OBJETO MENTAL FRACCIÓN DE ALUMNOS DE SECUNDARIA CON PROBLEMAS DE ABSENTISMO ESCOLAR
MENTAL OBJECT FOR FRACTIONS OF MIDDLE SCHOOL STUDENTS WITH ABSENTEEISM PROBLEMS

Carlos Valenzuela García
CINVESTAV-IPN
carlosvalenzuela@cinvestav.mx

Olimpia Figueras
CINVESTAV-IPN
figuerao@cinvestav.mx

David Arnau Vera
Universitat de València
david.arnau@uv.es

Juan Gutiérrez-Soto
Universitat de València
juan.gutierrez-soto@uv.es

En este documento se describen características del objeto mental fracción de estudiantes, de 12 a 14 años de edad, de una secundaria pública, quienes tienen problemas de absentismo escolar y bajo rendimiento académico. Para ello, se diseñó un cuestionario como parte de un proyecto de investigación cuyo objetivo general es contribuir a la construcción de mejores objetos mentales fracción a través de una secuencia de enseñanza. El diseño de los ítems del cuestionario está estructurado de acuerdo con los resultados de una fenomenología didáctica de las fracciones y el contenido curricular propuesto para los últimos años de primaria. Los resultados indican que los alumnos tienen mayor éxito al responder cuestiones relacionadas con fenómenos de partición de figuras geométricas, mientras que tienen menor éxito para usar las fracciones en la recta numérica.

Palabras clave: Números Racionales, Educación Primaria, Cognición

Planteamiento del Problema y Objetivos

La enseñanza y el aprendizaje de las fracciones siguen siendo tema de interés en el campo de la investigación en matemática educativa, pese a la gran cantidad de estudios que ya se han hecho durante las últimas décadas. Algunas de las principales razones de esa preocupación se vinculan con el hecho de que las fracciones forman parte integral del curriculum matemático y porque de acuerdo con Siegler, Duncan, Davis-Kean et al. (2012) el conocimiento de esos números es uno de los predictores del desempeño en matemáticas de alumnos egresados de primaria hasta el bachillerato. Los resultados de investigaciones recientes versan sobre dificultades que los estudiantes siguen enfrentando cuando resuelven tareas o problemas que implican el uso de las fracciones (ver por ejemplo a Ni y Zhou, 2010 y Petit, Laird y Marsden, 2010) a pesar de los cambios que se han instrumentado en su enseñanza.

Por lo anterior se pretende contribuir a la construcción de un mejor objeto mental fracción de los estudiantes a partir de la educación básica. Los resultados que se exponen en este documento son de un estudio piloto hecho con el propósito de caracterizar el objeto mental fracción de los estudiantes con problemas de bajo desempeño escolar al finalizar la escuela primaria. El estudio piloto forma parte de una investigación más amplia y esos resultados se toman en consideración al estructurar un modelo de enseñanza con el cual se favorezcan procesos de construcción de mejores objetos mentales fracción de alumnos de ese tipo de comunidades.

Referente Teórico

Para el desarrollo de la investigación general se tomó como marco teórico y metodológico a los Modelos Teóricos Locales (MTLs) desarrollados por Filloy, Rojano, Puig y Rubio (1999), en donde el objeto de estudio es visto desde la interrelación de cuatro componentes que se construyen, el componente de competencia formal, el de enseñanza, el de cognición y el de comunicación.

Galindo, E., & Newton, J., (Eds.). (2017). *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

En esta parte del proyecto se pone énfasis en los resultados de la construcción de los componentes formal y de enseñanza, ya que esas conclusiones se usaron principalmente para diseñar los ítems del cuestionario aplicado. Los resultados de la construcción del componente formal sirven como referente teórico para considerar en el diseño distintos fenómenos en los cuales aparecen las fracciones, mientras que los resultados del componente de enseñanza permiten seleccionar los contenidos de las fracciones que se evalúan en el cuestionario.

Para la construcción del componente formal del MTL se realizó una fenomenología didáctica de las fracciones, tomando como base las ideas de Freudenthal (1983), Kieren (1976; 1988; 1992) y Behr, Harel, Post, y Lesh (1992). De acuerdo con Freudenthal (1983, pp. 28-33), hacer una fenomenología es describir un concepto en su relación con los fenómenos para los cuales es el medio de organización. Una fenomenología didáctica rica ayuda a proveer a los estudiantes de una amplia variedad de ejemplos de fenómenos para construir mejores objetos mentales, entendiendo a un objeto mental como el conjunto de ideas sobre un concepto matemático (el objeto pensado) que han elaborado los alumnos y que precede a la adquisición del concepto.

Para hacer la fenomenología didáctica de las fracciones se han considerado fenómenos de las fracciones que aparecen tanto en el lenguaje cotidiano, como en la propia matemática. Las fracciones en el lenguaje cotidiano se utilizan principalmente para describir o comparar cantidades, valores de magnitud, razones o procesos cíclicos o periódicos. Los aspectos de las fracciones que se distinguen son: la fracción como fracturador, como comparador, como operador, como medidora y como número racional, ver Figura 1.

La fracción como fracturador se refiere al proceso de producir fracciones (fracturar), por medio del cual se relacionan las partes con un todo. Esto podría surgir de hacer una partición para hacer un reparto equitativo, una distribución o simplemente dividir cantidades o magnitudes con o sin resto. En el proceso de producir fracciones a partir de la relación de un todo y sus partes, el todo puede ser discreto o continuo, definido o indefinido, estructurado o carente de estructura. La parte también tiene sus variantes, mismas que se detallan en la Figura 1.

Según Freudenthal (1983) las fracciones también surgen de una comparación, la cual puede ser directa o indirecta. Cuando la comparación es directa, es decir, los objetos que se comparan se consideran o piensan como si uno fuera parte del otro, entonces esto se reduce a la fracción como fracturador. En cambio, cuando un tercer objeto media entre los objetos que se comparan, entonces la comparación es indirecta. En este último caso se establece una relación razón entre los valores de magnitud o entre los propios objetos que se comparan. En el proceso de establecer la relación razón se utiliza la fracción como medidora, ya que se puede emplear una medida no convencional o convencional para determinar valores de magnitud y así establecer la relación razón entre ambos objetos. La fracción como medidora surge también en la medición de segmentos sobre la recta numérica o como un valor que precede a una unidad de medida. Es importante mencionar que para identificar las fracciones que preceden a una unidad de medida, en el proceso fue necesario usar las fracciones en su aspecto de operador fracturante.

