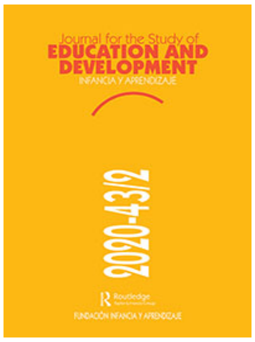


Journal for the Study of Education and Development
Infancia y Aprendizaje

ISSN: (Print) (Online) Journal homepage: https://www.tandfonline.com/loi/riya20

Generalizing in the context of an early algebra intervention (La generalización en el contexto de una intervención algebraica temprana)

Susanne Strachota

To cite this article: Susanne Strachota (2020) Generalizing in the context of an early algebra intervention (La generalización en el contexto de una intervención algebraica temprana), Journal for the Study of Education and Development, 43:2, 347-394, DOI: 10.1080/02103702.2020.1732611

To link to this article: https://doi.org/10.1080/02103702.2020.1732611

Published online: 17 Apr 2020.

Submit your article to this journal

Article views: 87

View related articles

View Crossmark data

Full Terms & Conditions of access and use can be found at
https://www.tandfonline.com/action/journalInformation?journalCode=riya20

JOURNAL FOR THE STUDY OF EDUCATION AND DEVELOPMENT / INFANCIA Y APRENDIZAJE
2020, VOL. 43, NO. 2, 347–394
https://doi.org/10.1080/02103702.2020.1732611

Routledge
Taylor & Francis Group

Check for updates

Generalizing in the context of an early algebra intervention (*La generalización en el contexto de una intervención algebraica temprana*)

Susanne Strachota

Ohio University

ABSTRACT

This study aims to understand the instructional interactions that foster students' generalizing. By analysing video-recorded lessons from 13 different Grade 3 classrooms in which an early algebra intervention was implemented, activities related to generalizing and students' generalizing activities were identified, and the nature of the relationships between these activities were explored. Namely, I consider the activities that potentially encourage students' generalizing and the generalizing that students themselves do, and describe ways in which these activities interact. The findings have both practical and theoretical implications; in the former case, they provide insight into the design of instruction to foster generalizing, and in the latter case, they contribute to an ongoing conversation about students' mathematics learning.

RESUMEN

El objetivo de este estudio es comprender las interacciones que ocurren durante la enseñanza que fomentan la generalización por parte de los alumnos. Al analizar las clases grabadas en vídeo de trece aulas diferentes de tercero de primaria donde se implementaba una intervención algebraica temprana, identificamos las actividades relacionadas con la generalización y las actividades de generalización de los estudiantes y exploramos la naturaleza de las relaciones entre estas actividades. Concretamente, detecto las actividades que potencialmente motivan la generalización, además de la generalización en sí que hacen los estudiantes, y describo las maneras en que interactúan estas actividades. Los hallazgos tienen implicaciones prácticas y teóricas; primer, ofrecen conocimientos nuevos acerca del diseño de la enseñanza para promover la generalización y, segundo, contribuyen al debate actual sobre el aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes.

ARTICLE HISTORY
Received 27 March 2018
Accepted 12 April 2019

KEYWORDS
algebraic reasoning; generalization; elementary mathematics

PALABRAS CLAVE
razonamiento algebraico; generalización; matemáticas elementales

CONTACT Susanne Strachota sstrachota@gmail.com Ohio University, 736 Dartmoor St N, St Petersburg, FL 33701, USA.

English version: pp. 347–368 / Versión en español: pp. 369–393
References / Referencias: pp. 393–394
Translation from English / *Traducción del inglés*: Silvia Montero

© 2020 Fundacion Infancia y Aprendizaje

To support students' learning of algebra in the secondary grades, we must better understand the instructional contexts that foster the fundamental processes involved in algebraic reasoning in the early grades because this serves as a critical precursor to success in formal algebra (Kaput & Blanton, 2001). Therefore, this study focuses on the fundamental aspects of teaching and learning algebra in the elementary grades that are deemed critical to success in algebra in later grades.

Algebra and algebraic reasoning

In the most recent meeting of the International Congress on Mathematical Education (ICME-13), the Topical Survey Group on early algebra determined that 'mathematical relations, patterns, and arithmetical structures' are core concepts of algebraic reasoning (Kieran, Pang, Schifter, & Ng, 2016, p. 1). Correspondingly, a number of descriptions of algebraic concepts have developed, some emphasizing mathematical structure and relationships and others focusing more specifically on generalized arithmetic (e.g., Britt & Irwin, 2008).

In addition to algebraic concepts, the activities involved in algebraic reasoning are another way researchers have defined the term. For example, in her plenary lecture at the 12th International Congress on Mathematical Education, Kieran (2004) described a framework that encompasses three fundamental activities of algebra: generational activity, transformational activity and global meta-level activity. According to Kieran (1996), generational activity focuses on algebraic representations, specifically the forming and interpreting of the objects of algebra – expressions and equations. Transformational activity often focuses on changing the form of an expression or equation to maintain equivalence (e.g., collecting like terms, factoring, solving equations). Global meta-level activities include problem-solving, modelling, noticing structure, studying change, generalizing, analysing relationships, justifying, proving and predicting. The latter global meta-level activities are those for which algebra is used as a tool and that give algebra purpose – without these activities, there would be no compelling reason to engage with algebra. Hence, the early algebra intervention implemented in this study, spanning Grades 3–5, is framed with three global meta-level activities (generalizing, justifying and reasoning with mathematical structure and relationships) and one generational activity (representing generalizations).

These activities come from the work of Blanton et al. It is important to note that Blanton et al. accept children's representations of generalizations in their natural form. Therefore, in the context of the early algebra intervention, the generational activity of representing generalizations does not necessarily occur in the form of mathematical expressions and equations. Henceforth, the aforementioned activities are referred to as algebraic thinking practices based on the way they are referenced in their original source.

Global meta-level activities are an important part of early algebra, in particular, for two primary reasons. First, these activities are important to early algebra as engaging with global meta-level activities is possible without having an understanding of or facility with formal, symbolic algebra. As Kieran (2004) noted, such activities are 'ideal vehicles for conceptualizing a non-symbolic or pre-symbolic approach to algebraic reasoning in primary grades' (p. 148). Second, global meta-level activities are important to early algebra because the kind of thinking involved is a precursor for more formal ways of engaging in algebraic reasoning, including generational and transformational activities (Kieran, 1996). Given the importance of global meta-level activity in early algebra, this study investigates this activity in the context of Grade 3 early algebra classrooms.

Study objective: a focus on generalization

This study aims to understand the specific global meta-activity of generalizing in elementary classrooms. Generalizing is the situated activity of 'lifting' and communicating reasoning to a level where the focus is no longer on a particular instance, but rather on patterns and relationships of those particular instances (Kaput, 1999, p. 137).

Generalizing is fundamental to early algebraic reasoning (Cooper & Warren, 2011; Kieran, 2007; Kieran et al., 2016; Mason, 1996). Yet, students struggle to generalize (English & Warren, 1995; Lee & Wheeler, 1987), often make weak generalizations and rarely justify their generalizations (Breiteig & Grevholm, 2006; Knuth, Slaughter, Choppin, & Sutherland, 2002). Thus, supporting generalizing in the mathematics classroom requires a better understanding of the classroom context, specifically, the nature of curricular tasks and instructional practices that foster students' generalizing.

The question at the core of this study, examining the nature of generalizing activity observed during early algebra-focused lessons, is: *What are the instructional and interactional activities that encourage students' generalizing?* To address this question, I examine the instructional and interactional activities (i.e., tasks, teacher and student discourse) that facilitate students' generalizing activity in Grade 3 classrooms. A review of the literature addressing students' generalizing and how it informed this study is described next.

Supporting students' generalizing

The aforementioned research addresses opportunities for generalizing. Another important area of inquiry seeks to understand how to support the development of students' generalizing. Ellis (2011) explores the activity around students' generalizing, and describes and categorizes what she calls generalizing-promoting activity, or the students' and teacher's actions and interactions that promote generalizing. Based on a teaching experiment with six middle school students and one teacher-researcher, Ellis identified seven types of generalizing-promoting activities.

Understanding the context of generalizing is critical to support students' developing and refining generalizations. Specifically, Ellis (2011) argues that generalizing is tied to a specific sociomathematical context through which people construct generalizations. Generalizing is then demonstrated through an individual's activity and discourse. This conceptualization attends to the context or situation in which generalizing takes place. In light of this conceptualization of generalization, in the next section I will elaborate on Ellis's claims and explain how the actor-oriented perspective (Lobato, 2003) functions as a guiding framework for my study.

Characterizing students' generalizing activity through instructional interactions

The theoretical framework that guides this study has two main components. Ellis's work served a practical purpose by helping me to initiate the coding process: the definitions and descriptions in her taxonomy and framework functioned as a priori codes in my analysis. Lobato's actor-oriented perspective played a more theoretical role: it drew my attention away from my own perspective and towards interpreting what the speaker was thinking and intending to communicate.

This study uses Ellis's taxonomy of generalizing activity (2007) and framework of generalizing-promoting activity (2011) as a lens for making sense of the generalizing observed in elementary classrooms implementing an early algebra intervention. In Ellis's taxonomy, generalizing is the activity tied to a specific sociomathematical context which occurs when an individual or a group engage in one of three actions: (a) recognizing common characteristics across particular instances, (b) extending an idea beyond the original situation or idea or (c) generating broader or new situations from particular situations. For example, a student generalizes when they (a) recognize commutativity in particular arithmetic expressions (e.g., $3 + 4$ and $4 + 3$; $5 + 2$ and $2 + 5$), (b) construct and test new expressions to represent their observation and (c) communicate their idea in a general way that applies beyond particular cases (e.g., $a + b = b + a$).

The actor-oriented perspective (Lobato, 2003) also played a central role for identifying the mathematical ideas that were salient to the students and in understanding how they constructed their mathematical understanding in the context of the early algebra classrooms. The actor-oriented perspective presumes that students' understandings are based upon the experiences by which they developed that understanding, not by predetermined models of normative performance (Lobato, 2003). Rather than testing hypotheses of what knowledge should be generalized, actor-oriented research aims to determine how prior learning shapes students' generalizing, regardless of whether the generalizing is mathematically correct (Ellis & Grinstead, 2008). Moreover, this approach allows students' generalized knowledge to be an object of investigation, enabling the researcher to analyse information students consider salient (Ellis, 2007).

Because the actor-oriented perspective sheds light on the connection between the context of learning and a student's thinking, researchers can identify specific aspects of instruction and how these support students' learning so that instruction can be formatively designed. This approach can identify generalizations that, although considered mathematically incorrect or imprecise, are based on the speaker (typically a student) who perceives the generalization as valid.

Methods

Study background

The data used for this study were collected as part of a larger research project (viz., Blanton et al., 2017) concerned with the fundamental question of how to support and prepare students in elementary grades for the study of algebra in the middle grades and beyond. The larger study involves the implementation of a Grades 3–5 early algebra classroom intervention (approximately 20 one-hour lessons per grade level per year) and an evaluation of the intervention's effectiveness compared with a group of more traditional Grades 3–5 classrooms. It is worth noting that the intervention students, relative to the comparison students, showed statistically significant performance gains in the evaluations of their development of algebraic reasoning (Blanton et al., 2017).

As noted in the introduction, the early algebra intervention was based on four algebraic thinking practices: generalizing, representing, justifying and reasoning with mathematical structure and relationships. Three of these four algebraic thinking practices (generalizing, justifying and reasoning with mathematical structure and relationships) are representative of Kieran's (2004) global meta-level activities. We focus on engaging students in these activities in our early algebra intervention because, as Kieran (2004) highlighted, global meta-level activities are 'ideal vehicles' for early algebraic thinking and precursors to formal algebraic thinking (p. 148). The fourth activity of representing qualifies as a generational activity. It is one way that students build on and extend the algebraic thinking that they develop when they engage with the global meta-level activities.

The goal of the intervention is to engage students in the four aforementioned algebraic thinking practices in the context of four core concept areas: (1) equivalence, expressions, equations and inequalities; (2) generalized arithmetic; (3) functional thinking and (4) variable (Blanton et al., 2015). The lessons used in the intervention were designed to encourage students to begin generalizing by noticing patterns. This approach was conjectured to be a natural way for many students to initially generalize about related quantities.

Participants and data collection

The larger study was comprised of 46 schools spread across three districts in a large city in the mid-Atlantic region of the United States. The teachers from the intervention schools received monthly professional development and support throughout the intervention period. The goal of the professional development was to support the teachers in implementing the early algebra intervention lessons with integrity. This entailed reviewing each lesson plan and observing a veteran intervention teacher, who was a teacher-researcher in a pilot study, implement the lesson. The teachers did not receive any information or training on engaging in the activities identified in this study in their classroom.

In addition to the aforementioned student assessment data, videotaped classroom observations were conducted with a random subset of the Grades 3–5 intervention teachers (approximately 50 teachers per grade level). Relevant to this study's context, each Grade 3 intervention teacher, except one, was observed twice, for a total of 99 observations. In this study, I focused on the videotaped classroom observations of intervention teachers and their students.

The classrooms, which were randomly selected for analysis, were from a subset of teachers who taught lessons that potentially provided the best opportunities for students to construct generalizations. That is, in selecting which intervention teachers and lessons to observe, I first identified the lessons that potentially provided the best opportunities for students to construct generalizations based on the lesson objectives and Kaput (1999) definition of generalization. Namely, I selected the lessons that supported students in 'lifting' reasoning to focus no longer on a particular instance, but rather on patterns and relationships. For example, lessons that provided opportunities for students to construct generalizations based on Kaput's (1999) definition of generalization often encouraged students to attend to patterns, make observations about those patterns and then extend those patterns to a broader situation. An elaboration on which lessons encouraged students to generalize is provided in the online supplement that accompanies this article.

After identifying the lessons in which generalization played a major role, I decided to focus on Lesson 15 because, in addition to generalization playing a key role, it was recorded many times, and it occurred later in the intervention (i.e., lesson 15 out of 18) so that teachers would have participated in most of the early algebra professional development and would therefore be more likely to be consistent and confident about implementing the lessons. Once I decided to focus on Lesson 15, I randomly selected 50% of the 28 classrooms from the pool of classrooms that were recorded for Lesson 15. I selected the subset of data by assigning each classroom a number and using a randomization function in Excel.

Data analysis

The goal of this analysis was to describe the generalization-related activities of the enacted lessons. This process entailed identifying the *generalizing-promoting* and *generalizing activities* according to the coding scheme described below and considering the ways in which the instructional interactions during the lesson promoted students' generalizing.

To analyse the instructional interactions, I first described each video thoroughly, and improved the translation, when necessary. In other words, I watched the video and wrote a summary of my observations. Then I uploaded the video into the transcription software InqScribe, and rewatched it, transcribing conversations from the mathematics content. Ultimately, most of the videos were transcribed because the conversations were relevant to the analysis. I describe the transcripts as 'improved' because additional details were added when necessary. For example, some transcriptions include snapshots from the video and/or contextual details, including gestures and movements around the room.

The video data were analysed using Ellis's framework of generalizing-promoting activity (2011) and taxonomy of generalizations (2007), which together served as a starting point for developing the external coding scheme for the generalizing-related instructional interactions and activities. When I observed generalizing activities that did not fit Ellis's framework or taxonomy (e.g., *priming activity*), I grouped these activities with other similar ones and identified patterns to develop new data-emergent codes that reflected these activities. My coding scheme developed from this process. For example, *priming*[1] *activities*, which were not a part of Ellis's framework or taxonomy are outlined in the results section because they were emergent codes. These activities prepare students to build on an idea or refer to an idea later on.

There are three categories of codes: *priming activities, generalizing-promoting activities* and *generalizing activities*. Tables 1 and 2 show the *generalizing-promoting* and *generalizing activities*. These codes (e.g., *relating situations or objects*) were decided a priori (based on Ellis's (2007) taxonomy and framework (2011)), while others (e.g.,

Table 1. Generalizing-promoting activities.

Generalizing-Promoting Activities
Encouraging relating and searching: Prompting the formation of an association between two or more entities; Prompting the search for a pattern or stable relationship.
Example Referring to a function table and asking students to search for a relationship between values or instances of the relationship (e.g., co-varying quantities). For example, a teacher might ask students if they notice any patterns or relationships in the table.
Encouraging Extending: Prompting the expansion beyond the case at hand.
Example Asking students to apply a function rule beyond a countable case (e.g., 100).
Encouraging Reflection: Prompting the creation of a verbal or algebraic description of a pattern, rule, or phenomenon.
Example Asking students to articulate a description of the relationship they have identified in a function table.
Encouraging Justification: Encouraging a member to reflect more deeply on a generalization or an idea by requesting an explanation or a justification. This may include asking members to clarify a generalization, describe its origins, or explain why it makes sense.
Example Asking students to explain the specific computations they have described in their function rule. For example, a teacher might ask students why decided to multiply by 2 in their function rule.

Table 2. Generalizing activities.

