COMPARISON STRATEGIES BY QUOTIENT AND THE URN MODEL IN THE CHOICE OF PROBABILITIES

ESTRATEGIAS DE COMPARACIÓN POR COCIENTE Y EL MODELO DE URNA EN LA ELECCIÓN DE PROBABILIDADES

Maribel Aguas-Hidalgo
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N. (Cinvestav) México
aguashidalgomm@yahoo.com.mx

Ricardo Quintero-Zazueta
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N. (Cinvestav) México
quintero@cinvestav.mx

In this research, quotient strategies and their influence on decision-making in situations that involve the comparison of probabilities are analyzed. In order to achieve this, classical probability situations modeled with urns were designed. In each situation, two urns with simple extraction, involving or not proportional relationships, were proposed to third grade secondary school students. The analysis was carried out through the categorization of the results based on the relationships established between the components of the urns (favorable, unfavorable and possible cases). The study concluded that when comparing probabilities, students not only resort to the quotient (ratio): favorable case numbers among the number of possible cases to make their choice, but to others where they also include unfavorable cases.

Keywords: probability, problem solving

Background and the problem proposal

Proportional and probabilistic reasoning are closely related; both require quantitative and qualitative analysis, as well as inference and prediction of results. This statement follows from contrasting the definition of proportional reasoning by Lesh, Post and Behr (1988) with what Landín and Sánchez (2010) propose regarding the implications of probabilistic reasoning. In this way, both reasonings are not limited to numerical comparisons, and although some researchers have tried distinguishing these concepts from each other (see Hoemann and Ross, 1971), the work presented here does not focus on that distinction, but on incorporating them to extract and analyze those multiplicative strategies derived from comparison by quotient, considering as a means the resolution of situations modeled with urns.

The strategies used by students when solving probability situations modeled with urns, as Alatorre (1994) points out, have already been studied by researchers such as: Piaget and Inhelder (1951), Maury (1984, 1986), Lecoutre (1984), Fischbein et al (1970), and Thornton and Fuller (1981). However, although the authors refer to some indicators of why and how the selections were made, the uncertainty remains if other types of choices can be presented other than the ones they comment on or what other relationships the students establish, as well as what comparison mechanisms underlie in these strategies that can reveal their complexity, such as those derived from proportional reasoning that demand "the ability to recognize, to explain, to think about, to conjecture about, to graph, to transform, to compare, to make judgments about, to represent, or to symbolize relationships of two simple types "(Lamon, 1999).

In the book for the secondary education teacher (Alarcón *et al.* 1994), as well as in works by Green (1988), Falk (1980), Aguas (2014), and Cañizares and Batanero (1997), situations with two urns have also been raised. Despite the fact that there are situations that can be modeled with them, the urns themselves are a rich model for working on probability or other topics in mathematics, as long as these are not seen as prerequisites for understanding it, but rather a context where they coexist and support each other. "use proportionality and a basic understanding of probability to make and test

In: Sacristán, A.I., Cortés-Zavala, J.C. & Ruiz-Arias, P.M. (Eds.). (2020). *Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Mexico. Cinvestav / AMIUTEM / PME-NA. https:/doi.org/10.51272/pmena.42.2020

conjectures about the results of experiments and simulations" (NCTM, 2000, p. 248), leads to the development and strengthening of constantly interacting content. Thus, the "facility with proportionality develops through work in many areas of the curriculum, including ratio and proportion, percent, […] and probability" (NCTM, 2000, p. 212). Therefore, the present research consists of analyzing the quotients that arise when comparing probabilities. The strategies followed by secondary education students are classified in order to delve deeper into the processes they carry out to establish a result. It is proposed to identify what elements they consider when making their comparisons (favorable, unfavorable or possible cases), what types of choices they make based on the relationships established and what the particularities of these relationships are, which are fundamental for this study, because what is intended is to obtain indications of how the different quotients that they establish influence their decisions. The study is oriented by the following question and research purpose:

Research question: When solving probability situations, what are the quotients that secondary school students establish to make a choice?

Purpose: To identify, analyze and classify the strategies followed by third grade students of secondary education students when solving situations of classical probability contextualized with the urn model, focusing attention on those strategies that involve comparing by quotient to see how they influence the decision-making.

Method

The research is qualitative with an instrumental case (Stake, 1999) made up of a group of 35 third grade students from secondary education in Mexico City. Ten situations were designed, with and without proportionality, which involved the comparison of probabilities. The urn model was used to design the situations. From Lamon's (1993) classification, the problems posed correspond to those of *part-part-whole*, which Özgün-Koca (2009) includes in his study within those of numerical comparison, because most of the problems that were posed can be assumed as discrete sets where a *whole* corresponds to possible cases and subsets of that *whole* to favorable and unfavorable cases, respectively. For the implementation of the situations, three work sessions of 50 minutes were used. In each session, students solved three to four situations individually without instruction (prior or during implementation) of the resolution, which favored independent thinking and led to the identification and analysis of various strategies. In this paper it was interesting to illustrate those related to the comparison by quotient.

Theoretical Interpretative Framework

As a result of the analysis, an interpretative framework was constructed for the classification of the strategies derived from the quotient comparison that emerged from the implementation. Two types of comparisons were identified: a) additive — through a difference, and, b) multiplicative — through a quotient. The first implies an absolute thought, and the second a relative one (Lamon, 1999); the multiplicative one is interesting to illustrate in this paper. Table 1 shows sixteen expressions identified by comparing the elements of two urns by quotient, where F represents the number of favorable cases, D the number of unfavorable cases and $F + D$ corresponds to the number of possible cases. Subscripts 1 and 2, in F_1, F_2, D_1 and D_2 indicate the reference point, which states whether the favorable or unfavorable cases correspond to the first or second urn, respectively.

