

VISUALIZACIÓN Y ANÁLISIS DE REPRESENTACIONES GEOMÉTRICAS

VISUALIZATION AND ANALYSIS OF GEOMETRIC REPRESENTATIONS

César Briseño-Miranda
Cinvestav IPN
cbrisenom@cinvestav.mx

José Guzmán-Hernández
Cinvestav IPN
jguzman@cinvestav.mx

En este artículo reportamos los resultados obtenidos al implementar actividades, cuyo foco es la visualización de representaciones geométricas, en ambientes de papel-y-lápiz y tecnológico con estudiantes¹ de grado 11. Esta investigación es de tipo cualitativo, y está apoyada en la teoría de representaciones y en la visualización de objetos geométricos con ayuda tecnológica. Discutimos cómo el uso de la tecnología favorece el aprendizaje de conceptos matemáticos a través del análisis de figuras geométricas estáticas y dinámicas. Nuestros resultados muestran que la tecnología favoreció la visualización de representaciones geométricas, durante la resolución de actividades, sin embargo, el papel-y-lápiz es fundamental para que emerjan conjeturas sobre el significado de conceptos abstractos relacionados con tales representaciones.

Palabras clave: Geometría y Pensamiento Geométrico y Espacial, Medición, Tecnología, Educación Secundaria.

Antecedentes y problema de investigación

Desde hace algunos años, la visualización matemática ha sido investigada como recurso para lograr el aprendizaje de conceptos matemáticos (e.g., Arcavi, 2003; Duval, 2003, 2006; Phillips, Norris, & Macnab, 2010; Presmeg, 2006; Zimmermann & Cunningham, 1991; entre otros). Los estudios de estos autores –sobre la visualización– han tenido el propósito de explorar distintas formas de “mirar” objetos matemáticos abstractos en ambientes de papel-y-lápiz y tecnológico, los cuales apoyan y median el surgimiento y desarrollo de conceptos matemáticos. Debido a las numerosas representaciones geométricas surgidas en la resolución de tareas de esta disciplina, al usar papel-y-lápiz y tecnología, se vuelve necesario identificar características y propiedades de éstas. En este artículo pretendemos responder la pregunta: ¿cómo influye la visualización en el aprendizaje de conceptos matemáticos en los ambientes de papel-y-lápiz y tecnológico?

Marco Conceptual

Esta investigación tiene como marco conceptual el relacionado con las aportaciones teóricas sobre la visualización matemática (e.g., Duval, 2003, 2006; Arcavi, 2003; Phillips et al., 2010; Zimmermann & Cunningham, 1991; entre otros). De acuerdo con el Diccionario de la Real Academia Española, el verbo “visualizar” puede ser entendido como sinónimo de “visualización” y se refiere a “formar en la mente una imagen visual de un concepto abstracto” (RAE, 2014). Diversas investigaciones en educación matemática han contribuido puntualmente respecto a lo que debe ser entendido por “visualización”. He aquí tres de ellas: (i) “la visualización es la capacidad del individuo de producir una representación que, en ausencia de toda percepción visual de los objetos representados, por medio de la cual permite observarlos como si estuvieran realmente delante de los ojos” (Duval, 2003, p. 48); (ii) “la visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, la interpretación, el uso y la reflexión sobre figuras, imágenes, diagramas, en nuestra mente o sobre el papel con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar en su comprensión” (Arcavi, 2003, p. 215); (iii) “la visualización matemática es el proceso de formación de imágenes mentales, usando papel-y-lápiz, o bien tecnología, y la utilización eficaz de dichas imágenes para el descubrimiento matemático y la comprensión de los objetos en estudio” (Zimmermann & Cunningham, 1991, p. 3). En estas y otras contribuciones sobre el significado de la

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.

visualización matemática es patente el carácter cognitivo de ésta. A continuación, se describen algunos conceptos involucrados durante la visualización de representaciones geométricas en los ambientes de papel-y-lápiz y tecnológico.

Visualización en ambiente de papel-y-lápiz

La representación de objetos matemáticos involucra su análisis; el cual permite a los estudiantes acercarse a su significado institucional. Si las representaciones son figuras geométricas, entonces se debe identificar características de ellas, empleando el sentido de la vista. Sin embargo, independientemente de las concepciones, de la naturaleza y de la existencia de los conceptos matemáticos –de quienes aprenden o enseñan–, diversos autores (e.g., Arcavi, 2003; Duval, 2003, 2006; Phillips et al., 2010, entre otros) afirman que esa manera de construir conocimiento, a través de la visualización, debe efectuarse mediante la visión, la imaginación y la inteligencia. La visualización desencadena procesos automáticos no conscientes del sujeto; que dependen de todo eso que ha podido ser guardado en su memoria, los cuales permiten discriminar e identificar en menos de una décima de segundo los diversos elementos del campo de visión y sus relaciones (Duval, 2003).

Por medio de la visualización de representaciones, el individuo puede acceder a las propiedades, características y dar sentido al objeto matemático analizado (Phillips et al., 2010). La visualización matemática –en ocasiones– se emplea para describir representaciones; en otras, se usa para determinar cómo funciona cierta representación específica en la comprensión o resolución de problemas matemáticos; o bien, para definir la actividad cognitiva del sujeto cuando hace uso de representaciones. Las ideas surgidas de la visualización en matemáticas permite –a los estudiantes– enriquecer contenidos, cuya utilización resulta provechosa, tanto en las tareas de representación como en el manejo de conceptos de esta disciplina. De acuerdo con Phillips et al. (2010, p. 26), en la visualización se distinguen: (a) *objetos físicos* percibidos mediante el sentido de la vista (e.g., ilustraciones, animaciones, pantallas generadas por la computadora, etc.); (b) *objetos mentales* almacenados y procesados en la mente en forma de esquemas mentales, imágenes mentales, construcciones y representaciones mentales; (c) *funciones cognitivas* manifestadas en la percepción visual, la manipulación y transformación de las representaciones visuales en la mente, concretando los modos abstractos de pensamiento e imaginando hechos.