Generalizing Activities
Relating Situations or objects: The formation of an association between two or more problems, situations, or objects.
Example An individual might observe co-varying values (e.g., 1, 2; 2, 4; 3, 6, etc.) in a table and identify that the relationship between each of these situations is multiplying the first number by 2 to find the second number.
Searching for the Same Relationship or Pattern: The performance of a repeated action in order to detect a stable relationship or pattern between two or more objects.
Example An individual might test a recursive pattern (adding the same number twice) or functional relationship (multiply by 2) that they have identified by computing the following sums. $1 + 1 = 2; 2 + 2 = 4; 3 + 3 = 6, \ldots$ $1 \times 2 = 2; 2 \times 2 = 4; 3 \times 2 = 6, \ldots$
Expanding the Range of Applicability: The application of a phenomenon to a larger range of cases than that from which it originated. This activity might include removing particulars or operating upon an object or repeating an existing pattern in order to generate new cases.
Example An individual might apply the function rule $y = 8x$ to 100 and determine that $y = 800$.

naming a phenomenon, clarifying critical terms, reviewing critical tools) emerged from the analysis and are presented in the findings section.

Coding for the instructional interactions, activities and tasks that related to generalizing

The analysis involved identifying generalizing-related activities. The following paragraphs explain the process's coding. Table 1 shows the *generalizing-promoting activities*. These four codes originated from Ellis's (2011) framework for generalizing-promoting activities. In general, the codes capture the activities that directly promote generalizing.

Generalizing-promoting activities prompt immediate activity. In contrast, *priming activities* typically prepare students to engage in a later activity. For example, *prompting reflection* is a *generalizing-promoting activity* because it encourages the creation of a verbal or algebraic description of a pattern, rule or phenomenon.

Tasks support students and teachers in engaging in *priming activities* and *generalizing-promoting activities*. For instance, a task in which students must organize data for two co-varying quantities in a table, supports engagement with *priming activity* because the teacher is able to ask questions that provide students with an opportunity to construct relatable and searchable situations.

Generalizing activities occur through a community member's participation. For example, a community member might engage in a conversation or make a verbal statement that implies the mental activity of relating, searching or extending. Table 2 outlines the *generalizing activities*. Each of the *generalizing activities* is based on the generalizing activities identified in Ellis's (2007) taxonomy for categorizing generalizations; however, I also denoted whether a student or teacher made the *generalizing action*. If a teacher stated a student's generalization, either by repeating it or reading it off their paper, it was coded as a student generalization, whereas a teacher generalization occurred when the teacher individually stated a generalization.

Due to the nature of this data and the kinds of activities I was identifying, determining the exact type of activity in which students engaged posed a challenge. Furthermore, I often observed activity that seemed to fit one or more of the *priming activity, generalizing-promoting activity* and *generalizing activity* subcategory descriptions. Thus, while I labelled the activity that I observed with the specific subcategories of activities according to Tables 1 and 2, I disregarded the subcategories for the quantitative analysis. That is, the quantitative analysis conflated all the *priming activity, generalizing-promoting activity* and *generalizing activity* subcodes. The following subsection addresses the challenge of making inferences about students' thinking.

Inferences about students' thinking

While *priming activities, generalizing-promoting activities* and *generalizing activities* are a fruitful way to characterize the underlying mental acts of a person's activity and talk, the notion often relies on inference. As Ellis (2007) asserts, it is 'only one way of making sense of an underlying process that could result in particular behaviors' (p. 14). In addition to relying on inference, the nature of this data presented another challenge.

It was important to collect my data in a classroom setting, so I could observe these activities *in situ*. However, because the data was collected from an observer's perspective, I was hesitant to draw specific conclusions about students' thinking (i.e., to assign specific codes versus overarching codes). While I felt confident making general observations about students' thinking (e.g., identifying the overarching codes of *priming activities, generalizing-promoting activities* and *generalizing activities*), I did not always feel comfortable labelling the specific kind of activity that was occurring (e.g., the subcategories listed in Tables 1 and 2). One way I addressed this challenge was by ensuring that I was consistently applying the coding scheme by measuring my reliability. Another way that I addressed this issue was by assigning the subcodes (i.e., the subcategories in Tables 1 and 2) only when I presented the qualitative data. That is, the subcodes were only in the context of a transcript in which the speaker's statement was known. Conversely, the overarching codes (i.e., *priming activities, generalizing-promoting activities* and *generalizing activities*) were referred to in the quantitative data, in which the context of each activity was not shared.

In order to ensure reliability in the coding process, I trained a colleague who works on the larger project to conduct reliability coding. First, we read through the coding scheme, considering examples of each code and the situations that might occur in a classroom context. Then, the reliability coder coded transcripts from a 20% sample of the data independently; inter-rater reliability scores were computed and at least 80% agreement was achieved. The reliability coder was given complete transcripts of 20% of the data; the units of analysis were individual utterances, not units that were already identified as codable. That is, the reliability coder determined if each utterance by each student and each utterance by each teacher was coded or not. Any disagreements were discussed until agreement was obtained. As previously noted, we obtained 80% agreement on the sample of data *before* discussing our disagreements.

Results

The following section summarizes the results of this study. I begin by presenting *priming activity* and discussing *priming activities* in practice, specifically by outlining different ways that teachers use these activities to prepare students to engage in *generalizing-promoting activity*. Next, I elaborate on how *priming activities* and *generalizing-promoting activity* function together. Namely I address how the sequencing and co-occurrence of activities seems to play a role in their effectiveness to support students' generalizing. In closing, I share quantitative findings across the corpus of data.

I begin by presenting *priming activity*, which was previously defined in the analysis section because it was one of the constructs used to code the data. *Priming activity* is intentionally used to prepare students to develop or build on an idea, but it may not result in immediate generalizing. *Priming activity* often prepares, or primes, students to engage in *generalizing-promoting activity*. For example, *naming a phenomenon* is a *priming activity* because it provides students with a shared way to refer to an idea that may be used in future *generalizing-promoting* or *generalizing activities*.

Many of the findings focused on in this paper address *priming activity*. In the following subsections, I focus on characteristics of *priming activities* because such activities are novel findings and have not been identified in prior research whereas prior studies (e.g., Ellis, 2007, 2011) thoroughly outline *generalizing-promoting activity*.

Table 3 shows the *priming activities*. As noted, the three priming activities are emergent codes.

Generalizing-promoting activity appeared to be closely tied to students' generalizing because it occurred right before or around the same time as students' generalizing, whereas *priming activity* did not always occur at the same time nor prior to students' generalizing. When *priming activity* occurred together with or right before students' generalizing, it was coupled with *generalizing-promoting activity*. Therefore, the *priming activity* that occurred with *generalizing-promoting activity* seemed to work in concert

Table 3. Priming activities.

Priming Activities
Naming a phenomenon, clarifying critical terms, reviewing critical tools: Offering a common way to reference a phenomenon or emphasizing the meaning of a critical term or tool.
Example Introducing variables as a way to represent any number.
Constructing or encouraging constructing searchable and relatable situations: Creating or identifying situations or objects that can be used for searching or relating. Situations that can be used for searching or relating involve particular instances or objects that students can identify as similar in some way.
Example Creating a function table or entering the values for a function into a table, so that students can search for a relationship between those values or instances of the relationship (e.g., co-varying quantities).
Constructing extendable situations: Identifying situations or objects that can be used for extending. Extending involves applying a phenomenon to a larger range of cases than that from which it originated.
Example Asking students if a rule or relationship applies to all numbers.

with other activities to support students' generalizing. Conversely, the *priming activity* that occurred independently of students' generalizing seemed to support and prompt *generalizing-promoting activity* because it occurred prior to students' engagement with these activities. It is worth noting that there were no instances of spontaneous generalizing, so *generalizing activity* did not occur without another activity promoting it.

Priming activities: preparing students to engage in generalizing-promoting activities

When *priming activities* occurred alone, they did not lead to *generalizing activities*, rather they supported students in constructing situations that were ideal for engaging in *generalizing-promoting activities*. The following examples show how *priming activities* prepare students to engage in *generalizing-promoting activity*.

This phenomenon occurred when the teacher implemented a task that provided students with opportunities to engage in *priming activities*, and then the outcome of those activities became an opportunity for students to engage in *generalizing-promoting activities*. The task used to demonstrate this phenomenon is a 'Jumpstart'. Jumpstarts are problems posed to students at the beginning of each lesson. They provide an opportunity to revisit important concepts throughout the year.

The Lesson 15 Jumpstart includes a partial table showing a functional relationship between the number of watermelons and the number of seeds (see Figure 1). Students are asked to complete a table and describe the function rule (e.g., $y = 8x$).

One teacher, Ms Blair, gave her students time to work independently on completing the table. The questions that Ms Blair asked her students when completing the table supported students in *constructing relatable and searchable situations* because students were encouraged to find the missing numbers so that they can *relate* the number of watermelons to the number of seeds and *search* for a relationship between the two quantities.

Ms Blair continued to ask her students questions about each row of values in the table. Then, she gave students a new prompt: 'Organize your information in a table. What two

Marcia was completing the following table in her science class experiment, but her class ended before she could finish it. Can you complete the table for her?

number of watermelons	number of seeds
1	8
	16
4	
	40
6	

Explain your thinking.

Figure 1. The Jumpstart task (the watermelon task).

quantities are you comparing? How did you represent these in your table?' This prompt refers to a new functional relationship between the number of shirts one has and the number of outfits they can make. When introducing the new functional relationship, Ms Blair referred back to the Jumpstart by saying 'a while ago we created a table, for the Jumpstart. I want to create a table here because I feel like that's probably going to help me keep track of my information here.'

In this instance, Ms Blair explicitly refers to the Jumpstart (the watermelon problem), which occurred earlier in the lesson. By doing so, Ms Blair engaged in the *generalizing-promoting activity* of *encouraging relating* between the table used in the Jumpstart and the table used in the main part of the lesson. The students in Ms Blair's classroom are likely to engage in activity that is similar to the activity they engaged in when thinking about the watermelon problem. This instance demonstrates a unique way that *priming activities* can prime, or prepare, students to engage in later *generalizing-promoting activity*.

Another way that students engage in *priming activity* when thinking about the watermelon task is by *relating* the situations (e.g., 1 watermelon has 8 seeds; 2 watermelon has 16 seeds; 3 watermelon has 24 seeds etc.) and then *searching* for a relationship of similarity between each situation (i.e., 'the relationship is multiply by 8'). This kind of relating is different from relating values in the table because students attend to co-varying values together, thus relating particular situations to each other rather than relating particular values to values.

In another classroom, Ms Maddie demonstrated how relating can occur through forming a relationship of similarity (i.e., by noting that a situation is the same as another situation).

Utterance	Action/Activity	
Ms Maddie: 1 watermelon and 8 seeds. Then we know that we have 16 seeds, so how many watermelons would give us 16 seeds?	PA	*Encouraging constructing relatable & searchable situations*
[00:14:34.09] Students: 2	PA	*Constructing relatable and searchable situations*
Ms Maddie: 2. This one's totally blank (points to third row of table)		
[00:14:38.14] Student: 3	PA	*Constructing relatable and searchable situations*
[00:14:38.16] Student: 3		
Ms Maddie: We could maybe infer that maybe it's 3 and 24, but then we've got, now 4 watermelons and how many seeds?	PA	*Encouraging constructing relatable & searchable situations*
[00:14:48.18] Students: 32	PA	*Constructing relatable and searchable situations*
Ms Maddie: Then we've got 40 seeds (points to 40 on the table).	PA	*Encouraging constructing relatable & searchable situations*
[00:14:52.00] Students: 5	PA	*Constructing relatable and searchable situations*
Ms Maddie: 5 watermelons (points to 5 on the table).	PA	*Encouraging constructing relatable & searchable situations*
[00:14:55.12] Students: 48	PA	*Constructing relatable and searchable situations*
Ms Maddie: 6 watermelons, and 48 seeds. Yeah. In 6 watermelons, we are going to have 48 seeds. What's happening here? Explain your thinking to me. Jared?	GPA	*Encouraging relating and searching*
Jared: We counted by 8s.	GA	*Relating Situations or Objects*; Jared is relating the situations that he observed. He is likely looking at the particular situations in the table, relating them and identifying a similarity between them. The similarity he has identified is that they 'counted by 8s.'
Ms Maddie: Counting by 8s. On what side?		
Jared: On the number of seeds.		

One difference between the instruction in Ms Blair and Ms Maddie's classrooms is that after engaging her students in the *priming activity* of *constructing relatable and searchable situations*, Ms Maddie asked her students a question that promoted generalizing activity (i.e., *generalizing-promoting activity*). This action seemed to prompt one student, Jared, to *relate*. Jared observed particular situations in the table and related by identifying a similarity between them (i.e., by noting that a situation is the same as another situation). The similarity he has identified is the seeds 'counted by 8s', a generalized recursive rule for the functional relationship.

Another way that these two excerpts differ is that later in her lesson Ms. Blair referred back to constructing the table for the Jumpstart task. She reminded students that they had previously created a table, and she explained that they might want to do it again to 'keep track of information'. While Ms Blair tells students the purpose of using a table is to keep track of information, she is also drawing students' attention to the table and priming them to engage in thinking that parallels the kind of thinking they engaged in when constructing the previous table. In turn, this action becomes *priming activity* because she is preparing students to engage in *generalizing-promoting activity*.

Similar to Ms Maddie's students, in Ms Como's class, students identified a recursive rule (i.e., 'plus 8') to describe the relationship. In response, their teacher, Ms Como, engaged in the *generalizing-promoting activity* of *encouraging extending* by asking students to construct a rule that uses multiplication. She explained that with their new rule they would be able to find the number of seeds for *any* number of watermelons without repeatedly adding 8. When students were unsure about how they might modify the recursive rule, Ms Como engaged in the *priming activity* of *constructing an extendable situation* by suggesting that they find the number of seeds for 10 watermelons as an example. This *priming activity* supported students' engagement with the *generalizing-promoting activity* of *encouraging extending*.

In response to Ms Como's suggestion about determining the number of seeds in 10 watermelons, the students engaged in the *generalizing activity* of *expanding the range of applicability* of the pattern when they decided that they answer was 80, but also that they could write a rule for 10 watermelons (see Figure 2).

Ms Como wrote the student's rule on the board for 10 watermelons and summarized it by saying 'that's 80 seeds in 10 watermelons'. Next, the class continued to *expand the range of applicability* by creating a general rule. First, one student suggested that they write letters (variables) at the top of the t-chart. Another student suggested they use w on the left side and v on the right side, and Ms Como recorded this information on the table (i.e., she wrote w on the left side of the table; v on the right side of the table). Then, as a class, they generalized when one student suggests they replace the numbers in the equation that Ms Como wrote for 10 watermelons and 80 seeds with the variables, w and v.

It is worth noting that when Ms Como initially *encouraged extending* (a *generalizing-promoting activity*) she also engaged in the *priming activity* of *constructing an extendable situation*. By *encouraging extending*, Ms Como, in turn, constructed an extendable situation.

Often in practice the difference between these two activities is subtle, but simply constructing an extendable situation is not the same as encouraging students to expand their thinking beyond the case at hand. However, it is often the case that encouraging extending implies also constructing an extendable situation. Conversely, constructing

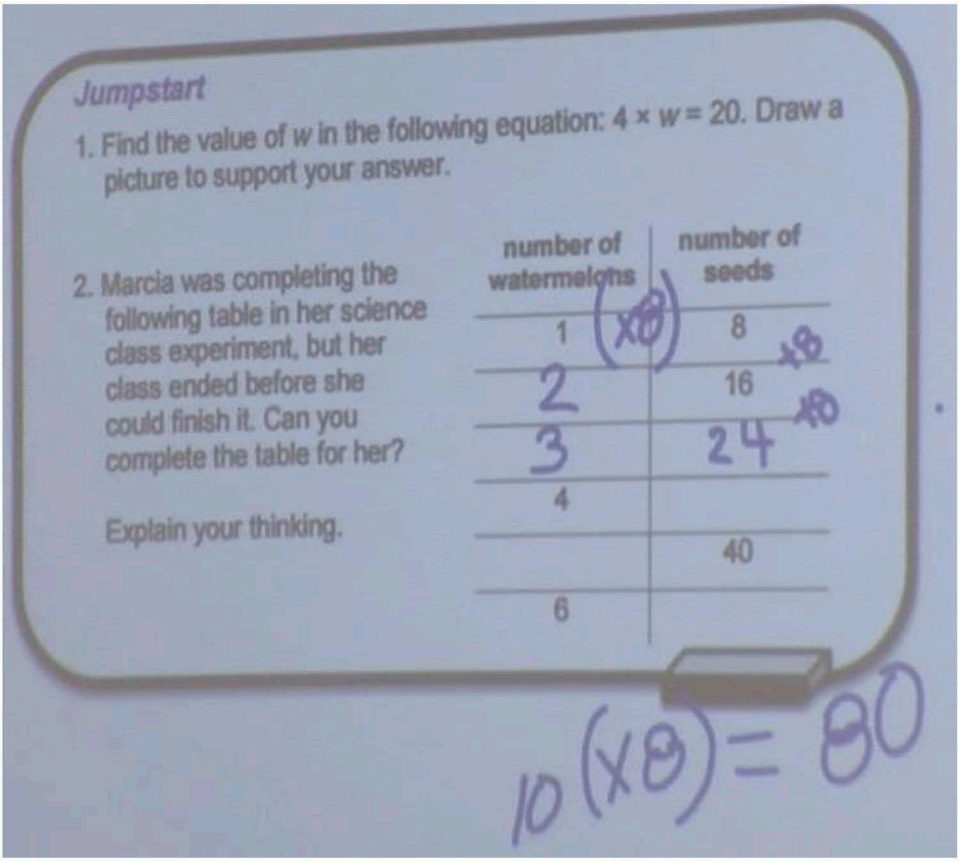


Figure 2. A snapshot from Ms Como's classroom: Expanding the range of applicability.

an extendable situation does not necessarily require encouraging extending. For example, a teacher might simply note that an observation can be extended beyond the case at hand without asking students to engage in an activity that encourages them to extend beyond the case at hand.

