RELACIONES DINÁMICAS ENTRE CONVENCIMIENTO Y COMPRENSIÓN EN LA CONSTRUCCIÓN DE SUSTENTOS

DYNAMIC RELATIONS BETWEEN CONVINCEMENT AND COMPREHENSION IN THE CONSTRUCTION OF GROUNDS

Benjamín Martínez Navarro
Cinvestav, México
benjaminmartinezn@gmail.com

Mirela Rigo Lemini
Cinvestav, México
mrigolemini@gmail.com

En trabajos anteriores los autores de este escrito identificaron relaciones puntuales entre comprensión y convencimiento. Con base en la Teoría Fundada, en la investigación actual se analizan los cambios que se dan en dichas relaciones como respuesta a condiciones cambiantes. Para su estudio se analiza una interacción, a distancia, entre un tutor y una estudiante. En un primer nivel se realiza un microanálisis -acudiendo al Modelo de Toulmin- en el cual se describen e interpretan las relaciones entre comprensión y convencimiento que ahí surgieron. Desde una perspectiva más general, en un segundo nivel se adelantan explicaciones sobre esas relaciones y sus cambios. Al final se sugieren propuestas para la práctica educativa.

Palabras clave: Razonamientos y Demostraciones, Trayectorias de Aprendizaje

Antecedentes y Objetivos

En investigaciones diversas se ha destacado el peso que durante los procesos didácticos tienen el convencimiento y la seguridad en los hechos de las matemáticas que vivencian los agentes de clase. Por ejemplo, Krummehuer (1995) resaltó el convencimiento asociado a los soportes de los argumentos, para cuyo análisis utilizó el Modelo de Toulmin; despunta en su aplicación la omisión de los calificadores modales Q, ausencia que señalaron Inglis, Mejia-Ramos, and Simpson (2007). Estos autores sostienen que uno de los objetivos de la instrucción debe ser el desarrollo de habilidades de los estudiantes para igualar "adecuadamente" tipos de garantías con calificadores modales Q (p.3). Acorde con esa perspectiva, en un análisis puntual de los estados de confianza de los estudiantes, Foster (2016) sugiere que un alumno 'bien calibrado' en un tema es aquel que confía en sus respuestas correctas y duda de las que no lo son. A diferencia de esos reportes, el presente documento –que se orienta de acuerdo a la metodología de la teoría fundada y sigue la idea de que los argumentos se desarrollan en el marco de interacciones sociales que se dan en el aula (Krummheuer, 1995)- identifica y adelanta algunas explicaciones sobre fenómenos dinámicos e integrales del salón de clases de matemáticas; específicamente, se busca conocer ¿Cuáles son los posibles cambios que durante el proceso de construcción de argumentos en el aula de matemáticas se dan en las relaciones entre el convencimiento en torno a resultados de esa disciplina, y su comprensión? así como ¿Cuáles son las posibles razones de la presencia de distintas relaciones durante ese proceso?

Marco Teórico

Para analizar las participaciones de los estudiantes se recurrió al Modelo de Toulmin (Toulmin, Rieke, & Janik, 1984). En este modelo, un argumento está compuesto por una afirmación (C), datos (D), garantías (W), un soporte (B), y calificadores (Q). Toulmin, Rieke, y Janik (1984) consideran que Q consiste en "el grado de confianza que puede ser adjudicado a las conclusiones dados los argumentos disponibles para apoyarlas" (p. 85, 1984). En esa interpretación de Q se supone implícitamente un sujeto experto que califica. A diferencia, en el presente escrito se acepta explícitamente que es el sujeto que argumenta el que califica la fuerza de los componentes del argumento, y se considera que ese sujeto (que participa en un foro virtual) vivencia un estado de

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.

convencimiento, o bien de presunción o duda en un enunciado matemático -los que Rigo (2013) denomina “estados epistémicos de convencimiento”-, cuando cumple con alguno(s) de los criterios que aparecen en la Tabla 1 (Martínez & Rigo, 2014).

Tabla 1: Instrumento Teórico-Metodológico para Distinguir Estados Epistémicos

Elementos del habla	La persona recurre a enfatizadores del lenguaje que pueden revelar un mayor grado de compromiso con la verdad de lo que dice, por ejemplo, cuando la persona usa el modo indicativo de los verbos (e.g. “es”).
Acción	El sujeto realiza acciones consecuentes con su discurso.
Determinación	La persona manifiesta de manera espontánea y determinada su adhesión a la veracidad de un enunciado matemático
Interés	Las participaciones de una persona que interviene con interés en torno a un hecho matemático específico en un foro virtual son: *sistemáticas* (es decir, el sujeto contesta todas las preguntas dirigidas a él de la manera más detallada posible), *informativas* (sus afirmaciones, procedimientos y/o resultados son suficientemente informativos), *claras y precisas*.
Consistencia	La persona muestra consistencia en sus distintas intervenciones.

El contenido matemático de los fragmentos elegidos para este estudio es el de la resolución de ecuaciones lineales. En este escrito se considera al Modelo 3UV (Ursini, Escareño, Montes & Trigueros, 2005) como el procedimiento paradigmático escolar para encarar ese tipo de tareas. De acuerdo a ese modelo, los aspectos que indican una comprensión de la variable como incógnita específica cuando se resuelven ecuaciones lineales son: interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación como la representación de valores específicos (aspecto I1); determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando operaciones algebraicas, aritméticas o de ambos tipos (aspecto I4) y sustituir la variable por el valor o valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero (aspecto I3).

Al resolver una ecuación lineal los estudiantes pueden fundar sus argumentos en distintos marcos generales, es decir, en diferentes soportes, los cuales pueden estar conformados por constituyentes diversos. Uno de los constituyentes de los soportes se relaciona con los recursos de sustentación en los que se funda el argumento. A esos recursos Rigo (2013) les llama “esquemas epistémicos” de sustentación. Según la autora, mientras algunos sustentos se vertebran en torno a razones matemáticas, como las instanciaciones de reglas generales, otros se articulan en torno a consideraciones extra-matemáticas, como los esquemas operatorios que se activan cuando se introduce una regla sin justificación, basada posiblemente en la autoridad que se le otorga a las matemáticas. Por tanto, se pueden presentar soportes matemáticos y soportes extra-matemáticos para los argumentos. Otro de los constituyentes hace referencia al carácter aritmético o algebraico del argumento. En este escrito se sugiere (cf. Martínez y Pedemonte, 2014) que la resolución de una ecuación se basa en el álgebra cuando el sistema de referencia en los datos contiene literales, y el “núcleo del argumento” (i.e., sus D y su C) presenta una estructura de tipo deductivo, la que es posible explicitar a través de las garantías, ya que éstas descubren la estructura que articula el argumento. Se dirá que una resolución se soporta en la aritmética cuando el sistema de referencia en los datos se da por ensayo y error numérico, y el núcleo del argumento presenta una estructura inductiva. Otro indicador para determinar si el soporte contiene constituyentes aritméticos o algebraicos está relacionado con los elementos conceptuales que el alumno pone en juego cuando realiza el aspecto I3. I3 presupone el desarrollo, aunque sea sólo de manera intuitiva y tácita, del siguiente argumento: a) Considerar en la ecuación $ax+b=0$ un valor específico para x, i.e., que $x=r$, $r \in \mathbb{R}$; b) Instanciar en la ecuación, i.e., $a(r)+b=0$; c) Realizar operaciones aritméticas; d) Derivar

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.

