CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA DEL VOLUMEN DE PRISMAS EN PRIMARIA

MATHEMATICS KNOWLEDGE FOR TEACHING THE VOLUME OF PRISMS IN ELEMENTARY SCHOOL

Ivonne Sandoval
Universidad Pedagógica Nacional-México
isandoval@upn.mx

José-Luis Lupiáñez
Universidad de Granada-España
lupi@ugr.es

Mario Moctezuma
Universidad Pedagógica Nacional-México
mario781207@gmail.com

El estudio de objetos tridimensionales en el currículo mexicano se aborda en toda la educación básica. Sin embargo, hay pocos estudios sobre el conocimiento matemático para la enseñanza de los profesores al respecto. Este reporte da cuenta de un acercamiento a dicho conocimiento, a partir de la observación de las clases, que tres profesoras de sexto grado ponen en juego cuando enseñan a sus estudiantes a calcular el volumen de prismas en dos escuelas de la ciudad de México. Los resultados muestran evidencias respecto a ciertos subdominios del conocimiento matemático para la enseñanza. Si bien hay fortalezas en dicho conocimiento, también algunas carencias, lo que muestra la necesidad de construir espacios formativos (inicial y continua) donde el análisis y discusiones favorezcan el aprendizaje de conocimientos tanto geométricos como didácticos que requieren para su práctica docente.

Palabras clave: Geometría y Pensamiento Geométrico y Espacial, Conocimiento Matemático para la Enseñanza, Educación Primaria

Introducción

La geometría posibilita en los estudiantes el estudio de las figuras del espacio y sus relaciones. El espacio geométrico es construido a partir de la exploración empírica que parte de un espacio real y llevado hacia una abstracción geométrica. Su enseñanza en México, y en particular el estudio de la geometría tridimensional, permea el currículo de toda la educación básica (SEP, 2011). Los aspectos a trabajar son "la exploración de las características y propiedades de […] cuerpos." Y "el conocimiento de los principios básicos de la ubicación espacial y el cálculo geométrico." (p. 73), donde la mediación del profesor y por tanto, sus conocimientos matemáticos y didácticos, son esenciales.

El aprendizaje del volumen de cuerpos geométricos, en particular, presenta dificultades. El conocimiento del profesor respecto de este contenido tiene mayor relevancia, si cabe, que respecto de la enseñanza de otros contenidos de menor dificultad para el alumno. Parte de estas dificultades se relacionan con su estrecha relación con la capacidad (Freudenthal, 1993; Saiz, 2002; Zevenbergen, 2005), la distinción entre los conceptos matemático y físico de volumen (Saiz, 2002) y la importancia de la visualización en su comprensión (Gutiérrez, 1998).

El conocimiento que tienen los profesores de educación primaria sobre la geometría tridimensional es una problemática que ha sido poco estudiada (Aslan-Tutak & Adams, 2015; Tekin & Isiksa, 2013). Los estudios reportados en relación con dicho conocimiento del profesor en formación y/o en servicio ponen de relieve dificultades en aspectos conceptuales y de habilidades espaciales. Así, Zevenbergen (2005) señala que profesores en formación tienen obstáculos similares a los alumnos en primaria vinculados con el desarrollo de su sentido numérico, de medición y espacial. Carencias que limitan su competencia para identificar en sus alumnos errores asociados, por

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.

ejemplo, con resolución de problemas de cálculo de volúmenes. Profesores para primaria en formación señalan que en sus cursos de matemáticas y su didáctica, no logran desarrollar una comprensión profunda sobre contenidos de geometría elemental. También reconocen la importancia de las representaciones y habilidades visuales en este tópico de las matemáticas (Aslan-Tutak y Adams, 2015). En cuanto a la comprensión de cuerpos geométricos, Dorantes (2008) mostró carencias respecto a los conocimientos de un grupo de profesores relacionadas con la identificación de características de poliedros en términos de sus aristas, vértices y caras; la exploración de éstos mediante la observación en diferentes perspectivas y el cálculo de su volumen. Estos resultados coinciden con los de otros estudios (Saiz, 2002; Bozkurt & Koç, 2012). En particular, Çakmak *et al* (2015) encontraron que las definiciones dadas por estudiantes y los ejemplos y maneras de resolver problemas, son análogos a los usados por sus maestros en las clases y en muchos casos presenta limitaciones.

El objetivo de la investigación en la que se enmarca este reporte fue identificar y describir el *conocimiento matemático para la enseñanza* evidenciado en profesores de sexto de primaria en la enseñanza del volumen de prismas (Moctezuma, 2015).

Visualización geométrica, representaciones y volumen de objetos tridimensionales

La percepción visual apoya a la geometría tridimensional puesto que las representaciones visuales constituyen un medio esencial de anticipación. Los alumnos tienden a depender de la información visual, según los resultados de investigaciones como la de Gal & Linchevski (2010). La atención inicial en geometría se centra más en los objetos que en los procesos debido a que el interés se enfoca en las propiedades figurales percibidas por medio de los sentidos e interpretadas por la reflexión mental mediada por una representación espacial. Sin embargo, toda representación particular a la vez que proporciona cierta información, oculta otra y puede ser difícil recuperarla para quien la está interpretando. Para Del Olmo *et al* (1993) las dificultades de los niños al medir el volumen se pueden originar por la falta de manipulación previa; no dominan la visualización espacial, al carecer de la habilidad de manipular mentalmente figuras rígidas.

Existen diferentes formas de representar los cuerpos geométricos para fines didácticos: en perspectiva, paralela, isométrica, por niveles, ortogonal y mediante desarrollos planos. Cada uno de ellos requiere el aprendizaje de convenciones para interpretarlas y el desarrollo de habilidades para reproducirlas (Gutiérrez, 1998). Los tipos de representaciones utilizadas en los libros de texto de quinto y sexto grado de primaria (SEP, 2012)[i] para proyectar cubos, prismas y pirámides son las representaciones paralelas, isométricas y mediante desarrollos planos. Sin embargo, como se mostrará más adelante, hay desconocimiento de los profesores sobre dicha diversidad que tienen impacto en el uso que se les dan a las mismas en clase.