Se puede distinguir otro aspecto de la fracción, la fracción como operador, considerado como el inverso del operador multiplicación, es decir, el operador fracción actúa en el puro dominio del número. Se extiende esta fenomenología a un ámbito más abstracto y formal de la matemática, donde se identifica a las fracciones como elementos de clases de equivalencias del campo de cocientes que define al conjunto de los números racionales y sus propiedades.

Una explicación complementaria de los diversos aspectos de las fracciones se encuentra en Valenzuela, Figueras, Arnau y Gutiérrez-Soto (2016).

Galindo, E., & Newton, J., (Eds.). (2017). *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

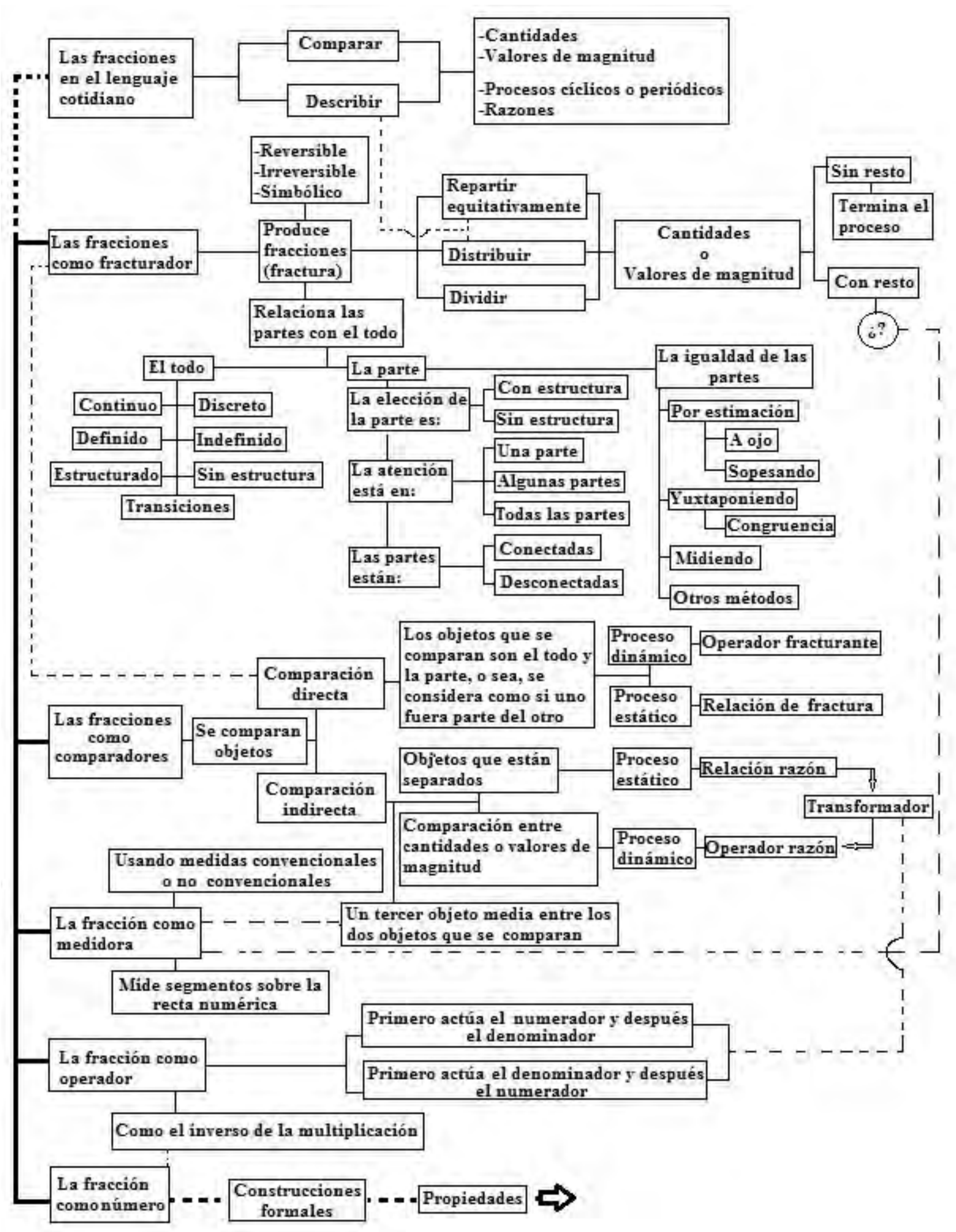

Figura 1. Usos y aspectos de las fracciones.

Galindo, E., & Newton, J., (Eds.). (2017). *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

Diseño del Cuestionario

El cuestionario tiene seis ítems. El ítem uno está compuesto por ocho incisos, en los que se muestra en una representación de una fracción usando figuras geométricas para que el alumno escriba de forma simbólica la fracción correspondiente. En este ítem la fracción aparece como fracturador, específicamente se debe establecer una relación de fractura.

- En los incisos (a) y (c) el todo es continuo, definido y estructurado. Las partes están conectadas, su igualdad se determina por congruencia de áreas y la elección de las partes (coloreadas) es contigua. El inciso (d) cumple con estas condiciones excepto que la elección de las partes (partes coloreadas) no es contigua. Como el todo aparece partido en partes iguales se dice que se establece una relación de fractura. En el inciso (a) el todo es un rectángulo y en los incisos (c) y (d) círculos representan el todo.
- En los incisos (b), (e), (f) y (h) el todo es continuo, definido y estructurado. Las partes están conectadas, pero se definen dos unidades fraccionarias, el alumno debe completar o imaginar una partición con una unidad fraccionaria menor, por lo que la fracción podría actuar como un operador fracturante. En el inciso (h) la congruencia de las partes no es fácil de identificar. En los incisos (b) y (h) el todo está representado por cuadrados y en los incisos (e) y (f) por círculos.
- La representación del inciso (g) puede generar una transición de un todo continuo a uno discreto o viceversa, lo que puede causar una fracción propia o impropia, depende de cómo se interprete al todo.

El ítem dos tiene cuatro incisos, en cada uno se muestra una figura geométrica para que el alumno represente una fracción dada. En este caso, como los alumnos son quienes hacen la partición, la fracción aparece como un operador fracturante.

