THE EVOLUTION FROM LINEAR TO EXPONENTIAL MODELS WHEN SOLVING A MODEL DEVELOPMENT SEQUENCE

EVOLUCIÓN DE MODELOS LINEALES A EXPONENCIALES AL RESOLVER UNA SECUENCIA DE DESARROLLO DE MODELOS

Luis E. Montero-Moguel
University of Texas, San Antonio
Universidad de Guadalajara
hks208@my.utsa.edu

Verónica Vargas-Alejo
Universidad de Guadalajara
vargas.av@gmail.com

Guadalupe Carmona Domínguez
University of Texas, San Antonio
guadalupe.carmona@utsa.edu

This article describes the results of an investigation based on a Models and Modeling Perspective [MMP]. We present the evolution of the models built by university students when solving a model development sequence designed to promote their learning of the exponential function. As a result, we observed that students' thinking was modified, expanded, and refined, as they developed different iterations of their models. Students' models evolved by creating, first, linear models that required direction; second, models where there was no dissociation between linear and exponential behavior; then, situated exponential models; and finally, sharable, and reusable exponential models.

Keywords: Modeling, College-level mathematics, Exponential function

In the research literature (Ärlebäck, Doerr & O'Neil, 2013; Ärlebäck & Doerr, 2018) it is mentioned that high school and undergraduate students have difficulties with the learning of the exponential function because it is a mathematical object whose learning requires a high cognitive transfer capacity. In addition, its understanding implies also understanding other concepts. For example, learning the exponential function requires students to develop covariational reasoning (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu, 2002; Thompson & Carlson, 2017). Research by Ärlebäck and Doerr (2018) and Ärlebäck, Doerr and O'Neil (2013) shows the importance of designing Model Eliciting Activities [MEAs] for students to develop knowledge related to the exponential function. Technology can support the learning of the exponential function because it allows the use of different representations and the connection between them to interpret, describe and predict phenomena, in addition to simplifying calculations. Due to its dynamic nature, technology can also support students to delve into the concepts such as variation (Stillman, Blum & Kaiser, 2013) and therefore to develop their covariational reasoning.

The problem addressed in this research was to better understand how a model development sequence can contribute to the expansion and refinement of the knowledge of exponential function developed by undergraduate students in business administration and accounting [LAEC]. The research question posed was: How did LAEC students' models and covariational reasoning - related to the exponential function- evolve when solving a model development sequence based on real-life problems, with the support of technology?

Conceptual framework

The conceptual framework of this research was based on the MMP proposed by Lesh and Doerr (2003) and the covariational reasoning framework proposed by Carlson et al. (2002).

Models and Modeling Perspective

According to the MMP, learning mathematics is a process of developing conceptual systems, which are continually modified, extended and refined based on the student's interactions with their environment (e.g., teachers and peers) and by solving problems (Lesh, 2010). Solving problems implies “differentiating, integrating, reorganizing, adapting or extending interpretation systems that are in intermediate stages of development” (Lesh, 2010, p. 27). Cycles of Modeling are interpretations that students exhibit when solving MEAs, in which the ways of thinking are repeatedly expressed, tested, and revised (Lesh, 2010; Sevinc & Lesh, 2018). From the MMP, models are defined as:

> Conceptual systems (consisting of elements, relations, operations, and rules governing interactions) that are expressed using external notation systems, and that are used to construct, describe, or explain the behaviors of other system(s)—perhaps so that the other system can be manipulated or predicted intelligently.
>
> A mathematical model focuses on the structural characteristics (rather than, for example, physical or musical characteristics) of the relevant systems. (Lesh and Doerr, 2003, p. 10)

In this way, the MMP proposes structuring experiences for the student, in which they express, test and refine their ways of thinking during the process of building a mathematical model to solve a situation that is presented to them. These situations, intentionally designed for students to generate models using specific mathematical ideas, are called Model Eliciting Activities [MEAs], and they are situated in everyday contexts (Doerr, 2016; Lesh & Doerr, 2003; Aliprantis & Carmona, 2003). As in everyday life, these situations are open and can be solved in many ways. Therefore, students generate various approaches and levels of sophistication of mathematical thinking that are explicitly expressed in the models they build.

Lesh, Cramer, Doerr, Post and Zawojewski (2003) propose a standard organizational scheme for model development curricular sequences composed of a MEA, a Model Exploration Activity [MXA] and a Model Adaptation Activity [MAA].

A proposal to analyze the types of models that students build when solving a MEA is the “MEA Quality Assessment Guide” (Lesh, 2010, p. 33) designed to help teachers and students evaluate the quality and level of sophistication of the models they develop in response to MEAs. The evaluation is proposed in terms of the relevance of the model developed by the students in solving the situation that has been presented to them in the MEA, identifying five levels. The solution: a) requires redirection, b) requires major extensions or refinements, c) requires only minor editing, d) is useful for these specific data given. and e) is sharable and reusable.

Conceptual framework for covariational reasoning

Learning exponential functions implies that students develop a covariational reasoning. That is, "the cognitive activities involved in the coordination two varying quantitative while attending to the ways in which they change in relation to each other" (Carlson et al., 2002, p. 124). The conceptual framework proposed by Carlson et al. (2002) is oriented to the study of covariational reasoning that students develop when solving problems that contain situations that involve the use of two quantities that change simultaneously. Four of the five levels of covariational reasoning identified by Carlson are shown in Table 1.

Table 1: Four levels of covariational reasoning from Carlson et al. (2002, p. 358)

Level 1 (L1). Coordination
At the coordination level, the images of covariation can support the mental action of coordinating the change of one variable with changes in the other variable (MA1).
Level 2 (L2). ***Direction***
At the direction level, the images of covariation can support the mental action of coordinating the direction of change of one variable with changes in the other variable. The mental actions identified as MA1 and MA2 are *both* supported by L2 images.
Level 3 (L3). ***Quantitative Coordination***
At the quantitative coordination level, the images of covariation can support the mental actions of coordinating the amount of change in one variable with changes in the other variable. The mental actions identified as MA1, MA2 and MA3 are supported by L3 images.
Level 4 (L4). ***Average Rate***
At the average rate level, the images of covariation can support the mental actions of coordinating the average rate of change of the function with uniform changes in the input variable. The average rate of change can be unpacked to coordinate the amount of change of the output variable with changes in the input variable. The mental actions identified as MA1 through MA4 are supported by L4 images.

Based on these two theories, Montero-Moguel & Vargas-Alejo (2021) proposed a classification of models called "Guide for the evaluation of models related to the concept of function" [GEMF] that allows describing the evolution of the models and the covariational reasoning developed by the students when solving MEAs where the concept of exponential function underlies.

Methodology

The research was qualitative because the interest was to study the development process of students' concept of exponential function in order to identify and describe the evolution of the models developed during the model development sequence. The research participants were 10 first-semester university-level students (women and men). The students were in a course focusing on mathematics applied to business. Before they were exposed to the model development sequence designed for this study, the students had not covered the topic of exponential function as part of in this course.