(eventualmente) una tautología aritmética: m=m; e) Desprender de d) que a) es una suposición correcta (de otro modo no se derivaría de ella una tautología), y que a(r)+b=0 es una proposición verdadera, esto es, que r hace verdadera a la proposición ax+b=0 (la cual es abierta, ya que carece de un valor de verdad), y que por tanto, r es una solución para dicha ecuación. Cuando el alumno procesa I3 con la conciencia de lo que significa que un valor específico $r \in \mathbb{R}$ "satisface una ecuación y resuelve el problema" (Ursini et al., 2005, p. 27), esto es, cuando tiene algunas intuiciones relacionadas con los pasos a) al e) del argumento antes expuesto, en este documento se considera que I3 coadyuva a su comprensión de la variable y que el soporte de su argumento contiene un constituyente algebraico. Cuando I3 queda sólo como un argumento incomprensible y rutinario para el estudiante que va sólo del paso a) al d) y él lo aplica solamente con el propósito de verificar ("en la aritmética", terreno seguro para el alumno) si los valores obtenidos son correctos, en este documento se considera que ese aspecto I3 coadyuva poco a la comprensión de la variable y que el soporte de su argumento incluye constituyentes aritméticos.

Metodología y Técnicas De Recuperación de la Información

Este escrito forma parte de un trabajo más amplio, inspirado en los procedimientos de la teoría fundada (Corbin & Strauss, 2015), cuyo objetivo es describir y construir explicaciones teóricas de fenómenos relacionados con los estados epistémicos que se dan en el salón de clases de matemáticas. El estudio se llevó a cabo en un diplomado -a distancia- cuyo propósito es fortalecer la formación de asesores que enseñan álgebra a adultos. Los datos que se usaron para el estudio quedaron registrados en la plataforma Moodle para su posterior análisis y forman parte de la interacción que un tutor mantuvo con sus estudiantes (en particular, con Belarmina). El tutor, quien propuso y guió las actividades, es uno de los autores de este trabajo. En trabajos anteriores, los autores identificaron relaciones puntuales entre comprensión y convencimiento. El trabajo actual está orientado por el "principio de cambio" de la teoría fundada, según el cual, los fenómenos se conciben como continuamente cambiantes. De modo que, a diferencia de otros estudios, las relaciones entre comprensión y convencimiento se consideran como parte de un proceso dinámico en el que dichas relaciones pueden modificarse en respuesta a condiciones cambiantes. Para analizar dichos cambios en las relaciones, se eligió una pieza de una interacción entre el tutor y Belarmina. El análisis se divide en dos apartados según el nivel de profundidad. Considerando los contextos de interacción, un primer nivel está dirigido a un micro análisis de las relaciones que se dieron entre los estados epistémicos del sujeto (Q) y su nivel de comprensión, al amparo de un soporte (B) específico. Para este análisis, la interacción se separó en fragmentos (distinguidos con un numeral) y se organizó en argumentos conforme al Modelo de Toulmin. En un segundo nivel, las relaciones entre comprensión y convencimiento se concentraron en tablas de análisis con el fin de obtener una perspectiva general del cambio de dichas relaciones a lo largo de la interacción. Para ofrecer explicaciones de las complejas relaciones entre comprensión y convencimiento, se tomó en cuenta el contexto en el que éstas surgieron y el principio de la teoría fundada, según el cual, los actores son capaces de tomar decisiones precisas de acuerdo a las opciones de que disponen.

Análisis de Resultados. Primer Nivel de Análisis: Descripción e Interpretación

1a Participación de Belarmina: Expresión de una Tendencia Algebraica y Operatoria

A manera de diagnóstico, el tutor propuso resolver a los estudiantes: Rosa tiene una balanza en equilibrio, de un lado una pesa de 5 kg y del otro una pesa de 2kg y un bulto de fierro. ¿Cómo puede hacer para saber el peso del fierro? En la Figura 1 se muestra la respuesta de Belarmina.

<table>
<tr><td>1.1</td><td>5=2+x donde x es el bulto de fierro</td><td rowspan="2">D1. a: 5=2+x donde x es el bulto de fierro; b: x=5-2 → C1. 3kg
W1. a: La solución de la ecuación esta al lado derecho del signo igual (I1); b: Trasposición de términos (I4)
B1. a: Esquemas operatorios y álgebra (I1); b: Esquemas operatorios y álgebra (I4)</td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>entonces x=5-2=3kg.</td></tr>
</table>

Figura 1. Análisis de la 1ª participación de Belarmina. Argumento 1.

En su primera intervención, Belarmina experimentó seguridad en la aplicación de I1e I4, la cual se deja ver en el uso del enfatizador “es” en 1.1, al actuar con base en las expresiones que derivó y mostrar determinación por publicar su respuesta. La aplicación de I1 e I4 la hizo conforme a esquemas operatorios (que se revelan por el carácter implícito de las reglas que enunció) y a una perspectiva algebraica, que se refleja a través de la estructura deductiva y el sistema de referencia algebraico en los datos.

Intervención del Tutor: Cuestionamiento del Soporte

2.2	Una vez planteada la ecuación acostumbramos usar “trasposición de términos”, pero ¿por qué funciona? Para averiguarlo realicemos la siguiente actividad.
2.3	Da clic en el interactivo, arma la ecuación en la balanza y llega a la solución. Describe paso por paso cómo llegaste a la solución. Por ejemplo: -2x-4=4x-4; Para dejar sola a la x realizo lo siguiente: 1.-Sumo a ambos miembros 4. La ecuación nos queda: -2x=4x; 2.- Sumo a los dos miembros 2x. La ecuación nos queda: 0=6x; 3.- Divido a los dos miembros entre 6. La ecuación nos queda: 0=x. La solución es 0.

Como respuesta a Belarmina, el tutor cuestionó (v. 2.2) el constituyente operatorio sobre el cual la estudiante apoyó I4 (v. B1b). En la Figura 2 aparece lo que la alumna respondió.

