porque al trazarlas con regla y compás estás coinciden para el triángulo construido (isósceles). Este tipo de situaciones han hecho que la incertidumbre sobre la generalidad de un hecho sea una pieza clave para incentivar en los estudiantes la necesidad de producir pruebas deductivas (Buchbinder y Zaslavsky, 2011). Sin embargo, cuando las representaciones son dinámicas (e.g., presentadas en GeoGebra) se puede generar un alto nivel de certeza mediante el arrastre de puntos de una construcción y la observación de que las propiedades se mantienen a través de las distintas figuras resultantes. Esta percepción de la permanencia de una propiedad (que ya no sería accidental), es lo que lleva a proponer otras estrategias y funciones de la prueba diferentes a la tradicional (de Villiers, 2004). Además, el acceso a una pantalla digital ha promovido el estudio del impacto de las tecnologías digitales en el cambio sufrido en los razonamientos y las pruebas que proponen los estudiantes.

Existe un gran número de investigaciones en las que se analiza desde diferentes perspectivas el uso de geometría dinámica en procesos de argumentación y prueba. Algunas se han enfocado en tipificar los argumentos que proponen los estudiantes, concluyendo que la mayoría son de tipo empírico (Morales et al.,2021); otros estudios han buscado analizar cómo la interacción con los objetos de la geometría dinámica puede servir como trabajo previo para proponer y construir pruebas deductivas/teóricas (Leung y Or, 2007; Olivero y Robutti, 2001; Dello-Iacono, 2021). Sin embargo, también se ha reconocido que la interacción con representaciones dinámicas puede llevar a nuevas formas de razonamiento genuinas (Moreno-Armella y Brady, 2018) y por lo tanto a establecer nuevas ideas sobre lo que significa una prueba cuando se trabaja con representaciones digitales. El estudio que aquí se reporta, investigó ¿cómo es la interacción entre el estudiante y las representaciones dinámicas al momento de realizar construcciones y argumentar sobre su validez?

Teniendo en cuenta la importancia de la interacción entre el estudiante y las representaciones dinámicas, a continuación, presentamos el constructo teórico de la *co-acción*, el cual extiende algunas ideas de génesis instrumental. Además, presentaremos una visión general de la argumentación que no expresa la necesidad de un nivel de formalidad.

Perspectiva Teórica

Cada vez más las estructuras curriculares están siendo habitadas por la tecnología digital mediante los sistemas de representación que reaccionan de inmediato a las acciones del estudiante, permitiendo, por una parte, que algunas actividades que se pueden adelantar con lápiz y papel se desarrollen de una forma más eficiente y se eviten errores de cálculo —la herramienta como *amplificadora*—. Sin embargo, la ejecutabilidad de estas representaciones hacen posible que el estudiante pueda transformar sus conocimientos y acceder a ideas nuevas —la herramienta como *reorganizadora conceptual*—. Esto es particularmente tangible en los entornos de geometría dinámica (Moreno-Armella y Sriraman, 2005).

La acción de *arrastrar* un vértice de un triángulo, por ejemplo, genera una respuesta del medio digital que gradualmente va develando la naturaleza estructural de la construcción que se haya realizado. Hay allí un espacio de exploración nuevo para el estudiante, pues la pantalla digital es un espacio que *dialoga* con el estudiante a través de las representaciones digitales. La ejecutabilidad de las representaciones se traduce en la capacidad de respuesta del medio durante una exploración y contribuye al desarrollo de nuevas maneras de pensar. Termina generándose una dialéctica que ha sido estudiada como la génesis instrumental (Rabardel y Beguin, 2005), pero en un salón de clases se aprende *de, con y a través* de los otros. Hay formas de articular el pensamiento propio con el pensamiento de los demás incluidas sus experiencias con el medio digital presente. Esta *co-acción cognitiva* (Hegedus y Moreno-Armella, 2010) es un rasgo central de la mediación instrumental.

Si bien las posibilidades abiertas por los medios digitales de cómputo numérico y visualización han cuestionado la demostración tradicional sobre papel y lápiz como único criterio de validación matemático, ubicados en el terreno de la educación matemática y viendo la *construcción del sentido* como un objetivo central del aprendizaje, consideramos que hay, aparte del tradicional, otros caminos para construir la justificación de una proposición (digamos geométrica) en el salón de clases. La exploración de una situación geométrica (nuestro interés aquí) encuentra una respuesta *teóricamente controlada* del lado del mediador digital—por ejemplo, Geogebra. Al adelantar una exploración, el estudiante encuentra en la pantalla una respuesta a sus acciones a través de la plasticidad de las representaciones. De esa manera su entendimiento matemático va encontrando y desechando rutas de aproximación a una respuesta plausible a un problema o a una demanda de justificación. Por lo tanto, los argumentos matemáticos pueden ser abordados desde una perspectiva general como una línea de *razonamiento* que pretende mostrar y/o convencer de que un resultado (una declaración general sobre un objeto, una solución a un problema, un cálculo) es correcto (Sriraman y Umland, 2020; Hanna, 2020). Nuestro trabajo responde a las líneas aquí trazadas.

Metodología

Situamos nuestra investigación dentro de un enfoque cualitativo centrado en comprender, profundizar y describir fenómenos a través de la perspectiva de los participantes (Hernández et al., 2010). En este caso buscamos comprender la interacción con las representaciones dinámicas al momento de argumentar. Seguimos la línea de las investigaciones exploratorias y descriptivas (Steffe y Thompson, 2000) ya que buscamos familiarizarnos con los modos y formas de operar de los participantes.

Los participantes fueron 6 profesores de matemáticas que estaban llevando un curso de geometría como parte de un programa de maestría. Para este reporte, describimos el caso de Ana quien manifestó no estar familiarizada con los contenidos de geometría (ya que nunca ha enseñado esta materia y solo llevó un curso sobre este tema durante su licenciatura) y quién demostró gran destreza con el manejo de GeoGebra.

El cuestionario propuesto a los participantes consistía en seis construcciones que debían realizar y argumentar por qué su solución era válida. Posteriormente se realizó una entrevista semi estructurada a cada participante con el fin de profundizar en sus argumentos/ razonamientos y en la interacción con el medio digital.

