TENDIENDO PUENTES ENTRE TEORIAS: ¿QUÉ PUEDE LOGRARSE?

BUILDING BRIDGES BETWEEN THEORIES: WHAT CAN BE ACHIEVED?

María Trigueros
Instituto Tecnológio Autónomo de México (ITAM)
trigue@itam.mx

El interés por entender el fenómeno del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas y por desarrollar nuevas y más efectivas metodologías de enseñanza del Cálculo Diferencial y del Álgebra Lineal me condujo a establecer diálogos entre la teoría APOE y otras teorías de la Educación Matemática. Esta iniciativa hizo posible entenderlas mejor. Se construyeron puentes entre ellas permitieron encontrar puntos de contacto, y expandir sus fronteras sin cambiar sus hipótesis fundamentales. En este trabajo se ilustra una reflexión sobre las posibles implicaciones del diálogo entre teorías y, a través de tres ejemplos, se muestra cómo puede promover experiencias enriquecedoras para los investigadores y propiciar la creatividad de los estudiantes. Se muestra también cómo es posible obtener resultados positivos en términos del aprendizaje de los alumnos y en el desarrollo de materiales didácticos efectivos.

Palabras clave: Pensamiento Matemático Avanzado, Teorías del Aprendizaje, Modelación

Hacer investigación en educación matemática implica el análisis de un fenómeno didáctico en términos de un punto de vista teórico específico. La elección debe hacerse entre una enorme cantidad de teorías que asumen perspectivas diversas frente a los complejos fenómenos del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Cada teoría se constituye en un campo delimitado por sus propias hipótesis, sus estructuras conceptuales y su metodología de trabajo desde el cual se definen y se abordan los problemas de interés. Así lo que aparenta ser un mismo fenómeno se define de distinta manera en cada teoría y las explicaciones de los mismos están acotadas por las limitaciones propias de cada una de ellas.

Recientemente ha surgido un interés creciente por tender puentes entre diversas teorías y analizar su posible complementariedad a través del estudio comparado de un mismo fenómeno o de su posible articulación en un nuevo y más extenso marco teórico (Artigue, Bosch & Gascón, 2011). Este interés puede ser teórico o puede resultar de una necesidad de análisis que surge en el contexto de una investigación, pero resulta problemático puesto que cada problema se construye en el marco conceptual de una teoría y con dicha teoría se trabaja y se interpretan los resultados utilizando herramientas específicas desarrolladas para ello (Trigueros, Bosch & Gascón, 2011). En este contexto surgen nuevas preguntas: ¿Por qué o para qué cruzar fronteras teóricas? ¿Cómo establecer un diálogo entre teorías que permita cruzar sus fronteras sin alterar los principios básicos de cada una de ellas? ¿Cómo construir puentes entre ellas o flexibilizar sus fronteras de manera que no se pierda la coherencia interna de cada una de ellas?

Intentaré, en lo que sigue, dar respuesta a este tipo de preguntas a través de los resultados de mi propia experiencia. Para ello discutiré algunos ejemplos específicos tomados de mi trabajo de investigación.

Cruzar fronteras entre teorías: Posibilidad de ampliación de dominios de aplicación

¿Cómo cruzar las fronteras de una teoría específica? ¿Qué se puede ganar con ello? Comenzaré por intentar dar una primera respuesta a estas preguntas. Un poco de mi historia personal puede ayudar a conformar algunas respuestas tentativas.

Mi trabajo de investigación en educación matemática ha utilizado como marco teórico la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) que es una teoría cognitiva que intenta explicar cómo los

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.

estudiantes construyen los distintos conceptos matemáticos (Arnon et al. 2014). El interés personal por buscar nuevas metodologías de enseñanza, de acercar a los estudiantes a las matemáticas y de promover que aprendan y puedan utilizar ese conocimiento me condujo a explorar otras teorías y a buscar establecer un diálogo entre algunas de ellas y APOE. ¿Qué implica esta exploración? En mi experiencia la exploración se hizo desde la consideración de la posibilidad de analizar las teorías y pensar en las fronteras no como límites rígidos sino como algo flexible y dinámico. Esta idea me condujo a pensar cómo pueden complementarse las teorías y cómo se pueden enriquecer mutuamente cuando se establece entre ellas un diálogo que permite extender sus límites teóricos o metodológicos y ampliar las posibilidades de análisis de los fenómenos didácticos de interés.

En todos los ejemplos de diálogo que describiré a continuación una de las teorías involucradas es la teoría APOE. Comenzaré por describirla muy brevemente: La teoría APOE está basada en la epistemología de Piaget, en particular en el mecanismo de abstracción reflexiva. Su nombre es un acrónimo de los tipos de estructuras mentales que se supone construyen los estudiantes conforme realizan actividad matemática. Una Acción es una transformación de objetos construidos previamente siguiendo instrucciones explícitas que el estudiante considera como externas. Las acciones pueden interiorizarse, mediante la reflexión, en un Proceso que consiste en la posibilidad de describir, imaginar o llevar a cabo las transformaciones sin necesidad de hacer todos pasos explícitamente. Los procesos se pueden revertir o coordinar unos con otros para construir nuevos procesos. Cuando el estudiante es consciente de un proceso como una totalidad y puede realizar acciones sobre él, éste se encapsula en un Objeto que puede desencapsularse, en caso de necesidad, en el proceso que le dio origen. Los Esquemas se desarrollan mediante la construcción de relaciones entre acciones, procesos, objetos y esquemas construidos previamente y se considera, consciente o inconscientemente, como un marco coherente que se utiliza para resolver problemas matemáticos relacionados entre sí. Cuando el estudiante requiere hacer acciones sobre el esquema, éste puede tematizarse en un objeto.

En APOE se considera que la tendencia general del estudiante cuando trabaja con una serie de situaciones relacionadas con una noción matemática específica es diferente dependiendo del tipo de estructuras que muestra en su trabajo. Además de las estructuras teóricas descritas, la teoría APOE incluye un modelo que describe una forma posible de construir los conceptos matemáticos de interés en términos de las estructuras de la teoría. Este modelo, conocido como descomposición genética (DG) no es único y debe validarse a partir de resultados experimentales. Por ello la metodología de investigación de la teoría incluye ciclos de investigación en los que la DG se refina hasta que se considera estable.

La teoría APOE incluye también un ciclo de enseñanza: Actividades diseñadas de acuerdo a la DG, discusión en Clase y Ejercicios (ACE) para promover la construcción de los conceptos de interés en el aula. En él se utilizan actividades para la enseñanza diseñadas tomando la DG como base y que se reconsideran conforme ésta se refina.

Búsqueda de detalle en el análisis de la actividad matemática de los estudiantes

En el contexto de un proyecto sobre la construcción de los conceptos del Cálculo Diferencial e Integral de funciones de dos variables, conjuntamente con Rafael Martínez- Planell, estudiamos el aprendizaje de las funciones de dos variables (Trigueros & Martínez-Planell, 2010; Trigueros, M., & Martínez-Planell, 2012). El análisis de los datos obtenidos en el primer ciclo del proyecto puso de manifiesto la necesidad de profundizar tanto en el uso del lenguaje utilizado en la enseñanza como en la representación geométrica de estas funciones y su papel en la construcción de este concepto, para poder interpretar las respuestas de los estudiantes. Por ejemplo, ante la instrucción de esbozar la gráfica de la función $z = x^2 + y^2$ en R^3 cuando $z = 3$, muchos estudiantes respondían "*Es un cilindro*" y dibujaban gráficas como la que se muestra en la Figura 1.

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.

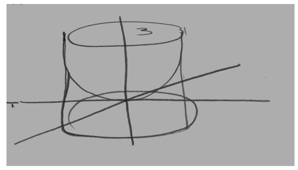

Figura 1. La gráfica de $3 = x^2 + y^2$ dibujada por muchos estudiantes.

Fue así que nos acercamos a una teoría cognitiva que detalla el papel de la relación entre distintas representaciones de un mismo concepto en el aprendizaje del mismo: La teoría de las Representaciones Semióticas (TRS) propuesta por Duval (2006). En ella se considera que el proceso de pensar matemáticamente requiere de la coordinación cognitiva de distintas representaciones mediante su comparación y análisis. Propone dos tipos de transformaciones de representaciones semióticas: tratamientos que consisten en cambios de representaciones que se encuentran en un mismo registro y conversiones que involucran cambios de registros de representación sin que se cambie el objeto denotado en ellas. Para discriminar los valores cognitivamente significativos de un objeto matemático mediante la comparación de representaciones similares es necesario hacer tratamientos, mientras que las conversiones permiten disociar el objeto representado del contenido de una representación particular e impedir que los diferentes registros queden en compartimentos ajenos para el aprendiz.

El análisis de las posibilidades de tender puentes entre las teorías APOE y TRS partió de la consideración del papel de las representaciones en la construcción de conocimiento en ambas teorías. En la TRS, los registros de representación y las transformaciones entre registros son centrales en la comprensión de los objetos matemáticos. En la teoría APOE las transformaciones entre representaciones y su relación están ligadas a distintas construcciones mentales que pueden ser descritas mediante los mecanismos de interiorización, coordinación, reversión o encapsulación. Así, es posible considerar que los tratamientos podrían describirse parcialmente en términos de acciones sobre un objeto en un registro de representación determinado y que la reflexión sobre ellas puede permitir destacar aspectos o propiedades significativas del objeto cuando estas acciones se interiorizan en procesos. La interacción con la TRS permite destacar el tipo y el papel de esas acciones al enfatizar la necesidad de discriminar entre las distintas características del objeto representado en el registro en el que se hacen las acciones. Consideremos, por ejemplo, la acción de sustituir la x por el número 1 en la función $z = x^2 + y^2$. Los estudiantes pueden reconocer a z como una función cuadrática en R^2. Mediante las acciones de sustituir distintos números en x pueden identificar una familia de funciones cuadráticas similares entre sí. Estas acciones pueden interiorizarse en el proceso de construcción de la familia de parábolas $z = a + y^2$. En este ejemplo, la TRS permite identificar el papel de esas acciones en la construcción de conocimiento sobre funciones que resulta fundamental cuando se consideran funciones de dos variables.

Por su parte, las conversiones pueden describirse en APOS como la interiorización del proceso que hace posible considerar las acciones de comparación e identificación de un objeto en registros diferentes de representación como una asociación; pero la interacción con la teoría de representaciones semióticas remarca la necesidad de incluir estos procesos en la DG por su importancia en términos cognitivos. Regresando al ejemplo anterior, la gráfica de las funciones $z = a + y^2$ en el plano permite subrayar aquellos aspectos de las gráficas como objetos que permanecen invariantes en los tratamientos y su relación con el parámetro en la representación analítica. Los procesos construidos mediante estas acciones pueden coordinarse con el proceso de representación de planos en R^3 en un nuevo proceso que permite representar las funciones cuadráticas sobre distintos planos fundamentales $x = a$ y en el proceso de construcción de la superficie correspondiente a la gráfica de la función. El puente entre las teorías permite, así, utilizar las nociones de tratamiento y conversión en la teoría APOE sin perder de vista su perspectiva genética y considerar la

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.

flexibilidad en el tránsito entre representaciones mediante la incorporación de especificidad en el análisis.

Tender un puente entre las dos teorías hizo posible un análisis más minucioso del trabajo de los estudiantes en tareas planteadas en una misma representación o que incluyen la conversión entre representaciones y las complejidades involucradas en él. Este análisis repercutió en un refinamiento de la DG. Permitió también mostrar que la generalización de la comprensión de las funciones de una variable a las funciones de dos variables no es directa, dado que los estudiantes no necesariamente perciben las analogías esperadas.

