

## LAS FUNCIONES SINUSOIDALES Y LOS FENÓMENOS ARMÓNICOS

## THE SINUSOIDAL FUNCTIONS AND THE HARMONIC PHENOMENA

Minerva Martínez Ortega  
Cinvestav IPN  
cetis76@hotmail.com

Hugo R. Mejía Velasco  
Cinvestav IPN  
hmejia@cinvestav.mx

María De Los Angeles Martínez  
Intituto Politécnico Nacional  
mamigcar@hotmail.com

*En esta investigación se discute el relacionar la descripción de ciertos fenómenos armónicos (física), con modelos que los representan (matemáticas), para así promover el entendimiento del período, la frecuencia y la amplitud de las funciones trigonométricas, en particular de las funciones sinusoidales. Esta es una investigación en curso, donde se emplea tecnología digital, como el sensor de movimiento, para generar gráficas de las funciones sinusoidales. En ellas se identifican rasgos del movimiento que siguen los fenómenos armónicos. Se hace un planteamiento que permite transitar alternativamente del análisis del fenómeno físico al del modelo matemático. Se conjetura que la forma en que se abordan las funciones sinusoidales puede permitir que se asigne significado al modelo  $f(x) = A\cos(wx + \varphi)$ .*

Palabras clave: Educación Post-Secundaria, Modelación, Tecnología

### Planteamiento del Problema

Los autores que en matemática educativa han realizado investigaciones sobre las funciones trigonométricas (Blacket y Tall, 1991; Brown, 2006; Buendía y Cordero, 2005; Hertel y Cullen, 2011; Kendal y Stacey, 1996; Moore, 2009; Weber, 2005), entre otros], concuerdan que independientemente de la estrategia que se emplee, las etapas iniciales del aprendizaje de las funciones trigonométricas están llenas de dificultades, lo cual propicia que la mayoría de los alumnos de 14 a 17 años de edad (*high school*), no interpreten adecuadamente los conceptos involucrados con este tipo de funciones, en particular, con la función sinusoidal. A pesar de ello, las investigaciones que sobre la enseñanza de las funciones trigonométricas se han realizado, son escasas (Moore, 2010).

En asignaturas de física e ingeniería es indispensable un buen entendimiento de las funciones trigonométricas; sin embargo, existe la problemática de que el objetivo en los cursos de matemáticas es construir significados de los parámetros de las funciones sinusoidales, mientras que, de manera particular, el objetivo en los cursos de física es construir interpretaciones de los fenómenos (armónicos) y profundizar en el entendimiento de éstos con las funciones sinusoidales; pero, el mundo físico y el mundo de los objetos matemáticos están desvinculados, de modo que la frontera entre ellos es inconexa; por ejemplo, muy pocos alumnos manejan la característica fundamental de las funciones trigonométricas: la periodicidad (matemáticas), y son menos los que pueden aplicar este tipo de funciones como modelo de fenómenos periódicos (física). Al respecto, la NCTM (1989) dentro de sus estándares (grado 9-12), para el estudio de la trigonometría (estándar 9), define que uno de los objetivos a cubrir cuando se estudia esta asignatura es que los alumnos exploren fenómenos periódicos de la vida real usando las funciones seno y coseno. Sin embargo, para entender ciertos fenómenos periódicos que ocurren de manera cotidiana o para que los alumnos de bachillerato continúen con estudios superiores de ingeniería, es esencial cruzar la frontera o tender puentes entre la física y la matemática, por lo que en este trabajo se identifican, y analizan qué significados asocian los alumnos a la función sinusoidal, a través del estudio entre la conexión de modelos físicos de fenómenos armónicos, como el péndulo y el sistema masa resorte o el caminar (regular o uniformemente) de los alumnos, con las representaciones matemáticas de éstos, como las gráficas; estas últimas representaciones serán generadas por los fenómenos a analizar, un sensor de movimiento y un programa graficador.

En este reporte de investigación, se comentarán los resultados que hasta el momento se tienen sobre el movimiento corporal de los alumnos y el péndulo. La intención de esto es llegar a definir el objeto matemático que modela a dichos fenómenos, la función sinusoidal, planteándose las siguientes preguntas de investigación: (1) ¿Qué acciones permiten describir a los fenómenos armónicos y qué representaciones surgen de dicha descripción?, (2) ¿A partir de las representaciones de los fenómenos armónicos, cómo se redescrive a estos fenómenos y qué resignificación se genera del modelo matemático que los representa?, (3) ¿El uso de herramientas digitales, de qué manera apoya en la construcción de significados de la función sinusoidal?

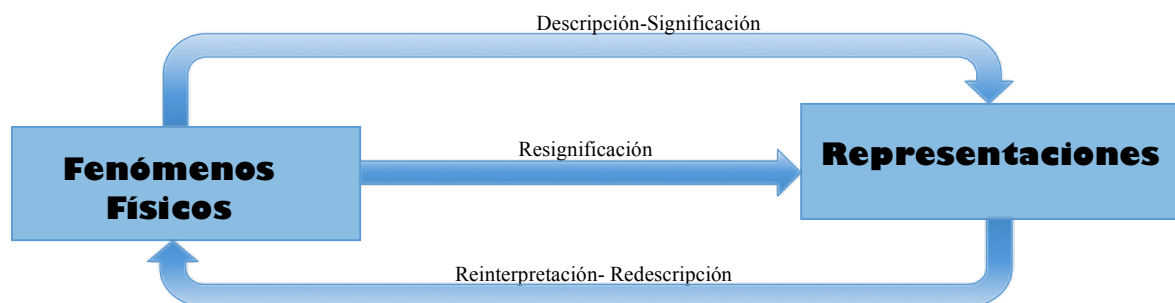
Como objetivos se tienen: (1) Analizar, describir y sistematizar los significados que los estudiantes asocian a la relación entre el modelo de la función sinusoidal y los fenómenos armónicos, (2) Describir y analizar los argumentos utilizados por los alumnos, para justificar, explicar y/o probar conjeturas cuando se emplean herramientas digitales en la determinación de la función sinusoidal como modelo de fenómenos armónicos.

### Perspectiva Teórica

En la construcción de significados, implícita o explícitamente, los estudiantes ponen en juego concepciones personales o espontáneas; en el caso de la enseñanza de la matemática en el salón de clase, comúnmente se dejan de lado dichas concepciones y se ven a los objetos matemáticos como productos acabados, desvinculados de su origen e independientes del sujeto que los estudia. Difícilmente se toma en cuenta que cualquier acercamiento a un objeto matemático transforma la relación que se tenga con él y por consiguiente la representación del mismo (Moreno, 2014).

Para darle significado a las funciones sinusoidales, en esta investigación, se considera como punto de partida a las representaciones espontáneas o implícitas y a los fenómenos que las funciones sinusoidales modelan, ya que esto puede ayudar a una reinterpretación y resignificación de las mismas, de tal suerte que éstas puedan representarse de manera explícita, (Pozo, 2006). De hecho, Hitt (2006, 2013) enfatiza la importancia de las representaciones espontáneas (producto de representaciones funcionales) de los estudiantes, y los procesos de objetivación que permiten realizar una evolución de esas representaciones en la construcción del signo y su significado.

