TECNOLOGÍA DIGITAL Y FORMULACIÓN DE PROBLEMAS DURANTE EL PROCESO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

DIGITAL TECHNOLOGY AND FORMULATION OF PROBLEMS DURING THE PROCESS OF SOLVING PROBLEMS

Daniel Aurelio Aguilar-Magallón
Cinvestav-IPN
aguilarm@cinvestav.mx

Isaid Reyes-Martìnez
Cinvestav-IPN
ireyes@cinvestav.mx

Se reportan y analizan diferentes tipos de preguntas y problemas planteados por futuros profesores de educación media superior durante el proceso de reconstruir configuraciones dinámicas de una figura dada en el enunciado de un problema geométrico. ¿En qué medida el uso de un Sistema de Geometría Dinámica (SGD) ayuda a los participantes para implementar actividades de planteamiento de problemas durante todas las fases de la resolución de problemas que incluyen la construcción de modelos dinámicos, la búsqueda de distintas soluciones y la extensión de la tarea inicial? Los participantes exhibieron estrategias que involucran el arrastre, deslizadores, medición y lugares geométricos para construir configuraciones dinámicas que los llevó a formular y explorar diversos problemas.

Palabras clave: Resolución de Problemas, Tecnología, Geometría y Pensamiento Geométrico y Especial, Maestros en Formación

Introducción

En los últimos treinta años, la resolución de problemas ha sido un dominio o área de investigación en educación matemática que relaciona el quehacer de la disciplina con el aprendizaje de los estudiantes (Santos-Trigo, 2014). Un principio fundamental en la resolución de problemas es la importancia de formular preguntas relevantes como medio para de entender, representar, explorar y resolver problemas (Polya, 1965). Así, estas preguntas son el medio para explorar conceptos y para desarrollar habilidades de resolución de problemas. Misfeldt y Johansen (2015) resaltan que la actividad de formular preguntas y problemas es un aspecto crucial y no trivial de la práctica profesional de los matemáticos. También, se reconoce que el avance científico y tecnológico generalmente se origina y relaciona con del planteamiento y seguimiento de preguntas o problemas novedosos. Einstein e Infield (1938) argumentan:

> La formulación de un problema es generalmente más importante que su solución, la cual puede ser simplemente una cuestión de habilidades matemáticas o experimentales. Para generar nuevas preguntas y nuevas posibilidades, para revisar viejas preguntas desde nuevos ángulos y para lograr avance real en la ciencia se requiere de imaginación creativa. (citado en Ellerton & Clarkson, 1996, p.1010).

En este contexto, un aspecto central en los ambientes de aprendizaje es que los estudiantes tengan la oportunidad de participar en actividades de planteamiento de problemas para profundizar en conceptos matemáticos durante todo el proceso de la resolución de problemas (Cai, Hwang, Jiang & Silber, 2015). Para este fin, resulta importante investigar en qué medida el uso de distintas herramientas, en particular el uso de SGD, permite a los participantes involucrarse en actividades de planteamiento de problemas a partir de interrogantes que surgen en ambientes de resolución de problemas. En este camino, la pregunta de investigación que guió el desarrollo de este estudio es: ¿Cómo y en que medida el uso de un SGD (GeoGebra) ofrece a los participantes estrategias para formular y dar seguimiento a preguntas o problemas durante las fases de resolución de problemas que

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.

incluyen la construcción de modelos dinámicos, búsqueda de distintas soluciones, extender las tareas iniciales y comunicar resultados?

Marco Conceptual

Planteamiento de problemas y el uso de la tecnología

El planteamiento de problemas se puede caracterizar a partir de tres actividades: (1) generación de un problema original a partir de una situación dada, (2) reformulación de un problema que se está resolviendo o (3) formulación de un problema nuevo modificando los objetivos o condiciones de un problema que ya ha sido resuelto (Rosli et al., 2015). Kılıç (2013) menciona que el planteamiento de problemas "involucra la generación de nuevos problemas y preguntas con el objetivo de explorar una situación dada así como a la reformulación de un problema durante el proceso de resolverlo" (p. 145). En esta perspectiva, el proceso de planteamiento de problemas puede ocurrir en cualquier fase de la resolución de problemas.

Actualmente se reconoce que el uso de tecnologías como GeoGebra genera oportunidades para desarrollar conocimiento matemático, pero también permite transformar escenarios de enseñanza alrededor de la resolución de problemas (Santos-Trigo, Reyes-Martínez & Aguilar-Magallón, 2015). En esta dirección, resulta necesario investigar cómo el uso de distintas herramientas digitales ofrece a los estudiantes caminos y oportunidades para representar, explorar, entender, resolver, generalizar y extender problemas. Algunos estudios reportan que las herramientas tecnológicas liberan al individuo de trabajo técnico relacionado con cálculos o gráficas y le permiten concentrarse en el análisis y el sentido de las relaciones o conceptos matemáticos (Lavy, 2015). Abramovich y Cho (2015) afirman que "El uso apropiado de herramientas tecnológicas digitales comúnmente disponibles pueden motivar y soportar actividades de planteamiento de problemas" (p. 71).

Lavy (2015) argumenta que el uso de un SGD puede jugar un papel importante en el planteamiento de problemas, pues permite de forma sencilla manipular, mover y deformar objetos geométricos, pero además facilita conjeturar y explorar relaciones matemáticas a partir de distintas representaciones. Leikin (2015) menciona que una forma de plantear problemas con ayuda de un SGD es mediante tareas de investigación; donde se formulan interrogantes y problemas a partir de la exploración de configuraciones dinámicas que surgen al resolver problemas geométricos de demostración. Una idea fundamental en el trabajo de Leikin (2015) son las tareas o actividades para favorecer o promover episodios de resolución y planteamiento de problemas. Imaoka et al. (2015) consideran algunos elementos fundamentales de este tipo de tareas donde se usa un SGD. Por un lado, las tareas deben tener características que el estudiante pueda usar para plantear problemas; por ejemplo, los problemas deben motivar múltiples representaciones o deben involucrar la medición de atributos, como áreas, perímetros o longitudes. Por otro lado, las tareas deben estar pensadas para trabajarse dentro del SGD, en otras palabras, que la solución a las tareas pueda encontrarse por medio de la formulación y exploración de conjeturas más que por la aplicación de algoritmos conocidos.