Para el análisis de los datos se extrajeron los fragmentos de la entrevista en los que se evidenciaba un proceso donde: los estudiantes realizaban acciones sobre el medio digital, interpretaban la respuesta del medio (la información de la pantalla) y esta información los llevaba a realizar nuevas acciones. En general, nosotros analizamos cómo este proceso contribuyó a que los estudiantes pudieran argumentar sobre la validez de su construcción.

Resultados

En esta sección analizamos las interacciones de los estudiantes con el entorno digital, en particular, la naturaleza de los argumentos que se producen gracias a dicha interacción. Encontramos tres usos que describimos a continuación.

GeoGebra como amplificador

El entorno es, en un momento inicial, un amplificador que le permite a los estudiantes hacer explícitas sus ideas sobre las circunferencias, elipses, mediatrices y demás objetos geométricos. En ese momento sus ideas aún no han sido afectadas por el nuevo sistema de representación. Lo ilustramos primero con el trabajo de Ana, quien aborda el problema: dado un ángulo y una recta transversal a los lados del ángulo hallar un punto sobre la transversal equidistante de los lados del ángulo. En su respuesta Ana afirma que el punto buscado está en la intersección de la bisectriz y la transversal, por lo que durante la entrevista se le solicita que realice la construcción, dando paso al siguiente dialogo.

[1]E: ¿Qué trazaste ahí?
[2]A: Una bisectriz.
[3]E: ¿Por qué la bisectriz?
[4]A: Porque la bisectriz me va a dar todos los puntos que equidistan de (…) de ambos lados.

La construcción de Ana está guiada por su conocimiento teórico, por lo que el medio digital (GeoGebra) se usa como una herramienta que le permite construir la bisectriz del ángulo dado de manera casi idéntica a cómo lo haría con lápiz y papel.

En cuanto al argumento, Ana *concluye* que el punto de intersección entre la bisectriz y la transversal equidista de los lados del ángulo porque existe una *regla general* vinculada a la bisectriz que le permite afirmar dicha equidistancia (línea 4, diálogo anterior).

GeoGebra como reorganizador conceptual

El medio se ha convertido en un reorganizador conceptual cuando el razonamiento del estudiante trae indeleble la presencia del mediador digital, de modo que el estudiante reconfigura sus argumentos incluyendo la *respuesta* del mediador. Esto se ilustra cuando Ana debe probar que los puntos de la bisectriz equidistan de los lados de un ángulo, hecho que usualmente se prueba determinando dos triángulos congruentes, sin embargo, Ana usa otra estrategia (ver Figura 1) y dice:

[5]A: ¿Por qué equidista? Porque, pues (…) puedo dibujar esta circunferencia con centro aquí (señala H) que es tangente a este lado y a este (señala los dos lados del ángulo).
[6]E: Ok. Y, ¿el poder dibujar esa circunferencia me permite verificar la equidistancia?
[7]A: Aja (mueve constantemente el punto B por la pantalla).
[8]E: ¿Por qué? ¿qué característica da (…)? ¿por qué no una elipse, o un cuadrado?
[9]A: Ah, pues porque la distancia del centro a cualquier punto, pues es la misma, desde aquí que desde aquí (señala dos puntos de la circunferencia).

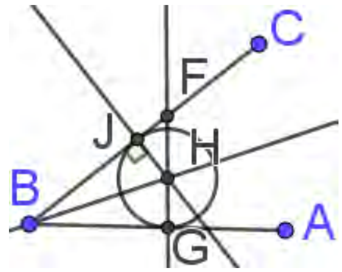

Figura 1: Construcción de Ana para probar una propiedad de la bisectriz

Para probar que los puntos de la bisectriz equidistan de los lados del ángulo, Ana guiada por sus *conocimientos* sobre las propiedades de las circunferencias (línea 9) *construye* una circunferencia con centro en H que es tangente a uno de los lados del ángulo (BC), anticipando que la circunferencia resultará tangente al otro lado. La *respuesta* dada por el medio gracias a la exactitud de los trazos y la geometría *incrustada* en ese medio permite que Ana configure su argumento basado en lo que ve en la pantalla. En este mismo sentido, Ana usa la función de arrastre para ilustrar la generalidad del hecho cuando *arrastra* uno de los puntos de la construcción y la *respuesta* que le da el medio es que la circunferencia permanece tangente a ambos lados del ángulo.

Sobre el argumento de Ana, ella *concluye* que los puntos de la bisectriz equidistan de los lados del ángulo porque puede dibujar una circunferencia que es tangente a los dos lados del ángulo (línea 5). En este caso, la garantía del argumento es una regla que establece como general gracias a sus conocimientos sobre las propiedades de la circunferencia y la co-acción con la representación dinámica. La presencia del medio dinámico en el argumento de Ana se presenta en dos momentos: primero con la exactitud de los trazos, ya que si estuviera trabajando en el papel podría no darse la tangencia o sería *su voluntad* la que haría que la circunferencia resultara tangente. El segundo momento se presenta cuando ella mueve un punto de la construcción, en este caso el vértice del ángulo, característica que diferencia el trabajo en el medio digital y el papel y lápiz.

GeoGebra como guía

El medio digital es "experto en geometría" de modo que puede impactar el razonamiento del estudiante a través de un proceso en donde se plantean hipótesis o conjeturas. Esto puede darse con la observación persistente de un hecho que modifique las ideas geométricas del estudiante, lo que ocurriría al evaluar la respuesta del medio digital. Este proceso dialéctico lo observamos cuando se le propone a Ana construir la bisectriz de un ángulo sin utilizar la herramienta que viene preconstruida en el medio digital —GeoGebra en este caso— y después que pruebe que efectivamente es la bisectriz.

[10]A: Déjame lo pruebo.
[11]E: ¿Qué cosa vas a probar?
[12]A: Si (…) si trazando alguna de estas rec(…) sí, alguna de éstas (señala a HJ y HG en la figura 1) me da este punto de aquí (señala a H), y ese punto, pues va a ser parte de la bisectriz.