¿Cómo puede establecerse un diálogo fructífero entre teorías?

La posibilidad de coordinar teorías que examinan los fenómenos de la educación matemática desde muy distintas perspectivas puede parecer imposible. ¿Cómo tender puentes entre ellas? ¿Por dónde empezar a dialogar? En un esfuerzo por responder estas preguntas y tender puentes entre las fronteras de estas teorías, conjuntamente con Marianna Bosch y Josep Gascón, decidimos analizar las condiciones que debería satisfacer un diálogo entre teorías y aplicarlas a una conversación entre las teorías APOE y la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Trigueros, Bosch & Gascón, 2011).

El objeto primario de investigación de la TAD es la actividad matemática institucionalizada, es decir, cuestiona y modela los procesos de génesis y difusión intra-institucional e inter-institucional de las praxeologías (Chevallard, 1992). Éstas están compuestas por una parte práctica y una parte teórica. La primera puede describirse en términos de tareas y técnicas involucradas en la actividad y la segunda en términos de tecnologías y teorías que sustentan las tareas y las técnicas empleadas. El programa de investigación de la TAD requiere explicitar un modelo epistemológico (MER) de las matemáticas que sirve como referencia para analizar la actividad matemática institucionalizada y se basa en el proceso de transposición didáctica que establece las transformaciones que se pueden hacer sobre el conocimiento matemático para hacerlo "enseñable" en una institución específica. El MER se utiliza también para analizar y diseñar actividades de enseñanza y aprendizaje que permiten, a su vez, validarlo (Bosch & Gascón 2005). El análisis praxeológico de la actividad matemática en la institución permite entender las restricciones institucionales que limitan o favorecen ciertos tipos de actividad y analizar el papel del equilibrio en las prácticas matemáticas en la institución.

En el diálogo de este proyecto, la noción de praxeología de la TAD se usa como un marco de análisis reinterpretando las teorías como praxeologías de investigación con el fin de asegurar la consideración de todas sus componentes en el proceso de un diálogo fructífero. De esta manera, el dialogo se puede establecer desde los problemas que abordan (tareas), los instrumentos metodológicos que usan para abordar los problemas (técnicas y tecnologías) y las estructuras propias de las teorías.

Ambas teorías incorporan un análisis de la matemática escolar como parte fundamental de su acercamiento a cualquier problema didáctico e incluyen modelos alternativos para el desarrollo de conocimientos matemático como parte de su metodología: La descomposición genética (DG) en el caso de APOE y el modelo epistemológico de referencia (MER) en el caso de la TAD. Este hecho puede considerarse como un punto de contacto entre ambas teorías. La diferencia fundamental entre estos modelos radica en que la DG se utiliza para estudiar el desarrollo cognitivo de los individuos mientras que el MER se usa para estudiar las condiciones institucionales que permiten que las actividades matemáticas existan en una institución; la unidad de análisis es distinta y eso tiene implicaciones metodológicas importantes. Con el fin de llevar a cabo el diálogo, desarrollamos, en primer término, la noción de "estudiante genérico de una institución" que relaciona al sujeto epistémico de APOE con el "estudiante en una posición institucional" de la TAD. De esta manera se extiende la noción en ambas teorías: La dimensión institucional del análisis con TAD se puede trabajar a través de la noción del estudiante genérico de APOE y la descripción cognitiva de APOE

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.

puede integrarse a la de la TAD mediante el desarrollo de la posición del estudiante en una institución determinada.

El diálogo a partir de la componente técnico-tecnológica incluye las técnicas de investigación propias de cada teoría y los resultados que permiten, al interpretarse y generalizarse, acercarse a nuevos problemas. Este es un tipo de diálogo poco común en la educación matemática; en general no se discute cómo un resultado de una teoría se interpreta en términos de otra, ni se comparan resultados de distintas teorías. En el diálogo APOE-TAD observamos cómo cada una de las teorías se beneficia y amplía sus fronteras a partir de una reinterpretación de la metodología de la otra sin contradecir su lógica interna.

Las praxeologías en TAD hacen referencia a distintos niveles de análisis: puntuales (consisten en un tipo de tarea), locales (en el que varias tareas se agregan en una técnica) y así por agregaciones sucesivas se articulan las tareas hasta las regionales (se agregan distintas técnicas en una tecnología). La noción de tipos de concepción puede permitir una reformulación de este proceso de articulación de praxeologías mediante la distinción del tipo de técnicas que las componen como técnicas de tipo acción, proceso u objeto. Estos tipos de técnicas pertenecen a un continuo que describe el proceso institucional del desarrollo de las técnicas en la institución en la que se propone o se usa. Por ejemplo, al inicio de la preparatoria las derivadas de una función aparecen como una técnica acción constituida de gestos estereotipados basados en el cálculo de reglas memorizadas. Si los estudiantes son capaces de decidir entre dos reglas distintas a aplicar a la misma función en términos de su simplicidad o encontrar la antiderivada de alguna función, utilizan técnicas-proceso y cuando se cuestiona la aplicabilidad de la derivada a distintos tipos de funciones se usaría una técnica-objeto.

Por otra parte, la noción y los niveles de evolución de los esquemas en APOE puede relacionarse a la actividad que los sujetos llevan a cabo en la institución y podría ser utilizada para describir el desarrollo de las praxeologías de un sujeto en relación a las praxeologías en una institución. Regresando al caso del ejemplo de la derivada, podría considerarse que el nivel Intra- estaría asociado a la actividad matemática descrita mediante una colección de praxeologías aisladas o incompletas, como es el caso en que se presentan en la institución únicamente las reglas para construir gráficas de funciones utilizando las propiedades de la derivada como un algoritmo a seguir y no se requiere de justificación.

Por su parte la TAD contribuye a desarrollar en APOS la noción de relatividad institucional de la DG y así las herramientas de la TAD podrían apoyar el análisis de la DG en términos de sus posibilidades de existencia en una institución dada. En el caso de la derivada se podría ejemplificar por diferencias en las construcciones previstas para describir la forma en que se construye en la escuela secundaria o para quienes se forman como matemáticos en la universidad. En este caso las actividades para alumnos de secundaria no se referirían, por ejemplo, a las ecuaciones diferenciales, mientras ello sería indispensable en la formación de matemáticos.

El ciclo ACE (Actividades, discusión en Clase, Ejercicios) es un componente importante de la metodología de teoría APOE y está íntimamente relacionado con las estructuras conceptuales de esta teoría a través de la DG. Los seis momentos de estudio que describen los procesos de enseñanza y aprendizaje en términos de praxeologías didácticas en la TAD, podrían emplearse para analizar las actividades previstas para el ciclo ACE en términos praxeológicos para verificar si en la actividad prevista, como un todo, hay un equilibrio entre ellos que apoye la construcción del concepto de interés y permitirían contar con criterios de equilibrio y completitud desde el punto de vista institucional. En el ejemplo de la derivada podría darse el caso de que las actividades relacionadas con el momento del primer encuentro no incluyeran ninguna que permitiera a los estudiantes reflexionar sobre el objetivo de las acciones de cálculo de límites que permiten construir la definición del concepto, por lo que se requeriría del diseño de nuevas actividades.

Las aportaciones del diálogo a partir de las componentes teórica y técnico-tecnológica de APOE y TAD, tuvieron como resultado el desarrollo de nociones interesantes que surgen de un cambio de focos de atención y de un análisis respetuoso y cuidadoso de las teorías; el diálogo puso en evidencia el alcance y las limitaciones de cada una de ellas y requirió de explicitar sus hipótesis implícitas mostrando que son más flexibles de lo que se podría haber considerado. Estas propuestas tienen el potencial de expandir las fronteras de cada una de las teorías sin violentar sus propuestas básicas. El diálogo partiendo de un problema formulado por una teoría quedó pendiente en esta parte del estudio y requiere de la reformulación del problema para hacer posible un análisis más global que permita poner en juego las nociones previamente presentadas. En otro proyecto se llevó a cabo parcialmente este diálogo y sus resultados se describen a continuación.

Diálogo a partir de un problema: Uso de algunos de los resultados anteriores

La investigación sobre la construcción de la noción de función de dos variables descrita anteriormente se continuó en dos ciclos adicionales en los que se incluyó la enseñanza mediante el ciclo ACE. Los resultados obtenidos permitieron refinar y validar la DG, así como diseñar un conjunto de actividades para su enseñanza. Con el objetivo de continuar con el diálogo entre las teorías APOE y TAD y de analizar el funcionamiento de las actividades en la enseñanza en una institución específica se decidió llevar a cabo una investigación utilizando las herramientas surgidas del diálogo como marco conceptual (Trigueros & Martínez- Planell, 2015).

Como primer paso se reformuló el problema de investigación de la siguiente manera: En una institución universitaria concreta ¿Qué características tienen las praxeologías que se utilizan en relación a interpretación de las gráficas de las funciones de dos variables? ¿Qué restricciones limitan que los estudiantes puedan recorrer los momentos didácticos y desarrollar las praxeologías adecuadas? ¿Qué se requiere en la realización de procesos didácticos para que las actividades diseñadas permitan el recorrido balanceado de los momentos de estudio y generen una praxeología matemática local ligada a dicha interpretación?

La investigación se inició con el uso de las herramientas aportadas en el diálogo a partir de las componentes teórica y tecnológico- técnica descritas anteriormente e incluyo varias fases: (a) Análisis de un texto ampliamente utilizado y observación de la forma en que el tema de interés se enseña en la institución concreta utilizando los momentos de estudio del ciclo ACE; (b) análisis de las actividades diseñadas mediante los momentos de estudio del ciclo ACE; (c) ciclos de rediseño de las actividades a partir de los resultados del análisis anterior y (d) evaluación de las actividades finales a través de los resultados obtenidos por los alumnos que las utilizaron.

Los resultados del análisis del texto y de la observación de la enseñanza evidenciaron un recorrido de los momentos de estudio sumamente pobre y desbalanceado. Los momentos de estudio relacionados al bloque práctico de las praxeologías se desarrollaban de forma superficial y muy limitada. La organización del estudio quedó limitada a unos cuantos ejemplos y explicaciones poco relacionados entre sí y, por tanto, resultó incompleta e inefectiva.

Esto permite explicar las dificultades de los estudiantes encontradas en el estudio con APOE presentado anteriormente. Si la organización del estudio no es coherente y no está balanceada, las posibilidades de aprendizaje quedan limitadas por la falta de oportunidades de reflexión.

Las actividades diseñadas para el ciclo ACE de APOE se agruparon en cuatro bloques relacionados respectivamente con la construcción de: (a) planos fundamentales y superficies; (b) cilindros; (c) gráficas y conceptos asociados a las funciones de dos variables y (d) mapas de contornos y familias de funciones. En todas ellas se enfatizaron las técnicas de construcción del espacio tridimensional y de las secciones trasversales, que mostraron ser fundamentales en los estudios realizados con la teoría APOS, para analizar y trazar gráficas.

Las primeras actividades del primer bloque pueden considerarse como pertenecientes al momento del primer encuentro del ciclo ACE y algunas correspondientes al momento de exploración. En ellas se inicia la construcción del espacio tridimensional, de curvas y planos fundamentales en R^3. A continuación se muestra un ejemplo de actividad correspondiente al momento del primer encuentro cuyo objetivo consiste en hacer las primeras acciones para construir el esquema de R^3:

En esta actividad, moverse "hacia adelante" o "hacia atrás" es moverse en dirección de x positivo o negativo, respectivamente; "hacia la derecha" o "hacia la izquierda" es en dirección de *y* positivo o negativo, respectivamente; "hacia arriba" o "hacia abajo" es en dirección z positivo o negativo, respectivamente: Halle las coordenadas del punto donde termina si comienza en el punto *A(1,2,3)* y se mueve 5 unidades hacia adelante, 4 unidades a la izquierda y 2 unidades hacia arriba.