Table 1: Relationships that are established when comparing by quotient

Reference point F	Reference point D	Reciprocal of reference point F	Reciprocal of reference point D
Expression i	Expression ii	Expresion iii	Expression iv

$\frac{F_1}{F_2}$ with $\frac{D_1}{D_2}$	$\frac{D_1}{D_2}$ with $\frac{F_1}{F_2}$	$\frac{F_2}{F_1}$ with $\frac{D_2}{D_1}$	$\frac{D_2}{D_1}$ with $\frac{F_2}{F_1}$
Fraction: Part – Part		Fraction: Part – Part	
Ratio: When the antecedent is F and D and the consequent is F and D		Ratio: When the antecedent is F and D and the consequent is F and D	
Reference point Urn 1	Reference Point Urn 2	Reciprocal of reference point Urn 1	Reciprocal of reference point Urn 2
Expression v	Expression vi	Expresion vii	Expresion viii
$\frac{F_1}{D_1}$ with $\frac{F_2}{D_2}$	$\frac{F_2}{D_2}$ with $\frac{F_1}{D_1}$	$\frac{D_1}{F_1}$ with $\frac{D_2}{F_2}$	$\frac{D_2}{F_2}$ with $\frac{D_1}{F_1}$
Fraction: Part – Part		Fraction: Part – Part	
Ratio: When the antecedent is F and the consequent is D		Ratio: When the antecedent is D and the consequent is F	
Expression ix	Expression x	Expression xi	Expression xii
$\frac{F_1}{F_1+D_1}$ with $\frac{F_2}{F_2+D_2}$	$\frac{F_2}{F_2+D_2}$ with $\frac{F_1}{F_1+D_1}$	$\frac{F_1+D_1}{F_1}$ with $\frac{F_2+D_2}{F_2}$	$\frac{F_2+D_2}{F_2}$ with $\frac{F_1+D_1}{F_1}$
Fraction: Part-Whole. When the part is F		Fraction: Whole-Part. When the part is F	
Ratio: When the antecedent is F and the consequent is $F+D$		Ratio: When the antecedent is $F+D$ and the consequent is F	
Expression xiii	Expression xiv	Expression xv	Expression xvi
$\frac{D_1}{F_1+D_1}$ with $\frac{D_2}{F_2+D_2}$	$\frac{D_2}{F_2+D_2}$ with $\frac{D_1}{F_1+D_1}$	$\frac{F_1+D_1}{D_1}$ with $\frac{F_2+D_2}{D_2}$	$\frac{F_2+D_2}{D_2}$ with $\frac{F_1+D_1}{D_1}$
Fraction: Part-Whole. When the part is D		Fraction: Whole-Part. When the part is D	
Ratio: When the antecedent is D and the consequent is $F+D$		Ratio: When the antecedent is $F+D$ and the consequent is F	

In the comparison by quotient (see Table 1), considered as a fraction or ratio, they appear during the relationships established with the elements that make them up (*part-part*, *part-whole*, *whole-part* and antecedent-consequent), using strategies to compare them (see Table 2); where in the *part-part* relationship *a, b, c* and *d* are the parts; in the part-whole *a* and *c* are the parts and *b* and *d* are the whole; in whole-part *a* and *c* are the whole and *b* and *d* are the parts; in the antecedent-consequent relationship *a* and *c* are the antecedents and *b* and *d* are the consequents.

Table 2: Strategies to compare the relationships established in Table 1

1st Strategy: Fraction-ratio (part-part, part-whole and whole-part) with the use of:

Multiples: If multiplied $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{c}\right)$; and $\left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{a}{a}\right)$, the expressions $\frac{ac}{bc}$ and $\frac{ac}{ad}$ are obtained, and as $bc = ad$ we can then establish the proportion $\frac{ac}{bc} = \frac{ac}{ad}$, which would be equivalent to: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. This indicates that the sets represented by a and b, and c and d are equiprobable.

Cross products: Given the ratios $\frac{a}{b}$ and $\frac{c}{d}$, when making the products ad and bc, equality is obtained as $ac = bd$, then the following proportion is established: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. This indicates that the sets represented by a and b, and c and d are equiprobable. Cross products are a particular case of using multiples to compare ratios or fractions.

Submultiples: By simplifying $\frac{a}{b}$, $\frac{m}{n}$ is obtained, and by simplifying $\frac{c}{d}$, $\frac{m}{n}$ is also obtained; then the following proportion is established: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, which indicates that the sets represented by a and b, and c and d are equiprobable.

Adding and subtracting fractions or ratios: Given the ratios $\frac{a}{b}$ and $\frac{c}{d}$, when subtracting $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$, the

difference of $\frac{0}{bd} = 0$ is obtained; then the following proportion is established: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. This indicates that the sets represented by a and b, and c and d are equiprobable.   *Adding and subtracting fractions or ratios in their decimal form:* It is part of the fraction-ratio relationship, which allows for representation in decimal form to compare and make choices. By simplifying $\frac{a}{b}$, m is obtained, and by simplifying $\frac{c}{d}$, m is also obtained, where m is a decimal number; then the following proportion is established: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. This indicates that the sets represented by a and b, and c and d are equiprobable.
2nd Strategy: The relationship within. It is presented in an additive or multiplicative way.   *Additive form*: Given the ratios $\frac{a}{b}$ and $\frac{c}{d}$, if $a \pm (a)\left(\frac{m}{n}\right) = b$, and $c \pm (c)\left(\frac{m}{n}\right) = d$, or if $b \pm (b)\left(\frac{m}{n}\right) = a$, and $d \pm (d)\left(\frac{m}{n}\right) = c$, then the following proportion is established: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. This indicates that the sets represented by a and b, and c and d are equiprobable.   *Multiplicative form*: Given the ratios $\frac{a}{b}$ and $\frac{c}{d}$, if $(a)\left(\frac{m}{n}\right) = b$ and $(c)\left(\frac{m}{n}\right) = d$, or if $(b)\left(\frac{n}{m}\right) = a$, and $(d)\left(\frac{n}{m}\right) = c$, then the following proportion can be established: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. This indicates that the sets represented by a and b, and c and d are equiprobable.
3rd Strategy: Rule of three. A quaternary relationship is established where one of the four elements is unknown and the other three must be related to find its value. This value is compared with that obtained in another similar quaternary relationship.   *To obtain percentages:* Given the ratios $\frac{a}{b}$ and $\frac{c}{d}$, if $\frac{a}{b}$ is multiplied by 100 in order to obtain the percentage of a with respect to the percentage of b, it is considered 100%. Also, when $\frac{c}{d}$ is multiplied by 100 to get the percentage of c with respect to the percentage of d, it is considered 100%. If $\frac{(a)(100)}{b} = \frac{(c)(100)}{d}$, then the following proportion could be established: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, which would indicate that the sets represented by a and b, and c and d are equiprobable.   *To obtain a, b, c or d:* given the ratios $\frac{a}{b}$ and $\frac{c}{d}$, if $\frac{(cb)}{a} = d$ and $\frac{(ad)}{c} = b$, and d turns out to be a multiple or submultiple of b, then the following proportion can be established: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. This indicates that the sets represented by a and b, and c and d are equiprobable.
4th Strategy: The relationship between. It is presented in an additive or multiplicative way.   *Additive Form*: Given the ratios $\frac{a}{b}$ and $\frac{c}{d}$, if $a \pm (a)\left(\frac{m}{n}\right) = c$, and $b \pm (b)\left(\frac{m}{n}\right) = d$, or if $c \pm (c)\left(\frac{m}{n}\right) = a$, and $d \pm (d)\left(\frac{m}{n}\right) = b$, then the following proportion is established: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. This indicates that the sets represented by a and b, and c and d are equiprobable.   *Multiplicative form*: Given the ratios $\frac{a}{b}$ and $\frac{c}{d}$, if $(a)\left(\frac{m}{n}\right) = c$ and $(b)\left(\frac{m}{n}\right) = d$, or if $(c)\left(\frac{n}{m}\right) = a$ and $(d)\left(\frac{n}{m}\right) = b$, then the following proportion is established: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. This would indicate that the sets represented by a and b, and c and d are equiprobable.