En el ítem tres se presentan dos situaciones con dos incisos cada uno, en los que aparece un todo discreto (bolas de colores), definido y estructurado de acuerdo con el color de las bolas. En el inciso (a) de cada situación se debe identificar la relación de fractura, mientras que en los incisos (b) es necesario comparar la cantidad de bolas de un color con respecto a la del otro color, por lo que la fracción aparece como una relación razón.

Sobre la recta numérica se deben representar 10 fracciones, ya sea como punto o como segmentos sobre la recta numérica; esta tarea constituye el ítem cuatro. Cinco fracciones son propias y cinco impropias; todas son menores que tres. Se han propuesto fracciones con denominadores distintos para que el alumno haga distintas particiones "a ojo". En este ítem la fracción aparece como número en la recta numérica, pero también como medidora, se puede considerar como una unidad de medida de los segmentos sobre la recta numérica, que depende del número de partes entre las que se divide el segmento unidad, en este proceso la fracción aparece también como fracturador.

Para responder el ítem cinco los alumnos deben hacer una clasificación de fracciones propias e impropias, incisos (d) y (e) respectivamente. En los incisos (a) y (b) se piden dos ejemplos de fracciones ubicadas en un intervalo limitado por números enteros, (0,1) y (3,4) respectivamente, y en el inciso (c) el intervalo queda limitado por dos fracciones (7/8, 8/9).

El ítem seis corresponde a la resolución de un problema en el que aparecen distintos aspectos de las fracciones. En este caso la fracción se usa para describir una cantidad, como fracturador, comparador y como operador.

Población y Método

El estudio piloto se llevó a cabo con estudiantes de un instituto público de educación secundaria que se ubica en la ciudad de Valencia, España. 35 alumnos respondieron el cuestionario, 23 de ellos son de primer año y 12 de segundo, pero estos últimos asisten a un taller de regularización donde se trabajan contenidos matemáticos de primer curso. El rendimiento académico de todos los alumnos se considera bajo, de acuerdo con los criterios de evaluación que sigue el profesor de matemáticas. Además, los estudiantes tienen graves problemas de absentismo escolar.

El cuestionario se aplicó a los alumnos de primer grado de secundaria en dos sesiones de 45 minutos, los estudiantes de segundo grado lo resolvieron en una sesión. El cuestionario fue aplicado por el profesor del curso, se resolvió de manera individual y no se proporcionó ayuda.

Para realizar la caracterización de los objetos mentales de los estudiantes se han codificado las respuestas. Las correctas se han etiquetado con un 1 y las incorrectas con 0, en esta última categoría se han incluido aquellas respuestas que los estudiantes dejaron en blanco. Los resultados están organizados por cada ítem de acuerdo con las características del diseño, y también se organizan en una tabla de frecuencias en la cual se indica el porcentaje de éxito.

Resultados

Los resultados generales que se muestran en la Tabla 1 indican que los alumnos tienen mayor éxito al responder cuestiones que se relacionan con la representación simbólica de fracciones a partir de una representación gráfica, considerando modelos continuos y definidos (aspectos evaluados por medio del ítem 1). Los educandos tienen menor éxito para identificar fracciones entre dos números y clasificar fracciones como propias o impropias (aspectos evaluados mediante el ítem 5), así como para representar fracciones como puntos o segmentos en la recta numérica (aspectos evaluados a través del ítem 4). Se observa un descenso porcentual en cuanto al éxito obtenido que va del 58.21% en el ítem 1 hasta el 5.71% en el ítem 4.

Tabla 1: Resultados Globales por Ítem

Ítem 1	Ítem 2	Ítem 3	Ítem 4	Ítem 5	Ítem 6
163/280	54/140	48/140	20/350	16/175	19/140
58.21%	38.57%	34.29%	5.71%	9.14%	13.57%

Como se describió en el diseño del cuestionario, los ítems están formados por varios incisos, por esta razón varía el número de reactivos que se evalúan por ítem. Los resultados obtenidos para el ítem 1 se muestran en la Tabla 2. La información está organizada de acuerdo con las características del aspecto de la fracción como fracturador que se consideraron en el diseño del cuestionario.

Tabla 2: Resultados del Ítem Uno

<table>
<tr><td colspan="8">Representación simbólica de fracciones a partir de una representación gráfica
(Modelos continuos)</td></tr>
<tr><td colspan="7">Fracciones propias</td><td>Fracciones impropias</td></tr>
<tr><td colspan="3">Una unidad fraccionaria</td><td colspan="4">Dos unidades fraccionarias</td><td>Una unidad fraccionaria</td></tr>
<tr><td colspan="2">Elección de las partes contiguas</td><td>Elección de las partes no contiguas</td><td colspan="4">Elección de las partes contiguas</td><td>Elección de las partes contiguas</td></tr>
<tr><td>a)</td><td>c)</td><td>d)</td><td>b)</td><td>e)</td><td>f)</td><td>h)</td><td>g)</td></tr>
<tr><td>27/35</td><td>30/35</td><td>26/35</td><td>20/35</td><td>17/35</td><td>10/35</td><td>14/35</td><td>19/35</td></tr>
<tr><td>77.14%</td><td>85.71%</td><td>74.29%</td><td>57.14%</td><td>48.57%</td><td>28.57%</td><td>40.00%</td><td>54.29%</td></tr>
</table>

Los resultados indican que los alumnos tienen mayor éxito para establecer una relación de fractura en modelos continuos donde la partición tiene solo una unidad fraccionaria (incisos a, c y d),

Galindo, E., & Newton, J., (Eds.). (2017). *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

principalmente cuando se utilizan círculos (inciso c). Esto indica que el objeto mental de los estudiantes está más relacionado con este tipo de fenómenos, pero cuando se presentan fenómenos de partición donde hay dos unidades fraccionarias (incisos b, e, f y h) el porcentaje de éxito de respuestas correctas disminuye. Un error común que cometieron los estudiantes al responder el inciso (f) que evalúa este aspecto, está relacionado con el conteo de partes sin tener en cuenta la congruencia del área de las partes. Un ejemplo se muestra en la Figura 2.