El análisis realizado también evidenció que la mayoría de las actividades de los bloques (a) y (b) pueden considerarse como pertenecientes al momento exploratorio. Entre las actividades del primer bloque hay algunas que se enfocan en la interpretación de expresiones con variables libres y en tratamientos y conversiones entre registros de representación, mientras que en las del segundo bloque los estudiantes hacen acciones sobre superficies en el espacio tridimensional, en particular sobre superficies descritas mediante dos variables. Todas estas actividades promueven la reflexión sobre los procesos incluidos en el trazo de la gráfica de distintas funciones a partir de la acción de representación punto a punto. Se detectó un gran número de actividades pertenecientes al momento exploratorio. Esto no es sorprendente dado el énfasis que la teoría APOE hace en brindar oportunidades al sujeto genérico de la institución de reflexión sobre sus acciones para interiorizarlas en procesos.

Por su parte, los bloques (c) y (d) enfatizan el momento del trabajo de la técnica mediante la coordinación del proceso de construcción anterior con los procesos de sección trasversal, e intersección para construir e interpretar gráficas de diversas funciones e incluyen algunas actividades que se puede relacionar con el bloque tecnológico- teórico de la praxeoogía. A continuación se presenta una actividad que combina partes correspondientes al momento de exploración y otras correspondientes al momento de técnico-tecnológico. Su objetivo es hacer reflexionar a los estudiantes sobre las acciones correspondientes a las intersecciones de subespacios en R^3, al tiempo que introduce una técnica que incluye las acciones para construir una superficie en el espacio, además de oportunidades de construcción del proceso asociado a ellas:

En este problema dibujaremos la gráfica de $x = 9 - z^2$ en el espacio tres dimensional. Esta gráfica consiste de todos los puntos en el conjunto $\{(x,y,z): x = 9 - z^2\}$. Para ello:

1. Dibuje en el espacio tridimensional los puntos donde el plano $y = 0$ interseca la gráfica de $x = 9 - z^2$.
2. Dibuje en el espacio tridimensional los puntos donde el plano $y = 1$ interseca la gráfica de $x = 9 - z^2$.
3. Dibuje en el espacio tridimensional los puntos donde el plano $y = -1$interseca la gráfica de $x = 9 - z^2$.
4. ¿Qué sucede cuando se le dan a y más y más valores positivos y negativos?
5. Dibuje la gráfica de $x = 9 - z^2$ en el espacio tridimensional.
6. Reflexione sobre lo que hizo en las tres actividades anteriores. ¿Cómo, en general, se traza la gráfica en tres dimensiones de una función si en su representación analítica solo aparecen dos variables?

Todos los bloques contienen actividades de reflexión sobre estos procesos que pretenden favorecer su encapsulación en objetos y una construcción coherente de un esquema para R^3. Estas actividades pertenecen al momento tecnológico- teórico.

En todos los bloques se encontraron tareas de verificación de la correspondencia entre gráficas trazadas y representaciones analíticas mediante el trazo de curvas que forman parte de la superficie trazada. Estas actividades se consideraron como parte del momento de evaluación. La que se muestra en la figura 2 pretende evaluar la construcción de los procesos de conversión del registro analítico al gráfico.

El conjunto de actividades no incluye específicamente la discusión de la teoría ya que juega un papel preponderante en la fase de discusión en grupo del ciclo ACE. Pero, se ofrecen oportunidades de justificación en las actividades que pueden considerarse como parte del momento de institucionalización.

En términos generales este análisis sugiere que el recorrido de los momentos de estudio está balanceado y que el uso de las actividades en el aula puede ser eficaz. Sin embargo, se presenta el reto de reducir el número de actividades asociadas al momento de exploración sin alterar las posibilidades de construcción de las estructuras previstas en la DG.

Las actividades se utilizaron en el aula sin la fase de discusión del ciclo ACE y se evaluaron a través de entrevistas a 9 estudiantes del grupo que las utilizó y de 6 de un grupo control. Los estudiantes fueron elegidos por sus maestros utilizando el mismo criterio de desempeño. El análisis de las entrevistas utilizando APOE mostró una clara diferencia entre los estudiantes de ambos grupos, lo que indica que el conjunto de actividades promueve una organización del proceso de estudio que tiene el potencial de estimular el aprendizaje de los estudiantes. Se puede concluir, a partir de estos resultados, que el uso de una praxeología didáctica en la que hay un balance entre los momentos de estudio contribuye a la construcción de las estructuras previstas en la DG. Este trabajo permitió mostrar también que existen puntos de contacto que permiten el acercamiento de las dos teorías.

Escriba la fórmula que corresponde al lado de cada una de las siguientes gráficas. Escoja entre: $z = x^2 seny$; $z = x^2 - seny$; $z = xsen(y^2)$; $z = x + sen(y^2)$. Use secciones para justificar plenamente su respuesta.

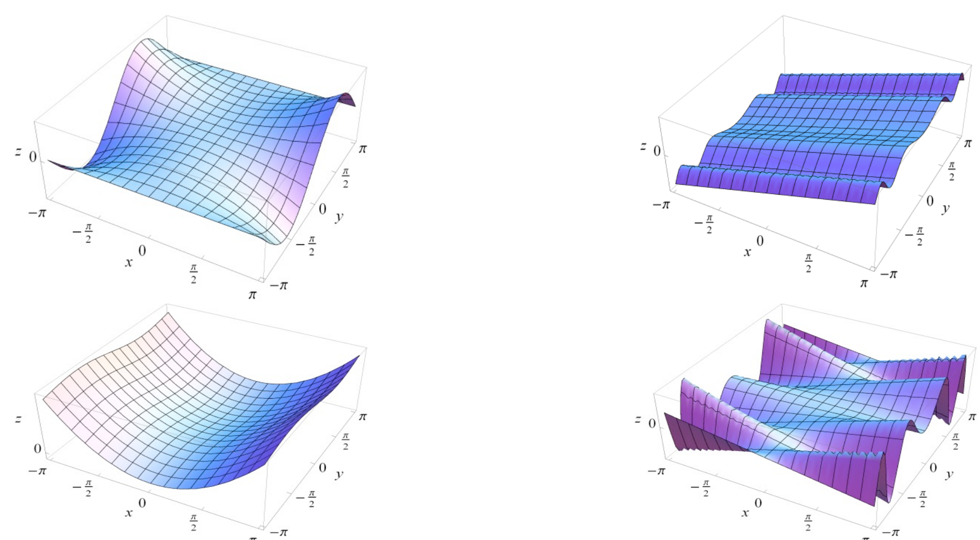

Figura 2. Actividad de conversión y justificación.

Cruzando fronteras metodológicas: Uso de la modelación en la enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales y del Álgebra Lineal.

El álgebra lineal y las ecuaciones diferenciales constituyen dos cursos básicos de las matemáticas universitarias que coinciden en su gran aplicabilidad tanto en temas de las matemáticas mismas como en problemas de otras disciplinas. Los desarrollos recientes de la investigación en matemáticas y de la tecnología imponen, en principio, la búsqueda de nuevas estrategias para su enseñanza que no han

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.

sido tomadas en consideración por la comunidad universitaria en general. Los resultados de la investigación en educación matemática, por otra parte, ofrecen información sobre la forma en que los alumnos aprenden los conceptos de estas disciplinas y métodos de enseñanza que han probado ser efectivos, entre los que destaca el uso modelos (Por ejemplo, Rasmussen & Blumenfeld, 2007; English, Lesh, and Fennewald, 2008; Bas, Cetinkaya, and Kursat, 2009; Zandieh, & Rasmussen, 2010; Camacho, Perdomo, and Santos, 2012; Trigueros & Possani, 2013).

En un proyecto de investigación que se llevó a cabo durante cinco años, en la institución en la que trabajo, se intentó responder a las preguntas ¿Qué resultados se obtienen, en términos de aprendizaje, cuando se utilizan problemas de modelación en la enseñanza del álgebra lineal y de las ecuaciones diferenciales? ¿Qué aspectos del conocimiento de los estudiantes pueden recuperarse cuando se utilizan modelos en la clase?

Dado que las investigaciones con la teoría APOE no incluían hasta ese momento el uso de problemas de modelación en la enseñanza, se buscó la posibilidad de coordinar esta teoría con una teoría del ámbito de la modelación. Se seleccionó la teoría de Modelos y Modelación (TMM) (Lesh & Doerr, 2003) considerando dos criterios. Desde el punto de vista teórico, propone la posibilidad de construcción de conceptos matemáticos mediante el trabajo de los alumnos en la descripción del comportamiento de una situación en un contexto real o realista que les permita, por una parte utilizar su conocimiento previo y, por otra, construir nuevo conocimiento. Su metodología de enseñanza coincide con la de APOE en que la construcción de nuevo conocimiento se logra mediante trabajo en equipo y con discusiones en clase con el profesor. Por otra parte TMM postula un conjunto de principios que el problema planteado para la modelación debe satisfacer de modo que pueda ser aplicado exitosamente en el aula (Carlson, Larsen, & Lesh, 2003) que puede ser útil en el diseño de situaciones y que puede ayudar a extender la frontera de la teoría APOS de manera que la introducción de los problemas de modelación resulte natural en el ciclo ACE y que el desarrollo del conocimiento a partir de los conceptos previos utilizados por los estudiantes pueda ser descrito mediante una DG adecuada.

Desde el punto de vista teórico ambas teorías postulan formas de construcción del conocimiento. Es posible entonces proponer una posible coordinación entre ellas considerando que el trabajo sobre el problema original permite poner en juego un modelo matemático sobre el cual pueden hacerse dos tipos de actividad, una que permite analizar, desarrollar y validar el modelo matemático y otra en la que las acciones sobre el modelo matemático, libres o guiadas mediante actividades, pueden ser complementadas mediante actividades específicas diseñadas en términos de una DG. Estos dos tipos de actividad se pueden ir intercalando en ciclos l0,'9en los que la modelación da lugar a la necesidad de reflexión y a la construcción de las estructuras necesarias para el aprendizaje de los nuevos conceptos y éstos permiten mirar el trabajo sobre el modelo desde una perspectiva distinta que lo hace evolucionar. Desde el punto de vista metodológico la TMM puede utilizarse para validar el funcionamiento de la situación planteada en términos la promoción de nuevo conocimiento mientras que APOE puede utilizarse para analizar las construcciones de los alumnos y cómo podrían relacionarse con nuevas actividades que promuevan la construcción del conocimiento de interés pues, de acuerdo a esta teoría, el uso de conocimiento previo no es suficiente para garantizar la construcción de nuevos conocimientos. Los ciclos de enseñanza e investigación de APOE se insertan, además, de manera natural en los ciclos de modelación previstos por la TMM. Y así, ambas teorías pueden ampliar sus fronteras para plantear nuevas propuestas didácticas y de investigación. Con base en la coordinación de estas teorías se desarrolló un proyecto de uso de problemas de modelación en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales y el álgebra lineal. Dos ejemplos ilustran los resultados que se pueden obtener de un diálogo de esta naturaleza, uno en el contexto de las ecuaciones diferenciales y otro en el de álgebra lineal.

