# PASS THE *IDEA*: FOLLOWING BILINGUAL MATHEMATICS DISCUSSIONS


| Gladys Krause | Melissa Adams-Corral | Luz A. Maldonado |
| --- | --- | --- |
| William and Mary | The Ohio State University | Texas State University |
| ghkrause@wm.edu | adams.2153@buckeyemail.osu.edu | l.maldonado@txstate.edu |


*In this study we document how a mathematical idea, shared by a student, changes the development of the class discussion. Our work characterizes the flexible and open dynamics in mathematics instruction that a teacher adopts to give her students control of their own mathematical ideas. Our work argues that this flexibility is necessary for teachers to engage in instructional practices that respond to students' mathematical thinking. To demonstrate the teacher's flexibility we use the analogy of soccer, relying on the literature of Game Sense coaching approach, which suggests that the coach (the teacher in our context) is positioned to manipulate the practice environment with the purpose of facilitating learning.*

Keywords: Elementary Education, Equity & Justice, Standards, Teacher Knowledge

Our article describes a typical day in Ms. Amaris' bilingual second-grade classroom in a southern U.S. public school. We intend to present the characteristics of a fluid and productive mathematics class discussion. Our analysis focuses on how one idea can change the trajectory of an entire class' discussion and the ways that teachers take up new ideas that students propose. We identify the origins of mathematical ideas within a collective discussion and show an idea continuing to develop during an exploratory, one-on-one conversation between Ms. Amaris and a student. Eventually, this conversation becomes the key to expanding the mathematical ideas that the whole class discussed. In order to better explain how one student's mathematical idea can spread throughout a classroom, we have decided to use an analogy that connects to our Latinx culture: soccer. We view the teacher as a coach, with a general plan for the class' discussion—in this case the match. But, as any true soccer fan knows, a soccer match is rich in possibilities and the potential for surprise. In this case we will see how students begin to toss around a more complex idea, passing the ball back and forth. Gabriel, the focal student in our analysis, launches the ball — his mathematical idea— and Ms. Amaris, seeing where her students have taken the game, decides to follow their ideas, allowing the students to control the direction of their class' discussion. This case allows us to see how a mathematics class can support the natural development of mathematical ideas by positioning students as the stars on the field.

In this class, 21 students learned mathematics without any restrictions on their language practices. In other words, students were asked to share ideas in either English or Spanish, based on their preference. Additionally, the students' culture was an important component in daily instruction. In previous investigations in Ms. Amaris' classroom we have argued that allowing students to express their mathematical ideas, even when they were incomplete or could be interpreted as incorrect, allowed for the creation of a space where mathematical ideas could flow and where a teacher could help develop ever stronger mathematical understandings (Maldonado, Krause & Adams, 2018; Carpenter; Fennema; Franke; Levi & Empson, 2015). We have also argued that, for a teacher to support students as they develop stronger conceptual understandings, both the teacher and the students need to understand one another clearly. For this reason, the use of language plays a central role in the practice of teaching and learning mathematics (Maldonado et al., 2018). Based on our prior work, along with the analogy of a soccer match, we will present how Ms. Amaris' students were able to promote a mathematical idea, encouraged by their teacher, making visible how mathematical ideas can be formed collectively through rapid interchanges that could be difficult to trace in the moment. In this class, while discussions began with a set plan, the coach was always ready for a change of tack in order to better meet the game's dynamics. Ms. Amaris was not only focused on the individual passes from player to player, she also had a view of the entire field of play. In this way, through her questioning, she was able to guide students and their emerging ideas until they were finalized as a deep mathematical idea or a rich connection (and, following our analogy, until they ended in a winning goal!). The experience of seeing ideas pop up helped us identify the role the teacher plays in helping her class to solidify their mathematical ideas. Specifically, our analysis presents an answer to the questions: *What does mathematics instruction look like when students' emergent ideas are the central focus? How can teachers support students to develop these ideas?*

Our article contributes to the literature by demonstrating how mathematical ideas develop in a bilingual classroom in the U.S. This article focuses on describing how a teacher observes and participates in order to facilitate productive classroom discussions, where students' mathematical ideas serve to build the class' ever deeper mathematical understanding. We argue that ideas are produced collectively, where individual cognition is embedded within a collective cognition in which all the members of a classroom community participate. This can be seen when one idea, as it is passed to Gabriel, develops in ways that could support the entire class' growing mathematical understandings.

## Theoretical Framework

A mathematics class where students have the opportunity to share, justify, connect and extend ideas has been the center of educational reforms in the US in recent years (NCTM, 2014). As a response to this focus, many researchers have conducted studies on how mathematical discussions positively impact students (Moschkovich, 2018). These same studies have shown that including students' mathematical ideas in classroom discussions is a complex task. At the same time, other studies have indicated that students are not benefited equally by discussions. For example, Moschkovich (2018) found that discussions can serve to strengthen certain students' positioning as experts, allowing and even naturalizing, their domination of the class' discussions because those students who are identified as using more advanced strategies tend to share more often. This ensures that students labeled English Language Learners are further disadvantaged due to their minimal participation in class discussions (Adler, 1997; Secada & De La Cruz, 1996).

There are studies that have demonstrated the contributions of bilingual students and the significant role they can play in supporting an entire class' learning (e.g. Turner & Celedón-Pattichis, 2011; Turner, Dominguez, Maldonado & Empson, 2013). Regardless, given the complexity of managing a culturally and linguistically diverse classroom, questions remain around what teachers must do in order to orchestrate productive discussions around rich mathematical content, particularly as bilingual and multicultural contexts become increasingly common across the U.S. Our work is an effort to contribute to an understanding of what needs to take place in bilingual mathematics classroom through an example of how this can be done.

We intend to establish a clear methodology by delineating what Ms. Amaris' practice looked like. In order to do so, we have decided to employ a theoretical framework common in the literature on sports known as the Game Sense coaching approach (GSA). In GSA, the coach uses the game, or the format of the game, as the starting point and continuing focus during training sessions. With GSA, the coach supports players' development of stronger decision-making techniques on the field by encouraging players to understand the game and acquire tactical knowledge and techniques through authentic play (Australian Sports Commission, 1996). GSA argues that the use of games in practice provides players greater opportunities to test out ideas and propose strategies that can be developed through team discussions (Evans & Light, 2008; Light & Evans, 2010). The literature on GSA suggests that the coach should be positioned as a facilitator (Light & Evans, 2010). As a facilitator, the coach guides players to make decisions and solve problems as they arise during games. This "athlete-centered" stance gives players more options and a greater sense of control in the game. The "coach as educator" (Jones, 2006) can adjust the context and conditions during practice in order to facilitate greater learning (Light, 2013). Some work in education has also suggested that the practices of coaches can support teachers (Duncan-Andrade, 2010). Duncan-Andrade (2010) argues that coaches often employ motivation tactics and relationship building in ways that can also benefit the work of teachers.