Conocimiento matemático para la enseñanza de los prismas y su volumen en primaria

El conocimiento para la enseñanza toma su caracterización desde los conocimientos planteados por Shulman (1986) y detallados, para el caso de las matemáticas, en los subdominios del *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) de Ball, Thames & Phelps (2008). Estos autores diferencian dos grandes dominios: Conocimiento del Contenido y Conocimiento Didáctico del contenido. El primero recoge el contenido que el profesor está enseñando y su fundamentación. El *conocimiento del contenido* se subdivide en Conocimiento Común del Contenido (conocimiento de una persona instruida en ese contenido) (CCK[ii]), Conocimiento Especializado del Contenido (conocimiento del contenido que distingue al profesor) (SKC) y Conocimiento del Horizonte matemático (HCK). El *Conocimiento didáctico del contenido* incluye los conocimientos que posee el profesor con respecto a la enseñanza del contenido, su aprendizaje, y el currículo escolar. El *Conocimiento del contenido y los Estudiantes* (KCS) es la unión de la comprensión del contenido y saber lo que los estudiantes pueden pensar o hacer en matemáticas. Involucra la identificación de los

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.

conceptos previos y anticipar probables dificultades de aprendizaje y concepciones erróneas respecto al contenido matemático a enseñar. El *Conocimiento del Contenido y la Enseñanza* (KCT) conjuga la comprensión del contenido y su familiaridad con los principios pedagógicos para enseñarlo. Finalmente, el *Conocimiento del Currículum* (KCC) incluye el conocimiento del profesor delas matemáticas como asignatura: su estructura, y los aprendizajes que se espera lograr con los alumnos al culminar su Educación Primaria.

En este reporte se dará cuenta sobre ¿Qué conocimiento matemático para la enseñanza*,* pone en acción un profesor al impartir una lección sobre el volumen de prismas en sexto de primaria?

Metodología

La investigación realizada tiene un enfoque cualitativo con un alcance descriptivo. Los datos principales provienen de lo que tres profesoras (que participaron de manera voluntaria) hacen en sus clases de matemáticas cuando enseñan el contenido de volumen de prismas.

La investigación se realizó entre 2014 y 2015 en dos escuelas primarias públicas de la ciudad de México, ubicadas en la periferia. Las profesoras impartían sexto grado y todas las asignaturas, entre las que se incluye Matemáticas. Las tres tienen más de 25 años de experiencia docente y son de formación normalista. Consuelo (C) es experta en quinto y sexto grado de primaria, mientras que Laura (L) y Rocío (R) han transitado de primero a sexto grado[iii] (nombres ficticios). Las tres, han impartido los temas de sexto grado durante dos años previamente a esta investigación. Este grupo de estudio fue tomado de manera intencionada, y se hizo un seguimiento a sus prácticas durante varias sesiones de clase, donde se abordaron temas vinculados con geometría tridimensional (en este reporte nos centraremos sólo en una lección referida al volumen de prismas).

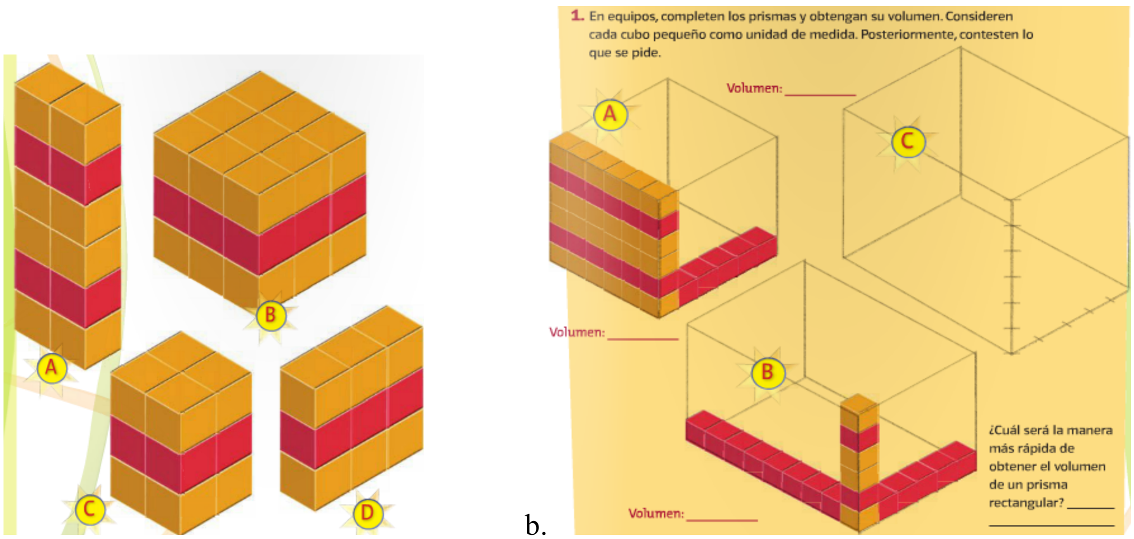
El trabajo de campo se desarrolló durante trece meses en distintas fechas del año escolar. Las clases fueron videograbadas y transcritas. Para extraer información sobre los conocimientos movilizados por las profesoras se utilizaron tres instrumentos: observación no participante en clases, diario de campo y entrevista semiestructurada (esta última con el objetivo de completar la información obtenida de la observación).

Para el análisis de las clases observadas se utilizaron categorías prefijadas por el observador. Se partió de la descripción de los subdominios del MKT y de su concreción en los indicadores diseñados por Sosa (2011), adecuándose al nivel y contenido específico a analizar. Éstos se fueron refinando durante el proceso de investigación hasta obtener los indicadores definitivos.

En el libro de texto, la lección “¿Cuántos cubos hay en el prisma?” consta de cuatro actividades (SEP, 2012, pp. 162-163). Nos centraremos en las dos primeras, en las que los alumnos deben calcular el volumen de cuatro prismas rectangulares a partir de la cantidad de unidades cúbicas en las aristas (Figura 1.a). En A y B se identifican las tres dimensiones (largo, ancho y altura) y se muestran unidades cúbicas, mientras que en el prisma C se muestran marcas que permiten deducir la medida de longitud de únicamente dos aristas del prisma (Figura 1.b).

Un análisis a priori de esta lección permitió identificar una transición de un tratamiento unidimensional del volumen (usándose como unidad de medida un cubo) a uno tridimensional (calculándose a partir de las longitudes ancho, largo y alto), si bien el título de la lección destaca el primero. Además, en la actividad 3 se relacionan las nociones volumen y capacidad.

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.



a. b.