Metodología

En este estudio participaron nueve estudiantes de una Maestría en Educación Matemática a lo largo de catorce sesiones de trabajo semanal con duración de tres horas cada una. Las sesiones se desarrollaron en un laboratorio de cómputo donde cada participante tuvo acceso a una computadora. En cuanto a la forma de trabajo, se intentó crear una comunidad de aprendizaje donde los participantes tuvieran la oportunidad de enfrentarse a tareas de resolución y formulación de problemas con el apoyo de diversas herramientas digitales (GeoGebra). Esencialmente se diseñaron e implementaron tres tipos de problemas: problemas de investigación, problemas de demostración y problemas de construcción. Siguiendo las ideas de Leikin (2015), en los problemas de investigación

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.

los participantes analizaron y exploraron configuraciones geométricas dinámicas prediseñadas dentro del SGD con el objetivo de formular problemas. Otro tipo de tarea fue la resolución de problemas geométricos de demostración. Por último, en los problemas de construcción el objetivo fue construir figuras o elementos geométricos básicos (rombos, tangentes, triángulos, rectángulos, cónicas, entre otros) a partir de condiciones iniciales dadas.

El trabajo durante las sesiones estuvo dividido en dos etapas. En una primera etapa los participantes trabajaron de manera individual. En la segunda etapa se generaron discusiones plenarias donde los participantes presentaban sus ideas y había una retroalimentación directa del grupo y de los coordinadores del grupo.

Resultados

En esta sección se discutirán algunos episodios que muestran cómo los participantes se involucraron en actividades de planteamiento de problemas durante el proceso de resolver un problema tradicional de geometría. En particular, el análisis se centra en cómo el uso de GeoGebra ayudó a los participantes para plantear problemas novedosos como resultado de reconstruir figuras presentes en el enunciado del problema.

Planteamiento de problemas antes de la resolución de un problema

Existe una gran variedad de problemas geométricos en los cuales la información o condiciones son presentados por medio de figuras o configuraciones geométricas. Por ejemplo, la Figura 1 es parte del enunciado de un problema donde se solicita probar cierta relación entre los objetos matemáticos involucrados. Comúnmente, cuando se resuelven problemas de forma tradicional (con papel y lápiz) el estudiante no se plantea la tarea de reconstruir las figuras que aparecen en el enunciado del problema. Cuando se trabaja el problema dentro de un SGD, resulta esencial pensar en las formas de obtener una representación dinámica que generalmente involucra el enunciado del problema. Por ejemplo, durante una de las sesiones se pidió a los participantes que trabajaran con el siguiente problema:

Problema 1. La Figura 1 muestra dos círculos, un ángulo y un triángulo equilátero. Demuestre que la suma de los radios de las circunferencias es igual a la altura del triángulo. (adaptado de Leikin, 2007).

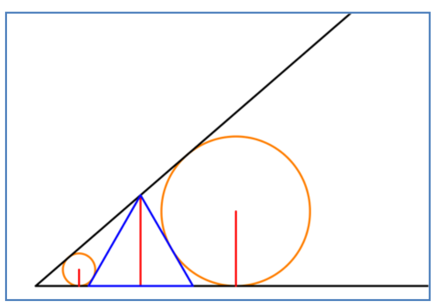


Figura 1. Probar que la suma de los radios de las circunferencias es la altura del triángulo.

¿Cómo reconstruir una representación dinámica del problema? Los participantes observaron que la figura del problema incluía cuatro elementos (un ángulo, dos circunferencias y un triángulo) y formularon la siguiente pregunta: ¿con qué elemento comenzar? Esta pregunta los condujo a plantear problemas asociados con diferentes caminos para reconstruir la configuración geométrica. La Tabla 1 muestra algunas rutas sugeridas por los participantes y los problemas formulados. Los participantes identificaron seis formas distintas de obtener la configuración dinámica del problema (en total existen 18 formas de construirla). En algunos casos, obtener la representación del problema inicial se redujo a formular y resolver problemas similares o idénticos. Por ejemplo para la primera y tercera opción, al final se requirió construir las circunferencias tangentes a los rayos del ángulo y al triángulo equilátero.

Tabla 1: Algunas rutas identificadas por los participantes para obtener la configuración geométrica del problema

Opción	Orden de la construcción	Problemas formulados
1	Ángulo Triángulo equilátero Circunferencias	1.1 Trazar el triángulo equilátero, a partir del ángulo formado por dos rectas. 1.2 Trazar las circunferencias tangentes, a partir del ángulo y el triángulo.
2	Circunferencias Ángulo Triángulo equilátero	1.3 Trazar el ángulo, partiendo de las dos circunferencias. 1.4 Trazar el triángulo equilátero, a partir del ángulo y las circunferencias.
3	Circunferencia Ángulo Triángulo equilátero Circunferencia	1.5 Trazar el ángulo, teniendo una circunferencia. 1.6 Construir el triángulo equilátero, teniendo el ángulo y una circunferencia. 1.7 Trazar la circunferencia tangente a los rayos del ángulo y al lado del triángulo.

