

**EL RAZONAMIENTO DE PROFESORAS EN FORMACIÓN ACERCA DE LA  
VARIACIÓN EN SITUACIONES DE RIESGO  
PRESERVICE TEACHERS' REASONING ABOUT VARIATION IN RISK SITUATIONS**

José Antonio Orta Amaro  
ENMJN  
jaortaa@gmail.com

Ernesto A. Sánchez Sánchez  
DME-Cinvestav  
esanchez0155@gmail.com

María Eugenia Ramírez-Esperón  
UAA  
meramiremx@cinvestav.mx

*En esta investigación exploramos el razonamiento de profesoras en formación acerca de la dispersión de datos (variabilidad o variación) cuando es analizada en problemas donde se comparan conjuntos de datos que involucran situaciones de riesgo como lo son las apuestas en juegos y la duración de vida en tratamientos médicos. En esta comunicación se presentan las respuestas que dieron 97 futuras profesoras de nivel preescolar a dichos problemas. Los problemas fueron resueltos antes de que las estudiantes normalistas iniciaran un curso de procesamiento de información estadística y los resultados mostraron la dificultad que ellas tienen para interpretar la dispersión en este tipo de contextos. Por los resultados obtenidos consideramos importante reflexionar acerca de la instrucción de las estudiantes sobre los significados de medidas de centro y dispersión con la finalidad de contribuir en su formación.*

Keywords: Análisis de Datos y Estadística, Conocimiento del Profesor.

### Introducción

La variación es la causa subyacente de la existencia de la estadística que está presente en todos lados y por lo tanto en conjuntos de datos (Watson, 2006). Además Moore (1990) enfatiza la importancia de medirla y modelarla, y encontramos que investigadores como Wild y Pfannkuch (1999) incluyen la percepción de la variación como parte de los tipos fundamentales del razonamiento estadístico. Asimismo, Garfield y Ben-Zvi (2008) observan que “la comprensión de las ideas de dispersión y variabilidad en los datos es una componente clave en la comprensión del concepto de distribución y es esencial para hacer inferencias estadísticas” (p. 203). Por su parte, Burrill y Biehler (2011) proponen una lista de siete ideas estadísticas fundamentales en las cuales la variación se ubica en el segundo lugar. Respecto del aspecto escolar, Franklin, Bargagliotti, Case, Kader, Sheaffer y Spangler (2015) mencionan que los profesores deben reconocer las características de la estadística y comunicarlas de manera clara y, particularmente, poner énfasis en la variabilidad y el papel del contexto, y en la descripción de la variabilidad considerar que los datos están constituidos de una estructura (la media o la mediana) alrededor de la cual varían. En relación con ello, Canada y Makar (2006) encontraron que al resolver problemas sobre distribuciones los profesores en formación presentan una percepción intuitiva de la variación, la cual describen con lenguaje informal y que la media es poco utilizada. Otros estudiosos como Mooney, Duni, VanMeenen y Langrall (2014) mencionan que al investigar acerca de la percepción de la variabilidad, en situaciones de azar, los profesores en formación reconocen que debe presentarse cierta cantidad de variabilidad, pero no tienen certeza sobre cuánta. De las investigaciones precedentes se desprende que es necesario proveer a los futuros profesores con experiencias tanto en el análisis de datos como en situaciones de azar donde se desarrollen conceptos como *centro*, *variación*, *distribución*, *valores esperados* y las relaciones entre ellos. Para explorar la comprensión y razonamiento de los alumnos acerca de la percepción, descripción y medición de la variación en los datos se han utilizado diferentes contextos y problemas por ejemplo, variabilidad en el muestreo (Watson & Moritz, 2000), azar (Watson & Kelly, 2004), mediciones repetidas, variación en el crecimiento de plantas (Lehrer & Schauble, 2007; Petrosino, Lehrer & Schauble, 2003), y clima (Reading, 2004). De acuerdo con estos investigadores, las situaciones de riesgo proveen otro

---

Galindo, E., & Newton, J., (Eds.). (2017). *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

escenario para indagar el razonamiento que tienen los estudiantes acerca de la variabilidad (Sánchez & Orta, 2013). Por ello, esta comunicación tiene como objetivo explorar la manera en que futuras profesoras del nivel preescolar interpretan la dispersión de datos en situaciones de riesgo, con la finalidad de que sepan conceptos estadísticos fundamentales con miras a su mejoramiento profesional. Por este motivo es importante incluir en su formación el conocimiento de conceptos estadísticos, que le permitan favorecer la recolección, representación e interpretación de información en el nivel preescolar (SEP, 2011). Además de considerar que estos serán enseñados posteriormente a sus alumnos en otros niveles educativos (Ball, Thames & Phelps, 2008).

### Marco de Referencia

Esta exploración se ubica en el área de razonamiento estadístico cuya propuesta es comprender como razonan las personas con ideas estadísticas (Garfield & Ben-Zvi, 2008) y así proponer características para crear escenarios de aprendizaje, puesto que cuando los participantes de una investigación tratan de justificar sus respuestas, muestran los elementos a los que le dan importancia, en particular los datos que eligen, las operaciones que realizan, sus creencias y sus conocimientos. Aunque en ocasiones las respuestas de las personas no son tan explícitas para revelar claramente su razonamiento, de cualquier manera muestran indicios para identificar algunos de sus rasgos. En este estudio identificamos algunas características del razonamiento de profesoras en formación ante situaciones de riesgo. Una parte importante en una investigación en didáctica de las matemáticas son los problemas. Al resolverlos éstos deben promover en las personas la capacidad de pensar y razonar y así proveer al investigador de resultados relevantes que aporten información al área de estudio. Los problemas deben también llamar la atención de quienes los resuelven para que puedan comprometerse con su solución y aumentar las probabilidades de la comprensión del concepto que se quiere estudiar. En la estadística el razonamiento debe articular ideas como media o dispersión, expresadas con números, con situaciones reales basadas en datos, es decir, el razonamiento estadístico está íntimamente relacionado con el contexto, y los números en contexto implican información (Moore, 1990). Los problemas sobre toma de decisiones bajo incertidumbre son comunes en estadística, este tipo de problemas han sido utilizados para promover y analizar características importantes del razonamiento estadístico de las personas. Además, las situaciones que requieren de la comparación de conjuntos de datos son utilizadas frecuentemente para involucrar a los alumnos en el razonamiento con datos (Garfield & Ben-Zvi, 2008). En esta exploración se presentan dos situaciones de toma de decisiones y comparación de conjuntos de datos en los cuales la dispersión es importante, y ésta puede ser asociada con la noción de riesgo, la cual está asociada con la incertidumbre presente en un suceso que implica una amenaza. Estas situaciones aparecen cuando hay resultados no deseados que, como consecuencia, provocan pérdidas o daños. Un problema paradigmático en un escenario de riesgo consiste en elegir entre dos juegos de apuestas de los cuales se muestran pérdidas y ganancias (Kahneman & Tversky, 2000). Considere el siguiente problema:

Las ganancias observadas de  $n$  repeticiones de un juego A ( $x_n$ ) y  $m$  del juego B ( $y_m$ ) son:

Juego A:  $x_1, x_2 \dots ; x_n$

Juego B:  $y_1, y_2 \dots ; y_m$

¿En cuál de los dos juegos participarías?