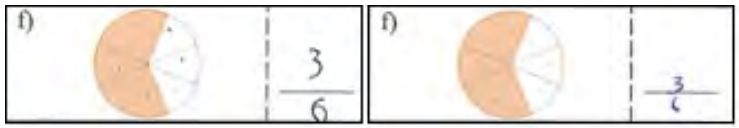

Figura 2. Respuestas de dos alumnos donde se desatiende la congruencia de las partes.

En la Figura 2 se observa el rastro de puntos que dejaron los estudiantes con el bolígrafo, lo que indica el conteo de las partes sin tomar en cuenta la congruencia. Otro error cometido al responder este inciso es el cambio de numerador por el denominador al momento de establecer la relación de fractura.

En la Tabla 1 se observa un descenso porcentual entre el ítem uno y el ítem dos de aproximadamente el 20% de éxito en las respuestas dadas por los alumnos. Esto indica que los fenómenos donde se usa la fracción como un operador fracturante requieren ser considerados en la enseñanza, particularmente cuando se tiene que representar una fracción impropia y se usan figuras geométricas menos usuales. Esto ayudaría a construir un mejor objeto mental fracción.

Los modelos discretos donde se usa la fracción como fracturador y como comparador, específicamente como una relación razón, fueron evaluados en el ítem tres y sus resultados se muestran en la Tabla 3. Con respecto a los ítems anteriores también se observa un descenso porcentual en el número de respuestas correctas. Se afirma que el objeto mental de los estudiantes está vinculado con los fenómenos donde se relaciona la parte con el todo, tanto en modelos continuos como discretos. Sin embargo, se requiere proponer para la enseñanza, más problemas donde la fracción actúe como comparador, ya que para resolver problemas relacionados con este tipo de fenómenos hay un porcentaje de éxito bajo.

Tabla 3: Resultados del Ítem Tres

Representación simbólica de fracciones a partir de una representación gráfica (modelos discretos)			
Distractor: estructurada respecto al tamaño (caja 1)		Distractor: no estructurada respecto al tamaño (caja 2)	
Fracturador	Comparador	Fracturador	Comparador
a)	b)	c)	d)
21/35	4/35	21/35	2/35
60.00%	11.43%	60.00%	5.71%

Representar fracciones en la recta numérica fue el ítem con menos éxito, ya que sólo 20 de 350 posibles respuestas fueron correctas. Las fracciones que se tenían que representar se muestran en la tercera fila de la Tabla 4.

La fracción 7/3 es la que pudieron representar correctamente más estudiantes, después 1/4 y 6/5. El hecho de que nadie haya representado correctamente la fracción 4/8 permite suponer que el objeto mental de los alumnos no les permite reconocer la equivalencia entre fracciones, porque incluso ningún alumno identificó que 2/12 y 1/6 son equivalentes.

Galindo, E., & Newton, J., (Eds.). (2017). *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

Tabla 4: Resultados del Ítem Cuatro

Representación de fracciones en la recta numérica									
Fracciones propias					Fracciones impropias				
2/12	4/8	2/10	1/4	1/6	6/5	7/3	5/2	8/7	12/9
1/35	0/35	2/35	3/35	1/35	3/35	4/35	2/35	2/35	2/35
2.86%	0%	5.71%	8.57%	2.86%	8.57%	11.43%	5.71%	5.71%	5.71%

Uno de los errores comunes al resolver este ítem, se refiere al hecho de ubicar las fracciones en la recta numérica teniendo en cuenta solo el valor del numerador de la fracción pero sin hacer explícita una partición del segmento de recta, tal como se muestra en la Figura 3.

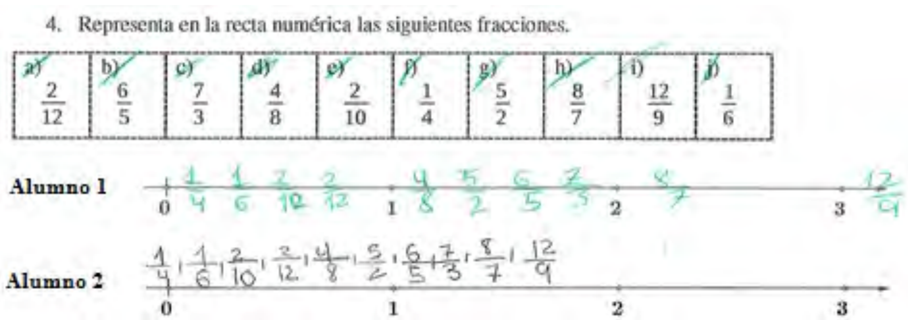

Figura 3. Representación de fracciones en la recta numérica.

Otro de los ítems de la prueba con menor porcentaje de éxito es el 5. En éste se evalúa la identificación de fracciones entre dos números enteros y entre dos fracciones, así como la clasificación de fracciones propias e impropias. Los resultados de esta evaluación permiten afirmar que los alumnos no reconocen características de las fracciones propias e impropias tomando en cuenta su relación con la unidad o la comparación entre numerador y denominador.

Los resultados de la evaluación del último ítem resultan de interés, ya que permiten confirmar que la resolución de problemas con datos numéricos en forma de fracción es otro tema en el cual los estudiantes tienen mayor dificultad.

De los resultados de los ítems propuestos en la prueba se puede afirmar que el objeto mental fracción de los estudiantes está vinculados principalmente con:

- Fenómenos de partición en donde el área de una figura geométrica, considerada como un todo continuo, definido y estructurado es dividido en partes iguales para establecer una relación de fractura, donde la igualdad de las partes se determina por congruencia de áreas. Pero cuando hay dos unidades fraccionarias los alumnos enfrentan dificultades.
- Otros fenómenos menos usuales pero que también se manifiestan se refieren a la división de un todo discreto para establecer una relación de fractura.
- Fenómenos de partición de un todo continuo y definido, donde la fracción actúa como operador fracturante, la elección de las partes es contigua y su igualdad se estima a ojo. Cuando hay variaciones en la estructura del todo los estudiantes enfrentan dificultades.

Conclusiones

Los resultados generales del test previenen que los estudiantes que participaron en la aplicación del cuestionario tienen un objeto mental fracción limitado, por lo que se requiere ofrecer una gama de actividades que promuevan la construcción de mejores objetos mentales, partiendo de fenómenos relacionados con los diferentes usos y aspectos de las fracciones que se ilustran en la Figura 1, y no

Galindo, E., & Newton, J., (Eds.). (2017). *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

limitarse a uno solo de sus aspectos durante la enseñanza de las fracciones. Ya que se hace notar que los estudiantes no transfieren de manera natural los conocimientos que tienen sobre un determinado aspecto de la fracción a otro. Por ejemplo, de fenómenos de partición donde se emplean modelos continuos como círculos o rectángulos no pueden pasar a una partición de segmentos en la recta para ubicar fracciones.