Figura 1. Actividades propuestas para el trabajo con volumen de prismas (SEP, 2012, pp. 162-163).

Conocimientos puestos en acción. Descripción de resultados y discusión

En el análisis de las tres sesiones observadas surgen dos elementos de interés sobre el conocimiento de las profesoras: el tratamiento uni/tridimensional del volumen y cómo calcular la medida no dada de una arista en el caso C de la actividad 2.

Una de las profesoras, Rocío, trata el volumen en todas las actividades desde una perspectiva tridimensional. De este modo, pierde sentido la pregunta final que plantea la actividad 2 (“¿Cuál será la forma más rápida de calcular el volumen de un prisma?”). Desde un inicio, Rocío ubica el largo, el ancho y la altura de cada prisma como paso necesario para el cálculo de su volumen:

> Rocío (R): Recuerden tomar en cuenta las tres dimensiones que habíamos hablado, saquen el volumen […] la cantidad de prismas que tienen esas figuras, la cantidad de unidades […]
> R: […] ¿Cuántas unidades son? Aquí [figura 1.b, apartado A] de base, de ancho 6, de largo 6 y de altura 6. Entonces multiplicamos 6 por 6 por 6 y nos da 216 […] En la figura B ¿Cuál es la base, el largo, el ancho? […] ¿Cuáles son las medidas? […] ¿Cuál es el largo?
> E8: 6 por 9
> R: […] Multiplicamos 9 por 6, […] 54… 54 por 6 […] 324. [La profesora escribe en el pizarrón 324 cm^3].
>
> (Fragmento 1 de la sesión de Rocío)

Rocío no hace una distinción explícita entre el tratamiento unidimensional y el tridimensional para el cálculo de volumen de prismas. Parece que no establece diferencias entre ambos tratamientos del volumen y ni percibe la necesidad de trabajar primero desde una perspectiva unidimensional para justificar la tridimensional por sus ventajas prácticas, ni la incidencia de dicha secuencia en la comprensión de la magnitud volumen.

Sin embargo, Laura, plantea la posibilidad de que los alumnos calculen el volumen de los prismas dados en la actividad 2 por el procedimiento que ellos consideren adecuado, surgiendo de este modo procedimientos usando una unidad de volumen y otros, haciendo uso de la longitud y tridimensionalidad del prisma.

> Laura (L): [Lee] completa el prisma, ¿Necesitamos completarlo? […]
> E5: Sí.
> L: ¿Llenarlos de cubitos?
> E5: No.

L: ¿Tú qué opinas, E7, […]. A ver, ¿necesitamos completar los prismas?
E7: También podemos multiplicar.
L: Multiplicar, ¿tú qué estabas haciendo?
E7: Estaba multiplicando base por altura y después por ancho.
L: […] Y tú ¿qué estabas haciendo? [dirigiéndose a E8]
E8: Contándolos.
L: Contando los cubitos, […] Completen, cada quien tiene su método de sacar el volumen.
(Fragmento 1 de la sesión de Laura)

Los estudiantes refieren tanto el tratamiento unidimensional como el tridimensional para calcular el volumen; la profesora por su parte da libertad a los estudiantes para aplicar el método que prefieran. Parece que Laura distingue implícitamente entre el procedimiento unidimensional y el tridimensional para calcular el volumen de prismas (SCK) aunque no se observa que precise el tratamiento unidimensional de manera insistente como lo hace con el tridimensional.

Por otro lado, uno de los aspectos que resultan más problemáticos de la lección está vinculado con la actividad 2 (Figura 1.b) puesto que la representación del prisma C no permite inferir visualmente la longitud de una de sus aristas. La discusión que surge en la clase se relaciona con la unidad de medida. En las tres sesiones se observan formas diferentes de orientar esta situación, lo que pone de manifiesto distinto conocimiento matemático para la enseñanza de las profesoras. Este conocimiento se relaciona con el papel de la unidad en el proceso de medida, y su conceptualización (SCK); el conocimiento de la posibilidad de usar unidades de medida no convencionales (KCC); la diferencia entre medida, unidad, instrumento y procedimiento de medida (SCK) y las confusiones habituales de los alumnos al respecto (KCS); la dificultad de los alumnos para reconocer y usar unidades e instrumentos no convencionales (KCS); y el carácter aproximado de la medida (SCK).

Rocío no parece ser suficientemente consciente del papel de la unidad en el proceso de medida y del papel que juega conceptualmente en el concepto de medición (SCK), así como de las dificultades que esto origina en los estudiantes (KCS). Así, para solventar el problema que se plantea a la hora de calcular el volumen del prisma C (actividad 2), decide medir con una regla:

R: [Dirigiéndose a un estudiante] Préstame tu regla. [La usa para medir en su libro]
E7: 1 centímetro es de dos cubos.
E5: Son 5 centímetros.
E8: Son 6.
R: Si está de medio centímetro, entonces cada uno de los lados son medio centímetro. Entonces si yo mido…¿Quién decía que 11? Son 11 […]
R: ¿11 por ocho? [la maestra sigue midiendo] De altura son 10, fíjate bien: son 5 centímetros, cada una de las unidades está representando medio centímetro; son 10 unidades. Midan con su regla. Cada una de las unidades que nos está representando el libro mide medio centímetro, son cubos que miden medio centímetro.
[…]
R: Recuerden que en este cubo que está, en este prisma que está representado ahí, está el largo, el ancho y la altura. El largo es 11.
E8: Son 11 por 10 por 8, entonces… [La profesora mueve la cabeza en señal de aprobación]
(Fragmento 2 de la sesión de Rocío)

Rocío desecha las medidas de longitud que ya están dadas en el prisma (según la unidad que se indica) y mide con la regla cada una de las dimensiones (largo, ancho y alto). Usa el centímetro como unidad de medida de longitud, estableciendo la equivalencia entre el centímetro y la unidad de longitud dada en la actividad (medio centímetro).

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.

La representación dada en la actividad muestra que el prisma mide 5 unidades de ancho y 6 de altura; el largo no se sabe. El resultado de la medición de la maestra es 4cm para el ancho, 5.5 cm para el largo y 5cm para la altura. Ella lo traduce como 8 para el ancho, 11 para el largo y 10 para la altura.