If the previous relationships are not in proportion, then the sets represented by *a* and *b*, and *c* and *d* would not be equiprobable, therefore, it would be necessary to identify which of the two sets is more likely based on the cases (favorable, unfavorable or possible) that were considered and the relationships that were established to make the comparisons. In the aforementioned strategies, the relationships *within* and *between* are considered by Noelthing (1980) when working with mixing situations, and although this researcher only considers relationships *within* and *between* of a multiplicative nature, Alatorre (1994) extends them to order relations of an additive or subtractive nature, but she does not consider them as it is done in this study using quotient comparison, as she points out the differences without taking the basal amount into account, and from our perspective the *additive form* includes the basal amount when considering how many of how many. Quotient comparison is closely related to relative thinking, Lamon (1999) distinguishes this type of thinking as one where multiplicative structures are involved and differentiates it from absolute thinking where additive-type relationships are established.

Analysis of Results

For the purpose of this research, it is convenient to analyze the types of choices, the comparisons that are established, the strategies that are followed and the reference point that is considered in the comparison of probabilities, which is the meaning of the relationships that are given between the cases (favorable, unfavorable or possible). Table 3 illustrates the quantitative comparison by quotient and its implications in order to exemplify the monitoring of the strategies identified in the implementation.

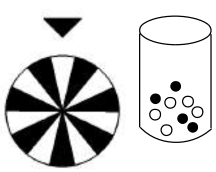
Table 3: Illustration of the type of choice, the strategy and the order relations identified in the quantitative comparison by quotient

Choice based on	Strategy (see Table 2)	Relationships (see Table 1)
Higher quotient; Lower quotient; or Equal quotient	1st Fraction-ratio (part-part)	Favorable-unfavorable v and vi Unfavorable-favorable vii and viii
	1st Fraction-ratio (part-whole)	Favorable-possible ix and x Possible-favorable xi and xii
		Unfavorable-possible xiii and xiv Possible-unfavorable xv and xvi

Consideration of favorable and unfavorable cases. The favorable and unfavorable cases of each set are compared by means of quotients (see expressions i, ii, iii, iv, v, vi, vii and viii in Table 1) and are chosen based on the highest, lowest or equal quotient. In the following, one of the strategies based on the choice of the highest quotient is exemplified.

Choice based on the highest quotient. Strategy: Fraction-ratio, part-part – with or without the use of submultiples and their representation in decimal form.

Order Relation: Favorable-Unfavorable.



Situation I. In a fair there are two games of chance: a roulette wheel and an Urn. You can spin the roulette wheel and bet to land on the white slot, or you can attempt to extract a white ball in urn mixed with black ones without looking. In which game is there a greater probability of winning? Explain how you determined your answer.

Student strategy. Example 1 (E1). Urn. There is a greater chance of winning at the urn. I was removing the median [half] to the colors of each game. In roulette they were the same colors and in the urn was a white ball rather than a black one and I saw that there was a better probability of winning.

$$\frac{7}{7} = \frac{3.5}{3.5} = 1$$

$$\frac{5}{4} = \frac{2.5}{2} = 1.25$$

$$\begin{array}{r} 1.25 \\ 2\overline{)\,2.5.} \\ 050 \\ 100 \\ 00 \end{array}$$

Figure 1: Student strategy. In example 1 (E1), the highest quotient is chosen. Quotient comparison (favorable-unfavorable) arriving at its decimal representation with the use of submultiples

In E1, a comparison of favorable and unfavorable cases is presented. To simplify the comparison of variables, submultiples are used and it ends with a decimal representation. In expressions v and vi (see Table 1), it is chosen based on a higher quotient, because the quotients in these expressions represent the number of favorable for each unfavorable. On the contrary, if expressions vii and viii are presented, the choices will be correct only if chosen based on the lowest quotient, which represents the number of unfavorable for each favorable. Hence, the significance of order relations: favorable-unfavorable or unfavorable-favorable.

Regarding the expressions i, ii, iii and iv of Table 1, correct choices would be provided if one considers the second quotient in i and iii; that is to say, this result is greater than the first quotient, whose elements are assigned the denominators of the comparative quotients. However, if it turns out to be less than the first, a correct choice is made if the set whose elements were assigned to the numerators is chosen. On the other hand, if expressions ii and iv are considered, the choice would also depend on the second quotient. If it turns out to be greater than the first quotient, the set that has remained in the numerators must be chosen. Yet, if it turns out to be less, a correct choice would be made if the set whose elements were in the denominators is chosen; this relates to the expressions i, ii, iii and iv, where the resulting quotients represent the number of favorable of a set for each favorable of the other, and in the same sense, the number of unfavorable of a set for each unfavorable of the other.

Consideration of unfavorable and possible cases. The possible and unfavorable cases of each set are compared by means of quotients (see expressions xiii, xiv, xv and xvi in Table 1) and the choice is made based on the highest, lowest or equal quotient. In the following, one of the strategies based on equal quotient is exemplified.

Choice based on equality of quotients. Strategy: Fraction-ratio, part-whole – with or without the use of submultiples and their representation in decimal form.

Order Relation: Unfavorable-Possible

Situation II. A teacher shows her students two black bags; the first bag contains 9 black and 6 white marbles, and the second bag contains 15 black and 10 white marbles. Which bag should they choose so that there is a greater probability that they will select a black marble on their first attempt? Explain the procedure you followed to make the choice.

Student strategy. Example 2 (E2). Any bag. Any bag has the same probability.