If we think of lesson planning as a form of preparation for the game, in which there is more than one way to approach the goal, then we would want to avoid linear progressions, instead focusing on the complexity of the field of play—the classroom—and the abundance of possibilities at any given time. It is precisely this abundance that makes it impossible for a teacher to determine all the possible directions that a discussion might take. At the same time, it also would be counter-productive to focus only on what interests the teacher and ignoring the desires of students. For this reason, the role that the teacher assumes is so important—she can read and react to what occurs instantaneously, changing plans to fit the dynamic she encounters (Duncan-Andrade, 2010). We know that mathematics learning is complex and cannot be limited to one sole pathway or trajectory (Empson, 2011). It requires teachers to accept that they are not in control of where the game is headed. Just like in a soccer match, the coach and the players must react to and follow the game in the moment.

## Methods

### Data

We have worked closely with Ms. Amaris and her students during two consecutive years and have collected extensive data demonstrating her work in the classroom. The data presented in this article is focused on one conversation between Ms. Amaris and Gabriel, one of her 2nd graders. This conversation was video-recorded and transcribed for analysis.

### Problem Solving and Number Talks

The episodes from the class that we present in our analysis come from a discussion that generated in response to the problem in Figure 1 and the two equations in Figure 2.

Ms. Amaris typically begins math lessons with a Number Talk (Parrish, 2014; Bray & Maldonado, 2018). This lesson she began with a problem that connected to the class' study of the crisis affecting the water supply in Flint, Michigan (Figure 1). The problem used the context of the class' fundraiser, organized by the students, and asked them to think of how they could get from $38 to $60. After following a lesson sequence common in CGI classrooms (Carpenter, et al., 2015), the class moved to a Number Talk. Ms. Amaris' class had done Number Talks since the beginning of the school year. The students were familiar with this routine, and knew that these discussions focused on their thinking when solving equations and the strategies they used. Ms. Amaris' original plan to see how students used place value knowledge to subtract (Carpenter, et al., 2015).

### Analysis

Our analysis involved not only the consideration of what Ms. Amaris and Gabriel said and did, but also of the situation and context within which they were situated. This meant that we included what other students said and did. We identified specific points in the conversation to determine our unit of analysis (Jacobs & Morita, 2002). At times, this unit consisted of an individual comment or question from Ms. Amaris. At other times it included a sequence of comments. Our analysis began with the initial problem (Figure 1). There we identified the mathematical ideas that emerged as well as the linguistic practices of all those involved in the discussion.

*Last week we had 38 dollars in the jar of money for Flint. If at the end of this week we have 60 dollars, how much money would we have raised during the week?*

**Figure 1: Problem to Start Class**

| | |
|---|---|
| 62 – 38 = □ | 65 – 38 = □ |

**Figure 2: Number Talk**

**Results and Discussion**

The Number Talk began with a discussion of the equation *60 - 38* = □ which emerged from the problem in Figure 1. The purpose of posing this equation was to continue engaging students in using their knowledge of Base-10 and place value in order to compose and decompose numbers and find ways to 'take 8 from 0.' Ms. Amaris starts off asking Emilio for his idea on how to solve the equation and he states that the answer is *22*. Ms. Amaris writes the answer and insists on an explanation for why that was the answer, asking: "¿Cómo sabían que la respuesta era 22?" Many students shared different explanations. As an example:

Diana: *60 minus 30 equals 30. 8 plus 10 equals, wait, 8 plus 2 equals 10. So then, 8 minus, I mean, 30 minus 8 equals 22.*
MA: *Okay, so 60 menos, 30 es 30. Luego al 30 le quitas 8 y te quedan 22* [Ms. Amaris scribed on chart paper while repeating in Spanish what Diana shared in English]

After sharing strategies that resulted in *22,* Ms. Amaris continues the Number Talk by writing the following equation: *62 – 38* = □ (Figura 2). This equation also prompted various strategies. For example:

Juan Luis: *It's 22, just that you take more, 2 more, 20.*
MA: *Okay, some people are saying that. Let's see if there's some other ideas, too.*
Diana: *24.*
MA: *Ah, I hear two ideas now.*
Diana: *'Cuz last time we added 71 and the answer was 20, it was, the answer was 22, wait, 24.*
MA: *I'm gonna put up the two answers that I've heard. I heard Juan Luis say 20. I heard Diana say 24. If you have another idea, go ahead and call it out.*

Ms. Amaris continued the discussion asking for explanations of why they thought the answer might be 20.

MA: *Okay, so háblame de como sacaron 20.*
Kellys: *La respuesta no más de 60 – 38, fue 22 yo no más le quité los 2 del 22 y después el cero.* (The answer from 60 – 38 was 22 and I just took 2 from 22 and then the zero.)
MA: *Okay, voy a escribir lo que me explicaste. 60 – 38 son 22* (OK, I'll write what you explained to me, 60 – 38 was 22) [Ms. Amaris writes 60 - 38 = 22] *le quitaste 2 más. ¿Por qué le quitaste 2 más?* (You took away 2 more, why did you take away 2 more?)
Diana: *It's 20. I thought of it in my head.*
MA: *Why? ¿Por qué le quitas otros 2?* (Why did you take away another 2)
Kellys: *Le quité el 2 y después puse el 60, le quité el 60 el cero del 60* (I took the 2 and then I put the 60, I took the 60 the zero from the 60)
Hugo: *It's gone past.*
MA: *Gone past what?*
Gina: *The 22. If you take away the 2 from the 22.*
MA: *Why?*
Diana: *El sesenta también se puede quitar.* (You can also take away the 60)
SA: *Okay, Carlos is jumping out of his seat. What are you thinking?*
Carlos: *24, because if the 60 minus 38 equals 22, and then you, on that 60- And then, you added 2 more, 'cuz 62.*

The conversation starts with the search for making sense of why the answer is *20*, but the explanations end up justifying why the answer is *24* or *20*. In this case, many students are starting to divert the direction of the game, from place value strategies to pre-algebraic thinking, but they still don't manage to fully shift the course of the discussion Ms. Amaris continues by asking "why one or the other?" Finally, she proposes: "Should we try and prove it?" and the whole class sets to work. Ms. Amaris suggests that they might think of using tens and ones, which they had used the day before. In this moment, students shared many ideas about how to represent *60* using groups of *10* and how to represent the ones, then taking away until finding the answer *24*. After modeling, they decide to prove their answer by adding *38* and *24* to see if it gave them *62*.

Now Ms. Amaris turns to the last equation: *65 – 38 =* □. During the discussion of this equation, the game takes the unplanned turn in the direction first suggested by Juan Luis.