Ana construye un ángulo NML y un punto O sobre MN, después construye una recta perpendicular a MN por O e intenta construir una recta perpendicular a ML, pero solo mueve el apuntador sobre el segmento ML (ver Figura 2) y se da cuenta que el punto no puede ser ubicado arbitrariamente cuando dice:

[13]A: “No puede ser cualquiera”.

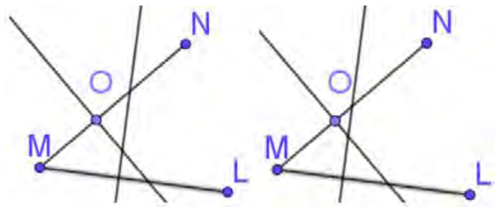

Figura 2: Arrastre de Ana para construir la perpendicular deseada

En este caso, la construcción de Ana está guiada por su intuición y la *respuesta* del medio digital se puede interpretar como la posible ubicación de la recta perpendicular a ML y el punto de intersección de las dos rectas perpendiculares. La respuesta del medio es interpretada por las ideas previas que tiene Ana gracias a la interacción con su representación anterior (línea 12), las cuales le permiten afirmar que el punto sobre ML debe tener alguna característica particular que desconoce (línea 13).

Continuando con su exploración, Ana empieza a usar GeoGebra como un medio que *guía* su razonamiento, ya que construye un punto P en el segmento LM y la recta perpendicular a dicho segmento por P, después determina el punto Q como la intersección de las dos rectas perpendiculares y construye la circunferencia con centro en Q y radio QO, por último, mueve P hasta que parece que la circunferencia con centro en Q es tangente a ML por P.

La construcción de la circunferencia por parte de Ana muestra la presencia de un hecho geométrico que ha sido adquirido gracias a la interacción con el medio digital, en el que una recta es bisectriz si y solo sí al construir una circunferencia con centro en la bisectriz y tangente a un lado del ángulo resulta tangente al otro lado (línea 5). Esta idea se ha incorporado a la construcción del objeto bisectriz que tiene Ana, y ahora hace parte de sus herramientas conceptuales que le permiten probar si un punto es un punto de la bisectriz o no.

Continuando con la interacción con el medio digital, Ana conjetura sobre la ubicación de P (por ejemplo, que es punto medio de ML) y realiza las construcciones respectivas, pero gracias las respuestas del medio digital a través del arrastre, ella comprende que sus hipótesis no son correctas. Mueve el punto P sobre el segmento ML y observa que el punto de intersección entre la circunferencia y la recta perpendicular a ML se mueve cuando P se mueve, por lo tanto, determina dicho punto de intersección como R y decide usar la herramienta “Rastro”. Esta última le muestra el lugar geométrico de R cuando P se mueve (ver Figura 3), pero al ver el resultado Ana afirma que necesitaría conocer P y decide cambiar su estrategia.

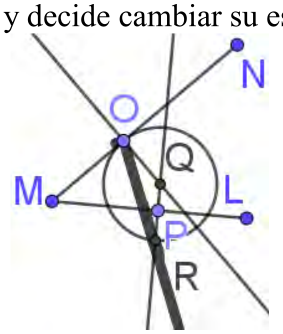

Figura 3: Uso de la herramienta “Rastro”

Aquí subrayamos dos tipos de interacción con el medio digital, en la primera, Ana busca dentro de sus conocimientos geométricos ideas que le permitan plantear hipótesis sobre la ubicación de P y en este caso la *respuesta* del medio digital es la ubicación del punto solicitado por Ana, como el punto medio de ML y esta respuesta es contrastada con las ideas previas de Ana. En la segunda interacción, ella no parte de ideas geométricas, sino del comportamiento de la representación digital de los objetos, de modo que la *respuesta* del medio muestra el comportamiento del punto R. Entonces, Ana busca asociar esta respuesta con su conocimiento previo y al no poder hacerlo, decide usar otra estrategia.

Ana decide volver a explorar la configuración inicial (la que se presenta en la Figura 1) y después de mover los punto A, B y C decide construir una circunferencia con centro en M y radio MO.

[14]: Y, ¿esa circunferencia por qué se te ocurrió?

[15]: (mueve el punto P hasta que la circunferencia con centro en Q resulta tangente a los dos lados del ángulo) ¡Ah, sí es!

Al ver que su nueva hipótesis resulta ser correcta Ana decide eliminar el punto P que había construido y ahora lo construye como punto de intersección de la circunferencia con centro en M con el segmento ML. Pero, esta vez no construye Q como punto de intersección de las dos perpendiculares, sino que lo determina con punto medio de OP y construye la recta MQ como bisectriz. Para probar que la recta es la bisectriz ella construye la circunferencia con centro en Q y radio QO, pero como Q no es el punto de intersección de las dos rectas perpendiculares, entonces la circunferencia no resulta ser tangente a los lados del ángulo (ver Figura 4). Ana mueve los puntos de su construcción y duda que la recta construida sea la bisectriz, entonces decide usar la herramienta "bisectriz" que la construye a partir de tres puntos y nota que la recta bisectriz coincide con MQ, por lo que reevalúa la construcción de la circunferencia con centro en Q. Por último, Ana construye la circunferencia con centro en la intersección de las dos perpendiculares y así comprueba que la recta construida es la bisectriz del ángulo LMN.

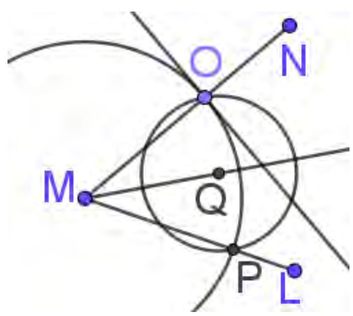

Figura 4: Construcción de circunferencia que no es tangente a ambos lados del ángulo

En general, la construcción de Ana está guiada por las observaciones sobre la representación *ejecutable* y el constante diálogo con el medio digital. Este medio se usa como un recurso que le permite *explorar* partiendo de hipótesis (como la idea que se ilustra en la Figura 2) o buscando hipótesis gracias a la interacción con la representación dinámica—estrategia presentada en Figura 3 y cuando explora nuevamente la Figura 1.