Como la investigación está en curso, hasta el momento, el marco conceptual considerado para el diseño y aplicación de actividades piloto se fundamenta en que al analizar el fenómeno físico, los alumnos logran un entendimiento inicial, el cual se da de manera intuitiva y lleva a hacer una representación implícita (espontánea, primer acercamiento al objeto matemático), para que a partir de esta representación se reinterprete el fenómeno físico; es decir, se redescrba al fenómeno, lo cual implica una resignificación de los símbolos de la representación matemática (modelo matemático) para llegar a una representación institucional, general y/o abstracta es decir el objeto formal: la función sinusoidal, (Figura 1).



**Figura 1:** Resignificación de la función sinusoidal.

### Diseño de Investigación

La investigación es de tipo cualitativa. Las actividades piloto que aquí se describen se aplicaron a un grupo de 10 alumnos que se encontraban cursando el primer semestre de bachillerato (15-16 años), lo que supuso no habían tenido ningún acercamiento al tema de las funciones sinusoidales. La descripción del esquema anterior (Figura 1), como tal, determina el diseño de la investigación. El paso (i) requiere una trayectoria hipotética de aprendizaje (Simon, 1995; Simon y Tzur, 2004), un diseño de actividad para los sujetos que participan en la toma de datos. En el paso de (ii) se toman datos por escrito y en vídeo para saber qué reinterpretaciones plantean los alumnos. Finalmente, en el paso (iii), desde el fenómeno, se toman datos para saber qué resignificaciones realizan los sujetos.

### Análisis de Datos

Hasta el momento, el experimento se ha realizado en tres etapas: 1) exploración, 2) interpretación-representación y 3) reinterpretación-resignificación. El desarrollo de la primera etapa se dio en 3 sesiones de 2 horas cada una; la segunda y tercera etapas se aplicaron en 2 sesiones de 2 horas. El objetivo de la primera fue identificar las concepciones previas que los alumnos tenían al describir un fenómeno armónico. En la segunda, el objetivo que se siguió fue identificar las representaciones implícitas que, con respecto al fenómeno físico y modelo matemático, lograron describir los participantes. La tercera etapa tuvo por objetivo, que a partir de la representación inicial que los alumnos tuvieron del fenómeno físico (segunda etapa), se redescubriera a éste, para así llegar a una descripción explícita (institucional) del modelo matemático  $f(x) = A\cos(\omega t + \varphi)$ , el cual describe al fenómeno analizado.

### Primera Sesión. Descripción del Fenómeno (Concepciones Preliminares)

Se solicitó a los alumnos: Describir con el mayor detalle posible, cada uno de los fenómenos que observaron (péndulo, sistema masa resorte y movimiento circular de un objeto atado a un cordón, dicho objeto seguía una trayectoria circular vertical y circular horizontal).

Los participantes realizaron la descripción asociándola a aspectos físicos de los modelos presentados, materiales y colores. Dieron el nombre correcto de uno de los dispositivos (el péndulo). Los alumnos mencionaron ideas sobre conceptos como fuerza, movimiento, distancia, velocidad y aceleración; aunque éstas en su mayoría fueron incorrectas o ambiguas. En las respuestas se mostró la recurrencia a concepciones o ideas aprendidas previamente; o bien, a situaciones que, aparentemente, a simple vista se observaron (aun y cuando éstas eran imprecisas). Por ejemplo, el total de alumnos mencionó a la *fuerza* como la causa del movimiento de la lenteja, o que *la fuerza* en un momento determinado *se acababa*, y por consecuencia *el objeto ya no estaría en movimiento*, así como que una vez que un *cuerpo estaba en reposo ya no actuaba sobre él ninguna fuerza*, etc. Las concepciones mostradas por los alumnos en esta actividad se quedaron en la frontera de la física y eran, en gran medida, basadas en representaciones de naturaleza implícita, algunas de ellas similares a como en sus inicios la humanidad intentó conceptualizar el movimiento. Ningún alumno se apoyó en el uso de alguna representación que implicara un concepto formal, una fórmula o el uso, en particular, de algún signo aritmético, algebraico o diagramático. Las concepciones implícitas fueron el punto de partida para que, por parte de los alumnos, surgieran rasgos esenciales de las funciones sinusoidales. Se pretendió un cambio conceptual o representacional de éstas (segundo movimiento del proceso planteado en el marco teórico. Figura 1).

### Segunda Sesión. Empleando Herramientas Digitales

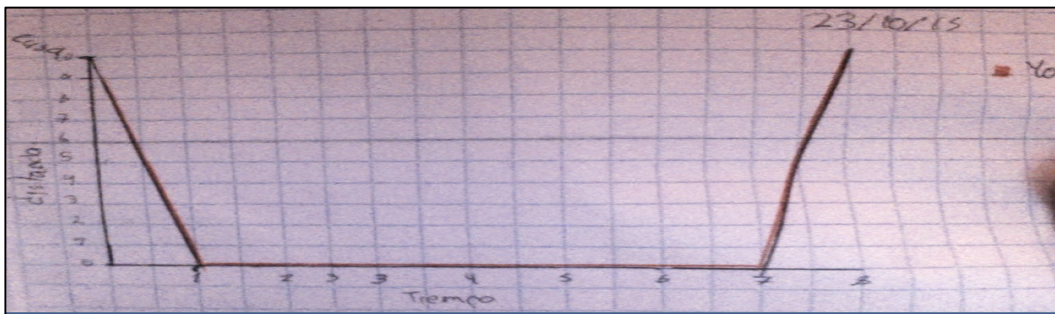
Además de que los alumnos se ambientaran con el uso de las herramientas digitales, el objetivo de esta actividad fue que los estudiantes identificaran y asociaran la manera en que se representa el movimiento en una gráfica cartesiana; el análisis se centró en el comportamiento y representación del fenómeno físico, (1er movimiento. Significación. Figura 1); para ello, los alumnos caminaron frente

a un sensor de movimiento, que conectado a una computadora generaba la gráfica con rasgos particulares del andar de los jóvenes. Por ejemplo:

*Alejandro:* Cuando los compañeros caminaban de un punto hasta acercarse al sensor, la gráfica marcaba que en la distancia empezaba de 5 hasta disminuir a 0, porque cada vez se acercaba más y el sensor lo reconocía muy cerca, por eso iba descendiendo y cuando empezaba cerca del sensor y terminaba alejándose, la gráfica lo reconocía desde 0 hasta que se detenía en el segundo 3.1 a 3.5, eso pasaba porque se detenía, y cuando no se detenía la gráfica seguía subiendo.

En el caso de Alejandro, la representación inicial que generó incluyó la toma de datos numéricos, a partir de los cuales regresó a la redescrición del fenómeno (2do. Movimiento. Figura 1).

Posteriormente se les pidió a los alumnos que, con lápiz y papel, bosquejaran la gráfica de la acción de asistir a la escuela si ellos partían de su casa, debiendo regresar a ella después de tomar clases.