Phillips et al. (2010) enfatizan que estas distinciones son importantes para entender el contexto de la visualización y poder establecer aplicaciones eficaces de ésta en el salón de clase. Para que los estudiantes comprendan y utilicen formas pertinentes de representaciones geométricas, deben entender el significado de las rectas, puntas de flecha, marcadores de ángulos, números y variables, entre otras. Debido a que las representaciones no son fáciles de ser empleadas en la resolución de tareas, es necesario que los alumnos tengan conocimiento considerable de los símbolos y convenciones de ellas de modo que esas representaciones adquieran sentido para ellos (Phillips et al., 2010). La visualización involucra actividad cognitiva, como la interpretación y la abstracción de aquello que el objeto matemático representa (Duval, 2003; Arcavi, 2003; Hitt, 1995; Zimmermann & Cunningham, 1991; entre otros). Sin embargo, la imposibilidad de un acceso directo a los objetos matemáticos, fuera de toda representación, provoca en los estudiantes confusiones casi inevitables (Duval, 2003).

Visualización en ambiente tecnológico

En la actualidad, existe una gran cantidad de programas informáticos (e.g., GeoGebra, Maple, Mathematica, Cabri-Geometry, Matlab, entre otros) utilizados en la enseñanza de las matemáticas. Este tipo de herramientas favorece la visualización de representaciones de conceptos matemáticos, y se vuelve trascendental en educación matemática; en particular, el uso de algún Software de Geometría Dinámica (SGD) facilita la incorporación de la visualización en la enseñanza de conceptos de la geometría, ya que se cuenta con imágenes dinámicas, las cuales a través de las herramientas propias de los SGD se pueden medir, agregar trazos auxiliares o simplemente explorar

alguna figura geométrica. Al hacer uso de representaciones dinámicas en la resolución de problemas geométricos, mediante la visualización, se facilita la manipulación, trazado o construcción de las figuras utilizadas y es posible modificarlas –si es necesario– en tiempo real (Hitt, 1995). Un atributo importante del SGD es su versatilidad de uso, el cual estimula el interés y la participación de los estudiantes cuando resuelven problemas geométricos. Diversos autores (e.g., Arcavi, 2003; Hitt, 1995; Phillips et al., 2010; Zimmermann & Cunningham, 1991, entre otros) mencionan que la visualización, empleando modelos dinámicos permite a los alumnos comprender conceptos o significados extraídos de las representaciones, y juega un rol importante en el desarrollo de su pensamiento analítico que, con frecuencia, no sucede en ambiente de papel-y-lápiz.

Metodología

El estudio es de tipo cualitativo. En él participaron 12 estudiantes mexicanos [grado 11], agrupados en parejas (seis Equipos). El trabajo estuvo dividido en dos fases: la primera se enfocó en la visualización de figuras geométricas usando papel-y-lápiz, con la finalidad de extraer las propiedades que, de acuerdo con el conocimiento previo de los alumnos, estaban implícitas en la figura; la segunda incluyó el análisis visual de la figura en ambiente dinámico (tecnológico). Mediante el uso del SGD (GeoGebra) los participantes debían validar las propiedades de las figuras visualizadas en papel-y-lápiz. Durante la resolución de las actividades en este ambiente, se buscó que los estudiantes conjeturaran el comportamiento general de las figuras cuando cambiaban algún parámetro de la misma, descubrieran invariantes, si los había, describieran y explicaran los objetos matemáticos visualizados.

La primera actividad fue retomada del artículo *A cognitive analysis of problems of comprehension in learning of mathematics* (Duval, 2006, p. 117). En esta actividad, el autor propone a los alumnos que a partir del esbozo de la gráfica (véase Figura 1) hallen la longitud del segmento \overline{ED} , tomando como datos fijos la longitud de los segmentos $\overline{AB} = \overline{DC} = 4\text{ cm}$ y $\overline{BC} = 7\text{ cm}$. El autor reporta tres tipos de respuesta: 9% da 3 cm (respuesta matemática), 39.6% da 3.5 cm (medida directa del segmento) y 24.4% da otras respuestas, incluyendo la ausencia de ellas. Los resultados de los estudiantes tuvieron como referente el ambiente de papel-y-lápiz.

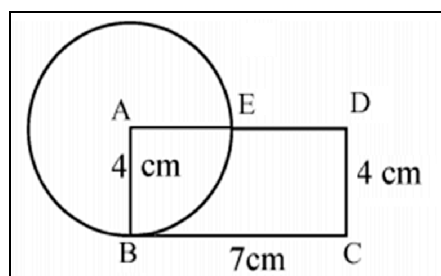


Figura 1. Cálculo de la longitud del segmento \overline{ED} , usando papel-y-lápiz.

La segunda actividad fue adaptada del libro *Plane and Solid Geometry* (Wentworth & Smith, 1913, p. 33). En nuestro estudio se propuso a los participantes un triángulo rectángulo ABC, que de acuerdo con sus características, permitiera a los alumnos identificar sus propiedades (implícitas y explícitas) con la finalidad de calcular su área. En la actividad, se pretende que los estudiantes identifiquen si existe alguna relación proporcional entre las áreas de los triángulos ABC y XYZ, este último formado a partir de los puntos medios del ΔABC (véase Figura 2). Para determinar si existe (o no) cierta relación entre las áreas de los triángulos ABC y XYZ, se pidió a los alumnos que calcularan sus áreas; si existía alguna relación entre éstas, entonces los estudiantes debían explicar si tal relación podía (o no) mantenerse para cualquier triángulo independientemente de su tamaño o forma.