	Bag 1	Bag 1
White Marbles / Total Marbles	$\frac{9}{15}$	$\frac{15}{25}$
Probability	0.6	0.6

$15\overline{)90}$ = .6, remainder 0 $\quad$ $25\overline{)150}$ = .6, remainder 0

Figure 2: Student strategy. In example 2 (E2), the equal quotient is chosen. Quotient comparison (unfavorable-possible) reaching its decimal representation without the use of submultiples

In E2, the comparison of unfavorable and possible cases in each set is presented. First, the cases of the first set were related and those of the second followed (see expression xiii of Table 1). It is important to note that in example 2 the decimal results obtained correspond to the probabilities of the unfavorable cases of each set. In expressions xv and xvi (see Table 1), it is chosen based on a higher quotient; this is because the resulting quotient determines the number of possible cases for each unfavorable one. Conversely, if expressions xiii and xiv are presented, the choices will be correct only if chosen based on the lowest quotient; this is because the quotient represents the number of unfavorable for each possible. In expressions ix and x, it is chosen based on a higher quotient; this is because they represent the number of favorable for each possible. On the other hand, if expressions xi and xii are presented, the choices will be correct only if chosen based on the smallest quotient; this is because the resulting quotient represents the number of possible for each favorable. It is noteworthy that expressions ix and x are the only ones that are used and considered in the 2011 Study Programs (SEP, 2011) to represent probabilities and make comparisons between them.

Final considerations

The results of this study concluded that with the probability of the event *A*, the students establish the quotient (ratio) $\frac{F}{P}$, determined by Laplace as the ratio of the number of favorable cases *F* to that of all the cases possible *P*. However, if they are presented with a probability comparison situation, they usually resort to other quotient comparisons where they also include unfavorable cases *D* such as: $\frac{D}{P}$ o $\frac{F}{D}$ or their reciprocals, and not necessarily the one established by Laplace. The research showed that these ratios led students to choices based on determining the urn with greater probability; hence, the importance of placing greater emphasis on quotient comparison strategies that result from comparing probabilities. The reference point is decisive for understanding the relationships that students establish and the interpretation they give to their quotients. For example, the interpretation of the quotient (ratio) $\frac{F}{D}$ is completely distinct from the one represented in the quotient (ratio) $\frac{D}{F}$, and in the same way, the interpretation is different $\frac{F_1}{D_1} > \frac{F_2}{D_2}$ to $\frac{F_2}{D_2} < \frac{F_1}{D_1}$. From a purely mathematical standpoint, these comparisons would have no greater difficulty, but from a pedagogical and didactic perspective of teaching and learning of probability, the change in the reference point when establishing the comparisons influences the treatment of the object of study and its interpretation. The incorporation of didactic orientations in the teaching materials for basic education curriculum is suggested, which includes an analysis of the strategies by quotient that the students can carry out when solving probability problems. A detailed analysis of the varied strategies presented by students would have a positive effect in the teaching and study of this branch of mathematics.

References

Aguas, M. (2014). *Situaciones de probabilidad clásica y el modelo de urna como medios para favorecer el desarrollo simultáneo de los razonamientos proporcional y probabilístico.* Tesis de maestría. Cinvestav-IPN, México, 2014.

Alarcón, J.; Bonilla, E.; Nava, R.; Rojano, T. y Quintero, R. (1994). *Libro para el maestro. Matemáticas. Secundaria.* México: SEP.

Alatorre, S. (1994). *Respuestas intuitivas de adultos a problemas de probabilidad. Algunas aportaciones metodológicas.* Tesis de maestría. Universidad Pedagógica Nacional, México, 1994.

Cañizares, M. J. y Batanero, C. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias.* Departamento de Didáctica de la matemática. Universidad de Granada.

Falk, R. (1980). Comportamientos de elección en situaciones de probabilidad. *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics*. Vol. II. University of Sheffield 9-13 August 1982.

Green, D. R. (1988). Children's understanding of randomness: Report of a survey of 1600 children aged 7-11 years. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *The Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics.* Victoria, B. C.: University of Victoria.

Hoemann, Harry W. y Roos, Bruce M. (1971). Children's understanding of probability concepts. *Child Development,* 42, 221-236.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: connecting content and children's thinking. En Lester, F. K. (Ed). *Journal for Research in Mathematics Education,* 24(1), pp. 41-61. USA: NCTM.

Lamon, S. J. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Landín, P. R. y Sánchez, E. (2010). *Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a tareas de distribución binomial.* Educação Matemática Pesquisa, 12 (3). [Recuperado el 15/01/13 de: http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewArticle/4842]

Lesh, R., Post, T. y Behr, M. (1988). Proportional reasoning. En Hiebert, J. y Behr, M. (Eds). *Number Concepts an Operations in the Middle Grades. Research Agenda for Mathematics Education. Vol. 2*. The United States of America: Lawrence Erlbaum Associates.
NCTM [National Council of Teachers of Mathematics]. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: *NCTM.*
Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept: Part II. Problem structure at successive stages; problem solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics,* 11, pp. 331- 363.
Özgün-Koca, S. A. (2009). An investigation of proportional reasoning skills of middle school students. En Schimittau, J. (Ed). *Investigations in Mathematics Learning,* 2(1), pp. 26-48. USA: RCML.
SEP [Secretaría de Educación Pública]. (2011). *Programas de estudio 2011. Educación Básica. Secundaria.* México: SEP.
Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos.* Madrid: Ediciones Morata.

ESTRATEGIAS DE COMPARACIÓN POR COCIENTE Y EL MODELO DE URNA EN LA ELECCIÓN DE PROBABILIDADES

COMPARISON STRATEGIES BY QUOTIENT AND THE URN MODEL IN THE CHOICE OF PROBABILITIES

Maribel Aguas-Hidalgo
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N. (Cinvestav) México
aguashidalgomm@yahoo.com.mx

Ricardo Quintero-Zazueta
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N. (Cinvestav) México
quintero@cinvestav.mx

En esta investigación se analizan estrategias por cociente y su influencia en la toma de decisiones en situaciones que implican la comparación de probabilidades. Para ello, se diseñaron situaciones de probabilidad clásica modeladas con urnas. En cada situación se plantearon dos urnas con extracción simple, que implican o no relaciones de proporcionalidad, a estudiantes de tercer grado de educación secundaria. El análisis se realizó a través de la categorización de los resultados con base en las relaciones que se establecen entre los componentes de las urnas (casos favorables, desfavorables y posibles). El estudio arrojó que, al comparar probabilidades, los estudiantes no sólo recurren al cociente: números de casos favorables entre número de casos posibles para hacer su elección, sino a otros donde además incluyen a los casos desfavorables.

Palabras clave: probabilidad, resolución de problemas

Antecedentes y planteamiento del problema

Los razonamientos proporcional y probabilístico guardan estrecha relación; ambos requieren de un análisis cuantitativo y cualitativo, así como de la inferencia y la predicción de resultados. Esta afirmación se desprende de contrastar la definición de razonamiento proporcional de Lesh, Post y Behr (1988) con lo que Landín y Sánchez (2010) proponen respecto a las implicaciones del razonamiento probabilístico. De esta manera, ambos razonamientos no se limitan a comparaciones numéricas, y aunque algunos investigadores han intentado distinguir entre sí a estos conceptos (véase por ejemplo Hoemann y Ross, 1971); el trabajo que aquí se expone no se centra en distinguirlos sino en incorporarlos, para extraer y analizar aquellas estrategias multiplicativas derivadas de la comparación por cociente, considerando como medio la resolución de situaciones modeladas con urnas.