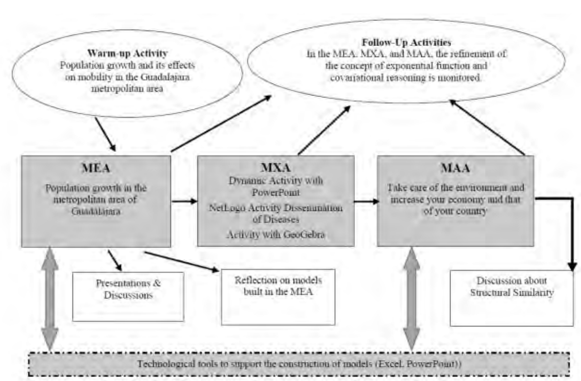
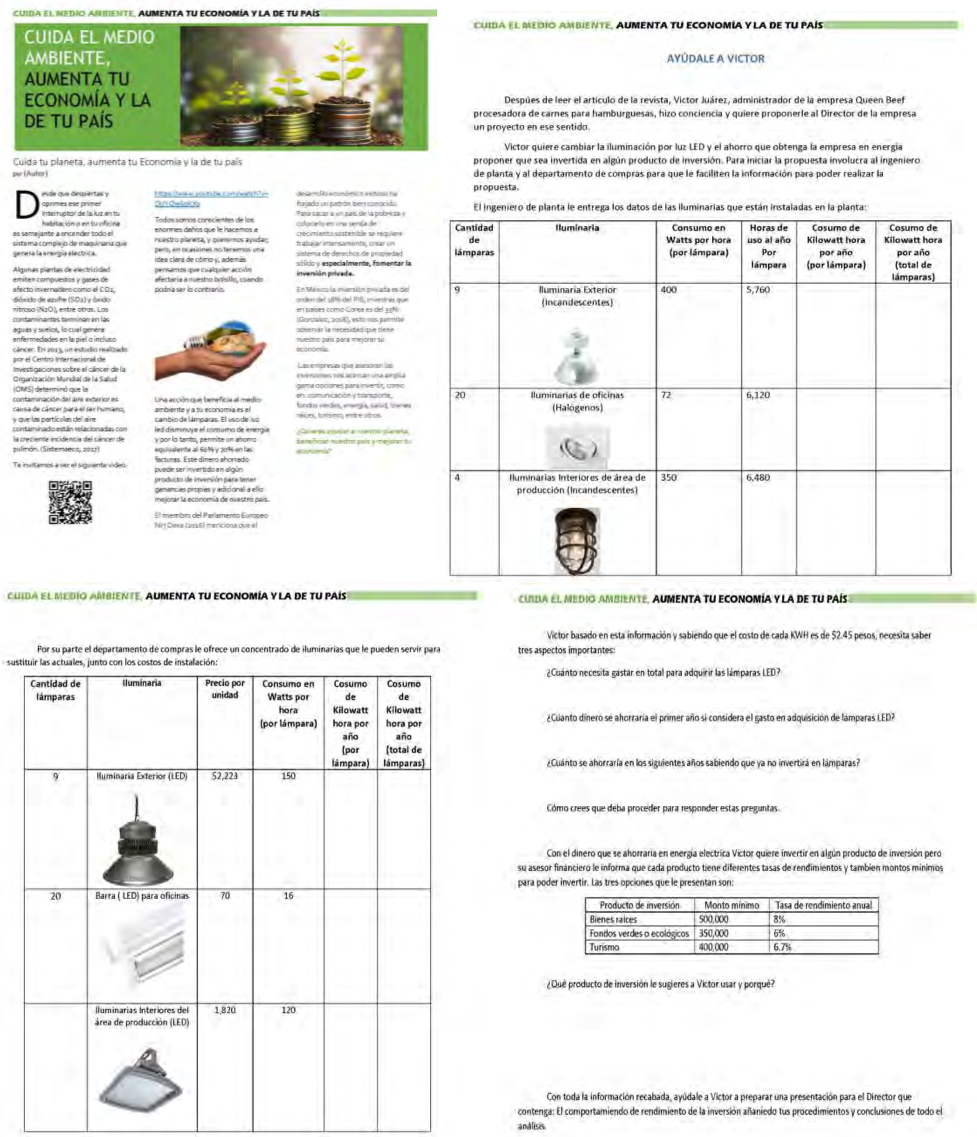


Figure 1: Didactic sequence diagram

The model development sequence was designed based on the proposal of Lesh et al. (2003). It was made up of three activities (Figure 1): a) MEA in the context of population growth

(Montero-Moguel &Vargas Alejo, 2021), b) MXA divided into three parts, PowerPoint activity, NetLogo activity, and GeoGebra activity, c) MAA in the context of taking care for the environment and investments.

The MEA and MAA were designed with the same structure to elicit students' conceptions of exponential function, including three parts: a newspaper designed for this MEA, context questions, and a situation. The newspaper and the situation of the MAA are shown in Figure 2.



CUIDA EL MEDIO AMBIENTE, **AUMENTA TU ECONOMÍA Y LA DE TU PAÍS**

CUIDA EL MEDIO AMBIENTE, AUMENTA TU ECONOMÍA Y LA DE TU PAÍS

Cuida tu planeta, aumenta tu Economia y la de tu país
por (Autor)

Desde que despiertas y oprimes ese primer interruptor de la luz en tu habitación o en tu oficina es semejante a encender todo el sistema complejo de maquinaria que genera la energía electrica.

Algunas plantas de electricidad emiten compuestos y gases de efecto invernadero como el CO_2, dióxido de azufre (SO_2) y óxido nitroso (N_2O), entre otros. Los contaminantes terminan en las aguas y suelos, lo cual genera enfermedades en la piel o incluso cáncer. En 2013, un estudio realizado por el Centro Internacional de Investigaciones sobre el cáncer de la Organización Mundial de la Salud (OMS) determinó que la contaminación del aire exterior es causa de cáncer para el ser humano, y que las partículas del aire contaminado están relacionadas con la creciente incidencia del cáncer de pulmón. (Sistemaeco, 2017)

Te invitamos a ver el siguiente video.

Todos somos conscientes de los enormes daños que le hacemos a nuestro planeta, y queremos ayudar, pero, en ocasiones no tenemos una idea clara de cómo y, además pensamos que cualquier acción afectaría a nuestro bolsillo, cuando podría ser lo contrario.

Una acción que beneficia al medio ambiente y a tu economía es el cambio de lámparas. El uso de luz led disminuye el consumo de energía y por lo tanto, permite un ahorro equivalente al 60% y 70% en las facturas. Este dinero ahorrado puede ser invertido en algún producto de inversión para tener ganancias propias y adicional a ello mejorar la economía de nuestro país.

El miembro del Parlamento Europeo Nirj Deva (2016) menciona que el desarrollo económico exitoso ha forjado un patrón bien conocido. Para sacar a un país de la pobreza y colocarlo en una senda de crecimiento sostenible se requiere trabajar intensamente, crear un sistema de derechos de propiedad sólido y **especialmente, fomentar la inversión privada.**

En México la inversión privada es del orden del 18% del PIB, mientras que en países como Corea es del 33% (Gonzalez, 2018), esto nos permite observar la necesidad que tiene nuestro país para mejorar su economía.

Las empresas que asesoran las inversiones nos acercan una amplia gama opciones para invertir, como en: comunicación y transporte, fondos verdes, energía, salud, bienes raíces, turismo, entre otros.

¿Quieres ayudar a nuestro planeta, beneficiar nuestro país y mejorar tu economía?

CUIDA EL MEDIO AMBIENTE, **AUMENTA TU ECONOMÍA Y LA DE TU PAÍS**

AYÚDALE A VICTOR

Despúes de leer el articulo de la revista, Victor Juárez, administrador de la empresa Queen Beef procesadora de carnes para hamburguesas, hizo conciencia y quiere proponerle al Director de la empresa un proyecto en ese sentido.

Victor quiere cambiar la iluminación por luz LED y el ahorro que obtenga la empresa en energia proponer que sea invertida en algún producto de inversión. Para iniciar la propuesta involucra al ingeniero de planta y al departamento de compras para que le faciliten la información para poder realizar la propuesta.

El ingeniero de planta le entrega los datos de las iluminarias que están instaladas en la planta:

Cantidad de lámparas	Iluminaria	Consumo en Watts por hora (por lámpara)	Horas de uso al año Por lámpara	Cosumo de Kilowatt hora por año (por lámpara)	Cosumo de Kilowatt hora por año (total de lámparas)
9	Iluminaria Exterior (Incandescentes)	400	5,760		
20	Iluminarias de oficinas (Halogenos)	72	6,120		
4	Iluminarias Interiores de área de producción (Incandescentes)	350	6,480		

CUIDA EL MEDIO AMBIENTE, **AUMENTA TU ECONOMÍA Y LA DE TU PAÍS**

Por su parte el departamento de compras le ofrece un concentrado de iluminarias que le pueden servir para sustituir las actuales, junto con los costos de instalación:

Cantidad de lámparas	Iluminaria	Precio por unidad	Consumo en Watts por hora (por lámpara)	Cosumo de Kilowatt hora por año (por lámpara)	Cosumo de Kilowatt hora por año (total de lámparas)
9	Iluminaria Exterior (LED)	$2,223	150		
20	Barra (LED) para oficinas	70	16		
	Iluminarias Interiores del área de producción (LED)	1,820	120		

CUIDA EL MEDIO AMBIENTE, **AUMENTA TU ECONOMÍA Y LA DE TU PAÍS**

Victor basado en esta información y sabiendo que el costo de cada KWH es de $2.45 pesos, necesita saber tres aspectos importantes:

¿Cuánto necesita gastar en total para adquirir las lámparas LED?