Una solución puede ser la siguiente: 1) comparar las medias aritméticas de ambos juegos ( $\bar{x}$  y  $\bar{y}$ ); 2) si  $\bar{x} \neq \bar{y}$ , elegir el juego cuya media es mayor; 3) si  $\bar{x} = \bar{y}$ , se tienen dos opciones: 3a) elegir cualquier juego; 3b) analizar la dispersión de los datos en cada juego y elegir uno de acuerdo con las preferencias hacia el riesgo. Estas preferencias pueden ser definidas como generalizaciones de las actitudes hacia el riesgo:

---

Galindo, E., & Newton, J., (Eds.). (2017). *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

En general, la preferencia por un resultado seguro y el rechazo de un juego cuyo resultado tiene un valor esperado igual o mayor a dicha ganancia es llamada aversión al riesgo. Y el rechazo de una ganancia segura y la aceptación de un juego cuyo resultado tiene un valor esperado menor o igual a esa ganancia es llamada propensión al riesgo (Kahneman & Tversky, 2000, p. 2).

En un juego la dispersión de las ganancias (incluidas las pérdidas) puede ser considerada una medida de riesgo: entre mayor dispersión más riesgo. Una persona adversa al riesgo preferirá un conjunto de datos menos disperso en lugar de otro cuyos datos tengan mayor dispersión, mientras que una persona es propensa al riesgo cuando prefiere la opción cuyos datos son más dispersos.

### Método

En este estudio participaron 97 profesoras en formación de una escuela normal pública de la Ciudad de México que cursan la Licenciatura en Educación Preescolar (atención a niños de 3-6 años). Para explorar las ideas de las futuras profesoras se utilizó un cuestionario con dos problemas sobre comparaciones de conjuntos de datos (ver Figura 1).

**Problema 1.** En una feria, se invita a los asistentes a participar en uno de dos juegos. Juan puede participar en un juego, pero no en ambos. Para saber por cuál decidirse observa, anota y ordena los resultados de dos muestras de 10 personas que han participado en cada juego. Las pérdidas (-) o premios (+) en efectivo que han obtenido las 20 personas se muestran en las siguientes listas:

Juego 1:  
 15    -21    -4    50    -2    11    13    -25    16    -4

Juego 2:  
 120    -120    60    -24    -21    133    -81    96    -132    18

a) Si tienes la posibilidad de participar en un solo juego, ¿Cuál juego elegirías?  
 ¿Por qué?

**Problema 2.** Considera que debes aconsejar a una persona que padece una enfermedad grave, incurable y mortal, pero que es tratable con medicamentos que pueden extender la vida por varios años. Es posible elegir entre dos tratamientos. Las personas tienen diferentes reacciones a las medicinas, para algunas tienen el resultado previsto, mientras que para otras pueden ser más o menos benéficas. A continuación se muestran los años que han vivido varios pacientes tratados con cada una de las opciones mencionadas; cada dato de los que se muestran corresponde al tiempo que ha sobrevivido un paciente con el respectivo tratamiento. Después se muestran las gráficas correspondientes a los tratamientos.

**Tratamientos**

Gráfica del tratamiento 1

Número de años vividos por persona

Gráfica del tratamiento 2

Número de años vividos por persona

a) ¿Qué tipo de tratamiento preferirías (1 o 2)? ¿Por qué?

Figura 1. Problemas resueltos por las profesoras.

El cuestionario fue resuelto por las profesoras en formación previo a iniciar el curso de procesamiento de información estadística. Los problemas tenían un inciso donde se plantea una situación de toma de decisiones. En el problema 1 se dan las ganancias y pérdidas de dos juegos y se pide elegir el juego en el que más convendría jugar y en el problema 2, los tiempos de años vividos en forma gráfica de dos grupos de pacientes después de someterse respectivamente a uno de dos tratamientos, y se solicita decidir cuál es el mejor tratamiento. En el primer problema las *medias aritméticas* de los conjuntos de datos son iguales mientras que en el segundo son diferentes. En ambos casos es importante la interpretación de la dispersión asociada con el riesgo para justificar la elección. A continuación se comentan los resultados obtenidos en cada uno de los problemas resueltos por las profesoras, se inicia este apartado presentando las respuestas al problema 1 y después se muestran las correspondientes del problema 2. Para analizar las respuestas en primer lugar

Galindo, E., & Newton, J., (Eds.). (2017). *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

se observó la decisión que tomaron, es decir, el conjunto de datos que eligieron y en segundo lugar, se categorizaron las respuestas con base en las estrategias de comparación que describieron en sus justificaciones siguiendo las sugerencias de Birks y Mills (2011).