Aunado a lo anterior, se considera importante proponer actividades donde se aprovechen cada una de las particularidades que se detallan en el espécimen de fenomenología didáctica esbozado en este documento. Ya que a pesar de que los alumnos tienen objetos mentales sólidos relacionados con la fracción como fracturador, cuando se varía un poco para tomar en cuenta algunas particularidades, se observa que los estudiantes enfrentan dificultades. Respecto a los aspectos de la fracción como comparador, medidora, operador y número racional que se evaluaron en la prueba, los estudiantes mostraron un uso restringido de su conocimiento.

Los resultados también confirman que pese a que en el currículo de los últimos años de la educación primaria se propone explícitamente el estudio de las fracciones utilizando la recta numérica como recurso didáctico, así como el estudio de las características de las fracciones propias e impropias, los alumnos tienen poco éxito para resolver este tipo de tareas. Este resultado se atribuye al hecho de que estos aprendices han sido instruidos principalmente bajo el uso del modelo de áreas, ya que a pesar de que son alumnos de bajo rendimiento académico, mostraron tener conocimientos sólidos para representar fracciones propias cuando se usa dicho modelo, principalmente cuando se usan círculos o rectángulos.

Referencias

Behr, M., Harel, G., Post, T., y Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 296-333). New York: Macmillan Publishing. M. Recuperado de http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/92_1.html#top

Filloy, E., Rojano, T. Puig, L. y Rubio, G. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México, DF: Grupo Editorial Iberoamérica.

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundation of rational numbers. En R. A. Lesh, y D.A. Bradbar (Eds.), *Number and measurement, Papers from a Reseach Workshop* (pp 101-144). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Kieren, T. E. (1988). Personal Knowledge of Rational Numbers: Its Intuitive and Formal Development. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operationd in the Middle Grades* (pp. 162-181). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieren, T. E. (1992). Rational and Fractional Numbers: From Quotient Fields to Recursive Understanding. En T. P. Carpenter, E. Fennema, y Romberg T. A., (Eds.), *Rational Numbers. An Integration of Research* (pp. 49-84). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Ni, Y. y Zhou, Y-D. (2010). Teaching and learning fraction and rational numbers: the origins and implications of whole number bias. *Educ. Psychol*. 40, 27–52.

Petit, M., Laird, R., y Marsden, E. (2010). *A Focus on Fractions: Bringing Research to the Classroom*. New York: Routledge-Taylor Francis Group.

Siegler, S., Duncan, J., Davis-Kean, E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., *et al*. (2012) Early predictors of high school mathematics achievement. *Journal of the Association for Psychological Science*, *23*(7), 691-697.

Valenzuela, C., Figueras, O., Arnau, D. y Gutiérrez-Soto, J. (2016). Hacia un modelo de enseñanza para las fracciones basado en el uso de applets. Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 5(2), 1-20.

In this paper characterizations of mental objects for fractions of middle school students (from 12 to 14 years old) with absenteeism problems and low academic performance, are described. A test was designed as part of a research whose general purpose is to contribute in the building up of better *mental objects for fractions through a teaching sequence. Items for the test were structured according to the results of a didactic phenomenology of fractions and the curricular content proposed for the last years of elementary school. Results indicate that students have a greater success in issues related to continuous model partitions phenomena, whereas they are less successful using fractions on the number line. Students cannot transfer their knowledge from an area model to a linear model to identify or represent fractions.*

Keywords: Rational Numbers, Elementary School Education, Cognition

Problem Approach and Research Objectives

Teaching and learning of fractions continue to be a subject of interest within mathematics education research. The main reasons behind this concern are that fractions are an integral part of mathematics' curriculum, and according to Siegler, Duncan, Davis-Kean et al. (2012), fractions' knowledge has been characterized as one of the predictors of students' mathematics performance from secondary to higher education. Other research findings show difficulties that students face when solving tasks or problems involving the use of fractions (e.g., Ni & Zhou, 2010; Petit, Laird & Marsden, 2010) even though changes have been made in their teaching.

With this research, we want to contribute to the building up of a better mental object for fractions of students from primary education. The results presented in this document are from a pilot study done with the purpose of characterizing the mental object for fractions of students with low performance at the end of primary school. The pilot study is part of a broader research and these results are taken into account when structuring a teaching model that favor processes to constitute better mental objects for fractions of this type of students.

Theoretical Framework

For the development of the general research, Local Theoretical Models (LTMs) developed by Filloy, Rojano, Puig & Rubio (1999) were used as a theoretical and methodological framework. From the theoretical point of view, the LTMs serve to focus on the object of study through four interrelated components: formal competence models, teaching models, models for cognitive processes, and models of communication.

In this part of the research project, the emphasis is put on the results of the construction of the formal and the teaching models components. These results were mainly used to design the items that were evaluated in the test. Results of the building up of the formal component serve as a theoretical reference in designing the test in order to evaluate tasks related to different phenomena where fractions appear. Results of the teaching component construction enable the choice of specific fractions' contents evaluated in the test.

For the construction of the formal component of the LTM a didactic phenomenology of fractions was made, based on ideas of Freudenthal (1983), Kieren (1976; 1988; 1992) and Behr, Harel, Post & Lesh (1992). According to Freudenthal (1983, pp. 28-33), to make a phenomenology is to describe a concept in its relation to the phenomena for which it is a means of organization. A rich didactic phenomenology helps to provide students with a wide variety of examples of phenomena to constitute better mental objects, understanding a mental object as the set of ideas about a mathematical concept (the thought object) that the students have elaborated and which precedes concept attainment.

To carry out the didactic phenomenology of the fractions, phenomena that appear both in everyday language and in mathematics itself were considered. Fractions in everyday language are mainly used to describe or compare quantities, magnitude, ratios, and cyclic or periodic processes. Other aspects distinguished are: fraction as a fracturer, fraction as a comparer, fraction as an operator; fraction as a measurer, and fraction as a rational number, see Figure 1.