2a Participación de Belarmina: Seguridad en el Sustento Algebraico y Operatorio

<table>
<tr><td>3.1</td><td>Para dejar sola a la x en: -4x-4=8x-4</td><td rowspan="5">D2. a: -4x-4=8x-4; b: sumo a ambos miembros 4; c: -4x=8x; d: sumo a los dos miembros 4x; e: 0=12x; f: divido a los dos miembros entre 12; g: 0=x → C2. La solución es x!!!
W2. b-f: Determinar el valor de la literal con las propiedades de la igualdad (I4); g: La solución de la ecuación se encuentra a la derecha del signo igual (I1)
B2. b-f: Álgebra y razones matemáticas (I4); g: Álgebra y esquemas operatorios (I1)</td></tr>
<tr><td>3.2-3.3</td><td>Sumo a ambos miembros 4. La ecuación nos queda: -4x=8x</td></tr>
<tr><td>3.4-3.5</td><td>Sumo a los dos miembros 4x. La ecuación nos queda: 0=12x</td></tr>
<tr><td>3.6-3.7</td><td>Divido a los dos miembros entre 12. La ecuación nos queda: 0=x</td></tr>
<tr><td>3.8</td><td>La solución es x!!!</td></tr>
</table>

Figura 2. Análisis de la segunda participación de Belarmina. Argumento 2.

Belarmina desarrolló I4 con base en las reglas promovidas por el tutor (v. W2b-f), y apoyada en un soporte algebraico y matemático (v. B2b-f), extendiendo su comprensión en este aspecto. Pero nuevamente, la alumna también afianzó su argumento en esquemas operatorios (B2g) cuando en el paso de D2g a C2 dio una interpretación incorrecta del signo igual (v. W2g) que la llevó a contravenir I1. Sobre la aplicación de W2g (relacionada con I1) e I4, Belarmina experimentó seguridad que mostró con el uso de enfatizadores (!!!), al actuar siguiendo las reglas que enunció y al mostrar determinación e interés por publicarlas. Como respuesta, el tutor cuestionó el uso implícito de la garantía W2g relacionada con I1: 1. ¿Qué entiendes por la solución de una ecuación? 2. ¿La solución de una ecuación puede expresarse con literales? ¿Por qué? En la Figura 3 se analizan las respuestas dadas por Belarmina.

3a Participación de Belarmina: Duda Asociada a la Aparición de Razones Matemáticas

4.1	1.- [La solución es] Encontrar el valor que al sustituirlo en la ecuación por la incógnita permita llegar a una igualdad	**D3.** La solución es encontrar el valor que al sustituirlo en la ecuación por la incógnita permita llegar a una igualdad (I3) → **C3.** La solución de una ecuación no se puede expresar con literales (I1)
4.2	2.- Tutor, tengo duda en esta pregunta pero checando la pregunta de arriba entonces no se puede expresar con literales porque vamos a encontrar su valor. Corríjeme.	**W3.** Si la solución de una ecuación es el valor de la literal entonces la solución no se puede expresar con literales (I1) **B3.** Razones matemáticas y álgebra

Figura 3. Análisis de la tercera participación de Belarmina. Argumento 3.

En su participación, Belarmina parafraseó con seguridad I3 (ver en 4.1 el uso indicativo de los verbos y el empleo de I3 para derivar otra regla) en su versión aritmética, lo cual hizo conforme a esquemas operatorios y aritméticos. De esta versión escolar de I3, la estudiante dedujo con duda (ver 4.2) una conclusión C3 acorde con I1, conforme a una garantía soportada en razones matemáticas y algebraicas, ayudando a su comprensión de I1. Con el fin de que la estudiante aplicara las proposiciones que enunció, el tutor preguntó: 1.- ¿Cuál es el valor de la incógnita?; 2.- ¿Cómo comprobamos que ese valor es solución de la ecuación? En la Figura 4 se analizan las respuestas de Belarmina.

4a Participación de Belarmina: Duda al Aplicar una Nueva Garantía en los Datos

5.1	1.- [El valor de la incógnita] sería 0	**D4.** a: D2g y C3; b: Sustituimos el valor en la ecuación; c: -4x-4=8x-4; d: -4(0)-4=8(0)-4; e: -0-4=0-4; f: -4=-4; g: Existe igualdad → **C4.** Sería 0
5.2	2.- Espero y estar bien, si no, me corrigen. [Para comprobar] lo sustituimos en la ecuación	
5.3	-4x-4=8x-4; -4(0)-4=8(0)-4; -0-4=0-4; -4=-4	**W4.** a: W3 (I1); b-g: Versión aritmética de I3 (I3)
5.4	Existe una igualdad en ambos lados	**B4.** a: Razones matemáticas y álgebra (I1); b-g: Razones operatorias y aritmética (I3)

Figura 4. Análisis de la cuarta participación de Belarmina. Argumento 4.

En 5.1, Belarmina aplicó C3, relacionado con I1, con cierta inseguridad (ver el uso del mitigador "sería") que en su participación anterior soportó en razones matemáticas y bajo una perspectiva algebraica. En 5.3 la estudiante aplicó D3, relacionado con I3, bajo esquemas operatorios y aritméticos y lo hizo con duda (ver 5.2). A continuación, el tutor solicitó resolver: Bety tuvo que cobrar \$178 de un billete de \$200. Ella le preguntó al cliente si traía cambio y él le dijo que traía \$3. Ella aceptó. ¿Cuánto tiene que regresar? Esta tarea, similar a la que Belarmina enfrentó en su primera participación, la planteó el tutor para identificar cambios que se dieron en su resolución después de la interacción. En la Figura 5 se analiza la respuesta de Belarmina.

5a Participación de Belarmina: Seguridad en un Soporte Algebraico

4.1	procedemos a despejar la incógnita;	**D5.** a: 200+3=178+x; b: 203=178+x; c: 203-178=178-178+x → **C5.** x=25
4.2	200+3=178+x;	
4.3	203=178+x; 203 -178=178-178+x;	**W5.** a: Interpretar la variable como un valor específico (I1);b-c:Determinar la literal con las propiedades de la igualdad (I4)
4.4	x=25 que es el cambio que tiene que regresar Bety	**B5.** a: Razones matemáticas y álgebra (I1); b-c: Razones matemáticas y álgebra (I4)

Figura 5. Análisis de la quinta participación de Belarmina. Argumento 5.

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.

Belarmina aplicó I1 (aún cuando D5c pudo activar W2g) e I4 (esta vez con las propiedades de la igualdad), aspectos que previamente re-construyó con el tutor bajo un soporte matemático. Como en los casos precedentes, ella los administró con seguridad, estado que dejó ver mediante el uso de enfatizadores ("procedemos", "es"), de acciones congruentes con lo que enunció y la determinación e interés que exhibió al publicar su respuesta. Sin embargo, la estudiante dejó de aplicar I3, la cual construyó y empleó en sus contribuciones precedentes (v. D3 y D4). Así que el tutor cuestionó su solución C5: ¿Cómo podemos comprobar que el valor que obtuviste para la incógnita es solución de la ecuación? La respuesta a esta pregunta se expone en la Figura 6.

6a Participación: Seguridad al Aplicar una Nueva Regla

5.1	Sustituyendo lo que vale x, que en este caso es 25, en la ecuación 200+3=178+x	**D6.** a: 200+3=178+x; 200+3=178+25; 203=203 → **C6.** x=25
5.2	200+3=178+25; 203=203	**W6.** a: Si al sustituir un valor en una ecuación existe una igualdad, entonces ese valor es solución de la ecuación
5.3	de esta manera podemos comprobar que es correcto porque en ambos lados es la misma cantidad.	**B6.** a: Esquemas operatorios y Aritmética

Figura 6. Análisis de la sexta participación de Belarmina. Argumento 6.