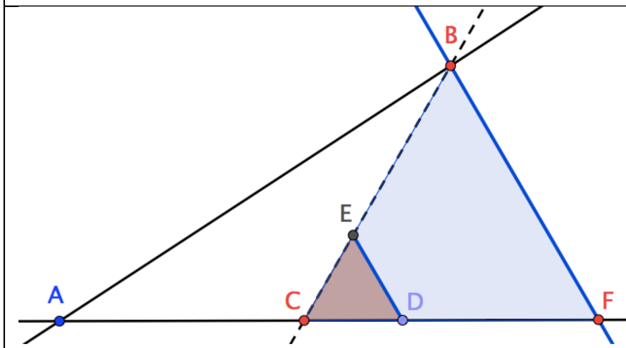
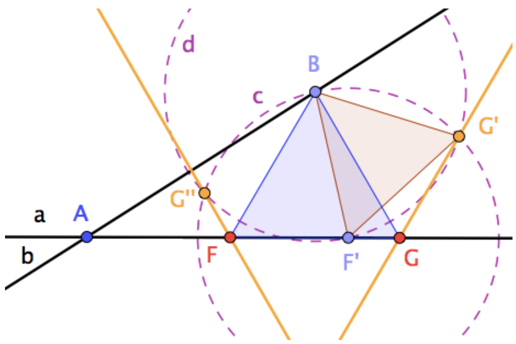
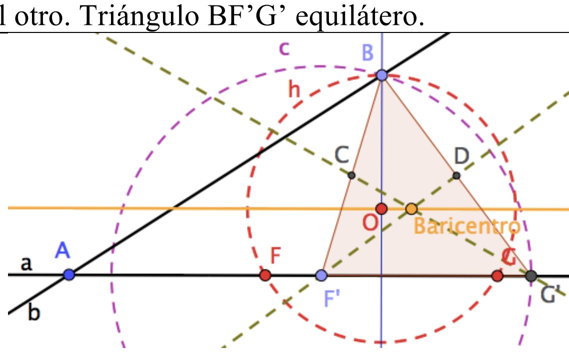
Después de identificar distintos caminos para construir la configuración geométrica del problema 1 los participantes resolvieron algunos de los problemas formulados. En la siguiente sección se describen algunas soluciones obtenidas para el problema 1.1.

Planteamiento de problemas durante la resolución del problema

Durante la resolución del problema 1 se exhibieron actividades de planteamiento de problemas. Por ejemplo, los participantes formularon y exploraron diferentes formas de reconstruir la figura involucrada en el enunciado del problema. Para este fin, fueron útiles algunas heurísticas de resolución de problemas vinculadas directamente con estrategias de reformulación; por ejemplo relajar las condiciones del problema, resolver un problema similar o más simple, descomponer el problema en problemas subsidiarios, analizar casos particulares o extremos, entre otras (Cai et al., 2013).

Considerar trazos auxiliares y lugares geométricos como estrategia de resolución y planteamiento de problemas. En una sesión posterior se discutieron, de forma plenaria, distintas rutas para obtener la configuración dinámica del problema inicial. En esta discusión, se resaltaron estrategias de reformulación basadas en la heurística de relajar las condiciones del problema para simplificarlo. Por ejemplo para resolver el problema 1.1 se discutieron tres soluciones distintas. En la Tabla 2 se muestra la descripción de las construcciones, el proceso de reformulación y las estrategias de solución del problema 1.1.

Tabla 2: Procesos de reformulación y estrategias de solución del problema 1.1

Construcción	Proceso de reformulación	Estrategia de solución
 1. Punto C fijo sobre un rayo del ángulo. Triángulo CDE equilátero. Punto de intersección B de la recta CE con el rayo del ángulo. Recta BF paralela a ED.	Problema: construir un triángulo equilátero CDE que tenga su base CD en un rayo del ángulo. Condición relajada: el vértice E no está en el otro rayo del ángulo.	Una vez obtenido el triángulo CDE equilátero, trazar un triángulo CFB semejante (equilátero) por medio de una recta paralela.
 2. Punto B fijo en uno de los rayos y F' móvil en el otro. Triángulo BF'G' equilátero.	Problema: Construir un triángulo equilátero BF'G' que tenga sus vértices B y F' sobre los rayos del ángulo. Condición relajada: la base del triángulo equilátero no está sobre uno de los rayos del ángulo.	Visualización del lugar geométrico que genera el vértice G' del triángulo equilátero BF'G' cuando se mueve el vértice F'. Solución cuando el vértice G' está sobre el rayo del ángulo.
 3. Punto B fijo en uno de los rayos y F' móvil en el otro. Triángulo isósceles BF'G' tal que BF'=F'G'. Baricentro del triángulo BF'G'. Altura de triángulo BF'G' asociada al vértice B.	Problema: construir un triángulo isósceles BF'G' que tenga un lado sobre un rayo del ángulo y un vértice sobre el otro. Condición relajada: el triángulo no es equilátero.	Visualización del lugar geométrico descrito por el baricentro del triángulo BF'G' cuando se mueve el punto F'. Solución cuando el baricentro está sobre la altura (en un triángulo equilátero baricentro, ortocentro, circuncentro e incentro coinciden; punto O).

Durante la construcción del triángulo equilátero, los participantes formularon preguntas acerca del comportamiento o propiedades de algunos objetos usados para construir dicho triángulo. Por ejemplo, en el acercamiento que involucra la construcción del baricentro del triángulo plantearon: ¿qué propiedades tiene el lugar geométrico descrito por el baricentro del triángulo? ¿es una línea paralela a la base? ¿en qué proporción divide el punto O a la altura del triángulo BF'G' (asociada con el vértice B)? ¿la proporción es 2/3?

Planteamiento de problemas después de la resolución del problema

Resolver el problema 1.1 condujo a resolver el problema 1.2, es decir, trazar las circunferencias tangentes a las rectas y al triángulo equilátero. En la discusión plenaria, los participantes resolvieron el problema 1.2 por medio del trazado de las bisectrices de los ángulos externos del triángulo y la bisectriz del ángulo formado por las dos rectas (Figura 2). Finalmente, el problema inicial (Problema 1) se resolvió de diversas maneras; en las Figuras 2 y 3 se muestran dos de ellas. La primera solución involucra el Teorema de Viviani que menciona que para cualquier punto sobre un triángulo equilátero se cumple que la suma de las distancias de dicho punto a los lados del triángulo es igual a su altura. La segunda solución implica construir un rectángulo ELHI con EH=IL igual a uno de los radios, para después demostrar que el cuadrilátero FGIC (donde FG es igual al otro radio) es un paralelogramo, como se observa en la Figura 3.

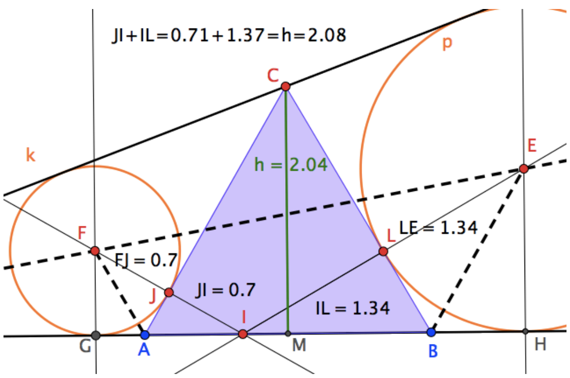


Figura 2. Solución probando que FJ=JI y LE=IL para aplicar teorema de Viviani.