## Resultados

### Problema 1

La solución normativa del problema 1 consistiría en comparar las *medias* y posteriormente considerar la dispersión (que a través del rango sería suficiente). En el caso de que se perciba el riesgo en ambos juegos, la opción elegida dependerá de las actitudes del riesgo de quien resuelve el problema: Elegirían el juego 1 aquellos que son adversos al riesgo, mientras que optarían por el juego 2 los propensos al riesgo. Las frecuencias con las que se eligió alguna de las opciones fueron las siguientes: 58 (de 97) futuras profesoras eligieron el juego 1, mientras que 31 de ellas seleccionaron el juego 2, y 5 participantes respondieron que elegirían cualquiera y las 3 restantes no respondieron. Ninguna de las argumentaciones para dichas elecciones siguió el esquema de razonamiento que se describió en el párrafo precedente; aunque algunas se aproximaron. Un procedimiento común en todas las estrategias consistió en sumar las ganancias de cada juego (los valores positivos) y agregar sus pérdidas (valores negativos pero sin considerar el signo), obteniéndose cuatro valores  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ . La forma en que combinaron estos valores produjo las siguientes comparaciones:

**Comparación de la diferencia entre ganancias y pérdidas.** En 30 casos, la estrategia consistió en encontrar la ganancia global cada uno de los juegos. Esto mediante la comparación de las diferencias entre ganancias y pérdidas:  $G_2 - P_2 = G_1 - P_1 = 49$ . Este procedimiento prefigura el uso de la *media*. 16 alumnas participantes eligieron el juego 1, 8 normalistas el juego 2 y 6 futuras profesoras mencionaron que cualquiera. Por ejemplo, una estudiante argumenta: “al hacer las operaciones la diferencia de ambos juegos entre perder y ganar es de 49”. Aquí advertimos que no se tiene en cuenta la dispersión de los datos ni consideraciones de riesgo.

**Comparación de la suma de pérdidas o ganancias.** 19 respuestas se basaron, ya sea en la comparación de la suma de las ganancias (eligieron el juego 2, porque  $G_2 > G_1$ ) o en la comparación de la suma de las pérdidas (eligieron el juego 1 porque  $P_1 < P_2$ , pues  $-P_1 > -P_2$ ). En algunas de estas respuestas se percibió el riesgo. 9 participantes eligieron el juego 1 y 10 participantes el 2. Por ejemplo una participante eligió el juego 1 y la justificación de su elección fue la siguiente: “Existe la posibilidad de poder obtener una ganancia ya que de acuerdo con los resultados de las muestras del juego 1 las ganancias fueron de 105 y pérdidas de 56, pero en el segundo juego las ganancias fueron de 427 y las pérdidas de 378. En conclusión en el primer juego se perderá menos que en el segundo aunque los premios sean mejores en el segundo”. Mediante esta argumentación consideramos que la justificación de la elección fue con base en la comparación de la suma de las pérdidas, observando que son menores en el juego 1, y descubrimos aversión al riesgo ya que en la justificación se comenta “se perderá menos”.

**Comparación de relaciones proporcionales entre ganancias y pérdidas.** En 6 casos se compararon relaciones proporcionales entre pérdidas y ganancias, notando que es mayor la del juego 1:  $\frac{G_1}{P_1} > \frac{G_2}{P_2}$ , por tanto, optaron por este juego. Dado que las *medias* son iguales, la anterior desigualdad se reduce a  $P_1 > P_2$ , en el fondo esta estrategia consiste en elegir el juego 1 porque se pierde menos. Un ejemplo de este tipo de respuestas fue mencionada por una estudiante, quien mencionó: “porque por los datos se refleja que en este juego hay más probabilidades de salir ganador ya que el número de ganadores casi duplica el de perdedores y aunque fue menos cantidad lo ganado que en el juego 2, en el 1 es más seguro ganar aunque sea poco, y yo no elegiría el juego 2 porque aunque se ganan cantidades más grandes de igual forma se pierde mucho”. En este ejemplo se

observa, por un lado el uso de la razón entre las ganancias y las pérdidas y, por otro la aversión al riesgo ya que en parte del argumento se comenta que “es más seguro ganar aunque sea poco”.

**Comparación de las medias aritméticas.** Sólo hubo 2 respuestas en las que el juego elegido fue el 1, donde mostraron el uso de la media aritmética para hacer la comparación entre los juegos, en una de ellas además de presentar la media aritmética (4.9) con la justificación siguiente: “Las cantidades son más bajas, están más cercas de la media”. En el ejemplo se advierte, además de la mención de la media, la noción de la dispersión al elegir el juego 1 con valores cercanos al centro del conjunto de datos.

## Problema 2

La solución normativa del segundo problema puede reducirse al cálculo de las *medias* de los tiempos de vida de cada tratamiento, notando que los datos del tratamiento 1 tienen mayor *media* (6.7) que los del tratamiento 2 (6). Con lo anterior, también puede elegirse el tratamiento 2, considerando la dispersión mediante el rango e interpretándolo como riesgo. Se creería que el riesgo con el tratamiento 1 (rango = 8) es mayor que el riesgo con el tratamiento 2 (rango = 4) y que la disminución en el riesgo podría compensar la diferencia entre las medias. En este último caso la elección estaría motivada por una aversión al riesgo. En este problema 60/97 profesoras en formación eligieron el tratamiento 1 y 37/97 el tratamiento 2. En los argumentos que justifican las elecciones de las participantes se pueden identificar las siguientes estrategias de comparación:

**Comparación de centros.** En 31 respuestas se compararon los valores modales observados en cada gráfica. En 19 de ellas se eligió el tratamiento 1, posiblemente comparando las modas de los conjuntos de datos ( $8 > 6$ ), por ejemplo, una justificación fue: “hay más probabilidades de vivir más años (8 aprox.)”. En 12 casos eligieron el tratamiento 2 probablemente con base en la proporción de personas que vivieron seis años, por ejemplo: “aquí me garantizan 7 personas que van a vivir 6 años seguros, sin embargo en el "1" 6 personas viven 8 años, es seguro pero yo voy más por el número de personas que tomaron el tratamiento”. En esta estrategia aunque se tienen en cuenta los centros de los conjuntos de datos, se ignora la variación de los datos.

**Comparación de valores extremos.** 19 participantes eligieron con base en uno de los valores extremos. Cuando el tratamiento elegido fue el 1, en 8 respuestas se argumentó que con ese tratamiento se podrían vivir hasta 10 años; 2 estudiantes justificaron dicha elección indicando que vivirían por lo menos 1 año. En 9 casos se eligió el tratamiento 2, justificando que se vivirían por lo menos 4 años. Un ejemplo de este tipo de respuestas donde se eligió el tratamiento 1 fue: “El tiempo vivido en años por persona es mayor; se puede llegar a vivir 9 o incluso 10 años, lo que en el otro tratamiento no”. En las respuestas donde el tratamiento elegido es el 1, es probable que la elección sea motivada por una propensión al riesgo, ya que se menciona que se puede vivir hasta 10 años; mientras que las respuestas donde el tratamiento elegido fue el 2, es probable que sean motivadas por una aversión al riesgo, pues comentan que al menos pueden vivir 4 años.