Desarrollo de nuevas herramientas de análisis

En el primer caso (Trigueros, 2014) se planteó a los estudiantes el problema: *Una profesora, preocupada por la tendencia actual en la enseñanza y por el problema del manejo de información de los estudiantes, nos pide hacer un estudio sobre la memorización y el olvido a corto plazo. En particular le interesa un reporte en el que quede claro el tiempo que una persona puede retener información aprendida, el tiempo que tarda en olvidarla y cuáles son los factores de los que esto depende.*

En el ciclo que denominamos de exploración gráfica del problema a partir de la experiencia propia de los estudiantes y del uso de su esquema de función emerge un primer modelo gráfico conjuntamente con la definición de variables (Figura 3a). Aunque de inicio los estudiantes intentan encontrar una expresión analítica para la función, en sus diálogos evocan su esquema de derivada para analizar la gráfica propuesta:

Rosa: Se puede usar la derivada para especificar las propiedades que debe tener la función que proponemos en la gráfica, pero… no tenemos, nadie tiene, la expresión analítica y yo no sé cómo obtenerla de las propiedades, más bien sé al revés, sacar las propiedades si sé la regla de la función.

El siguiente ciclo se identifica mediante la introducción de la variación a la solución del problema que permite sugerir un posible modelo que puede ilustrarse mediante este diálogo:

Fer: Si suponemos que cada persona tiene un coeficiente de memoria y… lo que han aprendido crece de aquí a acá, pero va creciendo menos rápido por pedazos (dibuja una curva poligonal con segmentos de recta), y luego empieza a decrecer también primero rápido y luego no tanto hasta que se le olvida todo, o casi todo…

Juan: …Debe crecer más despacio acá y si la persona tiene cierta capacidad de memoria, un coeficiente, k, para que primero crezca más y luego menos, podría ser algo como… (escribe $y'=k(y-T)$ porque así no seguiría creciendo sino va parando…

La discusión en grupo gira en torno a las ventajas de escribir una ecuación que incluya la variación. Después de un ciclo de actividades diseñadas con la DG en el que se introducen las ecuaciones diferenciales y las funciones implícitas, como respuesta a las dudas de los alumnos frente a una ecuación que no contiene la variable independiente, se regresa al modelo. Se presenta entonces un ciclo caracterizado por el análisis del modelo. En este ciclo emergen en equipos distintos dos métodos de análisis de la ecuación que no se habían introducido anteriormente: la aproximación de la función solución usando la idea de derivada como aproximación lineal y el uso de la gráfica de la derivada de la función contra la función misma (plano fase) o su descripción verbal, como se muestra respectivamente en los párrafos siguientes.

Fer: Aquí (señala la ecuación). Si le ponemos valores para más fácil, (escribe: $y'=.5(50-y)$). Y si usamos lo de antes, la derivada como pendiente, (escribe $y' = y\text{-}yo/t\text{-}to$), entonces del tiempo cero al dos, y prima es…(escribe $y'=.5(50-y)=y/2$), entonces ... nos queda $y=25$, o sea que en el segundo tiempo se sabe 25 datos y la recta iría de 0 a 2 y de 0 a 25, con pendiente 12.5. Luego hacemos lo mismo pero ahora empezamos con 2 y hasta por ejemplo 4 y y vale 25 entonces (hace cálculos, no audible) sale y es 37.5 y así le seguimos…

Nadia: …Estoy pensando en que si graficamos esa función de y'… pero como función de y, ¿qué significaría?... A ver… esa gráfica (Figura 3b) es una recta, con pendiente positiva. Dice que $y'=0$ si $yo/k+1=y$. Pero no debe ser porque ¿dónde queremos que haya un punto crítico? yo creo que en el *1* porque es cuando se aprende todo y luego cuando olvida empieza a bajar, pero esto está más arriba.

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.

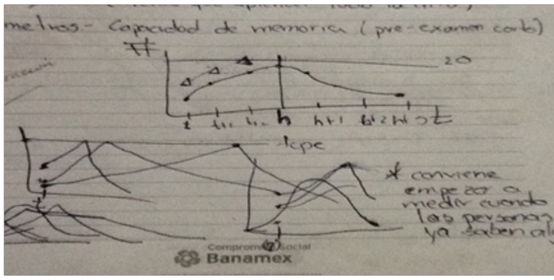
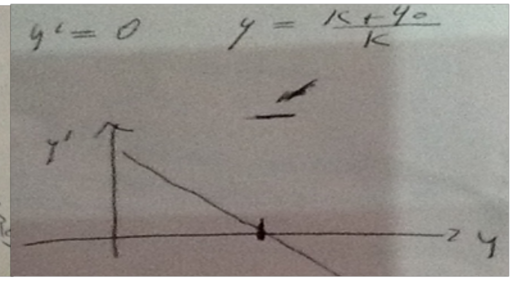

Figura 3(a). Exploración. **Figura 3(b).** Análisis gráfico del modelo.

La actividad continúa mediante otros ciclos de actividades diseñadas con DG y de trabajo en el modelo hasta terminar la actividad con un ciclo caracterizado por la búsqueda experimental del valor de los parámetros del modelo.

Destaca en esta experiencia el papel que juega la representación gráfica de la función como detonador de un cambio en la manera de abordar el problema y en la emergencia de nuevas herramientas conceptuales desarrolladas de manera independiente por los estudiantes.

Construcción independiente de conceptos

En el contexto del álgebra lineal se planteó a los estudiantes un modelo de empleo (Salgado & Trigueros, 2015): *En una economía en la que la fuerza de trabajo permanece constante, hay un cierto número de personas con empleo en cada período de tiempo y un cierto número de personas desempleadas en ese mismo periodo. Si conocemos la probabilidad de que una persona desempleada encuentre un trabajo en el siguiente periodo de tiempo y la probabilidad de que una persona empleada pierda su empleo ¿Cómo podemos describir la dinámica del empleo en el tiempo y cómo se comportará en el largo plazo?*

En este caso algunos estudiantes utilizaron sus conocimientos previos, tanto del curso de álgebra lineal, en el que se había trabajado anteriormente un modelo de poblaciones para introducir las ecuaciones en diferencia de una variable, como de los cursos de economía para plantear una ecuación para el modelo:

A_2: … en cualquier momento hay un cierto número de empleados y de desempleados, pero ese número puede cambiar en el siguiente periodo…

A_3: Es cierto, podemos pensar en el número de empleados en el siguiente periodo y esos deben ser los que todavía tienen empleo menos los que ahora están desempleados…

A_1:… en mi opinión, los empleados en ese nuevo periodo deben ser una proporción de las personas que tienen empleo y lo conservan más el número de personas que estaban desempleadas y consiguen empleo…

A_2: Si, sabemos que p son los desempleados que consiguen trabajo y q los empleados que siguen empleados, bueno, más bien as probabilidades (anotan $x_{t+1} = qx_t + py_t \rightarrow$ empleo)

A_3: Entonces el modelo es un sistema, hay otra ecuación igual para el desempleo (escriben $y_{t+1} = (1 - q)x_t + (1 - p)y_t \rightarrow$ desempleo)

El trabajo en la validación de la solución propuesta para la ecuación del modelo, obtenida de la generalización de la solución para el modelo de poblaciones mediante la introducción de la matriz del sistema, condujo a estos estudiantes a usar su conocimiento previo sobre matrices y exponenciales para hacer un proceso sobre la ecuación resultante (Figura 4).

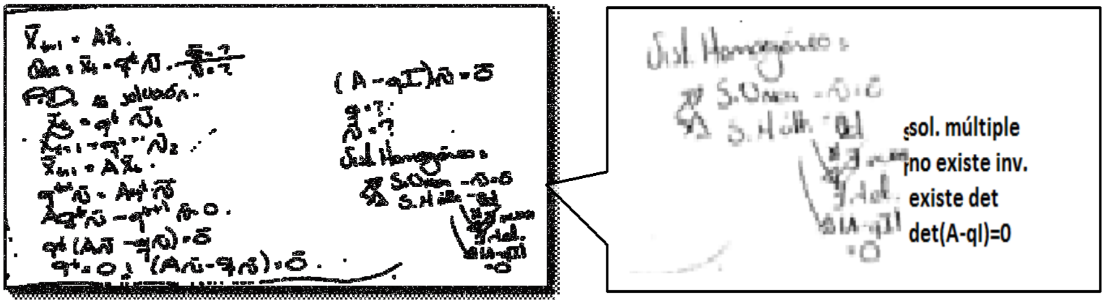

Figura 4. El uso del esquema conduce a la definición de los valores y vectores propios.

Su trabajo mostró evidencia de construcción de relaciones entre los conceptos desarrollados en el curso, lo que puede caracterizarse como la construcción de un esquema de conjunto solución de un sistema lineal de ecuaciones que incluye los conceptos de solución, de matriz, de independencia lineal, espacio nulo y determinante.

Este proceso los condujo a la definición de los conceptos de eigenvalores, eigenvectores y eigenespacios que no habían sido definidos con anterioridad. La reflexión de estos estudiantes sobre sus propias acciones permitió que construyeran estos conceptos como proceso. Con el trabajo en actividades diseñadas con la DG en las que se retomó y se institucionalizó su trabajo tuvieron oportunidad de construir estos conceptos como objetos.

Posteriormente calcularon los valores y vectores propios para valores específicos de los parámetros:

A_1: …para k_1 igual a uno los vectores tienen la forma $\boldsymbol{v} = (2x_2/3, x_2)$ y x_2 es un parámetro; y para k_2 1/6, el vector es $\boldsymbol{v} = (2x_2/3, x_2)$.

A_3: En ambos casos x_2 es arbitraria, o sea la familia de soluciones en el conjunto solución. ¿Es el parámetro el mismo en ambos casos?... No, entonces a uno le llamamos x_1…

A_2: Es cierto... entonces…solo para esos valores de k y esos valores de $\boldsymbol{v}$, las funciones que propusimos son soluciones del sistema del modelo.

A_3: ¿Podemos usar un caso particular para cada familia de vectores?

A_1: No sé, pero en ese caso, un caso particular… para $k_1 = 1$, $\boldsymbol{v}_1= (2/3,)$ y para $k_2 = 1/6$, $\boldsymbol{v}_2= (2/3,)$ ¿estará bien?

A_3: Para cada k, los vectores generan una recta, pues solo hay una variable arbitraria en cada caso.

Después de un ciclo de actividades diseñadas con la DG para institucionalizar y brindar a todos los alumnos nuevas oportunidades de reflexión, durante la discusión los mismos estudiantes relacionaron estos conceptos con el problema a modelar.

A_3: … Encontramos que los eigenvalores eran $k_1 = 1$ y $k_2 = q - p$, o sea, diferentes, uno es independiente de las probabilidades dadas y el otro está relacionado con la diferencia de la probabilidad de que una persona continúe empleada y la de que un desempleado consiga trabajo…

A_2: Usamos esos valores y encontramos los eigenvectores, bueno, escogimos uno para cada k. Para $k_1=1$ encontramos $(p/(1-q), 1)$ así que está relacionado con la razón de la probabilidad de que una persona desempleada encuentre trabajo en el siguiente periodo y la de que un empleado pierda su trabajo en el siguiente periodo. Algo así como una razón de las probabilidades de cambiar de estado… para la otra k, $k_2 = q - p$ era independiente de los valores de las probabilidades, era $(-1, 1)$ y no pudimos explicar estos…también porque

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.

hicimos una gráfica (Figura 5) y el espacio propio correspondiente siempre tiene vectores con una componente negativa…

A_3: Entonces las constantes no tienen relación con las condiciones iniciales, aunque en el problema de población esas condiciones aparecían en la solución y discutimos su papel en términos de la familia de soluciones. Pero aquí ¿dónde están las condiciones iniciales del problema? ¿No juegan ningún papel?

La maestra regresó la pregunta en su trabajo en equipos y les pidió predecir el comportamiento a largo plazo. En el trabajo en un nuevo ciclo de actividades diseñadas con la DG los alumnos hicieron referencia al concepto de base:

A_3: Escogimos un vector particular para cada conjunto solución por separado, pero ¿podríamos tomar uno de cada familia para hacer una combinación lineal y generar tal vez R^2.