Sobre el argumento de Ana, ella *concluye* que la recta construida es la bisectriz del ángulo porque puede construir una circunferencia que es tangente a los dos lados del ángulo y permanece tangente ante el arrastre. En este caso, la garantía del argumento es una *regla de* *validación digital* que ha mostrado tener incorporada a sus conocimientos (línea 5). Afirmamos que esta es una regla de validación digital ya que cuando el medio responde con una circunferencia que no es tangente (Figura 4), ella piensa que la recta construida no es bisectriz, porque una idea sobre este objeto que forma parte de sus conocimientos previos es que: una recta es bisectriz si y sólo si se puede trazar la circunferencia tangente.

Un hecho que resulta interesante del proceso de Ana es que cuando traza la recta bisectriz y el medio responde haciendo coincidir dicha recta con la recta ya construida a saber, MQ (Figura 4), ella no usa dicha coincidencia para argumentar que la recta construida sea la bisectriz del ángulo. Solo cuando construye la circunferencia tangente considera que ha probado que su construcción es correcta. Las reglas de validación están vinculadas al proceso continuo de formación y adquisición de conceptos.

Palabras finales

Este trabajo ha permitido observar diferentes interacciones cuando se recurre a la mediación de las representaciones dinámicas durante las tareas de construcciones geométricas y cómo dicha mediación afecta los procesos de validación. Reportamos tres usos del medio digital: i) como un socio constructivo en donde la respuesta del medio no hace parte del argumento, ii) como un medio de prueba en donde la interacción con el medio desempeña un rol importante en el argumento, y iii) El medio digital como un guía que corrige y da indicios del camino a seguir, al igual que en el caso anterior la interacción con el medio es crucial en el argumento.

Las diferentes interacciones que analizamos permitieron observar formas híbridas de interacción, es decir, presencia de ideas geométricas previamente desarrolladas en un medio de lápiz y papel que se manifiestan en medio de un razonamiento adelantado en el contexto de la geometría dinámica. Los razonamientos de Ana se auxilian de los recursos que ofrece el medio digital para establecer que la circunferencia siempre será tangente al otro lado del ángulo. En efecto, Ana razona sobre una representación que le brinda información diferente a la que tenía en un medio estático. Pero ¿se podría afirmar que la prueba de Ana es deductiva? Este cuestionamiento nos lleva a plantearnos una pregunta que es todavía más amplia: *¿qué caracteriza una prueba deductiva en el medio digital?*

Ofrecemos aquí un punto de partida hacia la caracterización de una *prueba digital*.

Referencias

Bleiler, S. K., Thompson, D. R., & Krajčevski, M. (2014). Providing written feedback on students' mathematical arguments: Proof validations of prospective secondary mathematics teachers. Journal of Mathematics Teacher Education, 17(2), 105-127.

Buchbinder, O., & Zaslavsky, O. (2011). Is this a coincidence? The role of examples in fostering a need for proof. ZDM, 43(2), 269-281.

Dello Iacono, U. (2021). From Argumentation to Proof in Geometry Within a Collaborative Computer-Based Environment. Digital Experiences in Mathematics Education, 7(3), 395–426.

De Villiers, M. (2004). Using dynamic geometry to expand mathematics teachers' understanding of proof. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 35(5), 703–725.

Dickerson, D. S., & Doerr, H. M. (2014). High school mathematics teachers' perspectives on the purposes of mathematical proof in school mathematics. Mathematics Education Research Journal, 26(4), 711-733.

Hanna, G. (2014). The width of a proof. PNA, 9(1), 29-39.

Hanna, G. (2020). Mathematical Proof, Argumentation, and Reasoning. In S. Lerman, (Ed.), Encyclopedia of Mathematics Education (pp. 561–566). Springer, Dordrecht.

Hegedus, S. J., & Moreno-Armella, L. (2010). Accommodating the instrumental genesis framework within dynamic technological environments. For the Learning of Mathematics, 31(1), 26-31.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2010). Metodología de la investigación. (5ta ed.) McGraw-Hill.

Lesseig, K., Hine, G., Na, G. S., & Boardman, K. (2019). Perceptions on proof and the teaching of proof: a comparison across preservice secondary teachers in Australia, USA and Korea. Mathematics Education Research Journal, 31(4), 393-418

Leung, A., & Or, C. M. (2007). From construction to proof: Explanations in dynamic geometry environments. In J. H. Woo., H. C. Lew., K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.), Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 177–184). Seoul, Korea: PME

Morales, G., Rubio, N., & Larios, V. (2021). Tipificación de argumentos producidos por las prácticas matemáticas de alumnos del nivel medio en ambientes de geometría dinámica. Bolema, 35(70), 664-689.

Moreno-Armella, L., & Brady, C. (2018). Technological Supports for Mathematical Thinking and Learning: Co-action and Designing to Democratize Access to Powerful Ideas. In L. Ball., P. Drijvers., S. Ladel., H. S. Siller., M. Tabach., & C. Vale. (Eds.). Uses of Technology in Primary and Secondary Mathematics Education (pp. 339-350). Springer, Cham.

Moreno-Armella, L., & Sriraman, B. (2005). Structural stability and dynamic geometry: Some ideas on situated proofs. ZDM, 37(3), 130–139.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principios y Estándares para la educación matemática (M. F. Reyes, Trans). Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. (Obra original publicada en 2000).

Netz, R. (1998). Greek Mathematical Diagrams: Their Use and Their Meaning. For the Learning of Mathematics, 18(3), 33–39.

Northrop, E. (1991). Paradojas Matemáticas (R. Ortiz Vasquez, Trans), México: Unión tipográfica editorial hispanoamericana. (Obra original publicada en 1944).

Olivero, F. & Robutti, O. (2001). Measures in Cabri as a bridge between perception and theory. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), Proceedings of the 25th PME International Conference, (Vol. 4, pp. 9-16). Utrecht.

Rabardel, P. & Beguin, P. (2005). Instrument mediated activity: from subject development to anthropocentric design. Theoretical Issues in Ergonomics Science, 6(5), 429-461.