**Comparación de cardinalidad.** Doce estudiantes que eligieron el tratamiento 1 basaron su elección en la cardinalidad del conjunto de datos ( $27 > 21$ ) y entre sus argumentos comentaban que más personas habían vivido con esa opción. Por ejemplo: “porque hay más probabilidad de que funcione ese tratamiento ya que fueron 27 las personas beneficiadas”

**Comparación con el rango.** En 6 respuestas se hizo alusión al rango. En estas respuestas se ponderó el riesgo, aunque de manera confusa, por ejemplo: “prefiero probar el tratamiento donde hay una mayor probabilidad de obtener un resultado más próximo o al menos que si te asegure o muestre que vivirás mínimo dos años más o máximo 10 años”. En 4 respuestas el tratamiento elegido fue el 1, mientras que 2 eligieron el 2 con el argumento del hecho de asegurar un periodo de vida de 4 a 8 años.

**Comparación de centro y extremo.** En 4 respuestas se eligió el tratamiento 1, en uno de estos casos se expresa que se podían vivir hasta 10 años y en promedio 8 (en realidad es la moda), y en 2 restantes se eligió el tratamiento 2, probablemente, considerando que por lo menos vivirían 4 años y en promedio 6 con la justificación: “porque en el tratamiento 1 la mayoría de personas lograron vivir 8 años y en el tratamiento 2 la mayoría sólo logró vivir 6 años y no hay ni una persona que haya vivido 10 años, al contrario del primer tratamiento que una persona ha logrado vivir 10 años. Por lo tanto si ya una persona logró los 10 años la persona que necesita el consejo puede también vivir 10 años”. En la respuesta es claro que la estudiante observó centros (valor *modal*) y extremos para tomar una decisión, quizás también la preferencia por el riesgo sea la propensión, porque con ese tratamiento “1 persona ha logrado vivir 10 años”.

**Comparación del centro y la dispersión.** En una respuesta se combinaron centro y dispersión para justificar la elección. El tratamiento elegido fue el 2 y la justificación: “El tratamiento fue más funcional ya que se tiene que las personas viven aproximadamente de 4 a 8 años, con mayor influencia a los seis años pues son años más concretos, donde se puede planear muy bien su vida” .

En los resultados obtenidos 38 de las 97 participantes que seleccionaron el problema 1 y 28 de las 97 que eligieron el problema 2 no mostraron una justificación clara al elegir entre los conjuntos de datos. Por ejemplo en el problema 1 seleccionaron el juego 2 y mencionaron “porque en el juego 2 se tienen más probabilidades de ganar más cantidad de objetos que en el juego 1”, sin embargo no encontramos una estrategia evidente que represente lo mencionado, además del uso de la palabra *objetos* que no corresponde con el contexto planteado. En el problema 2, las participantes sólo explicaron su elección diciendo “con alguno de los tratamientos se vive más”, pero sin ofrecer argumentos que muestren cómo se usaron los datos.

### Conclusiones

En el problema 1 casi 40% de las respuestas fueron confusas; sin embargo en algunas de éstas se advirtió que las futuras profesoras ponían atención a las diferencias entre los valores de cada conjunto de datos, lo cual es punto de partida en la percepción de la variación. Así, en el problema de los tratamientos médicos se presentan varias respuestas en las que se comparan elementos aislados de cada conjunto (los máximos, los mínimos o las modas), y aunque no siempre fueron combinados de manera adecuada, puede sugerirse una estrategia que incluya todos los datos o combinaciones de éstos. En el problema de apuestas probablemente las respuestas en las que se afirma que se gana más o se pierde menos, la atención de las participantes también se enfocó en elementos aislados (en particular en los valores extremos).

La estrategia de sumar las ganancias y luego las pérdidas tiene la característica de que se consideran todos los datos. En el problema 2 varias futuras docentes usan relaciones proporcionales en las que combinan y hacen uso de más de un valor del conjunto de datos, ya sea operando con ellos o mencionándolos de manera explícita. La comparación de las ganancias totales prefigura la respuesta más sofisticada consistente en comparar las medias, lo que no es una estrategia espontánea ni fácil de elaborar por parte de los alumnos (Gal, Rothschild & Wagner, 1989), y la cual pudo observarse en las futuras docentes. En la enseñanza se insiste en la importancia de la proporcionalidad, y por ello considerarla como estrategia indispensable para resolver cualquier problema, y en nuestra investigación fue empleada en la comparación de las razones en el problema 1. Consideramos que no es una estrategia del todo inadecuada, pues las llevó a elegir el juego en el que la pérdida es menor. Esta manera de resolver es más apropiada en el problema 2, en la que comparan proporciones de los valores modales.

Son pocas las respuestas basadas en la consideración de los rangos (6%) o influenciadas por la percepción del riesgo (problema 2). Lo que mostraron las participantes en relación con los dos problemas es que son muy diferentes, pues ninguna de ellas adaptó en el problema 2 la estrategia

seguida en el problema 1; esto nos lleva a suponer que el contexto y el formato de presentación de los datos ejercen mayor efecto que la estructura (oculta) del problema. Asimismo, en el problema 1, en general, hubo revisión de los datos, mientras que en el problema 2, en 20 casos se eligió un tratamiento sin ofrecer ninguna justificación que incluyera un procesamiento de los datos debido, quizá, a la dificultad de extraer los datos numéricos de la gráfica (valores extremos de cada conjunto de datos y aparente ausencia de la lista de datos). En cambio, en este problema 2 las estudiantes ponderaron el riesgo en la forma de elegir el tratamiento 1: “se puede vivir 10 años” o tratamiento 2: “al menos se viven 4 años”.

De los resultados mostrados se percibe que al igual que en investigaciones previas (Canada & Makar 2006; Mooney et. al, 2014) es necesario promover en las profesoras en formación, conceptos estadísticos como *centro, variación, distribución, valores esperados*. Las estrategias a seguir deben ser múltiples (discusiones, talleres, uso de la tecnología, resolución de problemas enmarcados en diferentes situaciones, formatos variados de presentación de los datos, entre otros) para que las futuras profesoras se apropien de estos conceptos. Además, las educadoras mexicanas en servicio deben abordar en el aula la agrupación de objetos según sus atributos, cualitativos o cuantitativos; la recopilación y representación apropiada de datos e información, así como su interpretación (SEP, 2011); los procesos anteriores requieren de la consideración de la variabilidad (Franklin, Kader, Mewborn, Moreno, Peck, Perry & Scheaffer, 2007) por lo que es necesario que desarrollen este concepto. Esta investigación aporta información sobre el conocimiento de las profesoras en formación acerca de la variabilidad, concepto estadístico importante (Spangler, 2014), y mostramos, de manera incipiente, que los problemas con los cuales hemos explorado el razonamiento de las profesoras en formación conducen a percibir la variación dándole un significado asociado al riesgo para presentar estrategias que las guiaron a usar la *media* y el *rango* de manera significativa y a motivarlas a planear actividades que propicien dar sentido y significado a los procedimientos basados en el uso de la media y la dispersión.