Las estrategias utilizadas por los estudiantes al resolver situaciones de probabilidad modeladas con urnas, como lo señala Alatorre (1994), ya han sido estudiadas por investigadores como: Piaget e Inhelder (1951), Maury (1984, 1986), Lecoutre (1984), Fischbein et al. (1970), y Thornton y Fuller

(1981). Sin embargo, aunque los autores refieren algunos indicadores del porqué y cómo se realizaron las elecciones, queda la incertidumbre si se pueden presentar otro tipo de elecciones distintas a las que ellos comentan o qué otras relaciones establecen los alumnos, así como qué mecanismos de comparación subyacen en estas estrategias y que pueden dejar ver la complejidad de las mismas, como las que se derivan de un razonamiento proporcional que demandan "la capacidad de reconocer, explicar, pensar, hacer conjeturas, graficar, transformar, comparar, emitir juicios, representar o simbolizar relaciones de dos tipos simples" (Lamon, 1999).

En el libro para el maestro de educación secundaria (Alarcón *et al.* 1994) así como en trabajos de Green (1988), Falk (1980), Aguas (2014), y Cañizares y Batanero (1997), también se han planteado situaciones con dos urnas. No obstante que existen situaciones que pueden ser modeladas con ellas, las urnas en sí mismas son un modelo rico para trabajar temas de probabilidad u otros de las matemáticas, siempre y cuando estos no sean vistos como prerequisitos para comprenderla, sino un contexto donde conviven y se apoyan mutuamente. "Utilizar la proporcionalidad y una comprensión básica de la Probabilidad para formular y comprobar conjeturas sobre los resultados de experimentos y simulaciones" (NCTM, 2000, p. 248), nos lleva al desarrollo y fortalecimiento de contenidos que interactúan de manera constante. Así, la "destreza con la proporcionalidad se desarrolla a través del trabajo con muchos temas del currículo: razón y proporción, porcentaje, […] y probabilidad" (NCTM, 2000, p. 212).

De esta manera, la presente investigación consiste en analizar los cocientes que surgen al comparar probabilidades. Para ello se clasifican las estrategias que siguen estudiantes de educación secundaria con la finalidad de profundizar en los procesos que llevan a cabo para establecer algún resultado. Es decir, se plantea identificar qué elementos consideran para hacer sus comparaciones (casos favorables, desfavorables o posibles), qué tipo de elecciones realizan con base en las relaciones que establecen y cuáles son las particularidades de estas relaciones, que para este estudio son fundamentales, porque lo que se pretende es obtener indicios de cómo los distintos cocientes que pueden establecer influyen en sus decisiones. El estudio está orientado por la siguiente pregunta y propósito de investigación.

Pregunta de investigación: Al resolver situaciones de probabilidad, ¿cuáles son los cocientes que estudiantes de educación secundaria establecen para hacer una elección?

Propósito: Identificar, analizar y clasificar las estrategias que siguen estudiantes de tercer grado de educación secundaria al resolver situaciones de probabilidad clásica contextualizadas con el modelo de urna, centrando la atención en aquellas estrategias que implican comparar por cociente para ver de qué manera influyen en la toma de decisiones.

Método

La investigación es cualitativa con un caso instrumental (Stake, 1999), conformado por un grupo de 35 alumnos de tercer grado de educación secundaria de la Ciudad de México. Se diseñaron 10 situaciones, con y sin proporcionalidad, que implicaron la comparación de probabilidades. Para el diseño de las situaciones se recurrió al modelo de urna. De la clasificación de Lamon (1993), los problemas planteados corresponden a los de Parte-parte-todo —que Özgün-Koca (2009) incluye en su estudio dentro de los de comparación numérica— porque la mayoría de los problemas que se plantearon pueden asumirse como conjuntos discretos donde un todo corresponde a los casos posibles y los subconjuntos de ese todo a los casos favorables y desfavorables, respectivamente. Para la implementación de las situaciones se utilizaron tres sesiones de trabajo, cada una de 50 minutos. En cada sesión los alumnos resolvieron individualmente de tres a cuatro situaciones sin instrucción (previa o durante la implementación) de la resolución, lo que favoreció un pensamiento independiente y conllevó a la identificación y análisis de diversas estrategias. En este documento interesó ilustrar las relacionadas con la comparación por cociente.

Marco teórico-interpretativo

Como resultado del análisis, se construyó un marco interpretativo para la clasificación de las estrategias derivadas de la comparación por cociente que surgieron de la implementación. Se identificaron dos tipos de comparaciones: a) aditiva —por medio de una diferencia— y, b) multiplicativa —por medio de un cociente—. La primera implica un pensamiento absoluto, y la segunda uno relativo (Lamon,1999); siendo la multiplicativa la que interesa ilustrar en este documento. En la Tabla 1 se muestran dieciséis expresiones identificadas al comparar por cociente los elementos de dos urnas, donde F representa el número de casos favorables, D número de casos desfavorables y F+D corresponde al número de casos posibles. Los subíndices 1 y 2, en F_1, F_2, D_1 y D_2 indican el punto de referencia, es decir, si los casos favorables o desfavorables corresponden a la primera o segunda urna, respectivamente.