En esta participación, Belarmina parafraseó tácitamente la versión aritmética de I3 y la aplicó en D6 bajo esquemas operatorios y aritméticos. En esta ocasión, ella mostró seguridad en esa versión de I3, al utilizar enfatizadores (e.g. "es") cuando la enunció, actuar conforme a ella (en 5.1 y 5.2) y mostrar determinación e interés por explicitarla. Enseguida, el tutor le pidió resolver:-4x-16=9x+1. En la Figura 7 aparece lo que la alumna respondió.

7a Participación: Omisión de un Procedimiento Aritmético

6.1	Tutor, esta es mi respuesta	**D7.** a: -4x-16=9x+1; b: -4x-16+16=9x+16+1; c: -4x=9x+17; d: -4x-9x=9x-9x+17; e: 13x=17 → **C7.** X=17/13
6.2	Ecuación: -4x-16=9x+1	
6.3	-4x-16+16=9x+16+1 (propiedad usada suma); -4x=9x+17; -4x-9x=9x-9x+17 (propiedad usada resta); 13x=17 (propiedad usada división)	**W7**. a: Interpretar la variable como un valor específico (I1); b-e: Determinar la literal con las propiedades de la igualdad (I4)
6.4	X=17/13	**B7**. a: Razones matemáticas y Álgebra (I1) b-e: Razones matemáticas y Álgebra (I4)

Figura 7. Análisis de la séptima participación de Belarmina. Argumento 7.

Para resolver la ecuación, Belarmina activó los aspectos I1 e I4 siguiendo con puntualidad el procedimiento sustentado algebraicamente que construyó con el tutor. Como en las ocasiones previas, asociado a este esquema la estudiante pareció experimentar convencimiento; se ve al usar el indicativo de los verbos cuando presentó su respuesta ("esta es"), actuar conforme a las reglas que enunció y mostrar determinación e interés por publicar y explicar su respuesta. Pero nuevamente, ella dejó de aplicar I3, por las (posibles) razones que se exponen en lo que sigue.

Análisis de resultados. Segundo nivel: explicaciones plausibles

Se exponen algunas explicaciones viables sobre las complejas relaciones entre los estados epistémicos y la comprensión que pueden surgir en los procesos de desarrollo de argumentos y en los de cambios y conformación de sus respectivos soportes (v. trayectorias Tabla 2, 3, 4).

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.

Tabla 2: Dinámica de Relaciones Entre Estados Epistémicos, Comprensión y Soporte de I4

Participación / Categoría	Primera	Segunda	Tercera	Cuarta	Quinta	Sexta	Séptima
Calificador	Seguridad	Seguridad	No aplica	No aplica	Seguridad	No aplica	Seguridad
Comprensión	Acorde	Acorde	No aplica	No aplica	Acorde	No aplica	Acorde
Soporte	Operatorio	Matemática	No aplica	No aplica	Matemática	No aplica	Matemática
	Álgebra	Álgebra	No aplica	No aplica	Álgebra	No aplica	Álgebra

Tabla 3: Dinámica de Relaciones Entre Estados Epistémicos, Comprensión y Soporte de I1

Participación / Categoría	Primera	Segunda	Tercera	Cuarta	Quinta	Sexta	Séptima
Calificador	Seguridad	Seguridad	Duda	Duda	Seguridad	No aplica	Seguridad
Comprensión	Acorde	Discorde	Acorde	Acorde	Acorde	No aplica	Acorde
Soporte	Operatorio	Operatorio	Matemática	Matemática	Matemática	No aplica	Matemática
	Álgebra	Álgebra	Álgebra	Álgebra	Álgebra	No aplica	Álgebra

Tabla 4: Dinámica de Relaciones Entre Estados Epistémicos, Comprensión y Soporte de I3

Participación / Categoría	Primera	Segunda	Tercera	Cuarta	Quinta	Sexta	Séptima
Calificador	No aparece	No aparece	Seguridad	Duda	No aparece	Seguridad	No aparece
Comprensión	No aparece	No aparece	Acorde	Acorde	No aparece	Acorde	No aparece
Soporte	No aparece	No aparece	Operatorio	Operatorio	No aparece	Operatorio	No aparece
	No aparece	No aparece	Aritmética	Aritmética	No aparece	Aritmética	No aparece

En la Tabla 2, se observa que el estado de seguridad vivenciado por Belarmina cuando aplicó reglas relacionadas con I4 permaneció sin alteraciones, aún cuando en la segunda intervención la estudiante cambió el constituyente operatorio del soporte a uno matemático al introducir nuevas reglas matemáticas (W2b-f). Esto revela la prontitud con la que la estudiante asimiló garantías relativas a I4 y que un aumento de comprensión puede ir acompañado de seguridad. Pero como se verá en lo siguiente esta asociación no siempre es inmediata.

Con respecto a I1 (Tabla 3), en su primera participación Belarmina experimentó seguridad cuando aplicó una regla según la cual la solución está a la derecha del signo igual (W1a) apoyada en un esquema operatorio que, en conjunción con la trasposición de términos, la llevó a obtener una respuesta acorde con I1. Con las propiedades de la igualdad que ella utilizó en su segunda intervención (W2b-f), dejó de trasponer términos, pero mantuvo su seguridad en torno a la regla W1a y la aplicó, lo que la condujo a trasgredir I1; esto puede explicar cómo es que la estudiante asoció seguridad a una proposición incorrecta. Los cuestionamientos del tutor a W1a, condujeron a la estudiante en su tercera participación a explicitar reglas (W3) acordes con I1 bajo esquemas matemáticos, ayudando a su comprensión. Sin embargo, aquí Belarmina dudó. Lo anterior desvela que un incremento de la comprensión no va necesariamente aparejado de un fomento en la seguridad, porque lo primero supone reacomodos cognitivos que suelen propiciar estados de inseguridad. Dicha inseguridad continuó en su cuarta intervención; no obstante, en la quinta y séptima, Belarmina prefirió esa garantía W3 (por sobre W1a) y le asoció seguridad.

En cuanto a I3, Belarmina parafraseó la versión operatoria y aritmética en su tercera participación pero sólo la aplicó cuando se lo solicitó el tutor, primero con duda y luego con seguridad. Se esperaría que, como ocurrió con I1 e I4, ella incluyera este aspecto I3 en su séptima participación; pero nuevamente, ella lo dejó de aplicar, aún cuando antes lo había manejado con seguridad, y aún cuando le hubiese permitido detectar el error en el que ahí incurrió. La trayectoria de resoluciones de Belarmina permite suponer fundadamente que esa omisión puede obedecer a que la versión aritmética y operatoria de I3 la llevaría al terreno de la aritmética dejando relativamente a lado el del álgebra, constituyente en el que ella sustentó sus resoluciones desde el inicio. Esta consideración es consistente con la respuesta que dio Belarmina cuando el tutor preguntó por su seguridad en torno a la solución que dio a las ecuaciones: “Yo me sentí segura de mis respuestas. En este caso seguimos los pasos para solucionar una ecuación donde buscamos la incógnita y utilizamos las propiedades de suma, resta, multiplicación y división." A diferencia de Belarmina, otras estudiantes como Jeymi asociaron su seguridad a la comprobación (I3, versión aritmética); ella así se expresó: "Muy segura porque en la comprobación me resulta la igualdad". Basar la seguridad en un proceso aritmético, en lugar de asociarla a procesos algebraicos, se puede explicar porque, como apuntan Martínez y Pedemonte (2014), los estudiantes utilizan la aritmética para entender el álgebra.