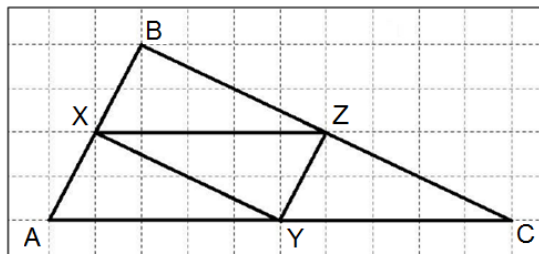


Figura 2. Identificación de la relación de áreas de triángulos, usando papel-y-lápiz.

El acopio de datos fue mediante el registro escrito de las respuestas de los estudiantes al resolver las actividades, las cuales fueron video-grabadas, además de preguntas del investigador –a los participantes– durante la implementación de éstas. Las actividades propuestas a los participantes debían ser abordadas usando papel-y-lápiz y tecnología (GeoGebra). En las mismas actividades se les solicitó que validaran sus resultados obtenidos en ambos ambientes.

Análisis de datos y discusión de resultados

El análisis de los datos recabados se basó en la interpretación y en el número de incidencias comunes, por parte de los alumnos, de sus soluciones en ambos ambientes, tomando en cuenta las video-grabaciones –de las discusiones [estudiante-estudiante y estudiante-profesor] durante la experimentación– y los registros escritos, una vez solucionado el problema. A continuación, analizamos y discutimos los resultados de las actividades implementadas.

Primera actividad

En la primera actividad –en ambiente de papel-y-lápiz– se obtuvieron los siguientes resultados: cinco equipos percibieron que el valor del segmento \overline{ED} es 3.5 cm y sólo un equipo consideró las propiedades de la circunferencia, al darse cuenta de que el valor real del segmento \overline{ED} es de 3 cm. De acuerdo con los resultados obtenidos, podemos afirmar que la manera de visualizar –por parte de los estudiantes– esta figura geométrica tiende a adquirir la forma de mayor simpleza (Duval, 2003), es decir, ellos perciben que los segmentos \overline{AE} y \overline{ED} son iguales. Esta afirmación está basada en que –la mayoría de ellos– identificó que el punto E (intersección de la circunferencia con el segmento \overline{AB}) se localizaba en el punto medio del segmento \overline{AB} . Un ejemplo de esta forma de visualización es la efectuada por el Equipo 1 (véase Figura 3), en la cual se muestra que la dificultad para visualizar de forma correcta radica en la manera de articular la información implícita y explícita dada (Arcavi, 2003; Duval, 2003, 2006). A partir de los resultados obtenidos, podemos asegurar que la visualización de la figura, por parte de los alumnos –en ambiente de papel-y-lápiz–, generó dificultades de percepción que impidieron lograr la visualización correcta del objeto geométrico mostrado (Duval, 2003, 2006).

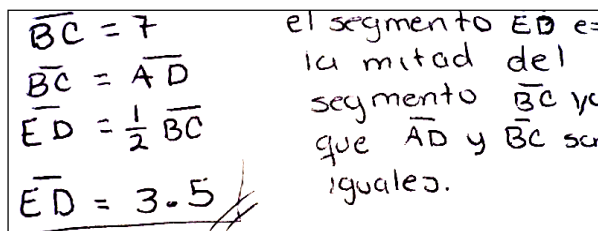


Figura 3. Influencia de la percepción visual en el cálculo de la longitud del segmento \overline{ED} , usando papel-y-lápiz.

En la segunda parte de esta actividad (ambiente tecnológico), los participantes reprodujeron la Figura 1 empleando el SGD (GeoGebra) y, usando esta herramienta, calcularon la longitud del segmento \overline{ED} . Una vez resuelto el problema, usando el SGD, compararon el resultado obtenido con el software respecto del conseguido con papel-y-lápiz. Al hacer uso del software GeoGebra, el total de los equipos concluyó que la longitud del segmento \overline{ED} es de 3 cm, debido a que E no está localizado en el punto medio del segmento \overline{AD} (véase Figura 4).

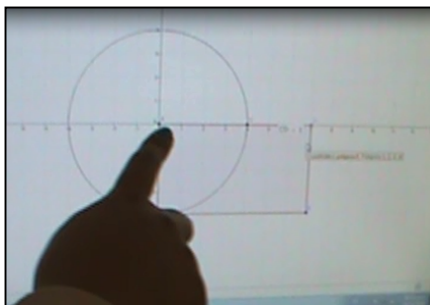


Figura 4. Influencia de la percepción visual en el cálculo de la longitud del segmento \overline{ED} , usando ambiente tecnológico.

A continuación, analizamos y discutimos un extracto de lo expuesto por el Equipo 4² (Estudiantes 4A y 4B) al contrastar los resultados surgidos en papel-y-lápiz, respecto de lo obtenido con ambiente tecnológico:

- [1] *Profesor:* De acuerdo con la Figura 1 [*ambiente de papel-y-lápiz*] ¿cuál es la longitud del segmento \overline{ED} ?
- [2] *Estudiante 4A:* Como el segmento \overline{BC} y el segmento \overline{AD} son iguales. Entonces, si éste [punto E] está al centro [*punto medio del segmento \overline{AB}*] vale la mitad [3.5 cm].
- [3] *Profesor:* Usando el software [*ambiente tecnológico*] ¿el resultado cambió o es el mismo?
- [4] *Estudiante 4A:* Nos dimos cuenta de que el radio de la circunferencia es 4 cm y el radio en todas las partes de la circunferencia siempre es el mismo, entonces mide 4 cm, aunque [*visualmente en la figura en papel-y-lápiz*] sea la mitad de \overline{AD} .
- [5] *Profesor:* Finalmente, ¿cuál sería el valor [*la longitud*] de \overline{ED} ?
- [6] *Estudiante 4A:* Tres, ya que la distancia de \overline{AE} es 4 cm y el segmento \overline{AD} es 7 cm.
- [7] *Profesor:* ¿De qué forma les ayudó el software en la visualización de la figura?
- [8] *Estudiante 4A:* A simple vista se ve como si fuera la mitad [*ambiente de papel-y-lápiz*] y al ponerlo en la computadora [*GeoGebra*] se ven bien definidas las unidades de la figura [*perciben las propiedades del objeto matemático*].
- [9] *Profesor:* ¿Qué pueden decir de la figura impresa [*ambiente de papel-y-lápiz*]?
- [10] *Estudiante 4A:* Se tiene una figura que no es proporcional [*según sus características*].