Tabla 1: Relaciones que se pueden establecer cuando se compara por cociente

Punto de referencia F	Punto de referencia D	Reciproco del punto de referencia F	Reciproco del punto de referencia D
Expresión i	Expresión ii	Expresión iii	Expresión iv
$\frac{F_1}{F_2}$ con $\frac{D_1}{D_2}$	$\frac{D_1}{D_2}$ con $\frac{F_1}{F_2}$	$\frac{F_2}{F_1}$ con $\frac{D_2}{D_1}$	$\frac{D_2}{D_1}$ con $\frac{F_2}{F_1}$
Fracción: Parte – Parte		Fracción: Parte – Parte	
Razón: Cuando el antecedente es F y D y el consecuente es F y D.		Razón: Cuando el antecedente es F y D y el consecuente es F y D.	
Punto de referencia Urna 1	Punto de referencia Urna 2	Reciproco del punto de referencia Urna 1	Reciproco del punto de referencia Urna 2
Expresión v	Expresión vi	Expresión vii	Expresión viii
$\frac{F_1}{D_1}$ con $\frac{F_2}{D_2}$	$\frac{F_2}{D_2}$ con $\frac{F_1}{D_1}$	$\frac{D_1}{F_1}$ con $\frac{D_2}{F_2}$	$\frac{D_2}{F_2}$ con $\frac{D_1}{F_1}$
Fracción: Parte – Parte		Fracción: Parte – Parte	
Razón: Cuando el antecedente es F y el consecuente es D.		Razón: Cuando el antecedente es D y el consecuente es F.	
Expresión ix	Expresión x	Expresión xi	Expresión xii
$\frac{F_1}{F_1+D_1}$ con $\frac{F_2}{F_2+D_2}$	$\frac{F_2}{F_2+D_2}$ con $\frac{F_1}{F_1+D_1}$	$\frac{F_1+D_1}{F_1}$ con $\frac{F_2+D_2}{F_2}$	$\frac{F_2+D_2}{F_2}$ con $\frac{F_1+D_1}{F_1}$
Fracción: Parte-todo. Cuando la parte es F		Fracción: Todo-parte. Cuando la parte es F	
Razón: Cuando el antecedente es F y el consecuente es $F+D$.		Razón: Cuando el antecedente es $F+D$ y el consecuente es F.	
Expresión xiii	Expresión xiv	Expresión xv	Expresión xvi
$\frac{D_1}{F_1+D_1}$ con $\frac{D_2}{F_2+D_2}$	$\frac{D_2}{F_2+D_2}$ con $\frac{D_1}{F_1+D_1}$	$\frac{F_1+D_1}{D_1}$ con $\frac{F_2+D_2}{D_2}$	$\frac{F_2+D_2}{D_2}$ con $\frac{F_1+D_1}{D_1}$
Fracción: Parte-todo. Cuando la parte es D.		Fracción: Todo-parte. Cuando la parte es D.	
Razón: Cuando el antecedente es D y el consecuente es $F+D$.		Razón: Cuando el antecedente es $F+D$ y el consecuente es F.	

En la comparación por cociente (véase la Tabla 1), considerado como fracción o razón, se pueden presentar, durante las relaciones que se establecen con los elementos que las conforman (parte-parte, parte-todo, todo-parte y antecedente-consecuente), las siguientes estrategias para compararlas (véase la Tabla 2), donde en la relación parte-parte *a, b, c* y *d* son las partes; en la parte-todo *a* y *c* son las partes y b y d son los todos; en todo-parte a y c son los todos y b y d son las partes; y en la relación antecedente-consecuente a y c son los antecedentes y b y d son los consecuentes.

Tabla 2: Estrategias para comparar las relaciones que se establecen en la Tabla 1

1ª.- Estrategia: Fracción-razón (parte-parte, parte-todo y todo-parte) con el uso de: *Múltiplos:* Si se multiplica $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{c}\right)$ y $\left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{a}{a}\right)$ se obtienen las expresiones $\frac{ac}{bc}$ y $\frac{ac}{ad}$, y si $bc = ad$ entonces se puede establecer la proporción $\frac{ac}{bc} = \frac{ac}{ad}$ que sería equivalente a: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Esto significa que los conjuntos representados por a y b, y c y d son equiprobables. *Productos cruzados:* Dadas las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, si al efectuar los productos ad y bc se obtiene la igualdad $ac = bd$, entonces se establece la proporción: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Esto significa que los conjuntos representados por a y b, y c y d son equiprobables. Los productos cruzados son un caso particular del uso de múltiplos para comparar razones o fracciones. *Submúltiplos:* Si al simplificar $\frac{a}{b}$ se obtiene $\frac{m}{n}$, y al simplificar $\frac{c}{d}$ también se obtiene $\frac{m}{n}$, entonces se establece la proporción: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, lo que significa que los conjuntos representados por a y b, y c y d son equiprobables. *Suma y resta de fracciones o razones:* Dadas las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, si al hacer la sustracción $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ se obtiene la diferencia $\frac{0}{bd} = 0$, entonces se establece la proporción: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Esto significa que los conjuntos representados por a y b, y c y d son equiprobables. *Suma y resta de fracciones o razones en su representación decimal:* Parte de la relación fracción-razón, y se llega a su representación en forma decimal para comparar y hacer la elección. Si al simplificar $\frac{a}{b}$ se obtiene m, y al simplificar $\frac{c}{d}$ también se obtiene m, donde m es un número decimal, entonces se establece la proporción: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Esto significa que los conjuntos representados por a y b, y c y d son equiprobables.
2ª.- Estrategia: Relación dentro. Se presenta de forma aditiva o multiplicativa. *Forma aditiva*: Dadas las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, si $a \pm (a)\left(\frac{m}{n}\right) = b$, y $c \pm (c)\left(\frac{m}{n}\right) = d$, o si $b \pm (b)\left(\frac{m}{n}\right) = a$ y $d \pm (d)\left(\frac{m}{n}\right) = c$, entonces se puede establecer la proporción: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Esto significaría que los conjuntos representados por a y b, y c y d son equiprobables. *Forma multiplicativa*: Dadas las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, si $(a)\left(\frac{m}{n}\right) = b$ y $(c)\left(\frac{m}{n}\right) = d$, o si $(b)\left(\frac{n}{m}\right) = a$ y $(d)\left(\frac{n}{m}\right) = c$, entonces se puede establecer la proporción: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Esto significaría que los conjuntos representados por a y b, y c y d son equiprobables.
3ª.- Estrategia: Regla de tres. Se establece una relación cuaternaria donde uno de los cuatro elementos es desconocido y los otros tres deben ser relacionados para encontrar su valor. Este valor es comparado con el obtenido en otra relación cuaternaria similar. *Para la obtención de porcentajes:* Dadas las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, si se multiplica $\frac{a}{b}$ por 100 para obtener el porcentaje de a respecto al porcentaje de b, considerado como el 100%. Y $\frac{c}{d}$ también se multiplica por 100 para obtener el porcentaje de c respecto al porcentaje de d, considerado como el 100%, si $\frac{(a)(100)}{b} = \frac{(c)(100)}{d}$, entonces se podría establecer la proporción: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, lo que significaría que los conjuntos representados por a y b, y c y d son equiprobables. *Para la obtención de a, b, c o d:* Dadas las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, si $\frac{(cb)}{a} = d$ y $\frac{(ad)}{c} = b$, y d resulta ser múltiplo o submúltiplo de b, entonces se puede establecer la proporción: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Esto significaría que los conjuntos representados por a y b, y c y d son equiprobables.