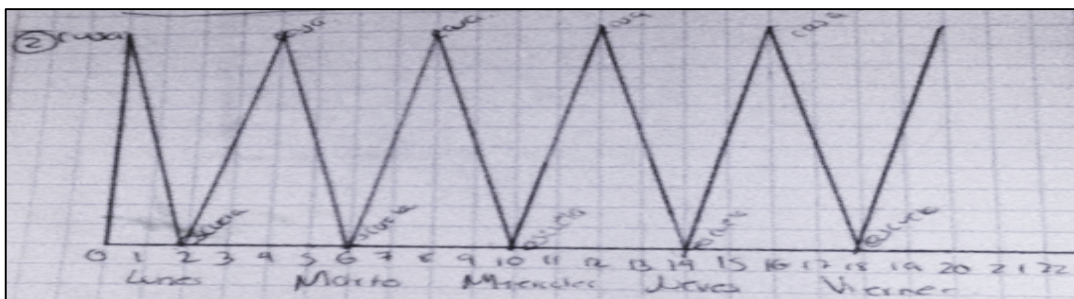
**Figura 2.** Gráfica generada por Alma sobre un recorrido.

*Alma:* Es lo mismo, solo que el sensor es la escuela.

Lo expuesto por Alma, representó un ejemplo de que se ha construido una representación explícita del sensor al considerarlo como referente, ya que logró trasladar la situación de las gráficas generadas con el sensor a un nuevo contexto, estableciendo un nuevo punto de referencia, la escuela.

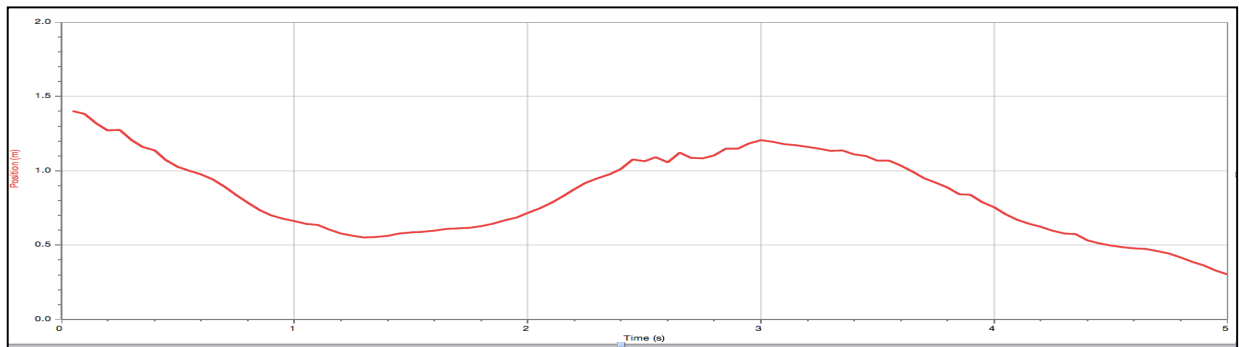
En esta actividad los alumnos empezaron a rebasar la frontera de una situación física cotidiana hacia la representación matemática. A continuación se solicitó a los alumnos que bosquejaran, también en lápiz y papel, la acción anteriormente planteada, pero ahora correspondiente a una semana y sin considerar el tiempo que permanecían en la escuela.

En este punto, los alumnos identificaron características del movimiento periódico (al cual ellos se refirieron como repetitivo); de manera básica determinaron el período, en el caso de Alma, ella estableció que tarda 2 horas en ir a la escuela y 2 horas en regresar a su casa. (1er movimiento. Figura 1).



**Figura 3.** Gráfica generada por Alma sobre 5 recorridos.

La cuestión de la no diferenciabilidad, se trató en una sesión posterior. Los alumnos, después de un largo debate, concluyeron que *es imposible obtener (caminando), una gráfica con picos, ninguna persona se mueve tan rápido y logra representar el movimiento de esa manera.* (2do. Movimiento. Figura 1). Posteriormente, una gráfica sinusoidal fue presentada a los alumnos (sin que ellos supieran que se trataba de una gráfica de ese tipo), se les solicitó que caminando frente al sensor hicieran los movimientos necesarios para reproducirla. Los alumnos caminaron de diferente manera; por ejemplo, tratando de seguir la representación icónica de la gráfica, levantando las rodillas o como algunos de ellos dijeron *como si caminara un borracho* o asociaron el tipo de gráfica a la velocidad con la que se caminaba. Después de un número considerable de intentos, a Carlos se le ocurrió que el movimiento debía ser *haciendo el mismo paso, es decir ir y regresar*. El alumno parándose frente al sensor realizó un movimiento que consistió en dar dos pasos hacia el sensor y dos pasos alejándose del mismo.



**Figura 4.** Gráfica generada por Carlos al caminar.

*Profesora:* ¿Por qué se te ocurrió que el movimiento debía ser así?

*Carlos:* Porque si se acercaba uno (hacia el sensor), iba bajando (la representación gráfica); si se aleja uno (hacia el sensor), iba subiendo (la misma representación).

Después de realizar esta acción, Carlos asoció que este tipo de gráficas son generadas por un movimiento periódico, ya que realiza la siguiente pregunta:

*Carlos:* ¿Se puede poner la mano en el sensor?

Carlos se refirió, a si el movimiento que generaría la gráfica solicitada, era posible hacerlo, en lugar de la manera anterior, acercando la mano hacia el sensor y alejando la mano del mismo, ambos movimientos repetidas veces, Carlos verificó la veracidad de su conjetura frente al sensor.

En una actividad anterior, se analizó el movimiento rectilíneo; éste, además de servir de ambientación en el uso del sensor, se tomó como referencia para identificar la características de la gráfica cuando un alumno se acercaba o se alejaba del sensor, Carlos logró integrar estos tipos de movimiento en uno solo (movimiento de carácter repetitivo a intervalos de tiempo iguales), lo cual le permitió definir las acciones a seguir para generar, con ayuda del sensor, una grafica del tipo sinusoidal. (2do. Movimiento. Figura 1).

En la segunda parte de esta sesión, se empleó un péndulo simple. Las características del movimiento pendular se representaron en el plano cartesiano, primero se hicieron manualmente (lápiz y papel), posteriormente con la mediación del sensor de movimiento. Solamente tres alumnos lograron mostrar un significado explícito al determinar la gráfica *manual* de manera correcta, justificando que recordaron lo que ocurrió cuando se solicitó reproducir la gráfica sinusoidal con movimientos corporales, los alumnos relacionaron el *caminar de manera uniforme* frente al sensor, con el *movimiento repetitivo del péndulo*, (2do. Movimiento. Figura 1). Para verificar o rectificar la gráfica bosquejada por cada alumno, se obtuvo la gráfica del movimiento pendular a través del

sensor, especificando que la gráfica mostrada correspondía a una función sinusoidal. Acto seguido, se discutieron las características de la gráfica, el principal rasgo a resaltar fue, como los jóvenes lo mencionaron, *la repetición o existencia de un patrón*. (2do. Movimiento. Figura 1).