Segunda actividad

En la segunda actividad (en ambiente de papel-y-lápiz), se pidió a los participantes que identificaran si existía alguna relación proporcional entre las áreas de los triángulos ABC y XYZ . Sólo el Equipo 6 tuvo dificultades en el cálculo de las áreas de los triángulos; ellos calcularon de manera errónea la altura del ΔXYZ (considerando la medida del segmento \overline{YZ} como 2 cm), y concluyeron que las áreas de los triángulos ABC y XYZ eran distintas y no tenían relación alguna.

Cuando se preguntó a los demás estudiantes si la relación encontrada (de haberla obtenido) podía o no mantenerse para cualquier triángulo [rectángulo o no], dijeron lo siguiente: (a) Equipo 4: la relación no se mantiene “porque los ángulos no siempre son los mismos”; (b) Equipos 2, 3 y 5: la

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.

relación puede mantenerse “podría mantenerse [*esta relación*] siempre y cuando se cumpla la regla del punto medio en cada segmento o lado del triángulo” [*se refieren al ΔABC*] (Equipo 5); (c) Equipo 1: “se mantiene la relación porque los puntos que dividen a los lados del ΔABC son puntos medios”; (d) Equipo 6: “no existe relación alguna entre [*las áreas de*] los triángulos”; no argumentaron porqué.

En la segunda parte de esta actividad (ambiente tecnológico), los alumnos usaron el software GeoGebra para buscar las relaciones entre las áreas de los triángulos. Todos los equipos concluyeron que las áreas de los ΔXYZ , ΔAXY , ΔYZC y ΔXBZ eran iguales y que el área del ΔXYZ es la cuarta parte del área del ΔABC . En seguida, se les pidió a los participantes desplazar los puntos A , B y C (vértices del ΔABC), usando las herramientas del software con la finalidad de obtener nuevos triángulos, cuya longitud de sus lados fuera diferente entre sí e identificaran el porqué esta relación puede o no mantenerse para cualquier triángulo. He aquí un extracto de lo expuesto por el Equipo 5 (Estudiantes 5A y 5B):

[11] *Profesor*: Al desplazar los puntos A , B y C , ¿la relación [*se refiere a que el área del ΔXYZ es la cuarta parte de la del ΔABC*] se mantiene para cualquier triángulo?

[12] *Estudiante 5A*: Siempre que se respete el punto medio de cada uno de sus lados va a tener [*ΔABC*] cuatro triángulos inscritos con la misma forma del triángulo mayor y cada uno de ellos va a ser siempre la cuarta parte del área total (Figura 5).

[13] *Profesor*: ¿En qué momento se podría perder esta relación?

[14] *Estudiante 5A*: Cuando los puntos ya no sean los puntos medios [*se refiere a los puntos X , Y , Z*], ya que nos dimos cuenta [*de*] que al mover los puntos [*se refiere a los vértices A , B y C*] las áreas [*de los triángulos interiores*] seguían siendo iguales y que la suma nos daba la mayor [*área del ΔABC*] debido a que los puntos medios hacían esta proporción, pero sólo lo pudimos ver cuando hicimos diferentes casos con el programa.

Al hacer uso del software, todos los equipos lograron generalizar la relación de las áreas de los triángulos formados por puntos medios de cada lado para cualquier triángulo.

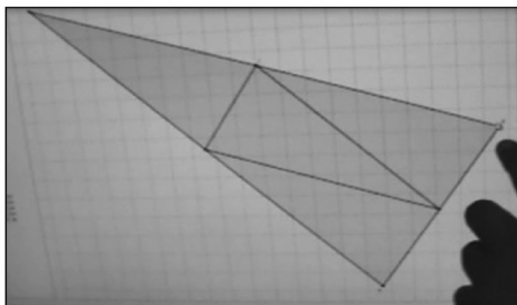


Figura 5. Generalización de la relación de áreas, usando tecnología.

Conclusiones

Respuesta a la pregunta planteada (c.f., p. 1 de este documento): ¿cómo influye la visualización en el aprendizaje de conceptos matemáticos cuando intervienen en ésta los ambientes de papel-y-lápiz y tecnológico? De acuerdo con las evidencias surgidas en la implementación de las actividades, podemos decir que la interpretación por parte de los estudiantes de la representación de los objetos geométricos, ya sea en el ambiente de papel-y-lápiz o en el tecnológico, depende de sus conocimientos previos y del contexto (trabajo en papel-y-lápiz o con tecnología; tipos de actividades; discusiones: estudiante-estudiante, estudiante-profesor), los cuales son fundamentales y les permiten interpretar y dar sentido a las representaciones, y por ende comprender al objeto matemático en cuestión.

A partir del reconocimiento de las propiedades vinculadas con las representaciones de figuras geométricas, los participantes lograron plantear conjeturas que, finalmente, les dieron pautas para definir conceptos ligados con la percepción visual del objeto matemático. La representación geométrica –en el ambiente de papel-y-lápiz– dio a los alumnos poca información sobre el objeto a visualizar, pues no lo pudieron manipular, ya que se trata de una figura estática. En cambio, al utilizar el software GeoGebra los participantes adquirieron recursos de apoyo, que les permitieron identificar propiedades de esos objetos (e.g., parte de la solución de la segunda actividad). Como resultado de la interacción con el software, los estudiantes descubrieron propiedades de las figuras geométricas y lograron formular conjeturas apoyados en sus observaciones mediante la manipulación de las representaciones figurales de los objetos geométricos. Estos recursos les permitieron establecer *puentes* entre la representación del objeto matemático y sus propiedades; así generaron conceptualizaciones del objeto geométrico en cuestión.