Sequencing and co-occurrence of activities

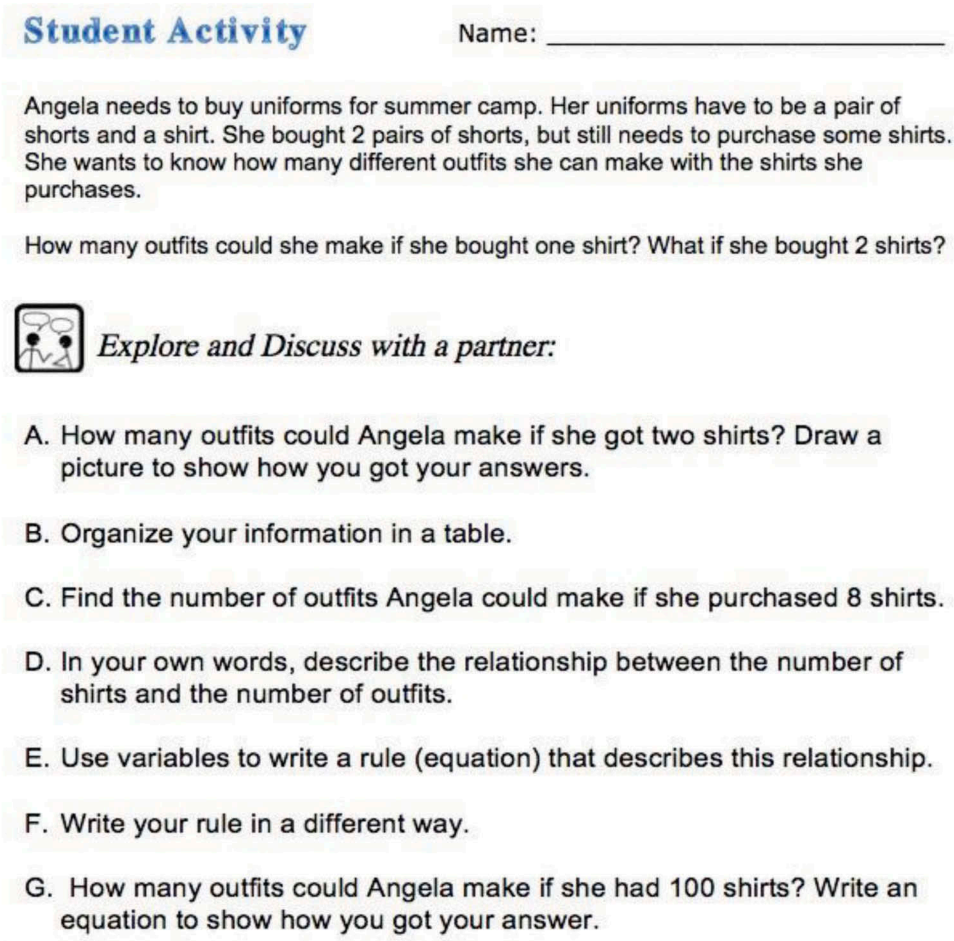
The sequencing and co-occurrence of activities seems to play a role in their effectiveness to support students' generalizing. In particular, I observed that *generalizing activity* typically follows *generalizing-promoting activity*, indicating that *generalizing activity* often leads to *generalizing-promoting activity*. Of course, given the name of these kinds of activities this finding should not be surprising. On a practical level though, it is worth noting the specific ways of promoting generalizing (i.e., the different types of generalizing-promoting activity; see Table 1) and the fact that they are indeed effective when enacted in practice. In other words, this finding shows that, for example, *encouraging extending* (i.e., prompting the expansion beyond the case at hand), is one way to support students' generalizing.

Utterance	Activity	Description
[00:47:09] Teacher: Draw it out … Hmm (looks at student's paper). How do you know that?	GPA	*Encouraging Justification*
[00:47:24] Student: Because I like drew it out.		
[00:48:32] Teacher: You completed your table. Beautiful.		
(Students chatting)		
[00:48:58] Teacher: (Looks at another student's paper). So, you came up with 4 different equations to represent this. How did you know that it would be 16?	GPA	*Encouraging Justification*
[00:49:09] Student: Because you're adding it two times.	GA	*Relating Situations or Objects*; the student is relating the situations that they have observed (e.g., 2 + 2 = 4; 3 + 3 = 6; 4 + 4 = 8, etc.) and forming a relationship of similarity between them (that you add the number of shirts 'two times').
[00:49:28] Teacher: You're adding 8 two times? Okay, so for 8 shirts it is increasing by … You're timesing by two and getting 16 shirts. Okay. So, complete your chart.	GA-T	*Relating Situations or Objects*; she repeated the students' response, but by doing so she stated a new generalization (timesing by 2)
(Students chatting)		
[00:49:57] Teacher: Okay … eyes up here. We already said that we know that for every shirt we add. What's happening to the outfits? Tammie?	GPA	*Encouraging Reflection*
[00:50:22] Tammie: It's getting bigger by twice as much the shirts.	GA	*Relating Situations or Objects*; Tammie is relating the situations that she has observed. For instance, Tammie could be referring to the pictures she drew in part a or the values in the table she constructed in part b. She is then looking at the particular instances of numbers of shirts and outfits, relating them and identifying a similarity between them. The similarity she has identified is that they 'get bigger by twice as much'.

After identifying the different types of activities in each classroom I determined how closely related students' *generalizing activities* were to other activities. Specifically, I wanted to know if *generalizing activities* co-occur with other activities. I did this by measuring the number of seconds and utterances between activities, and I refer to this metric as distance because I measured how far activities were from other activities. I measured distance because I assume that all activities are interrelated, and the ones that occur or are referred to within the same conversation or discursive interaction are likely to be most closely related.

In the following transcript, I identified the *generalizing-promoting activity* (GPA), the student's *generalizing activity* (GA) and the teacher's *generalizing activity* (GA-T). During this excerpt students are completing the activity shown in Figure 3. It is worth noting that during this excerpt the teacher makes a generalization, which provides the students information that had not yet been shared.

After identifying the activities, I counted the number of seconds and utterances between instances of student's *generalizing activity* and other activities. I did this because I wanted to confirm that the activities that I had identified were indeed leading



Student Activity Name: ____________________

Angela needs to buy uniforms for summer camp. Her uniforms have to be a pair of shorts and a shirt. She bought 2 pairs of shorts, but still needs to purchase some shirts. She wants to know how many different outfits she can make with the shirts she purchases.

How many outfits could she make if she bought one shirt? What if she bought 2 shirts?

Explore and Discuss with a partner:

A. How many outfits could Angela make if she got two shirts? Draw a picture to show how you got your answers.

B. Organize your information in a table.

C. Find the number of outfits Angela could make if she purchased 8 shirts.

D. In your own words, describe the relationship between the number of shirts and the number of outfits.

E. Use variables to write a rule (equation) that describes this relationship.

F. Write your rule in a different way.

G. How many outfits could Angela make if she had 100 shirts? Write an equation to show how you got your answer.

Figure 3. The outfit problem.

students to make generalizations, and that these activities were not spontaneous phenomena. I found that activities were clustered together and that student generalizations are indeed prompted. That is, student generalizations usually result from other activity, such as *priming activity, generalizing-promoting activity* or the teacher's *generalizing activity*. Actually, I noticed that the average number of utterances between a student's *generalizing activity* and another coded activity was 1.52, and the average number of seconds between a student's *generalizing activity* and another coded activity was 11.34 seconds (see Table 4). I used distance to determine if activities were related. However, I do not want to imply that the goal of this lesson is to encourage students' generalizing in less time. Rather, I used distance as a way to determine if activities occurred together or in relation to one another.

Furthermore, the activity that immediately preceded a student's *generalizing activity* was usually a *generalizing-promoting activity*. In total, I identified 209 instances of student *generalizing activity*. Table 5 shows the activities that preceded student's *generalizing*

Table 4. Distance between student generalizing activity and other activities.

Average number of seconds between *Student Generalizing* and *Generalizing-promoting, Priming* or *Teacher Generalizing Activity*	11.34
Average number of utterances between *Student Generalizing* and *Generalizing-promoting, Priming* or *Teacher Generalizing Activity*	1.52

Table 5. Frequency of preceding activity.

Preceding Activity	Number of Instances	Percent Frequency
Generalizing-Promoting	192	92%
Priming	13	6%
Teacher Generalizing	4	2%

activity and the frequency of those activities, indicating that 92% of student generalizing resulted from one of the four *generalizing-promoting activities* outlined in Table 1.

Table 5 shows that *students' generalizing* is typically prompted by *generalizing-promoting activity*, which is evidence that *generalizing-promoting activity* has a high potential for supporting student generalizing.

A quantitative perspective on the overall activity

Before delving into the overall activity observed in this study, I want to note that a variety of factors influence whether students will make verbal generalizations, and I do not mean to suggest that the instruction in the classrooms in which students did not generalize was ineffective. Instead, I reiterate that the purpose of this study is to draw attention to student generalizations and consider what factors of the 'instructional system' might be supporting students in making these observations (Herbst & Chazan, 2012).

In each of the 13 classrooms, there was variety in the ways that the teachers implemented the lessons and the ways in which students engaged with the lessons. Specifically, I observed differences in the number of times participants generalized, promoted generalizing and engaged in activities that prime participants to promote generalizing. These latter two activities were important, given that the goal of the lesson is to support students' generalizing, thus the rationale for distinguishing teacher generalizations from student generalizations. In the online supplement, I have provided a table and accompany a description that captures the differences between the metrics of each classroom.

What is interesting about the table in the online supplement is not that the number of instances of each activity is worth noting, but rather that this table reveals that there is a more important story to tell, perhaps that the type and quality of the *priming* and *generalizing-promoting activities* and the way in which these activities interact influence the students' generalizing, not the number of instances of these activities. I elaborate on this claim in the online supplement.

Summary of findings

In conclusion, I have highlighted the ways in which the instructional interactions promoted generalizing, and the specific characteristics and relationships of those instructional interactions that fostered generalizing. Based on the overall findings, it may seem that simply enacting *generalizing-promoting activity* in a classroom will promote generalizing, but this is not the case. Based on the complex instructional interactions described in the excerpts and observed in my analysis, clearly no single action promotes generalizing. Rather, it is the combination, type and quality of activities, in a specific context, that in turn encourage students to generalize. Furthermore, I observed that these activities could not be prescribed in a one-size-fits-all approach. Teachers use a variety of effective approaches to support students' engagement in generalizing. For example, during the Jumpstart (the watermelon problem) Ms Blair *encouraged relating and searching* by drawing students' attention to particular values, whereas, Ms Como began by helping students write the missing numbers in the table to support them in *constructing a relatable and searchable situation*. I highlight these examples because both strategies supported students in generalizing using two different approaches.

Discussion

In the first section of the results, I began by presenting *priming activity*. Next, I discussed how *priming activity* functions in practice by outlining different ways that teachers use these activities to prepare students to engage in *generalizing-promoting activity*. I then elaborated on the ways in which *priming activity* and *generalizing-promoting activity* function together. Namely, I addressed the sequencing and co-occurrence of activities and the ways in which they might play a role in their effectiveness to support students' generalizing. To conclude, I summarized the overall activity across the corpus of data. In the following subsections I discuss each aspect of the findings and elaborate on their implications for research and practice. First, I discuss what I learned from this study that can be communicated to teachers to assist their efforts to foster their students' classroom generalizations. That is, I share ways that teachers can leverage the activities outlined in Tables 1–3 to support their instruction.

Implications for practice

An important point about the teachers in this study is that they attended extensive professional development. Since this is Lesson 15, it took place in spring, wherefore these teachers had been attending professional development for most of the school year. The professional development, which occurred every month for approximately three hours, familiarized teachers with the upcoming lessons, designed to support students in thinking algebraically. Interestingly though, the professional development did not mention the *priming* or *generalizing-promoting activity* identified in this analysis.

The classroom descriptions in the sections 'Priming Activities: Preparing Students to Engage in Generalizing-Promoting Activities' and 'Sequencing and Co-Occurrence of Activities' demonstrate how teachers can use the *priming* and *generalizing-promoting activities* to support students' engagement in algebraic reasoning in elementary classrooms. Specifically, these excerpts demonstrate different ways to encourage students to construct relatable and searchable situations and then prompt them to form an association between or across these situations in different contexts and in response to a variety of student responses.

Three principles for teachers to keep in mind when implementing these approaches to promoting generalizing is that they must explicitly enact these activities or embed them into a task, must strive to enact a variety of activities, and that the activities should be applicable to all mathematical situations in which students can remove particular values, units or context and thus generalize.

It is also worth noting that one reason these approaches to instruction are effective is because children have a natural inclination to engage in the activities involved in mathematical thinking (Schifter, Monk, Russell, & Bastable, 2008). Young children imagine and express, focus and de-focus, specialize and generalize, conjecture and convince, and classify and characterize (Mason, 2008), and these activities are the foundation for constructing, testing and justifying generalizations. Productive instruction involves capitalizing on children's natural abilities and guiding them to attend to specific mathematically significant attributes.

Another important component of enacting these practices is that teachers should encourage students to share their thinking, which occurs through classroom discussion and further fosters generalizing by giving other students an opportunity to build on their ideas and gives the teacher insight as to how students are thinking, so that productive interactions can continue to be fostered. All of the classrooms in this study had high student engagement and involved some discussion component. Relatedly, Dekker and Elshout-Mohr (2004), who studied how teacher practices influence learning environment and students' participation, found that supporting students to understand the process of a mathematics problem, versus the product, resulted in higher student participation. Conversely, supporting students to understand the product of a mathematics problem resulted in more individual student–teacher interactions. Thus, one way teachers will engage their students in discussion is through supporting them in understanding the process of the mathematics at hand rather than overemphasizing that students must agree upon a specific mathematical outcome.

Teachers can also consider how they can embed these practices into tasks. Many of the examples provided herein represented functional relationships using tables. It seems as though tables provided teachers opportunities to guide students' thinking towards the mathematically significant aspects of the task and to ask questions that reflected *priming* and *generalizing-promoting activity*. Likewise, in a teaching experiment, Warren and Cooper (2005) found that representing functional relationships in logically organized tables supported students in identifying recursive patterns.

Another key point is that teachers must strive to enact a variety of *priming* and *generalizing-promoting activities*. All of the activities observed in these classrooms were not demonstrated in the excerpts provided herein, and I do not want to give the impression that only certain activities, or the activities demonstrated in the excerpts, are effective. Rather I encourage teachers to incorporate a variety of activities into their practice. Several activities were not represented in the excerpts. For example, *encouraging justification* was an important way that teachers in this study supported students' generalizing. However, the excerpts selected for this paper did not demonstrate this phenomenon. Prior research has shown that students often make weak justifications, and rarely justify their generalizations (Breiteig & Grevholm, 2006;

Knuth et al., 2002). Yet, justifying is important because it often supports students in generalizing (Ellis, 2007, 2011; Lannin, 2005; Lannin, Barker, & Townsend, 2006). Some research even suggests that justifications are shaped by the nature of the generalization that is justified (Becker & Rivera, 2006; Ellis, 2005).

It is worth highlighting that the teachers in this study often *encouraged justifying* by simply asking a student 'Why?' or 'How do you know?' I encourage teachers who enact the practices outlined in this study to consider the questions that will *encourage justifying* and in turn support student's generalizing, and the ways in which they might create opportunities for asking these questions.

The Watermelon task and the Outfit problem shown as examples herein, may be viewed as unique situations because they both encourage functional thinking, and functional thinking is not typically addressed in elementary mathematics curriculum. However, I reiterate that the activities outlined in Tables 1–3 can be applied to any generalizable mathematical situation: those situations in which students can remove particular values, units or context and thus generalize.

For example, a teacher can engage in *priming activity* and *generalizing-promoting activity* when students are learning about arithmetic properties in such a way that encourages students to 'discover' the properties, rather than having them directly taught. A student generalizes about arithmetic properties when they notice a pattern in particular instances of the Commutative Property of Addition (e.g., $3 + 4 = 4 + 3$ and $2 + 1 = 1 + 2$). Students' generalizations may occur with varying degrees of sophistication, ranging from students who might make a vague statement about these number sentences being 'switcheroo' to students who might represent the idea by writing '$a + b = b + a$'. Regardless of the generalization's sophistication, there are opportunities for students to generalize about these situations. Thus, there are opportunities for teachers to encourage students to engage in the activities that foster generalizing. It is not necessary to use a specific curriculum to implement these activities in a classroom because the activities outlined in this paper can be viewed as a way to frame the content of the current curriculum to engage students in algebraic reasoning.

Interactions between activities

To build on my observations about how these activities can influence instruction, I considered the interactions between activities. First, I noticed that *priming activity* typically preceded *generalizing-promoting activity*, and this led me to discuss the sequencing and co-occurrence of activities in the section 'Sequencing and Co-Occurrence of Activities'. Specifically, I observed that *generalizing activity* typically results from *generalizing-promoting activity*, not from teachers making generalizations or from students engaging in *priming activity*.