Posteriormente, se eligió aleatoriamente una gráfica de las obtenidas en la actividad anterior y se solicitó a los alumnos mencionar los elementos que observaban en la gráfica (2do. Movimiento. Figura 1), primero identificaron las *oscilaciones*, los alumnos las refirieron como *montañas o máximos*, después de un análisis y discusión, se concluyó que hay *montañas invertidas o mínimos* a considerar, la justificación la dio Carlos argumentando que las *montañas* representaban las idas del péndulo y las *montañas invertidas* los regresos de éste. La profesora estableció que lo mencionado por Carlos se conoce como *oscilación* y que el tiempo que implica una oscilación, se identifica como *período (P)*.

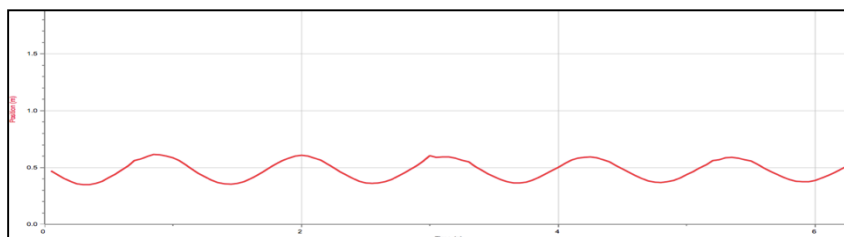
La *amplitud* fue el segundo elemento mencionado, éste fue asociado con la *altura de las montañas*, la profesora retomó la idea de *máximo*, como el punto más alto de la *montaña* y *mínimo* al punto más bajo de la *montaña invertida*, al igual que el *período*, el valor de la *amplitud*, es posible determinarlo directamente con el menú del programa de cómputo empleado en la investigación. Sin embargo, la profesora mencionó un procedimiento analítico para calcular la *amplitud*  $|A|$ .

*Profesora:* Una vez que se localizan las coordenadas del punto máximo y del punto mínimo, se suma los valores absolutos de las ordenadas y el resultado se divide entre 2, el resultado será el valor de la ordenada que junto con cualquier valor de la abscisa (tiempo), será el eje de equilibrio, ya que la *amplitud* puede definirse como la distancia entre el punto máximo o mínimo y el eje de equilibrio.

Al preguntar a los alumnos qué representa la *amplitud* en el fenómeno físico, fue necesario repetir el experimento del péndulo y después de un largo análisis o debate, Mariano mencionó que *la amplitud era el dibujo de las oscilaciones*, Carlos relacionó que *lo que el péndulo abre* (arco de oscilación) *era lo que en la gráfica se veía como la altura*.

El *desplazamiento vertical (V)*, fue identificado como *la distancia de péndulo* (en la posición de equilibrio) *al sensor*, Samantha mencionó que *a mayor distancia la gráfica salía más arriba*. A los alumnos no les llamó la atención que las gráficas no empezaran en el origen cartesiano, por lo que no identificaron *el desplazamiento horizontal*, ni que el origen de la gráfica estaba determinado por el sensor, por lo que la profesora lo explicó (definiendo que forma parte del modelo matemático).

Cuando la profesora preguntó qué nombre recibían las funciones que se habían estado graficando, ningún alumno lo recordó (No se da el 2do. Movimiento. Figura 1). La profesora conjuntó lo discutido anteriormente y mencionó que la manera de representar matemáticamente este tipo de funciones es:  $f(t) = A\cos(Bt + H) + V$ , (3er. Movimiento. Figura 1); la representación de los parámetros, fue elegida por los alumnos) A es la *amplitud*; B la *velocidad angular*, está relacionada con el *período (P)*,  $B = \frac{2\pi}{P}$ ; H el *desfase o desplazamiento horizontal* y V el *desplazamiento vertical*. En la siguiente actividad, a los alumnos se les solicitó determinar el modelo matemático de la siguiente gráfica (Figura 5).



**Figura 5.** Gráfica modelada.

Los valores de los parámetros de la gráfica anterior fueron determinados por 2 de los alumnos (Samantha y Carlos); a excepción del *desfase*, Mariano calculó los valores del resto de los parámetros; los otros alumnos solo calcularon la *amplitud* y el *desplazamiento* vertical,

$$f(t) = 0.12\cos(1.12t - 0.46) + 0.47$$

Posteriormente se pidió a los alumnos que comprobaran los valores determinados de la gráfica, Carlos lo hizo ayudándose del menú del programa que se empleó para generar las gráficas.

*Carlos*: Oscilaciones son 5.513, el 513 porque con la opción *analice* y después *examine* se obtiene el *time* en 6.2 y *position* en 513 y el 5 porque son 5 oscilaciones completas. El período  $6.2 \div 5.513 = 1.12$ . El desfase, igual, con *analice* y *examine* se ve que es de 0.46 y el desplazamiento vertical de 0.47. La amplitud, en la segunda oscilación, el mínimo es de 0.354 y el máximo de 0.607,  $0.354 + 0.607 = 0.961 \div 2 = 0.4805$ ;  $0.607 - 0.4805 = 0.1265$ . (3er. Movimiento. Figura 1).

Carlos determina la representación analítica de la gráfica presentada (Figura 5), aunque confundió el período con la velocidad angular; al solicitarle que aplicara la relación  $B = \frac{2\pi}{P}$ , él cambió el valor de la velocidad:  $f(t) = 0.12\cos(5.5t - 0.46) + 0.47$ . Carlos obtuvo de la gráfica los desplazamientos vertical y horizontal, lo cual indicó que tuvo una representación explícita de los conceptos previamente analizados; sin embargo, *para* calcular la amplitud no la relacionó con la distancia (vertical) del punto máximo de la gráfica (o punto mínimo) con el valor del desplazamiento vertical, ya que nuevamente calculó dicho valor; por lo tanto, de la amplitud (aunque determina el valor correcto), no tiene la representación explícita completa.

### Resultados Preliminares

La primera etapa permitió identificar las concepciones que los alumnos tienen al describir un fenómeno armónico. En la segunda, se lograron identificar las representaciones implícitas que lograron describir los alumnos, así como las ventajas y obstáculos de las tecnologías digitales en las que nos apoyamos. A partir de esta etapa, se pudo observar que 2 alumnos (de 10), lograron pasar de una representación implícita o espontánea a una representación explícita, el resto de los alumnos solo asignaron significado a la amplitud y el desplazamiento vertical, al lograr trasladar estos conceptos de la representación gráfica al fenómeno físico analizado y viceversa. Sin embargo, falta experimentar estas dos etapas con los modelos del sistema masa resorte y el movimiento circular y así dar respuesta a la primera pregunta de investigación. A demás falta concluir la tercera etapa de experimentación, en la cual, partiendo de la representación analítica, se reinterpretará al fenómeno físico, cerrando de esta manera un primer ciclo como el mostrado en la figura 1. Se buscará que los alumnos resignifiquen al fenómeno armónico analizado en la primera sesión, lo cual permitirá sortear la frontera que existe entre la física y la matemática, llegando así a una redescripción del fenómeno y a la resignificación del modelo algebraico institucional, enfocándose en consolidar conceptos relativos al período  $P = \frac{2\pi}{B}$ , la frecuencia y la amplitud.