Podemos conjeturar, finalmente, que cuando se emplean representaciones geométricas, su visualización involucra siempre dos operaciones visuales que tienden a asimilarse dentro de un mismo acto por parte del sujeto: (i) distinguir varias formas dentro de una figura, y (ii) identificar estas formas o su configuración representada, usando información previa plenamente reconocida. En nuestro trabajo, resaltamos el hecho de que el uso de la tecnología en la resolución de las actividades propuestas permitió a los estudiantes distinguir propiedades geométricas de los triángulos, en términos de sus áreas, dentro de una figura (triángulo, segunda actividad). Nuestros resultados –en ambiente de papel-y-lápiz– concuerdan con lo expuesto por Duval (2003), quien afirma que las personas no especialistas en visualización, con frecuencia, no toman en cuenta características de la representación, o bien, interpretan erróneamente las representaciones y crean contenidos con significado personal, que no se parecen en lo absoluto a las representaciones matemáticas institucionales (e.g., parte de la solución de la primera actividad). Es cierto que el SGD favorece el aprendizaje de conceptos geométricos, pero no es sólo este ambiente que debemos tomar en cuenta como herramienta de enseñanza, sino que es crucial también el uso de papel-y-lápiz, pues ellos se complementan con la finalidad de lograr un éxito (parcial) en la visualización de objetos matemáticos, además de que favorece en la generación de conjeturas de conceptos abstractos surgidos de tales representaciones. Este trabajo permite apuntar el rumbo de nuevas investigaciones, en las cuales se pretende responder la pregunta de investigación ¿qué tipo de figuras u objetos, analizados a partir de su visualización, promueven la abstracción matemática? Esta y otras preguntas pretenden responderse en el futuro.

Notas finales

¹ Estudiantes, alumnos y participantes son tomados como sinónimos en este artículo.

² Esta es la traducción de la discusión original, la cual se efectuó en español.

In this paper we report the results obtained when implementing Activities related to the visualization of geometric representations in paper-and-pencil and technological environments with students¹ grade 11. This is a qualitative research supported by both the representation theory and the visualization of mathematical objects using technological aid. We discuss how the use of technology promotes learning mathematical concepts through the analysis of static and dynamic geometric figures. Our results show that the technological tool contributes to the visualization of geometric representations arisen from working with Activities; however, paper-and-pencil as a working tool becomes necessary to give rise to conjectures about the meaning of abstract concepts linked to these representations.

Keywords: Geometry and Geometrical and Spatial Thinking, Measurement, Technology, High School Education

Background and research problem

For some years, mathematical visualization has been researched as a resource to achieve learning mathematical concepts (e.g., Arcavi, 2003; Duval, 2003, 2006; Phillips, Norris, & Macnab, 2010; Presmeg, 2006; Zimmermann & Cunningham, 1991, among others). These authors have developed numerous studies with the objective of exploring different ways of “visualizing” abstract mathematical objects in paper-and-pencil and technological environments, which support and mediate the emergence and development of mathematical concepts. Due to the large number of geometric representations found in different media –paper-and-pencil and technological–, there is the need (in the student) to identify the characteristics and properties they have. In this article we seek to provide an answer to the following question: how does visualization influence the learning of mathematical concepts when the paper-and-pencil and technological environments intervene?

Conceptual framework

The conceptual framework used in this research is supported by the contributions about visualization in mathematics (e.g., Duval, 2003, 2006; Arcavi, 2003; Phillips et al., 2010; Zimmermann & Cunningham, 1991; among others). Accordance with the Dictionary of the Royal Spanish Academy, the word “seeing” can be understood as synonymous with “visualization” and means “to form in the mind a visual image of an abstract concept” (RAE, 2014). Several researchers in mathematics education have contributed to what should be understood by “visualization”. Here are three of them: (i) “Visualization is the individual’s ability to produce a representation that, in the absence of any visual perception of the objects represented, through which allow observe as if they were really in front of the eyes” (Duval, 2003, p. 48); (ii) “visualization is the ability, the process and the product of creation, interpretation, use of and reflection upon pictures, images, diagrams, in our minds, on paper or with technological tools, with the purpose of depicting and communicating information, thinking about and developing previously unknown ideas and advancing understandings (Arcavi, 2003, p. 217); (iii) visualization is the process of creating mental images either using paper-and-pencil or technology as well as the effective use of such images in mathematical discovery and understanding of the objects under study (Zimmermann & Cunningham, 1991, p. 3). These and other contributions on the meaning of mathematical visualization demonstrate cognitive character of this concept. We will now describe some concepts involved in the visualization of geometric representations both in paper-and-pencil and in technological environments.

Visualization in paper-and-pencil environment

The representation of mathematical objects involves analysis of their institutional meaning. If the object is a geometric figure, its characteristics must be identified; besides, a treatment of the object with the sense of sight must also be done. Nonetheless, regardless of the conceptions, the nature and the existence of mathematical concepts - of those who learn or those who teach-, many mathematicians (e.g., Arcavi, 2003; Duval, 2003, 2006; Phillips et al., 2010; among others) consider that this way of constructing knowledge consists of “seeing”, and such visualization must be done by the senses, the imagination and the intelligence (Duval, 2006). Due to the fact that visualization triggers non-conscious automatic processes in the subject which depend on anything that might be kept in his or her memory, visual learning is direct. This allows learners to discriminate and identify in less than a tenth of a second the various elements of sight and relationships (Duval, 2003).