Sinclair, N., & Robutti, O. (2012). Technology and the Role of Proof: The Case of Dynamic Geometry. In: Clements M., Bishop A., Keitel C., Kilpatrick J., & Leung F. (Eds.), Third International Handbook of Mathematics Education. Springer International Handbooks of Education (Vol. 27, pp. 571-596). Springer, New York.

Sriraman, B., & Umland, K. (2020). Argumentation in Mathematics Education. In S. Lerman, (Ed.), Encyclopedia of Mathematics Education (pp. 63–66). Springer, Dordrecht.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), Research design in mathematics and science education (pp. 267–307). Hillsdale, NJ: Erlbaum

Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2017). Research - based interventions in the area of proof: the past, the present, and the future. Educational Studies in Mathematics, 96(2), 119-127.

Wittmann, E. C. (2021). When Is a Proof a Proof? In E.C. Wittmann. (Ed.), Connecting Mathematics and Mathematics Education (pp. 61–76). Springer, Cham.

INTERACTION WITH DYNAMIC REPRESENTATIONS TO ARGUE ABOUT THE VALIDITY OF A GEOMETRY CONSTRUCTION

INTERACCIÓN CON REPRESENTACIONES DINÁMICAS PARA ARGUMENTAR SOBRE LA VALIDEZ DE UNA CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA

María Alejandra Calderón González
CINVESTAV
alejandra.calderon@cinvestav.mx

Luis Enrique Moreno Armella
CINVESTAV
lmorenoa@cinvestav.mx

From mathematics education, a great variety of studies have focused on analyzing the presence of digital technology from different points of view. Those who work with proof and argumentation have resisted presenting results with a technological component, due to the idea of formality associated with those terms, which has increased the existing tension between the theoretical and empirical nature of mathematics. Taking into consideration that with the presence of environments such as dynamic geometry software (DGS) the student can access to dynamic representations, we seek to understand the impact of the interaction with these representations on the arguments proposed by the students. For this, we carried out an exploratory and descriptive study whose results show that the interaction with dynamic representations provides students with validation tools different from those on paper.

Keywords: Reasoning and Proof.

Introduction and background

To argue and to validate propositions are skills that human beings need to function in society. From very early on, one of the educational objectives is to promote the participation of students for the understanding and development of arguments. For example, the NCTM (2000) proposes that "By the end of secondary school, students should be able to understand and produce mathematical proofs —arguments consisting of logically rigorous deductions of conclusions from hypotheses—and should appreciate the value of such arguments" (p. 56). All this has been analyzed from the perspective of the teacher (Bleiler et al, 2014; Lesseig et al, 2019; Dickerson and Doerr, 2014), from the student's productions (Buchbinder and Zaslavsky, 2011), and from the incorporation of digital technology. (Leung and Or, 2007; Olivero and Robutti, 2001; Sinclair and Robutti, 2012).

In the classroom, the teacher is the one who promotes the development of arguments and proofs, consequently, research has been developed to explore the teachers' ideas on this subject. (Bleiler et al, 2014; Lesseig et al, 2019). A finding is that teachers with few years of experience consider formality and logic to be relevant factors that determine the validity of an argument (Dickerson & Doerr, 2014). However, some authors (Wittmann, 2021; de Villiers, 2004) consider that this formalist emphasis on proof inhibits the importance of the comprehension process. Under this last perspective, it is concluded that the objective, in mathematics education, should be for students to develop different types of reasoning that allow them to understand and argue about the validity of a proposition (Hanna, 2014).

Geometry is one of the areas of mathematics in which the development of arguments and proofs can occur, because geometric methods are, to a certain extent, a combination of seeing and reasoning, since reason verifies logical developments and guides them about what the eyes see in the figure (Northrop, 1968). The reasoning, in geometry, is developed on a figure, so that the figure is a constituent part of the argumentative process. This same idea is shared by Netz (1988) who states that, in the case of classical Greek geometry, the diagram is the essence of the proof.

In geometry class, students are expected to express their reasoning to illustrate the generality of a fact from the diagram, however, this is not always possible because they usually generalize from a single case (Stylianides and Stylianides, 2017). For example, they think that the median and perpendicular bisector of a triangle are the same object because when they are drawn with a ruler and compass, they coincide for the constructed triangle (isosceles). These types of situations have made uncertainty about the generality of an important fact in promoting the need to produce deductive proofs in students (Buchbinder & Zaslavsky, 2011). However, when the representations are dynamic (e.g., presented in GeoGebra) a high level of certainty can be generated by dragging points of a construction and observing that the properties are maintained across the different resulting figures. This perception of the permanence of a property (which would no longer be accidental), is what leads to proposing strategies and functions of the proof that are different from the traditional one (de Villiers, 2004). In addition, access to a digital screen has promoted the study of the impact of digital technologies on the change suffered in the reasoning and proofs proposed by students.

There are many investigations in which the use of dynamic geometry in argumentation and proof processes is analyzed from different perspectives. Some have focused on typifying the arguments proposed by students, concluding that most of them are empirical (Morales et al., 2021); Other studies have analyzed how interaction with dynamic geometry objects can serve as preliminary work to propose and build deductive/theoretical proof (Leung and Or, 2007; Olivero and Robutti, 2001; Dello-Iacono, 2021). However, it has also been recognized that the interaction with dynamic representations can produce new forms of genuine reasoning (Moreno-Armella and Brady, 2018) and therefore establish new ideas about what a proof means when working with digital representations. The study reported here investigated how is the interaction between the student and the dynamic representations when making constructions and arguing about their validity?

Considering the importance of the interaction between the student and the dynamic representations, we present the theoretical construct of co-action, extending some ideas of instrumental genesis. We will present an overview of the argumentation that does not express the need for a level of formality.

Theoretical perspective

More and more curricular structures are being inhabited by digital technology through representation systems that react immediately to student actions, allowing, on the one hand, that some activities that can be developed with pencil and paper, are carried out in a more efficient way, and avoid calculation errors —the tool as an amplifier—. However, the executable nature of these representations makes it possible for the student to transform their knowledge and access new ideas —the tool as a conceptual reorganizer—. This is particularly tangible in dynamic geometry environments (Moreno-Armella and Sriraman, 2005).