Gabriel: *It's just like 62 minus 38, but you add 3 more.*
MA: *3 more where?*
Gabriel: *To the 62.*
MA: *Okay. Gabriel, go ahead and tell us what you're thinking.*
Gabriel: *It's 30-something. It's just like 62 minus 38, but you add 3 more to the 62 and then you should have 65.*
MA: *Okay, so to this one I added 3 and I got the 65. I'm still taking away 38. What do I do to the 24?* [Sra. Amaris escribe la idea de Gabriel (Figure 3)]
Kellys: *24 take away 4?*

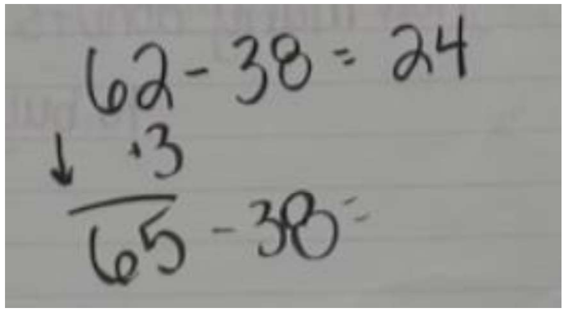


**Figure 3: Gabriel's Strategy as Represented by Ms. Amaris**

Ms. Amaris' notation (Figure 3) and her questions show she had every intention of getting students to notice how what is done to one side of an equation must also be done to the other. But, the conversation again took another turn and the idea was sidetracked momentarily (think of a ball kicked off course). So, Ms. Amaris decided to give students more time and the freedom to work at their desks in order to find the answer. Meanwhile, Ms. Amaris made her way to Gabriel hoping to better understand his thinking

> Gabriel: *If it's 65 minus 38, 'cuz you're taking away 38 and there's only 5 in the 65, and then… And if you're taking away 38 and then you, um, take away the 8 from the 30, then you take away 5, there's gonna be 2 more in the 8.*
> MA: *So, ¿lo que te está como atorando es la idea de quitarle 8 cuando solo hay 5 en las unidades?* (So, what's bothering you is the idea of taking away 8 when you only have 5 ones?)
> Gabriel: *Hm…*
> MA: *Oh, okay. Pues ¿cómo lo haríamos?¿Hay algún otro lugar donde le podríamos quitar?* (Well, how could we do it? Is there somewhere else where we could take from?)
> Gabriel: [Nodded, pointing at a stack of ten cubes]
> MA: *Ah! Okay, vamos a quitarle este 8.* (Oh! Ok, let's take away that 8, then)
> Gabriel: *two, four, six, eight.*
> MA: *Okay, ¿qué nos quedó?* (Ok, so what do we have left?)
> Gabriel: *10, 20, 30, 40, 50. 50. 50, 55, 56, 57. 57.*
> MA: *Okay, diez, veinte, treinta, cuarenta, cincuenta, cincuenta y uno, cincuenta y dos, cincuenta y tres, cincuenta y cuatro, cincuenta y cinco, cincuenta y seis, cincuenta y siete. So, lo que nosotros encontramos es que, para quitarle el ocho, tuvimos que entrarnos a uno de los dieces. ¿Qué te faltó quitar? Porque sólo le quitaste 8.* (Okay, ten, twenty, thirty, forty, fifty, fifty-one, fifty-two, fifty-three, fifty-four, fifty-five, fifty-six, fift-seven. So, what we found was that to take way the 8 we had to get inside one of the tens.What's left to take away? Because you've only taken away 8 so far. )
> Gabriel: *30 ...*
> MA: *¿Ves una manera mas fácil de quitar 30?* (Do you see an easy way to take away 30?)
> Gabriel: *Should I just take away these?* [Pointing to 3 groups of 10 cubes]
> MA: *That sounds easier, right?*
> Gabriel: *Yeah.*
> MA: *How many did you take away?*
> Gabriel: *30. The answer is twenty-seven.*

The mathematical details in Gabriel's strategy are important. He takes *8* from a *10* and then takes *30* more from the *5* tens that were left. This flexibility, in both his thinking and his sense of number (eg. seeing *65* as a group of *6* groups of ten and *5* ones) allowed him to see how he could take *8* from *10* instead of *5*, which had at first struck him as being difficult. Once this difficulty was noted and tackled with Ms. Amaris' support, she kept talking with Gabriel. At this point, she suggests that they go and look at the equation that the class had been trying to solve (Figure 3).

> SA: *¿Hay alguna relación entre 24 y 27? So, tú me habías dicho: 62 más 3 es 65. ¿Qué es 24, si le sumamos otros 3?* (Is there some relationship between 24 and 27? So, you had said: 62 plus 3 is 65. What's 24, if we add another 3?)
> Gabriel: *27*
> SA: *27. So, si hubiéramos ido con tu idea de hacer como una balanza entre lo que teníamos y lo que acabamos de hacer… Tu dijiste, aquí le sumamos 3, pues aquí también le podemos sumar 3. Y eso te dio la respuesta que sacaste, ¿no?* (So, if we had kept going with your idea of making like a balance between what we had before and what we just did…You said, here we added 3. Well, here we can also add 2. And that gave you the same answer that you just found, right?)

Ms. Amaris was able to identify an opportunity to return to the initial idea that Gabriel had shared. At first, he thought of *62 - 38 =* □ and how, if you added *3* to *62* you would get *65*, but then he got stuck and was not able to continue. Ms. Amaris saw the opportunity to broaden the scope of his thinking by returning to his initial idea after he had solved the problem. In Figure 3, we see how Ms. Amaris uses the idea of a scale to find an equilibrium between both sides of the equation that Gabriel had attempted to solve. Ms. Amaris tried to support Gabriel in recognizing that the problem the class had, *62 – 38=*□, was very nearly the problem they were attempting now, *65 – 38=*□. In keeping with the techniques of GSA, the coach uses the game itself during training sessions in order to develop the technical understanding necessary to better control the game's dynamics. In this case, Ms. Amaris saw that Gabriel could take the discussion further than where she had planned for it to go, but it didn't quite get there. So, once she had sent students back to their desks, Ms. Amaris improvised a strategy, where her focus was to develop Gabriel's idea giving him the opportunity to prepare to share with the class in future discussions.

These moments from a portion of a class session are just one example of how Ms. Amaris used an open and fluid dynamic to cede control of the discussion to her students, allowing them to determine the ideas that would be shared and how they might grow. In this example, we see how the idea of the balance starts with Juan Luis, Kellys and Gina, is picked up by Carlos and, eventually, is passed along to Gabriel. The idea never belonged to only one student, nor were Juan Luis or Kellys' initial attempts a failure. As the idea was generated collectively, it continued to grow as more students participated. By stopping to focus on Gabriel, Ms. Amaris responded to the ideas that emerged from the group, shifting from her initial focus on base-10 concepts to fundamental concepts of pre-algebra.