### References

- Ball, D., Thames, M. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher education*, 59(5), 389-407.
- Birks, M. & Mills, J. (2011). *Grounded Theory*. Thousand Oaks, California: Sage.
- Burrill, G. & Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics challenges for teaching and teacher education: A joint ICMI/IASE Study* (pp. 57-69). New York: Springer.
- Canada, D. & Makar, K. (2006). Preservice teachers' informal descriptions of variation. In *Program and Supplements of the 2006 AERA Annual Meeting: Research in the Public Interest*. (pp. 281-281). San Francisco, California.
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2007). *Guidelines and Assessment for Instruction in Statistics Education (GAISE) Report: A Pre-K–12 Curriculum Framework*. Alexandria, VA: American Statistical Association.
- Franklin, C., Bargagliotti, A., Case, C., Kader, G., Sheaffer, R. & Spangler, D. (2015). *The Statistical Education of Teachers*. American Statistical Association.
- Gal, I., Rothschild, K. & Wagner, D.A. (1989). *Which group is better? The development of statistical reasoning in elementary school children*. Paper presented at the meeting of the Society for Research in Child Development, Kansas City, MO.
- Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice*. New York: Springer.
- Kahneman, D. & Tversky, A. (2000). *Choices, Values, and Frames*. Cambridge: Russell Sage Foundation.
- Lehrer, R., & Schauble, L. (2007). Contrasting emerging conceptions of distribution in contexts of error and natural variation. In M. Lovett & P. Shah (Eds.), *Thinking with data* (pp.149-176). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

---

Galindo, E., & Newton, J., (Eds.). (2017). *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

- Mooney, E., Duni, D., VanMeenen, E. & Langrall, E. (2014). Preservice teachers' awareness of variability. In K. Makar, B. de Sousa, & R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS9, July, 2014)*, Flagstaff, Arizona, USA. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.
- Moore, D. (1990). Uncertainty. In L. A. Steen (Ed.), *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy* (pp. 95-137). Washington, DC: National Academy Press.
- Petrosino, A. J., Lehrer, R. & Schauble, L. (2003). Structuring error and experimental variation as distribution in the fourth grade. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(2 & 3), 131-156.
- Reading C. (2004). "Student Description of Variation While Working with Weather Data". *Statistics Education Research Journal*, 3(2), 84-105.
- Sánchez, E., & Orta, A. (2013). Problemas de mediciones repetidas y de riesgo para desarrollar el razonamiento de estudiantes de secundaria en los temas de media y dispersión. *Números*, 83, 65-77.
- Secretaría de Educación Pública [SEP] (2011). *Programa de estudios. Guía de la educadora*. México: Secretaria de Educación Pública.
- Spangler D. (2014). Important ideas in statistics for children aged 4-8 years. In K. Makar, B. de Sousa, & R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS9, July, 2014)*, Flagstaff, Arizona, USA. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.
- Watson, J.M. & Moritz, J.B. (2000). Developing concepts of sampling. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31, 44-70.
- Watson, J. M. & Kelly, B. A. (2004). Statistical variation in a chance setting: A two-year study. *Educational Studies in Mathematics*, 57, 121-144.
- Watson, J. M. (2006). *Statistical literacy at school: Growth and goals*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Wild, D. J. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223-265.

*The aim of this investigation is to explore the preservice teachers' reasoning about variation (variability or spread) when they analyze data in situations that involve risk. In particular, in this communication the responses to two problems of a questionnaire administered to 96 preservice teachers are reported. The problems are of comparing groups of data in situations of risk: stakes in games and the life expected after medical treatments. The questionnaire was applied before the preservice teachers began a course of statistical information processing and the results showed the difficulty found by students to interpret variation in this type of contexts. For these results it is necessary to reflect on the instruction of future teachers about the meanings of measures of center dispersion and dispersion to contribute to an improvement in their academic training.*

### Introduction

Variation is the underlying cause of the existence of statistics and, given its omnipresence, it is also found in data sets (Watson, 2006). Moore (1990) highlights the importance of measuring and modelling variation while Wild and Pfannkuch (1999) include the perception of variation as part of the fundamental types of statistical reasoning. Additionally, Garfield and Ben-Zvi (2008) consider that "Understanding the ideas of spread or variability of data is a key component of understanding the concept of distribution, and is essential for making statistical inferences" (p. 203). For their part, Burrill and Biehler (2011) propose a list of seven fundamental statistical ideas in which variation is placed in the second position. Regarding the school perspective, Franklin, Bargagliotti, Case, Kader, Sheaffer and Spangler (2015) consider that teachers must identify the characteristics of statistics; they must communicate it clearly and, particularly, they should highlight variability and the role of the context. In the description of variability, they have to consider that data are constituted by a structure (mean or median) around which they vary. To that respect, Canada and Makar (2006) found that, when solving problems on distributions, preservice teachers have an intuitive perception of

- Galindo, E., & Newton, J., (Eds.). (2017). *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.



variation. They describe it using informal language while the mean is rarely used. Other researchers, as Mooney, Duni, VanMeenen and Langrall (2014), state that when exploring on the perception of variability in chance situations, preservice teachers identify a certain amount of variability must be present, but have no certainty about how much. From the preceding researches, it is necessary to provide future teachers with experiences in both data analysis and chance situations in which they can develop concepts as: *center, variation, distribution, expected values* and the relations between them.