Decide tomar una unidad de medida de longitud diferente a la que muestra el libro de texto y no precisa dejar claro a los estudiantes que ha cambiado la unidad de longitud para las tres dimensiones del prisma al calcular el volumen. Además, la elección de la unidad y el instrumento de medida de longitud que toma puede suponer no tomar en consideración la concepción errónea de los alumnos de que para medir (una cantidad de longitud) es necesario usar unidades del sistema métrico decimal (en este caso cm) e instrumentos convencionales (KCS).

En la sesión de Consuelo, también se recurre a una regla convencional (graduada en cm) para resolver la situación:

Consuelo (C): […] ¿Qué hicieron para tomar las medidas del prisma que está en la letra C?
Estudiante 9 (E9): Medí con una regla.
C: […] ¿Quién hizo algo diferente? [Señala a un estudiante y le pregunta] ¿Tú también mediste con una regla?
E5: Sí, pero medí lo de abajo para ver si […] tenía lo mismo de ancho.
C: Si tenía lo mismo de ancho… ¿Tú mediste el ancho, E7?
E7: Yo medí cuánto medía una rayita, pero se complicaba con la regla en los palitos y yo medí los seis cubitos con la regla y luego ver cuántos cabían en el ancho y en el largo.
C: Me puedes decir ¿qué mediste?¿Cuántos cubos están de largo en esa figura?
E7: De largo eran 7, de ancho eran 4 y de altura eran 6.
E5: De ancho son 5.
E3: Son 6.
C: 4, 5, 6… ¿Cómo vamos a saber?
[…]
C: Bueno, recuerden cuando lo hicieron por unanimidad, muchas veces nuestras reglas no son exactas […] [y se obtienen] diferentes medidas.
E7: A mí me dio 8 milímetros […]
E8: Midió un centímetro casi.
C: Un centímetro casi pero no exacto. […] Entonces vamos a tomarlas todas como de un centímetro; si es de un centímetro, E8 dime de cuánto va a quedar la medida a lo largo de ese prisma.

(Fragmento 1 de la sesión de Consuelo)

Como se ilustra en el diálogo, Consuelo considera la posibilidad de que el volumen que se está calculando no sea exacto sino aproximado y como unidad de medida, considera inicialmente el centímetro cúbico, aunque no lo explicita en sus acciones. La profesora conduce a los estudiantes hacia el uso de la regla para que por medio de un consenso, se defina la unidad de medida de longitud de la dimensión que está faltando, a partir de las longitudes conocidas y así poder calcular el volumen del prisma C.

Finalmente, Laura, hace un tratamiento diferente de la situación. Propone el uso de la unidad de medida que viene dada en la actividad y de un instrumento de medida usando dicha unidad.

L: […] ¿Cuántas medidas tiene […] la figura C?
E10: Una.
L: Nada más una ¿Qué podemos hacer para obtener la otra?
E2: ¿Multiplicando?

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.

L: ¿Multiplicando? Pero si no tenemos medida, ¿por qué lo vamos a multiplicar? [La profesora toma una hoja de cartulina, recorta una tira, la gradúa con la longitud de segmentos de una arista, la llama reglita y regresa con E10]. Vamos a medir la única medida que tenemos, la voy a marcar en esta reglita, esta va a ser mi reglita para medir las otras aristas. ¿Cuántas medidas tengo ahora?
E5: 3.
L: ¿Cuántas necesito para sacar el volumen? Pues nada más esas, entonces, ¿estaba muy difícil? Y ¿qué hicimos? Con nuestra reglita vimos cuántas veces cabe en cada una, ahora saquen el volumen. […] [E7 la coloca en su libro para medir una arista del prisma B, pero no sabe cómo utilizarla. La profesora muestra cómo hacerlo sobre una arista del prisma C diciendo:] Esta medida corresponde a lo que ya tienen ustedes, ¿Creen que les puede servir?
E7: No o ¿sí?
L: Ah, no sé, pues ve. […]
E7: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
L: Ponle número para que no te equivoques. Ahora…¿Cuántas medidas te faltan? […]
E7: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7… ¿7?
L: 7 anótale ahí. Tienes tres medidas ¿Puedes sacar ya el volumen? […]
L: Si midió con regla, no se dio cuenta que esto no equivale a un centímetro, es menos de un centímetro, son como 8 milímetros [La profesora nuevamente saca su tira graduada] Por eso medí la misma que está marcada en el libro y la ocupé aquí y la ocupé acá. […]

(Fragmento 2 de la sesión de Laura)

En contraste con Rocío, Laura usa otras estrategias para resolver el problema del cálculo de volumen del prisma C, construyendo un instrumento para hacer una medida directa de longitudes. Esto evidencia el uso adecuado de unidades de medida no convencionales (KCC).

Reflexiones finales

Al resolver problemas que involucran volumen emergen diferentes estrategias como uso de estimación, de dibujos, de representaciones con material concreto, uso de algoritmos, conteos, etc. Esta pluralidad de estrategias y su uso adecuado en la clase de matemáticas involucra conocimientos del profesor, tanto del propio contenido, y su relación con otros conceptos, como de su didáctica. Sin embargo, el trabajo realizado por Rocío y Consuelo evidencia un apresuramiento por una aproximación tridimensional del volumen, por el uso de la fórmula y de la unidad cm^3 (SCK y KCS), y evidencian dificultades para trabajar con unidades de medida no convencionales (KCC). Zevenbergen (2005) señala que este enfoque domina la mayor parte de las prácticas matemáticas escolares y en los programas de formación del profesorado, pues parece que "los adoctrinan en esta forma de trabajar" (p. 16). Además, como se mostró en los fragmentos de las tres profesoras, si no se tiene confianza en el conocimiento que se posee y cuando hay respuestas incorrectas, principalmente buscan resolverlas en un contexto aritmético y no geométrico. En este reporte se da cuenta de cómo analizar conocimientos matemáticos (o carencias) propios de su profesión como profesoras de matemáticas. Sin embargo, se requieren más investigaciones que fortalezcan la aproximación teórica para acceder a estos conocimientos.

A partir del análisis de las prácticas de las tres maestras, consideramos al igual que Zevenbergen (2005) y Aslan-Tutak & Adams (2015), que en los programas de formación inicial y continua así como de desarrollo profesional, se requiere de involucrar a los docentes en prácticas transformadoras donde la exploración y la compresión de los procesos sea el centro y no el obtener una respuesta correcta; donde el análisis de las actividades realizadas por los estudiantes sean analizadas a fin de reflexionar sobre sus aprendizajes; y tengan oportunidades para establecer conexiones entre distintos conceptos geométricos (Bozkurt & Koç, 2012). Además de que desarrollen actividades en las que profundicen sus propios conocimientos geométricos.