Through the visualization of representations, the individual can access the properties, characteristics and give meaning to the mathematical object analyzed (Phillips et al., 2010). Sometimes, visualization is used to describe visual representations; on other occasions, it is used to

determine how a certain specific representation works in the understanding of or solving of mathematical problems; it might also be used to define the cognitive activity of the subject when using visual representations. The ideas that emerge from visualization in mathematics lead (students) to enrich visual contents whose use is beneficial both in representation tasks and in handling concepts of this discipline. According to Phillips et al. (2010), in visualization one may distinguish: (a) physical objects perceived by the sense of sight (e.g. illustrations, animations, computer-generated displays, etc.); (b) mental objects collected and processed in the mind in the form of mental schemes, mental imagery, constructions and mental representations; (c) cognitive functions expressed in visual perception, manipulation and transformation of visual representations in the mind, making concrete the abstract ways of thinking and imagining facts.

Phillips et al. (2010) point out that these distinctions are relevant to understand the context of the visualizations and to establish effective visualization applications in the classroom. In order for the student to understand and use geometric representations in an adequate manner, he or she must first understand the meaning of straight lines, arrowheads, angle markers, numbers, and variables (Phillips et al., 2010). Since visual representations are not necessarily clear to the students, they must have a considerable knowledge of symbols and representation conventions so that they have meaning. Visualization involves cognitive activities like interpretation and abstraction of that which the mathematical object represents (Duval, 2003; Arcavi, 2003; Hitt, 1995; Zimmermann & Cunningham, 1991, among others). However, the impossibility of direct access to mathematical objects, outside any representation, inevitably causes confusion in students (Duval, 2003).

Visualization in technological environment

Nowadays there are a vast number of computer programs (e.g., GeoGebra, Maple, Mathematica, Cabri-Geometry, Matlab, among others) used in mathematics teaching. This type of tool promotes visualization as a way of teaching mathematical concepts, and becomes a key factor in mathematical education; particularly, the use of any Software of Dynamic Geometric (SDG) makes the inclusion of visualization in teaching geometric concepts an easy thing because any SDG has dynamic images which allow measurement or the addition of auxiliary lines using the tools available in the software; one may even simply explore a geometric figure. When using dynamic representations to solve geometry problems through visualization, handling is facilitated, sketching or construction of the figures used becomes easier and it is possible to modify them in real time if needed (Hitt, 1995). A relevant feature of SDG is its versatility in terms of use which stimulates the interest and participation of the students when solving geometry problems. Different authors (e.g., Arcavi, 2003; Hitt, 1995; Phillips et al., 2010; Zimmermann & Cunningham, 1991, among others) agree that visualization using dynamic models allows students to understand the concepts or the meanings that may be extracted from representations; therefore, it plays an important role in the students' development of analytical thought, something that does not often happen in a paper-and-pencil environment.

Method

The study is qualitative. The participants were 12 Mexican high-school students [grade 11] paired in six teams. The study was divided in two phases: the first one focuses on visualizing geometric figures using a static environment (paper-and-pencil) in order to extract the properties which, according to the student's knowledge, are implicit in the figure; the second one includes the visual analysis of the figure in a dynamic environment (technological). Using SDG (GeoGebra), the student validates the properties of the figures visualized in paper-and-pencil. During the work with the activities in this environment, we seek for the students to conjecture about the general behavior of the figures when any parameter of the figures changes, to find invariants –if there are any, and to describe and explain the mathematical objects visualized.

The first activity was taken from the article *A cognitive analysis of problems of comprehension in learning of mathematics* by Duval (2006, p.117). In this activity the author proposes that, from a sketch of the graph (see *Figure 1*), students find the length of segment \overline{ED} , taking as fixed data the length of the segments $\overline{AB} = \overline{DC} = 4\text{ cm}$ and $\overline{BC} = 7\text{ cm}$. The author reported three types of answers: 9% answer 3 cm (mathematical answer), 39.6% answer 3.5 cm (direct measure of the segment) while 24.4% provide other answers, including no answer. The students' results had the paper-and-pencil environment as a referent.

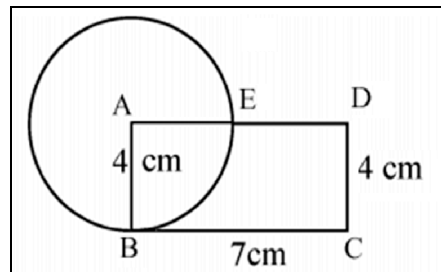


Figure 1. Calculate the length of segment \overline{ED} , using paper-and-pencil environment.

The second activity was adapted from the book *Plane and Solid Geometry* (Wentworth & Smith, 1913, p. 33). In our study, the students were presented with a right triangle ABC which according to their characteristics, allow students to identify its properties (implicit and explicit) in order to calculate its area. In the activity, we seek for the students to identify whether there exists a proportional relationship between the area of the triangles ABC and XYZ, the latter formed from the midpoints of $\triangle ABC$ (see *Figure 2*). To determine if there exists (or not) a relationship between the areas, the students are asked to calculate the areas of the triangles mentioned; if there is any relationship, the student must explain if such relationship may (or may not) be maintained for any triangle regardless its size or shape

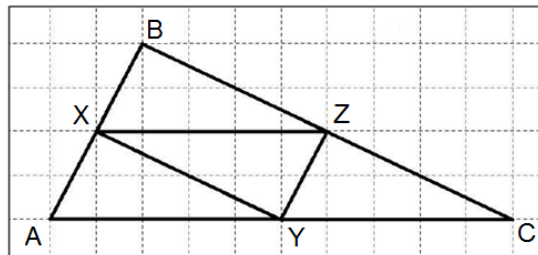


Figure 2. Identifying the characteristics of a triangle, using paper-and-pencil environment.

Data collection included the written record of student responses to the activities, which were video-recorded, in addition to students' responses to questions asked by the researcher during the activities. The activities presented to participants were to be addressed using paper-and-pencil and technology (GeoGebra). At the same activities they were asked to validate the results obtained in both environments. They were asked to validate their results in the same Activities using technological (GeoGebra) and paper-and-pencil environment by confronting them.