Consideraciones finales: sugerencias para la práctica didáctica

Con base en el marco teórico-interpretativo, siguiendo los principios metodológicos de la teoría fundada y mediante un estudio de caso, en los dos niveles de análisis aquí expuestos se describen e interpretan pero también se explican distintos procesos que puede desarrollar un profesor para que el alumno, durante la dinámica de ese proceso, llegue a adquirir seguridad de un conocimiento bien fundamentado (v. la idea de estado 'bien calibrado' de Foster, 2016). En esos procesos puede aparejarse, por ejemplo, un aumento de comprensión con duda, porque lo primero significa reacomodos cognitivos ante cuestionamientos o contradicciones que suelen propiciar estados de inseguridad. Asimismo, una disminución de la comprensión puede asociarse a seguridad porque las relaciones entre la seguridad y razones extra-matemáticas pueden mantenerse a falta de razones matemáticas. La diversidad de relaciones que surgen entre comprensión y convencimiento son parte de la construcción natural del conocimiento en condiciones ordinarias, y son relevantes porque pueden orientar las intervenciones del profesor: la seguridad de un estudiante coligada a incomprensión, por ejemplo, puede requerir el cuestionamiento del soporte, la construcción de nuevas garantías y su aplicación; la inseguridad aunada a la comprensión de una garantía, por otro lado, puede requerir de su aplicación en diferentes contextos. Adicionalmente, sería deseable que el profesor considerara que los procesos de conformación de un soporte y la seguridad hermanada parece ser un fenómeno local: respecto a un tema, respecto a un constituyente del soporte y también, respecto a la formulación y aplicación de una determinada garantía. Esto es significativo porque alerta sobre el hecho de que los cambios en un aspecto puntual pueden no extenderse de manera automática a otros.

In previous publications the authors of this paper identified specific relations between comprehension and convincement. On the basis of Grounded Theory, this research analyzes the changes that arise in said relations as a response to changing conditions. For their study, the authors analyze an interaction, at a distance, between a tutor and a student. At an initial level, a micro-analysis is undertaken -resorting to the Toulmin Model- which describes and interprets the relations that arise there between comprehension and convincement. From a more general standpoint, at a second level the authors contribute explanations concerning those relations and their changes. Finally, the authors suggest proposals for educational practice.

Keywords: Reasoning and Proof, Learning Trajectories (or Progressions)

Background and Objectives

Sundry research papers have underscored the importance of convincement and confidence of the mathematics facts within the didactic processes that are experienced by classroom agents. For instance, Krummehuer (1995) highlighted the convincement associated with the backings of arguments, and for his analysis he used the Toulmin Model. Of note in his application was his omission of the Q mode qualifiers, and this absence was noted by Inglis, Mejia-Ramos, and Simpson (2007). The latter authors maintain that one of the objectives of learning should be development of students' abilities to "adequately" equate types of warrants with Q mode qualifiers (pg. 3). According to that standpoint, in an analysis of the states of student confidence, Foster (2016) suggests that a student that is "well-calibrated" in a topic is a student that has confidence in his/her correct answers and has doubts concerning incorrect answers. Unlike those reports, this paper -aligned with the Grounded Theory methodology and following the idea that arguments are developed within the framework of social interactions that arise in the classroom (Krummheuer, 1995)- identifies and puts forward several explanations concerning dynamic and integral mathematics classroom phenomena. Specifically, the paper seeks to know what the possible changes are that arise in the relations between convincement of mathematics results and understanding thereof during the process of building arguments in the mathematics classroom. It further seeks to know what the possible reasons are for the presence of different relations during said process.

Theoretical Framework

The authors used the Toulmin Model (Toulmin, Rieke, & Janik, 1984) in order to analyze student participations. In that model, arguments are made up of a claim (C), data (D), warrants (W), a backing (B) and qualifiers (Q). Toulmin, Rieke, and Janik (1984) consider that Q consists of "the degree of confidence that can be assigned to the conclusions given the arguments available to support them" (p. 85, 1984). That interpretation of Q implicitly assumes the existence of an expert subject that qualifies. Unlike the foregoing, this paper explicitly accepts that it is the subject that expresses the argument that qualifies the strength of the argument's components, and the authors contend that said subject (who participates in a virtual forum) experiences a state of convincement or of presumption or of doubt concerning a mathematics statement -which Rigo (2013) calls "epistemic states of convincement"-, when it meets some of the criteria that are included in Table 1 (Martínez & Rigo, 2014).

Table 1: Theoretico-Methodological Instrument for Differentiating Epistemic States

Elements of Speech	The person resorts to language emphasizers that can reveal a degree of commitment to the truth with what s/he states. For example, when the person uses the indicative mode of verbs (e.g. "is").
Action	The subject carries out actions that are consistent with his/her discourse.
Determination	The person spontaneously and determinedly expresses her/his adherence to the veracity of a mathematics statement.
Interest	The participations of a person who takes part with interest in a specific mathematics fact in a virtual forum are *systematic* (that is, the subject answers all of the questions posed of him in the most detailed manner possible), *informative* (his claims, procedures and/or results are sufficiently informative), *clear* and *precise*.
Consistency	The person's different interventions are consistent.

The mathematics content of the fragments chosen for this study is the solution of linear equations. Model 3UV (Ursini, Escareño, Montes & Trigueros, 2005) is used in this paper as the school paradigmatic procedure to face this type of tasks. According to said model, the following are the aspects that are indicative of an understanding of the variable as a specific unknown when linear equations are solved: interpreting the symbolic variable that appears in an equation as the representation of specific values (aspect I1); determining the unknown amount that appears in equations or problems, by performing algebraic, arithmetic or both types of operations (aspect I4); and substituting the variable for the value or values that make the equation a true statement (aspect I3).

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.