Hasta el momento se observó que el sensor de movimiento y los modelos físicos de los fenómenos armónicos, así como el diseño y guía de la actividad fueron herramientas esenciales; a través de éstas se eliminaron algunas de las dificultades que las representaciones de las funciones sinusoidales tienen por sí mismas; por ejemplo la forma de generar la representación gráfica, permitió a los alumnos identificar y asignar significado a los signos que representan los parámetros de las funciones sinusoidales; cuando fue necesario modificar dichos parámetros, se hizo de una manera relativamente sencilla, solo se tenían que caminar frente al sensor o repetir el experimento, y comprobar si las predicciones o conjeturas eran ciertas o debían replantearse.

*In this research we discuss relating the description of certain harmonic phenomena, with models that represent them, with the goal of promoting the understanding of the period, the frequency, and the amplitude of the trigonometric functions, particularly referring to sinusoidal functions; in this way the frontier between sinusoidal functions and one of its areas of application to physics is preserved. This is an ongoing research study where digital technology like a movement sensor is employed in order to generate graphics related to sinusoidal functions, in which the movement features followed by harmonic phenomena are identified. It is important to mention the use of an approach where it is possible to transit alternatively from the analysis of the phenomena to the mathematical model. It is conjectured that the way it approaches sinusoidal functions could help assign meaning to the model  $f(x) = A\cos(\omega x + \phi)$ .*

Keywords: Post-Secondary Education, Modeling, Technology

### Problem Statement

The authors who have done research in mathematics education related to trigonometric functions (e.g., Blacket & Tall, 1991; Brown, 2006; Buendía & Cordero, 2005, Hertel & Cullen, 2011; Kendal & Stacey, 1996; Moore, 2009; Weber, 2005), agree that regardless of the strategy employed, the initial stages of learning trigonometric functions are filled with difficulties, which causes most of the students between 14 to 17 years of age (High school), to incorrectly interpret the concepts related to this type of functions, in particular, referring to the sinusoidal function. Nevertheless, research studies associated to the teaching of trigonometric functions have been scarce (Moore, 2010).

In subjects related to physics and engineering a good understanding of the trigonometric functions is essential; while the goal in mathematics courses is to build meaning for the parameters of the sinusoidal functions, the aim in the physics courses is, in particular, to build interpretations of the (harmonic) phenomena and deepen in the understanding of these regarding sinusoidal functions; but, the world of physics and the world of mathematical objects are not linked, and as a result the border between them is disjointed; for example, very few students know of the fundamental feature of trigonometric functions: the periodicity (mathematics), and even fewer are the ones who can apply this type of functions as a model of periodic phenomena (physics). Regarding this situation, the NCTM (1989) within its standards (grade 9-12), for the study of trigonometry (standard 9), defines that one of the objectives to be covered when studying this subject is for students to explore real life periodic phenomena using the functions sine and cosine. However, in order to understand certain periodic phenomena that happen on a daily basis or for high school students to continue with engineering studies at the university level, it is essential to cross the border or build bridges between physics and mathematics, which is why in this paper the meanings students associate to sinusoidal functions are identified and analyzed through the study of the connections between physical models of harmonic phenomena, like the pendulum and the mass spring system or the walking (regularly or uniformly) of students, with their mathematic representations, such as graphics; these representations will be generated by the phenomena to be analyzed, a movement sensor and a graphing program.

In this research report, the current results regarding body movement of the student and the pendulum will be discussed. The intention is to be able to define the mathematical object modeling such phenomena, the sinusoidal function, posing the following research questions: (1) Which actions allow to describe harmonic phenomena and which representations arise from such descriptions?, (2) Based on the representation of harmonic phenomena, how can these phenomena be redescribed and which resignification of the mathematical model that represents them can be generated?, (3) How does the use of digital tools support the building of meanings of the sinusoidal functions?



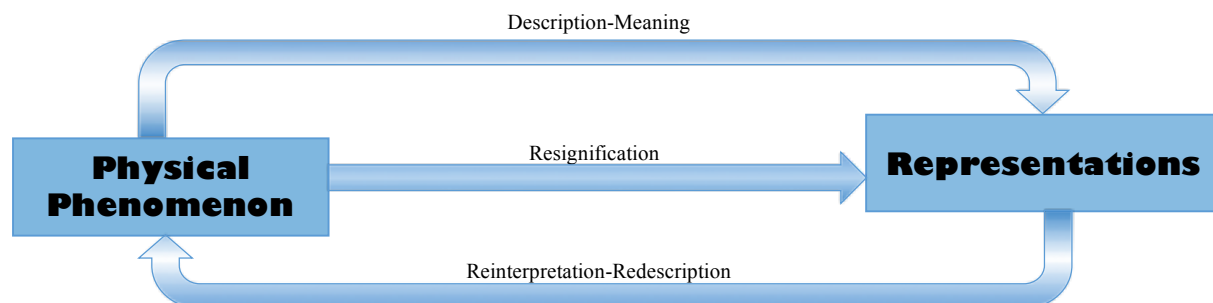
As objectives, we have: (1) Analyze, describe and systematize the meanings students associate to the relation between the model of the sinusoidal function and harmonic phenomena, (2) Describe and analyze the arguments used by students, in order to justify, explain and/or try conjectures when employing digital tools to determine a sinusoidal function as a model of harmonic phenomena.

### Theoretical Perspective

When building meaning, implicitly or explicitly, students put into play personal or spontaneous conceptions; in the case of in-class mathematics teaching, these previously mentioned conceptions are commonly left aside and mathematical objects are seen as finished products, un-linked to their origin and independent from the subject that studies them. It is hardly ever taken into account the fact that any getting close to a mathematical object transforms the relation one has with it and as a result its representation of itself (Moreno, 2014).

In order to give meaning to sinusoidal functions, in this research, spontaneous or implicit representations and phenomena modeled by sinusoidal functions are considered as a starting point, since this could help a reinterpretation and resignification of themselves, so that they can be represented in an explicit manner, (Poza, 2006). As a matter of fact, Hitt (2006, 2013) makes emphasis on the importance of spontaneous representations (product of functional representations) from students, and the observation processes which allow to perform an evolution of these representations when building sign and meaning.

As the research is ongoing, for now the conceptual framework considered for the design and application of pilot activities is based on the fact that when analyzing a physical phenomena, students achieve an initial understanding, which is achieved intuitively and leads to an implicit representation (spontaneous, first contact with the mathematical object), so that from this representation the physical phenomena can be reinterpreted; that is, the phenomena is redescribed, which implies a resignification of the representation of mathematical symbols (mathematical model), to reach an institutional representation, general and/or abstract which means the formal object: the sinusoidal function, (Figure 1).