Galindo, E., & Newton, J., (Eds.). (2017). *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

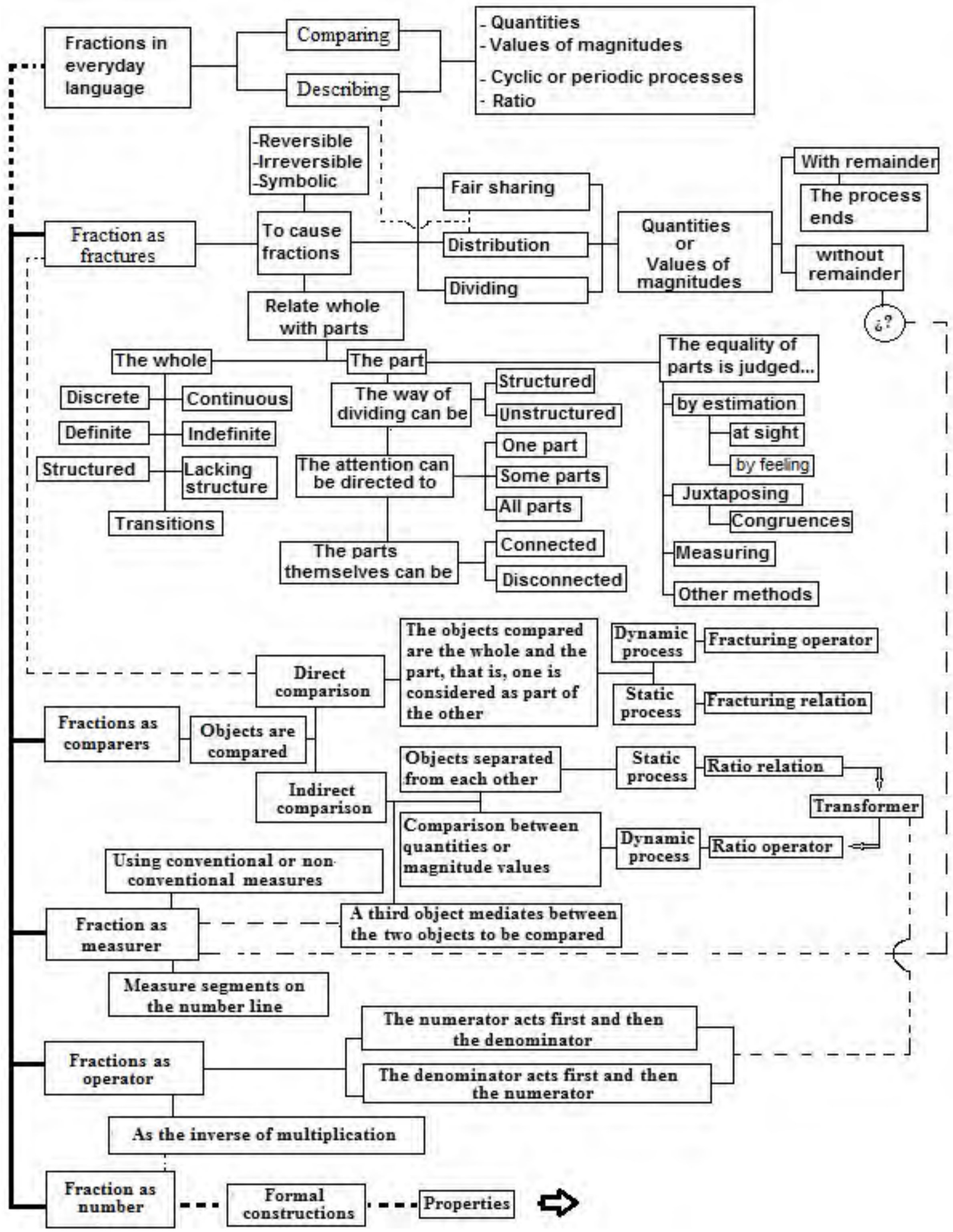

Figure 1. Uses and aspects of fractions.

Fraction as a fracturer refers to the process of producing fractions (fracturing), through which parts are related with a whole. This could arise from making a partition to make a fair sharing, a distribution or simply dividing quantities or values of magnitude with or without remainder. In the process of producing fractions in order to relate a whole with its parts, the whole can be discrete or continuous, definite or indefinite, structured or without structure. Parts also have its variants, which are detailed in Figure 1.

According to Freudenthal (1983) fractions also arise from a comparison, which may be direct or indirect. The comparison is direct when the objects being compared are considered or thought as one part of the other, in this case, the comparison is reduced to the aspect of fractions as a fracturer. In contrast, when a third object mediates between the objects being compared, an indirect comparison is carried out. In the latter case, a ratio relation between the values of magnitude or the objects that are being compared is established.

In the process of establishing the ratio relation, fractions are used as a measurer, because an unconventional or conventional measure can be used to determine magnitude values and establish the ratio relation between both objects. The fraction as measurer also arises in the measurement of segments on the number line or as a value that precedes a unit of measurement. It is important to mention that in order to identify the fractions that precede a magnitude value, in the process, it was necessary to use other aspects of fractions, for example as fracturing operator.

Another aspect of fractions can be distinguished: fraction as an operator. This aspect can be used as a fracturing operator, a ratio operator, and as a fraction operator. The last aspect is considered as the inverse of the multiplication operator, i.e, the fraction operator acts in the number's domain. This phenomenology can be extended to a more abstract and formal area of mathematics, where fractions are identified as elements of equivalence classes of the quotient field that defines the set of rational numbers and their properties.

A complementary explanation of the various aspects of fractions can be find in Valenzuela, Figueras, Arnau & Gutiérrez-Soto (2016).

Test Design

The test has six items. Item one has eight subsections. In each one a representation of a fraction is shown on a geometric figure in order that students write the corresponding fraction in a symbolic form. In this item the fraction appears as a fracturer, specifically, a fracturing relation must be established.