Notas finales

[i] En México, la educación primaria es gratuita y obligatoria. Para tal efecto, la Secretaría de Educación Pública (SEP) genera materiales como libros de texto gratuitos para el alumno y libro del maestro que son obligatorios para todas las escuelas primarias del país.

[ii] Usaremos las siglas en inglés: SKS (Specialized content knowledge), KCS (Knowledge of Content & Students), KCT (Knowledge of Content & Teaching), KCC (Knowledge of Content & Curriculum).

[iii] Edades de las profesoras: Rosy con 53 años, Laura con 55 y Consuelo con 59 años.

Agradecimientos

Al Conacyt/SEP/SEB por su financiamiento para el proyecto #145735. A nuestra colega por sus valiosas aportaciones y cuidadosa revisión. Gracias a Ana Lage.

The study of three-dimensional objects is undertaken in the Mexican curriculum throughout all levels of basic education. However, few studies relate to the mathematics knowledge needed to teach those ideas. This report represents an approach to the study of such knowledge. The approach is based on an account, developed from class observations, of three six grade teachers and their use of mathematics knowledge in teaching their students to calculate the volume of prisms, in two schools in Mexico City. The results provide evidence related to some sub-domains of mathematics knowledge for teaching. While there are some strengths related to this knowledge, teachers also showed that there is room for improvement. This speaks to the need to develop training spaces (both for pre-service and in-service teachers) where the analysis and discussions stimulate learning of both the geometric and pedagogical knowledge needed for teaching practice.

Keywords: Geometry and Geometrical and Spatial Thinking, Mathematical Knowledge for Teaching, Elementary School Education

Introduction

Geometry enables students to study figures within space and their relationships. Geometric space is built on the basis of empirical exploration of a real space that is taken to a geometric abstraction. In Mexico, teaching these ideas and, in particular, the study of three-dimensional geometry pervades the entire basic education curriculum (SEP, 2011). Aspects to be worked on include: “exploration of the characteristics and properties of [...] three dimensional shapes” and “knowledge of the basic principles of spatial location and geometric calculation” (p. 73). In these topics teacher mediation is key, thus the mathematics and pedagogical knowledge of teachers is essential as well.

Learning the volume of three-dimensional shapes is particularly difficult for students. Consequently, the relevance of teacher knowledge regarding this content is even greater, if possible, than that for teaching other content that is less difficult for students. Some of these difficulties are related to the close relationship between the notions of volume and capacity (Freudenthal, 1993; Saiz, 2002; Zevenbergen, 2005), the distinction between the mathematics and the physical concepts of volume (Saiz, 2002) and the importance of being able to visualize the concept in order to understand it (Gutiérrez, 1998).

Few studies have looked at elementary school teachers’ knowledge of three-dimensional geometry (Aslan-Tutak & Adams, 2015; Tekin & Isiksa, 2013). Said studies underscore pre-service and/or in-service teacher difficulties related to conceptual and spatial skills. Thus Zevenbergen

(2005) states that pre-service teachers face similar obstacles as elementary school students, obstacles that are linked to the development of number sense, measurement and space. These are shortcomings that hamper their ability to identify errors among their students, associated for example with solving volume calculation problems. Teachers in training for elementary school state that, in their mathematics and teaching courses, they fail to develop a profound understanding of elementary geometry contents, while they recognize the importance of representations and visual skills in this area of mathematics (Aslan-Tutak & Adams, 2015). As for understanding 3D shapes, Dorantes (2008) points out the shortcomings in the knowledge of a group of teachers related to identifying characteristics of polyhedra, in terms of their edges, vertices and faces, exploring them through observation from different perspectives and calculating their volume. Such results coincide with those of other studies (Bozkurt & Koç, 2012; Saiz, 2002). In particular, Çakmak, Baş, Işık, Bekdemir, and Özturan (2015) finds that student definitions, examples and ways of solving problems are analogous to those used by their teachers in classrooms, and in many cases these methods are limited.

This report is part of a broader research project that seeks to identify and describe the *mathematics knowledge for teaching* evidenced by sixth grade teachers in teaching the volume of prisms (Moctezuma, 2015).

Geometric visualization, representations and volume of three-dimensional objects

Visual perception supports the learning of spatial geometry, because visual representations are an essential means of anticipation. According to research, such as Gal & Linchevski (2010), students tend to rely on visual information. The initial focus in geometry teaching relies more on the objects than on the processes, since the primary interest is on the figural properties as perceived by the senses and interpreted by mental reflection mediated by way of spatial representation. However, while any representation of a 3D shape highlights some features of the information, it hides others that may be difficult to retrieve for the person interpreting the representation. Del Olmo et al. (1993) explain that children's difficulties when measuring volume may originate from an absence of prior manipulation. They do not master spatial visualization given that they lack the ability to mentally manipulate rigid figures.

There are different ways of representing geometric objects for teaching purposes: in perspective, parallel, isometric, layered, orthogonal and nets of three-dimensional figures. Each of them requires learning conventions to interpret them, and developing skills to reproduce them (Gutiérrez, 1998). The types of representations used in the fifth and sixth grade textbooks (SEP, 2012) [i] for projecting cubes, prisms and pyramids are parallel and isometric projections, as well as nets. However, as will be shown below, teachers are unaware of such diversity between the different representations, which impacts their use in the classroom.

Mathematics knowledge for teaching prisms and volume in elementary school

Characterization of knowledge for teaching is based on the ideas of "Pedagogical content knowledge" (PCK) as presented by Shulman (1986) and later specified in greater detail in the case of mathematics, in the sub-domains of Mathematics Knowledge for Teaching (MKT) by Ball, Thames, and Phelps (2008). The latter authors differentiate between two domains: *subject matter knowledge* and *pedagogical content knowledge.* The former domain includes content that the teacher is teaching, as well as its foundations. It is subdivided into *Common Content Knowledge* (knowledge of a person instructed in that content) (CCK[ii]), *Specialized Content Knowledge* (content knowledge that distinguishes teachers) (SCK) and *Horizon Content Knowledge* (an awareness of how mathematics topics are related across the span of mathematics in the curriculum) (HCK). *Pedagogical content knowledge* includes knowledge possessed by the teacher with respect to teaching the content, learning and school curriculum. *Knowledge of Content and Students* (KCS) is the combination of content comprehension together with knowing what students can think or do in mathematics. It involves identifying previous concepts and anticipating likely learning difficulties that students may face, as well as misconceptions regarding mathematics content. *Knowledge of Content and Teaching* (KCT) combines content comprehension and familiarity with pedagogical principles so as to teach that content. Finally, *Knowledge of Content and Curriculum* (KCC) include teacher knowledge of mathematics as a subject, which includes its structure, and the learning that students are expected to achieve upon completion of their elementary education.