## Conclusions

Throughout this article we show Ms. Amaris' flexibility in determining the content of her class discussions, an example that we feel justifies an argument for curricula, including grade level standards, to be similarly flexible. For example, Ms. Amaris' initial goal was basically regrouping, using base-10 concepts and place value. However, Juan Luis, Kellys, Carlos and Gabriel's idea took the class to a new discussion on "balancing" an equation. In allowing the students to guide the direction of the discussion, letting them determine which plays to follow, we can see how Ms. Amaris' class not only met the initial objective of solving the equation, but also went further than what their teacher had planned. The idea of "balancing" the equation goes far beyond the curricular standards established as content to cover in second grade. According to Principles and Standards for School Mathematics (NCTM, 2000) this idea only begins to develop in third grade. Additionally, in classrooms with linguistically diverse students, who are traditionally silenced during mathematical discussions (Adler, 1997; Secada & De La Cruz, 1996), it is of utmost importance that teachers recognize that the control they impose on students' mathematical ideas and on the language in which ideas can be shared also impose mathematical silence. In other words, the more control we place on what is welcome in our discussions, the more ideas may be left out.

To conclude, based on our work this far, we pose the following questions for our field to consider in future investigations: Who decides what is taught each day in any given mathematics classroom? If we truly wish to promote the centering of students' mathematical ideas in mathematics instruction, what role do those ideas play in deciding what should be taught each day? And, if we are working to see our Latinx students positioned as true knowers of mathematics, how can we ensure that their classrooms are really theirs to direct and inspire? Perhaps, to start, we can play a little soccer, as a model of a collective dynamic that inspires through cooperation.

## References

Adler, J. (1997). A participatory-inquiry approach and the mediation of mathematical knowledge in a multilingual classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 33, 235–258.

Australian Sports Commission. (1996). *Game sense: perceptions and actions research report.* Belconnen, ACT: Australian Sports Commission.

Bray, E., & Maldonado, L. (2018). Foster fact fluency with number strings discussions. *Teaching Children Mathematics, 25*(2), 88-93.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S. B. (2015). *Children's mathematics: Cognitively Guided Instruction*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Duncan-Andrade, J. M. R. (2010). *What a coach can teach a teacher: Lessons urban schools can learn from a successful sports program* (Vol. 293). Peter Lang.

Empson, S. B. (2011). On the idea of learning trajectories: Promises and pitfalls. *The Mathematics Enthusiast*, *8*(3), 571-596.

Evans, J., & Light, R. (2008). Coach development through collaborative action research: A rugby coach's implementation of game sense pedagogy. *Asian Journal of Exercise and Sport Science*, 5(1), 31-37.

Jacobs, J. K., & Morita, E. (2002). Japanese and American teachers' evaluations of videotaped mathematics lessons. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(3), 154–175.

Jones, R. (2006). How can educational concepts inform sports coaching? In R. Jones (Ed.), *The Sports Coach as Educator* (pp. 3-13). New York, NY: Routledge.

Light, R. (2013). *Game sense: pedagogy for performance, participation and enjoyment*. New York, NY: Routledge.

Light, R., & Evans, J. (2010). The impact of game sense pedagogy on Australian rugby coaches' practice: A question of pedagogy. *Physical Education and Sport Pedagogy*, 15(2), 103-115.

Maldonado, L. A., Krause, G., Adams, M. (2018). Theorizing a Translanguaging Stance: Envisioning an Empowering Participatory Mathematics Education Juntos Con Emergent Bilingual Students. In T.E. Hodges, G. J. Roy, & A. M. Tyminski, (Eds.), *Proceedings of the 40th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1351). Greenville, SC: University of South Carolina & Clemson University.

Moschkovich, J. (2018). Talking to Learn Mathematics With Understanding. Supporting Academic Literacy in

Mathematics for English Learners. In: Bailey, Maher & Wilkinson (Eds), *Language, Literacy, and Learning in the STEM Disciplines How Language Counts for English Learners* (13-35). Routledge, New York.
National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All*. Reston, VA: Author.
Parrish, S. (2014.) *Number talks: Helping students build mental math and computation strategies.* Sausalito, CA.: Math Solutions
Secada, W. G., & De La Cruz, Y. (1996). Teaching mathematics for understanding to bilingual students. In J. L. Flores (Ed.), *Children of La Frontera: Binational efforts to serve Mexican migrant and immigrant students* (pp. 285–308). Charleston, WV: Appalachia Educational Laboratory.
Turner, E. & Celedón-Pattichis, S., (2011) Mathematical Problem Solving Among Latina/o Kindergartners: An Analysis of Opportunities to Learn, *Journal of Latinos and Education*, 10:2, 146-169, DOI: 10.1080/15348431.2011.556524
Turner, E., Dominguez, H., Maldonado, L. & Empson, S. (2013). English Learners' Participation in Mathematical Discussion: Shifting Positionings and Dynamic Identities. *Journal for Research in Mathematics Education*, (44)1, 199-234

## PÁSAME LA *IDEA*: SIGUIENDO DISCUSIONES MATEMÁTICAS BILINGÜES

Gladys Krause
William and Mary
ghkrause@wm.edu

Melissa Adams-Corral
The Ohio State University
adams.2153@buckeyemail.osu.edu

Luz A. Maldonado
Texas State University
l.maldonado@txstate.edu

*En este estudio documentamos cómo una idea matemática, compartida por un estudiante, cambia el desarrollo de la discusión de la clase. Nuestro trabajo caracteriza la dinámica flexible y abierta en la instrucción de matemáticas que una maestra adopta para dar a sus estudiantes control de sus propias ideas matemáticas. Nuestro trabajo argumenta que esta flexibilidad es necesaria para que los maestros se involucren en prácticas de instrucción que responden al pensamiento matemático de los estudiantes. Para demostrar la flexibilidad de la maestra usamos la analogía del fútbol, apoyándonos en la literatura de Enfoque Comprensivo del Sentido de Juego, la cual sugiere que el entrenador (el maestro en nuestro contexto) se posicione como un facilitador para manipular el entorno de práctica con el propósito de facilitar el aprendizaje.*

Keywords: Educación Primaria, Equidad y Justicia, Estándares, Conocimiento del Profesor