Upon solving a linear equation, students can base their arguments on varying general frameworks. That is, they can base them on different backings that can be made up of different constituents. One of the constituents of the backings is related to the sustentation resources upon which the argument is founded. Rigo (2013) calls those resources "epistemic schemes" of sustentation. According to the author, while some grounds are supported by mathematical reasons, such as instantiations of general rules, others are articulated with respect to extra-mathematical considerations, such as the operational schemes that are activated when an unjustified rule is introduced, possibly based on the authority afforded to mathematics. Consequently, mathematical and extra-mathematical backings can be presented for arguments. Another of the constituents refers to the arithmetic or algebraic nature of the argument. In this text, the authors suggest (cf. Martínez & Pedemonte, 2014) that the resolution of an equation is algebra-based when the system of reference of the data contains literal numbers, and the "core of the argument" (i.e., its D and C) presents a deductive-type structure, which may be made explicit by way of warrants because said warrants uncover the structure that articulates the argument. A resolution will be said to be backed by arithmetics when the system of reference in the data arises by numerical trial and error, and the core of the argument presents an inductive structure. Another indicator for determining whether the backing contains arithmetic or algebraic constituents is related to the conceptual elements that the student brings into play when she performs aspect I3. I3 assumes development, even if only intuitive and tacit, of the following argument: a) In equation $ax+b=0$, considering a specific value for x, i.e. that $x=r$, $r \in \mathbb{R}$; b) Instantiating in the equation, i.e. $a(r)+b=0$; c) Carrying out arithmetic operations; d) (Eventually) Deriving an arithmetic tautology: $m=m$; e) Inferring from d) that a) is a correct assumption (otherwise a tautology could not be inferred from it), and that $a(r)+b=0$ is a true proposition, that is that r makes the proposition $ax+b=0$ (which is open, since it lacks a value of truth) true, and that r is consequently a solution for said equation. When the student processes I3 with the awareness of what it means for a specific value of r to $\in \mathbb{R}$ "satisfies an equation and solves the problem" (Ursini et al., 2005, p. 27), that is, when the student has a few intuitions related to steps a) to e) of the afore-mentioned argument, the authors of this paper deem that I3 aids the student's comprehension of the variable and that the backing of his/her argument contains an algebraic constituent. When I3 is left simply as an incomprehensible and routine argument for the student going from step a) to d) and the student only applies it in order to verify ("in arithmetic", safe ground for the student) whether the values obtained are correct, in this paper the authors deem that that aspect of I3 is of little help to comprehension of the variable and that the backing of the argument includes arithmetic constituents.

Methodology and Information Recovery Techniques

This paper is part of a broader work, inspired by the procedures of Grounded Theory (Corbin & Strauss, 2015), which objective is to describe and construct theoretical explanations for phenomena related to the epistemic states that arise in the mathematics classroom. The study was carried out during a distance learning, certificate program whose purpose is to strengthen the training of consultants who teach algebra to adults. The data used for the study were registered on the Moodle platform for subsequent analysis, and they are part of the interaction of one tutor with his students (in particular with Belarmina). The instructor, who proposed and guided the activities, is one of the authors of this paper. In previous works, specific relations between comprehension and convincement were identified. This paper is guided by the "principle of change" of Grounded Theory, according to which the phenomena are understood to be continuously changing. Hence, unlike other studies, the relations between comprehension and convincement are deemed to be part of a dynamic process in which said relations can shift as a response to changing conditions. A segment of one interaction between the tutor and Belarmina was chosen in order to analyze those relational changes. The analysis is divided into two sections according to the level of depth. Given the interaction contexts, a first level aims at a microanalysis of the relations that arose among the epistemic states of the subject (Q) and her level of comprehension, under the cover of a specific backing (B). For this analysis, the interaction was separated into fragments (identified using number) and it was organized into arguments pursuant to the Toulmin Model. At a second level, the relations between comprehension and convincement were concentrated into tables of analysis so as to obtain a general perspective of the change in those relations throughout the interaction. In order to put forward explanations of the complex relations between comprehension and convincement, the authors took into account the context in which they arose and the Grounded Theory principle, according to which the actors are able to make precise decisions in line with the options available to them.

Analysis of Findings. First Level of Analysis: Description and Interpretation.

Belarmina's First Participation: Expression of an Algebraic and Operational Tendency

For purposes of diagnosis, the instructor proposed that the students resolve the following: Rosa has a balanced scale; on one side is a 5 kilo weight, and on the other there is a 2 kilo weight and a bundle of iron. What can she do to find out how much the iron weighs? Figure 1 depicts Belarmina's answer.

1.1	5=2+x where x is the bundle of iron	**D1.** a: 5=2+x where x is the bundle of iron; b: x=5-2	**C1.** 3kg
1.2	so x=5-2=3kg.	**W1.** a: The solution to the equation is on the right hand side of the equal sign (I1); b: Transposition of terms (I4) **B1.** a: Operational schemes and algebra (I1); b: Operational schemes and algebra (I4)	

Figure 1. Analysis of Belarmina's first participation. Argument 1.

In her first intervention, Belarmina experienced security in her application of I1 and I4, which can be seen in her use of the emphasizer "is" in 1.1, by acting on the basis of the expressions that she derived and showing determination to announce her answer. She applied I1 and I4 according to operational schemes (revealed by the implicit nature of the rules that she enunciated) and to an algebraic perspective, reflected by way of the deductive structure and the algebraic reference system in the data.

Instructor Intervention: Questioning the Backing

2.2	Once the equation has been raised, we generally use "transposition of terms". But why does it work? To find out, let's do the following activity.
2.3	Click interactive, compose the equation on the scale and arrive at the solution. Give a step-by-step description of how you reached the solution. For example: -2x-4=4x-4; I do the following to have the x stand alone: 1. I add 4 on each side. The equation is then: -2x=4x; 2. I add 2x to both sides. The equation is then: 0=6x; 3. I divide both sides by 6. The equation is then: 0=x. The solution is 0.

To answer Belarmina, the tutor questioned (see 2.2) the operational constituent that the student used to support I4 (see B1b). Figure 2 contains the student's answers.

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.

Belarmina's Second Participation: Confidence in the Algebraic and Operational Grounds

3.1	To have the x standing alone in $-4x-4=8x-4$	**D.2** a: $-4x-4=8x-4$; b: I add 4 to each side; c: $-4x=8x$; d. I add 4x to each side; e: $0=12x$; f: I divide both sides by 12; g: $0=x$ → **C2.** The solution is x!!! **W2.** b-f: Determine the value of the literal number with the properties of the equality (I4); g: The solution to the equation is on the right hand side of the equal sign (I1) **B2.** b-f: Mathematics reasons and algebra (I4);g: Operational schemes and algebra (I1)
3.2-3.3	I add 4 on each side. The equation is then: $-4x=8x$	
3.4-3.5	I add 4x to both sides. The equation is then: $0=12x$	
3.6-3.7	I divide both sides by 12. The equation is then: $0=x$	
3.8	The solution is x!!!	

Figure 2. Analysis of Belarmina's second participation. Argument 2.

Belarmina developed I4 based on the rules that the tutor promoted (see W2b-f), and supported by an algebraic and mathematics backing (see B2b-f), extending her comprehension in said aspect. But yet again the student secured her argument on the basis of operational schemes (B2g), when in the step from D2g to C2 she provided an incorrect interpretation of the equal sign (see W2g) which led her to contravene I1. With respect to W2g (related to I1) and I4, Belarmina experienced security which she demonstrated by using emphasizers (!!!), by acting in adherence to the rules that she expressed and by showing determination to and interest in announcing them. In answer, the tutor questioned the implicit use of the W2g warrant related to I1, as follows: 1. What do you understand to be the solution of an equation? 2. Can the solution of an equation be expressed in literal numbers? Why? Figure 3 provides an analysis of Belarmina's answers.