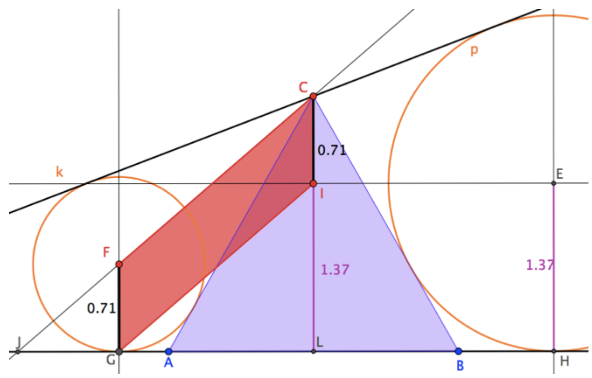


Figura 3. Solución probando que el cuadrilátero FGIC es un paralelogramo.

¿Qué preguntas o problemas formularon los participantes después de resolver el problema inicial? En general, los participantes se centraron en formas de generalizar y extender los métodos usados para resolver el problema como plataforma para plantear nuevos problemas. Algunos problemas planteados por los participantes fueron los siguientes:

- Problema 1.8. Teniendo dos rectas que se intersecan y dos circunferencias tangentes a ellas ¿siempre es posible construir un triángulo equilátero entre las dos circunferencias como en la Figura 1? ¿Qué relación debe existir entre la posición de las circunferencias para que sea posible construir el triángulo equilátero?
- Problema 1.9. Teniendo dos rectas que se intersecan y dos circunferencias tangentes a ellas ¿es posible construir un triángulo isósceles entre las dos circunferencias?
- Problema 1.10. ¿Si el triángulo es isósceles se cumple que la suma de los radios es igual a la altura del triángulo?

Los participantes examinaron el modelo dinámico construido para explorar el problema 1.8 y concluyeron que no siempre es posible construir un triángulo equilátero dados el ángulo y las circunferencias tangentes. Más aún, descubrieron que dados el ángulo y las circunferencias siempre es posible trazar un triángulo isósceles entre las dos circunferencias y tangente a ellas. Un vértice del triángulo es la intersección de un rayo del ángulo con la mediatriz del segmento que une los centros de las circunferencias. La configuración dinámica mostrada en la Figura 4 se usó para mostrar que la suma de los radios de los círculos es igual a la altura del triángulo isósceles ABC.

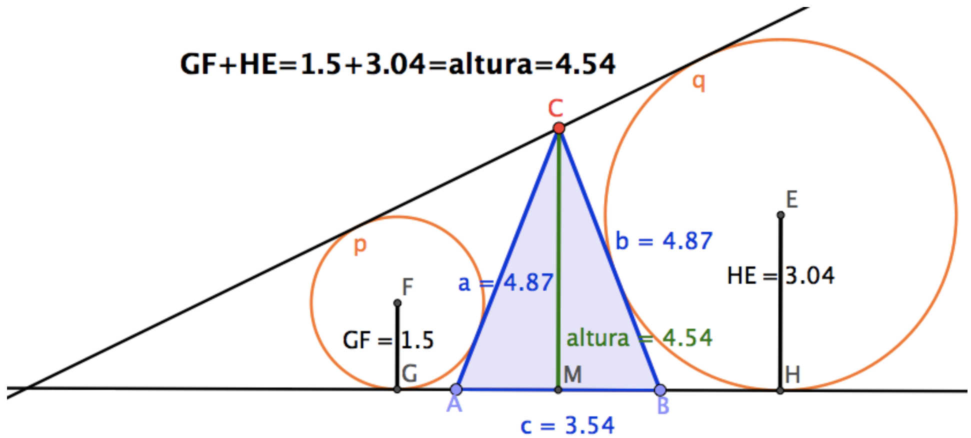


Figura 4. La proposición del problema 1 se cumple cuando el triángulo es isósceles**.**

Discusión de resultados

Normalmente, cuando se resuelven problemas la atención se enfoca principalmente en obtener un resultado. El uso de GeoGebra permitió a los participantes poner atención en otros aspectos de la resolución de problemas. Uno de estos aspectos fue considerar distintas maneras de representar una situación problemática lo cual motivó un episodio de planteamiento de problemas. El reflexionar sobre los posibles caminos para obtener una representación dinámica del problema 1 permitió a los participantes problematizar y conectar diversas propiedades de figuras básicas como triángulos, circunferencias y rectas tangentes. Además, los participantes identificaron un conjunto de relaciones que surgieron a partir de la exploración del modelo dinámico. Por ejemplo, encontraron que para obtener la configuración dinámica del problema inicial el ángulo definido por las dos rectas debe ser menor de 60º.

Gracias a las herramientas que ofrece el SGD para dar movimiento a objetos matemáticos, los participantes lograron implementar procesos de reformulación de problemas. En este camino, el uso de la heurística "relajar las condiciones del problema" fue fundamental. Construir trazos auxiliares y visualizar lugares geométricos fueron estrategias usadas por los participantes no solo para resolver problemas de formas novedosas, sino también como plataforma para plantear problemas. Después de visualizar lugares geométricos, una actividad recurrente de formulación de problemas, fue explorarlo y describirlo en términos de sus propiedades.