The action of dragging a vertex of a triangle, for example, generates a response from the digital environment that gradually reveals the structural nature of the construction that has been made. There is a new exploration space for the student since the digital screen is a space that dialogues with the student through digital representations. The performance of the representations translates into the responsiveness of the medium during an exploration and contributes to the development of new ways of thinking. It ends up generating a dialectic that has been studied as instrumental genesis (Rabardel and Beguin, 2005), but in a classroom you learn from, with and through others. There are ways to articulate one's own thinking with the thinking of others, including their experiences with the present digital medium. This cognitive co-action (Hegedus and Moreno-Armella, 2010) is a central feature of instrumental mediation.

Although the possibilities opened by the digital means of numerical computation and visualization have questioned the traditional proof on paper and pencil as the only mathematical validation criterion, located in the field of mathematics education and seeing the construction of meaning as a central objective of learning, we consider that there are, apart from the traditional one, other ways to build the justification of a proposition (let's say geometric), in the classroom. The exploration of a geometric situation (our interest here) finds a theoretically controlled response from the side of the digital mediator—for example, GeoGebra. By advancing an exploration, the student finds on the screen a response to her actions through the plasticity of the representations. In this way, the mathematical understanding of it finds and discards routes of approximation to a plausible answer to a problem or to a demand for justification. Therefore, mathematical arguments can be approached from a general perspective as a line of reasoning that aims to show and/or convince that a result (a general statement about an object, a solution to a problem, a calculation) is correct (Sriraman and Umland, 2020; Hanna, 2020). Our work responds to the lines described before.

Methodology

We place our research within a qualitative approach, which is focused on understanding, deepening, and describing phenomena through the perspective of the participants (Hernández et al., 2010). In this case we seek to understand the interaction with the dynamic representations when the student proposes arguments. We follow the line of exploratory and descriptive research (Steffe and Thompson, 2000) as we seek to familiarize ourselves with the ways and means of operating of the participants.

The participants were 6 mathematics teachers who were taking a geometry course as part of a master's program. For this report, we describe the case of Ana who said she wasn’t familiar with the contents of geometry (because she has never taught it and only took one course during her undergraduate degree) and who showed great skills in using GeoGebra.

The questionnaire proposed to the participants consisted of six constructions that they had to make and argue why their solution was valid. Subsequently, a semi-structured interview was conducted with each participant to deepen their arguments/reasoning and their interaction with the digital medium.

For the analysis of the data, the fragments of the interview were extracted in which a process was evidenced where the students carried out actions on the digital medium, they interpreted the response of the medium (the information on the screen) and this information led them to carry out new actions. In general, we analyze how this process contributed to the students being able to argue about the validity of the construction.

Results

In this section we analyze the interactions of students with the digital environment, particularly the nature of the arguments that are produced thanks to said interaction.

GeoGebra as an amplifier

The environment is, initially, an amplifier that allows students to make explicit their ideas about circles, ellipses, perpendicular bisectors, and other geometric objects. At that time her ideas have not yet been affected by the new system of representation. We illustrate this idea with the work of Ana, who solves the following problem: given an angle and a line transversal to the sides of the angle, find a point on the transversal equidistant from the sides of the angle. In her written solution proposal, Ana states that the point sought is at the intersection of the bisector and the transversal, so during the interview she performs the construction, which leads to the following dialogue:

[1]E: What did you draw there?
[2]A: A bisector.
[3]E: Why the bisector?
[4]A: Because the bisector will give me all the points that are equidistant from (...) both sides.

Ana's construction is guided by her theoretical knowledge, so the digital medium (GeoGebra) is used as a tool that allows her to construct the bisector of the given angle almost identically to how she would do it with pencil and paper.

Regarding the argument, Ana concludes that the point of intersection between the bisector and the transversal is equidistant from the sides of the angle because there is a general rule linked to the bisector that allows her to affirm said equidistance (line 4, previous dialogue).

GeoGebra as a conceptual reorganizer

The digital environment has become a conceptual reorganizer when the student's reasoning is transformed by the presence of the digital mediator, so that the student reconfigures her arguments including the mediator's response. This is illustrated when Ana must prove that the points of the bisector are equidistant from the sides of an angle, a fact that is usually proved by determining two congruent triangles, however, Ana uses another strategy (see Figure 1) and says:

[5]A: Why equidistant? Because, well (...) I can draw this circumference with center here (points to H) that is tangent to this side and to this (points to the two sides of the angle).
[6]E: Ok. And does being able to draw a circle allow me to check the equidistance?
[7]A: Ujum (constantly drag point B around the screen).
[8]E: Why? what characteristic does it give? why not an ellipse, or a square?
[9]A: Ah. Well, because the distance from the center to any point is the same, from here as from here (indicates two points on the circumference).

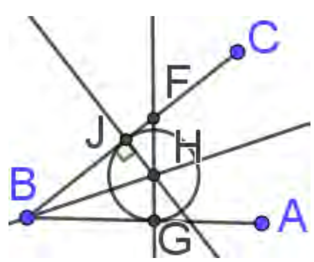

Figure 1: Construction of Ana to prove a bisector property

To prove that the points of the bisector are equidistant from the sides of the angle, Ana, guided by her knowledge of the properties of circles (line 9), constructs a circle with center at H that is tangent to one of the sides of the angle (BC), anticipating that the circumference will be tangent to the other side. The response given by the representation, thanks to the accuracy of the lines and the geometry embedded in that environment, allows Ana to configure her argument based on what she sees on the screen. In this same sense, Ana uses the drag function to illustrate the generality of the fact when she drags one of the points of the construction and the response given by the environment is that the circumference remains tangent to both sides of the angle.