In a teaching experiment, Warren and Cooper (2005) aim to document the implementation of a lesson designed to support students in developing and articulating generalizations about functional relationships and determine the teacher actions, materials and classroom activities that supported students in developing and articulating their generalizations. Interestingly, they found that the sequencing of mathematical tasks influenced students' abilities to engage productively with those tasks. This finding is relevant to this study's findings because I found that the sequencing and co-occurrence of *priming* and *generalizing-promoting activities*, specifically in the context of functional thinking, contributes to students' engagement in *generalizing activity*. Together, these findings suggest that the mathematical tasks used in Cooper and Warren's study supported the students and teacher in engaging in specific activities (e.g., *priming* and *generalizing-promoting activities*), and perhaps the co-occurrence or sequencing of those activities parallel the observations of this study.

One area for future research that builds on the idea of sequencing and co-occurrence could be considering the relationship between different types of activities and generalizations. For example, future research might address the relationship between teacher's and student's generalizations. Perhaps, the more often a teacher generalizes, the more likely students are to generalize. Because of the low number of teacher generalizations, it was difficult to detect a relationship between these two activities. However, with a larger sample size there is potential to determine if these activities are related and, if so, how closely (e.g., through a regression analysis). Another avenue of research might attend to the different types of activities and generalizations and consider what types of combinations are potentially more fruitful than others. I elaborate on opportunities for future research in the Conclusion section of this paper.

While the activities that occurred across the 13 classrooms in my study differed, each classroom demonstrated *priming, generalizing-promoting* and *generalizing activities*, and the interactions among them. For example, I observed that teachers support students' engagement in generalizing in the watermelon problem through a variety of approaches. These findings parallel other studies on students' generalizing about functional relationships (Blanton et al., 2015; Brizuela, Blanton, Sawrey, Newman-Owens, & Gardiner, 2015) in that they outline a variety of 'paths' for generalizing or supporting students' generalizing. Much of the research in this area has identified first that students are able to generalize about functional relationships (Carraher & Schliemann, 2007), and then the steps involved in learning to generalize about functional relationships (e.g., Blanton et al., 2015; Brizuela et al., 2015). However, one way that my findings differ from prior research is that the activities I have identified are not specific to functional relationships. Instead, this study's findings can be applied to all mathematical situations in which students can remove particular values, units or context and thus generalize. For instance, I previously noted that the activities identified in this study could be applied to students' generalizing about properties of numbers (e.g., the Commutative Property of Addition) or another generalizable mathematical situation.

The benefits of a different grain-size

In the beginning of the findings section, I focused on characteristics that are unique to *priming activities* because they did not occur in Ellis (2007, 2011) research, and therefore they are a new contribution. In particular, I highlighted that these activities prepare students to engage in *generalizing-promoting activities*. While Ellis's work demonstrated the importance of *generalizing-promoting activity*, it did not identify the preceding activity, *priming activity*, that prepared students to engage in *generalizing-promoting activity*. Conversely, Ellis (2011) identified and confirmed with the speaker the specific types of *generalizing activity* that occurred because she conducted teaching experiments and individual interviews.

The design of Ellis's study, specifically the nature of the data, was more conducive to identifying the types of generalizations students made. The nature of the data in this study is addressed as one of the limitations in the Conclusion section. However, I highlight here that the fact that both the data collection and analysis processes differ significantly from Ellis's is one way that this study contributes new findings towards research on supporting students' generalizing. That is, due to the differences in the grain-size of our data, each study contributes a new perspective on related questions about supporting students' generalizing. Relatedly, it is worth noting that the data in this study was collected in a classroom context, and that the regular classroom teachers taught the lessons. By understanding the nature of these activities and the ways in which they function in a classroom context, educators are better able to incorporate them into instruction, professional development and other resources designed to support instruction. Furthermore, because the actor-oriented perspective illuminates the connection between the context of learning and a student's thinking, I was able to identify specific aspects of instruction and how those aspects support students' learning so that instruction can be formatively designed. Namely, the actor-oriented perspective focuses the analysis on the features of instruction that are important to students, which in turn resulted in findings that apply directly to teaching and learning.

Conclusion

The goal of this study was to understand the global meta-activity of generalizing in elementary classrooms because generalizing is fundamental to early algebraic reasoning (Cooper & Warren, 2011; Kieran, 2007; Kieran et al., 2016; Mason, 1996). To achieve this goal, I examined the instructional and interactional activities that engender students' generalizing activity and, in turn, identified the actions that encourage students' generalizing. Through my analysis, I identified these actions and described the ways in which teachers implemented them in their classrooms.

While *generalizing-promoting activities* seem to be the most effective way to support students' generalizing, it is important to note that this analysis only accounted for the preceding activity. In other words, the analysis did not consider the fact that perhaps other activities before the preceding activity contributed to the effectiveness of the latter. The transcripts included in this paper are a case in point. The preceding *generalizing-promoting activities* did indeed prompt students to generalize, but they would not have the same meaning without the subsequent, related activities. That is, *generalizing-promoting activities* play a critical role in promoting and supporting students' generalizing, but they cannot function alone. Rather, they are effective when incorporated into the 'instructional system', which includes a network of relationships between different activities resulting from actions prompted by the teacher, student and content (Herbst & Chazan, 2012). Therefore, to witness positive instructional outcomes, the activities that constitute instruction must work together to support learning. This perspective brings up an important question that came from this research: what combinations of *priming* and *generalizing-promoting activities* are potentially more fruitful than others? While this study has identified the activities that seem to contribute to students' generalizing, the next step down this avenue of research is to explore the most productive ways those activities function together in a classroom.

On a practical level, the findings of this study can serve to inform algebra instruction. Teachers, curriculum planners, researchers and others who design learning environments can use the descriptions in Tables 1–3 to carefully craft tasks, questions and prompts to encourage generalizing. Of course, as previously noted, the combination of activities in the context of instruction is what, in turn, promotes generalizing, but basing instructional design on the descriptions in Tables 1–3 is a productive way to initiate the process of encouraging generalizing.

On a theoretical level, the findings of this study contribute to an ongoing goal of understanding how students learn mathematics. Since generalizing is a fundamental practice in mathematics (Kaput, 1999), understanding how students generalize informs researchers about how students learn mathematics in general. Furthermore, the findings of this study may even contribute to conversations about how students learn in general. After all, education is 'aimed at helping students develop robust understandings that will generalize to decision-making and problem-solving in other situations, both inside and outside the classroom'.

In closing, I want to note how research might build on this study. The results of this study outline important future research questions. For instance, *priming activity* was a novel finding that seemed to be important in preparing students to engage in *generalizing-promoting activity*. Thus, research on *priming activities* has a strong potential to influence the practice of teaching. Researchers might explore the ways in which teachers can ask questions and guide students to engage in *priming activities* or consider how these activities might be embedded into tasks, and how teachers can follow up with activities to capitalize on the activity fostered through engagement with the tasks.

Generalizing-promoting activities seemed to be critical in initiating student's *generalizing activity*. Questions that researchers might explore are: are certain types of *generalizing-promoting activities* more mathematically productive? How are certain types of *generalizing-promoting activities* related to the *generalizing activities* that they promote? In what ways to students promote generalizing among each other? Does teacher generalizing foster student generalizing?

In closing, I highlight that the results of this study leave the doors open for future research that has a high-impact potential to inform instruction. I suggest that activities identified in Tables 1–3 be used as a starting point for research on supporting mathematically productive generalizing in the elementary classroom. Moving forward, I hope that researchers will test, scrutinize and refine the findings to increase their applicability to classroom practice.

Given the importance of generalizing, in terms of algebra and mathematics but also of all learning, I view research on mathematical generalization as relevant to students of all ages and levels of mathematics and consider research on generalization especially productive. Such research contributes to knowing how students learn the authentic thinking practices of mathematics by moving 'away from the predominant preoccupation with numerical calculations' and placing the 'focal emphasis on typical and important ways of mathematical thinking' (Dörfler, 2008, p. 159).

Note

1. Note the term *priming* is not associated with the term as used in research in psychology. Rather in this instance *priming* refers to preparing students to develop and build on ideas.

La generalización en el contexto de una intervención algebraica temprana

Para apoyar a los estudiantes en su aprendizaje de álgebra en el nivel de secundaria, hemos de entender mejor los contextos instruccionales que fomentan los procesos básicos implicados en el razonamiento algebraico en el nivel de primaria porque estas formas de razonamiento sirven como precursores esenciales para tener éxito en el álgebra formal (Kaput & Blanton, 2001). Con este fin, este estudio se centra en los aspectos fundamentales de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra en la escuela primaria considerados básicos para tener éxito en álgebra en cursos posteriores.

El álgebra y el razonamiento algebraico

En la edición más reciente del Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME-13), el grupo temático de álgebra temprana determinó que 'las relaciones matemáticas, los patrones y las estructuras aritméticas' son conceptos clave del razonamiento algebraico (Kieran, Pang, Schifter, & Ng, 2016,, p. 1). En consecuencia, se han desarrollado diversas descripciones de conceptos algebraicos; unos destacan la estructura y las relaciones matemáticas y otros se centran más específicamente en la aritmética generalizada (e.g., Britt & Irwin, 2008).

Además de los conceptos algebraicos, las actividades involucradas en el razonamiento algebraico son otra forma en la cual los investigadores han definido el término. Por ejemplo, en su conferencia plenaria en el XII Congreso Internacional de Educación Matemática, Kieran (2004) describió un marco que engloba tres actividades básicas del álgebra: generacional, transformacional y metanivel/global. Según Kieran (1996), la actividad generacional se centra en las representaciones algebraicas, concretamente en la formación y la interpretación de los objetos del álgebra: las expresiones y las ecuaciones. La actividad transformacional suele centrarse en cambiar la forma de una expresión o ecuación para mantener la equivalencia (e.g., la recopilación de términos afines, la factorización, la resolución de ecuación). Las actividades metanivel/global incluyen la resolución de problemas, la modelización, la percepción de estructuras, el estudio de los cambios, la generalización, el análisis de relaciones, la justificación, la demostración y la predicción. Las últimas de las actividades metanivel/global son aquellas en las cuales el álgebra se usa como herramienta, y dan sentido al álgebra – sin estas actividades, hacer álgebra carecería de motivos. Por tanto, la intervención temprana de álgebra llevada a cabo en este estudio engloba tercero a quinto de primaria y se enmarca en tres actividades metanivel/global – generalización, justificación y razonamiento con la estructura y las relaciones matemáticas – y una actividad generacional – la representación de las generalizaciones.

Estas actividades vienen del trabajo de Blanton et al. Es importante destacar que Blanton et al. aceptan en su forma natural las representaciones de generalizaciones que hacen los niños. Por tanto, en el contexto de la intervención temprana de álgebra, la actividad generacional de representar generalizaciones no necesariamente ocurre en la forma de expresiones y ecuaciones matemáticas. En adelante, se hace referencia a las actividades anteriormente mencionadas como prácticas de razonamiento algebraico según cómo se hace referencia a ellas en su fuente de origen.

Las actividades metanivel/global son una parte importante del álgebra temprano, concretamente por dos razones principales. Primero, estas actividades son importantes para el álgebra temprano porque pueden realizarse actividades metanivel/global sin tener una comprensión del álgebra simbólico y formal o facilidad con el mismo. Como señaló Kieran (2004), estas actividades son 'vehículos ideales para la conceptualización de un enfoque no simbólico o presimbólico hacia el razonamiento algebraico en la escuela primaria' (p. 148). Segundo, las actividades metanivel/global son importantes para el álgebra temprano porque el tipo de razonamiento requerido es un precursor de formas más formales de participar en el razonamiento algebraico, incluyendo las actividades generacionales y transformacionales (Kieran, 1996). Por tanto, dada la importancia de la actividad metanivel/global en el álgebra temprano, nuestro estudio investiga esta actividad en el contexto del álgebra temprano en tercero de primaria.

Objetivo del estudio: un enfoque sobre la generalización

El objetivo de nuestro estudio es entender la generalización a través de la actividad concreta de metanivel/global en la escuela primaria. La generalización es la actividad situada de 'elevar' y comunicar el razonamiento a un nivel en el cual el enfoque ya no es el ejemplo particular, sino los patrones y las relaciones de esos ejemplos particulares (Kaput, 1999, p. 137).

La generalización es esencial para el razonamiento algebraico temprano (Cooper & Warren, 2011; Kieran, 2007; Kieran et al., 2016; Mason, 1996). Sin embargo, a los estudiantes les cuesta generalizar (English & Warren, 1995; Lee & Wheeler, 1987), suelen hacer generalizaciones débiles y rara vez justifican sus generalizaciones (Breiteig & Grevholm, 2006; Knuth et al., 2002). Por tanto, apoyar la generalización en base a las clases de matemáticas requiere una mejor comprensión del contexto del aula, específicamente la naturaleza de las tareas académicas y las prácticas de enseñanza que promueven la generalización por parte del alumnado.

La pregunta central de este estudio, que examina la naturaleza de la actividad de generalización observada durante las lecciones de álgebra temprano, es la siguiente: *¿Cuáles son las actividades de enseñanza y de interacción que fomentan la generalización por parte de los estudiantes?* Para abordar esta pregunta, evalúo las actividades instruccionales e interactivas (i.e., las tareas, el discurso entre el profesorado y el alumnado) que facilitan la actividad de generalización en tercero de primaria. Abajo repaso la literatura sobre la generalización por parte de los estudiantes y describo su contribución a este estudio.

Apoyo a la generalización por parte de los estudiantes

Los estudios anteriormente mencionados se centran en las oportunidades para la generalización. Otra cuestión importante busca entender cómo apoyar a los estudiantes para que desarrollen la generalización. Ellis (2011) explora la actividad que rodea la generalización por parte de los estudiantes, y describe y clasifica lo que llama actividad de generalización-promoción, o las acciones y las interacciones de ambos profesores y estudiantes que promueven la generalización. A partir de un experimento de enseñanza con seis estudiantes de secundaria y un profesor-investigador, Ellis identificó siete tipos de acciones de generalización-promoción.

Es necesario comprender el contexto de la generalización para apoyar el desarrollo y el perfeccionamiento de las generalizaciones por parte de los estudiantes. Específicamente, Ellis (2011) argumenta que la generalización está vinculada a un contexto sociomatemático concreto, mediante el cual las personas construyen generalizaciones. Por tanto, la actividad y el discurso de una persona muestra su generalización. Esta conceptualización tiene en cuenta el contexto o la situación en la cual ocurre la generalización. Dada esta conceptualización de la generalización, en el siguiente apartado explicaré los argumentos de Ellis y cómo la perspectiva centrada en el actor (Lobato, 2003) funciona como un marco rector para mi estudio.

Caracterización de la actividad de generalización a través de las interacciones instruccionales

El marco teórico que guía este estudio tiene dos componentes principales. El trabajo de Ellis me fue útil en la práctica para iniciar el proceso de codificación: concretamente, las definiciones y las descripciones de su taxonomía y marco sirvieron como códigos *a priori* en mi análisis. El papel de la perspectiva centrada en el actor de Lobato fue más teórico: me desvió de mi propia perspectiva para interpretar qué pensaba e intentaba comunicar el orador.

Este estudio usa la taxonomía de Ellis para la actividad de generalización (2007) y el marco de la actividad de generalización-promoción (2011) como el lente a través del cual entender la generalización observada en las clases de primaria que implementan una intervención temprana de álgebra. En la taxonomía de Ellis, la generalización es una actividad vinculada a un contexto sociomatemático concreto que ocurre cuando una persona o un grupo de personas se implica en una de tres acciones: (a) reconocer las características comunes entre ejemplos particulares, (b) extender una idea más allá de la situación o idea original, o (c) generar situaciones más amplias o nuevas a partir de situaciones particulares. Por ejemplo, un estudiante generaliza cuando (a) reconoce la conmutatividad en expresiones aritméticas particulares (e.g., $3 + 4$ y $4 + 3$; $5 + 2$ y $2 + 5$), (b) construye y somete a prueba expresiones nuevas para representar su observación, y (c) comunica su idea en una manera general que es aplicable más allá de casos particulares (e.g., $a + b = b + a$).

La perspectiva centrada en el actor (Lobato, 2003) también tuvo un papel central en identificar las ideas matemáticas importantes para los estudiantes y para comprender cómo construían su comprensión matemática en el contexto de las clases de álgebra temprano. La perspectiva centrada en el actor supone que el entendimiento de los estudiantes parte de las experiencias en las cuales han desarrollado su comprensión, en lugar de modelos predeterminados de rendimiento normativo (Lobato, 2003). En lugar de probar las hipótesis de qué conocimiento debe generalizarse, la perspectiva centrada en el actor pretende determinar cómo el aprendizaje previo moldea la generalización de los estudiantes, independientemente de si la generalización es matemáticamente correcta (Ellis & Grinstead, 2008). Es más, este enfoque permite convertir el conocimiento generalizado de los estudiantes en objeto de estudio, lo que permite a los investigadores analizar la información que los alumnos consideran importante (Ellis, 2007).

Porque la perspectiva centrada en el actor clarifica la conexión entre el contexto de aprendizaje y el razonamiento de un estudiante, los investigadores pueden identificar aspectos instruccionales concretos y la forma en que esos aspectos apoyan el aprendizaje de los estudiantes para que la instrucción pueda basarse en un diseño formativo. Este enfoque, como ya hemos dicho, puede resultar en la identificación de generalizaciones que, aunque sean incorrectas o imprecisas en términos matemáticos, sean basadas en el orador (habitualmente un estudiante) que percibe la generalización como válida.