Data analysis and result discussion

The analysis of the collected data was based on the students' interpretation and on the number of common events and their solution in both environments, taking into account videos of the discussions (student-student and student-teacher) during the activity and the written record once the problem was solved. In the next section, the results of the implemented activities are analyzed.

First Activity

In the first activity, during the work in paper-and-pencil environment, the following results were obtained: five teams detected that the value of the segment \overline{ED} was 3.5 cm, while only one team considered the properties of the circle after they realized that the real value of the segment \overline{ED} was 3 cm. According to the results obtained, we may state that the visualization of this geometric figure produced by the students tends to acquire a simpler form (Duval, 2003); this way of “seeing” makes the students perceive the segments \overline{AE} and \overline{ED} as equal. This statement is based on the fact that most of the students identified that point E (intersection of the circle with segment \overline{AB}) was located at the midpoint of segment \overline{AB} . An example of this way of visualizing is evident in the work of Team 1 (see *Figure 3*) in which it is shown that a difficulty to visualize correctly lies in the manner of articulating the implicit and explicit information given (Arcavi, 2003; Duval, 2003, 2006). From the results obtained, we can state that the way in which the students saw the figure (in a paper-and-pencil environment) generated an impression at first sight that prevented them from reaching the correct visualization of the geometric object shown (Duval, 2003, 2006).

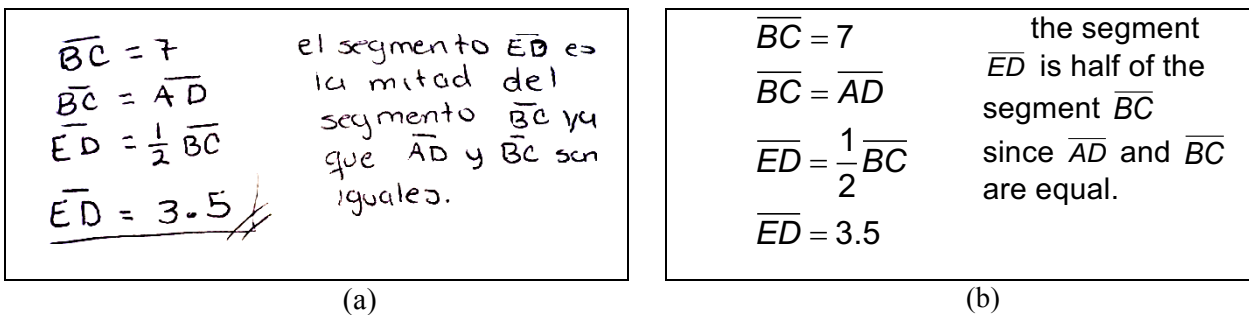


Figure 3. (a) Influence of visual perception when calculating the length of segment \overline{ED} , using paper-and-pencil environment. (b) Transcription of the answer provided in (a).

In the second part of this activity (technological environment), the students reproduced *Figure 1* with SDG (GeoGebra) and using its tools calculated the length of segment \overline{ED} . Once the problem was solved with SDG, they compared the result obtained with the software to that obtained with paper-and-pencil. When using GeoGebra, all of the teams concluded that the length of segment \overline{ED} was 3 cm because point E is not located at the midpoint of segment \overline{AD} (see *Figure 4*).

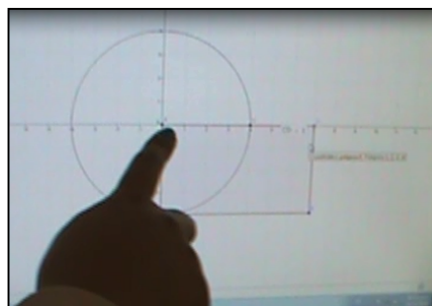


Figure 4. The students realize that point E is not located in the midpoint of segment \overline{AD} , using the technological environment.

Next, we discuss an excerpt of what was presented by Team 4² (students 4A and 4B) when they contrasted the results obtained in paper-and-pencil with those obtained in the technological environment:

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.

- [1] *Teacher*: According to *Figure 1* [*paper-and-pencil environment*], what is the length of segment \overline{ED} ?
- [2] *Student 4A*: Since segment \overline{BC} and segment \overline{AD} are equal. Then, if this [*point E*] is at the center [*midpoint of segment AB*], it is equal to the half [*3.5 cm*].
- [3] *Teacher*: Using the software [*technological environment*], did the result change or remain the same?
- [4] *Student 4A*: We realized that the radius of the circumference is 4 *cm* and the radius in all the parts of the circumference is always the same, so it measures 4 *cm* although [*visually in the figure in paper-and-pencil*] it is half of \overline{AD} .
- [5] *Teacher*: Finally, what would be the value of [*the length of*] \overline{ED} ?
- [6] *Student 4A*: Three, because the distance of \overline{AE} is 4 *cm* and segment \overline{AD} is 7 *cm*.
- [7] *Teacher*: In which way did the software help you to visualize the figure?
- [8] *Student 4A*: At first sight, it looks as if it were half [*paper-and-pencil environment*] and when we put it in the computer [*GeoGebra*] the units of the figure look well-defined [*they notice the properties of the mathematical object*].
- [9] *Teacher*: What can you say about the printed figure [*paper-and-pencil environment*]?
- [10] *Student 4A*: There is a figure that is not proportional [*according to its characteristics*].

Second Activity

During the second Activity (in a paper-and-pencil environment), the students were asked to identify whether there is a proportional relation between the area of triangles ABC and XYZ . Only Team 6 had difficulties calculating the areas; they identified the height of triangle ΔXYZ incorrectly (they considered the measure of the segment \overline{YZ} as 2 *cm*), and concluded that the areas of triangles ABC and XYZ were different and therefore, they did not find any relationship.