4ª.- Estrategia: Relación entre. Se presenta de forma aditiva o multiplicativa.
Forma aditiva: Dadas las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, si $a \pm (a)\left(\frac{m}{n}\right) = c$, y $b \pm (b)\left(\frac{m}{n}\right) = d$, o si $c \pm (c)\left(\frac{m}{n}\right) = a$, y $d \pm (d)\left(\frac{m}{n}\right) = b$, entonces se puede establecer la proporción: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Esto significaría que los conjuntos representados por a y b, y c y d son equiprobables.
Forma multiplicativa: Dadas las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, si $(a)\left(\frac{m}{n}\right) = c$ y $(b)\left(\frac{m}{n}\right) = d$, o si $(c)\left(\frac{n}{m}\right) = a$ y $(d)\left(\frac{n}{m}\right) = b$, entonces se puede establecer la proporción: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Esto significaría que los conjuntos representados por a y b, y c y d son equiprobables.

Si las relaciones anteriores no están en proporción, entonces los conjuntos representados por a y b, y c y d no serían equiprobables, por lo que habría que identificar cuál de los dos conjuntos tiene mayor probabilidad con base en los casos (favorables, desfavorables o posibles) que se consideraron y las relaciones que se establecieron para hacer las comparaciones. En las estrategias descritas anteriormente se encuentran las relaciones *dentro* y *entre* consideradas por Noelthing (1980) al trabajar situaciones de mezclas, y aunque este investigador sólo considera las relaciones *dentro* y *entre* de carácter multiplicativo, Alatorre (1994) las amplía a relaciones de orden y de carácter aditivo o sustractivo, pero no las considera como se hace en este estudio en la comparación por cociente, pues ella señala las diferencias sin tomar en cuenta la cantidad basal y desde nuestra perspectiva la *Forma aditiva* sí incluye esta cantidad basal al considerar cuántas de cuántas. La comparación por cociente está estrechamente relacionada con el pensamiento relativo, Lamon (1999) distingue a este tipo de pensamiento como aquel donde se involucran estructuras multiplicativas y lo diferencia del pensamiento absoluto donde se establecen relaciones de tipo aditivo.

Análisis de los resultados

Por la finalidad que esta investigación persigue consideramos conveniente analizar el tipo de elecciones, las comparaciones que se establecen, las estrategias que se siguen y el punto de referencia que se considera en la comparación de probabilidades, es decir, el sentido de las relaciones que se dan entre los casos (favorables, desfavorables o posibles). En la Tabla 3 se ilustra la comparación cuantitativa por cociente y sus implicaciones, para ejemplificar el seguimiento de las estrategias identificadas en la implementación.

Tabla 3: Ilustración del tipo de elección, las estrategias y la relación de orden identificada en la comparación cuantitativa por cociente

Elección con base en el	Estrategia (véase Tabla 2)	Relaciones (véase Tabla 1)
Cociente mayor; Cociente menor; o Cociente igual.	1ª Fracción-razón (parte-parte).	Favorables-desfavorables v y vi Desfavorables-favorables vii y viii
	1ª Fracción-razón (parte-todo).	Favorables-posibles ix y x Posibles-favorables xi y xii
		Desfavorables-posibles xiii y xiv Posibles-desfavorables xv y xvi

Consideración de casos favorables y casos desfavorables. Se comparan por medio de cocientes los casos favorables y desfavorables de cada conjunto (véanse las expresiones i, ii, iii, iv, v, vi, vii y viii de la Tabla 1) y se elige con base en el mayor, menor o igual cociente. En lo que sigue se ejemplifica una de las estrategias con base en la elección del cociente mayor.

Elección con base en el cociente mayor. Estrategia: Fracción-razón parte-parte con o sin la utilización de submúltiplos y su representación en forma decimal.

Relación de orden: Favorables-Desfavorables.

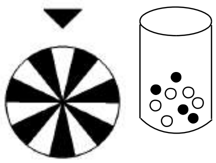
 Sit*uación II.* 1.- En una feria hay dos juegos azar: una ruleta y una urna, ¿en qué juego existe mayor probabilidad de ganar, en la ruleta si se apuesta a que al girarla se detenga en un sector blanco o en la urna si se apuesta a que en la primera extracción sin ver la bola será blanca? Explica como le hiciste para determinar tu respuesta.	*Estrategia del estudiante.* Ejemplo1 (E1). Urna 2. Hay más probabilidad de ganar en la urna. Pues fui sacando la mediana [mitad] a los colores de cada juego. En la ruleta eran los mismos colores y en la urna había una bola blanca más que negra y vi que había mejor probabilidad de ganar. $\frac{7}{7}=\frac{3.5}{3.5}=1$ $\frac{5}{4}=\frac{2.5}{2}=1.25$ 1.25 20)2.5. 050 100 00

Figura 1: Estrategia del estudiante. Ejemplo 1 (E1) se elige el cociente mayor. Comparación por cociente (favorables-desfavorables)
llegando a su representación decimal con el uso de submúltiplos

En E1, se presenta la comparación de casos favorables y desfavorables. Para simplificar la comparación de variables se utilizan submúltiplos y se termina con una representación decimal. En las expresiones v y vi (véase Tabla 1) se elige con base en cociente mayor, porque los cocientes en estas expresiones representan el número de favorables por cada desfavorable. Por lo contrario, si se presentan las expresiones vii y viii las elecciones serán correctas sólo si se elige con base en el cociente menor, que representan el número de desfavorables por cada favorable. De aquí la importancia de las relaciones de orden: favorables-desfavorables o desfavorables-favorables.

En cuanto a las expresiones i, ii, iii y iv de la Tabla 1 se tendrían elecciones correctas si se considera, en i y iii el segundo cociente, es decir, si este resulta ser mayor al primer cociente se debe elegir el conjunto cuyos elementos se asignaron a los denominadores de los cocientes comparados. Sin embargo, si resulta ser menor al primero, se realiza una elección correcta si se elige el conjunto cuyos elementos se asignaron a los numeradores. Por otra parte, si se consideran las expresiones ii y iv la elección también dependería del segundo cociente, si resulta ser mayor al primer cociente se debe elegir el conjunto que haya quedado en los numeradores. Pero si resulta ser menor, se haría una elección correcta si se elige el conjunto cuyos elementos quedaron en los denominadores, esto debido a que en las expresiones i, ii, iii y iv los cocientes resultantes representan el número de favorables de un conjunto por cada favorable del otro, y en este mismo sentido, el número de desfavorables de un conjunto por cada desfavorable del otro.

Consideración de casos desfavorables y casos posibles. Se comparan por medio de cocientes los casos posibles y desfavorables de cada conjunto (véanse las expresiones xiii, xiv, xv y xvi de la Tabla 1) y se realiza la elección con base en su mayor, menor o igual cociente. En lo que sigue se ejemplifica una de las estrategias con base en la igualdad de cociente.

Elección con base en la igualdad de cocientes. Estrategia: Fracción-razón parte-todo con o sin el uso de submúltiplos y su representación en forma decimal.

Relación de orden: Desfavorables-Posibles.