Esto puso en evidencia que los estudiantes construyeron relaciones entre su conocimiento previo y el nuevo.

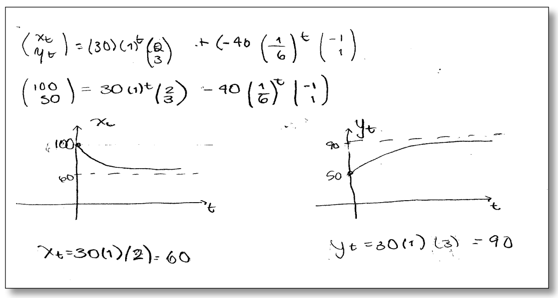

Figura 5. Comportamiento a largo plazo.

Los alumnos, en general, tuvieron dificultades para entender las funciones vectoriales resultantes, que no habían estudiado todavía. Algunos optaron por graficar para cada una de las componentes para encontrar el comportamiento a largo plazo y concluir a partir de ellas, que cada solución converge a una solución que corresponde al eigenespacio.

Destacan en esta experiencia la aparición de los conceptos de interés en el trabajo de los alumnos sin intervención alguna de la maestra y la construcción de un esquema por parte de algunos estudiantes en el que muestran haber construido relaciones entre los conceptos introducidos con anterioridad. Si bien en la entrevista posterior al curso se encontró que algunas dificultades persistieron en los casos de dimensión mayor, al menos 3 estudiantes mostraron una concepción objeto de los conceptos de interés.

Muchas investigaciones sobre el uso didáctico de la modelación insisten en la motivación que la solución de este tipo de problemas representa para el estudiante. Estas investigaciones lo confirman. Pero, demuestran además que cuando los estudiantes se involucran en problemas de interés y reflexionan libremente desarrollan nuevas estrategias que promueven la construcción de conceptos y de relaciones entre ellos. Los problemas de modelación pueden favorecer el aprendizaje de conceptos difíciles y abstractos y el nuevo conocimiento puede, a la vez, aplicarse a la solución de nuevos problemas. La ventaja de la coordinación de las dos teorías, por su parte, se hizo patente en la permeabilidad de sus fronteras y en la expansión de los problemas que cada una de ellas puede abordar.

Comentario final

Las experiencias de cruce de fronteras, diálogo y búsqueda de posibles maneras de coordinar teorías analizando cuidadosamente las hipótesis básicas y las posturas teóricas de cada una de ellas

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.

mostraron en cada caso posibilidades alentadoras de acercamiento sin confrontación y de encontrar aportaciones que las enriquecen mutuamente. Ponen en relieve, además, que mediante un acercamiento serio y abierto es posible establecer diálogos entre teorías aun en casos en que las teorías parecen lejanas entre sí.

Además del enriquecimiento teórico resultante de tender puentes entre distintas teorías, la aplicación de las herramientas surgidas de los diferentes diálogos hizo patente sus posibilidades de aplicación en el diseño de estrategias de enseñanza que favorecen el aprendizaje de los alumnos y la posibilidad de pensar en el trabajo propio de investigación de forma diferente.

Las fronteras teóricas pueden aparecer en un diálogo respetuoso y tolerante como fronteras flexibles y dinámicas que permiten la ampliación de su dominio de aplicación y el intercambio de ideas sin perder su propia identidad. Fronteras que se abren y dejan aparecer fenómenos que serían imposibles de ver si se hubiera utilizado una sola de ellas. El reto que enfrentamos como comunidad es acercarse al estudio de los fenómenos de la educación matemática construyendo puentes de manera creativa que permitan conservar las fronteras que dividen a las diferentes teorías pero al mismo tiempo las hagan porosas para que la disciplina se enriquezca a través de las relaciones de colaboración.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido posible gracias al apoyo de la Asociación Mexicana de Cultura, A.C. y el Instituto Tecnológico Autónomo de México.

Interest in understanding mathematics teaching and learning phenomena, and to develop new and effective methodologies to teach Differential Calculus and Linear Algebra led me to look for ways to dialogue between APOS Theory and other mathematics education theories. This enterprise has facilitated a better understanding of them. Bridges between them have been constructed that enable to find possible points of contact and to expand their borders without changing their fundamental hypothesis. In this paper, a reflection on what a dialog between theories entails is illustrated and, through three examples, it shows how it promotes enriching experiences for researchers and stimulates students' creativity. Results also underline how positive outcomes in terms of students learning and in the development of effective teaching resources can be obtained.

Keywords: Advanced Mathematical Thinking, Learning Theory, Modeling

Doing research in mathematics education implies analyzing a didactical phenomenon in terms of a specific theoretical approach. Its selection must be made among an enormous number of theories that assume a diversity of perspectives in face of the complex mathematics learning and teaching phenomena. Each theory constitutes a field defined by its own hypothesis, conceptual structures and methodology. The research problems of interest, and the way they are approached, are defined in those terms. So, something that can be thought of, apparently, as the same phenomenon, is defined differently within each theory, and the explanations provided are delimited by each theory's own restrictions.

A growing interest has emerged recently to look for the construction of bridges between different theories and to analyze their possible complementarities through comparative studies of the same phenomenon or through their possible articulation in a new and broader theoretical framework (Artigue, Bosch & Gascón, 2011).. This interest may be theoretical or may result from an analysis need arising in the context of research, but is problematic since each problem is constructed in terms of the structure of the theory. Furthermore, it is studied and its results are interpreted in terms of specific tools developed for that purpose (Trigueros, Bosch & Gascón, 2011). New questions arise in this context: Why should we cross theoretical borders? How can a dialog between theories be established so that crossing their borders is possible without changing their basic principles? How can bridges be built from one to the other or how can their borders be made flexible so that the internal coherence of each theory is preserved?

In what follows I will try to respond to these kinds of questions through the results of my own experience. In order to do so, I will discuss some specific examples taken from my own research work.

Crossing borders between theories: Expandability of application domains.

How to cross the boundaries of a specific theory? What can be gained by doing so? I will start trying to give a first answer to these questions. A few words about my personal history can help shape some tentative answers.

My work on mathematics education research has used APOS (Action, Process, Object, Schema) theory as the theoretical framework. APOS theory is a cognitive theory that intends to explain how students construct different mathematical concepts (Arnon et al. 2014). My personal interest in looking for new teaching methodologies, to bring students to mathematics and to promote their learning and their possibilities to use their knowledge, led me to explore other theories and to seek to establish a dialogue between some of them and APOS. What does this exploration entail? In my experience the exploration was guided by considering the possibility to analyze the theories and think of their boundaries not as rigid limits, but as something flexible and dynamic. This idea brought me to consider how theories can complement each other and how they can enrich each other when a dialogue between them, that may extend their theoretical or methodological limits and expand their possibility of analysis of educational phenomena of interest, is established.

In all the dialogue examples that I will discuss, one of the theories involved is APOS theory. I will begin by giving a very brief description of this theory: APOS theory is based on Piaget's epistemology, in particular, on reflective abstraction mechanism. Its name is an acronym of the types of mental structures that are supposed to be constructed by students when they are involved in mathematical activities. An Action is a transformation of previously constructed objects by following explicit instructions that the student considers as something external. Actions may be interiorized, by means of reflection, into a Process which consists in the possibility to describe, imagine or perform those transformations without having to follow explicitly all the steps. Processes can be reversed or coordinated with other processes in order to construct new processes. When students are conscious of a process as a totality and can do actions on it, the process is encapsulated into an Object that may be de-encapsulated, when needed, in the process from which it originated. Schemas are developed by means of the construction of relations among actions, processes, objects and previously constructed schemas, and a schema is considered, consciously or unconsciously, as a coherent framework that can be used to solve mathematical problems related among them. When the student needs to do actions on a schema, it can be thematized into an object. APOS considers that the general tendency of students when they work on a series of situations related to a specific mathematical notion is different depending of the type of constructions they show in their work.

In addition to the theoretical structures described, APOS theory includes a model to describe a possible way of constructing the mathematical concepts of interest in terms of the structures of the theory. This model, know as genetic decomposition (GD), is not unique and most be validated in terms of experimental results. Therefore, the research methodology of the theory includes research cycles in which the GD is refined until it is considered to be stable.

APOS theory includes as well a teaching cycle: Activities designed with the GD as a basis, Class discussion and Exercises (ACE) to promote the construction of the intended concepts in the classroom. In it, teaching activities designed in accordance to the GD are used and they are reconsidered as the GD is refined.

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.

Searching for detail in the analysis of students mathematical activity

In the context of a project about the construction of the concepts of the Differential and Integral Calculus of functions of two variables, together with Rafael Martínez- Planell, we studied students' learning of functions of two variables (Trigueros & Martínez-Planell, 2010; Trigueros, M., & Martínez-Planell, 2012). The analysis of the data obtained in the first cycle of the project highlighted that in order to be able to interpret students' responses more detail was needed, both in how language is used in teaching, and in these functions' geometric representation and its role in the construction of this concept,. For example, when asked to sketch the graph of the function $z = x^2 + y^2$ in R^3 when $z = 3$ many students responded *"It is a cylinder*" and they drew graphs similar to that shown in Figure 1.

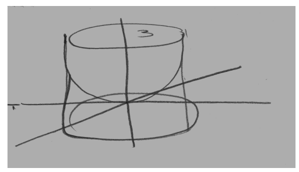

Figure 1. The graph of $3 = x^2 + y^2$ according to many students.

That was how we approached a cognitive theory detailing the role of the relation between different representations of the same concept in its learning: Semiotic Representations Theory (SRT) was proposed by Duval (2006). This theory considers that the mathematical thinking process requires the cognitive coordination of different representation by means of their comparison and analysis. It proposes two types of transformations of semiotic representations: treatments which consist in changes of representations that are in the same representation register and conversions that involve changes from one representation register to another without changing the represented object denoted in them. In order to discriminate those values of a mathematical object that are cognitively significant by means of comparisons of similar representations, it is necessary to do treatments, while conversions allow to separate the represented object from the particular representation's content and prevent that the different registers stay separated for the learner.

The analysis of the possibilities to construct bridges between these theories started from the consideration of the role of representations in the construction of knowledge in both theories. In SRT, representation registers and transformations between registers are central in understanding mathematical objects. In APOS theory transformations between representations and their relation are linked to different mental constructions that can be described in terms of interiorization, coordination, reversal or encapsulation mechanisms. It is possible to consider that treatments could be described partially in terms of actions on an object in a given representation register and that reflection on them can make possible to highlight significant aspects or properties of the object when those actions are interiorized into processes. The interaction with semiotic representations theory makes it possible to point out the type and role of those actions by emphasizing the need to discriminate among different characteristics of the represented object in the register where the actions are performed. Let's consider, for example, the action of substituting number 1 for x in the function $z = x^2 + y^2$. Students may recognize z as a quadratic function in R^2. When substitution actions are repeated using different numbers, students can identify a family of similar quadratic functions. These action can be interiorized in the process of construction of a family of parabolas $z = a + y^2$. In this example SRT allows the identification of the role of those actions in the construction of knowledge about functions that is fundamental when considering functions of two variables.