¿Cuánto dinero se ahorraría el primer año si considera el gasto en adquisición de lámparas LED?

¿Cuánto se ahorraría en los siguientes años sabiendo que ya no invertirá en lámparas?

Cómo crees que deba proceder para responder estas preguntas.

Con el dinero que se ahorraría en energía electrica Victor quiere invertir en algún producto de inversión pero su asesor financiero le informa que cada producto tiene diferentes tasas de rendimientos y tambien montos minimos para poder invertir. Las tres opciones que le presentan son:

Producto de inversión	Monto mínimo	Tasa de rendimiento anual
Bienes raíces	500,000	8%
Fondos verdes o ecológicos	350,000	6%
Turismo	400,000	6.7%

¿Qué producto de inversión le sugieres a Victor usar y porqué?

Con toda la información recabada, ayúdale a Victor a preparar una presentación para el Director que contenga: El comportamiendo de rendimiento de la inversión añaniedo tus procedimientos y conclusiones de todo el análisis.

Figure 2: Newspaper and situation of the MAA

The GEMF was used to analyze the data, it allowed to analyze the models built by the students when they solved the model development sequence (Table 2).
The experimentation lasted three sessions of three hours each. It was important to collect data from different sources to support the phenomenon studied, including: student worksheets, audio recordings, video recordings, and teacher's log.

Table 2: Classification of models

Model T1. The model requires direction
The model is not associated with the function (exponential, in this case) that allows to better describe, interpret, predict and control the situation. Students associate a linear behavior to the situation. Students need additional comments from their classmates or questions that encourage reflection by the teacher, that allow them to redirect their way of thinking. In relation to covariational reasoning, students show level 1 of Carlson et al. (2002, p. 358): “the images of covariation can support the mental action of coordinating the change of one variable with changes in the other variable (MA1)”.
Model T2. The model requires major extensions or refinements
The model is associated with the (exponential) function that best describes the situation; however, students are unable to dissociate linear behavior. The student needs to work further to obtain greater extensions or refinements. Regarding covariational reasoning associated with the function that best describes the situation, the student shows coordination and direction of the variables. Students’ reasoning relates to level 2 of Carlson et al. (2002, p. 358): " the images of covariation can support the mental action of coordinating the direction of change of one variable with changes in the other variable ".
Model T3. The model is situated
The model is associated with the (exponential) function that best describes the situation. It is only useful for the context of the situation presented. The student’s conceptual system is extended and refined by differentiating between exponential and linear behavior. In relation to covariational reasoning associated with the function that best describes the situation, students exhibit coordination, direction, and quantification of the variables. Students’ reasoning relates to level 3 of Carlson et al. (2002, p. 358): “the images of covariation can support the mental actions of coordinating the amount of change in one variable with changes in the other variable”.
Model T4. The model is sharable and reusable
The tool not only works for the proposed problem, but it would also be easy for others to modify and use it in similar situations outside the context of the situation posed. Regarding covariational reasoning associated with the function that best describes the situation, students exhibit coordination, direction, quantification, and average rate of change of the variables. Students’ reasoning relates to level 4 of Carlson et al. (2002). The images of covariation can support the mental actions of coordinating the average rate of change of the function with uniform changes in the input variable. The average rate of change can be unpacked to coordinate the amount of change of the output variable with changes in the input variable. (Carlson et al., 2002, p. 358)

Results Analysis and Discussion

A qualitative data analysis was conducted based on the following modeling cycles.

First Modeling Cycle

Models were developed during teamwork as students solved the MEA. The four teams built model T1 (Require Direction) and included only tabular representations. The students did not recognize an exponential pattern, they focused on solving the situation using linear models. Their level of covariational reasoning was level 1 (coordination) based on Carlson et al. (2002).

Models T1. Teams A and D multiplied the data included in the MEA (the initial population of 4.299 million times the growth rate of 1.7%) and obtained the value of 0.073803 (million people) that they assumed constant (Figure 3a). Team C detected that the growth for the years 2019, 2020 and 2021 was 0.073, 0.074 and 0.075 million inhabitants, respectively; they thought that the population increased 0.001 million people per year, that is, they believed that the growth

Olanoff, D., Johnson, K., & Spitzer, S. (2021). *Proceedings of the forty-third annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Philadelphia, PA.

was constant (Figure 3c). Team B model was characterized by the use of the "rule of three". A member of the team commented the following.

S4: Let's see, then we need to get the 1.7, so… would it be like a rule of three?

AÑO	2018	2019	2020	2021	2022
POBLACIÓN INICIAL	4.299	4.373	4.447	4.520	4.594
CRECIMIENTO ANUAL	0.073803	0.073803	0.073803	0.073803	0.073803
POBLACIÓN FINAL [POBLACIÓN INICIAL + CRECIMIENTO]	4.373	4.447	4.520	4.594	4.668

Nota: Datos en millones de habitantes

a) Teams A and D model

D	E	F	G	H
4.299	1.70%	0.073083		
AÑO 2019	0.034			
AÑO 2020	0.051	4.299	0.219249	4.518249

b) Team B model

2018	4.299	0.073
2019	4.372	0.074
2020	4.446	0.075

c) Team C model

Figure 3: Models first modeling cycle of the equipment

Second Modeling Cycle

These models were developed by students after they self-evaluated their first model and interacted with the teacher. Three types of models emerged.

Models T2. Teams B and D built tabular and graphical representations. The teams did not dissociate the exponential growth from the linear. Covariational reasoning level 2 from Carlson et. al (2002)

Models T3. Team A built an exponential and situated model (Figure 4a). The representations were tabular. Covariational Reasoning Level 3 from Carlson et. al (2002).

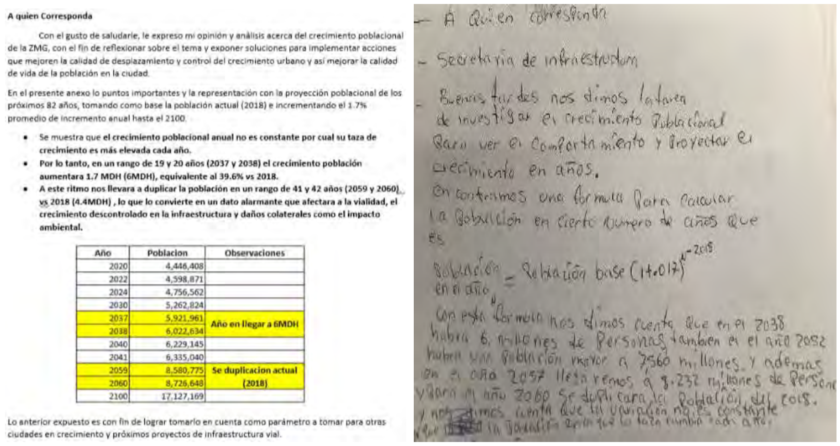
Models T4. Team C built an exponential model, integrated algebraic representations; the model was sharable and reusable (Figure 4b). Covariational reasoning level 4 from Carlson et. al (2002).

Third Modeling Cycle

These models were developed after each team of students engaged in a whole class discussion. Prior to this, students wrote their letters individually as a homework assignment.

Models T3. Students S4 and S5 included graphical and tabular representations in their models; they expressed that growth was not constant and it depended on the rate of 1.7%. The model was situated.

Models T4. Eight students included tabular, graphical, verbal, and algebraic representations in their models, which are modifiable and reusable for similar situations outside the context of the population growth situation.



a) Model team A b) Model team C

Figure 4: Example of models built in the second modeling cycle

Fourth Modeling Cycle

Models were developed when the students solved the MAA. The students exhibited model T4. The characteristics of the fourth modeling cycle were the following.