Conclusiones

¿Qué tipo de preguntas o problemas plantean futuros profesores cuando se apoyan de herramientas digitales para representar y explorar problemas matemáticos? En este estudio se documentó que futuros profesores pueden involucrarse en actividades de planteamiento de problemas durante todas las fases presentes al resolver un problema. Para este fin, el objetivo de reconstruir una figura dada (que involucra dos circunferencias, un ángulo y un triángulo equilátero) en un problema tradicional, fue el punto de partida para formular problemas relacionados con el orden para obtener dicha configuración. Después, identificaron e implementaron diferentes formas de construir objetos particulares, como un triángulo equilátero, a partir de ciertas condiciones. De forma similar, la exploración del modelo dinámico del problema inicial no solo les ayudó a formular nuevas preguntas, sino también a buscar argumentos para soportar resultados matemáticos. Al final, los participantes se enfocaron en las condiciones necesarias para construir un modelo consistente y robusto del problema; lo que los condujo a encontrar que la medida del ángulo tiene que ser menor

que 60º y también les permitió concluir que siempre es posible construir un triángulo isósceles en medio de los círculos tangentes. Varias estrategias de resolución de problemas les ayudaron a examinar casos particulares (relajando las condiciones iniciales) para explorar el comportamiento de objetos e identificar relaciones matemáticas. En particular, algunas permisibilidades de la herramienta (GeoGebra) como el arrastre de objetos, lugares geométricos, medición de atributos y el uso de deslizadores fueron importantes para encontrar y soportar conjeturas. Inicialmente, estas conjeturas fueron soportadas por medio de argumentos empíricos; pero después los participantes presentaron argumentos geométricos y algebraicos.

We analyze and discuss ways in which prospective high school teachers pose and pursue questions or problems during the process of reconstructing dynamic configurations of figures given in problem statements. To what extent does the systematic use of a Dynamic Geometry System (DGS) help the participants engage in problem posing activities throughout problem solving phases that include the construction of dynamic models, the search for different solutions methods and the process of extending initial statements? The participants relied on technology affordances such as dragging objects, using sliders, quantifying relations, and drawing loci to construct dynamic configurations that led them formulate and pursue different problems.

Keywords: Problem Solving, Technology, Geometry and Geometrical and Spatial Thinking, Teacher Education-Preservice

Introduction

In the last thirty years, problem solving has been a research domain in mathematics education, which relates the practicing or development of mathematics and the ways in which students learn the discipline (Santos-Trigo, 2014). A fundamental principle in a problem solving approach is that learners engage in an inquiring process as a means to understand, represent, explore, and solve mathematical tasks (Polya, 1965). Thus, questions are the vehicle for learners to explore concepts and to formulate and develop problem solving competencies. Misfeldt and Johansen (2015) pointed out that the activity of formulating problems is a crucial aspect that distinguishes the work and professional practice of mathematicians. Indeed, it is also recognized that progress and developments in scientific and technological fields involve both the formulation of questions and the process to follow up those questions. Einstein and Infield (1938) argue that:

> The formulation of a problem is often more essential than its solution, which may be merely a matter of mathematical or experimental skills. To raise new questions, new possibilities, to regard old questions from new angle, require creative imagination and marks real advance in science. (Cited in Ellerton & Clarkson, 1996, p.1010).

In this context, a central aspect in learning environments is that students have an opportunity to engage in problem posing activities in order to delve into mathematical concepts and during the entire process of solving problems. (Cai, Hwang, Jiang & Silber, 2015). To this end, it becomes important to investigate the extent to which the students' use of different digital technologies and in particular the use of a DGS provides opportunities to engage them in problem posing activities and ways to follow up related questions in problem solving environments. Thus, the research question that guides the development of the study is: How and to what extent does the systematic use of a Dynamic Geometry System (GeoGebra) provide the participants the affordances to formulate and pursue questions or problems during problem solving phases that include construction or reconstruction of dynamic models, thinking of and implementing various solution methods, extending mathematical tasks and communication of results or solutions?

Conceptual Framework

Problem posing and the use of digital technology

Learners can engage in problem posing activities in contexts and situations that involve: (1) the generation of an original problem from a given information or data (2) the reformulation of a problem such as solving a simpler or related problem as a means to delve and solve an initial problem or (3) the formulation of a new problem by modifying the objectives or conditions of a given problem (Rosli et al., 2015). Kılıç (2013) mentions that the problem posing "is defined as the creation of new problems or the reformulation of a given problem" (p. 145). In this perspective, the process of problem posing might occur during or at any stage of the solution process.

It is now recognized that the use of digital technologies such as GeoGebra provides learners an opportunity to extend ways of reasoning about problems and learning environments need to encourage students to rely and value the use of several digital technologies in their problem solving experiences (Santos-Trigo, Reyes-Martínez, & Aguilar-Magallón, 2015). In this direction, it is necessary to investigate how the use of different digital tools offers students ways and opportunities to represent, explore, understand, solve, generalize and extend problems. Some studies report that the use of technological tools releases the individual technical work that involves calculations or graphs and helps students to concentrate on the analysis and making sense of relationships or mathematical concepts (Lavy, 2015). Abramovich and Cho (2015) state that "the appropriate use of commonly available digital technology tools can motivate and support problem posing activities" (p. 71).

Lavy (2015) argues that the use of a DGS can play an important role in the problem posing, which allows a simple way to manipulate, move and deform geometric objects, but also facilitates the formulation of conjectures and the exploration of mathematical relationships from different representations.

Leikin (2015) mentions that one way to pose problems with the help of a DGS is through investigation tasks; where questions and problems are formulated from exploring dynamic configurations that arise when geometric problems are solved. A fundamental idea in the work of Leikin is to ask learners to work on tasks or activities to facilitate or promote both the formulation and solution of problems. Imaoka, Shimomura, and Kanno (2015) consider some fundamental elements of these tasks where a DGS is used. Tasks should have features that students can use to pose problems; for example, problems should encourage multiple representations or should involve the measurement of attributes, such as areas, perimeters and lengths. Also, tasks must be designed to be worked within the DGS, in other words, the solution to the tasks should be found through the development and exploration of conjectures rather than the application of known algorithms.

Methodology

In this study, nine students participated in a Problem Solving course as part of a Master program in Mathematics Education over fourteen weekly working sessions lasting three hours each. The sessions were developed in a computer lab where each participant had access to a computer. As for the way they work, we tried to create a learning community where participants had the opportunity to face posing and solving problems with the support of digital tools (GeoGebra). Essentially three types of task were designed and implemented: investigation problems, demonstration problems and construction problems. Following the ideas of Leikin (2015), in investigation problems, the participants discussed and explored dynamic geometric configurations through the use of GeoGebra with the aim of formulating problems. Another type of task was to solve geometric demonstration problems. Finally, in the construction problems the objective was to draw or represent simple mathematical objects (rhombus, tangents, triangles, rectangles, conics, etc.) dynamically in order to find, formulate, and support mathematical relations.

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.