Meanwhile, conversions can be described in APOS as the interiorization of the process that makes it possible to consider actions of comparison and identification of an object in different representation registers as an association; but the interaction with SRT underlines the need to include those processes in the GD because of their importance in cognitive terms. Going back to the previous

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.

example, the graph of functions $z = a + y^2$ in the plane makes it possible to underline those aspects of the graphs as objects that remain invariant in treatments and their relation with the parameter in the analytic representation. The processes constructed by means of those actions can be coordinated with the representation of planes in R^3 in a new process of representation of the quadratic functions on different fundamental planes $x = a,$ and in the process of construction of the surface corresponding to the graph of the function. The bridge between the theories enables to use the treatment and conversion notions in APOS theory without losing sight of its genetic perspective and to consider the flexibility in passing from one representation to other by incorporating specificity in the analysis.

Bridging between the two theories allowed a more thorough analysis of students' work on tasks set in the same representation or in those that need the conversion between representations, and the complexities involved in it. This analysis had repercussions on a refinement of the GD. It also allowed to show that generalization of the understanding of functions of one variable to functions of two variables is not direct, given that students do not necessarily perceive the expected analogies.

How can a fruitful dialogue between theories be conducted?

The possibility to coordinate theories that study the mathematics education phenomena from very different perspectives may seem impossible. How to bridge them? Where can a dialogue start from? In an effort to answer these questions and construct bridges between these theories, together with Marianna Bosch and Josep Gascón, we decided to analyze the conditions that a dialogue between theories must satisfy, and to apply them to a conversation between APOS theory and the Anthropological Theory of Didactics (ATD) (Trigueros, Bosch & Gascón, 2011).

The primary research object of ATD is the institutionalized mathematical activity; that is, this theory questions and models the intra-institutional and inter-institutional genesis and diffusion processes of praxeologies (Chevallard, 1992). Praxeologies are formed by a practical component and a theoretical component. The first one can be described in terms of the tasks and techniques involved in the activity, and the second one in terms of the technologies and theories that support the employed tasks and the techniques. ATD's research program requires making an epistemological model (EMR) of mathematics that is used as reference to analyze the institutionalized mathematical activity and is based explicitly on the didactic transposition process. This process proposes those transformations that can be performed on mathematical knowledge so that it can be taught in a specific institution. The EMR is also used to analyze and design teaching and learning activities which make it possible, simultaneously, to validate it (Bosch & Gascón 2005). The praxeologycal analysis of mathematical activity in the institutions allows understanding the institutional restrictions that limit or favor some types of activity, and analyze the role of equilibrium in mathematical practices in the institution.

In this project's dialogue, the notion of praxeology of ATD is used as a framework for analysis by reinterpreting theories as research praxeologies with the aim of making sure that all their components are taken into account in a fruitful dialogue. Thus, the dialogue can be conducted starting from the problems discussed (tasks), the methodological tools used to work on the problems (techniques and technologies) and the structures of the theories.

Both theories incorporate an analysis of school mathematics as a fundamental component of their approach to any didactical problem and include alternative models for the development of mathematical knowledge as part of their methodology: the GD in the case of APOS theory and the EMR in the case of ATD. This fact can be considered as a point of contact between both theories. The fundamental difference between these models is that the GD is used to study the cognitive development of individuals while the EMR is used to study the institutional conditions that make the existence of the mathematical activities possible in an institution; the analysis unit is different and that fact has important methodological implications. In order to carry out the dialogue, we first developed the notion of "generic student in an institution" which relates the epistemic subject of

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.

APOS to the "student in an institutional position" of ATD. This way, the notion can be extended in both theories: the institutional dimension of ATD analysis can be worked through the notion of generic student of APOS and the cognitive description of APOS can be integrated into that of ATD by the consideration of the position of student at a specific institution.

The dialogue starting from the technical-technological component includes the research techniques of each theory and the results that allow to approach new problems when interpreted and generalized. This is an uncommon kind of dialogue in mathematics education; in general how a result of a theory can be interpreted in terms of other is not discussed and results of different theories are not compared. Through the APOS-TAD dialogue we observed how each theory can benefit and extend its boundaries starting from a reinterpretation of the other's methodology without contradicting its internal logic.

In ATD, praxeologies make reference to different levels of analysis: punctual (consists in one type of task), local (when several tasks are aggregated in a technique) and by making successive aggregations the tasks are articulated into regional praxeologies (aggregation of different techniques in a technology). The notion of different kinds of conceptions can allow a reformulation of this process of articulation of praxeologies by the distinction of the type of technique that compose them as action type techniques, process or objet. These types of techniques are part of a continuum that describes the institutional process of development of techniques in the institution where they are proposed or used. For example, at the beginning of high school derivatives of a function appear as an action technique constituted by stereotyped gestures based on the use of memorized rules. If students are capable to decide between two different rules that can be applied to the same function in terms of their simplicity or find the antiderivative of a function, they use process- techniques, and when they question the applicability of the derivative to different types of functions they would be using an object-technique.

The notion and the levels of development of schemas in APOS, on the other hand, can be related to the subjects' activity in the institution and could be used to describe the development of a subject's praxeologies related to an institution's praxeologies. Going back to the derivative example, it could be considered that the Intra- level would be associated to the mathematical activity described by a collection of isolated or incomplete praxeologies, as in the case where only the rules to sketch the graph of a function, based on the derivative properties, are presented in the institution as an algorithm for the student to follow without any justification.

Meanwhile, the ATD contributes to develop in APOS the notion of institutional relativity of the GD, and thus, the ATD tools could support the analysis of the GD in terms of its possibilities of existence in a given institution. In the case of the derivative, it could be exemplified by the differences in the expected constructions needed to describe the way in which the derivative is constructed in high school or in an undergraduate program in mathematics. In this case the activities for high school would not refer, for example, to differential equations, while this would be indispensable en the case of the mathematics program at the university.

The ACE cycle (Activities, Class discussion, Exercises) is an important component of the methodology of APOS theory and it is intimately related to the conceptual structures of this theory through the GD. The six moments of study describing the teaching and learning processes in terms of didactic praxeologies in ATD, could be used to analyze the activities anticipated for the ACE cycle in praxeological terms to verify if in the expected activity, as a whole, there is an equilibrium among them that supports the concept of interest's construction, and if they would enable disposing of equilibrium and completeness criteria from the institutional point of view. In the derivative example, it could happen that the activities related to the moment of the first encounter did not include any activity to help students reflect on the objective of the limit calculation actions needed to construct the definition of the concept, so it would be necessary to design new activities.

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.

The contributions of the dialogue starting from the theoretical and technical- technological of APOS and ATD, had as a result the development of interesting notions that emerge from a change in attention focus and form a respectful and careful analysis of both theories. The dialogue evidenced the extent and the limitations of each theory and required making explicit their implicit hypothesis, showing that they are more flexible than what could be considered. These proposals have the potential to expand each theory's borders without violating their basic tenets. The dialogue starting from a problem formulated by one of the theories was not discussed in this part of the project and requires of the reformulation of the problem to make a more global analysis that will allow putting into play the previously presented notions. In another project this dialogue was partially carried out. Its results are described below.

Dialogue starting from a problem: using some results from the APOS-ATD dialogue

Research on the construction of the notion of function of two variables previously described was continued for two additional cycles where the teaching cycle was included. Results obtained were used to refine and validate the GD, and also to design a set of activities to be used in the teaching cycle. In order to continue the dialogue between APOS theory and ATD and with the goal of evaluating the designed activities in a specific institution, we decided to continue with a research using some of the tools developed in that dialogue as a conceptual framework (Trigueros & Martínez- Planell, 2015).

The first step in this research consisted in reformulating the research problem as follows: in a particular university as an institution, what are the characteristics of the praxeologies used in the interpretation of the graphs of two variables? What are the restrictions limiting students possibilities to go through the didactical moments and develop the associated praxeologies? What conditions are needed to warrant the development of a didactical process includes a balanced use of the study moments and generates a mathematical praxeology linked to that interpretation?

The research started with the use of the tools proposed in the dialogue starting from the theoretical and from the technological- technical components. It included several phases: (a) Analysis of a widely used textbook and observation of the way this topic is taught in the same institution using the moments of study of the ACE cycle; (b) analysis of the activities designed using the moments of study of the ACE cycle; (c) cycles to redesign the activities taking into account results from the previous analysis and (d) final evaluation of the final activities through the analysis of students results obtained by students who used them.

The results of the textbook analysis and the teaching observation evidenced a poor and unbalanced presence of the didactical moments. Those moments related to the practical part of the praxeologies were developed in a superficial and limited way. The study organization stayed limited to a few examples and explanations poorly related among them. So it proved to be incomplete and ineffective.

These results allow explaining the difficulties shown by students in the APOS study described above. If the study organization is not coherent and balanced, the learning opportunities remain limited due to the lack of reflection opportunities.

The designed activities for the cycle ACE of APOS theory were grouped in four sets related, respectively, with the construction of: (a) fundamental planes and surfaces; (b) cylinders; (c) graphs and concepts associated to functions of two variables and (d) contour maps and families of functions. In all of them, the construction of the tridimensional space and use of transversal sections techniques that were found to be fundamental in studies realized with APOS theory was emphasized in the analysis and sketching of graphs.

The first activities in set (a) can be considered as part of the exploration moment of the ACE cycle. In that set there are also activities corresponding to the exploration moment. In them, the construction of three-dimensional space, curves and fundamental planes in R^3 is introduced and explored. The following is an example of an activity corresponding to the first encounter moment. Its goal is to make the first actions on the intuitive notion of space to construct the R^3 schema:

In this activity to move "forward" or "backwards" corresponds to moving in the direction of positive *x* (the *x* coordinate increases, the *y* and *z* remain the same) or negative *x* (the *x* coordinate decreases, the *y* and *z* remain the same), respectively; "to the right" or "to the left" is moving in the positive or negative *y* direction, respectively; "up" or "down" is moving in the positive or negative *z* direction, respectively. Find the coordinates of the point where one ends if one starts at point *A(1, 2, 3)* and moves *5* units forward, *4* units to the left, and *2* units up.

The analysis of results showed as well that most of the activities in sets (a) and (b) can be considered as part of the exploratory moment. Among the activities of the first set, there are some that focus on the interpretation of expressions with free variables and on treatments and conversions between representation registers, while in those of the second set students do actions on surfaces in tridimensional space, in particular, on surfaces that are described by expressions with two variables. All these activities promote reflection on the processes needed in sketching the graph of different functions starting from the action of point to point representation. A large number of activities were found to be part of the exploratory moment. This is not surprising given the emphasis that APOS theory makes in offering the generic subject in the institution opportunities to reflect on his or her actions to interiorize them into processes.

Meanwhile, sets (c) and (d) emphasize the work on the moment of introduction of the technique through the coordination of the above mentioned construction process and the transversal section and intersection processes to construct and interpret graphs of a diversity of functions. They also include some activities that can be considered to be part of the technological-theoretical part of the praxeology. The following activity combines parts corresponding to the exploration moment and parts corresponding to the technical-technological moment. Its objective is promoting students reflection on those actions corresponding to the intersections of subspaces of R^3, and, at the same time, the introduction of a technique that includes actions to construct a surface and also opportunities to interiorize them in the corresponding process:

In this problem the graph of $x = 9 - z^2$ will be drawn in three-dimensional space. This graph consists of all points in the set $\{(x,y,z): x = 9 - z^2\}$.

1. Draw in three-dimensional space all points where the plane y = 0 intersects the graph of $x = 9 - z^2$.
2. Draw in three-dimensional space all points where the plane y =1 intersects the graph of $x = 9 - z^2$.
3. Draw in three-dimensional space all points where the plane y = −1 intersects the graph of $x = 9 - z^2$.
4. What happens as *y* is given more and more positive and negative values?
5. Draw the graph of $x = 9 - z^2$ in three-dimensional space.
6. Reflect on what you did in the previous three activities. How, in general, are graphs in three dimensions sketched when the function's rule includes only two variables?