Métodos

Antecedentes del estudio

Los datos tomados como base para el estudio fueron recopilados como parte de una investigación más amplia (viz., Blanton et al., 2017) que abordó la cuestión fundamental de cómo apoyar a los estudiantes en la escuela primaria para que estuviesen preparados para estudiar álgebra en la escuela secundaria y niveles posteriores. El estudio más amplio implementa y evalúa la efectividad de una intervención temprana de álgebra en las aulas entre tercero y quinto de primaria (aproximadamente 20 sesiones lectivas de una hora por curso y año), con relación a un grupo de comparación de aulas más tradicionales también de tercero a quinto. Cabe señalar que los estudiantes de la intervención, con relación a los estudiantes de comparación, mostraron mejoras estadísticamente significativas de rendimiento en las evaluaciones del desarrollo de su razonamiento algebraico (Blanton et al., 2017).

Como ya menciona la introducción, la intervención temprana de álgebra se basó en cuatro prácticas de razonamiento algebraico: generalización, representación, justificación y razonamiento con la estructura y las relaciones matemáticas. Tres de estas cuatro prácticas de razonamiento (generalización, justificación y razonamiento con la estructura y las relaciones matemáticas) son representativas de las actividades metanivel/global de Kieran (2004). Nos enfocamos sobre involucrar a los estudiantes en estas actividades en la intervención temprana de álgebra porque, como señala Kieran (2004b), las actividades metanivel/global son 'vehículos ideales' para el razonamiento algebraico temprano y son los precursores de formas más formales de razonamiento algebraico (p. 148). La cuarta actividad – la representación – se clasifica como actividad generacional; mediante esta, los estudiantes construyen y extienden la base de su razonamiento algebraico que desarrollan al participar en actividades metanivel/global.

La intervención tiene como objetivo que los estudiantes participen en las cuatro prácticas de razonamiento algebraico mencionadas en el contexto de cuatro áreas conceptuales clave: (1) equivalencia, expresiones, ecuaciones y desigualdades; (2)

aritmética generalizada; (3) razonamiento funcional; y (4) variable (Blanton et al., 2015). Las lecciones de la intervención se diseñaron para animar a los estudiantes a empezar a generalizar al percibir patrones, porque se conjeturó que este enfoque sería una forma natural para muchos estudiantes de empezar a generalizar sobre cantidades relacionadas.

Participantes y recogida de datos

Participaron en el estudio más amplio cuarenta y seis escuelas de tres distritos en una ciudad grande de la región del Atlántico Medio de los Estados Unidos. El profesorado de las escuelas donde se hizo la intervención recibió desarrollo profesional mensualmente y apoyo durante todo el período de la intervención. El desarrollo profesional tuvo como objetivo servir de apoyo a los profesores para implementar con integridad las lecciones de la intervención temprana de álgebra. Esto implicó revisar cada plan instruccional y observar la clase de un profesor-investigador del estudio piloto y veterano de la intervención. A los profesores no se les proporcionó información ni formación sobre su participación en el aula en las actividades identificadas en este estudio.

Además de los datos evaluativos ya mencionados de los estudiantes, se observaron las grabaciones de las clases en un subgrupo aleatorio de profesores de la intervención en las aulas entre tercero y quinto de primaria (aproximadamente 50 profesores por curso). En el contexto de este estudio, cada profesor de la intervención en el tercer curso de primaria, menos uno, fue observado dos veces, hasta un total de 99 observaciones. En nuestro estudio, nos centramos en las observaciones de las grabaciones de las clases de los profesores y alumnos partícipes en la intervención.

Las aulas fueron seleccionadas aleatoriamente para el análisis de un subgrupo de los profesores que impartieron clases que potencialmente ofrecieron las mejores oportunidades para que los estudiantes construyesen generalizaciones. Dicho de otra manera, se basó la selección de los profesores y las lecciones de la intervención a observar en una identificación previa de las clases que potencialmente ofrecieron las mejores oportunidades para que los estudiantes construyesen generalizaciones, a partir de los objetivos de la lección y la definición de la generalización según Kaput (1999). Concretamente, seleccioné las clases que apoyaron a los estudiantes para que elevasen su razonamiento a un nivel en el cual el enfoque ya no es el ejemplo particular, sino los patrones y las relaciones. Por ejemplo, las clases que ofrecieron oportunidades a los estudiantes para construir generalizaciones según la definición de Kaput (1999) con frecuencia animaron a los estudiantes a percibir patrones, hacer observaciones sobre estos patrones y después extender estos patrones a una situación más amplia. El suplemento en Internet que acompaña este manuscrito describe las clases que motivaron los estudiantes a generalizar.

Tras identificar las clases con la generalización como papel principal, decidí enfocarme en la Clase 15 porque, además de centrarse en la generalización, se grabó repetidas veces y ocurrió en un momento más tardío de la intervención (i.e., clase 15 de 18) después de que los profesores participaron en gran parte del desarrollo profesional sobre la intervención temprana de álgebra y, por tanto, era más probable que el profesor tuviese más confianza y su clase fuese más coherente. Tras elegir la Clase 15, seleccioné aleatoriamente a 50% de las 28 aulas en las cuales se había grabado la Clase

15. Asigné a cada aula un número y usé una función de aleatorización en Excel para seleccionar el subgrupo de datos.

Análisis de datos

El objetivo de este análisis era describir las actividades relacionadas con la generalización en las clases impartidas. Este proceso implicó identificar las *actividades de generalización-promoción* y de *generalización* según el esquema de codificación descrito abajo y tras considerar las maneras en que las interacciones instruccionales durante la clase motivaron a los estudiantes a generalizar.

Para analizar las interacciones instruccionales, primero describí exhaustivamente cada vídeo y, cuando fue necesario, mejoré estas descripciones. Dicho en otras palabras, miré los vídeos y resumí mis observaciones por escrito. Después, subí los vídeos a InqScribe, un programa de transcripción, revisé los vídeos por segunda vez y transcribí las conversaciones del contenido matemático. Al final, se transcribieron la mayor parte de los vídeos porque las conversaciones fueron relevantes para el análisis. Describo las transcripciones como 'mejoradas' porque se añadieron detalles complementarios cuando se consideró necesario. Por ejemplo, algunas transcripciones incluyen fotos sacadas del vídeo y/o detalles sobre el contexto, incluyendo gestos y movimientos por el aula.

Analizamos los vídeos según el marco de Ellis de actividad de generalización-promoción (2011) y taxonomía para la actividad de generalización (2007), que sirvieron como punto de partida para desarrollar el esquema externo de codificación para las interacciones instruccionales y las actividades relacionadas con la generalización. Cuando observé actividades de generalización que no encajaban con el marco y la taxonomía de Ellis (e.g., *actividad preparatoria*), las agrupé con otras similares e identifiqué patrones para desarrollar nuevos códigos en base a los datos que reflejaban. Desarrollé mi esquema de codificación a partir de este proceso. Por ejemplo, las *actividades preparatorias*[1] que no eran parte del marco o la taxonomía de Ellis se presentan en el apartado de resultados porque eran códigos emergentes. Estas actividades preparan a los estudiantes para construir sobre una idea o referirse a la idea posteriormente.

Generamos tres categorías de códigos: *actividades preparatorias, actividades de generalización-promoción* y *actividades de generalización*. Las Tablas 1 y 2 muestran las *actividades de generalización-promoción* y *actividades de generalización*, respectivamente. Estos códigos (e.g., *relacionar situaciones u objetos*) se decidieron *a priori* (a partir de la taxonomía y el marco de Ellis (2007, 2011)), mientras que otros (e.g., *nombrar un fenómeno, aclarar términos básicos, repasar herramientas críticas*) surgieron del análisis y, por tanto, se presentan en el apartado sobre hallazgos.

Codificación de las interacciones instruccionales, las actividades y las tareas relacionadas con la generalización

El análisis consistió en identificar las actividades relacionadas con la generalización. Los párrafos que siguen explican la codificación del proceso. La Tabla 1 muestra las *actividades de generalización-promoción*. Estos cuatro códigos surgieron del marco de Ellis (2011) para las actividades de generalización-promoción. En general, los códigos engloban las actividades que promueven directamente la generalización.

Tabla 1. Actividades de generalización-promoción.

Actividades de generalización-promoción	
Incitar a relacionar y buscar: incitar la formación de una asociación entre dos o más entidades; incitar la búsqueda de un patrón o relación estable.	
Ejemplo	Hacer referencia a una tabla funcional y pedir a los estudiantes que busquen una relación entre los valores o los ejemplos de la relación (e.g., cantidades covariantes). Por ejemplo, la profesora podría preguntar a los estudiantes si notan patrones o relaciones en la tabla.
Incitar a extender: incitar a la expansión más allá del caso entre manos.	
Ejemplo	Pedir a los estudiantes que apliquen la regla de la función más allá de un caso que puede contarse (e.g., 100).
Incitar a la reflexión: incitar a la creación de una descripción verbal o algebraica de un patrón, una regla o un fenómeno.	
Ejemplo	Pedir a los estudiantes que articulen la descripción de la relación que han identificado en una tabla funcional.
Incitar a justificar: incitar a un miembro a reflexionar en más profundidad sobre una generalización o una idea al pedir una explicación o justificación. Este puede incluir pedir a los miembros que aclaren una generalización, describan sus orígenes o expliquen por qué tiene sentido.	
Ejemplo	Pedir a los estudiantes que expliquen los cómputos específicos que han descrito en su regla de la función. Por ejemplo, la profesora podría preguntar a los estudiantes por qué decidieron multiplicar por 2 en su regla de la función.

Las *actividades de generalización-promoción* incitan a realizar una actividad inmediata. En contraste, *las actividades preparatorias* suelen preparar a los estudiantes para realizar una actividad posteriormente. Por ejemplo, *incitar a la reflexión* es una *actividad de generalización-promoción* porque incita a crear una descripción verbal o algebraica de un patrón, una regla o un fenómeno.

Las tareas sirven de apoyo para que los estudiantes y los profesores realicen *actividades preparatorias* y *actividades de generalización-promoción*. Por ejemplo, una tarea en la cual los estudiantes han de organizar los datos para dos cantidades covariantes en una tabla apoya la participación en la *actividad preparatoria* porque el profesor puede hacer preguntas que den una oportunidad a los estudiantes para construir situaciones que pueden relacionarse y servir para búsquedas.

Las *actividades de generalización* ocurren con la participación de un miembro de la comunidad. Por ejemplo, un miembro de la comunidad podría participar en una conversación o verbalizar una oración que implica la actividad mental de relacionar, buscar y extender. La Tabla 2 presenta las *actividades de generalización*. Cada una de las *actividades de generalización* parte de las actividades de generalización identificadas en la taxonomía de Ellis para categorizar las generalizaciones (2007), salvo que además se anotó si el estudiante o el profesor hizo la *actividad de generalización*. Si el profesor verbalizó la generalización de un estudiante, al repetirlo o leerle de una hoja, se codificó como una generalización de un estudiante, mientras que si la generalización la verbalizó únicamente el profesor, se codificó como una generalización de un profesor.

Dada la naturaleza de estos datos y los tipos de actividades que identificaban, supuso un reto determinar con exactitud el tipo de actividad en la cual participaron los estudiantes. Además, con frecuencia observé actividades que parecían encajar en una o más de las descripciones de las subcategorías de *actividad preparatoria, actividad de generalización-promoción* y *actividad de generalización*. Por tanto, aunque etiqueté la actividad observada según las subcategorías específicas de actividades en las Tablas 1 y 2, ignoré las subcategorías para el análisis cuantitativo. Esto es, se mezclaron todos los subcódigos de *actividad preparatoria, actividad de generalización-promoción* y *actividad*

Tabla 2. Actividades de generalización.

Actividades de generalización	
Relacionar situaciones u objetos: la formación de una asociación entre dos o más problemas, situaciones u objetos.	
Ejemplo	Una persona podría observar valores covariantes (e.g., 1, 2; 2, 4; 3, 6, etc.) en una tabla e identificar que la relación entre cada una de estas situaciones es multiplicar el primer número por 2 para hallar el segundo número.
Buscar la misma relación o patrón: la ejecución de una acción repetida para detectar una relación o patrón estable entre dos o más objetos.	
Ejemplo	Una persona podría poner a prueba un patrón recursivo (sumar el mismo número dos veces) o relación funcional (multiplicar por 2) que identificó al computar las siguientes sumas. $1 + 1 = 2; 2 + 2 = 4; 3 + 3 = 6, \ldots$ $1 \times 2 = 2; 2 \times 2 = 4; 3 \times 2 = 6,$
Expandir el rango de aplicabilidad: aplicar un fenómeno a un rango más amplio de casos que el rango en el cual originó. Esta actividad podría implicar eliminar algunos particulares, operar sobre un objeto o repetir un patrón existente con el fin de generar casos nuevos.	
Ejemplo	Una persona podría aplicar la regla de la función $y = 8x$ a 100 y determinar que $y = 800$.

de generalización en el análisis cuantitativo. En el siguiente subapartado abordaré el reto de inferir a partir del razonamiento de los estudiantes.

Inferencias sobre el razonamiento de los estudiantes

Mientras que las *actividades preparatorias, actividades de generalización-promoción* y *actividades de generalización* son una manera fructífera para clasificar los procesos mentales que subyacen las acciones y el habla de una persona, esta noción suele depender de la inferencia. Como dijo Ellis (2007), es 'solo una manera de otorgar significado a un proceso subyacente que podría resultar en unos comportamientos específicos' (p. 14). Además de depender de la inferencia, la naturaleza de estos datos presenta otro reto.

Era importante recolectar los datos en el entorno del aula para poder observar las actividades *in situ*. No obstante, al recopilar los datos desde la perspectiva de observador, vacilé ante dar conclusiones específicas sobre el razonamiento de los estudiantes (i.e., asignar códigos específicos o generales). Aunque me sentía segura al hacer observaciones generales sobre el razonamiento de los estudiantes (e.g., identificar los códigos generales de *actividades preparatorias, actividades de generalización-promoción* y *actividades de generalización)*, no siempre estuve cómoda etiquetando el tipo específico de actividad que ocurría (e.g., las subcategorías listadas en las Tablas 1 y 2). Una manera en que afronté este reto era medir mi fiabilidad para asegurar que aplicaba de manera consistente el esquema de codificación. Otra manera fue asignar subcódigos (i.e., las subcategorías en las Tablas 1 y 2) solo al presentar datos cualitativos. Esto es, los subcódigos solo se usaron en el contexto de una transcripción cuando se conocía lo que dijo el orador. En cambio, se hizo referencia a los códigos generales (i.e. *actividades preparatorias, actividades de generalización-promoción* y *actividades de generalización*) en los datos cuantitativos, donde no compartí el contexto de cada actividad.

Para asegurar la fiabilidad durante el proceso de codificación, formé a un colega que trabaja en el proyecto más amplio para que codificase la fiabilidad. Primero, leímos el esquema de codificación, teniendo en cuenta los ejemplos de cada código y las situaciones que podrían surgir en el contexto del aula. Después, el codificador de la fiabilidad codificó por su cuenta las transcripciones del 20% de los datos; calculamos las puntuaciones de fiabilidad interjueces, logrando un acuerdo superior al 80%. El codificador de fiabilidad revisó las transcripciones completas del 20% de los datos; las unidades de análisis eran las verbalizaciones individuales, no las unidades que ya habían sido identificadas como codificables. En otras palabras, el codificador determinó si codificar o no cada verbalización de cada estudiante y cada verbalización de cada profesor. Los desacuerdos se debatieron hasta llegar a un acuerdo. Como ya hemos mencionado, obtuvimos un acuerdo del 80% sobre los datos muestrales *antes* de abordar los desacuerdos.

Resultados

El siguiente apartado resume los resultados de nuestro estudio. Primero, presento la *actividad preparatoria* y las *actividades preparatorias* en la práctica, describiendo en detalle las diferentes maneras en que los profesores usan estas prácticas para preparar a los estudiantes para participar en *actividades de generalización-promoción*. Después, detallo cómo las *actividades preparatorias* y las *actividades de generalización-promoción* funcionan juntas. Concretamente, abordo cómo la secuenciación y la ocurrencia simultánea de las actividades parece jugar un papel en su efectividad para apoyar la generalización por parte de los estudiantes. Para concluir, comparto los hallazgos cuantitativos de los datos en su conjunto.

Empiezo con una presentación de las *actividades preparatorias*, definido anteriormente en el apartado de análisis porque era uno de los constructos usados para codificar los datos. Las *actividades preparatorias* se usan con la intención de preparar a los estudiantes para construir sobre una idea o desarrollarla, pero puede no resultar en una generalización inmediata. Las *actividades preparatorias* suelen preparar a los estudiantes para participar en *actividades de generalización-promoción*. Por ejemplo, *nombrar un fenómeno* es una *actividad preparatoria* porque ofrece a los estudiantes una manera compartida para referirse a una idea que podrá usarse en el futuro durante *actividades de generalización-promoción* o *actividades de generalización*.

Muchos de los hallazgos comentados aquí abordan *actividades preparatorias*. Enfocaré los siguientes subapartados en las características de las *actividades preparatorias* porque aportan hallazgos novedosos no identificados en otros estudios a pesar de que trabajos anteriores (e.g., Ellis, 2007, 2011) detallan exhaustivamente la *actividad de generalización-promoción*.

La Tabla 3 muestra las *actividades preparatorias*. Como ya hemos mencionado, las tres actividades preparatorias son códigos emergentes.