The dynamic of the session involved two main activities: In the first stage the participants worked individually and later discussed his/her ideas with another participant (pair work). In the second stage there was collective or plenary discussion where they presented their ideas and received direct feedback from the group and the group course coordinators.

Results

In this section, we present and discuss some episodes that show how the participants engaged in problem posing activities during the process of solving a traditional geometry problem. In particular, we focus on analyzing how the use of GeoGebra opened up novel ways for the participants to formulate problems as a result of reconstructing figures associated with problem statements.

Problem posing before solving a problem

There is a variety of geometric problems for which the information or conditions are given through figures or geometric configurations. For instance, Figure 1 is part of a statement in which learners are asked to prove a certain relation of involved objects. Usually, when problems are solved in a traditional way (with paper and pencil) students do not ask themselves how to reconstruct the figures shown in the problem statement. However, with the use of GeoGebra it is natural to ask about ways to reconstruct the figure(s) involved in problem solving statements. For example, during one of the sessions, the participants were asked to work on the following task:

Problem 1. The Figure 1 shows two circumferences, an angle and an equilateral triangle. Prove that the sum of the circles' radii is equal to the height of the triangle (adapted from Leikin, 2007).

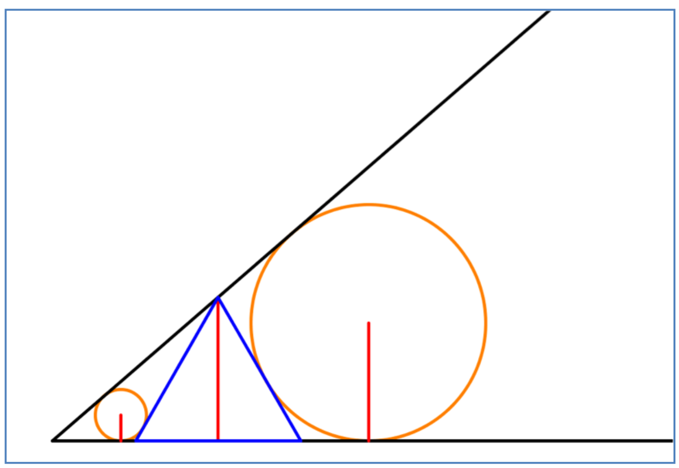


Figure 1. Prove that the sum of the circles radius is equal to the height of the triangle.

How to draw a dynamic representation of the problem? Participants noted that the figure of the problem included four elements (an angle, two circles and a triangle) and formulated the following question: with which elements do we begin? This question led the participants to select and pursue different ways to reconstruct the geometry configuration. Table 1 shows some approaches suggested by the participants and the problems they formulated to construct the figure. Participants identified six different ways to get the dynamic configuration of the problem (in total there are 18 ways to get it). In some cases, representing the initial problem consisted of formulating and solving similar or identical problems. For example, for the first and third option, in the end it was required to construct the circumferences that are tangent to the ray and to the equilateral triangle.

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.

Table 1: Approaches identified by the participants to draw the geometric configuration of the problem

Option	Order of the Construction	Formulated problems
1	Angle Equilateral triangle Circle	1.1 Draw an angle formed by two straight lines and construct the equilateral triangle. 1.2 Draw tangent circles to an angle and the triangle.
2	Angle, tangent circles Equilateral triangle	1.3 Get the angle. Draw two tangent circles to the angle. 1.4 Construct the equilateral triangle tangent to the angle and the circles.
3	Circle, Angle Equilateral triangle Circle	1.5 Draw a circle and construct the angle whit two tangent lines. 1.6 Construct the equilateral triangle, having the circle and the angle. 1.7 Construct tangent circle to the sides of the angle and the side of the triangle.

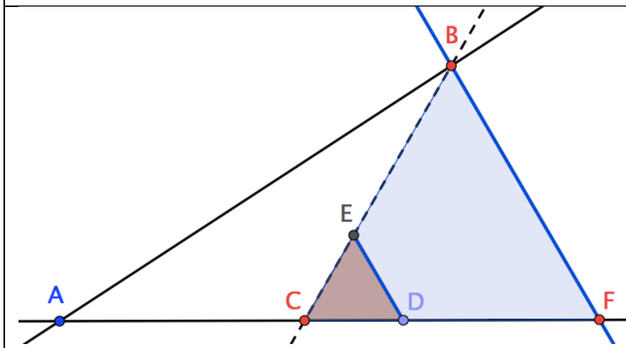
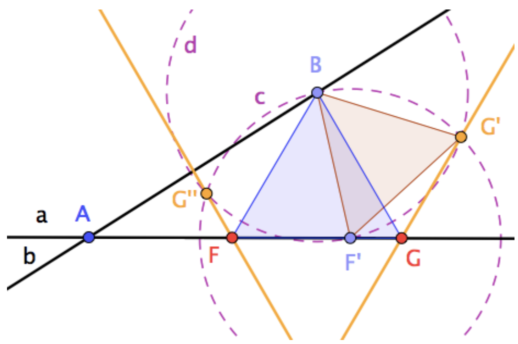
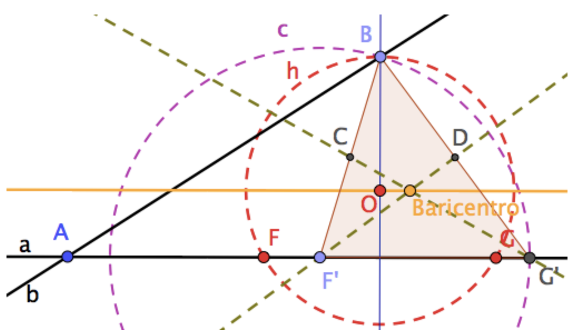
After identifying various ways to construct the geometrical configuration of the problem 1 the participants solved some of the formulated problems. The following section provides some solutions obtained for the problem 1.1.

Problem posing during the resolution of the problem

Problem posing activities were shown during the process of solving problem 1. For instance, the participants formulated and explored different ways to draw the figure in the problem. To this end, some problem solving heuristics helped them pursue some ways to draw a dynamic model of the figure. These heuristic involve: relaxing the task conditions of the problem, solving a similar or simpler problem, decomposing the problem in simpler problems, analyzing particular or extreme cases, etc. (Cai et al., 2013).