5. Two students (S4 and S5) improved their models from Model T3 to T4. They included a diversity of representations in their models.
6. Eight students (S1, S2, S3, S6, S7, S8, S9, and S10) affirmed their model T4.
    - a. Four students (S3, S8, S9, and S10) mathematized based on only one investment rate to explain the situation.
    - b. Four students (S1, S2, S6, and S7) mathematized based on the three investment rates.
        - i. Three students (S1, S2, and S6) proposed the choice of only one investment product (green funds) (Figure 5).
        - ii. One student (S7) proposed a combination of different investment products.

Figure 5: Example of models from the fourth modeling cycle

Figure 5 is an example of the model T4 built by the students in the fourth cycle, during which students dissociated the linear and exponential behavior and included different representations (verbal, tabular, graphical, and algebraic). Regarding the linear function, students used it to describe energy savings and identified a constant growth. Regarding the exponential function, students included an analysis of three types of investment instrument at ten years, which allowed them to propose a form of investment portfolio. A summary of the evolution of the linear to exponential models built by the students can be observed in Table 3.

Table 3: Scheme showing the evolution of the models

Team	Student	Type of Model built by the students			
		First cycle MEA (Team)	Second cycle MEA (Team)	Third cycle MEA (Individual)	Fourth cycle MAA (Individual)
A	S1	T1	T3	T4	T4
	S2	T1	T3	T4	T4
B	S3	T1	T2	T4	T4
	S4	T1	T2	T3	T4
	S5	T1	T2	T3	T4
C	S6	T1	T4	T4	T4
	S7	T1	T4	T4	T4
	S8	T1	T4	T4	T4
D	S9	T1	T2	T4	T4
	S10	T1	T2	T4	T4

Conclusions

This analysis allowed us to address the research question, how did LAEC students' models and covariational reasoning - related to the exponential function- evolve when solving a model development sequence based on real-life problems, with the support of technology?

The evolution of the models developed by students was observed in each modeling cycle. In the first cycle, all the teams built T1 models. They identified variables, but did not understand the type of relationship between them. The ideas and procedures associated with the situation were linear. The teams gave more importance to the answers obtained for the situation than to the construction of models.

In the second cycle, three types of models were built (T2, T3, and T4) characterized by various attributes, including: a) Model T2: Teams B and D used language associated with the linear function to describe the exponential function. They failed to dissociate linear behavior from exponential. b) Model T3: Team A exhibited coordination, direction, and quantification of the variables. This team dissociated linear behavior from exponential; the model was situated. c) Model T4: Team C exhibited coordination, direction, quantification, and average rate of change between the variables. This team not only dissociated linear behavior from the exponential, but they also built useful models for a specific client (sharable) who was interested in solving the situation, and any similar situation with different initial conditions (reusable).

In the third modeling cycle, the students individually reconstructed the models, based on the group discussions generated in class. They all participated in the evaluation and self-evaluation of their models. Students' progress in developing their knowledge and skills to mathematize evolved to situated (T3), and shareable and reusable models (T4). In the fourth modeling cycle, the students, individually, transferred their knowledge obtained by performing the MEA and MXA, which allowed them to deepen their knowledge regarding concepts such as: variation, exponential function, variables and use of different representations. When solving the MAA, the refinement of ideas was noted, all the students built sharable and reusable models (T4).

References

Aliprantis, C. D., & Carmona, G. (2003). Introduction to an economic problem: a models and modeling perspective. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.) *Beyond constructivism: Models and Modeling perspectives on mathematics problem solving, Learning, and Teaching* (pp.255-264). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Ärlebk, J. B., Doerr, H., & O'Neil, A. (2013). A modeling perspective on interpreting rates of change in context. *Mathematical Thinking and Learning*, *15*(4), 314-336.

Ärlebk, J. B. y Doerr, H. (2018). Students' interpretations and reasoning about phenomena with negative rates of change throughout a model development sequence. *ZDM*, *50*(1-2), 187-200.

Montero-Moguel, L. & Vargas-Alejo, V. (2021). Ciclos de modelación y razonamiento covariacional al realizar una actividad provocadora de modelos [Manuscript submitted for publication]. *Educación Matemática*.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., y Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 352-378.

Doerr, H. M. (2016). Designing sequences of model development tasks. In C. R. Hirsch & A. R. McDuffie (Eds.), *Annual Perspectives in Mathematics Education 2016: Mathematical modeling and modeling mathematics* (pp. 197-205). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Lesh, R. (2010). Tools, researchable issues and conjectures for investigating what it means to understand statistics (or other topics) meaningfully. *Journal of Mathematical Modeling and Application*, *1*(2), 16-48.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modelling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In R. Lesh, y H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism. Models and Modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching* (pp. 3-34). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., Cramer, K., Doerr, H. M., Post, T. & Zawojeswski, J. S. (2003). Model Development Sequences. In R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 35-58). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Sevinc, S., y Lesh, R. (2018). Training mathematics teachers for realistic math problems: A case of modeling-based teacher education courses. *ZDM*, 50(1), 301–314.

Stillman, G. A., Kaiser, G., Blum, W. & Brown, J. P. (Eds.). (2013). *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice*. Dordrecht: Springer.

Thompson, P. W. & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

EVOLUCIÓN DE MODELOS LINEALES A EXPONENCIALES AL RESOLVER UNA SECUENCIA DE DESARROLLO DE MODELOS

THE EVOLUTION FROM LINEAR TO EXPONENTIAL MODELS WHEN SOLVING A MODEL DEVELOPMENT SEQUENCE

Luis E. Montero-Moguel
University of Texas, San Antonio
Universidad de Guadalajara
hks208@my.utsa.edu

Verónica Vargas-Alejo
Universidad de Guadalajara
vargas.av@gmail.com

Guadalupe Carmona Domínguez
University of Texas, San Antonio
guadalupe.carmona@utsa.edu

En este artículo se describen resultados de una investigación basada en la Perspectiva de Modelos y Modelación [PMM]. Se presenta la evolución de los modelos construidos por estudiantes universitarios al resolver una secuencia de desarrollo de modelos creada para propiciar el aprendizaje de la función exponencial. Como resultado, se observó que el

Olanoff, D., Johnson, K., & Spitzer, S. (2021). *Proceedings of the forty-third annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Philadelphia, PA.

pensamiento de los estudiantes se modificó, amplió y refinó, ya que los modelos evolucionaron. Primero, se construyeron modelos que requerían dirección por ser lineales; después, modelos donde no se exhibía disociación entre comportamiento lineal y exponencial; enseguida, modelos exponenciales situados; y finalmente, modelos exponenciales compartibles y reutilizables.

Palabras clave: Modelación, Matemáticas de nivel universitario, Función exponencial

En la literatura de estudios de investigación (Ärlebäck, Doerr y O'Neil, 2013; Ärlebäck y Doerr, 2018) se menciona que los estudiantes de nivel superior tienen dificultades con el aprendizaje de la función exponencial porque es un objeto matemático cuyo aprendizaje requiere una alta capacidad cognoscitiva de transferencia, ya que su comprensión implica entender otros conceptos. El aprendizaje de la función exponencial requiere que los estudiantes desarrollen un razonamiento covariacional (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu, 2002; Thompson y Carlson, 2017). Investigaciones realizadas por Ärlebäck y Doerr (2018) y Ärlebäck, Doerr y O'Neil (2013) muestran la importancia del diseño de Actividades Provocadoras de Modelos [MEAs, por sus siglas en inglés] para que los estudiantes desarrollen conocimiento relacionado con la función exponencial. La tecnología podría apoyar el aprendizaje de la función exponencial debido a que posibilita el uso de distintas representaciones y la conexión entre ellas para interpretar, describir y predecir fenómenos, además de simplificar cálculos. Debido a su carácter dinámico la tecnología puede apoyar a los estudiantes a profundizar en conceptos como variación (Stillman, Blum y Kaiser, 2013) y por lo tanto a desarrollar su razonamiento covariacional.

El problema que interesó abordar en esta investigación fue conocer cómo una secuencia de desarrollo de modelos puede contribuir a la ampliación y refinamiento del conocimiento sobre la función exponencial de estudiantes de licenciatura en administración de empresas y en contaduría [LAEC]. Por lo tanto, la pregunta de investigación que se planteó fue ¿Cómo evolucionaron los modelos y el razonamiento covariacional−relacionados con la func exponencial− de estudiantes de LAEC al resolver, con el apoyo de tecnología, una secuencia de desarrollo de modelos compuesta por problemas cercanos a la vida real?