Regarding Ana's argument, she concludes that the points of the angle bisector are equidistant from the sides of the angle because she can draw a circle that is tangent to both sides of the angle (line 5). In this case, the guarantee of the argument is a rule that she establishes as general thanks to her knowledge of the properties of the circle and the co-action with the dynamic representation. The presence of the dynamic environment in Ana's argument is evidenced in two moments: first with the accuracy of the lines, since if she were working on paper the tangency might not occur or it would be her will that would make the circumference tangent. The second moment occurs when she drags a point of the construction (in this case the vertex of the angle), since it is an action that is allowed by the digital environment and differentiates it from working with paper and pencil.

GeoGebra as a guide

The digital environment is "expert in geometry" so that it can impact the student's reasoning through a process where hypotheses or conjectures are raised. This can occur from the persistent observation of a fact that modifies the geometric ideas of the student. This would occur when evaluating the response of the digital medium. We observe this dialectical process when Ana is proposed to construct the bisector of an angle without using the tool that is pre-built in the digital environment – GeoGebra in this case – and then she proves that it is indeed the bisector.

[10]A: Let me try it.
[11]E: What are you going to try?
[12]A: If (...) if tracing any of these (...) if any of these (points to HJ and HG in Figure 1) it gives me this point here (points to H), and that point, well, it will be part of the bisector.

Ana constructs an angle NML and a point O on MN, then constructs a line perpendicular to MN through O and tries to construct a line perpendicular to ML, but just moves the pointer over segment ML (see Figure 2) and realizes that the point cannot be arbitrarily located when it says:

[13]A: Can't be anyone.

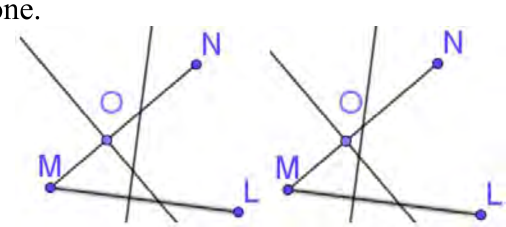

Figure 2: Ana dragging to build the desired perpendicular line

In this case, Ana's construction is guided by her intuition and the response from the digital environment can be interpreted as the possible locations of the perpendicular line to ML and the possible points of intersection of the two perpendicular lines. The response of the environment is interpreted by the previous ideas that Ana had thanks to her interaction with her previous representation (line 12), which allow her to affirm that the point on ML must have some characteristic that she does not know (line 13).

Continuing her exploration, Ana begins to use GeoGebra as an environment to guide her reasoning, as she constructs a point P on segment LM and the line perpendicular to that segment through P, then determines point Q as the intersection of the two lines perpendiculars and constructs the circle with center at Q and radius QO. She finally moves P until it seems that the circle with center at Q is tangent to ML through P.

The construction of the circumference by Ana shows the presence of a geometric fact that has been acquired thanks to the interaction with the digital environment, in which a line bisects an angle if and only if when a circle is constructed with center on the bisector and tangent to one side of the angle becomes tangent to the other side (line 5). This idea has been incorporated into Ana's construction of the bisector object, and now it is part of her conceptual tools that allow her to state whether a point is a bisector point or not.

Continuing with the interaction with the digital environment, Ana conjectures about the location of P (for example, that it is the midpoint of ML) and performs the respective constructions, but thanks to the responses of the digital environment through the drag, she understands that her hypotheses are not correct. She moves the point P on the segment ML and observes that the point of intersection between the circumference and the perpendicular line to ML moves when P moves, therefore, she names R as point of intersection and decides to use the “Trace" tool. The latter shows her the locus of R when P moves (see Figure 3). Seeing the result, Ana affirms that she would need to determine P and decides to change her strategy.

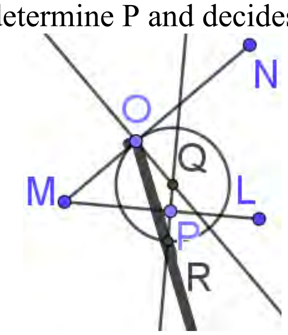

Figure 3: Using the “Trace” tool

Here we underline two types of interaction with the digital environment. In the first, Ana searches within her geometric knowledge for ideas that allow her to hypothesize about the location of P. In this case, the response of the digital environment is the location of the point requested by Ana, as the midpoint of ML, and this is contrasted with Ana's previous ideas. In the second interaction, she does not start from geometric ideas, but from the behavior of the digital representation of objects, so that the answer that is observed on the screen is the behavior of point R. So, Ana tries to associate this response with her prior knowledge and, unable to do so, decides to use another strategy.

Ana decides to re-explore the initial configuration (the one shown in Figure 1) and after moving points A, B and C, she decides to build a circle with center M and radius MO.

[14]: And why did you come up with that circumference?
[15]: (drag point P until the circle centered at Q is tangent to both sides of the angle) Ah, yes, it is!

Seeing that her new hypothesis turns out to be correct, Ana decides to eliminate the point P that she had constructed and now constructs it as the point of intersection of the circle with center in M with the segment ML. But this time she does not construct Q as the point of intersection of the two perpendiculars, but rather she determines it with the midpoint of OP and constructs the line MQ as a bisector. To prove that the line is the bisector, she constructs the circle with center at Q and radius QO, but since Q is not the point of intersection of the two perpendicular lines, then the circle does not turn out to be tangent to the sides of the angle (see Figure 4). Ana moves the points of her construction and doubts that the constructed line is the bisector, so she decides to use the "bisector" tool that constructs it from three points and notices that the bisector line coincides with MQ, so she reevaluates the construction of the circle with center at Q. Finally, Ana constructs the circle with center at the intersection of the two perpendiculars and thus checks that the constructed line is the bisector of the angle LMN.

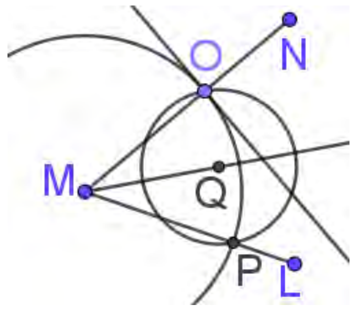

Figure 4: Construction of a circle that is not tangent to both sides of the angle

In general, the construction of Ana is guided by the observations about the executable representation and the constant dialogue with the digital environment. This environment is used as a resource that allows you to explore starting from hypotheses (such as the idea illustrated in Figure 2) or searching for hypotheses thanks to the interaction with the dynamic representation—strategy presented in Figure 3 and when exploring Figure 1 again one—.