**Figure 1.** Resignification of sinusoidal function.

### Research Design

It is a qualitative research. The pilot activities described in here were applied to a group of ten students during their first semester of high school (15-16 years of age), which meant that they had not had any kind of previous exposure to the subject of sinusoidal functions. The description on the previous scheme (Figure 1), as such, determines the design of the research. The step i) Physical phenomenon to representation requires a hypothetical learning trajectory (Simon, 1995; Simon & Tzur, 2004), a design of activities for the subjects who take part in the study. On step ii) Representation to physical phenomenon, written and video data are collected in order to identify the reinterpretations that students pose. Finally, on step iii), from the Physical phenomenon, data are taken in order to identify the resignifications that the subjects perform.

### Data Analysis

Up until now, the experiment has been performed in three stages: 1) Exploration, 2) interpretation-representation and 3) reinterpretation-resignification. The development of the first stage took place in three two-hour sessions each; the second and third stages were applied in two two-hour sessions each.

The objective of the first stage was to identify the previous conceptions students had when describing harmonic phenomena. At the second stage, the objective was to identify the implicit representations that the participants were able to describe according to the physical phenomena and mathematical model. The main objective for the third stage was that starting from the students' initial representation of the physical phenomena (second stage), it was redescribed, in order to achieve an explicit description (institutional) of the mathematical model  $f(x) = A\cos(\omega t + \varphi)$ , which describes the analyzed phenomenon.

#### First Session. Description of the phenomena (Preliminary Conceptions)

Students were asked to: Perform a detailed description of each and every single one of the phenomena they observed (pendulum, mass spring system and circular movement of an object tied to a cord, an object which follows a vertical circular trajectory and horizontal circular trajectory).

The participants performed the description associating it to physical aspects of the presented models, materials and colors. They gave the correct name to one of the devices (pendulum). The students mentioned ideas related to concepts such as force, movement, distance, speed and acceleration; even though they were in their majority incorrect or ambiguous. Their answers showed recurrence to concepts or ideas previously learned; or, situations which, apparently, were observed at first sight (even when they were inaccurate). For example, all students mentioned *force* as the main cause for the lentils movement, or that at any given moment force would be over, and as a result the object would *no longer be moving*, as well as that once a *body was at rest no longer was any force applied*, etc. The conceptions shown by students in this activity were stuck in the physics frontier and were, in their vast majority, based on representations of implicit nature, some of them were similar to how in the beginning mankind tried to conceptualize the concept of movement. No student relied on the use of any representation that would have implied a formal concept, a formula or the use, in particular, of any arithmetic, algebraic or diagrammatic sign. The implicit conceptions were the starting point to understand essential features of sinusoidal functions. A conceptual or representative change of this (second movement of the process described in the theoretical framework. Figure 1) was intended.

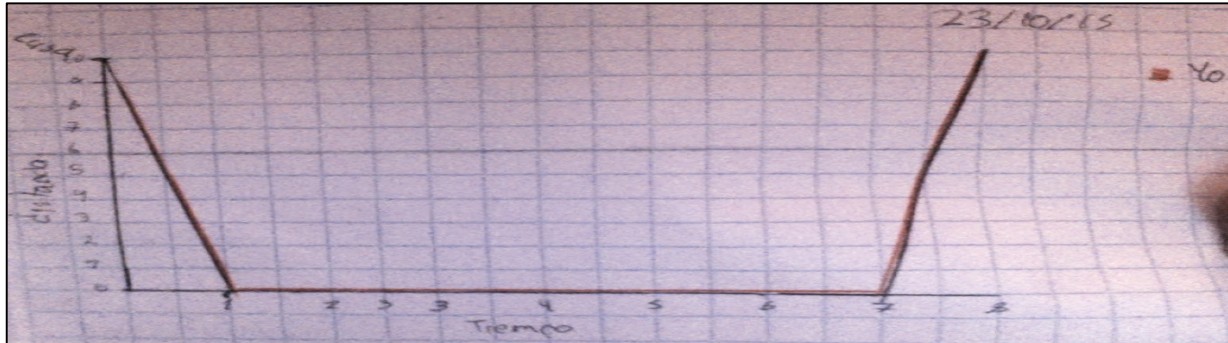
#### Second session. Employing digital tools.

Besides getting the students acclimated to the use of digital tools, the objective of this activity was for students to identify and associate the manner in which movement is represented in a Cartesian graph; the analysis was centered around the behavior and representation of the physical phenomena, (1<sup>st</sup> movement. Signification. Figure 1); for this, students walked in front of a movement sensor, which plugged to a computer generated the graphic with the particular features of the students walk. For example:

*Alejandro:* When the fellow students walked from a certain point up until getting close to the sensor, the graphic pointed that the distance started from 5 decreasing up to 0, because each time they got closer and the sensor detected that they were very close, that is why it was decreasing and when they started closer to the sensor and finish further away, the graphic recognized it from 0 until they stopped at the second 3.1 to 3.5, that happened because they stopped, and when they did not stop the graphic continue to increase.

In the case of Alejandro, the initial representation he generated included the compilation of numeric data, from which he came back to the redescription of the phenomena (2<sup>nd</sup>. Movement. Figure 1).

Afterwards students were asked to use a pencil and paper, in order to sketch the graph of the action of coming to school starting at home and including their having to return home after class.



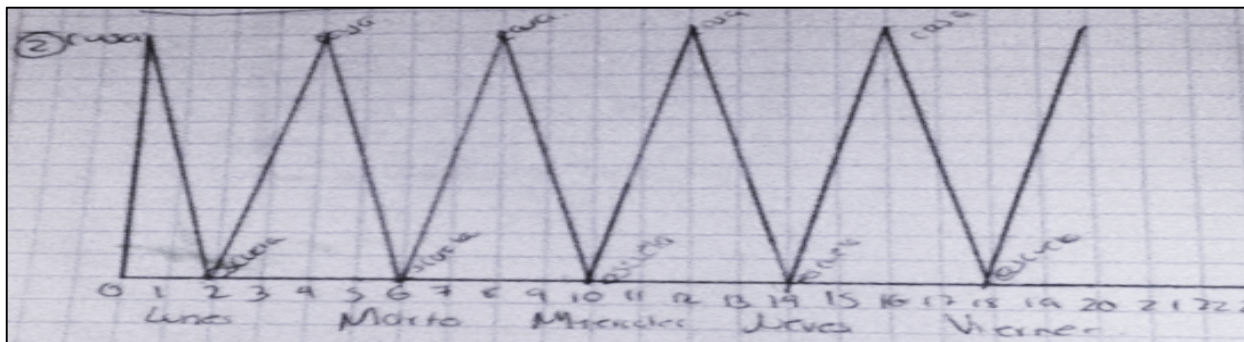
**Figure 2.** Alma's graph of one round trip.

*Alma:* It is the same thing only that the sensor is the school.

What was exposed by Alma, represented a clear example that an explicit representation of the sensor has been built by considering it a reference point, given that she was able to translate the situation from the graphics generated by the sensor to a new context, establishing a new reference point, the school.