Nuestro artículo describe una investigación desarrollada en un salón de segundo grado bilingüe en una escuela pública en el sur de los Estados Unidos. El objetivo de nuestro trabajo es delinear las características de una discusión productiva y elocuente durante la instrucción de matemáticas. Principalmente nos enfocamos en el análisis de cómo una idea puede cambiar el desarrollo de una discusión, y cómo los maestros pueden seguir las ideas nuevas que proponen sus estudiantes. Nuestro artículo identifica el origen de las ideas matemáticas durante una discusión colectiva, y cómo las ideas continúan desarrollándose en una pequeña conversación entre la maestra y un estudiante. Eventualmente esta conversación se convierte en la clave para expandir las ideas matemáticas discutidas por la clase. Para intentar explicar cómo la idea de un solo estudiante se propaga por todo el salón, hemos decidido usar una analogía muy propia a nuestra cultura Latina, el fútbol. Así la maestra, como una entrenadora técnica, tiene un plan general para la discusión — en este caso, el partido — pero, como los aficionados bien conocen, en un partido de fútbol lo que sobra son posibilidades. En este caso, veremos como los estudiantes proponen una idea más compleja, pasando la idea como la pelota. Gabriel, el estudiante en nuestro análisis, tira la pelota — su idea matemática — y Sra. Amaris, la maestra en nuestro análisis, viendo adónde sus estudiantes han llevado el partido, decide seguir esta idea, dándoles libertad a los estudiantes de tener control del partido. En este caso, lo que pudimos ver es cómo una clase de matemáticas apoya el desarrollo natural de las ideas matemáticas posicionando a los mismos estudiantes como las estrellas del campo.

En esta clase 21 estudiantes aprenden matemáticas sin restricciones de lenguaje. La cultura de los estudiantes es un componente importante en su aprendizaje diario. En investigaciones anteriores, basados en el aula de la Sra. Amaris, hemos argumentado que el permitir que los estudiantes expresen sus ideas matemáticas, incluso cuando aún no están completas o son temporalmente incorrectas, permite que se abra un espacio para que las ideas matemáticas fluyan y también se abra un espacio para que la maestra pueda ayudar a construir un conocimiento aún más sólido de las matemáticas (Maldonado, Krause & Adams, 2018; Carpenter; Fennema; Franke; Levi & Empson, 2015). Hemos argumentado también que esta construcción de conocimiento se hace posible cuando la comunicación entre la maestra y los estudiantes es clara (para los dos). Por lo tanto, el uso del lenguaje juega un papel central en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas (Maldonado et al., 2018). Usando como base nuestro trabajo anterior, y usando la analogía del fútbol, presentamos aquí como los estudiantes de la Sra. Amaris son capaces de poner en marcha una idea matemática que la Sra. Amaris apoya con ánimo, fomentando y haciendo visible cómo las ideas matemáticas se forman de manera colectiva a través de intercambios rápidos y a veces difíciles de trazar. En esta clase, aunque las discusiones inician con un plan trazado previamente, la directora técnica está lista para cambiar su estrategia en cualquier instante siguiendo la corriente del partido. La Sra. Amaris no solamente se enfoca en los pasos de jugador a jugador, sino tiene la vista en la cancha entera. De esta manera, por medio de sus preguntas, guía a los estudiantes con sus ideas matemáticas emergentes hasta que finalizan en una idea o conexión matemática profunda (y tal vez, siguiendo nuestra analogía, podríamos decir, ¡hasta que terminan en un victorioso gol!). La experiencia de ver surgir las ideas nos ayuda a identificar el papel que juega la maestra en ayudar a la clase a solidificar la idea matemática. Específicamente nuestro análisis presenta una respuesta a las preguntas: *¿Cómo se ve la instrucción de matemáticas donde las ideas emergentes de los estudiantes determinan el enfoque de la clase? ¿Cómo pueden los maestros apoyar la evolución de estas ideas?*

Nuestro artículo aporta a la literatura demostrando cómo se desarrollan las ideas matemáticas en un salón bilingüe, específicamente en el contexto educativo de los Estados Unidos. Nuestro artículo se enfoca en describir cómo una maestra observa y participa para facilitar discusiones productivas, en dónde las ideas matemáticas de los estudiantes se usan para construir una idea matemática más avanzada. En argumentar que estas ideas se producen de manera colectiva, argumentamos que la cognición individual es parte de una cognición colectiva en que participan y comparten todos los miembros del salón. Esto se puede ver cuando una idea, pasada a Gabriel, se convierte en la idea que servirá para apoyar a la clase entera.

## Marco Teórico

El intercambio de ideas durante la clase de matemáticas dónde los estudiantes tienen oportunidades de compartir, justificar, conectar y extender ideas ha sido el centro de reformas educativas en los últimos años en los Estados Unidos (NCTM, 2014). Siguiendo este enfoque varios investigadores han realizado estudios sobre discusiones matemáticas demostrando un impacto positivo en el aprendizaje de los estudiantes (Moschkovich, 2018). Estos mismos estudios han demostrado que incluir las ideas matemáticas de los estudiantes a través de la discusión en clase de matemáticas no es una práctica fácil. Al mismo tiempo otros estudios han indicado que no todos los estudiantes se benefician de igual manera durante las discusiones en la clase de matemáticas. Por ejemplo, Moschkovich (2018) encontró que muchas veces estas discusiones sólo consiguen afianzar la posición de expertos con la que algunos estudiantes se identifican y usan a diario para dominar las discusiones. También aquellos estudiantes que se identifican por usar estrategias avanzadas tienden a compartir sus estrategias más frecuentemente. Estas desventajas son aún más marcadas en aquellos estudiantes cuya primera lengua no es inglés porque tienden a participar de una manera mínima en estas discusiones (Adler, 1997; Secada & De La Cruz, 1996).

Muy pocos estudios se han enfocado en demostrar las contribuciones de estudiantes bilingües y sus aportes significativos al aprendizaje de toda la clase (por ejemplo Turner & Celedón-Pattichis, 2011; Turner, Dominguez, Maldonado & Empson, 2013). Sin embargo, dada la complejidad de manejar un salón de clase con una amplia diversidad cultural y lingüística, todavía existen preguntas sobre cómo, y qué se requiere de las maestras para, orquestar una discusión productiva y rica en contenido matemático, especialmente en el contexto bilingüe y multicultural característico de los Estados Unidos. Nuestro trabajo es un esfuerzo para contribuir a entender qué se necesita y para dar un ejemplo de cómo se puede hacer.

En un intento por establecer una metodología clara que delinee cómo se ve la práctica de la Sra. Amaris, hemos decido usar un marco teórico común en la literatura deportiva conocida como Enfoque Comprensivo del Sentido de Juego (Game Sense coaching approach). En GSA (por su sigla en inglés) el entrenador usa el juego o la forma de juego como el punto de partida y el enfoque continuo en la sesión de entrenamiento. Además, a través de GSA el entrenador anima a los jugadores a comprender el juego y a adquirir conciencia táctica y técnica dentro del contexto del juego para ayudar a desarrollar una mejor toma de decisiones cuando juegan (Australian Sports Commission, 1996). GSA argumenta que el uso de esta práctica permite que los jugadores tengan más oportunidades de probar ideas y proponer estrategias que se desarrollan mediante la discusión entre ellos y el entrenador (Evans & Light, 2008; Light & Evans, 2010). La literatura de GSA sugiere que el entrenador se posicione como un facilitador (Light & Evans, 2010). Como facilitador, el entrenador guía al jugador en la toma de decisiones para resolver los problemas del juego. Esta postura educativa "centrada en el atleta" hace que los jugadores tengan más opciones y control sobre el juego. El entrenador como educador (Jones, 2006) puede manipular el entorno de práctica para estructurar y facilitar el aprendizaje (Light, 2013). La literatura en educación también tiene precedente en ver a la maestra como una entrenadora (Duncan-Andrade, 2010). Duncan-Andrade (2010) argumenta que la enseñanza requiere tácticas de motivación que deben ser parte de la formación de cualquier entrenador técnico.