- In subsections (a) and (c) the whole is continuous, defined and structured. Parts are connected, their equality is determined by congruence of areas and the choice of the parts is contiguous. Subsection (d) has these characteristics except that the choice of parts (colored parts) is not contiguous. As the whole appears fractured in equal parts, a fracturing relation must be established. In subsection (a) a rectangle is use to represent the whole and in subsections (c) and (d) circles are chosen as wholes.
- Subsections (b), (e), (f) and (h) contain a continuous, defined, and structured whole. Parts are connected, but two fractional units are defined. Students must partition the whole or imagine a partition with only one fractional unit, so the fraction could act as a fracturing operator. In subsection (h) congruence of parts is not easy to identify. In subsections (b) and (h) squares represent wholes, and in subsections (e) and (f) circles are wholes.
- The graphical representation in subsection (g) can generate a transition from a continuous whole to a discrete one or vice versa, which can cause a proper or an improper fraction, depending on how the student interprets the whole.

Galindo, E., & Newton, J., (Eds.). (2017). *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

The second item consists of four subsections. In each one, a geometric figure is shown so that students represent a given fraction. In this case, students produce a partition of the whole; for this reason, the fraction appears as a fracturing operator.

Two situations with two subsections are presented in item three, where a discrete whole (colored balls), defined, and structured according to the balls' colors is represented. In subsection (a) of each situation, the fracturing relation must be identified, while in subsection (b) it is necessary to compare the number of balls of one color with the number of balls of the other color, so that the fraction appears as comparer, specifically to identify a ratio relation.

In item four, ten fractions should be represented as a point or as segments on the number line. Five are proper fraction and the rest improper fractions. All of the fractions are less than three. Fractions with different denominators have been proposed to students to make different partitions "at sight". In this item, the fraction appears as a number on the number line, but also as a measure. It can be considered as a unit of measure of the number line segments that depends on the number of parts in which the unit segment is divided. In this process, the fraction also appears as a fracturing operator.

To answer the item five, students must make a classification of proper and improper fractions, subsection (d) and (e), respectively. In subsections (a) and (b), two examples of fractions in an interval limited by integers, (0, 1) and (3, 4) respectively, are requested, and in subsection (c) the interval is limited by two fractions (7/8, 8/9).

Item six is a problem in which different aspects of fractions appear. In this case, fractions are used to describe an amount, as a fracturer, a comparer, and as operator.

Setting and Participants

The pilot study was carried out with middle school students in Valencia, Spain. 35 students answered the test, 23 of them were studying in seventh grade, and 12 in eighth grade. The latter attended a remedial workshop where they worked on seventh grade mathematical contents. According to the evaluation criteria followed by the mathematics teacher, the academic performance of all students was considered low. The students had serious truancy problems.

The questionnaire was applied in two sessions of 45 minutes for students in seventh grade. The eighth grade students completed the test in one session. The mathematics teacher applied the test and the students solved it individually; no help was provided.

To characterize the mental objects for fractions that students had, answers were codified, using "1" for correct ones, and "0" for incorrect ones. In this last category, answers left blank were included. Results were organized by each item according to the characteristics of the design and are also in a table of frequencies that indicates the percentage of success.

Results

The general results showed in Table 1 indicate that students are more successful when answering items related to the symbolic representation of fractions, from a graphical representation, considering continuous and defined models, for example, the area model. These results show that students can establish a fracturing relation when working with this kind of representations. Students are less successful in identifying fractions between two numbers and classify fractions as proper or improper (aspects evaluated in item 5), as well as to represent fractions as points on the number line (aspects evaluated through item 4). There is a decreasing percentage of the success obtained that goes from 58.21% in item 1 to 5.71% in item 4.

Table 1: General Results by Item

Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6
163/280	54/140	48/140	20/350	16/175	19/140
58.21%	38.57%	34.29%	5.71%	9.14%	13.57%

As described in the design of the questionnaire, test items consist of several subsections; for this reason, the number of answers evaluated per item varies. The results obtained for item 1 are shown in Table 2. The information is organized according to the characteristics of fractions as fracturer considered in the design of the test.

Table 2: Results of Item 1

Symbolic representation of fractions from a graphical representation (Continuous models)							
Proper fractions							Improper fractions
Defined Partition			Partially defined partition				Undefined partition
Choice of contiguous parts		Choice of no contiguous parts	Choice of contiguous parts				Choice of contiguous parts
a)	c)	d)	b)	e)	f)	h)	g)
27/35	30/35	26/35	20/35	17/35	10/35	14/35	19/35
77.14%	85.71%	74.29%	57.14%	48.57%	28.57%	40.0%	54.29%

Results reveal that students are more successful in establishing a fracturing relation in continuous models where the partition is defined (subsections a, c, and d), mainly when circles are used (subsection c). This indicates that the mental object that students have is related to this type of phenomena; but, when there are partition phenomena where the fractional unit is not completely defined (sections b, e, f, and h), the success of correct answers percentage decreases especially when two different fractional units are shown. A common mistake that students made when responding to subsection (f) is related to the counting of parts and to disregard the congruence of the area of the parts. An example of this is in Figure 2.

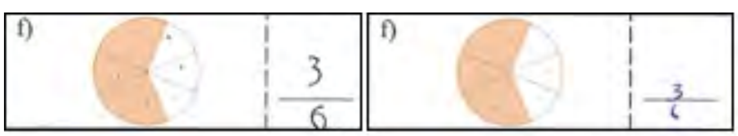

Figure 2. Answers from two students where the congruence of the parts is disregarded.

Figure 2 shows the trace of points that the students left with a pen, which indicates the counting of the parts carried out without considering the congruence of parts area. Another mistake that appears in this subsection is the change of the numerator by the denominator when establishing the fracturing relation.

There is a percentage decrease between items 1 and 2 of approximately 20% of success in the students' answers (see Table 1). The prior indicates that the tasks where the fraction is used as a fracturing operator need to be favored, in particular when an improper fraction has to be represented and when working with less common geometric figures, which would help to constitute a better mental object of the fraction.

Galindo, E., & Newton, J., (Eds.). (2017). *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.

The discrete models where the aspects of fractions as fracturer and comparator, specifically as a ratio relation, were evaluated in item 3 (see results in Table 3). In the previous items it is also observed a percentage decrease on the number of correct answers. Despite that the mental object students have is related to the phenomena where they establish a fracturing relation, in both, continuous and discrete models; however, it is necessary to propose more tasks for teaching, where the fraction acts as a comparator to solve problems related to this type of phenomena since there is a very low success rate of answers.