On Ana's argument, she concludes that the constructed line is the bisector of the angle because she can construct a circumference that is tangent to the two sides of the angle and remains tangent during the drag. In this case, the argument guarantee is a digital validation rule that she has built into her knowledge (line 5). We affirm that this is a digital validation rule because when the environment responds with a circumference that is not tangent (Figure 4), she thinks that the constructed line is not a bisector, because an idea about this object that is part of her previous knowledge is that a line is a bisector if and only if the tangent circle can be drawn.

An interesting fact about Ana's process is that when she draws the bisecting line and the environment responds by matching said line with the already constructed line, namely MQ (Figure 4), she does not use said coincidence to argue that the constructed line is the bisector of the angle. Only when she constructs the tangent circle does she consider that she has proven that her construction is correct. Validation rules are linked to the continuous process of concept formation and acquisition.

Final words

This work has allowed us to observe different interactions when the mediation of dynamic representations is used during geometric construction tasks and how this mediation affects the validation processes. We report three uses of the digital environment: i) as a constructive partner where the response of the environment is not part of the plot, ii) as a test environment where the interaction with the environment plays an important role in the plot, and iii) The digital environment as a guide that allows contrasting and finding solution strategies. As in the previous case, interaction with the environment is crucial in the argument.

The different interactions that we analyzed allowed us to observe hybrid forms of interaction, that is, the presence of geometric ideas previously developed in pencil and paper that manifest themselves during advanced reasoning in the context of dynamic geometry. Ana's reasoning is aided by the resources offered by the digital medium to establish that the circumference will always be tangent to the other side of the angle. Indeed, Ana reasons about a representation that gives her different information from what she had in a static medium. But could it be said that Ana's proof is deductive? This questioning leads us to ask ourselves a question that is even broader: what characterizes a deductive proof in the digital medium?

We offer here a starting point towards the characterization of a digital evidence.

References

Bleiler, S. K., Thompson, D. R., & Krajčevski, M. (2014). Providing written feedback on students' mathematical arguments: Proof validations of prospective secondary mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 17(2), 105-127.

Buchbinder, O., & Zaslavsky, O. (2011). Is this a coincidence? The role of examples in fostering a need for proof. *ZDM*, 43(2), 269-281.

Dello Iacono, U. (2021). From Argumentation to Proof in Geometry Within a Collaborative Computer-Based Environment. *Digital Experiences in Mathematics Education, 7*(3), 395–426.

De Villiers, M. (2004). Using dynamic geometry to expand mathematics teachers' understanding of proof. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 35*(5), 703–725.

Dickerson, D. S., & Doerr, H. M. (2014). High school mathematics teachers' perspectives on the purposes of mathematical proof in school mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(4), 711-733.

Hanna, G. (2014). The width of a proof. *PNA, 9*(1), 29-39.

Hanna, G. (2020). Mathematical Proof, Argumentation, and Reasoning. In S. Lerman, (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 561–566). Springer, Dordrecht.

Hegedus, S. J., & Moreno-Armella, L. (2010). Accommodating the instrumental genesis framework within dynamic technological environments. *For the Learning of Mathematics*, *31*(1), 26-31.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. (5ta ed.) McGraw-Hill.

Lesseig, K., Hine, G., Na, G. S., & Boardman, K. (2019). Perceptions on proof and the teaching of proof: a comparison across preservice secondary teachers in Australia, USA and Korea. *Mathematics Education Research Journal*, *31*(4), 393-418

Leung, A., & Or, C. M. (2007). From construction to proof: Explanations in dynamic geometry environments. In J. H. Woo., H. C. Lew., K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 177–184). Seoul, Korea: PME

Morales, G., Rubio, N., & Larios, V. (2021). Tipificación de argumentos producidos por las prácticas matemáticas de alumnos del nivel medio en ambientes de geometría dinámica. *Bolema*, *35*(70), 664-689.

Moreno-Armella, L., & Brady, C. (2018). Technological Supports for Mathematical Thinking and Learning: Co-action and Designing to Democratize Access to Powerful Ideas. In L. Ball., P. Drijvers., S. Ladel., H. S. Siller., M. Tabach., & C. Vale. (Eds.). *Uses of Technology in Primary and Secondary Mathematics Education* (pp. 339-350). Springer., Cham.

Moreno-Armella, L., & Sriraman, B. (2005). Structural stability and dynamic geometry: Some ideas on situated proofs. *ZDM, 37*(3)*,* 130–139.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Netz, R. (1998). Greek Mathematical Diagrams: Their Use and Their Meaning. *For the Learning of Mathematics*, *18*(3), 33–39.

Northrop, E. (1991). *Paradojas Matemáticas* (R. Ortiz Vasquez, Trans), México: Unión tipográfica editorial hispanoamericana. (Obra original publicada en 1944).

Olivero, F. & Robutti, O. (2001). Measures in Cabri as a bridge between perception and theory. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME International Conference,* (Vol. 4, pp. 9-16). Utrecht.

Rabardel, P. & Beguin, P. (2005). Instrument mediated activity: from subject development to anthropocentric design. *Theoretical Issues in Ergonomics Science, 6*(5), 429-461.

Sinclair, N., & Robutti, O. (2012). Technology and the Role of Proof: The Case of Dynamic Geometry. In: Clements M., Bishop A., Keitel C., Kilpatrick J., & Leung F. (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education. Springer International Handbooks of Education* (Vol. 27, pp. 571-596). Springer, New York.

Sriraman, B., & Umland, K. (2020). Argumentation in Mathematics Education. In S. Lerman, (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 63–66). Springer, Dordrecht.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267–307). Hillsdale, NJ: Erlbaum

Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2017). Research - based interventions in the area of proof: the past, the present, and the future. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(2), 119-127.

Wittmann, E. C. (2021). When Is a Proof a Proof? In E.C. Wittmann. (Ed.), *Connecting Mathematics and Mathematics Education* (pp. 61–76). Springer, Cham.