Belarmina's Third Participation: Doubt Associated with the Appearance of Mathematical Reasons

4.1	1. [The solution is] To find the value that, after using it to substitute the unknown in the equation, makes it possible to arrive at an equality.	**D3.** The solution is to find the value that, after using it to substitute the unknown in the equation, makes it possible to arrive at an equality (I3). → **C3.** The solution of an equation cannot be expressed in literal numbers (I1). **W3.** If the solution of an equation is the value of the literal number, then the solution cannot be expressed in literal numbers (I1). **B3.** Mathematics reasons and algebra
4.2	2. Instructor, I am doubtful about this question, but after checking the above question then it cannot be expressed using literal numbers because we are going to find its value. Correct me.	

Figure 3. Analysis of Belarmina's third participation. Argument 3.

In her participation, Belarmina paraphrased I3 with security (see in 4.1 the indicative use of verbs and use of I3 to derive another rule) in her arithmetic version, which she did in keeping with operational and mathematics schemes. From this school version of I3, the student deduced with doubt (see 4.2) a C3 conclusion in line with I1, in keeping with a warrant backed by mathematics and algebraic reasons, helping her comprehension of I1. The tutor asked the following so as to have the student apply the propositions enunciated: 1.- What is the value of the unknown?; 2.- How can we prove that that value is the solution of the equation? Figure 4 provides an analysis of Belarmina's answers.

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.

Belarmina's Fourth Participation: She Doubts when Applying a New Warrant to the Data.

5.1	1.- [The value of the unknown] would be 0
5.2	2.- I hope to be right. If not, correct me. [To prove] we substitute it in the equation.
5.3	-4x-4=8x-4; -4(0)-4=8(0)-4; -0-4=0-4; -4=-4
5.4	Both sides are equal.

D4. a: D2g and C3; b: We substitute the value in the equation; c: -4x-4=8x-4; d: -4(0)-4=8(0)-4; e: -0-4=0-4; f: -4=-4; g: Equality exists → **C4.** It would be 0

W4. a: W3 (I1); b-g: Arithmetic version of I3 (I3)

B4. a: Mathematics reasons and algebra (I1); b-g: Operational reasons and arithmetic (I3)

Figure 4. Analysis of Belarmina's fourth participation. Argument 4.

In 5.1, Belarmina applied C3 related to I1 with a certain some insecurity (see the use of mitigator "would") which in her previous participation she backed using mathematics reasons and a certain algebraic perspective. At 5.3, the student applied D3 related to I3, under operational and arithmetic schemes and she did so with doubt (see 5.2). After that, the instructor asked that the students solve the following: Bety had to charge $178 from a $200 bill. She asked the customer if he had any change, and he told that her that he had $3. She accepted the coins. How much does she have to give him back? This task, similar to the task Belarmina faced in her first participation, was raised by the instructor in order to identify changes that had arisen in her resolution subsequent to the interaction. Figure 5 contains an analysis of Belarmina's answer.

Belarmina's Fifth Participation: Security in an Algebraic Backing

4.1	Let's isolate the unknown;
4.2	200+3=178+x; b:
4.3	203=178+x; 203 -178=178-178+x;
4.4	x=25 which is the change that Bety has to give back

D5. a: 200+3=178+x; b: 203=178+x; c: 203-178=178-178+x → **C5.** x=25

W5. a: Interpret the variable as a specific value (I1); b-c: Determine the literal number with the properties of the equality (I4)

B5. a: Mathematics reasons and algebra (I1); b-c: Mathematics reasons and algebra (I4)

Figure 5. Analysis of Belarmina's fifth participation. Argument 5.

Belarmina applied I1 (even though D5c could have activated W2g) and I4 (this time with the properties of equality), aspects that she had previously re-constructed with the instructor with a mathematics backing. Like in the preceding cases, she managed them with confidence, a state that she revealed by way of her use of emphasizers "let's", "is"), of actions that were consistent with her statement and the determination and interest that she exhibited when announcing her answer. However, the student stopped applying I3, which she had built and used in her preceding contributions (see D3 and D4). So the instructor questioned her solution at C5, as follows: How can we verify that the value that you obtained for the unknown is the solution to the equation? The answer to that questions can be found in Figure 6.

Sixth Participation: Security when Applying a New Rule

5.1	By substituting the value of x, which is 25 in this case, in the equation 200+3=178+x
5.2	200+3=178+25; 203=203
5.3	so in this way we can prove that it is correct because it is the same amount on both sides.

D6. a: 200+3=178+x; 200+3=178+25; 203=203 → **C6.** x=25

W6. a: If there is equality when a value is substituted in an equation, then that value is the solution to the equation.

B6. a: Operational schemes and Arithmetic

Figure 6. Analysis of Belarmina's sixth participation. Argument 6.

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.

In this participation, Belarmina tacitly paraphrased the arithmetic version of I3 and she applied it in D6 under operational and arithmetic schemes. This time, she showed confidence in the version of I3, by using emphasizers (e.g. "is") when enunciating, by acting in conformity with the version (at 5.1 and 5.2) and by showing determination to and interest in explaining it. The tutor then asked her to resolve -4x-16=9x+1. Figure 7 contains the student's answer.

Seventh Participation: Omission of an Arithmetic Procedure

<table>
<tr><td>6.1</td><td>Tutor, this is my answer:</td><td rowspan="3">D7. a: -4x-16=9x+1; b: -4x-16+16=9x+16+1; c: -4x=9x+17; d: -4x-9x=9x-9x+17; e: 13x=17 → C7. X=17/13
W7. a: Interpret the variable as a specific value (I1); b-e: Determine the literal number with the properties of equality (I4)</td></tr>
<tr><td>6.2</td><td>Equation: -4x-16=9x+1</td></tr>
<tr><td>6.3</td><td>-4x-16+16=9x+16+1 (property used: addition); -4x=9x+17; -4x-9x=9x-9x+17 (property used: subtraction); 13x=17 (property used: division)</td></tr>
<tr><td>6.4</td><td>X=17/13</td><td>B7. a: Mathematics reasons and algebra (I1)
b-e: Mathematics reasons and algebra (I4)</td></tr>
</table>

Figure 7. Analysis of Belarmina's seventh participation. Argument 7.

To resolve the equation, Belarmina activated aspects I1 and I4, specifically following the algebraically-supported procedure that she constructed with the instructor. As on previous occasions, associated with this scheme the student appeared to experience convincement. This can be seen by her use of indicative verb forms when she presented her answer ("this is"), by acting in conformity with the rules that she enunciated and by showing determination to and interest in announcing and explaining her answer. But once again, she did not apply I3 due to the possible reasons put forth below.