Table 3: Results of Item 3

Symbolic representation of fractions from a graphical representation (discrete models)			
Distractor: structured with respect to size of balls (box 1)		Distractor: non-structured with respect to size of balls (box 2)	
Fracturer	Comparator	Fracturer	Comparator
a)	b)	c)	d)
21/35	4/35	21/35	2/35
60.00%	11.43%	60.00%	5.71%

Representing fractions in the number line was the least successful item in the test since only 20 out of 350 possible answers were correct. The fractions to be represented are shown in the third row of Table 4. The fraction 7/3 was correctly represented by more students, then 1/4 and 6/5. The fact that no students had correctly represented fraction 4/8 allows supposing that the mental object students have does not allow them to recognize the fractions equivalence because no students identified that 2/12 and 1/6 are equivalent.

Table 4: Results of Item 4

Representation of fractions on the number line									
Proper fractions					Improper fractions				
2/12	4/8	2/10	1/4	1/6	6/5	7/3	5/2	8/7	12/9
1/35	0/35	2/35	3/35	1/35	3/35	4/35	2/35	2/35	2/35
2.86%	0%	5.71%	8.57%	2.86%	8.57%	11.43%	5.71%	5.71%	5.71%

One of the common errors in solving item 4, was locating the fractions in the number line taking into account only the numerator value of the fraction, but without making a partition of the line segment, as shown in Figure 3.

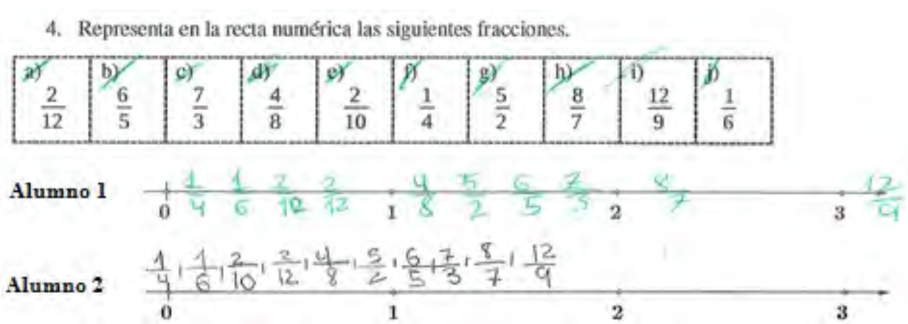

Figure 3. Representation of fractions on the number line.

One of the other items with a lower percentage of success is item 5. The identification of fractions between two integers and two fractions, as well as the classification of proper and improper fractions, were evaluated. The results allow affirming that the students did not recognize characteristics of the proper and improper fractions taking into account their relation to the unit or the comparison between the numerator and denominator of the fraction.

The results of the last item's evaluation are interesting, those allow us confirming that the solving problem with numerical data in fraction form is another subject where students have greater difficulty since only 19 out of 140 possible answers were correct.

From the results of the items proposed in the test, it can be affirmed that the mental object fraction that students have is linked mainly to:

- Partition phenomena in which the area of a geometric figure, considered as a continuous, defined and structured whole, is divided into equal parts in order to establish a fracturing relation, and the equality of the parts is estimated by the congruence of areas. But, when the partition is not defined the students face difficulties.
- Other less usual but also manifest phenomena refer to the division of a discrete whole in order to establish a fracturing relation.
- Partition phenomena of a continuous and defined whole, where the fraction acts as a fracturing operator, the choice of the parts is contiguous and their equality is estimated "at sight". But, when there are variations in the structure or form of the whole, students face difficulties.

Conclusions

Students who participated in the test application have limited mental objects for fraction. It is necessary to offer a range of activities that will promote the construction of a better mental object; starting from phenomena related to different uses and aspects of the fractions illustrated in Figure 1, and not limited to only one of its aspects during the teaching of fractions. It is noted that students do not naturally transfer their knowledge about one particular aspect of the fraction to another one. For example, students' knowledge to solving problems related to partition phenomena where continuous models as circles or rectangles were used, do not use to make a segments partition on the number line in order to represent fractions.

In addition, it is considered important to propose activities that take advantage of each of the particularities that are detailed in the specimen of didactic phenomenology outlined in this paper. Although students showed solid mental objects related to the fraction as fracturer, it was observed that the students faced difficulties when the aspect of fracture takes account its particularities. Regarding the aspects of the fraction as comparator, measurer, operator, and rational numbers that were evaluated in the test, the students showed a very restricted use of knowledge.

The results also confirm that, although in the last years of elementary school curriculum it is explicitly proposed the study of fractions using the number line as a didactical resource, as well as the study of the characteristics of the proper and improper fractions, the students faced difficulties to solve these types of task. In fact, they did not show knowledge about it at all. This result is attributed to the fact that students have been instructed mainly under the use of the model area as a didactical resource. Although these students had low academic performance, they showed solid knowledge to represent their proper fractions when using this model, mainly when circles or rectangles were used.

References

Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 296-333). New York: Macmillan Publishing. M.

Filloy, E., Rojano, T. Puig, L. & Rubio, G. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México, DF: Grupo Editorial Iberoamérica.
Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company.
Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundation of rational numbers. In R. A. Lesh, & D.A. Bradbar (Eds.), *Number and measurement, Papers from a Reseach Workshop* (pp 101-144). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.
Kieren, T. E. (1988). Personal Knowledge of Rational Numbers: Its Intuitive and Formal Development. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 162-181). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates.
Kieren, T. E. (1992). Rational and Fractional Numbers: From Quotient Fields to Recursive Understanding. In T. P. Carpenter, E. Fennema, y Romberg T. A., (Eds.), *Rational Numbers. An Integration of Research* (pp. 49-84). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
Ni, Y. & Zhou, Y-D. (2010). Teaching and learning fraction and rational numbers: the origins and implications of whole number bias. *Educ. Psychol*. 40, 27–52.
Petit, M., Laird, R., & Marsden, E. (2010). *A Focus on Fractions: Bringing Research to the Classroom*. New York: Routledge-Taylor Francis Group.
Siegler, S., Duncan, J., Davis-Kean, E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., *et al*. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. *Journal of the Association for Psychological Science*, *23*(7), 691-697.
Valenzuela, C., Figueras, O., Arnau, D. & Gutiérrez-Soto, J. (2016). Hacia un modelo de enseñanza para las fracciones basado en el uso de applets. Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 5(2), 1-20.

Galindo, E., & Newton, J., (Eds.). (2017). *Proceedings of the 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Indianapolis, IN: Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.