Parece que hubo un vínculo estrecho entre la *actividad de generalización-promoción* y la generalización por parte de los estudiantes porque se hizo justo antes o durante el período en que los estudiantes hacían generalizaciones, mientras que la *actividad preparatoria* no siempre ocurrió simultánea – o anteriormente a la generalización. Cuando la *actividad preparatoria* se hizo simultánea – o anteriormente a la generalización por parte de los estudiantes, estuvo emparejado con la *actividad de generalización-promoción*. Por tanto, la *actividad preparatoria* simultánea a la *actividad de generalización-promoción* pareció que funcionó junto con otras para apoyar la generalización por parte de los estudiantes. En cambio, pareció que la *actividad preparatoria* independiente de la generalización por parte de los estudiantes apoyó

Tabla 3. Actividades preparatorias.

Actividades preparatorias	
Nombrar un fenómeno, aclarar términos básicos, repasar herramientas críticas: ofrecer una manera común para hacer referencia a un fenómeno o enfatizar el significado de términos o herramientas básicos.	
Ejemplo	Introducir variables como manera de representar cualquier número.
Construir o promover la construcción de situaciones que pueden relacionarse y servir para búsquedas: crear o identificar situaciones u objetos que pueden relacionarse y servir para búsquedas. Situaciones que pueden relacionarse y servir para búsquedas implican ejemplos u objetos particulares que los estudiantes pueden identificar como similares de alguna manera.	
Ejemplo	Crear una tabla funcional o introducir los valores para una función en la tabla, para que los estudiantes puedan buscar una relación entre los valores o los ejemplos de la relación (e.g., cantidades covariantes).
Construir situaciones extensibles: identificar situaciones u objetos que pueden usarse para extender. Extender implica aplicar un fenómeno a un rango más amplio de casos que el rango desde el cual originó.	
Ejemplo	Preguntar a los estudiantes si una regla o relación es aplicable a todos los números.

e incitó la *actividad de generalización-promoción* porque se hizo antes de que los estudiantes participaran en estas actividades. Cabe señalar que no hubo ejemplos de generalización espontánea; es decir, no hubo *actividad de generalización* en la ausencia de otra actividad que la fomentara.

Actividades preparatorias: la preparación de los estudiantes para participar en actividades de generalización-promoción

Cuando las *actividades preparatorias* ocurrieron solas, no resultaron en *actividades de generalización*, sino que sirvieron de apoyo para que los estudiantes construyesen situaciones que eran ideales para participar en las *actividades de generalización-promoción*. Los ejemplos que siguen muestran cómo las *actividades preparatorias* preparan a los estudiantes para participar en *actividades de generalización-promoción*.

Este fenómeno surgió cuando el profesor implementó un trabajo que ofreció a los estudiantes oportunidades para participar en *actividades preparatorias*, y después los resultados de esas actividades se convirtieron en oportunidades para que los estudiantes participaran en *actividades de generalización-promoción*. La tarea elegida para demostrar este fenómeno era 'Jumpstart.' Los 'Jumpstarts' son problemas presentados a los estudiantes al inicio de cada clase. Representan una oportunidad para repasar conceptos importantes a lo largo del curso escolar.

La Lección 15 de 'Jumpstart' incluye una tabla parcial que muestra la relación funcional entre el número de sandías y el número de semillas (ver la Figura 1). A los estudiantes se les pide completar una tabla y describir la regla de la función (e.g., $y = 8x$).

Una profesora, Sra. Blair, dio tiempo a sus alumnos para que trabajasen por su cuenta para completar la tabla. Las preguntas que hizo la Sra. Blair a sus alumnos mientras completaban la tabla sirvieron de apoyo a los estudiantes para *construir situaciones que pueden relacionarse y servir para búsquedas* porque se animó a los estudiantes a encontrar

Marcia estaba rellenando la siguiente tabla para un experimento durante su clase de ciencias, pero la clase terminó antes de que ella pudiese acabarla. ¿Puedes completarle la tabla?

número de sandías	número de semillas
1	8
	16
4	
	40
6	

Explica tu razonamiento.

Figura 1. La tarea de 'Jumpstart' (la tarea de la sandía).

los números que faltaban para que pudiesen *relacionar* el número de sandías con el número de semillas y *buscar* una relación entre ambas cantidades.

La Sra. Blair continuó preguntando a sus alumnos sobre cada fila de valores en la tabla. Entonces, dio a los estudiantes una nueva indicación: 'Organiza tu información en una tabla. ¿Cuáles dos cantidades estás comparando? ¿Cómo las representaste en tu tabla?' Esta indicación hace referencia a una nueva relación funcional entre el número de camisetas que uno tiene y el número de conjuntos que puede hacer. Al presentar la nueva relación funcional, la Sra. Blair volvió a mencionar 'Jumpstart' diciendo 'hace un rato creamos una tabla para Jumpstart. Quiero crear una tabla aquí porque creo que me va a ser útil para organizar la información'.

En este caso, la Sra. Blair hace referencia explícita a 'Jumpstart' (el problema de las sandías) que surgió anteriormente en clase. Al hacerlo, la Sra. Blair participó en una *actividad de generalización-promoción* de *incitar relaciones* entre la tabla usada en 'Jumpstart' y la tabla usada en la parte principal de la lección. Es probable que los alumnos de la clase de la Sra. Blair afronten la actividad de manera similar a la actividad que hicieron al razonar sobre el problema de las sandías. Este ejemplo demuestra una forma original en la cual las *actividades preparatorias* pueden preparar a los estudiantes para participar en *actividades de generalización-promoción* posteriormente.

Otra manera en la cual los estudiantes afrontan la actividad preparatoria es pensar en la tarea de las sandías al *relacionar* ambas situaciones (e.g., 1 sandía tiene 8 semillas; 2 sandías tienen 16 semillas; 3 sandías tienen 24 semillas, etc.) y después *buscar* una relación de similitud entre cada situación (i.e., 'la relación es un múltiplo de 8'). Este tipo de actividad de relacionar es diferente de relacionar valores en la tabla porque los estudiantes tienen en cuenta los valores covariantes juntos, y así relacionan situaciones concretas entre ellas, en vez de relacionar valores específicos con valores.

En otra clase, la Sra. Maddie demostró cómo se puede relacionar al establecer una relación de similitud (i.e., al percibir que dos situaciones son iguales).

Verbalización		Acción/Actividad
Sra. Maddie: 1 sandía y 8 semillas. Por tanto, sabemos que tenemos 16 semillas, ¿así que cuántas sandías nos darían 16 semillas?	AP	*Incitar a la construcción de situaciones que pueden relacionarse y servir para búsquedas*
[00:14:34.09] Estudiantes: 2	AP	*Construir situaciones que pueden relacionarse y servir para búsquedas*
Sra. Maddie: 2. Esta está completamente vacía (señala a la tercera fila de la tabla)		
[00:14:38.14] Estudiante: 3	AP	*Construir situaciones que pueden relacionarse y servir para búsquedas*
[00:14:38.16] Estudiante: 3		
Sra. Maddie: Quizás podamos inferir que pueden ser 3 y 24, pero entonces ahora tenemos 4 sandías ¿y cuántas semillas?	AP	*Incitar a la construcción de situaciones que pueden relacionarse y servir para búsquedas*
[0:14:48.18] Estudiantes: 32	AP	*Construir situaciones que pueden relacionarse y servir para búsquedas*
Sra. Maddie: Entonces tenemos 40 semillas (señala a 40 en la tabla).	AP	*Incitar a la construcción de situaciones que pueden relacionarse y servir para búsquedas*
[0:14:52.00] Estudiantes: 5	AP	*Construir situaciones que pueden relacionarse y servir para búsquedas*
Sra. Maddie: 5 sandías (señala a 5 en la tabla).	AP	*Incitar a la construcción de situaciones que pueden relacionarse y servir para búsquedas*
[0:14:55.12] Estudiantes: 48	AP	*Construir situaciones que pueden relacionarse y servir para búsquedas*
Sra. Maddie: 6 sandías y 48 semillas. ¡Así es! En 6 sandías tendremos 48 semillas. ¿Qué está ocurriendo aquí? Explícame tu razonamiento. ¿Jared?	AGP	*Incitar a relacionar y buscar*
Jared: Hemos contado por 8.	AG	*Relacionar situaciones u objetos* Jared está relacionando las situaciones que ha observado. Es probable que se esté fijando en las situaciones particulares de la tabla, estableciendo una relación e identificando una similitud entre ellas. La similitud que ha identificado es que han 'contado por 8'.
Sra. Maddie: Contado por 8. ¿En cuál lado?		
Jared: En el número de semillas.		

Una diferencia entre las instrucciones en las clases de la Sra. Blair y la Sra. Maddie es que tras invitar a participar a los estudiantes en una *actividad preparatoria* de *construir situaciones que pueden relacionarse y servir para búsquedas*, la Sra. Maddie hizo una pregunta a sus alumnos que fomentó la actividad de generalización (i.e., *actividad de generalización-promoción*). Aparentemente, esta acción incitó a un estudiante, Jared, a *relacionar*. Jared observó situaciones particulares en la tabla y estableció una relación al identificar la similitud entre ellas (i.e., al notar que esta situación es igual que otra). La similitud que identificó fue que 'hemos contado por 8' las semillas, una regla recursiva generalizada para la relación funcional.

Otra manera en que ambos fragmentos difieren es que, en un momento posterior durante su clase, la Sra. Blair se refirió otra vez a la construcción de la tabla para la tarea de 'Jumpstart'. Recordó a los alumnos que ya habían creado una tabla, y explicó que quizás quisieran hacerlo de nuevo para 'organizar la información'. Mientras que la Sra. Blair comenta a los estudiantes que una tabla sirve el propósito de organizar la información, también dirige la atención de los estudiantes a la tabla y les incita a pensar en una forma paralela al tipo de razonamiento que hicieron al construir la tabla anterior. A su vez, esta acción se convierte en una *actividad preparatoria* porque prepara a los estudiantes para participar en una *actividad de generalización-promoción*.

Igualmente que los estudiantes de la Sra. Maddie, los estudiantes en la clase de la Sra. Como identificaron una regla recursiva (i.e., 'sumar 8') para describir la relación. Entonces su profesora, la Sra. Como, participó en la *actividad de generalización-promoción* al *incitar a extender* cuando pide a los estudiantes que construyan una regla en base a la multiplicación. Les explicó que, con su nueva regla, podrían encontrar el número de semillas para *cualquier* número de sandías, sin tener que repetidamente sumar 8. Cuando los estudiantes dudaron acerca de cómo podrían modificar la regla recursiva, la Sra. Como participó en una *actividad preparatoria* de *construir una situación que se pudiese extender* al sugerir que podrían encontrar el número de semillas para 10 sandías, como ejemplo. Esta *actividad preparatoria* sirvió de apoyo para que los alumnos participaran en la *actividad de generalización-promoción* de *incitar a extender*.

En respuesta a la petición de la Sra. Como de encontrar el número de semillas en 10 sandías, los estudiantes participaron en una *actividad de generalización* de *expandir el rango de aplicabilidad* del patrón cuando decidieron que la respuesta era 80, pero además que podían escribir una regla para 10 sandías (ver la Figura 2).

La Sra. Como escribió en la pizarra la regla del estudiante para 10 sandías y lo resumió diciendo 'son 80 semillas en 10 sandías'. Después, la clase continuó para *expandir el rango de aplicabilidad* al crear una regla general. Primero, un alumno sugirió escribir letras (variables) en la parte superior de la tabla. Otro alumno sugirió usar w a la izquierda y v a la derecha, y la Sra. Como registró esta información en la tabla (i.e., escribió w a la izquierda y v a la derecha de la tabla). Entonces, la clase hizo una generalización cuando otro alumno sugirió sustituir los números de la ecuación que había escrito la Sra. Como para 10 sandías y 80 semillas con las variables, w y v.

Cabe señalar que cuando al principio la Sra. Como *incitó a extender* (una *actividad de generalización-promoción*) también participó en la *actividad preparatoria* de *construir una situación extensible*. Al *incitar a extender*, la Sra. Como, a su vez, creó una situación extensible.

En la práctica, muchas veces la diferencia entre ambas actividades es sutil, pero simplemente construir una situación extensible no es lo mismo que incitar a los estudiantes a expandir su razonamiento más allá del caso entre manos. No obstante, incitar a extender implica frecuentemente construir una situación que se pueda extender; en cambio, esta construcción extensible no necesariamente requiere incitar a extender. Por ejemplo, un profesor puede simplemente mencionar que una observación puede extenderse más allá del caso entre manos, sin incitar a los alumnos a que participen en la actividad de extender más allá del caso.

La secuenciación y la ocurrencia simultánea de las actividades

Aparentemente, la secuenciación y la ocurrencia simultánea de las actividades afecta su eficacia para apoyar la generalización por parte de los estudiantes. En particular, observé que la *actividad de generalización* suele seguir la *actividad de generalización-promoción*, lo que indica que la *actividad de generalización* suele resultar en la *actividad de*

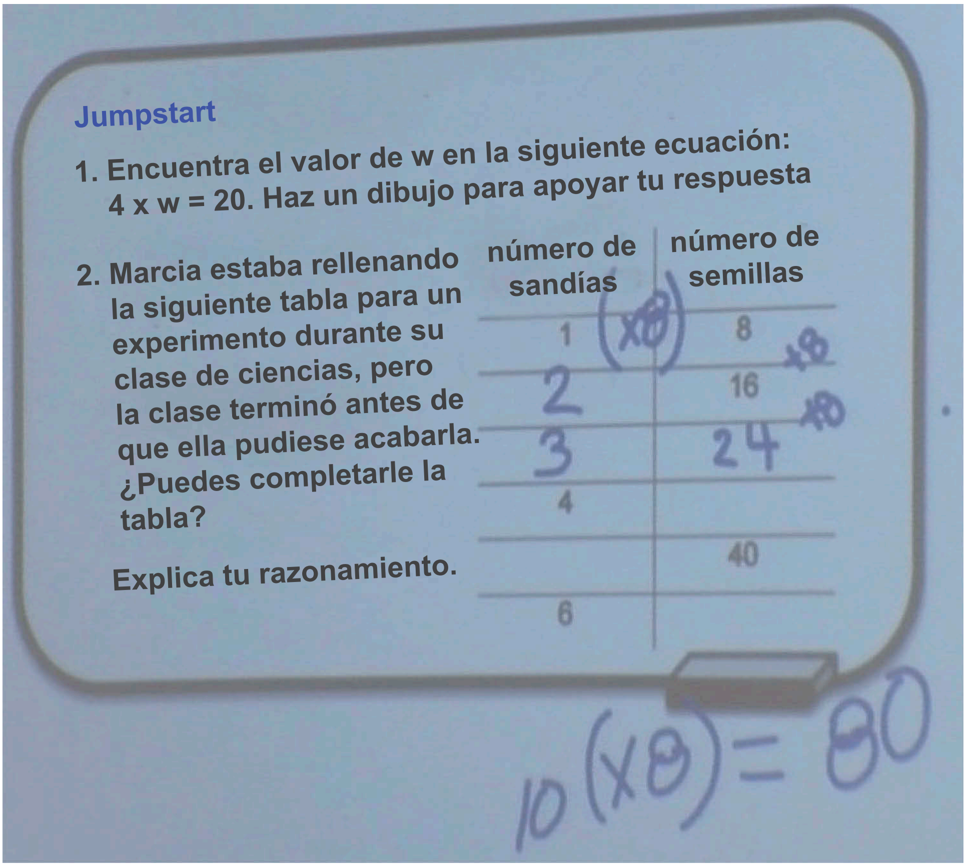


Figura 2. Una foto de la clase de la Sra. Como: expandir el rango de aplicabilidad.

generalización-promoción. Por supuesto, este hallazgo no debería ser sorprendente, dado el nombre de este tipo de actividades. No obstante, a nivel práctico, vale la pena tomar nota de las maneras específicas de incitar a la generalización (i.e., los diferentes tipos de actividades de generalización-promoción; ver la Tabla 1) y el hecho que son efectivas al implementarlas en la práctica. En otras palabras, este hallazgo muestra que, por ejemplo, *incitar a extender* (i.e., incitar a la expansión más allá del caso entre manos) es una manera de apoyar la generalización por parte de los estudiantes.

Tras identificar los distintos tipos de actividades en cada aula, determiné la cercanía con la cual se relacionaban las *actividades de generalización* de los estudiantes con otras actividades. En concreto, quería sabre si las *actividades de generalización* ocurrían simultáneamente con otras actividades. Para lograrlo, medí el número de segundos y verbalizaciones entre las actividades, y usé esta medida como distancia porque medí la distancia entre actividades. Medí distancia porque supuse que todas las actividades están interrelacionadas, y que lo más probable es que tengan una relación más cercana las que ocurren, o a las que se refiere en, una misma verbalización.

En la transcripción que sigue, identifiqué la *actividad de generalización-promoción* (AGP), la *actividad de generalización* del estudiante (AG) y la *actividad de generalización* del profesor (AG-P). En este fragmento, los estudiantes están completando la actividad mostrada en la Figura 3. Cabe señalar que la profesora está haciendo una generalización durante este fragmento, lo que aporta a los estudiantes información que aún no se había compartido.