Situación IX. Una profesora muestra a sus estudiantes dos bolsas negras; en la primera deposita 9 canicas negras y 6 blancas, y en la segunda deposita 15 negras y 10 blancas ¿qué bolsa deben elegir para que tengan mayor probabilidad de que en la primera extracción sin ver la canica sea negra? Explica el procedimiento que seguiste para realizar la elección.	*Estrategia del estudiante.* Ejemplo (E2). Cualquier bolsa. En cualquiera de las bolsas se tiene la misma probabilidad.

	Bolsa 1	Bolsa 2
Canicas blancas / Total de canicas	$\frac{9}{15}$	$\frac{15}{25}$
Probabilidad	0.6	0.6

$\begin{array}{r} .6 \\ 15\overline{)90} \\ 0 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} .6 \\ 25\overline{)150} \\ 0 \end{array}$

Figura 2: Estrategia del estudiante. Ejemplo 2 (E2) se elige el cociente igual. Comparación por cociente (desfavorables-posibles) llegando a su representación decimal

En E2, se presenta la comparación de casos desfavorables y posibles en cada conjunto. Primero se relacionaron los casos del primer conjunto y posteriormente los del segundo (véase la expresión xiii de la Tabla 1). Es importante señalar que en E2 se establece que los resultados decimales obtenidos corresponden a las probabilidades de los casos desfavorables de cada conjunto. En las expresiones xv y xvi (véase Tabla 1) se elige con base en cociente mayor; esto porque el cociente resultante determina el número de casos posibles por cada desfavorable. Por lo contrario, si se presentan las expresiones xiii y xiv, las elecciones serán correctas sólo si se elige con base en el cociente menor; esto debido a que el cociente representa el número de desfavorables por cada posible. En las expresiones ix y x se elige con base en cociente mayor; esto porque representan el número de favorables por cada posible. En cambio, si se presentan las expresiones xi y xii, las elecciones serán correctas sólo si se elige con base en el cociente menor; esto debido a que el cociente resultante representa el número de posibles por cada favorable. Es importante comentar que las expresiones ix y x son las únicas que se utilizan y consideran en los Programas de estudio de 2011 (SEP, 2011), para representar probabilidades y realizar comparaciones entre ellas.

Consideraciones finales

Con los resultados del estudio se concluye que, si se solicita la probabilidad del evento *A*, los estudiantes establecen el cociente (razón) $\frac{F}{P}$, determinado por Laplace como la razón entre el número de casos favorables *F* y el de todos los casos posibles *P*. Sin embargo, si se les plantea una situación de comparación de probabilidades, suelen recurrir a otros cocientes de comparación donde además incluyen a los casos desfavorables *D* como: $\frac{D}{P}$ o $\frac{F}{D}$ o sus recíprocos, y no necesariamente al establecido por Laplace. En la investigación se mostró que estas razones llevaron a los estudiantes a elecciones correctas con base en determinar la urna con mayor probabilidad. De aquí la importancia de poner mayor énfasis en las estrategias de comparación por cociente que resulten de comparar probabilidades. El punto de referencia es determinante para comprender las relaciones que los estudiantes establecen y la interpretación que le dan a sus cocientes. En este sentido, por ejemplo, la interpretación del cociente (razón) $\frac{F}{D}$ es totalmente distinta a la representada en el cociente (razón) $\frac{D}{F}$, y de igual manera es distinta la interpretación $\frac{F_1}{D_1} > \frac{F_2}{D_2}$ a $\frac{F_2}{D_2} < \frac{F_1}{D_1}$. Desde un punto de vista puramente matemático estas comparaciones no tendrían mayor dificultad, pero desde un sentido pedagógico y didáctico de la enseñanza y del aprendizaje de la probabilidad, el cambio en el punto de referencia al establecer las comparaciones influye en el tratamiento del objeto de estudio y su interpretación. Se sugiere la incorporación de orientaciones didácticas en los materiales curriculares de educación básica, donde se incluya un análisis de las estrategias por cociente que los estudiantes pueden llevar a cabo al resolver problemas de probabilidad. Se considera que un análisis detallado de las estrategias variadas que presentan los alumnos tendría un aspecto positivo en la enseñanza y estudio de esta rama de las matemáticas.

Referencias

Aguas, M. (2014). *Situaciones de probabilidad clásica y el modelo de urna como medios para favorecer el desarrollo simultáneo de los razonamientos proporcional y probabilístico.* Tesis de maestría. Cinvestav-IPN, México, 2014.

Alarcón, J.; Bonilla, E.; Nava, R.; Rojano, T. y Quintero, R. (1994). *Libro para el maestro. Matemáticas. Secundaria.* México: SEP.

Alatorre, S. (1994). *Respuestas intuitivas de adultos a problemas de probabilidad. Algunas aportaciones metodológicas.* Tesis de maestría. Universidad Pedagógica Nacional, México, 1994.

Cañizares, M. J. y Batanero, C. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias.* Departamento de Didáctica de la matemática. Universidad de Granada.

Falk, R. (1980). Comportamientos de elección en situaciones de probabilidad. *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics.* Vol. II. University of Sheffield 9-13 August 1982.

Green, D. R. (1988). Children's understanding of randomness: Report of a survey of 1600 children aged 7-11 years. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *The Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*. Victoria, B. C.: University of Victoria.

Hoemann, Harry W. y Roos, Bruce M. (1971). Children's understanding of probability concepts. *Child Development,* 42, 221-236.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: connecting content and children's thinking. En Lester, F. K. (Ed). *Journal for Research in Mathematics Education,* 24(1), pp. 41-61. USA: NCTM.

Lamon, S. J. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Landín, P. R. y Sánchez, E. (2010). *Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a tareas de distribución binomial.* Educação Matemática Pesquisa, 12 (3). [Recuperado el 15/01/13 de: http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewArticle/4842]

Lesh, R., Post, T. y Behr, M. (1988). Proportional reasoning. En Hiebert, J. y Behr, M. (Eds). *Number Concepts an Operations in the Middle Grades. Research Agenda for Mathematics Education.* Vol. 2. The United States of America: Lawrence Erlbaum Associates.

NCTM [National Council of Teachers of Mathematics]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: *NCTM*.

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept: Part II. Problem structure at successive stages; problem solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics,* 11, pp. 331- 363.

Özgün-Koca, S. A. (2009). An investigation of proportional reasoning skills of middle school students. En Schimittau, J. (Ed). *Investigations in Mathematics Learning,* 2(1), pp. 26-48. USA: RCML.

SEP [Secretaría de Educación Pública]. (2011). *Programas de estudio 2011. Educación Básica. Secundaria.* México: SEP.

Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos.* Madrid: Ediciones Morata.