All the sets include activities that promote reflection on the introduced processes to favor its encapsulation in objects, and a coherent construction of a schema for R^3. These activities are also related to the technological- theoretical moment.

Tasks related to verification of the correspondence between sketched graphs and analytic representations, by using sketches of curves belonging to the sketched surface, were found in all the activity sets. These activities were considered as part of the moment of evaluation. The activity shown in figure 2 intends to evaluate the construction of the conversion from the analytical to the graphical registers.

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.

The activities sets do not include specifically the discussion about the theory because it plays an important role in the Class Discussion phase of ACE cycle. But opportunities to justify answers, that can be considered as part of the institutionalization moment are included in the all the sets.

This analysis suggests, in general, that the study moments are balanced and that that the activities sets can be used effectively in the classroom. However, the challenge to reduce the number of activities associated to the exploratory moment, without altering the potential of the sets to promote the constructions predicted by the GD remains.

The activities were used in the classroom but the phase of Class discussion of the ACE cycle was not used. They were evaluated through interviews to 9 students in the group where they were used, and 6 students from a control group. Students were selected by their teachers using the same performance criterion. The analysis of the interviews was done by using APOS theory. It showed a clear difference between students of both groups favoring the experimental one. This can be taken as an indication that the activities sets promote an organization of the study process that has the potential to stimulate students' learning. It can be concluded from these results that the use of a didactic praxeology where the study moments are balanced contributes to the construction of the structures described in the GD. This study enabled us to show that points of contact exist that make the approach of the two theories possible.

Write the corresponding analytic expression beside each of the following graphs. Choose between: $z = x^2 seny$; $z = x^2 - seny$; $z = xsen(y^2)$; $z = x + sen(y^2)$. Use sections to clearly justify your answer.

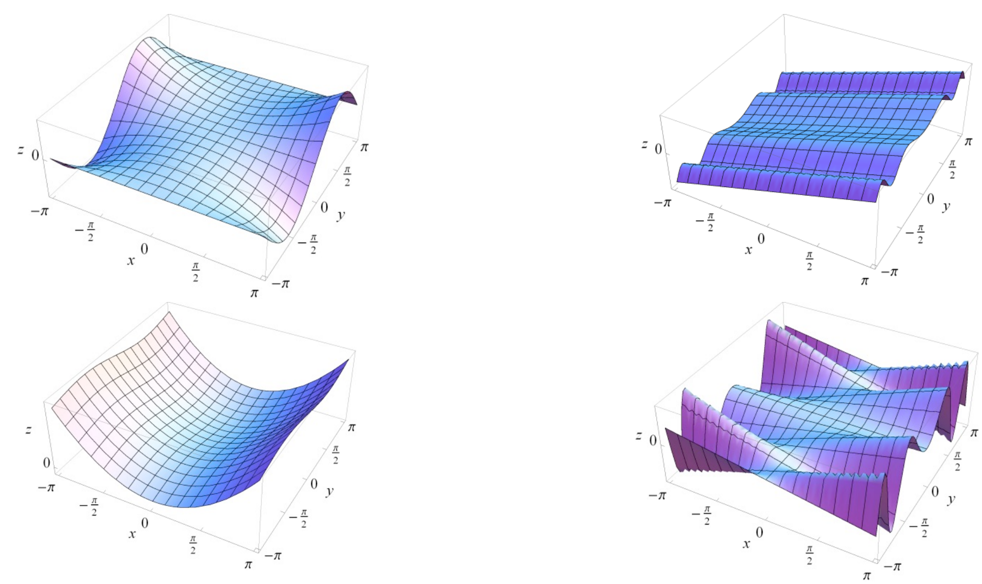

Figure 2. Conversion and justification activity.

Crossing methodological borders: Use of modeling in the teaching of Differential Equations and Linear Algebra

Linear Algebra and Differential equations are two basic courses in university mathematics that have a wide applicability both within mathematics themselves and in problems from other disciplines. Recent developments in mathematical research and in technology demand, at least in principle, the search of new teaching strategies. This claim has not been taken into account by the university community in general. Results from research in mathematics education, on the other hand, offer information about how students learn many of the concepts of this discipline, and teaching methods that have proven to be effective. Modeling is a prominent one (For example, Rasmussen & Blumenfeld, 2007; English,Lesh, and Fennewald, 2008; Bas, Cetinkaya, & Kursat, 2009;Zandieh, & Rasmussen, 2010; Camacho, Perdomo, and Santos, 2012;Trigueros & Possani, 2013).

In a research project that was developed during five years in the institution where I work, we tried to respond to the questions: What results about students learning can be obtained when modeling problems are used in the teaching of linear algebra and differential equations? What aspect of students' knowledge can be recovered when they work on modeling problems in the classroom?

Research studies conducted with APOS theory did not include, up to that moment, the use of modeling problems in teaching; we looked for the possibility to coordinate this theory with a theory related to modeling. Models and modeling theory (MMT) (Lesh & Doerr, 2003) was selected considering two criteria. From the theoretical point of view it proposes the construction of mathematical concepts by means of the work of students in the description of the behavior of a situation in a real or realistic context which enables them, on the one hand, to use their knowledge, and on the other hand, to construct new knowledge. Its teaching methodology coincides with that of APOS in that both of them use collaborative work of students in small group and whole group discussion with the teacher as means to foster students' construction of new knowledge. Additionally MMT postulates a set of principles that the problem selected to develop a model must satisfy so that it can be successfully applied in the classroom (Carlson, Larsen, & Lesh, 2003). They can be useful in the design of situations. It can also help in extending APOS theory boundaries so that the introduction of modeling problems can be naturally inserted into the ACE cycle, and so that the development of knowledge from previously constructed concepts used by students can be described in terms of an adequate GD.

From the theoretical point of view, both theories postulate ways of constructing knowledge. It is thus possible to propose a possible coordination between them by considering that work on the original problem makes it possible to bring into play a mathematical model in which two types of activities can be done: one that can be used to analyze, develop and validate the mathematical model, and another in which the independent or guided activity on the mathematical model can be complemented by specific activities designed in terms of a GD. These two types of activities can be interspersed in cycles so that modeling results in the need for reflection and in the construction of those structures needed to the learning of new concepts, and these result in the possibility to look at the work done on the model from a different perspective that can foster the model's development. From the methodological point of view, MMT can be used to validate the way the proposed modeling problem works in terms of promoting new knowledge, while APOS theory can be used to analyze students' constructions and how they could be related to new activities that may promote the construction of the concepts of interest, since according to this theory, the use of previous knowledge is not enough to guarantee the construction of new knowledge. Moreover, APOS' teaching and research cycles can be naturally inserted in the modeling cycles proposed by MMT, and so, both theories can expand their borders to pose new teaching and research proposals. By using the coordination of these theories, a research project was developed where modeling problems were used in the teaching of differential equations and linear algebra. Two examples illustrate results that can be obtained through this type of dialogue, one in the context of differential equations and another in the context of linear algebra.

Development of new analysis tools

In the first case (Trigueros, 2014), the problem posed to students was: *A teacher, worried by the actual tendency in teaching and by students' management of information problem, has asked us to*

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.

conduct a study about memorization and forgetfulness in the short run. In particular, she is interested in a report where the time that a person can keep the learnt information is made clear, as well as the time needed to forget it and what are the factors involved in those relations.

During a cycle of graphical exploration of the problem, as we called it, this exploration started from the students' own experience and the use of their schema for function. A first graphical model emerged together with the definition of variables (Figure 3a). Although at the beginning students tried to find an analytical expression for the function, in their dialogues they evoke their derivative schema in order to analyze the proposed graph:

Rosa: The derivative can be used to specify the properties that the function we proposed must have, but… we don't have, nobody has the analytical expression and I don't know how to obtain it from the properties; I know for sure the other way around, to find the properties if I know the functions' rule.

The next cycle is identified by the introduction of variation into the solution of the problem. This enables students to suggest a possible model that can be illustrated by this dialogue:

Fer: If we assume that each person can be assigned a memory coefficient and … what they have learnt grows from here to there but it is growing more slowly in each of these parts (he draws a polygonal curve with line segments), and then it starts decreasing, first quickly and then not so much until everything is forgotten, or almost everything …

Juan: …It must grow more slowly here, and if the person has a certain memory capacity, a coefficient k, so that it first grows more and then less, it can be something like… (he writes $y'=k(y-T)$ because like this it cannot grow forever but will approach a point where it stops growing…

Group discussion is devoted to the advantages and disadvantages of writing an equation that includes variation. After a cycle where activities designed with the GD involving tasks for constructing differential equations and implicit functions are introduced, to respond to students' doubts when faced with an equation that does not contain the independent variable, students go back to work on the model. A cycle characterized by the analysis of the model's equation is identified. During this cycle two methods to analyze the proposed equation, that had not been previously introduced, emerge in different teams: the approximation of the solution function using the idea of derivative as a linear approximation, and the use of a graph of the derivative of the function against the function itself (phase plane) or its verbal description, as shown respectively in the next paragraphs:

Fer: Here (showing the equation). If we use values to make it easier, (he writes: $y'=.5(50-y)$)… and if we use what we said before, the derivative as the slope, (he writes $y' = y-yo/t-to$), then from time zero to two, y prime is… …(he writes $y'=.5(50-y)=y/2$), then ... we have $y=25$, means that in the second time he knows 25 data and the line would go from 0 to 2 and form 0 to 25, with slope 12.5. Then we do the same, but now we start with 2 and until, for example, 4 and y is 25, then (does calculations, not audible) we get y is 37.5 and we continue like that…

Nadia: …I am thinking that if we graph that function y'… but as a function of y, what would that mean?... Let's see … that graph (Figure 3b) is a line, its slope is positive. It says that $y'=0$ if $yo/k+1=y$. But it cannot be because where do we want a critical point? I think we want it in 1 because that means that everything has been learnt and then when she forgets it starts going down but this is up here.

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.

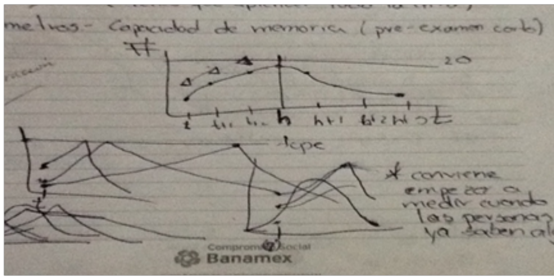

Figure 3(a). Exploration.

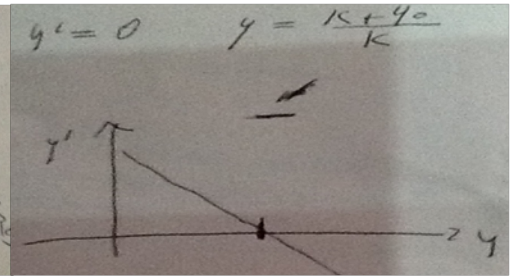

Figure 3(b). Graphical analysis of the model.

The activity continues with other cycles of activities designed with the GD and work on the model until the activity is finished with a cycle characterized by the experimental search of the model's parameters values.

In this experience it is worth highlighting the role played by the graph of the function as a trigger of a change in the way the problem is approached and in the emergence of new conceptual tools developed independently by students.