In this activity students started to leave behind the frontier of a daily physical situation towards the mathematical representation. Next students were asked to sketch, also using a pencil and paper, the action previously posed, but now applied to a week and without considering how much time they spent in school.

At this point, students identified features of periodic movements (to which they referred as repetitive); they determined the period in a basic manner, in the case of Alma, she established that it takes her two hours to get to school and two hours to go back home. (1<sup>st</sup> movement. Figure 1).

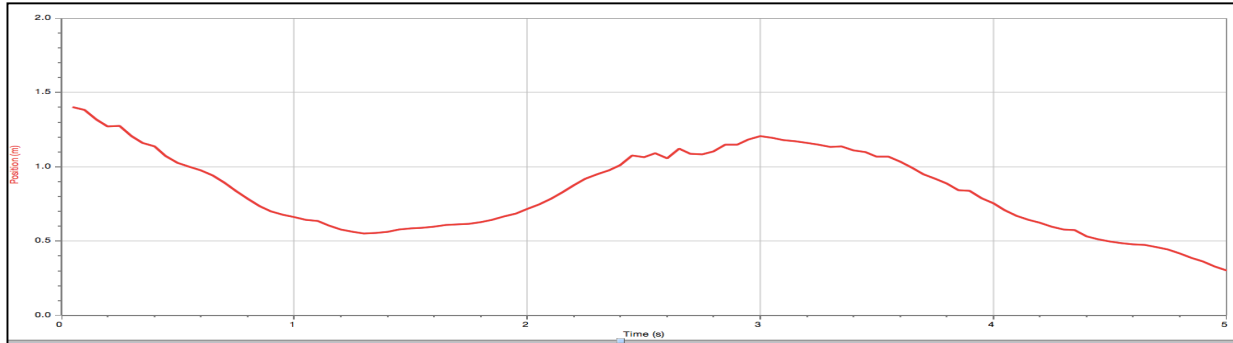


**Figura 3.** Alma's graph of five round trips.

The question regarding the no differentiability, was approached in a later session. Students, after a long debate, concluded that it is impossible to obtain (walking) *a graphic with peaks, no person is able to move that fast and achieve that kind of representation.* (2<sup>nd</sup>. Movement. Figure 1).

Afterwards, students were showed a sinusoidal graph (without them knowing they were dealing with that kind of graph), they were asked to perform the necessary movements while walking in front of the sensor in order to reproduce it. Students walked in different ways; for example, trying to follow the iconic representation of the graphic, lifting their knees or as some of them stated *walking*

like a drunk person or associating the type of graphic to the speed with which they walked. After a considerable amount of attempts, Carlos thought the movement should be *making the same walk, meaning to go and come back*. Standing in front of the sensor the student performed a move consisting of walking two steps towards the sensor and two steps backing away from it.



**Figure 4.** Graphic generated by Carlos at the moment of walking.

*Teacher:* Why did you think the movement should be like that?

*Carlos:* Because if one gets closer (to the sensor), it was going down (the graphic representation); if one gets away (from the sensor), it was going up (the same representation).

After performing the action, Carlos associated that this type of graph is generated by a periodic movement, given that he stated the following question:

*Carlos:* Could I place my hand on the sensor?

Carlos was referring to whether it was possible to perform the movement that would generate the requested graph in a different way, by reaching his hand closer to the sensor and moving the hand away from it, repeating both movements several times; Carlos verified the veracity of his conjecture in front of the sensor.

On a previous activity, rectilinear movement was analyzed; this, aside from working as a setting for the use of the sensor, was taken as a reference to identify the features of the graph at the time when a student was getting closer or further away from the sensor; Carlos was able to integrate this kind of movement in one (movement with a repetitive nature at equal time intervals), which allowed him to define the actions to follow in order to generate, with aid from the sensor, a sinusoidal kind of graphic. (2<sup>nd</sup>. Movement. Figure 1).

On the second part of this session, a simple pendulum was employed. Pendulum motion features were represented on a Cartesian plane, first manually (pencil and paper), later on with the use of the movement sensor. Only three students were able to show an explicit meaning at the moment of determining the *manual* graph in a correct manner, justifying that they remembered what happened when they were asked to reproduce the sinusoidal graphic with body movements, students related *walking uniformly* in front of the sensor, with the *repetitive movement of the pendulum*, (2<sup>nd</sup>. Movement. Figure 1). In order to verify or rectify the graph sketched by every student, the pendulum motion graphic was obtained using the sensor, specifying that the shown graph corresponded to a sinusoidal function. Immediately afterwards, the graph features were discussed, the main feature to be pointed out was, in the manner the young people mentioned, *the repetition or existence of a pattern*. (2<sup>nd</sup>. Movement. Figure 1).

Afterwards, one of the obtained graphs on the previous activity was chosen randomly and students were asked to point out the elements observed in it (2<sup>nd</sup>. Movement. Figure 1), at first they identified the *oscillations*, students referred to them as *mountains or maximums*, after analyzing and

discussing, it was concluded that there are *inverted mountains or minimums* to be considered, the justification was given by Carlos, arguing that the *mountains* represented the going of the pendulum and the *inverted mountains* its coming back. The teacher established that what Carlos had mentioned is known as *oscillation* and that the time employed by an oscillation, is identified as *period (P)*.

The *amplitude* was the second element mentioned, this was associated with the *height* of the *mountains*, the teacher turned back to the idea of the *maximum*, as the highest point of the mountain and *minimum* to the lowest point of the *inverted mountain*, just like the *period*, it is possible to determine the value of the *amplitude* directly with the menu of the software employed in this research. Nevertheless, the teacher mentioned an analytic procedure to calculate *amplitude*  $|A|$ .

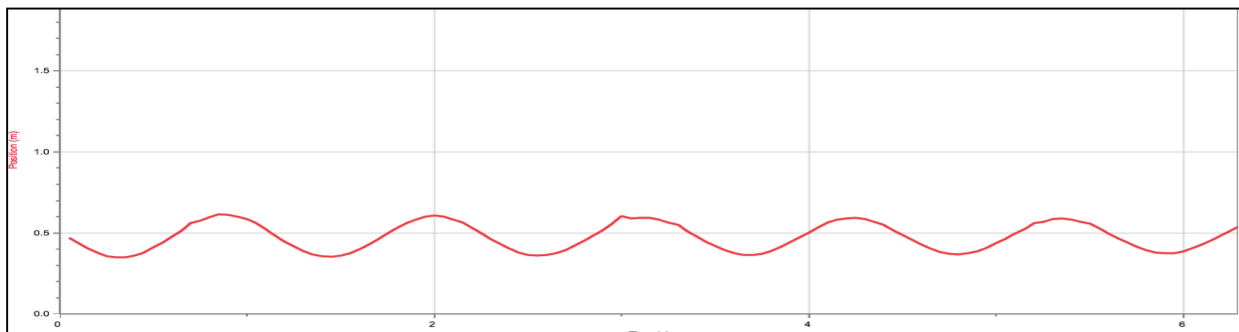
*Teacher:* Once the coordinates of the highest and lowest points have been located, the absolute values of the ordinates are added up and the result is divided by two, the result will be the value of the ordinate which together with any value of the abscissa (time), will be the midline (translation). Given that, amplitude can be defined as the distance between the highest or lowest point and the balance axis.