The question addressed in this report is: What mathematics knowledge for teaching is put into practice by teachers as they give a lesson on the volume of prisms in sixth grade?

Methodology

This research follows a qualitative approach with a descriptive scope. The main data are derived from the classroom practice of three teachers (who participated voluntarily), as they teach mathematics content related to the volume of prisms.

The research was conducted between 2014 and 2015 in two public elementary schools located in the outlying areas of Mexico City. The teachers taught all sixth grade subjects, including mathematics. All three teachers had more than 25 years of teaching experience and were graduates of a teacher-training college. Consuelo (C) is an expert in fifth and sixth grade, while Laura (L) and Rocío (R) have taught first through sixth grades[iii] (all names are pseudonyms). The three teachers had taught the sixth grade subjects for two years prior to this research. The study group was chosen intentionally, and the subjects' practice was followed over the course of several class sessions, during which the topics addressed in class related to three-dimensional geometry (this report focuses solely on a lesson related to the volume of prisms).

Fieldwork took place at different times of the school year over a period of thirteen months. The lessons were videotaped and transcribed. Three instruments were used in order to collect as much information on teacher knowledge as possible: non-participatory observations of different lessons, a field diary and a semi-structured interview (the latter for the purpose of supplementing the information obtained during the observations).

The observer used preset categories for analysis of the lessons observed. The categories are based on the description of the subdomains of MKT and their solidification into indicators as designed by Sosa (2011). The categories were adapted to the elementary level and specific content to be analyzed. The researchers refined the categories during the research process until the final indicators were obtained.

In the textbook, the lesson entitled "How many cubes are in the prism?" consists of four activities (SEP, 2012, pp. 162-163). Here we will focus on the first two, in which the students have to calculate the volume of four rectangular prisms from the amount of cubic units on the edges (Figure 1.a). In prisms A and B, the three dimensions (length, width and height) are identified and cubic units are shown; while in prism C some ticks are shown that allow the students to infer the measurement of the length of just two of the prism edges (Figure 1b).

In an a priori analysis of the lesson, the researchers identified a transition from a one-dimensional treatment of volume (using a cube as the unit of measurement) to a three-dimensional treatment (calculated using length, width and height), even if the title of the lesson highlights the former. Moreover, in the third activity the notions of volume and capacity are addressed.

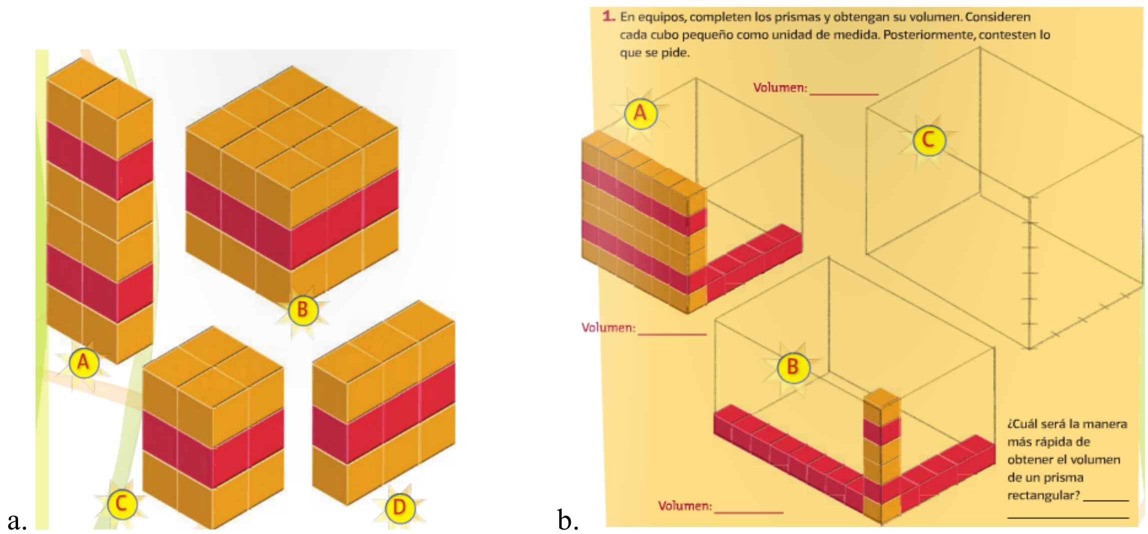


Figure 1. Activities proposed for working with volume of prisms (SEP, 2012, pp. 162-163)

Knowledge put into action. Description of findings and discussion

Two aspects of interest arose concerning teacher knowledge during our analysis of the three sessions observed, namely: a) the one/tridimensional treatment of volume, and b) how to calculate the unknown length of one of the edges in case C of activity 2.

One of the teachers, Rocío, treats volume in all the activities from a tridimensional perspective. As such, the last question raised in activity 2 becomes useless ("What is the fastest way to calculate the volume of a prism?"). From the very beginning, Rocío locates the length, width and height of each prism as a necessary step to calculate prism volume, as follows:

> Rocío (R): Remember to take into account the three dimensions that we talked about, calculate the volume […] the number of prisms that those figures have, the number of units […]
>
> R: […] How many units are there? Here [figure 1.b, section A] at the base. The width is 6, the length is 6 and the height is 6. So we multiply 6 times 6 times 6 and we get 216 […] In figure B, what are the base [sic], length, and width? […] What are the measurements? […] What is the length?
>
> E8: 6 times 9.
>
> R: […] We multiply 9 times 6, […] 54… 54 times 6 […] 324. [The teacher writes 324 cm^3 on the board].
>
> (Fragment 1 from Rocío's session)

Rocío does not explicitly distinguish between the one-dimensional and the three-dimensional treatments for calculating prism volume. It would seem that she does not mark the differences between both treatments of volume, nor does she perceive the need for working with the one-dimensional perspective first so as to justify the tridimensional perspective, given its practical advantages; nor does she perceive the incidence of that sequence on comprehension of the volume magnitude.