To explore the students' comprehension and reasoning regarding the perception, description and measurement of data variation, several contexts and problems have been used; among them are: sampling variability (Watson & Moritz, 2000), chance (Watson & Kelly, 2004), repeated measures, variation in growth of plants (Lehrer & Schauble, 2007; Petrosino, Lehrer & Schauble, 2003) and weather (Reading, 2004). According to these researchers, risk situations provide another scenario to explore the students' reasoning on variability (Sánchez & Orta, 2013). Therefore, the aim of this work is to explore the way in which preservice preschool teachers interpret the spread of data in risk situations, so that they know fundamental statistical concepts towards their professional improvement. For this reason, it is of great importance to include the knowledge of statistical concepts in their education; such concepts will allow them to promote collection, representation and interpretation of information at preschool level (SEP, 2011). In addition, we must consider that these concepts will be taught to their students in other educational levels (Ball, Thames & Phelps, 2008).

### Reference Framework

This exploration is located within the field of statistical reasoning whose approach is to understand how people reason using statistical ideas (Garfield & Ben-Zvi, 2008). We seek to propose characteristics to create learning scenarios since the participants of an investigation show the elements they consider important—particularly, the chosen data, operations done, beliefs and knowledge—when they try to justify their responses. Although the persons' responses are often not so explicit as to clearly reveal their reasoning, they still show signs to identify some of their features. In this study, we identified some of the characteristics of the preservice teachers' reasoning when they face risk situations.

Problems are a key component in an investigation on mathematics didactics. When solving them, they must promote the ability of thinking and reasoning in people to provide the researcher with relevant results that contribute with information to the field of work. A problem should also attract those who solve it, so that they engage with the solution and increase the probabilities of understanding the studied concept. In statistics, reasoning must articulate ideas, as median or spread, expressing those using numbers; that is, with real situations based on data. Statistical reasoning is closely related to the contexts and numbers in context involve information (Moore, 1990). Problems regarding decision making under uncertainty are common in statistics. This type of problem has been used to promote and analyze relevant characteristics of people's statistical reasoning. In addition, those situations that demand the comparison of data sets are frequently used to involve students in reasoning with data (Garfield & Ben-Zvi, 2008). In this work, we present two situations involving decision making and data set comparison in which spread is important since it might be associated to the notion of risk which, in turn, might be linked to the uncertainty in an event that involves a threat. These situations arise when there are unwanted results that cause, in consequence, losses or damages. A paradigmatic problem in a risk scenario consists of choosing between two gambling games that show losses and gains (Kahneman & Tversky, 2000). Consider the following problem:

The gains observed in  $n$  repetitions of a game A ( $x_n$ ) and  $m$  of game B ( $y_m$ ) are:

Game A:  $x_1, x_2 \dots ; x_n$

Game B:  $y_1, y_2 \dots ; y_m$

In which of the two games would you take part?

A solution to the problem might be: 1) comparing the arithmetic means of both games ( $\bar{x}$  and  $\bar{y}$ ); 2) if  $\bar{x} \neq \bar{y}$ , choose the game whose mean is greater; 3) but if  $\bar{x} = \bar{y}$ , 3a) choose any game or 3b) analyze the spread of data in each game and choose according to the preferences towards risk. These preferences can be defined as generalization of the attitudes towards risk:

In general, a preference for a sure outcome over a gamble that has higher or equal expectation is called risk aversion, and the rejection of a sure thing in favor of a gamble of lower or equal expectation is called risk seeking (Kahneman & Tversky, 2000, p. 2).

In a gamble, the spread of gains (including losses) can be considered a measure of risk: greater spread, greater risk. A person averse to risk will choose a data set with lower spread instead of one whose data have a greater spread. In contrast, a risk-seeking person will choose a data set with a greater spread.

### Method

The participants in the study were 97 preservice teachers from a public teacher training school in Mexico City who study a Bachelor of Preschool Education (care of children aged 3–6 years). A questionnaire including two problems regarding comparison of data sets (see Figure 1) was used to explore the preservice teachers' ideas.

**Problem 1.** In a fair, the attendees are invited to participate in one of two games, but not in both. In order to know which game to play, John observes, takes note and sorts the results of 10 people playing each game. The cash losses (–) or prizes (+) obtained by the 20 people are shown in the following lists:

Game 1: 15, –21, –4, 50, –2, 11, 13, –25, 16, –4  
 Game 2: 120, –120, 60, –24, –21, 133, –81, 96, –132, 18

a) If you could play only one of the two games, which one would you choose? Why?

**Problem 2.** Consider you must advice a person who suffers from a severe, incurable and deathly illness, which may be treated with a drug that may extend the patient's life for several years. It is possible to choose between two different treatments. People show different effects to the medication: while in some cases the drugs have the desired results, in some others the effects may be more favorable or more adverse. The graphs corresponding to the treatments are shown below.

Treatment 1

Treatment 2

a) Which treatment would you prefer (1, 2 or 3)? Why?

**Figure 1.** Problems solved by the teachers.

The questionnaire was answered by the preservice teachers before they took the course on statistical information processing. The problems included a section in which a decision-making situation is posed. In problem 1, the gains and losses in two gambles are given and the person is asked to choose the most convenient gamble. In problem 2, the person is asked to graphically choose the times of years lived by two groups of patients after they underwent either of two treatments; the person is asked which the best treatment is. In the first problem, the arithmetic means of the data sets are equal while they are different in the second problem. In both cases, interpreting the spread associated to risk is important to justify the choice.

Below we discuss the responses obtained for each of the problems solved by the teachers. The section starts with the responses to problem 1 and then, those obtained for problem 2. To analyze the responses, firstly we observed the decision the participants made, that is, the data set they chose. Secondly, we categorized the responses based on the strategies of comparison the teachers describe in their justification, as suggested by Birks and Mills (2011).

## Results

### Problem 1

The normative answer to problem 1 would consist in comparing the means and then, considering the spread (considering it through the range would be enough). In case risk is perceived in both gambles, the option chosen will depend on the risk attitudes of the person solving the problem: those averse to risk would choose gamble 1 while gamble 2 would be chosen by risk-seeking persons. The frequencies corresponding to the options were as follows: 58 (out of 97) preservice teachers chose gamble 1 while only 31 of them chose gamble 2. Only 5 participants responded they would choose any gamble and 3 teachers did not answer. No argumentation for the choices followed the reasoning scheme described in the previous paragraph, even though some arguments came close. A common procedure to all the strategies was adding the gains of each gamble (positive values) as well as the losses (negative values without considering the sign), thus obtaining four values  $G1$ ,  $G2$ ,  $P1$ ,  $P2$ . The way in which these values were combined produced the following comparisons:

**Comparison of the difference between gains and losses.** In 30 cases, the strategy consisted in finding the global gain in each of the gambles by comparing the differences between gains and losses:  $G2 - P2 = G1 - P1 = 49$ . This procedure prefigures the use of the mean. 16 participants chose gamble 1 while 8 preservice teachers chose gamble 2 and 6 answered they would choose any. For example, a student argues: “when doing the operations, the difference in the two gambles between gaining and losing is 49.” Here we observe they do not take into account the spread of data nor risk considerations.