Si vemos la planeación de lecciones como una preparación para el juego, en donde no hay una sola manera de llegar al arco, en lugar de enfocarnos en un progreso lineal, podremos ver la complejidad del campo — el salón de clase — y la abundancia de posibilidades. Por esta abundancia, precisamente, no es posible para una maestra determinar todos los caminos que una discusión puede tomar. Al mismo tiempo no sería muy productivo enfocarse sólo en lo que le interesa a la maestra. Por esta razón el papel de la maestra es fundamental. Ella puede leer y reaccionar a lo que sucede instantáneamente, cambiando de plan de acuerdo con la dinámica que encuentra (Duncan-Andrade, 2010). El aprendizaje matemático es complejo, y no se puede limitar a un solo camino o trayectoria (Empson, 2011). Requiere que la maestra acepte el no controlar la dirección del juego. Igual con un partido de fútbol, el entrenador y los jugadores deben reaccionar y seguir el juego en el momento.

## Métodos

### Datos

Durante dos años consecutivos hemos trabajado muy de cerca con la Sra. Amaris y sus alumnos y hemos recolectado datos extensos de su trabajo en el aula. El trabajo que presentamos en este artículo se centra en un pasaje de una conversación entre la Sra. Amaris y Gabriel, uno de sus estudiantes del 2do grado. El pasaje fue grabado en video y transcrito para su análisis.

### Problemas y Conversaciones Numéricas

Los episodios de la clase que presentaremos en nuestro análisis vienen de la discusión que generaron el problema en la Figura 1 y las dos ecuaciones en la Figura 2.

La Sra. Amaris suele comenzar sus lecciones de matemáticas con una conversación numérica (Number Talks en inglés) (Parrish, 2014; Bray & Maldonado, 2018). En esta lección comenzó la clase con un problema basado en la crisis de contaminación de agua en Flint, Michigan (Figura 1). El problema usó el contexto de un recaudo de fondos que los niños organizaron y pidió que los niños pensaran en cómo llegar de $38 a $60. Después de seguir una secuencia de lección común en clases de CGI (Carpenter, et al., 2015), pasaron a una conversación numérica.

*La semana pasada recolectamos 38 dólares en la jarra para mandar dinero a Flint. Si después de una semana tenemos 60 dólares almacenados, ¿cuánto dinero recolectamos durante la semana?*

**Figura 1: Problema para iniciar clase**

| | |
|---|---|
| 62 – 38 = □ | 65 – 38 = □ |

**Figura 2: Conversaciones Numéricas discutidas después del problema inicial**

La conversación numérica es una práctica pedagógica que la Sra. Amaris ha usado desde el principio del año escolar. Los estudiantes ya familiarizados con esta rutina sabían que estas discusiones se centraban en la manera de pensar acerca de ecuaciones y las estrategias utilizadas para resolverlas. Estas ecuaciones se seleccionaron con el propósito inicial de la Sra. Amaris de ver como los niños usan valor posicional (Carpenter, et al., 2015).

## Análisis

Nuestro análisis involucró no sólo una consideración de lo que Sra. Amaris y Gabriel dijeron e hicieron, sino también la situación y el contexto, incluyendo lo que todos los otros niños dijeron e hicieron. Identificamos puntos específicos en la conversación para determinar nuestra unidad de análisis (Jacobs & Morita, 2002). A veces la unidad consistía en el comentario o pregunta individual de la Sra. Amaris, y otras veces incluía una secuencia de comentarios y preguntas. Nuestro análisis comenzó con el problema inicial (Figura 1). Ahí identificamos las ideas matemáticas que surgieron y las prácticas lingüísticas de todos los involucrados en la discusión.

## Resultados y Discusión

La conversación numérica empieza con la discusión de la ecuación *60 - 38 =* □ del problema en la Figura 1. El propósito de la ecuación era continuar trabajando en la instrucción de Base-10 y valor posicional, de tal manera que los estudiantes pudieran componer y descomponer los números para "quitar 8 al 0". La Sra. Amaris comenzó preguntándole a Emilio sus ideas para resolver la ecuación y él dijo que la respuesta era *22*. La Sra. Amaris escribe la respuesta e insiste en una explicación acerca de por qué esa respuesta: "¿Cómo sabían que la respuesta era 22?" Varios estudiantes compartieron explicaciones diferentes. Por ejemplo:

> Diana: *60 minus 30 equals 30. 8 plus 10 equals, wait, 8 plus 2 equals 10. So then, 8 minus, I mean, 30 minus 8 equals 22.*
> SA: *Okay, so 60 menos, 30 es 30. Luego al 30 le quitas 8 y te quedan 22* [La Sra. Amaris escribió todo en el tablero a medida que repitió en español lo que Diana dijo en inglés]

Después de compartir las estrategias que resultan en *22,* la Sra. Amaris pasó a escribir una ecuación, *62 – 38 =* □ (Figura 2), para continuar con las conversaciones numéricas. De la misma manera esta ecuación provocó varias ideas. Por ejemplo:

> Juan Luis: *It's 22, just that you take more, 2 more, 20.*
> SA: *Okay, some people are saying that. Let's see if there's some other ideas, too.*
> Diana: *24.*
> SA: *Ah, I hear two ideas now.*
> Diana: *'Cuz last time we added 71 and the answer was 20, it was, the answer was 22, wait, 24.*
> SA: *I'm gonna put up the two answers that I've heard. I heard Juan Luis say 20. I heard Diana say 24. If you have another idea, go ahead and call it out.*

La Sra. Amaris continua la discusión pidiendo explicaciones sobre ¿Por qué *20*?