Analysis of Findings. Second Level: Plausible Explanations

Some viable explanations are presented concerning the complex relations between the epistemic states and comprehension that can arise in argument development and change processes and in conformation of their respective backings (see trajectories Tables 2, 3, 4).

Table 2: Dynamics of Relations Among Epistemic States, Comprehension and Backing of I4

Participation / Category	First	Second	Third	Fourth	Fifth	Sixth	Seventh
Qualifier	Confidence	Confidence	Does not apply	Does not apply	Confidence	Does not apply	Confidence
Comprehension	Agreement	Agreement	Does not apply	Does not apply	Agreement	Does not apply	Agreement
Backing	Operational	Mathematics	Does not apply	Does not apply	Mathematics	Does not apply	Mathematics
	Algebra	Algebra			Algebra		Algebra

Table 3: Dynamics of Relations Among Epistemic States, Comprehension and Backing of I1

Participation / Category	First	Second	Third	Fourth	Fifth	Sixth	Seventh
Qualifier	Confidence	Confidence	Doubt	Doubt	Confidence	Does not apply	Confidence
Compreh-ension	Agreement	Disagreement	Agreement	Agreement	Agreement	Does not apply	Agreement
Backing	Operational	Operational	Mathematics	Mathematics	Mathematics	Does not apply	Mathematics
	Algebra	Algebra	Algebra	Algebra	Algebra		Algebra

Table 4: Dynamics of Relations Among Epistemic States, Comprehension and Backing of I3

Participation / Category	First	Second	Third	Fourth	Fifth	Sixth	Seventh
Qualifier	Does not appear	Does not appear	Confidence	Doubt	Does not appear	Confidence	Does not appear
Comprehension	Does not appear	Does not appear	Agreement	Agreement	Does not appear	Agreement	Does not appear
Backing	Does not appear	Does not appear	Operational Arithmetic	Operational Arithmetic	Does not appear	Operational Arithmetic	Does not appear

In Table 2 one can see that the state of confidence experienced by Belarmina when she applied rules related to I4 remained unchanged, even when in her second intervention she changed the operational constituent of the backing to a mathematics constituent by introducing new mathematics rules (W2b-f). The foregoing speaks to the promptness with which the student assimilated warrants relative to I4 and that an increase in comprehension can be accompanied by confidence. However, as shall be seen below, said association is not always immediate.

With respect to I1 (Table 3), during her first participation Belarmina experienced confidence when she applied a rule according to which the solution is on the right hand side of the equal sign (W1a), supported by an operational scheme that, together with the transposition of terms, led her to obtain an answer in conformity with I1. With the properties of equality that she used in her second intervention (W2b-f) she no longer transposed terms but maintained her confidence with respect to rule W1a and applied it, which led her to infringe upon I1; this can explain the reason the student associated confidence with an incorrect proposition. The tutor's questioning at W1a led the student in her third participation to explain rules (W3) compliant with I1 under mathematics schemes, helping her comprehension. However, this is where Belarmina had doubts. The foregoing reveals that an increase in comprehension does not necessarily go hand in hand with developing confidence, because the former assumes cognitive readjustments that usually foster states of doubt. That doubt continued through her fourth intervention, albeit in the fifth and seventh Belarmina preferred the W3 warrant (over W1a) and associated confidence with it.

As regards I3, Belarmina paraphrased the operational and arithmetic version in her third participation, and only applied it when prompted by her instructor, first with doubt and then with confidence. One would expect that, as happened with I1 and I4, she would include that I3 aspect in her seventh participation. But once again, she stopped applying it even though she had handled it with confidence before and even though it could had allowed her to identify the mistake that she had made at that point. Belarmina's trajectory of answers enables one to have grounds to assume that said omission may be due to the fact that the I3 arithmetic and operational version would lead her to the land of arithmetic, leaving the land of algebra relatively to the side, a constituent upon which she had based her resolutions from the very beginning. The foregoing consideration is consistent with the answer that Belarmina provided when the instructor asked about her confidence concerning the solution that she had given to the equations, that is: "I felt sure of my answers. In this case we followed the steps to solve an equation in which we sought the unknown and we used the properties of addition, subtraction, multiplication and division. "Unlike Belarmina, other students such as Jeymi associated their confidence with the verification (I3, arithmetic version); the latter expressed herself by saying: "Very sure because in the verification I get the equality." Basing confidence on an arithmetic process instead of associating it with algebraic processes can be explained because, as pointed out by Martínez and Pedemonte (2014), students use arithmetic to understand algebra.

Final Considerations: Suggestions for Didactic Practice

On the basis of the interpretive theoretical framework, following methodological principles of Grounded Theory and by way of a case study, in the two levels of analysis presented here the authors describe, interpret and explain different processes that teachers can develop during the dynamics of said process so that students can acquire confidence in well-founded knowledge (see Foster's (2016) idea of the "well-calibrated" state). In those processes, for instance, an increase in comprehension can be paired with doubt, because the former means cognitive readjustments when faced with questioning or contradictions that generally foster states of doubt. Moreover a reduction of comprehension can be associated with confidence because the relations between confidence and extra-mathematical reasons may be maintained in the absence of mathematics reasons. The diversity of relations that arise between comprehension and convincement are part of the natural construction of knowledge under ordinary conditions, and they are relevant because they can guide the teacher's interventions. A student's confidence jointly tied to incomprehension, for example, may require questioning the backing, construction of new warrants and their application. Doubt tied to comprehension of a warrant, on the other hand, may require that it be applied in different contexts. Additionally, it would be desirable for teachers to consider that the processes of conforming a backing and the matched confidence seem to be a local phenomenon. That is to say they concern a topic, they concern a constituent of the backing, and they also concern formulation and application of a given warrant. This is significant because it raises a flag regarding the fact that changes relative to a specific aspect may not automatically extend to others.

References

Corbin, J., & Strauss, A. (2015). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory*. Los Angeles, CA: SAGE Publications.

Foster, C. (2016). Confidence and competence with mathematical procedures. *Educational Studies in Mathematics*, 91(2), 271-288.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., & Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics*, 91(2), 3-21.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pgs. 229–270). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Martínez, B. & Rigo, M. (2014). Mathematical certainties in history and distance education. In Liljedahl, P., Oesterle, S., Nicol, C., & Allan, D. (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36*, Vol. 4 (pgs. 177-184). Vancouver, Canada: PME.

Martínez, V. & Pedemonte, B. (2014). Relationship between inductive arithmetic argumentation and deductive algebraic proof. *Educational Studies in Mathematics*, 86, 125-149.

Rigo, M. (2013). Epistemic schemes and epistemic states. A study of mathematics convincement in elementary school classes. *Educational Studies in Mathematics*, 84(1), 71-91.

Toulmin, S., Rieke, R., & Janik, A. (1984). *An introduction to reasoning*. New York, NY: Macmillan

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., & Trigueros M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental: Una propuesta alternativa*. *(Teaching elementary algebra: An alternative proposal.)* Mexico: Editorial Trillas.

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.