Independent constructions of concepts

In the context of linear algebra, a model for employment was presented to students (Salgado & Trigueros, 2015): *In an economy where the work force remains constant, there is a certain number of employed people in each period of time and a certain number of unemployed people in that same period. If we know the probability that an unemployed person finds a job in the next time period and the probability that an employed person looses it employment, how can we describe the dynamics of employment in time t? And, how will it behave in the long run?*

In this case some students used their previous knowledge, both from the linear algebra course, where they had previously worked on a population model to introduce difference equations in one variable, and from the economy courses to find an equation for the model:

A_2: … at each moment there is a certain number of employed and unemployed persons, but that number can change in the next time period …

A_3: It is true, we can think on the number of employed persons in the next period and that should be those who still are employed minus those that are now unemployed…

A_1: … in my opinion, the persons employed in that new period should be proportional to the number of persons that are employed and conserve it plus a proportion of those who were unemployed and get a job …

A_2: Yes, we know that *p* are the unemployed who find a job and *q* the employed that are still employed, well, I mean the probabilities (they write $x_{t+1} = qx_t + py_t \rightarrow$ employment)

A_3: Then the model is a system, there is another equal equation for unemployment (they write $y_{t+1} = (1 - q)x_t + (1 - p)y_t \rightarrow$ unemployment)

Students worked to validate a solution proposed for the model's equation, which was obtained as a generalization of the solution for the population model by introducing the system's matrix. During their work these students used their previous knowledge about matrices and exponentials to do a process on the resulting equation (Figure 4).

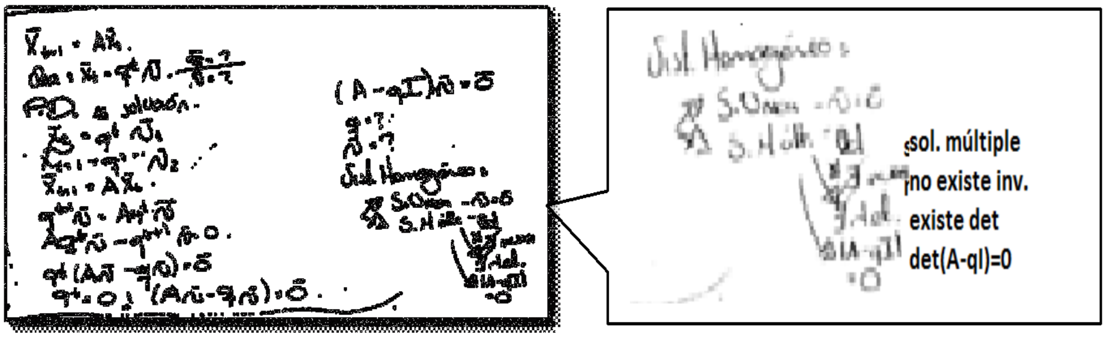

Figure 4. Using a schema, students find the definition of eigenvectors and eigenvalues.

Their work showed evidence that they had constructed relations among the concepts introduced in the course. This can be characterized as the construction of a schema for the solution set of a linear system of equations that includes the concepts of solution, matrix, linear Independence, null space and determinant.

This process led the students to the definition of the concepts of eigenvalues, eigenvectors, and eigenspaces that had not been introduced before. Students' reflection on their actions led them to construct these concepts as processes. Work with activities designed with the GD, where students work was reconsidered and institutionalized, gave them an opportunity to construct these concepts as objects.

Later, students calculated eigenvalues and eigenvectors using numbers for the parameters:

A_1: …for k_1 equal to one, the vectors have this form $\boldsymbol{v} = (2x_2/3, x_2)$ and x_2 is a parameter; and for $k_2 = 1/6$, the vector is $\boldsymbol{v} = (2x_2/3, x_2)$.

A_3: In both cases x_2 is arbitrary, that is, the family of solutions in the solution set. Is the parameter the same in both cases?... No, then let's call one x_1…

A_2: That's true... then…only for those values for k and those values for $\boldsymbol{v}$, the proposed functions are solutions of the model's system.

A_3: Can we use a specific case for each family of vectors?

A_1: I don't know, but, in this case, a particular case … for $k_1 = 1$, $\boldsymbol{v}_1 = (2/3,)$ and for $k_2 = 1/6$, $\boldsymbol{v}_2 = (2/3,)$. Is this right?

A_3: For each k, the vectors span a line since there is only one arbitrary variable in each case.

After a cycle with activities designed with the GD intended to institutionalize and give students new reflection opportunities, during the whole-group discussion, these same students related these concepts with the modeling problem.

A_3: … We found that eigenvalues were $k_1 = 1$ y $k_2 = q - p$, that is, different, one is independent of the given probabilities and the other is related to the difference of the probability that a person continues being employed and that for an unemployed person to get a job …

A_2: We used those values and found the eigenvectors. Well, we chose one for each k. For $k_1=1$ we found $(p/(1-q), 1)$ so it is related to the rate of the probability that an unemployed person finds a job in the next period and that an employed person loses the job in the next period- Something like a rate of the probabilities of changing status. … for the other k, $k_2 = q - p$ it was independent of the values of the probabilities, it was $(-1, 1)$ and we were not able to explain this …also, because we drew a graph (Figure 5) and the corresponding eigenspace's vectors always have a negative component …

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.

A_3: Then the constants don't have a relation with initial conditions, although it was so in the population problem where those conditions appeared in the solution, and we discussed their role in terms of a family of solutions. But here, where are the initial conditions of the problem? Don't they play any role?

The teacher returned the question for students to work in teams and asked them to predict the behavior in the long run. During work on a new cycle of activities designed with the GD, students made reference to the concept of base:

A_3: We chose one particular vector for each solution set separately, but, could we take one of each family to write a linear combination and span, maybe, would be R^2…

This can be taken as evidence that these students constructed relations between their previous knowledge and the new one.

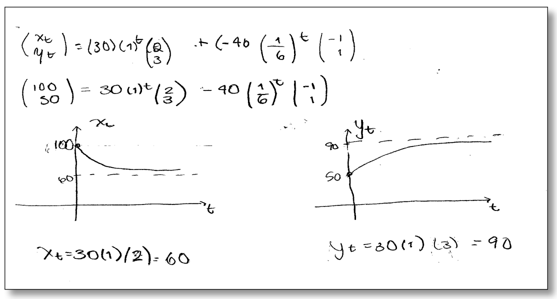

Figure 5. Long term behavior.

Students, in general showed difficulties to understand the resulting vector functions. They had not studied them yet. Some of them decided to graph each of the components to find conclusions from each of them, to find the long term behavior, and to conclude that it converges to a solution that corresponds to the eigenspace.

This experience put forward the emergence of the concepts of interest in the work of students, without any intervention from the teacher, and the construction of a schema by some students which shows that they had constructed relations among the concepts introduced before. Even though during the interviews conducted after the course it was found that some difficulties persisted in cases where dimensions were larger, at least three students showed evidence of having constructed on object conception of the concepts of interest.

Many research studies about the didactical use of modeling insist in the motivational aspect of these type of problems for students. These studies confirm this fact. However, they also demonstrate that when students are involved in interesting problems and are free to reflect, they can develop new strategies which promote the construction of concepts and of relations among them. Modeling problems can favor the learning of difficult and abstract concepts, and new knowledge can, in turn, be applied to the solution of new problems. The advantages of the coordination of the two theories, on the other hand, was made patent by the permeability of their boundaries and in the expansion of the problems that each of them can address.

Final Comments

The experiences of crossing borders, dialogue, and search for possible ways to coordinate theories by carefully analyzing their basic hypothesis and their theoretical positions showed, in each case, encouraging possibilities of approaching them without confrontation, and of finding contributions that mutually enrich them. They also underline that, a serious and open approach enables the establishment of dialogues between theories even in those cases where the theories seem to be distant from each other.

Besides the theoretical enrichment resulting from constructing bridges between different theories, the application of the tools that emerged from each of the dialogues made clear their potential to be applied in the design of teaching strategies that can favor students' learning, and the possibility of thinking differently of our own research work.

The theoretical borders can appear in a respectful and tolerant dialogue as flexible and dynamic boundaries that make the enlargement of their application domain and the interchange of ideas possible, without losing their own identity. Borders that open themselves and let new phenomena appear. These phenomena would be impossible to perceive when only one theory is used. The challenge we face as a community is to approach the study of mathematical education phenomena by creatively building bridges so that even though borders between different theories remain, they can be made porous and let the discipline be enriched through collaborative relations.

Acknowledgments

This research work has been possible thanks to the support of Asociación Mexicana de Cultura, A.C. and Instituto Tecnológico Autónomo de México.

References

Arnon, I., Cottrill, J. Dubinsky, E., Oktaç, A. Roa, S. Trigueros, M. & Weller, K. (2013) *APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. Springer. New York.

Artigue, M., Bosch, M., & Gascón, J. (2011). Research praxeologies and networking theories. In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.) *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME7* (pp. 2381-2390). Rzeszów (Pologne): University of Rzeszów.

Bas, S., Cetinkaya, B., and Kursat, A. (2009). Pre-service Mathematics Teachers' Development of Mathematical Models: Motion with Simple Pendulum. *14th ICTMA*. Last accessed on May 4, 2013 from http://www.ictma14.de/media/files/ICTMA14_Abstracts_FINAL.pdf

Bosch, M., Gascón, J. (2014). Introduction to the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). In A. Bikner-Ahsbahs, S. Prediger (Eds.) *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education*. pp. 67-83..Cham: Springer.

Carlson, M., Larsen, S., & Lesh, R. (2003). Integrating a models and modeling perspective with existing research and practice. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.). *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics teaching, learning, and problem solving* (pp. 465–478). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Camacho, M., Perdomo, J., and Santos, M. (2012). Procesos conceptuales y cognitivos en la introducción de las ecuaciones diferenciales ordinarias vía la resolución de problemas. *Enseñanza de las ciencias.* 30.2, 9 – 32.

Chevallard, Y. (1992): Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12/1, 73-112.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1), 103-131.

English, L. D., Lesh, R., & Fennewald, T. (2008). Methodologies for investigating relationships between concept development and the development of problems solving abilities. In M. Santos, & Y. Shimizu (Eds.), *Proceedings for the 11th International Congress on Mathematics Education*. Monterrey, Mexico.

Martinez-Planell, R., & Trigueros, M. (2012). Students' understanding of the general notion of a function of two variables. *Educational Studies in Mathematics*, *81*(3), 365-384.

Rasmussen, C., & Blumenfeld, H. (2007). Reinventing solutions to systems of linear differential equations: A case of emergent models involving analytic expressions. *Journal of Mathematical Behavior*, *26*, 195-210.

Salgado, H. & Trigueros, M. (2015). Teaching eigenvalues and eigenvectors using models and APOS Theory. *Journal of Mathematical Behavior*, *39*, 100- 120.

Trigueros, M., Bosch, M., Gascón, J. (2011). Tres modalidades de diálogo entre APOS y TAD. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage & M. Larguier (Eds.), *Un panorama de la TAD*. CRM Documents, vol. 10, pp. 77-116. Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica.

Trigueros, M. (2014). Vínculo entre la modelación y el uso de representaciones en la comprensión de los conceptos de ecuación diferencial de primer orden y de solución. *Educación Matemática*. Número especial 25 Años, pp. 207-226.
Trigueros, M., & Martínez-Planell, R. (2015). Las funciones de dos variables: análisis mediante los resultados del diálogo entre la teoría APOE y la TAD. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(2), 157-171.
Trigueros, M., & Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two variable functions, Educational Studies in Mathematics, 73(1), 3-198.
Trigueros, M. & Possani, E. (2013) Using an economics model for teaching linear algebra. *Linear Algebra and Its Applications*. Vol. 438, 4, pp. 1779–1792.
Zandieh, M., & Rasmussen, C. (2010). Defining as a mathematical activity: A framework for characterizing progress from informal to more formal ways of reasoning. Journal of Mathematical Behavior, 29(2), 57-75.

Wood, M. B., Turner, E. E., Civil, M., & Eli, J. A. (Eds.). (2016). *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tucson, AZ: The University of Arizona.