Verbalización	Actividad	Descripción
[00:47:09] Profesora: Dibújalo … ¡Qué bien! (mira la hoja del estudiante). ¿Cómo lo sabes?	AGP	*Incitar a justificar*
[00:47:24] Estudiante: Porque lo dibujé.		
[0:48:32] Profesora: Rellenaste tu tabla. ¡Estupendo!		
(Alumnos hablando)		
[0:48:58] Profesora: (Mira la hoja de otro estudiante). Por tanto, se te ocurrieron hasta 4 ecuaciones diferentes para representar esto. ¿Cómo sabías que podría ser 16?	AGP	*Incitar a justificar*
[0:49:09] Estudiante: Porque se suma dos veces.	AG	*Relacionar situaciones u objetos*; el estudiante está relacionando las situaciones que ha observado (e.g., 2 + 2 = 4; 3 + 3 = 6; 4 + 4 = 8, etc.) y formando una relación de similitud entre ambas (que se ha de sumar el número de camisetas 'dos veces').
[0:49:28] Profesora: ¿Sumas 8 dos veces? Vale entonces para 8 camisetas aumenta por … Multiplicas por dos y tienes 16 camisetas. Vale. Entonces, termina tu tabla.	AG-P	*Relacionar situaciones u objetos*; repitió la respuesta del alumno, pero al hacerlo también expresó una generalización nueva (multiplicar por 2)
(Alumnos hablando)		
[0:49:57] Profesora: Vale, mirar aquí. Hemos dicho que eso ya lo sabemos para cada camiseta que añadimos. ¿Qué ocurre con los conjuntos? ¿Tammie?	AGP	*Incitar a la reflexión*
[00:50:22] Tammie: Hay más al duplicar el número de camisetas.	AG	*Relacionar situaciones u objetos* Tammie está relacionando las situaciones que ha observado. Por ejemplo, Tammie se podría estar refiriendo a los dibujos que hizo en la parte A o a los valores que construyó en la parte B. Después, se fija en los ejemplos particulares de número de camisetas y conjuntos, los relaciona e identifica una similitud entre ambos. La similitud que ha identificado es que 'se han duplicado'.

Después de identificar las actividades, conté el número de segundos y verbalizaciones entre los ejemplos de la *actividad de generalización* por parte de los estudiantes y otras actividades. Hice esto para confirmar que las actividades que había identificado efectivamente habían llevado a los estudiantes a generalizar, y que estas actividades no habían sido fenómenos espontáneos. Las actividades estaban agrupadas y las generalizaciones de los estudiantes fueron, de hecho, incitados. Esto es, las generalizaciones por parte de los estudiantes suelen resultar de otra actividad, como una *actividad preparatoria, actividad de generalización-promoción* o *actividad de generalización* del profesor. Noté que la media de verbalizaciones entre una *actividad de generalización* de un estudiante y otra actividad codificada era 1.52, y que la media de segundos entre una *actividad de*

Actividad estudiantil

Nombre: ________________________

Ángela necesita comprar uniformes para el campamento de verano. Sus uniformes consisten en un par de pantalones cortos y una camiseta. Compró 2 pares de pantalones cortos, pero aún debe comprar algunas camisetas. Quiere saber cuántos conjuntos puede hacer con las camisetas que compre.

¿Cuántos conjuntos puede hacer si compró una camiseta? ¿Y si compró 2 camisetas?

Explora y debate con un compañero:

A. ¿Cuántos conjuntos puede combinar Ángela si compra dos camisetas? Haz un dibujo para mostrar cómo has llegado a tu respuesta.

B. Organiza tu información en una tabla.

C. Encuentra el número de conjuntos que puede combinar Ángela si compró 8 camisetas.

D. Describe, en tus propias palabras, la relación entre el número de camisetas y el número de conjuntos.

E. Usa variables para escribir una regla (ecuación) que describa esta relación.

F. Escribe tu regla de otra manera diferente.

G. ¿Cuántos conjuntos podría combinar Ángela si tuviese más de 100 camisetas? Escribe una ecuación para mostrar cómo llegaste a tu respuesta.

Figura 3. El problema del conjunto.

generalización de un estudiante y otra actividad codificada era 11.34 segundos (ver la Tabla 4). Usé distancia para determinar si las actividades se relacionaban. No obstante, no quiero sugerir que el objetivo de la clase sea animar a los estudiantes a generalizar en menos tiempo. Más bien, usé distancia como manera de determinar si las actividades ocurrieron simultáneamente o si se relacionaban.

Es más, la actividad que inmediatamente precede a la *actividad de generalización* de un estudiante solía ser una *actividad de generalización-promoción*. En total, identifiqué 209 ejemplos de *actividades de generalización* por parte de los estudiantes. La Tabla 5

Tabla 4. Distancia entre las actividades de generalización por parte de los estudiantes y otras actividades.

Duración media en segundos entre las *actividades de generalización por parte de los estudiantes* y *actividades de generalización-promoción, actividades preparatorias* y *actividades de generalización por parte del profesor*	11.34
Cantidad media de verbalizaciones entre las *actividades de generalización por parte de los estudiantes* y *actividades de generalización-promoción, actividades preparatorias* y *actividades de generalización por parte del profesor*	1.52

Tabla 5. Frecuencia de la actividad anterior.

Actividad anterior	Número de ejemplos	Porcentaje de frecuencia
Generalización-promoción	192	92%
Preparatorias	13	6%
Generalización por parte de los profesores	4	2%

muestra las actividades que precedieron la *actividad de generalización* de un estudiante y la frecuencia de las mismas, e indica que el 92% de la generalización por parte de los estudiantes resultó de una de las cuatro *actividades de generalización-promoción* mostradas en la Tabla 1.

La Tabla 5 muestra que la *generalización por parte de los estudiantes* suele estar incitada por una *actividad de generalización-promoción*, prueba de que la *actividad de generalización-promoción* tiene un alto potencial para apoyar la generalización por parte de los estudiantes.

Una perspectiva cuantitativa de la actividad general

Antes de profundizar en la actividad general observada en este estudio, cabe señalar que una variedad de factores afecta si los estudiantes verbalizan o no generalizaciones, y con esto no pretendo sugerir que es ineficaz la instrucción en un aula donde los estudiantes no generalizan. En cambio, repito que el objetivo de este estudio era llamar la atención a las generalizaciones por parte de los estudiantes y considerar cuáles factores del 'sistema instruccional' podrían servir de apoyo a los estudiantes para hacer estas observaciones (Herbst & Chazan, 2012).

En cada una de las 13 aulas, los profesores impartieron sus clases y los estudiantes participaron en ellas de distintas maneras. De manera específica, observé diferencias en el número de veces que los participantes generalizaban, fomentaron la generalización, y participaron en actividades que incitan a los participantes a generalizar. Las dos últimas actividades eran importantes, dado el objetivo de la clase de apoyar la generalización por parte de los estudiantes, por ello mí lógica de distinguir entre generalizaciones por parte de profesores y de estudiantes. El suplemento disponible en Internet incluye una tabla y las descripciones que reflejan las diferencias entre las mediciones en cada aula.

Cabe señalar que lo interesante de la tabla en el suplemento disponible en Internet no es el número de ejemplos de cada actividad, sino que la tabla revela que hay otra historia más importante para contar, quizás que el tipo y la calidad de las *actividades preparatorias* y las *actividades de generalización-promoción* y la forma en que interactúan son lo que afectan la generalización por parte de los estudiantes, y no el número de ejemplos de estas actividades. El suplemento en Internet elabora esta afirmación en mayor detalle.

Resumen de los hallazgos

En conclusión, he señalado las maneras en las cuales las interacciones instruccionales promueven la generalización y las características y relaciones específicas de esas interacciones instruccionales que fomentaron la generalización. Según los hallazgos generales, podrá parecer que simplemente incorporar *actividades de generalización-promoción* al aula promoverá la generalización, pero no es el caso. En su lugar, a partir de las interacciones instruccionales complejas descritas en los fragmentos y observadas en mi análisis, está claro que una única acción no promueve la generalización. Más bien, es la combinación, el tipo y la calidad de las actividades, en un contexto específico, a su vez, que incitan a los estudiantes a generalizar. Además, observé que no es aplicable un criterio universal para estas actividades. Los profesores apoyan la participación de los estudiantes en generalizar a través de una variedad de enfoques efectivos. Por ejemplo, durante 'Jumpstart' (el problema de las sandías), la Sra. Blair *incitó a relacionar y buscar* al llamar la atención de los estudiantes a valores particulares, mientras que la Sra. Como inició la clase ayudando a los estudiantes a escribir los números que faltaban en la tabla para apoyarles en *construir situaciones que pueden relacionarse y servir para búsquedas*. Destaco estos ejemplos porque ambas estrategias animaron a los estudiantes a generalizar desde dos enfoques distintos.

Discusión

En la primera parte de los resultados, presenté la *actividad preparatoria*. Después hablé de cómo funciona la *actividad preparatoria* en la práctica, detallando distintas maneras en las cuales los profesores usan estas actividades para preparar a los estudiantes para participar en *actividades de generalización-promoción*. Después detallé cómo las *actividades preparatorias* y las *actividades de generalización-promoción* funcionan juntas. Concretamente, abordé la secuenciación y la ocurrencia simultánea de las actividades y las maneras en que parecen jugar un papel en su efectividad para apoyar la generalización por parte de los estudiantes. Para concluir, resumí la actividad general de los datos en su conjunto. En los siguientes apartados, abordaré cada aspecto de los hallazgos y elaboraré sobre las implicaciones de estos hallazgos para la investigación y la práctica. Primero, me refiero a lo aprendido en este estudio que puede comunicarse a los profesores para ayudarles en sus esfuerzos para fomentar las generalizaciones en sus aulas. Esto es, comparto las maneras en las cuales los profesores pueden sacar mayor provecho de las actividades descritas en las Tablas 1–3 para apoyar su enseñanza.

Implicaciones para la práctica

Es importante señalar que los profesores partícipes en este estudio habían realizado cursos extensos de desarrollo profesional. Dado que esta fue la Clase 15, impartid en la primavera, los profesores ya habían asistido al desarrollo profesional gran parte del curso escolar. Este desarrollo profesional tuvo lugar mensualmente durante aproximadamente tres horas, y familiarizó a los profesores con las siguientes lecciones, diseñadas para apoyar a los estudiantes en pensar de manera algebraica. Resulta interesante que el desarrollo profesional no hizo mención de las *actividades preparatorias* o de *generalización-promoción* identificados en el análisis.

Las descripciones de las aulas en los apartados 'Actividades preparatorias: la preparación de los estudiantes para participar en actividades de generalización-promoción' y 'La secuenciación y la ocurrencia simultánea de las actividades' muestran cómo los profesores pueden usar las *actividades preparatorias* o de *generalización-promoción* para apoyar a los estudiantes para participar en actividades de razonamiento algebraico en la escuela primaria. De manera específica, estos fragmentos muestran maneras diferentes de animar a los estudiantes a construir situaciones que pueden relacionarse y servir para búsquedas y después incitarles a formar una asociación entre estas situaciones en contextos diferentes y en respuesta a diversas propuestas de los estudiantes.

Los profesores han de tener en mente tres principios cuando implementan estos enfoques para promover la generalización: deben realizar estas actividades de forma explícita o incorporarlas a otra tarea; deben poner en práctica una variedad de actividades; y, las actividades deben ser aplicables a todas las situaciones matemáticas en las cuales los estudiantes puedan eliminar valores, unidades o contextos específicos para poder generalizar.

También cabe señalar que uno de los motivos por los que son efectivos estos enfoques a la enseñanza es que los niños están inclinados, por naturaleza, a participar en actividades que implican el razonamiento matemático (Schifter, Monk, Russell & Bastable, 2008). Los niños pequeños imaginan y expresan, enfocan y desenfocan, especializan y generalizan, conjeturan y convencen, y clasifican y caracterizan (Mason, 2008), y estas actividades son la base para construir, probar y justificar generalizaciones. La enseñanza productiva implica capitalizar las habilidades naturales de los niños y guiarles para que se fijen en atributos específicos significativos para las matemáticas.

Otro componente importante de incorporar estas prácticas es que los profesores deben animar a los estudiantes a compartir su razonamiento; esto se logra mediante discusiones en el aula para así animar aún más la generalización al dar a otros estudiantes la oportunidad de construir sobre sus ideas, a la vez que dar al profesor la oportunidad de sabre cómo razonan los estudiantes, con el fin de continuar promoviendo interacciones productivas. Todas las aulas en este estudio tuvieron una elevada participación estudiantil y un componente de discusión. De manera relacionada, Dekker y Elshout-Mohr (2004) – que estudiaron cómo las prácticas del profesorado afectan el entorno de aprendizaje y la participación estudiantil – descubrieron que apoyar a los estudiantes para entender el proceso de un problema de matemáticas, versus el producto del mismo, generó más participación estudiantil. A la inversa, apoyar a los estudiantes para entender el producto de un problema matemático resultó en mayor interacción individual entre el estudiante y el profesor. Por tanto, una manera en que los profesores pueden hacer partícipes a los estudiantes en una discusión es apoyándoles para entender el proceso matemático entre manos, en lugar de poner demasiado énfasis para que los estudiantes lleguen a un acuerdo sobre el resultado matemático específico.

Los profesores también pueden considerar las maneras en las cuales pueden integrar estas prácticas en las tareas. Muchos de los ejemplos dados aquí usan tablas para representar relaciones funcionales. Parece que las tablas ofrecen a los profesores la oportunidad para guiar el razonamiento estudiantil hacia los aspectos significativos para las matemáticas de una tarea y para hacer preguntas que reflejen las *actividades preparatorias* y las *actividades de generalización-promoción*. Del mismo modo, en un experimento de enseñanza, Warren y Cooper (2005) descubrieron que representar las relaciones funcionales en tablas organizadas de forma lógica sirvió a los estudiantes para identificar patrones recursivos.

Otro punto clave es que los profesores deben intentar poner en práctica una variedad de *actividades preparatorias* y *actividades de generalización-promoción*. No pretendo dar la impresión que solo son efectivas algunas actividades – las mostradas en los fragmentos presentados en este manuscrito –, dado que los fragmentos no demuestran todas las actividades observadas en las aulas. Más bien, animo a los profesores a incorporar una variedad de actividades en su práctica. Hay varias actividades que no están reflejadas en los fragmentos. Por ejemplo, *incitar a justificar* era una manera importante en la cual los profesores partícipes en este estudio apoyaron la generalización por parte de los estudiantes. No obstante, los fragmentos seleccionados para este manuscrito no mostraron este fenómeno. Trabajos anteriores han mostrado que los estudiantes suelen hacer generalizaciones débiles y rara vez justifican sus generalizaciones (Breiteig & Grevholm, 2006; Knuth et al., 2002). Sin embargo, justificar es importante porque suele ayudar a los estudiantes a generalizar (Ellis, 2007, 2011; Lannin, 2005; Lannin et al., 2006). Algunos estudios incluso sugieren que las justificaciones son moldeadas por la naturaleza de la generalización objeto de justificación (Becker & Rivera, 2006; Ellis, 2005).

Cabe resaltar que los profesores que participaron en este estudio suelen *incitar a justificar* simplemente preguntando al estudiante '¿Por qué?' o '¿Cómo lo sabes?'. Animo a los profesores que implementan las prácticas detalladas en este estudio a tener en cuenta preguntas para *incitar a justificar* y que, a su vez, animan a los estudiantes a generalizar, además de las maneras en las cuales podrían crear oportunidades para hacer estas preguntas.

Los ejemplos aquí expuestos de la tarea de las sandías y el problema de los conjuntos pueden considerarse situaciones únicas porque ambos fomentan el razonamiento funcional, y esto no suele abordarse en el currículo de matemáticas de la escuela primaria. No obstante, repito que las actividades descritas en las Tablas 1–3 pueden aplicarse a cualquier situación matemática generalizable. Las situaciones matemáticas generalizables son aquellas en las cuales los estudiantes pueden eliminar algunos valores, unidades o contextos para poder generalizar.

Por ejemplo, un profesor puede emplear una *actividad preparatoria* y *actividad de generalización-promoción* cuando los estudiantes están aprendiendo sobre las propiedades aritméticas de tal manera que los anime a 'descubrir' sus propiedades, en lugar de que se les muestren directamente. Los estudiantes generalizan sobre las propiedades aritméticas cuando reconocen un patrón en los ejemplos particulares de la propiedad conmutativa de la suma (e.g., $3 + 4 = 4 + 3$ y $2 + 1 = 1 + 2$). Las generalizaciones de los estudiantes pueden variar en nivel de sofisticación, desde los que hacen una declaración vaga de que estas oraciones numéricas sean un 'trueque', a los que puedan representar la idea escribiendo '$a + b = b + a$.' Independientemente de la sofisticación de la generalización, son oportunidades para que los estudiantes generalicen sobre estas situaciones. Así, hay oportunidades para que los profesores animen a los estudiantes a participar en actividades que fomentan la generalización. Implementar estas actividades en el aula no requiere un currículo específico porque las actividades descritas aquí pueden verse como una forma de enmarcar los contenidos del currículo de contenidos con el fin de hacer partícipes a los estudiantes en el razonamiento algebraico.

Interacciones entre actividades

Para desarrollar mis observaciones sobre cómo estas actividades pueden afectar la enseñanza, consideré las interacciones entre las actividades. Primero, noté que la *actividad preparatoria* suele preceder a la *actividad de generalización-promoción*, y eso me llevó a hablar de la secuenciación y la ocurrencia simultánea de las actividades en el apartado 'La secuenciación y la ocurrencia simultánea de las actividades'. De manera específica, observé que la *actividad de generalización* suele resultar de la *actividad de generalización-promoción*, y no de las generalizaciones que hagan los profesores ni de la participación de los estudiantes en la *actividad preparatoria*.