Considering auxiliary objects and geometric loci as a strategy for posing and solving problems. In a later session the participants discussed as a whole group ways to draw a dynamic model of figure 1. The heuristic that involves relaxing the initial conditions to simplify the problem was implemented. Thus, the participants showed three different routes to construct an equilateral triangle (problem 1.1). Table 2 shows the main ideas associated with the constructions, the process of reformulation, and solution strategies.

Table 2: Reformulation process and solution strategies of problem 1.1

Construction	Reformulation process	Solution strategy
 1. Fix point C on a ray of the angle and draw an equilateral triangle CDE. Identify the intersection point B of line EC and ray AB (side of angle) and draw line BF parallel to ED.	Problem: Draw an equilateral triangle CDE having its base CD on a ray of the angle. Relaxed condition: the vertex E does not belong to the other ray of the angle.	Once the equilateral triangle CDE is obtained, draw a similar triangle CFB (equilateral) through a parallel line.
 2. Let point B be a fixed point on one of the rays of the angle and F a mobile point on the other ray. BF'G' equilateral triangle.	Problem: Draw an equilateral triangle BF'G' whose vertices B and F' are on the rays of the angle respectively. Relaxed condition: the base of the equilateral triangle is not necessary on the ray of the angle.	Draw the locus generated by the vertex G' of the equilateral triangle BF'G' when the point F' is moved along one ray of the angle. The solution is achieved when vertex G' is on the ray of the angle.
 3. Let point B be a fixed point on one of the rays and F' a mobile point on the other ray. Draw an isosceles triangle BF'G' such that BF' = F'G'; centroid of triangle BF'G'. Draw the height of triangle BF'G' that passes through vertex B.	Problem: draw an isosceles triangle BF'G' having a side on one ray of the angle and a vertex on the other side. Relaxed condition: the triangle is not equilateral.	Draw the locus generated by the centroid of the isosceles triangle BF'G' when the point F' moves along the side of the angle. Solution is achieved when the centroid is on the height (in an equilateral triangle centroid, orthocenter, circumcenter and incenter all coincide; point O).

During the construction of an equilateral triangle, the participants formulated questions about properties or behaviors of objects that appeared or were used to draw the triangle. For example, in the

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.

approach that involved the construction of the triangle centroid, they posed: What are the properties of the locus described by the centroid of the triangle? Is it a line parallel to the base? In which proportion does point O divide the height of the triangle BF'G' (associated with the vertex B)? Is it a ratio of 2/3?

Problem posing after the resolution of a problem

Solving problem 1.1 led the participant to solve problem 1.2, i.e. they traced the tangent circles to the angle and equilateral triangle. In the whole group discussion, participants solved the problem 1.2 by drawing the bisectors of the exterior angles of the triangle and bisecting the angle formed by the two rays of the angle (Figure 2). Finally, the initial problem (Problem 1) was solved in various ways; Figures 2 and 3 show two of the ways. The first solution involves Viviani's Theorem which states that for any interior point on an equilateral triangle it is true that the sum of the distances from that point to the sides of the triangle is equal to its height. The second solution involves building a rectangle EHLI (EH = IL equal to one of the radii) to demonstrate that the quadrilateral FGIC (where FG is equal to the other radius) is a parallelogram, as shown in Figure 3.

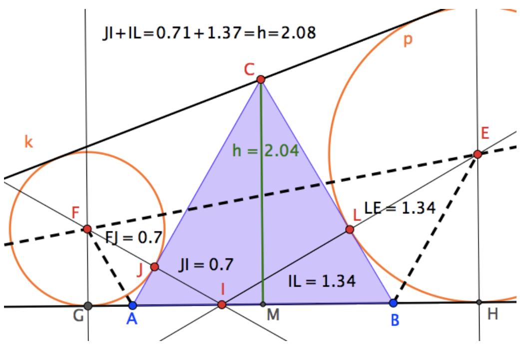


Figure 2. Solution proving FJ = JI and LE = IL to apply Viviani's theorem.

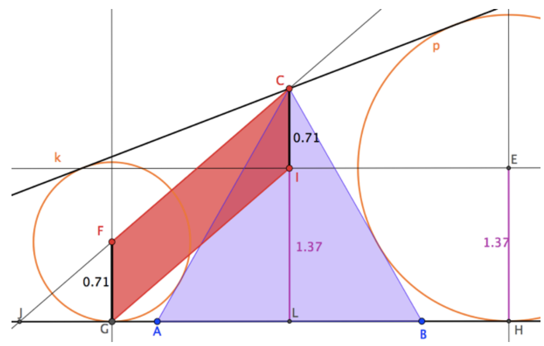


Figure 3. Solution proving that the quadrilateral FGIC is a parallelogram.

What questions or problems did the participants formulate after solving the initial task? In general, the participants focused on ways to generalize and extend the methods they used to solve the task as a means to propose new questions. Some examples of problem that the participants formulated included:

- Problem 1.8: Given two intersecting lines and two circles that are tangent to them is it always possible to construct an equilateral triangle between the two circumferences as shown in Figure 1? What relationship should exist between the positions of the circumferences to make it possible to construct the equilateral triangle?
- Problem 1.9: Given two intersecting lines and two circles that are tangent to them is it possible to construct an isosceles triangle between the two circles?
- Problem 1.10: If the given triangle is isosceles, instead of equilateral, does it hold that the sum of the radius is equal to the height of the triangle?

The participants examined the dynamic model that they had constructed of the task (problem 1.8) and concluded that it was not always possible to draw and equilateral triangle from a given angle and tangent circles. Indeed, they found that given an angle and the tangent circles it is always possible to draw an isosceles triangle between the circles that is tangent to them. A vertex of this triangle is the intersection of the perpendicular bisector of the segment that joins the centers of the circle and one ray of the angle. Figure 4 was used to show that the sum of the radii of the tangent circles is equal to the height of the isosceles triangle ABC.

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.