When asking students what the amplitude represents in the physical phenomena, it was necessary to repeat the pendulum experiment and after a long analysis or debate, Mariano mentioned that the *amplitude was the drawing of oscillations*, Carlos related that *how much the pendulum opens* (arc of oscillation) *was what in the graphic is observed as height*.

The *vertical displacement (V)*, was identified as the *pendulum distance* (on a position of equilibrium) *to the sensor*, Samantha mentioned that *at greater distance the graph was higher*. Students did not pay attention to the fact that the graphs did not start on the Cartesian origin, which is why they failed to identify the *horizontal displacement*, nor that the origin of the graph was determined by the sensor, so the teacher explained it (making it clear that it is part of the mathematical model).

When the teacher asked the name of the functions that had been graphed, no student remembered (The 2<sup>nd</sup>. Movement is not given. Figure 1). The teacher put together what had been previously discussed and mentioned that the mathematical way of representing this functions is:  $f(t) = A\cos(Bt + H) + V$  (3<sup>rd</sup>. Movement. Figure 1; the representation of the parameters, was chosen by the students), A is the *amplitude*; B is the *angular speed*, it is related to the *period (P)*;  $B = \frac{2\pi}{P}$ ; H is the *phase shift or horizontal displacement* and V the *vertical displacement*.

On the next activity, students were asked to determine the mathematical model of the next graph (Figure 5).



**Figure 5.** Model of the graph.

The values of the parameters in the previous graph were determined by two of the students (Samantha and Carlos); with exception to the *phase shift or horizontal displacement*, Mariano

calculated the values of the rest of the parameters; the rest of the students just calculated the *amplitude and the vertical displacement*,  $f(t) = 0.12\cos(1.12t - 0.46) + 0.47$

Afterwards, students were asked to check specific values of the graph, Carlos did it with the help of the menu of the software used to generate the graphics.

*Carlos*: Oscillations are 5.513, the 513 because with the option *analyze* and then *examine* the *time* is obtained at 6.2 and *position* at 513 and the 5 because there are 5 complete oscillations. The period 6.2 divided by 5.513=1.12. The phase shift, also, with *analyze* and *examine* shows that it is 0.46 and the vertical displacement of 0.47. The amplitude, on the second oscillation, the minimum is 0.354 and the maximum is 0.607,  $0.354+0.607=0.961$  divided by 2= 0.4805;  $0.607-0.4805=0.1265$ . (3<sup>rd</sup>. Movement. Figure 1).

Carlos determined the analytic representation of the given graph (Figure 5), even though he confused the period with the angular speed; when asked to apply the relation  $B = \frac{2\pi}{P}$ , he changed the speed value:  $f(t) = 0.12\cos(5.5t - 0.46) + 0.47$ . Carlos obtained the horizontal and vertical displacements from the graphs, which indicated he had an explicit representation of the previously analyzed concepts; nevertheless, when calculating the amplitude he did not relate it to the distance (vertical) highest point of the graph (or lowest point) with the value of the vertical displacement, given that he calculated such value again, as a result; regarding the amplitude (even though he determines the correct value), he does not have a complete explicit representation.

### Preliminary Results

The first stage allowed us to identify the conceptions students have when describing harmonic phenomena. In the second stage it was possible to identify the implicit representations described by the students, as well as, the advantages and obstacles of the digital technology we rely on. From this stage, it was possible to observe that 2 students (out of 10), were able to go from an implicit or spontaneous representation to an explicit representation, the rest of the students were only able to assign meaning to the amplitude and vertical displacement, by getting to translate these concepts from the graphic representation to the physical phenomena and vice versa. Nevertheless, more experimentation is needed in these two stages with the models of the mass spring system and circular movement, to then give an answer to the first research question. Besides, the third experimentation stage is yet to be concluded, in which, starting with the analytic representation, the physical phenomena will be reinterpreted, as a result closing a first cycle as it is shown on Figure 1. It will be sought for students to resignify the harmonic phenomena analyzed on the first session, which will allow to avoid the existing frontier between physics and mathematics, reaching in this way a redescription of the phenomenon and the resignification of the institutional algebraic model, focusing in consolidating concepts related to period  $P = \frac{2\pi}{B}$ , frequency and amplitude.

Up until now it has been observed that the movement sensor and the physical models of the harmonic phenomena, as well as the design and guidance of the activity were both essential tools; through these, some of the difficulties that the representations of sinusoidal functions representations present were eliminated; for example the way in which to generate the graphic representation, allowed students to identify and assign meaning to the signs which represent sinusoidal functions, when it was necessary to modify these parameters, it was done in a relatively simple way, it was as simple as just walking in front of the sensor or repeat the experiment, and verify if the predictions or conjectures were true or if they had to be reassessed.

### References

Brown, S. (2006). The Trigonometric Connection: Students' Understanding of Sine and Cosine. In J. M. Novotná (Ed.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 1, pág. 228. Praga: PME.

---

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.

- Buendía, G. & Cordero, F. (2005). Prediction and the periodic aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics*, 58(3), 299-333.
- Hertel, J. & Cullen, C. (2011). Teaching Trigonometry: A Directed Length Approach. In Wiest, L. R., & Lamberg, T. (Eds.). *Proceedings of the 33rd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. pp. 1400-1407. Reno, NV: University of Nevada, Reno.
- Hitt, F. (2006). Students' functional representation and conceptions on the construction of mathematical concepts. An example: The concept of limit. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11, 253-258.
- Hitt, F. (2013). El infinito en matemáticas y el aprendizaje del cálculo: Infinito potencial versus infinito real. *El Cálculo y su Enseñanza*, (Vol 4, pp. 103-122). Cinvestav-IPN, México.
- Kendal, M., & Stacey, K. (1996). Trigonometry: Comparing ratio and unit circle methods. In P. Clarkson (Ed.), *Technology in Mathematics Education. Proceedings of the 19th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 322-329). Melbourne: Mathematics Education Research group of Australasia.
- Moore, K. (2009). Trigonometry, technology, and didactic objects. In Swars, S. L., Stinson, D. W., & Lemons-Smith, S. (Eds.) (2009). *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1480-1488). Atlanta, GA: Georgia State University.
- Moore, K. (2010). The role of quantitative and covariational reasoning in developing precalculus students' image of angle measure and central concepts of trigonometry. *Proceeding of the 13th Annual Conference of Research in Undergraduate Mathematics Education*. Raleigh, NC: North Carolina State University.
- Moreno, L. (2014). *Matemática educativa: Del signo al pixel*. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander.
- NCTM. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Pozo, J. (2006). *Nuevas formas de pensar*. Madrid: Graó.
- Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114- 145.
- Simon, M. & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91-104.
- Weber, K. (2005). Students' understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal*, 17(3), 91-112.