Marco Conceptual

El Marco conceptual de esta investigación se estructuró con base en la PMM propuesta por Lesh y Doerr (2003) y el razonamiento covariacional propuesto por Carlson et al. (2002).

La Perspectiva de Modelos y Modelación

De acuerdo con la PMM, aprender matemáticas es un proceso de desarrollo de sistemas conceptuales, que se modifican de manera continua; se extienden y refinan a partir de las interacciones del estudiante con su entorno (e.g., los profesores y compañeros) y al resolver problemas (Lesh, 2010). Resolver problemas implica "diferenciar, integrar, reorganizar, adaptar o extender sistemas de interpretación que se encuentran en etapas intermedias de desarrollo." (Lesh, 2010, p. 27) Los ciclos de modelación son interpretaciones que los estudiantes exhiben al resolver las MEAs, en las cuales las formas de pensamiento se expresan, prueban y revisan repetidamente (Lesh, 2010; Sevinc y Lesh, 2018). Desde la PMM, los modelos se definen como:

> Sistemas conceptuales (que consisten en elementos, relaciones, operaciones y reglas que gobiernan las interacciones) que se expresan mediante sistemas de notación externa, y se usan para construir, describir o explicar los comportamientos de otros sistemas –Quizás de tal forma que otro sistema pueda ser manipulado o predicho de manera inteligente.

> Un modelo matemático se enfoca en las características estructurales (más que, por ejemplo, en características musicales o físicas) de los sistemas relevantes. (Lesh y Doerr, 2003, p. 10)

De esta manera, la PMM propone estructurar experiencias para el alumno, en las cuales exprese, pruebe y refine sus formas de pensamiento durante el proceso que desarrolla al generar un modelo matemático para resolver una situación problemática que le es presentada. Estas situaciones diseñadas intencionalmente para que los alumnos generen modelos utilizando ideas matemáticas específicas se llaman Actividades Provocadoras de Modelos (MEAs), y están situadas en contextos cotidianos (Doerr, 2016; Aliprantis y Carmona, 2003). Tal como sucede en la vida cotidiana, estas situaciones son abiertas y se pueden resolver de muchas maneras. Por tanto, los estudiantes generan varias aproximaciones y niveles de sofisticación de pensamiento matemático que quedan expresados de manera explícita en los modelos que generan en sus soluciones.

Lesh, Cramer, Doerr, Post y Zawojewski (2003) proponen un esquema organizacional estándar para secuencias curriculares de desarrollo de modelos compuesto por una MEA, una Actividad de Exploración de Modelos [MXA] y una Actividad de Adaptación de Modelos [MAA].

Una propuesta para analizar los tipos de modelos que los alumnos construyen al resolver una MEA es la “guía de evaluac alidad MEA” (Lesh, 2010, p. 33) dise ada para ayudar a los maestros y estudiantes a evaluar la calidad y nivel de sofisticación de los modelos que desarrollan en sus respuestas a las MEAs. La evaluación se propone en términos de la pertinencia del modelo desarrollado por los estudiantes al resolver la situación problemática que se le ha presentado en la MEA, identificando cinco niveles: a) Requiere redirección, b) Requiere mayores extensiones o refinamientos, c) Sólo requiere ediciones menores, d) Útil para estos datos específicos dados y e) Compartible y reutilizable.

Marco conceptual de razonamiento covariacional

El estudio de las funciones exponenciales implica que los alumnos desarrollen un razonamiento covariacional, es decir “actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra” (Carlson et al., 2002, p. 124). El marco conceptual propuesto por Carlson et al. (2002) se orienta al estudio del razonamiento covariacional que desarrollan los estudiantes al resolver situaciones problema que implican el uso de dos cantidades que cambian simultáneamente. Cuatro de los cinco niveles de razonamiento covariacional identificados por Carlson se observan en la Tabla 1.

Tabla 1: Cuatro niveles de razonamiento covariacional de Carlson et al. (2002, p. 358)

Nivel 1 (N1). ***Coordinación***
En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).
Nivel 2 (N2). ***Dirección***
En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 son sustentas por imágenes de N2.
Nivel 3 (N3). ***Coordinación cuantitativa***
En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes de N3.

Olanoff, D., Johnson, K., & Spitzer, S. (2021). *Proceedings of the forty-third annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Philadelphia, PA.

Nivel 4 (N4). ***Razón promedio***
En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes de N4.

A partir de estas dos teorías se propuso en Montero-Moguel y Vargas Alejo (2021) una clasificac los denominada “Guía de evaluac los relacionados con el concepto de func [GEMF] que permite describir la e los modelos y el razonamiento covariacional desarrollado por los estudiantes al resolver MEAs donde subyace el concepto de función exponencial.

Metodología

La investigación fue de tipo cualitativa, porque interesaba analizar el proceso de desarrollo de conocimiento de los estudiantes para lograr identificar y describir la evolución de los modelos que ellos desarrollan al resolver la secuencia de desarrollo de modelos para elucidar el concepto de función exponencial. Los participantes de la investigación estaban conformados por 10 alumnos (mujeres y hombres) de primer semestre de nivel universitario. Los alumnos estaban cursando la materia de matemáticas aplicadas a los negocios. Previo a la experimentación, los alumnos no habían visto el tema de función exponencial en el curso.

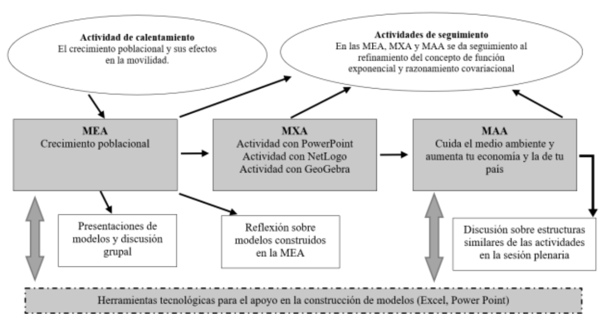
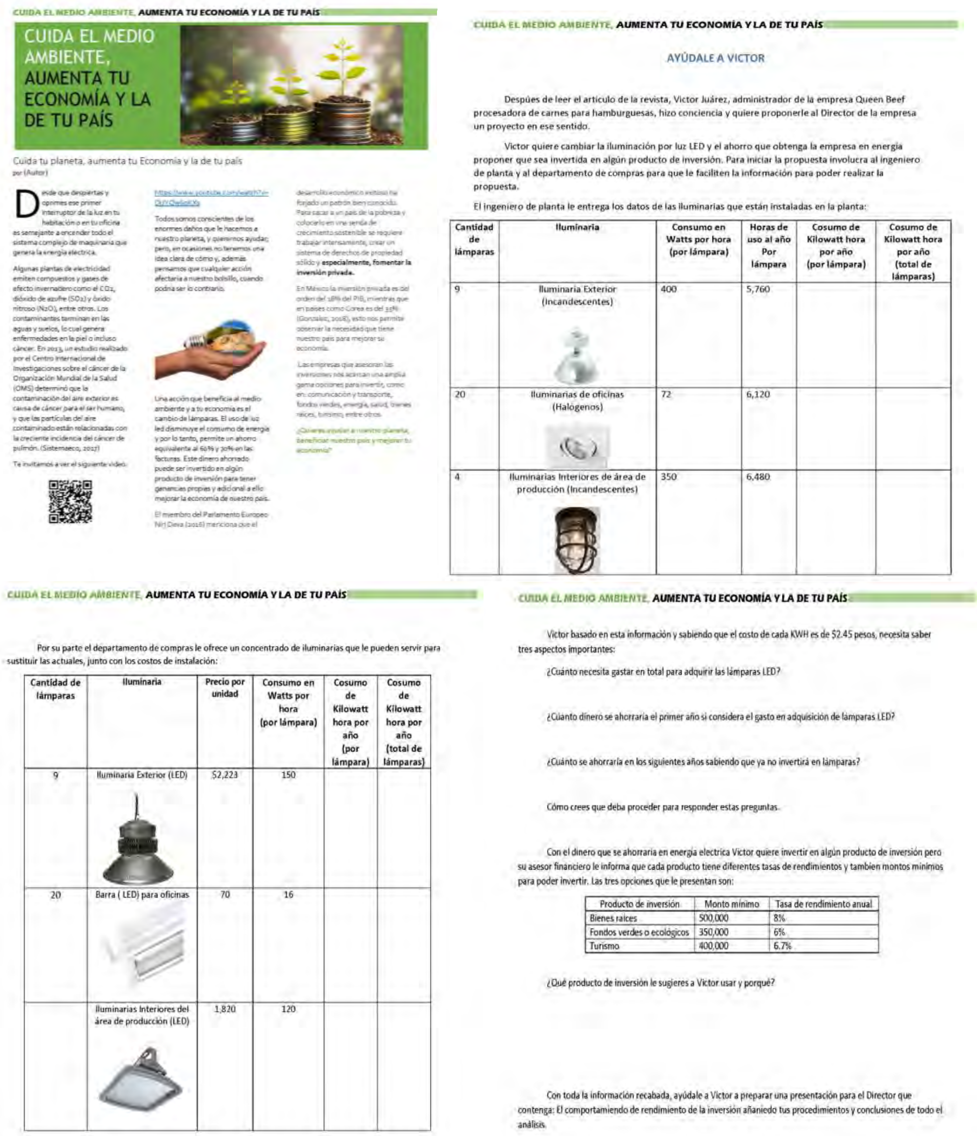