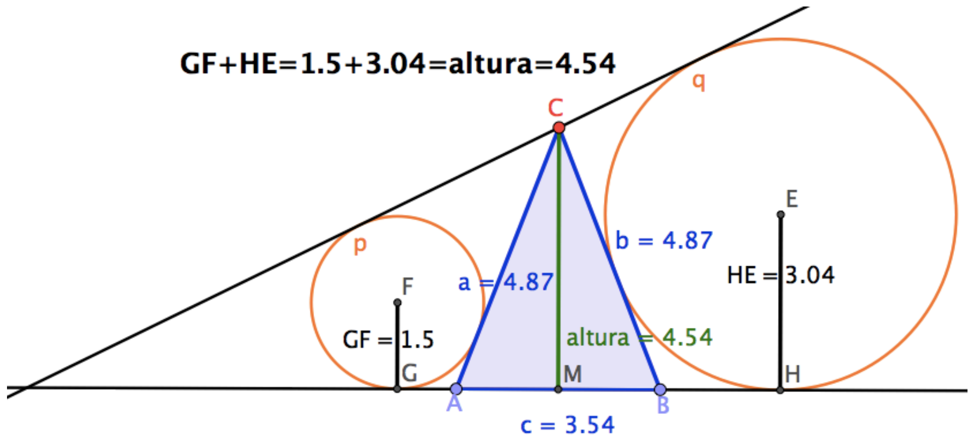


Figure 4. The sum of the radii of the tangent circles is equal to the height of the isosceles triangle.

Discussion of Results

In general, when learners are asked to solve problems they mainly focus on getting a solution to the problem. The use of GeoGebra allowed participants to pay attention to other aspects of problem solving. One of these aspects was to consider different ways to represent the given situation, which led them to formulate and pursue new problems. Focusing on possible ways to construct a dynamic representation of the problem 1 enabled the participants to problematize and connect various properties, concepts and results associated with triangles, circles and tangents. In addition, the participants identified a set of relations that emerged during the dynamic exploration of the model. For instance, they found that in order to construct the model of the problem, the angle defined by the two lines must be less than 60 degrees.

The affordances provided by the DGS allowed the participants to move objects within the model and to constantly pose questions about the objects' behaviors. "Relaxing the initial conditions of the problem" became an important heuristic. Similarly, the participants used strategies such as introducing auxiliary objects and visualizing geometric loci not only to solve problems in new ways, but also to pose new problems. After visualizing geometric loci, a recurrent activity in the formulation of problems, exploring and describing in terms of its properties also happened.

Conclusions

What types of questions or problems do prospective high teachers pose when they rely on digital technology affordances to represent and explore mathematical problems? In this study, we document that prospective teachers can engage in problem solving activities throughout all problem solving stages. To this end, the goal of reconstructing a given figure (that involved an angle, two tangent circles and an equilateral triangle) in a traditional problem became a point of departure to formulate problems related to the order to draw the elements involved in the figure. Later, focusing on ways to draw a particular object, an equilateral triangle, led them to identify and implement several ways to achieve this task. Similarly, the exploration of the dynamic model of the task not only helped them formulate new questions; but also to look for arguments to support mathematical results. At the end, the participants asked about conditions to construct a consistent model of the task and this led them to find out that the measure of the angle must be less than 60 degrees and also that it was always possible to draw an isosceles triangle between the tangent circles. In addition, several problem solving strategies helped them to examine particular cases (relaxing initial conditions) to explore objects' behaviors and to identify mathematical relations. In particular, GeoGebra software affordances that include dragging objects, finding loci, quantifying attributes and using sliders

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.

became important to find and support conjectures. These conjectures were initially supported through empirical arguments; but later the participants gave geometric and algebraic arguments.

References

Abramovich, S., & Cho, E. K. (2015). Using digital technology for mathematical problem posing. In F. M. Singer, N. F. Ellerton, J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing* (pp. 71-102). New York: Springer.

Cai, J., Hwang, S., Jiang, C., & Silber, S. (2015). Problem-Posing in mathematics education research: Some questions answered and unanswered. In F. M. Singer, N. F. Ellerton & J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing* (pp. 3-34). New York: Springer.

Cai, J., Moyer, J. C., Wang, N., Hwang, S., Nie, B., & Garber, T. (2013). Mathematical problem posing as a measure of curricular effect on students' learning. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 57-69.

Ellerton, N. F., & Clarkson, P. C. (1996). Language factors in mathematics teaching and learning. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 987-1033). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Imaoka, M., Shimomura, T., & Kanno, E. (2015). Problem posing in the upper grades using computers. In F. M. Singer, N. F. Ellerton & J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing* (pp. 257-272). New York: Springer.

Kılıç, Ç. (2013). Turkish primary school teachers' opinions about prep applications posing problem: students, the mathematics curricula and mathematics textbooks. *Australian Journal of Teacher Education*, *38*(5), p. 10.

Lavy, I. (2015). Problem-Posing activities in a dynamic geometry environment: When and how. In F. M. Singer, N. F. Ellerton & J. Cai (Eds.), *Mathematical Problem Posing* (pp. 393-410). New York: Springer.

Leikin, R. (2007). Habits of mind associated with advanced mathematical thinking and solution spaces of mathematical tasks. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the fifth conference of the European Society for Research in Mathematics Education-CERME-5* (pp. 2330-2339). Larnaca, Cyprus.

Leikin, R. (2015). Problem posing for and through investigations in a dynamic geometry environment. In F. M. Singer, N. F. Ellerton & J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing* (pp. 373-391). New York: Springer.

Misfeldt, M., & Johansen, M. W. (2015). Research mathematicians' practices in selecting mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics*, *89*(3), 357-373.

Polya, G. (1965). *How to suggest and solve problems*. Mexico: Trillas.

Rosli, R., Capraro, M. M., Goldsby, D., Gonzalez, E. G., Onwuegbuzie, A. J., & Capraro, R. M. (2015). Middle-Grade preservice teachers' mathematical problem solving and problem Posing. In F. M. Singer, N. F. Ellerton & J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing* (pp. 333-354). New York: Springer.

Santos-Trigo, M. (2014). Problem solving in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 496-501). Netherlands: Springer

Santos-Trigo, M., Reyes-Martínez, I., & Aguilar-Magallón, D. (2015). The use of digital technology in extending mathematical problem solving reasoning. In L. Uden, D. Liberona, & T. Welzer (Eds.), *Learning technology for education in cloud* (Vol. 533, pp. 298-309). Springer International Publishing.