When the rest of the students were asked whether the relation found (if they had found any) could or could not be maintained for any triangle [*right or not*], they said: (a) Team 4: the relation is not maintained “because the angles are not always the same”; (b) Teams 2, 3, and 5: the relation “could be maintained as long as the midpoint rule is obeyed in each segment or side of the triangle” [*they mean triangle ABC*] (Team 5); (c) Team 1: “the relation is maintained because the points that divide the sides of the triangle ABC are midpoints”; (d) Team 6: “there is no relation between [*the areas of*] the triangles”; they do not provide arguments as to why.

In the second part of this activity (technological environment), the students used GeoGebra to look for the relations between the areas of the triangles. All the teams concluded that the areas of the triangles ΔXYZ , ΔAXY , ΔYZC and ΔXBZ were equal and that the area of triangle XYZ is a fourth of the area of the triangle ABC . Afterwards, the students were asked to move points A , B and C (vertices of ΔABC) with the software tools in order to obtain new triangles whose side lengths were different from one another. They were also asked to identify why this relationship can or cannot be maintained for any triangle. Here is an excerpt of what Team 5 (students 5A and 5B) presented:

- [11] *Teacher*: When moving points A , B and C , is the relation [*he means that the area of ΔXYZ is a fourth of ΔABC*] maintained for any triangle?
- [12] *Student 5A*: As long as the midpoint of every side is respected, there will be [ΔABC] four triangles inscribed with the same shape as the largest triangle and each of them will always be a fourth of the total area (*Figure 5*).
- [13] *Teacher*: When might this relationship be lost?
- [14] *Student 5A*: When the points are no longer midpoints [*he means points X, Y, and Z*] because we realized [*that*] when moving the points [*he means vertices A, B, and C*], the areas [*of the interior triangles*] were still equal and that the sum was equal to the largest [*area of ΔABC*]

because the midpoints made that proportion; but we were only able to see that when we did different cases with the software.

Using the software, all the teams managed to generalize the relation of the areas of the triangles formed by the midpoints of every side of any triangle.

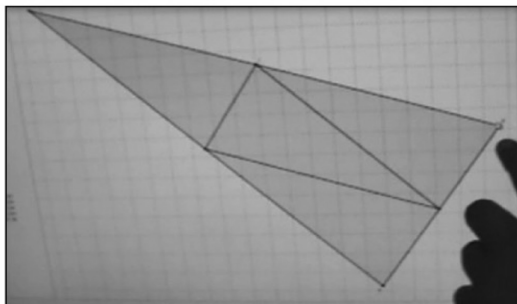


Figura 5. Generalization of the relation of the areas, using technological environment.

Conclusions

Answer to this question (c.f., p 1 of this document.) how does visualization influence the learning of mathematical concepts when the paper-and-pencil and technological environments intervene in it? According to the evidence arising in the implementation of activities, we can say that the interpretation by students of the representation of geometric objects, either in paper-and-pencil or in technological environments, depends on the student's previous knowledge and the context (work on paper-and-pencil or technology, types of activities, discussions: student-student, student-teacher), which are essential and allow students to interpret and make sense of the representations, and thus understand the mathematical object.

Starting from the recognition of the properties linked to the representation of geometric figures, the students were able to propose conjectures that ultimately provided them with the guidelines to define concepts related to visual representation. When working with paper-and-pencil, the geometrical representation offers the student little view [information] about the object because it cannot be manipulated, since it is a static figure. On the other hand, when using the software GeoGebra, the participants gained support resources that allowed them to identify properties of these objects (e.g., part of the solution of the second activity). As a result of interaction with the software, students discovered properties of geometric figures and managed to formulate conjectures supported by observations made while manipulating dynamic representations of geometric objects. These resources helped students to create bridges between the representation of the mathematical object and its properties which lead (the students) to generate conceptualizations of the geometric object in question.

When geometric representations are used, their visualization always involves two visual operations that tend to be assimilated in a single act by the subject: (i) distinguishing several shapes inside a figure, and (ii) identifying those shapes or their represented configuration using previous information widely known. In our paper, we highlight the fact that the use of technology in solving the proposed activities allowed students to distinguish geometric properties of triangles, in terms of their areas, within a figure (triangle, second activity). Our results [paper-and-pencil environment] are in accordance with what Duval (2003) explains when he says that people who are not specialists in visualization simply overlook characteristics of the representation, or they may incorrectly interpret the representation, or make up representations of contents with a personal meaning even if they are not similar at all to the institutional mathematical representations (e.g, part of the solution of the first activity). It is true that the SDG promotes learning geometric concepts, but this is not the only

environment we should take into account as a teaching tool. The use of paper-and-pencil is a key factor as well since the two environments complement each other to achieve a (partial) success in the visualization of mathematical objects, besides it favors the creation of conjectures on abstract concepts that arise from such representations. This work points to directions for further research, which may seek to answer the research question: what kind of figures or mathematical objects, analyzed through visualization, promote mathematical abstraction? This and other questions are intended to be answered in the future.

Endnotes

¹ Students and participants are taken as synonyms in this article.

² This is a translation of the original discussion, which occurred in Spanish.

References

- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215-224.
- Hitt, F. (1995). Intuición primera versus pensamiento analítico: Dificultades en el paso de una representación gráfica a un contexto real y viceversa. *Revista de Educación Matemática*, 7(1), 63-75.
- Duval, R. (2003). "Voir" en Mathématiques. En Filloy, E. (Ed.), *Matemática educativa: aspectos de la investigación actual* (pp. 41-76). México: FCE.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 62, 103-131.
- Phillips, L. M., Norris, S. P., & Macnab, J. S. (2010). *Visualization in mathematics, reading and science education*. New York: Springer.
- Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 205-235). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- Wentworth G. & Smith D .E. (1913). *Plane and Solid Geometry*. Boston: Ginn and Company.
- Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). What is mathematical visualization? In W. Zimmermann & S. Cunningham, (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 1-8). Washington, DC: Mathematical Association of America.