However, Laura makes it possible for her students to calculate the volume of the prisms in activity 2, using the procedure the students deem appropriate. Hence, two different procedures arise. The first uses a unit of volume, while the second uses the length of the edge and the three-dimensionality of the prism.

> Laura (L): [Reads] Complete the prism, do we need to complete it? [...]

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.

E5: Yes.
L: Fill them with cubes?
E5: No.
L: What do you think, E7, [...] Let's see, do we need to complete the prisms?
E7: We can also multiply.
L: Multiply, what were you doing?
E7: I was multiplying the length of the base times height, and then times width.
L: [...] And what were you doing? [Addressing E8]
E8: Counting them.
L: Counting the cubes [...] Complete. Everyone has his or her own method of obtaining the volume.

(Fragment 1 from Laura's session)

The students refer to both the one-dimensional and the three-dimensional treatments for obtaining the volume, while the teacher gives them the freedom to apply the method they prefer. It seems that Laura implicitly distinguishes between the one-dimensional and the three-dimensional procedures for calculating prism volume (SCK), although she does not appear to specify the one-dimensional treatment with as much insistence as she does with the three-dimensional treatment.

One of the most difficult aspects of the lesson relates to activity 2 (Figure 1b). Representation of prism C does not enable a visual inference of the length of one of its edges. The discussion that arises in class relates to the unit of measure. In the three sessions, different ways of guiding this situation are observed, and this can be taken as different manifestations of MKT of these teachers. The knowledge relates to the role of the unit in the process of measuring and its conceptualization (SCK); knowledge of the possibility of using unconventional measurement units (KCC); the difference between measurement, unit, instrument and measurement procedure (SCK) and typical student misconceptions on the subject (KCS); student difficulty in recognizing and using unconventional units and instruments (KCS); and the approximate nature of the measurement (SCK).

Rocío does not seem to be sufficiently aware of the role of the unit in the measurement process and its conceptual role in the notion of measurement (SCK), as well as of the difficulties triggered amongst the students (KCS). Thus, to solve the problem that arises when calculating the volume of prism C (activity 2), she decides to measure using a ruler:

R: [Addressing a student] Lend me your ruler. [She uses it to measure in her book]
E7: 1 centimeter is two cubes.
E5: There are 5 centimeters.
E8: There are 6.
R: Yes, it is half a centimeter. So each of the sides is half a centimeter. So, if I measure… Who said that 11? It's 11 [...]
R: 11 times 8? [The teacher continues to measure] Height is 10, pay attention: it is 5 centimeters, each of the units represents half a centimeter; it is 10 units. Measure it with your ruler. Each unit represented in the textbook measures half a centimeter. The cubes measure half a centimeter.
[...]
R: Remember that in this cube that is, that in this prism represented here, we have the length, width and height. The length is 11.
E8: It is 11 times 10 times 8, then… [The teacher nods to show approval]

(Fragment 2 Rocío's session)

Rocío discards the length measurements already given in the prism (according to the unit given) and measures each of the dimensions (length, width, and height) with a ruler. She uses the centimeter as a

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.

unit for measuring length, establishing equivalence between the centimeter and the unit of length given in the activity (half a centimeter). The representation given in the activity shows that the prism is 5 units wide and 6 units high; the length is unknown. The teacher's measurement results are 4 centimeters wide, 5.5 centimeters long and 5 centimeters for the height. She translates this into 8 for the width, 11 for the length and 10 for the height. She decides to take a different unit of length measurement than what is provided in the textbook and does not make it clear to the students that she has changed the length unit for the three dimensions of the prism in order to calculate the volume. Moreover, the choice of the unit and the length measuring instrument used may lead us to assume that she is not taking into consideration a possible student misconception, in which the student assumes that in order to measure (a length) it is necessary to use the metric system (in this case cm) and conventional instruments (KCS).

Consuelo also resorts to use of a conventional ruler (graduated in cm) to resolve the situation:

Consuelo (C): […] What did you do to take the measurements of the prism in C?
Student 9 (E9): I measured with a ruler.
C: […] Who did something else? [She points to a student and asks the student] Did you also measure with a ruler?
E5: Yes, but I measured the bottom part to see if […] it had the same width.
C: If it had the same width… Did you measure the width, E7?
E7: I measured the length of one little line, but it was complicated with the ruler on the lines, and I measured the six little cubes with the ruler and then saw how many of them fit into the width and the length.
C: Can you tell me what you measured? How many cubes are there lengthwise in that figure?
E7: Lengthwise, there are 7, 4 on the width and 6 on the height.
E5: The width is 5.
E3: There are 6.
C: 4, 5, 6… How are we to know?
[…]
C: Well, remember when you did it unanimously, often our rulers are not precise […] [and] different measurements [are obtained].
E7: I got 8 millimeters […]
E8: It measured almost a centimeter.
C: Almost a centimeter, but not exactly. […] So, let's take them all as [if they were] one centimeter; if it is one centimeter, E8, tell me how much it will be lengthwise for the prism.
(Fragment 1 Consuelo's session)

As illustrated in the dialogue, Consuelo considers the possibility that the volume being calculated may not be precise, but rather approximate; and initially, she considers the cubic centimeter as a unit of measure, although she does not make this explicit though her actions. The teacher encourages her students to use the ruler so that, by consensus, they define the unit of measure for the unknown length, based on the known measurements so as to calculate the volume of prism C.

Finally, Laura treats the situation differently. She proposes to use the measurement unit given in the activity and use of a measurement instrument that uses that same unit.

L: […] How many units does […] figure C have?
E10: One.
L: Just one. What can we do to get the other one?
E2: Multiplying?

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.