Figura 1: Esquema de secuencia didáctica

La secuencia de desarrollo de modelos se diseñó con base en la propuesta de Lesh et al. (2003). Se conformó por tres actividades (Figura 1): a) MEA en el contexto del crecimiento poblacional (Montero-Moguel y Vargas Alejo, 2021), b) MXA dividida en tres partes, actividad con PowerPoint, actividad con NetLogo y actividad con GeoGebra y c) MAA en el contexto del cuidado del medio ambiente e inversiones.

La MEA y la MAA fueron diseñadas con la misma estructura para elucidar las concepciones de los estudiantes de función exponencial, incluyendo tres partes: nota periodística diseñada exprofeso, preguntas de contexto y situación problema. La nota periodística y la situación problema de la MAA se presentan en la Figura 2.



CUIDA EL MEDIO AMBIENTE, AUMENTA TU ECONOMÍA Y LA DE TU PAÍS

CUIDA EL MEDIO AMBIENTE, AUMENTA TU ECONOMÍA Y LA DE TU PAÍS

Cuida tu planeta, aumenta tu Economía y la de tu país
por (Autor)

Desde que despiertas y oprimes ese primer interruptor de la luz en tu habitación o en tu oficina es semejante a encender todo el sistema complejo de maquinaria que genera la energía eléctrica.

Algunas plantas de electricidad emiten compuestos y gases de efecto invernadero como el CO_2, dióxido de azufre (SO_2) y óxido nitroso (N_2O), entre otros. Los contaminantes terminan en las aguas y suelos, lo cual genera enfermedades en la piel o incluso cáncer. En 2013, un estudio realizado por el Centro Internacional de Investigaciones sobre el cáncer de la Organización Mundial de la Salud (OMS) determinó que la contaminación del aire exterior es causa de cáncer para el ser humano, y que las partículas del aire contaminado están relacionadas con la creciente incidencia del cáncer de pulmón. (Sistemaeco, 2017)

Te invitamos a ver el siguiente video.

Todos somos conscientes de los enormes daños que le hacemos a nuestro planeta, y queremos ayudar; pero, en ocasiones no tenemos una idea clara de cómo y, además pensamos que cualquier acción afectaría a nuestro bolsillo, cuando podría ser lo contrario.

Una acción que beneficia al medio ambiente y a tu economía es el cambio de lámparas. El uso de luz led disminuye el consumo de energía y por lo tanto, permite un ahorro equivalente al 60% y 70% en las facturas. Este dinero ahorrado puede ser invertido en algún producto de inversión para tener ganancias propias y adicional a ello mejorar la economía de nuestro país.

El miembro del Parlamento Europeo Nirj Deva (2016) menciona que el desarrollo económico exitoso ha forjado un patrón bien conocido. Para sacar a un país de la pobreza y colocarlo en una senda de crecimiento sostenible se requiere trabajar intensamente, crear un sistema de derechos de propiedad sólido y **especialmente, fomentar la inversión privada.**

En México la inversión privada es del orden del 18% del PIB, mientras que en países como Corea es del 35% (González, 2018), esto nos permite observar la necesidad que tiene nuestro país para mejorar su economía.

Las empresas que asesoran las inversiones nos acercan una amplia gama opciones para invertir, como en: comunicación y transporte, fondos verdes, energía, salud, bienes raíces, turismo, entre otros.

¿Quieres ayudar a nuestro planeta, beneficiar nuestro país y mejorar tu economía?

CUIDA EL MEDIO AMBIENTE, AUMENTA TU ECONOMÍA Y LA DE TU PAÍS

AYÚDALE A VICTOR

Despúes de leer el articulo de la revista, Victor Juárez, administrador de la empresa Queen Beef procesadora de carnes para hamburguesas, hizo conciencia y quiere proponerle al Director de la empresa un proyecto en ese sentido.

Victor quiere cambiar la iluminación por luz LED y el ahorro que obtenga la empresa en energía proponer que sea invertida en algún producto de inversión. Para iniciar la propuesta involucra al ingeniero de planta y al departamento de compras para que le faciliten la información para poder realizar la propuesta.

El ingeniero de planta le entrega los datos de las iluminarias que están instaladas en la planta:

Cantidad de lámparas	Iluminaria	Consumo en Watts por hora (por lámpara)	Horas de uso al año Por lámpara	Cosumo de Kilowatt hora por año (por lámpara)	Cosumo de Kilowatt hora por año (total de lámparas)
9	Iluminaria Exterior (Incandescentes)	400	5,760		
20	Iluminarias de oficinas (Halógenos)	72	6,120		
4	Iluminarias Interiores de área de producción (Incandescentes)	350	6,480		

CUIDA EL MEDIO AMBIENTE, AUMENTA TU ECONOMÍA Y LA DE TU PAÍS

Por su parte el departamento de compras le ofrece un concentrado de iluminarias que le pueden servir para sustituir las actuales, junto con los costos de instalación:

Cantidad de lámparas	Iluminaria	Precio por unidad	Consumo en Watts por hora (por lámpara)	Cosumo de Kilowatt hora por año (por lámpara)	Cosumo de Kilowatt hora por año (total de lámparas)
9	Iluminaria Exterior (LED)	$2,223	150		
20	Barra (LED) para oficinas	70	16		
	Iluminarias Interiores del área de producción (LED)	1,820	120		

CUIDA EL MEDIO AMBIENTE, AUMENTA TU ECONOMÍA Y LA DE TU PAÍS

Victor basado en esta información y sabiendo que el costo de cada KWH es de $2.45 pesos, necesita saber tres aspectos importantes:

¿Cuánto necesita gastar en total para adquirir las lámparas LED?

¿Cuánto dinero se ahorraría el primer año si considera el gasto en adquisición de lámparas LED?

¿Cuánto se ahorraría en los siguientes años sabiendo que ya no invertirá en lámparas?

Cómo crees que deba proceder para responder estas preguntas.

Con el dinero que se ahorraría en energía electrica Victor quiere invertir en algún producto de inversión pero su asesor financiero le informa que cada producto tiene diferentes tasas de rendimientos y tambien montos mínimos para poder invertir. Las tres opciones que le presentan son:

Producto de inversión	Monto mínimo	Tasa de rendimiento anual
Bienes raices	500,000	8%
Fondos verdes o ecológicos	350,000	6%
Turismo	400,000	6.7%

¿Qué producto de inversión le sugieres a Victor usar y porqué?

Con toda la información recabada, ayúdale a Victor a preparar una presentación para el Director que contenga: El comportamiendo de rendimiento de la inversión añaniedo tus procedimientos y conclusiones de todo el análisis.

Figura 2: Nota periodística y situación problema de la MAA

Para el análisis de los datos se utilizó la GEMF que permite analizar los modelos construidos por los estudiantes al resolver la secuencia de desarrollo de modelos (Tabla 2).