**Comparison of the sum of gains or losses.** 19 teachers based their response whether on the comparison of the sum of the gains (they chose gamble 2 because  $G2 > G1$ ) or on that of the sum of losses (they chose gamble 1 since  $P1 < P2$ , given that  $-P1 > -P2$ ). Risk was perceived in some of these responses: 9 of the participants chose gamble 1 while 10 chose the second one. One of the participants who chose gamble 1 justified her choice by saying: “There is the possibility of getting a gain since, according to the results of the samples of gamble 1, there were 105 gains and 56 losses, but in the second gamble there were 427 gains and 378 losses. In conclusion, in the first gamble there will be fewer losses than in the second one; although the prizes are better in the second one.” Through this argumentation we consider that the choice was based on the comparison of the sum of losses: her perception was that losses are lower in gamble 1. We found risk aversion since, in her justification, the participant says “there will be fewer losses”.

**Comparison of proportional relationships between gains and losses.** In 6 cases, the participants compared proportional relationships between gains and losses, noticing that the one of

gamble 1 is greater:  $\frac{G_1}{P_1} > \frac{G_2}{P_2}$ . That is why they chose this gamble. Given that the means are equal, the previous inequality is reduced to  $P1 > P2$ . In reality, this strategy aims to choosing gamble 1 because there are fewer losses. As an example, one of the students justified her response by stating: “because from the data, there is a greater probability of winning in this gamble since the number of winners almost doubles the one of the losers and even if the gain was lower than in gamble 2, winning—even if it is a little—is more certain in 1 and I would not choose gamble 2 because although bigger amounts are won, losses are high too.” This is an example of both the use of reason between gains and losses and risk aversion, since the argument includes the statement “winning—even if it is a little—is more certain”.

**Comparison of arithmetic means.** Only 2 responses showed the use of arithmetic mean to compare the gambles, and gamble 1 was chosen in both cases. One of the responses showed the arithmetic mean (4.9) and justified the response by saying “the numbers are lower and closer to the mean”. In the example we see that besides mentioning the mean, the participant has a notion of spread when she chooses gamble 1, which has values that are closer to the center of the data set.

## Problem 2

The normative answer to the second problem can be reduced to the calculation of the means in the life expectancy for each treatment, considering that the data of treatment 1 have a greater mean (6.7) than those of treatment 2 (6). Therefore, treatment 2 could also be chosen if one considers the spread using the range and interprets it as risk. Risk from undergoing treatment 1 (range = 8) might be thought to be greater than that from treatment 2 (range = 4) and that the decrease in the risk might compensate for the difference between the means. In this last case, the choice would be motivated by risk aversion. For this problem, 60/97 of the preservice teachers chose treatment 1 while 37/97 chose treatment 2. In the arguments that justify the participants’ choices, we identify the following comparison strategies:

**Comparison of centers.** In 31 responses, the modal values observed in each graph were compared. In 19 of the responses, the participants chose treatment 1, possibly comparing the modes of the data sets ( $8 > 6$ ). For instance, one of the teachers justified her response by saying: “there is a greater chance of living longer (8 approx.)”. In 12 cases, the teachers chose the second treatment possibly based on the proportion of people who lived six years; for example: “7 persons guarantee that they will live 6 years for sure; however, 6 people live for 8 years in “1”. That is for sure but I choose based on the number of persons who were treated”. Even though the strategy considers the centers of the data sets, it ignores the data variation.

**Comparison of extreme values.** In 19 cases, the participants made their choice based on the extreme values. When treatment 1 was chosen, 8 of the responses argued that the treatment would extend the patients’ lives for up to 10 years. Two students justified their choice pointing out they would live at least a year. In 9 cases, the students chose the second treatment and they justified their response by saying they would live for four years at least. An example of the type of response in which treatment 1 was chosen was: “The time in years a person lived is longer; a person can live 9 or 10 years; something that does not happen with the other treatment”. In the responses where treatment 1 was chosen, the choice might have been motivated by risk seeking since the response states a person can live up to 10 years. In contrast, those responses in which the second treatment was chosen were probably motivated by risk aversion, given that they refer patients live at least for four years.

**Comparison of cardinality.** Twelve participants who chose treatment 1 based their response on the cardinality of the data set ( $27 > 21$ ) and, among their arguments, they considered that a higher number of people had lived with that choice. For example: “because there is a greater chance that this treatment works since 27 persons were benefited”.

**Comparison with range.** In six responses, the students referred to range. Although confusingly, they considered the risk; for example: “I prefer to take the treatment that has the higher probability of getting a close result, or at least that ensures you’ll live at least two years or a maximum of 10 years”. In four responses, the students chose the first treatment while they twice chose the second treatment, arguing that it would ensure a survival period from four to eight years.

**Comparison of center and extreme.** The students chose the first treatment in four responses. One of these responses expresses a person could live up to 10 years and eight in average (in reality, the response refers to the mode). Treatment 2 was chosen in two responses, probably considering a patient would live four years at least and six years in average. This response was justified as follows: “because in treatment 1, most of the people manage to live eight years and with treatment 2, most only live six years and there is no one who lived 10 years, unlike the first treatment [with which] a person has managed to live for 10 years. So, if a person has already managed for 10 years, the person in need of advice might also live for 10 years”. From the response, it is evident that the student observed centers (modal value) and extremes to make a decision. Risk seeking is probably driving the response since the student stated that using the treatment “a person has managed to live for 10 years”.

**Comparison of center and spread.** In a response, the student combined center and spread to justify her choice. The student chose the second treatment and justified her response by stating: “The treatment was more functional since we have that the people live approximately from four to eight years and, more frequently, six years because they are more solid years, where life can be very well planned”.

In the results obtained, 38 out of 97 participants who chose problem 1 and 28 out of 97 who chose problem 2, did not show a clear justification when choosing between the data sets. For example, in problem 1, they selected gamble 2 and considered: “because there is a greater possibility of winning a higher number of objects in gamble 2 than in gamble 1.” However, we found no evident strategy to represent what was stated. Additionally, the use of the word objects does not correspond to the context laid out. In problem 2, the participants only justified their response by saying “one lives longer with one of the treatments”, but provided no arguments to show how the data were used.