L: Multiplying? But, if we do not have the measurement, what are we going to multiply it by? [The teacher takes a piece of cardboard, cuts a strip, graduates it with segments equal to the ones that are marked on one of the edges, and calls it "the little ruler". Then, she turns back to E10]. We will measure the only measurement that we have and I'll mark it on this "little ruler". It will be my little ruler to measure the other edges. How many measurements do I have now?
E5: 3.
L: How many do I need to calculate the volume? Just those ones; so, was it very difficult?
And what did we do? With our little ruler we saw how many times it fits into each one, now calculate the volume. […] [E7 puts it on her textbook to measure an edge of prism B, but does not know how to use it. The teacher shows the student how to do it on an edge of prism C, and says:] This measurement corresponds to what you already have; do you think this can be useful to you?
E7: No or yes?
L: Oh, I don't know, you have to check […]
E7: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
L: Put numbers in so that you don't make a mistake. Now… how many units are you missing? […]
E7: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7… 7?
L: 7, write it down there. You have three measurements. Can you obtain the volume now? […]
L: If you measured with a ruler, you did not realize that this is not equivalent to one centimeter. It is less than a centimeter. It is about 8 millimeters. [The teacher again pulls out her graduated strip.] That is why I measured the one marked on the textbook and used it here and used it there […]

(Fragment 2 Laura's session)

As opposed to Rocío, Laura uses other strategies to solve the problem of calculating the volume of prism C, by building an instrument to make direct length measurements. This demonstrates the proper use of unconventional units of measure (KCC).

Final Thoughts

When solving problems that involve the notion of volume, different strategies emerge, such as estimating, use of drawings, representations using concrete material, algorithms, counting, etc. This plurality of strategies and their appropriate use in mathematics class involve teacher knowledge, both of the content itself and its relationship with other concepts, as well as its didactics. However, the work done by Rocío and Consuelo shows a hastening to use a three-dimensional approximation of the volume, use of the formula and of cm^3 as the unit (SCK and KCS). Moreover, working with unconventional units of measure (KCC) proves difficult for them.

Zevenbergen (2005) points out that this approach permeates most school mathematics practices and teacher preparation programs, because it seems that they "indoctrinate them in this way of working" (p. 16). In addition, as shown in the three teacher fragments, if the teacher is not confident of the knowledge she possesses, then when wrong answers come up the teacher primarily seeks to solve the problems within an arithmetic rather than a geometric context. In this report, the authors illustrate how to analyze mathematics knowledge (or a lack thereof) *per se* that pertains to their profession as mathematics teachers. However, more research is needed to strengthen the theoretical approach to access that knowledge.

From the analysis of these three teachers' practices, we agree with Zevenbergen (2005) and Aslan-Tutak and Adams (2015) in that initial and lifelong teacher preparation programs and in professional development, teachers need to be involved in transformational practices where exploration and understanding of the processes are the core, rather than finding the right answer; where student activities are analyzed in order to reflect upon their learning; and where they have opportunities to make connections between different geometric concepts (Bozkurt & Koç, 2012); in addition to their being able to carry out activities that deepen their own knowledge of geometry.

Endnotes

[i] In Mexico, primary education is free and compulsory. To this end, the Ministry of Public Education (SEP) generates materials such as free textbooks for the students and teacher guides, which are mandatory for all primary schools.

[ii] We will use the acronyms in English: SCK (Specialized content knowledge), KCS (Knowledge of Content & Students), KCT (Knowledge of Content & Teaching), KCC (Knowledge of Content & Curriculum).

[iii] The teachers' ages are: Rocío is 53, Laura is 55 and Consuelo is 59 years old.

Acknowledgments

To Conacyt/SEP/SEB for funding the project #145735. To our colleague for her valuable contributions and careful review. Thanks Ana Lage.

References

Aslan-Tutak, F. & Adams, T. (2015). A study of geometry content knowledge of elementary preservice teachers. *International Electronic Journal of Elementary Education*, *7*(3), 301-318.

Ball, D. L., Thames, H. M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Bozkurt, A. & Koç, Y. (2012). Investigating first year elementary mathematics teacher education students' knowledge of prism. *Educational Sciences: Theory & Practice*, *12*(4), 2949-2952.

Çakmak, Z.; Baş, F.; Işık, A.; Bekdemir, M. & Özturan, M. (2015). Mathematical language used in the teaching of three dimensional objects: The prism example. *Mevlana International Journal of Education*, *5*(1), 115-129.

Del Olmo M. et al, (1993). *Superficie y volumen ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?(Surface and Volume, Something other than working with formulae?)*, Síntesis (Synthesis), Madrid.

Dorantes, C. (2008). *Exploración con profesores de nivel básico, acerca de algunos temas de geometría del espacio. (Exploring topics of spacial geometry with basic level teachers)* Tesis de maestría (Master's Degree Dissertation), CINVESTAV-IPN, México.

Freudenthal, H. (1993). *Didactical phenomelogy of mathematics structures.* Boston, MA: Reidel Publishing Company.

Gal, H. & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: Analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational Studies in Mathematics*, *74*, 163-183.

Gutiérrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial (Flat representations of 3-dimensional bodies in teaching spacial geometry). *Revista EMA*, *3*, 194-220.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Moctezuma, M. (2015). *Conocimiento matemático para la enseñanza de la geometría tridimensional en sexto de primaria: el caso del volumen de prismas (Mathematics knowledge for teaching tri-dimensional geometry in sixth grade of elementary school).* Tesis de Maestría (Master's Degree Dissertation), Universidad Pedagógica Nacional, México.

Saiz, M. (2002). *El pensamiento del maestro de primaria acerca del concepto volumen y de su enseñanza (Elementary school teacher thinking concerning the concept of volumen and its teaching)*. Tesis de doctorado (PhD Dissertation), CINVESTAV-IPN, México.

Sosa, L. (2011). *Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato: un estudio de dos casos (Mathematics knowledge for teaching high school level).* Tesis de doctorado (PhD Dissertation), Universidad de Huelva, España

SEP (2011). *Programas de Estudio 2011, Guía para el maestro Educación Básica (School program 2011, Guide for Basic Education Teachers),* México.

SEP (2012). *Libro de texto gratuito. Sexto grado, Educación Básica primaria (Free Textbook, Grade Six, Basic Elementary Education)*, México.

Tekin, R., & Isiksal, M (2013). In- service mathematics teacher's mathematical knowledge for teaching: A case of volume of prism. *Proceedings of Eighth Congress of European Research in Mathematics Education* (WG 17, pp. 1-10). Retrieved from http://www.cerme8.metu.edu/tr/wgpapers/wg17_papers.html

Zevenbergen, R. (2005). Primary preservice teachers' understandings of volume: The impact of course and practicum experiences. *Mathematics Education Research Journal*, *17*(1), 3-23.

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.