La experimentación tuvo una duración de tres sesiones de tres horas cada una. El investigador fungió como profesor-investigador. Fue importante colectar datos de distintas fuentes que ayudaran a describir el fenómeno estudiado: hojas de trabajo de los estudiantes, audios, videos y bitácora del docente.

Tabla 2: Clasificación de modelos

Modelo T1. **El modelo requiere dirección**
El modelo no está asociado a la función (exponencial, en este caso) que permite describir, interpretar, predecir y controlar mejor la situación problema. Los estudiantes asocian un comportamiento lineal a la situación; necesitan comentarios adicionales de sus compañeros o preguntas que propicien la reflexión por el profesor, que les posibiliten redireccionar su manera de pensar. En relación con el razonamiento covariacional, los estudiantes exhiben el nivel 1 de Carlson et al. (2002, p. 358): "las imenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable".
Modelo T2. **El modelo requiere mayor extensión o refinamiento**
El modelo está asociado a la función (exponencial) que describe mejor la situación problema. Sin embargo, los estudiantes no logran disociar el comportamiento lineal de su sistema conceptual. El estudiante necesita trabajar más en la resolución del problema que le permita mayor extensión o refinamiento. Respecto al razonamiento covariacional asociado a la función que describe mejor la situación problema, los estudiantes exhiben coordinación y dirección de las variables. Se puede considerar que alcanzaron el nivel 2 de Carlson et al. (2002, p. 358): "las im nes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra".
Modelo T3. **El modelo es situado**
Está asociado a la función (exponencial) que describe mejor la situación problema es útil únicamente para el contexto de la situación problemática presentada. El sistema conceptual de los estudiantes se amplía y refina al diferenciar entre un comportamiento exponencial y lineal. En relación con el razonamiento covariacional asociado a la función que describe mejor la situación problema, los estudiantes exhiben coordinación, dirección y cuantificación de las variables. Se puede considerar que alcanzaron el nivel 3 de Carlson et al. (2002, p. 358): "las im nes de la covariaci pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra".
Modelo T4. **El modelo es compartible y reutilizable**
La herramienta no sólo funciona para el problema propuesto, sino que también sería fácil para otros modificarla y utilizarla en situaciones similares fuera del contexto de la situación problemática planteada. Respecto al razonamiento covariacional asociado a la función que describe mejor la situación problema, los estudiantes exhiben coordinación, dirección, cuantificación y razón de cambio promedio de las variables. Se puede considerar que alcanzaron el nivel 4 de Carlson et al. (2002). Las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada (Carlson et al., 2002, p. 358).

Análisis de resultados y Discusión

El análisis de los datos se hizo con base en los ciclos de modelación siguientes.

Primer Ciclo de Modelación

Se desarrolló durante el trabajo en equipo para resolver la MEA. Los cuatro equipos construyeron *modelos T1* (Requieren dirección) e incluyeron únicamente representaciones tabulares. Los alumnos no reconocieron un comportamiento exponencial. Se centraron en resolver la situación problema mediante modelos lineales. Su nivel de razonamiento covariacional fue del nivel 1 (coordinación) de acuerdo con Carlson et al. (2002).

Modelos T1. Los Equipos A y D multiplicaron los datos contenidos en la MEA (la población inicial de 4.299 millones por la tasa de crecimiento de 1.7%) y obtuvieron el valor de 0.073803 (millones de personas) que supusieron constante (Figura 3a). El equipo C detectó que el crecimiento para los años 2019, 2020 y 2021 era de 0.073, 0.074 y 0.075 millones de habitantes, respectivamente; pensaron que la población aumentaba 0.001 millones de personas por año. Es decir, los estudiantes creyeron que el crecimiento era constante (Figura 3c). El modelo del equipo B se caracteriz or el uso de “la regla de tres”. Un integrante del equipo come o siguiente.

S4: A ver, entonces tenemos que sacar el 1.7, ¿entonces… sí sería como una regla de tres no?

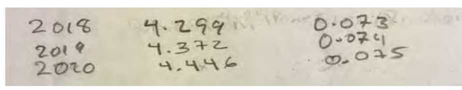
AÑO	2018	2019	2020	2021	2022
POBLACIÓN INICIAL	4.299	4.373	4.447	4.520	4.594
CRECIMIENTO ANUAL	0.073803	0.073803	0.073803	0.073803	0.073803
POBLACIÓN FINAL [POBLACIÓN INICIAL + CRECIMIENTO]	4.373	4.447	4.520	4.594	4.668

Nota: Datos en millones de habitantes

a) Modelo equipos A y D

D	E	F	G	H
4.299	1.70%	0.073083		
AÑO 2019	0.034			
AÑO 2020	0.051	4.299	0.219249	4.518249

b) Modelo equipo B



c) Modelo equipo C

Figura 3: Modelos primer ciclo de modelación de los equipos

Segundo Ciclo de Modelación

Se desarrolló posterior a la autoevaluación del primer modelo e interacción con el profesor. Emergieron tres tipos de modelos.

Modelos T2. Los Equipos B y D construyeron representaciones tabulares y gráficas. Los equipos no disociaron el crecimiento exponencial del lineal. Nivel de razonamiento covariacional 2 de Carlson et. al (2002)

Modelos T3. El equipo A construyó un modelo exponencial y situado (Figura 4a). Sus representaciones fueron tabulares. Nivel de razonamiento covariacional 3 de Carlson et. al (2002).

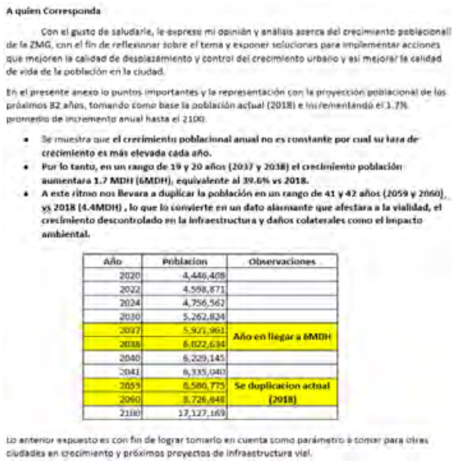
Modelos T4. El equipo C construyó un modelo exponencial, integró representaciones algebraicas. Su modelo es compartible y reutilizable (Figura 4b). Nivel de razonamiento covariacional 4 de Carlson et. al (2002).

Tercer Ciclo de Modelación

Se desarrolló después de la sesión plenaria. Los alumnos realizaron sus cartas de forma individual como tarea extra a los trabajos de clase.

Modelos T3. Los alumnos S4 y S5 incluyeron representaciones gráficas y tabulares en sus modelos; expresaron que el crecimiento no era constante y que dependía de la tasa del 1.7%. El modelo de los alumnos fue situado.

Modelos T4. Ocho alumnos incluyeron representaciones tabulares, gráficas, verbales y algebraicas en sus modelos, los cuales son modificables y reutilizables para situaciones similares fuera del contexto de la situación problemática de crecimiento poblacional.



A quien Corresponda

Con el gusto de saludarle, le expreso mi opinión y análisis acerca del crecimiento poblacional de la ZMG, con el fin de reflexionar sobre el tema y exponer soluciones para implementar acciones que mejoren la calidad de desplazamiento y control del crecimiento urbano y así mejorar la calidad de vida de la población en la ciudad.

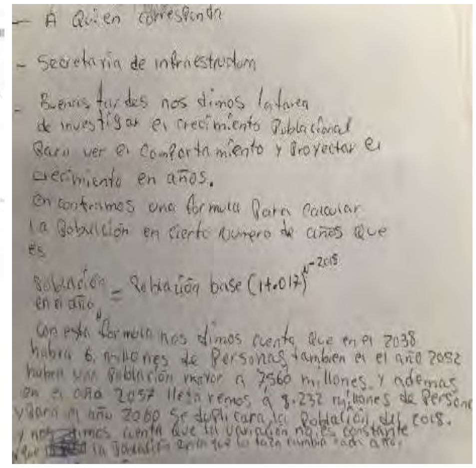
En el presente anexo lo puntos importantes y la representación con la proyección poblacional de los próximos 82 años, tomando como base la población actual (2018) e incrementando el 1.7% promedio de incremento anual hasta el 2100.