> SA: *Okay, so háblame de como sacaron 20.*
> Kellys: *La respuesta no más de 60 – 38, fue 22 yo no más le quité los 2 del 22 y después el cero.*
> SA: *Okay, voy a escribir lo que me explicaste. 60 – 38 son 22* [La Sra. Amaris escribe 60 - 38 = 22] *le quitaste 2 más. ¿Por qué le quitaste 2 más?*
> Diana: *It's 20. I thought of it in my head.*
> SA: *Why? ¿Por qué le quitas otros 2?*
> Kellys: *Le quité el 2 y después puse el 60, le quité el 60 el cero del 60*
> Hugo: *It's gone past.*
> SA: *Gone past what?*
> Gina: *The 22. If you take away the 2 from the 22.*
> SA: *Why?*
> Diana: *El sesenta también se puede quitar.*
> SA: *Okay, Carlos is jumping out of his seat. What are you thinking?*
> Carlos: *24, because if the 60 minus 38 equals 22, and then you, on that 60- And then, you added 2 more, 'cuz 62.*

La conversación inicia con la búsqueda de ¿por qué es *20*? y las explicaciones terminan justificando porque la respuesta es *24* ó *20*. En este caso, Carlos y Kellys están empezando a dirigir el partido en una dirección inesperada, pero todavía no logran cambiar la discusión. La Sra. Amaris continúa preguntando ¿por qué la una o la otra? Luego termina por proponer: “Should we try and prove it?” Y la clase entera se embarca en la tarea. La Sra. Amaris propone que usen las decenas y unidades de las que habían hablado el día anterior. En ese momento los estudiantes comparten varias ideas sobre cómo representar *60* usando grupos de *10* y cómo representar las unidades y quitando hasta encontrar la respuesta 24. Después de modelarlo lo deciden comprobar con una suma de *38* y *24* para ver si les salía el *62*.

Finalmente La Sra. Amaris propone la última ecuación *65 – 38* = □. Durante la discusión de esta ecuación el partido toma un giro fuera de lo planeado, va en la dirección inicialmente sugerida por Juan Luis.

Gabriel: *It’s just like 62 minus 38, but you add 3 more.*
SA: *3 more where?*
Gabriel: *To the 62.*
SA: *Okay. Gabriel, go ahead and tell us what you’re thinking.*
Gabriel: *It’s 30-something. It’s just like 62 minus 38, but you add 3 more to the 62 and then you should have 65.*
SA: *Okay, so to this one I added 3 and I got the 65. I’m still taking away 38. What do I do to the 24?* [Sra. Amaris escribe la idea de Gabriel (Figure 3)]
Kellys: *24 take away 4?*

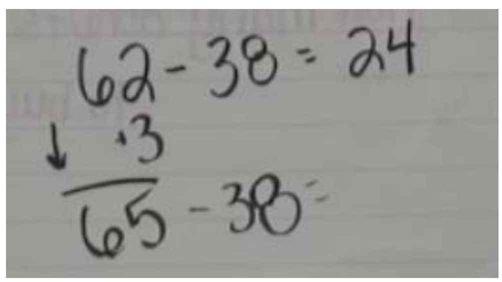


**Figura 3: Idea de Gabriel representada por la Sra. Amaris**

La notación de la Sra. Amaris (Figura 3) y sus preguntas tenían toda la intención de hacer que los estudiantes pudieran ver que lo mismo que se hace a un lado de la ecuación se debe hacer al otro lado. Pero la conversación tomó un giro diferente, la pelota se desvió. La Sra. Amaris decidió darles más tiempo y la libertad de trabajar en sus escritorios para encontrar la respuesta. Mientras eso pasaba, la Sra. Amaris se acerca a Gabriel tratando de entender un poco más su manera de pensar.

Gabriel: *If it’s 65 minus 38, ‘cuz you’re taking away 38 and there’s only 5 in the 65, and then… And if you’re taking away 38 and then you, um, take away the 8 from the 30, then you take away 5, there’s gonna be 2 more in the 8.*
SA: *So, ¿lo que te está como atorando es la idea de quitarle 8 cuando solo hay 5 en las unidades?*
Gabriel: *Hm…*

SA: *Oh, okay. Pues ¿cómo lo haríamos?¿Hay algún otro lugar donde le podríamos quitar?*
Gabriel: [Asintió, apuntando a un grupo de 10 cubos]
SA: *Ah! Okay, vamos a quitarle este 8.*
Gabriel: *two, four, six, eight.*
SA: *Okay, ¿qué nos quedó?*
Gabriel: *10, 20, 30, 40, 50. 50. 50, 55, 56, 57. 57.*
SA: *Okay, diez, veinte, treinta, cuarenta, cincuenta, cincuenta y uno, cincuenta y dos, cincuenta y tres, cincuenta y cuatro, cincuenta y cinco, cincuenta y seis, cincuenta y siete. So, lo que nosotros encontramos es que, para quitarle el ocho, tuvimos que entrarnos a uno de los dieces. ¿Qué te faltó quitar? Porque sólo le quitaste 8.*
Gabriel: *30 ...*
SA: *¿Ves una manera mas fácil de quitar 30?*
Gabriel: *Should I just take away these?* [Apuntando a 3 grupos de 10 cubos]
SA: *That sounds easier, right?*
Gabriel: *Yeah.*
SA: *How many did you take away?*
Gabriel: *30. The answer is twenty-seven.*

Los detalles matemáticos en la estrategia de Gabriel son importantes. Quita *8* de un *10*, y luego quita *30* más de las *5* decenas que quedaron. La flexibilidad en su forma de pensar y su sentido numérico (es decir, ver a *65* cómo un grupo de *6* decenas y *5* unidades) le permite ver cómo quitar *8* de *10* en lugar de *5*, lo que él había calificado como difícil. Una vez que esta dificultad fue notada y abordada por Sra. Amaris, ella continuó hablando con Gabriel. Esta vez ella propone ir y ver la ecuación que estaban resolviendo antes como clase (Figura 3).

SA:*¿Hay alguna relación entre 24 y 27? So, tú me habías dicho: 62 más 3 es 65. ¿Qué es 24, si le sumamos otros 3?*
Gabriel: *27*
SA: *27. So, si hubiéramos ido con tu idea de hacer como una balanza entre lo que teníamos y lo que acabamos de hacer… Tu dijiste, aquí le sumamos 3, pues aquí también le podemos sumar 3. Y eso te dio la respuesta que sacaste, ¿no?*

La Sra. Amaris pudo identificar una oportunidad para volver a las ideas iniciales compartidas por Gabriel. Al principio pensó en $62 - 38 = \square$ y que si sumaba *3* a *62* obtendría *65*, pero luego se atoró y no pudo continuar. La Sra. Amaris vio la oportunidad de ampliar su pensamiento volviendo a su idea inicial después de haber resuelto el problema. En la Figura 3 vemos como la Sra. Amaris usa la idea de una escala para equilibrar ambos lados de la ecuación en la que Gabriel estaba pensando. La Sra. Amaris trataba de ayudar a Gabriel a darse cuenta de que el problema que él realmente resolvió, $62 - 38 = \square$, era casi el problema que quería resolver, $65 - 38 = \square$. Como en las técnicas de GSA, el entrenador usa el juego durante entrenamientos para desarrollar la conciencia táctica necesaria para controlar mejor la dinámica del juego. En este caso la Sra. Amaris vio que Gabriel podría llevar a la discusión de la clase una idea más allá de lo que ella había planeado, pero no se logró. Pero al enviar a los niños a trabajar en sus mesas, la Sra. Amaris improvisó una estrategia, en dónde su enfoque era desarrollar la idea de Gabriel y darle la oportunidad de prepararse para compartirla con la clase en futuras discusiones.