### Conclusions

In problem 1, nearly 40% of the responses were confusing. However, in some of them we see that the preservice teachers paid attention to the differences between the values in each data set, which is a starting point for the perception of variation. Thus, in the problem of medical treatments, there are several responses which compare isolated element from each set (the maximums, the minimums or the modes) and, although they were not always combined in the correct way, a strategy including all the data or a combination of them might be suggested. In the gambling problem, the attention of the participants was probably focused on isolated elements—on extreme values, particularly—in those responses stating the gains are higher or the losses are lower.

The strategy of adding the gains and then the losses considers all the data. In problem 2, several preservice teachers used proportional relationships in which they combined and used more than one value from the data set by operating with them or mentioning them explicitly.

The comparison of the total gains prefigures the most sophisticated response consistent in comparing means, which is not a spontaneous nor easy strategy to create by the students (Gal, Rothschild & Wagner, 1989), but was observed among the preservice teachers.

When teaching, the importance of proportionality is highlighted; therefore, it is considered a necessary strategy to solve any given problem; in our research, it was used in the comparison of reasons in problem 1. We consider it is not an entirely incorrect strategy because it led the students to

choose the gamble in which the loss is lower. This form of solving is more adequate in problem 2, in which the students compare the proportions of the modal values.

There are few responses based on the consideration of the ranges (6%) or influenced by the perception of risk (problem 2). With respect to the problems, the participants showed that they are different from one another, given that no student adapted the strategy followed in problem 1 to problem 2. This leads us to suppose that the context and the format of the presentation of the data have a greater effect than the (hidden) structure of the problem.

In general, the data were reviewed in problem 1 while 20 participants chose a treatment in problem 2 without providing a justification that included an adequate data processing. This situation was likely due to the difficulty of extracting the numerical data from the graph (extreme values from each data set and apparent absence of data list). In contrast, in problem 2 the students considered the risk when choosing treatment 1 “can manage to live for 10 years”, or treatment 2, with which patients live for four years at least.

From the results shown, we observe that, as in previous research (Canada & Makar, 2006; Mooney et al., 2014), statistical concepts as center, variation, distribution and expected values in problems, must be promoted in preservice teachers. The strategies to be followed should be multiple (discussions, workshops, use of technology, solving problems with different contexts, and varied ways of presenting data, among others), so that preservice teachers appropriate these concepts. In addition, Mexican preschool teachers in service should deal with grouping objects, according to qualitative and quantitative characteristics, in the classroom. They should also address the collection and the adequate representation and interpretation of data and information (SEP, 2011). These processes demand considering variability (Franklin, Kader, Mewborn, Moreno, Peck, Perry & Scheaffer, 2007); therefore, teachers should develop this concept.

This research contributes with information regarding preservice teachers' knowledge on variability, a relevant statistics concept (Spangler, 2014). We incipiently show that the problems with which we have explored the preservice teachers' reasoning lead to perceive variation. The problems gave variation a meaning associated to risk when the teachers presented strategies that led them to use the mean and the range in a significant way. The problems presented also lead to motivate teachers to plan activities that promote giving sense and meaning to the procedures based on the use of mean and spread.

### References

- Ball, D., Thames, M. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher education*, 59(5), 389-407.
- Birks, M. & Mills, J. (2011). *Grounded Theory*. Thousand Oaks, California: Sage.
- Burrill, G. & Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics challenges for teaching and teacher education: A joint ICMI/IASE Study* (pp. 57-69). New York: Springer.
- Canada, D. & Makar, K. (2006). Preservice teachers' informal descriptions of variation. In *Program and Supplements of the 2006 AERA Annual Meeting: Research in the Public Interest*. (pp. 281-281). San Francisco, California.
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2007). *Guidelines and Assessment for Instruction in Statistics Education (GAISE) Report: A Pre-K–12 Curriculum Framework*. Alexandria, VA: American Statistical Association.
- Franklin, C., Bargagliotti, A., Case, C., Kader, G., Sheaffer, R. & Spangler, D. (2015). *The Statistical Education of Teachers*. American Statistical Association.
- Gal, I., Rothschild, K. & Wagner, D.A. (1989). Which group is better? The development of statistical reasoning in elementary school children. Paper presented at the meeting of the Society for Research in Child Development, Kansas City, MO.

- Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice*. New York: Springer.
- Kahneman, D. & Tversky, A. (2000). *Choices, Values, and Frames*. Cambridge: Russell Sage Foundation.
- Lehrer, R., & Schauble, L. (2007). Contrasting emerging conceptions of distribution in contexts of error and natural variation. In M. Lovett & P. Shah (Eds.), *Thinking with data* (pp.149-176). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Mooney, E., Duni, D., VanMeenen, E. & Langrall, E. (2014). Preservice teachers' awareness of variability. In K. Makar, B. de Sousa, & R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS9, July, 2014), Flagstaff, Arizona, USA*. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.
- Moore, D. (1990). Uncertainty. In L. A. Steen (Ed.), *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy* (pp. 95-137). Washington, DC: National Academy Press.
- Petrosino, A. J., Lehrer, R. & Schauble, L. (2003). Structuring error and experimental variation as distribution in the fourth grade. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(2 & 3), 131-156.
- Reading C. (2004). "Student Description of Variation While Working with Weather Data". *Statistics Education Research Journal*, 3(2), 84-105.
- Sánchez, E., & Orta, A. (2013). Problemas de mediciones repetidas y de riesgo para desarrollar el razonamiento de estudiantes de secundaria en los temas de media y dispersión. *Números*, 83, 65-77.
- Secretaría de Educación Pública [SEP] (2011). *Programa de estudios. Guía de la educadora*. México: Secretaria de Educación Pública.
- Spangler D. (2014). Important ideas in statistics for children aged 4-8 years. In K. Makar, B. de Sousa, & R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS9, July, 2014), Flagstaff, Arizona, USA*. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.
- Watson, J.M. & Moritz, J.B. (2000). Developing concepts of sampling. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31, 44-70.
- Watson, J. M. & Kelly, B. A. (2004). Statistical variation in a chance setting: A two-year study. *Educational Studies in Mathematics*, 57, 121-144.
- Watson, J. M. (2006). *Statistical literacy at school: Growth and goals*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Wild, D. J. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223-265.