- Se muestra que **el crecimiento poblacional anual no es constante por cual su tasa de crecimiento es más elevada cada año.**
- **Por lo tanto, en un rango de 19 y 20 años (2037 y 2038) el crecimiento población aumentara 1.7 MDH (6MDH), equivalente al 39.6% vs 2018.**
- **A este ritmo nos llevara a duplicar la población en un rango de 41 y 42 años (2059 y 2060) vs 2018 (4.4MDH), lo que lo convierte en un dato alarmante que afectara a la vialidad, el crecimiento descontrolado en la infraestructura y daños colaterales como el impacto ambiental.**

Año	Poblacion	Observaciones
2020	4,446,408	
2022	4,598,871	
2024	4,756,562	
2030	5,262,824	
2037	5,921,961	Año en llegar a 6MDH
2038	6,022,634	
2040	6,229,145	
2041	6,335,040	
2059	8,586,775	Se duplicacion actual (2018)
2060	8,726,648	
2100	17,127,169	

Lo anterior expuesto es con fin de lograr tomarlo en cuenta como parámetro a tomar para otras ciudades en crecimiento y próximos proyectos de infraestructura vial.

a) Modelo equipo A



b) Modelo equipo C

Figura 4: Ejemplo de modelos construidos en el segundo ciclo de modelación

Cuarto Ciclo de Modelación

Se desarrolló cuando los estudiantes resolvieron la MAA. Los alumnos exhibieron modelos T4. Las características del cuarto ciclo de modelación fueron las siguientes.

1. Dos estudiantes (S4 y S5) pasaron de Modelo T3 a T4. Incluyeron en sus modelos una diversidad de representaciones.
2. Ocho estudiantes (S1, S2, S3, S6, S7, S8, S9 y S10) se mantuvieron en el modelo T4.
   - a. Cuatro estudiantes (S3, S8, S9 y S10) matematizaron con base en sólo una tasa de inversión para explicar la situación.
   - b. Cuatro estudiantes (S1, S2, S6 y S7) matematizaron con base en las tres tasas de inversión.
     - i. Tres estudiantes (S1, S2 y S6) propusieron la elección de sólo un producto de inversión (fondos verdes) (Figura 5).
     - ii. Un estudiante (S7) propuso una combinación de diferentes productos de inversión.

Figura 5: Ejemplo de modelos del cuarto ciclo de modelación

La Figura 5 es un ejemplo del modelo T4 construido por los estudiantes en el cuarto ciclo, en la cual se observa que los estudiantes disociaron el comportamiento lineal y exponencial e incluyeron diferentes representaciones (verbal, tabular, gráfica y algebraica). Respecto a la función lineal, la utilizaron para describir el ahorro de la energía e identificaron un crecimiento constante. Respecto a la función exponencial, los estudiantes incluyeron el análisis de los tres tipos de instrumentos de inversión a diez años lo que les permitió proponer un plan de inversión. En resumen, la evolución de los modelos lineales a exponenciales construidos por los estudiantes se puede observar en la Tabla 3.

Tabla 3: Esquema que muestra la evolución de los modelos

Equipo	Alumno	Tipo de Modelo construido			
		Primer ciclo MEA (equipo)	Segundo Ciclo MEA (Equipo)	Tercer Ciclo MEA (Individual)	Cuarto Ciclo MAA (Individual)
A	S1	T1	T3	T4	T4
	S2	T1	T3	T4	T4
B	S3	T1	T2	T4	T4
	S4	T1	T2	T3	T4
	S5	T1	T2	T3	T4
C	S6	T1	T4	T4	T4
	S7	T1	T4	T4	T4
	S8	T1	T4	T4	T4
D	S9	T1	T2	T4	T4
	S10	T1	T2	T4	T4

Conclusiones

Respecto a la pregunta de investigación ¿Cómo evolucionaron los modelos y el razonamiento covariacional−relacionados con la func encial− de estudiantes de LAEC al resolver, con el apoyo de tecnología, una secuencia de desarrollo de modelos compuesta por problemas cercanos a la vida real? La evolución de los modelos construidos se pudo observar en cada ciclo de modelación. En el primer ciclo todos los equipos de estudiantes construyeron modelos T1. Identificaron variables, pero no entendieron el tipo de relación que había entre las mismas. Las ideas y procedimientos asociados a la situación fueron lineales. Los equipos dieron más importancia a las respuestas obtenidas para la situación que a la construcción de modelos.

En el segundo ciclo se construyeron tres tipos de modelos (T2, T3 y T4) caracterizados por varios atributos, entre los que se pueden mencionar los siguientes: a) Modelos T2: los equipos B y D usaron lenguaje asociado a la función lineal para describir la función exponencial. No lograron disociar el comportamiento lineal del exponencial en su sistema conceptual. b) Modelo T3: El equipo A exhibió coordinación, dirección y cuantificación de las variables. Disoció el comportamiento lineal del exponencial, el modelo fue situado. c) Modelo T4: El equipo C exhibió coordinación, dirección, cuantificación y razón de cambio promedio entre las variables. No sólo disoció el comportamiento lineal del exponencial, sino que, además, construyó modelos útiles para un cliente (compartibles) interesado en resolver la situación y cualquier situación parecida (reutilizable), con condiciones iniciales distintas.

En el tercer ciclo de modelación los estudiantes, de manera individual, reconstruyeron los modelos con base en las discusiones grupales generadas en clase y participaron en la evaluación y autoevaluación de los modelos. Su progreso en cuanto al desarrollo de su conocimiento y habilidades para matematizar evolucionó a los modelos situados (T3) y compartibles y

Olanoff, D., Johnson, K., & Spitzer, S. (2021). *Proceedings of the forty-third annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Philadelphia, PA.

reutilizables (T4). En el cuarto ciclo de modelación los estudiantes, de manera individual, transfirieron su conocimiento obtenido al realizar la MEA y la MXA, las cuales les permitieron profundizar en su conocimiento respecto a conceptos como: variación, función exponencial, variables y uso de diferentes representaciones. Al resolver la MAA se notó el refinamiento de ideas, ya que todos los estudiantes construyeron modelos, compartibles y reutilizables (T4).

Referencias

Aliprantis, C. D., & Carmona, G. (2003). Introduction to an economic problem: a models and modeling perspective. En R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.) *Beyond constructivism: Models and Modeling perspectives on mathematics problem solving, Learning, and Teaching* (pp.255-264). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Ärlebäck, J. B., Doerr, H., y O'Neil, A. (2013). A modeling perspective on interpreting rates of change in context. *Mathematical Thinking and Learning*, *15*(4), 314-336.

Ärlebäck, J. B. y Doerr, H. (2018). Students' interpretations and reasoning about phenomena with negative rates of change throughout a model development sequence. *ZDM*, *50*(1-2), 187-200.

Montero-Moguel, L. y Vargas-Alejo, V. (2021). Ciclos de modelación y razonamiento covariacional al realizar una actividad provocadora de modelos [Manuscrito enviado para publicación]. *Educación Matemática*.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., y Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 352-378.

Doerr, H. M. (2016). Designing sequences of model development tasks. En C. R. Hirsch y A. R. McDuffie (Eds.), *Annual Perspectives in Mathematics Education 2016: Mathematical modeling and modeling mathematics* (pp. 197-205). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Lesh, R. (2010). Tools, researchable issues and conjectures for investigating what it means to understand statistics (or other topics) meaningfully. *Journal of Mathematical Modeling and Application*, *1*(2), 16-48.

Lesh, R., y Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modelling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. En R. Lesh, y H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism. Models and Modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching* (pp. 3-34). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., Cramer, K., Doerr, H. M., Post, T. y Zawojeswski, J. S. (2003). Model Development Sequences. En R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 35-58). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Sevinc, S., y Lesh, R. (2018). Training mathematics teachers for realistic math problems: A case of modeling-based teacher education courses. *ZDM*, 50(1), 301–314.

Stillman, G. A., Kaiser, G., Blum, W. y Brown, J. P. (Eds.). (2013). *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice*. Dordrecht: Springer.

Thompson, P. W. y Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.