Este fragmento de la clase es un ejemplo de como la Sra. Amaris usa una dinámica flexible y abierta para ir pasándoles el control a sus estudiantes, a que ellos determinen y controlen las ideas que logran fluir y ser compartidas. En este ejemplo podemos ver la idea del balance empezando con Juan Luis, Kellys y Gina y luego pasando a Gabriel. Esta idea no le pertenece a un solo estudiante, es una idea generada en grupo que continúa creciendo. Al parar y enfocarse en Gabriel, la Sra. Amaris respondió a las ideas que surgían (como grupo), cambiando el enfoque inicial, base-10, para discutir conceptos básicos de pre-algebra.

## Conclusiones

A través de nuestro artículo hemos demostrado como la flexibilidad de la Sra. Amaris para determinar el contenido de la clase justifica el argumento de que el currículo debe ser flexible de la misma manera. Por ejemplo, el punto inicial de la Sra. Amaris era básicamente reagrupar, usando conceptos de Base-10 y valor posicional. Sin embargo las ideas de Juan Luis, Kellys, Carlos y Gabriel los llevó también a hablar sobre "balancear" una ecuación. En permitir que los estudiantes guiaran la conversación, dejándolos determinar las jugadas a seguir, pudimos ver que la clase de matemáticas de la Sra. Amaris no sólo cumplió con el objetivo inicial de solucionar la ecuación, pero también llevó la discusión aún más allá de lo que la Sra. Amaris había planeado. La idea de "balancear" la ecuación va mucho más allá de lo que los estándares curriculares establecen como contenido que se debe cubrir en segundo grado. De acuerdo con Principles and Standards for School Mathemtics (NCTM, 2000) esta idea empieza a desarrollarse en el tercer grado.

Adicionalmente, en salones de clase con estudiantes lingüísticamente diversos, quienes tradicionalmente se ven silenciados en discusiones matemáticas (Adler, 1997; Secada & De La Cruz, 1996), es de mayor importancia que las maestras reconozcan que el control que imponen a las ideas matemáticas de los estudiantes, y que el idioma en que las ideas son compartidas impone igualmente un silencio matemático.

Para finalizar, basado en el trabajo que hemos expuesto hasta este punto, queremos dejar algunas preguntas al campo de investigación de educación de matemáticas como punto de partida para futuras investigaciones: ¿Quién determina qué se debe enseñar cada día en el aula de clase? Si en realidad estamos proponiendo usar las ideas matemáticas de los estudiantes durante la instrucción de matemáticas, ¿qué papel juegan las ideas matemáticas de los estudiantes en lo que se debe enseñar diariamente? Si estamos trabajando verdaderamente para ver a nuestros estudiantes Latinx posicionándose como verdaderos conocedores matemáticos, ¿cómo podemos asegurar que los salones de clase sean suyos para dirigir e inspirar? A lo mejor, para empezar, podemos jugar al fútbol, pero cómo un modelo de dinámica colectivo que promueva cooperación e inspiración.

## Referencias

Adler, J. (1997). A participatory-inquiry approach and the mediation of mathematical knowledge in a multilingual classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 33, 235–258.

Australian Sports Commission. (1996). *Game sense: perceptions and actions research report.* Belconnen, ACT: Australian Sports Commission.

Bray, E., & Maldonado, L. (2018). Foster fact fluency with number strings discussions. *Teaching Children Mathematics, 25*(2), 88-93.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S. B. (2015). *Children's mathematics: Cognitively Guided Instruction*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Duncan-Andrade, J. M. R. (2010). *What a coach can teach a teacher: Lessons urban schools can learn from a successful sports program* (Vol. 293). Peter Lang.

Empson, S. B. (2011). On the idea of learning trajectories: Promises and pitfalls. *The Mathematics Enthusiast*, *8*(3), 571-596.
Evans, J., & Light, R. (2008). Coach development through collaborative action research: A rugby coach's implementation of game sense pedagogy. *Asian Journal of Exercise and Sport Science*, 5(1), 31-37.
Jacobs, J. K., & Morita, E. (2002). Japanese and American teachers' evaluations of videotaped mathematics lessons. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(3), 154–175.
Jones, R. (2006). How can educational concepts inform sports coaching? In R. Jones (Ed.), *The Sports Coach as Educator* (pp. 3-13). New York, NY: Routledge.
Light, R. (2013). *Game sense: pedagogy for performance, participation and enjoyment*. New York, NY: Routledge.
Light, R., & Evans, J. (2010). The impact of game sense pedagogy on Australian rugby coaches' practice: A question of pedagogy. *Physical Education and Sport Pedagogy*, 15(2), 103-115.
Maldonado, L. A., Krause, G., Adams, M. (2018). Theorizing a Translanguaging Stance: Envisioning an Empowering Participatory Mathematics Education Juntos Con Emergent Bilingual Students. In T.E. Hodges, G. J. Roy, & A. M. Tyminski, (Eds.), *Proceedings of the 40th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1351). Greenville, SC: University of South Carolina & Clemson University.
Moschkovich, J. (2018). Talking to Learn Mathematics With Understanding. Supporting Academic Literacy in Mathematics for English Learners. In: Bailey, Maher & Wilkinson (Eds), *Language, Literacy, and Learning in the STEM Disciplines How Language Counts for English Learners* (13-35). Routledge, New York.
National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All*. Reston, VA: Author.
Parrish, S. (2014.) *Number talks: Helping students build mental math and computation strategies.* Sausalito, CA.: Math Solutions
Secada, W. G., & De La Cruz, Y. (1996). Teaching mathematics for understanding to bilingual students. In J. L. Flores (Ed.), *Children of La Frontera: Binational efforts to serve Mexican migrant and immigrant students* (pp. 285–308). Charleston, WV: Appalachia Educational Laboratory.
Turner, E. & Celedón-Pattichis, S., (2011) Mathematical Problem Solving Among Latina/o Kindergartners: An Analysis of Opportunities to Learn, *Journal of Latinos and Education*, 10:2, 146-169, DOI: 10.1080/15348431.2011.556524
Turner, E., Dominguez, H., Maldonado, L. & Empson, S. (2013). English Learners' Participation in Mathematical Discussion: Shifting Positionings and Dynamic Identities. *Journal for Research in Mathematics Education*, (44)1, 199-234