En un experimento de enseñanza, el objetivo de Warren y Cooper (2005) era documentar la implementación de una clase diseñada para apoyar a los estudiantes en desarrollar y articular generalizaciones sobre relaciones funcionales y determinar las acciones, los materiales y las actividades en las aulas de los profesores que apoyaban a los estudiantes en desarrollar y articular sus generalizaciones. Interesantemente, descubrieron que la secuencia de las tareas matemáticas afectó la capacidad de los estudiantes para participar en esas tareas de manera productiva. Este resultado es relevante para los hallazgos de este estudio porque la secuenciación y la ocurrencia simultánea de las *actividades preparatorias* y las *actividades de generalización-promoción*, específicamente en el contexto del razonamiento funcional, contribuye a implicar a los estudiantes en la *actividad de generalización*. En su conjunto, estos hallazgos sugieren que las tareas matemáticas del estudio de Cooper y Warren sirvieron al alumnado y profesorado para implicarse en actividades específicas (e.g., *actividades preparatorias* y *actividades de generalización-promoción*) y quizás la ocurrencia simultánea o la secuenciación de esas actividades son iguales a lo observado en este estudio.

Un área a estudiar en el futuro a partir de la idea de la secuenciación y la ocurrencia simultánea podría tener en cuenta la relación entre los distintos tipos de actividades y generalizaciones. Por ejemplo, estudios futuros podrían abordar la relación entre las generalizaciones de profesores y estudiantes. Tal vez, cuando más generalice el profesor, más probable sea que generalicen los estudiantes. Dado el número reducido de generalizaciones del profesorado, fue difícil detectar una relación entre estas dos actividades. No obstante, un mayor tamaño muestral posibilitaría determinar si ambas actividades se relacionan, y cuánto (e.g., con un análisis de regresión). Otra vía de la investigación podría centrarse en los distintos tipos de actividades y generalizaciones y considerar los tipos de combinaciones que serían más fructíferos que otros. El apartado de la conclusión detalla las oportunidades para estudios futuros.

Aunque las actividades que tuvieron lugar en las 13 aulas de este estudio eran diferentes, cada aula mostró *actividades preparatorias, actividades de generalización-promoción* y *actividades de generalización*, e interacciones entre ellas. Por ejemplo, observé que los profesores apoyaron la implicación de los estudiantes en el problema de las sandías desde varios enfoques. Estos hallazgos son iguales a otros estudios sobre la generalización por parte de los estudiantes acerca de las relaciones funcionales (Blanton et al., 2015; Brizuela et al., 2015) en que ofrecen varios 'caminos' para generalizar o apoyar la generalización por parte de los estudiantes. Muchos de los estudios en este campo han identificado, primero, que los estudiantes son capaces de generalizar sobre relaciones funcionales (e.g., Carraher & Schliemann, 2007) y, después, los pasos implicados en el aprendizaje para generalizar sobre relaciones funcionales (e.g., Blanton et al., 2015; Brizuela et al., 2015). No obstante, una manera en la cual mis hallazgos son diferentes de los estudios anteriores es que las actividades identificadas aquí no son específicas a las relaciones funcionales. En cambio, los hallazgos de este estudio son aplicables a todas las situaciones matemática en las que los estudiantes pueden eliminar algunos valores, unidades o contextos para poder generalizar. Por ejemplo, mencioné anteriormente que las actividades identificadas en este estudio podían aplicarse a la generalización por parte de los estudiantes sobre propiedades numéricas (e.g., la propiedad conmutativa de la suma) u otra situación matemática generalizable.

Los beneficios de diferentes tamaños de datos

El principio del apartado sobre los hallazgos se centró en las características que son únicas a las *actividades preparatorias*, porque no ocurrieron en los estudios de Ellis (2007, 2011); por tanto, son una contribución novedosa. En particular, destacamos aquellas actividades que preparan a los estudiantes para participar en *actividades de generalización-promoción*. Mientras que el trabajo de Ellis mostró la importancia de la *actividad de generalización-promoción*, no identificó la actividad previa, la *actividad preparatoria*, que prepara a los estudiantes para participar en *actividades de generalización-promoción*. En cambio, Ellis (2011) identificó y confirmó con el orador los tipos específicos de *actividad de generalización* que ocurrían porque realizó experimentos de enseñanza y entrevistas individuales.

El diseño, y específicamente la naturaleza, del estudio de Ellis fue más propicio para identificar los tipos de generalizaciones que hacían los estudiantes. En el apartado Conclusión, consideramos la naturaleza de los datos de este estudio como una de sus limitaciones. No obstante, el hecho de que el proceso de recogida de datos y, por tanto, el análisis de datos, difiere de manera significativa de los que usó Ellis, es una de las maneras en que este estudio aporta nuevos conocimientos a la investigación sobre apoyar la generalización por parte de los estudiantes. En otras palabras, debido a la diferencia de tamaño de nuestros datos, cada estudio aporta una perspectiva nueva sobre las preguntas relacionadas con apoyar la generalización por parte de los estudiantes. También cabe señalar que los datos en este estudio se recogieron en el contexto del aula, y los profesores habituales impartieron las clases. Al entender la naturaleza de estas actividades y las maneras en que funcionan en el contexto del aula, los educadores pueden incorporarlos mejor en su enseñanza, el desarrollo profesional y los otros recursos diseñados para servirles de apoyo. Además, dado que la perspectiva centrada en el actor clarifica la conexión entre el contexto de aprendizaje y el razonamiento de un estudiante, pude identificar aspectos instruccionales concretos y la forma en que esos aspectos apoyan el aprendizaje de los estudiantes para basar la instrucción sobre un diseño formativo. Concretamente, la perspectiva centrada en el actor enfoca el análisis sobre las características de la instrucción que son importantes para los estudiantes y que, a su vez, resultó en hallazgos directamente aplicables a la enseñanza y el aprendizaje.

Conclusión

Este estudio tuvo como objetivo entender la generalización a través de la actividad concreta de metanivel/global en la escuela primaria, porque la generalización es esencial para el razonamiento algebraico temprano (Blanton et al., 2011; Cooper & Warren, 2011; Kieran, 2007; Kieran et al., 2016; Mason, 1996). Para alcanzar este objetivo, examiné las actividades instruccionales e interactivas que generan la actividad de generalización en los estudiantes, a la vez que identifiqué las acciones que fomentan la generalización por parte de los estudiantes. Mediante este análisis, identifiqué las acciones y describí las maneras en que los profesores pueden implementarlas en sus aulas.

Mientras que las *actividades de generalización-promoción* parecen ser la manera más efectiva de apoyar la generalización por parte de los estudiantes, es importante destacar que este análisis solo tuvo en cuenta la actividad previa. En otras palabras, el análisis no tuvo en cuenta el hecho de que quizás hubo otras actividades antes de esta que contribuyeron a la efectividad de la actividad previa. Un caso ilustrativo de esto son las transcripciones presentadas aquí. Las *actividades de generalización-promoción* de hecho incitaron a los estudiantes a generalizar, pero no hubiesen tenido el mismo significado sin las actividades relacionadas que les siguieron. Esto es, las *actividades de generalización-promoción* asumen un papel importante en promover y apoyar la generalización por parte de los estudiantes, pero no pueden funcionar en aislamiento. Más bien, son efectivas cuando se incorporan en el 'sistema instruccional' que incluye una red de relaciones entre diferentes actividades que resultan de las acciones incitadas por los profesores, los estudiantes y los contenidos (Herbst & Chazan, 2012). Por tanto, para presenciar resultados positivos en la enseñanza, las actividades que constituyen la instrucción deben servir conjuntamente para apoyar el aprendizaje. Esta perspectiva hace surgir, en base a este estudio, una pregunta importante: ¿Cuáles combinaciones de *actividades preparatorias* y *actividades de generalización-promoción* serían más fructíferas que otras? Mientras que este estudio identificó las actividades que parecen contribuir a la generalización por parte de los estudiantes, el próximo paso en esta vía de investigación es explorar las maneras más productivas en las cuales esas actividades funcionan juntas en el aula.

A nivel práctico, los hallazgos de este estudio sirven para informar la enseñanza de álgebra. Los profesores, los diseñadores de currículo y los investigadores, entre otros, que diseñan entornos de aprendizaje pueden usar las descripciones en las Tablas 1–3 para diseñar con esmero las tareas, las preguntas y las indicaciones que fomentan la generalización. Por supuesto, como ya hemos mencionado, es la combinación de actividades en el contexto de la enseñanza que, a su vez, promueve la generalización, pero usar las descripciones en las Tablas 1–3 como base para diseñar la enseñanza es una forma productiva de emprender el proceso de incitar generalizaciones.

A nivel teórico, los hallazgos de este estudio contribuyen al objetivo continuo de comprender cómo los estudiantes aprenden matemáticas. Dado que la generalización es una práctica básica en las matemáticas (Kaput, 1999), entender cómo los estudiantes generalizan da información a los investigadores acerca de cómo los estudiantes aprenden matemáticas en general. Es más, los resultados de este estudio incluso pueden contribuir a los debates sobre cómo los estudiantes aprenden en general. Después de todo, la educación 'pretende ayudar a los estudiantes a desarrollar entendimientos robustos que podrán generalizar a la toma de decisiones y la resolución de problemas en otras situaciones, dentro y fuera del aula'.

En conclusión, quiero destacar cómo la investigación podría desarrollarse a partir de este estudio. Los resultados de este estudio generan unas preguntas de investigación importantes para el futuro. Por ejemplo, un descubrimiento novedoso fueron las *actividades preparatorias*, que parecen ser importantes para preparar a los estudiantes para participar en *actividades de generalización-promoción*. Por tanto, la investigación acerca de las *actividades preparatorias* tiene gran potencial para impactar la enseñanza en la práctica. Los investigadores podrían explorar las maneras en que los profesores pueden hacer preguntas y guiar a los estudiantes para que participen en *actividades preparatorias* e integrar estas actividades en las tareas, y cómo los profesores podrían implementar otras actividades posteriores que capitalizarían la anterior y promover la participación en las tareas.

Las *actividades de generalización-promoción* eran esenciales para iniciar a los estudiantes en la *actividad de generalización*. Preguntas a explorar por los investigadores: ¿Ciertos tipos de *actividades de generalización-promoción* son más productivos en términos matemáticos? ¿Cómo se relacionan ciertos tipos de *actividades de generalización-promoción* con las *actividades de generalización* que pretenden promover? ¿De qué manera promueven los estudiantes la generalización entre ellos? ¿La generalización por parte de los profesores fomenta la generalización por parte de los estudiantes?

En conclusión, hago hincapié en que los resultados de este estudio dejan las puertas abiertas para la investigación futura que pueda tener un elevado impacto para informar la enseñanza. Sugiero que las actividades identificadas en las Tablas 1–3 sirvan de punto de partida para estudios sobre apoyar la generalización productiva en términos matemáticos en la escuela primaria. Para avanzar, espero que los investigadores pongan a prueba, examinen y refinen los hallazgos para aumentar su aplicabilidad a la práctica en el aula.

Dada la importancia de generalizar, tanto respecto de términos algebraicos y matemáticos como del aprendizaje en general, considero los estudios sobre la generalización matemática relevante para estudiantes de todas las edades y considero especialmente productiva la investigación acerca de la generalización. Este tipo de estudios contribuye hacia el conocimiento de cómo los estudiantes aprenden los procesos de razonamiento auténticos de las matemáticas al 'desplazar su foco de la preocupación predominante por los cálculos numéricos' y colocar el 'foco principal sobre formas típicas e importantes de razonar en términos matemáticos' (Dörfler, 2008, p. 159).

Nota

1. Destacamos que el término *actividades preparatorias (priming)* no está vinculada con el término *primado* en la investigación en el campo de la psicología. Más bien, en este ejemplo nos referimos a *actividades preparatorias* como la preparación de los estudiantes para construir sobre una idea o desarrollarla.

Acknowledgements / *Agradecimientos*

The research reported here was supported in part by the Institute of Education Sciences under Award #R305A140092. Any opinions, findings and conclusions or recommendations expressed in this material are those of the authors and do not necessarily reflect the views of the Institute of Education Sciences. / *Este estudio se financió parcialmente por el Instituto de Ciencias de la Educación, Ayuda n.º R305A140092. Todas las opiniones, hallazgos y conclusiones o recomendaciones aquí expresados son de los autores y no necesariamente reflejan las opiniones del Instituto de Ciencias de la Educación.*

Disclosure statement / *Conflicto de intereses*

No potential conflict of interest was reported by the author. / *Los autores no han referido ningún potencial conflicto de interés en relación con este artículo.*

References / *Referencias*

Becker, J. R., & Rivera, F. D. (2006). Sixth graders' figural and numerical strategies for generalizing patterns in algebra (1). In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 95–101). Mérida: Universidad Pedagógica Nacional.

Blanton, M., Isler, I., Stephens, A., Gardiner, A., Knuth, E., Demers, L., & Strachota, S. (2017). *Longitudinal growth in children's algebraic thinking: Results of an early algebra intervention across grades 3–5*. Paper presented at the National Council of Teachers of Mathematics Research Conference, San Antonio, TX.

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A., Isler, I., & Kim, J. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*, 39–87.

Breiteig, T., & Grevholm, B. (2006). The transition from arithmetic to algebra: To reason, explain, argue, generalize and justify. *Proceedings of the 30th Conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 2, pp. 225–232). Prague: Charles University.

Britt, M. S., & Irwin, K. C. (2008). Algebraic thinking with and without algebraic representation: A three-year longitudinal study. *ZDM*, *40*, 39–53.

Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Newman-Owens, A., & Gardiner, A. (2015). Children's use of variables and variable notation to represent their algebraic ideas. *Mathematical Thinking and Learning*, *17*, 1–30.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, pp. 669–705). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Cooper, T., & Warren, E. (2011). Year 2 to Year 6 students' ability to generalize: Models, representations and theory for teaching and learning. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 187–214). Heidelberg: Springer.

Dekker, R., & Elshout-Mohr, M. (2004). Teacher interventions aimed at mathematical level raising during collaborative learning. *Educational Studies in Mathematics*, *56*, 39–65.

Dörfler, W. (2008). En route from patterns to algebra: Comments and reflections. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 143–160.

Ellis, A. B. (2005). Justification as a support for generalizing: Students' reasoning with linear relationships. In G. M. Lloyd, M. R. Wilson, J. L. M. Wilkins, & S. L. Behm (Eds.), *Proceedings* *of the 27th annual meeting of the North American chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (CD-Rom). Eugene, OR: All Academic.

Ellis, A. B. (2007). A taxonomy for categorizing generalizations: Generalizing actions and reflection generalizations. *The Journal of the Learning Sciences*, *16*, 221–262.

Ellis, A. B. (2011). Generalizing-promoting actions. *Journal in Research in Mathematics Education*, *42*, 308–345.

Ellis, A. B., & Grinstead, P. (2008). Hidden lessons: How a focus on slope-like properties of quadratic functions encouraged unexpected generalizations. *The Journal of Mathematical Behavior*, *27*, 277–296.

English, L., & Warren, E. (1995). General reasoning processes and elementary algebraic understanding: Implications for instruction. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *17*(4), 1–19.

Herbst, P., & Chazan, D. (2012). On the instructional triangle and sources of justification for actions in mathematics teaching. *ZDM*, *44*, 601–612.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. In E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133–155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Kaput, J. J., & Blanton, M. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience. Part 1: Transforming task structures. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (pp. 344–351). Melbourne: The University of Melbourne.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde, & A. Perez (Eds.), *8th International Congress on Mathematical Education: Selected lectures* (pp. 271–290). Sevilla: S.A.E.M. Thales.

Kieran, C. (2004). The core of algebra: Reflections on its main activities. In *The future of the teaching and learning of algebra the 12 th ICMI study* (pp. 21–33). Dordrecht: Springer.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707–762). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Ng, S. F. (2016). *Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching* (pp. 3–32). Dordrecht: Springer.

Knuth, E., Slaughter, M., Choppin, J., & Sutherland, J. (2002). Mapping the conceptual terrain of middle school students' competencies in justifying and proving. In D. Mewborn, P. Sztajn, D. White, H. Wiegel, R. Bryant, & K. Noony (Eds.), *Proceedings of the twenty-fourth annual meeting of the North American chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 4, pp. 1693–1700). Columbus, OH: Educational Resources Information Center.

Lannin, J., Barker, D., & Townsend, B. (2006). Algebraic generalization strategies: Factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal*, *18*(3), 3–28.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*, 231–258.

Lee, L., & Wheeler, D. (1987). *Algebraic thinking in high school students: Their conceptions of generalization and justification* (Research Report). Montreal: Concordia University, Department of Mathematics.

Lobato, J. E. (2003). How design experiments can inform a rethinking of transfer and vice versa. *American Educational Research Journal*, *32*, 17–20.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In *Approaches to algebra* (pp. 65–86). Dordrecht: Springer.

Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 57-94). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum/Taylor & Francis Group & National Council of Teachers of Mathematics.

Warren, E., & Cooper, T. J. (2005). Introducing functional thinking in Year 2: A case study of early algebra teaching. *Contemporary Issues in Early Childhood*, *6*, 150–162.