DOCUMENT RESUME

ED 209 101 SE 035 825

TITLE	Ideas for Strengthening Mathematics Skills. Greek Edition.
INSTITUTION	New York State Education Dept., Albany. Bureau of Bilingual Education.
SPONS AGENCY	Bureau of Elementary and Secondary Education (DHEW/OE), Washington, D.C.
PUB DATE	80
NOTE	51p.: For related documents, see SE 035 820-824.
LANGUAGE	Greek
EDRS PRICE	MF01/PC03 Plus Postage.
DESCRIPTORS	Algorithms; *Basic Skills; Calculators; *Computation; Educational Games; Elementary School Mathematics; Elementary Secondary Education; Learning Theories; Mathematical Applications; *Mathematics Education; *Mathematics Instruction; Mathematics Materials; Remedial Mathematics; Secondary School Mathematics; Student Motivation; Teacher Developed Materials; Teaching Guides; *Teaching Methods
IDENTIFIERS	*Number Operations

ABSTRACT

Presented is an overview of some specific schemes that have been used successfully by teachers throughout New York State to strengthen basic mathematics skills. Components offer ideas that have been successful with primary, intermediate and secondary students. The contents of this Greek language edition are identical to the English language and other foreign language editions. In addition to the Foreword, there are sections on: (1) Some Brief Observations About Strengthening Mathematics Skills; (2) The Balanced Mathematics Program; (3) "Par"--Puzzles+Arithmetic=Remediation; (4) Regrouping in Subtraction; (5) Money Games; (6) A Visual Sequence for Teaching Fractions; (7) A Space to Carry in Simple Addition and Multiplication Examples; (8) Grid Paper Computation; (9) The Need for Math Reading Skills; (10) A Structural Approach to Multiplication; (11) The Electronic Calculator in Remedial Mathematics; (12) Nature's Mathematics; and (13) Additional Teacher Designed Ideas. (MP)

(Greek Edition)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΙΔΕΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΝΙΣΧΥΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΠΙΔΕΞΙΟΤΗΤΩΝ

Ideas For Strengthening Mathematics Skills

The University of the State of New York
THE STATE EDUCATION DEPARTMENT
Bureau of Bilingual Education
Albany, New York
1980

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΙΔΕΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΝΙΣΧΥΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΠΙΔΕΞΙΟΤΗΤΩΝ

Γιά άντύγραφα αύτῆς τῆς ἐργασίας, πού εἶναι διαθέσιμα σέ περιορισμένο ἀριθμό, ἀπευθυνθῆτε στό:

The University of the State of New York
THE STATE EDUCATION DEPARTMENT
Bureau of Bilingual Education
Albany, New York
1980

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Μέ όλη τή δημοσιότητα τελευταία γιά τό έκπαιδευτικό θέμα τής "έπιστροφής στά βασικά", δέν είναι καθόλου έκπληκτικό ότι οί έκπαιδευτικοί ψάχνουν συνεχώς γιά ιδέες πού θά ένισχύσουν τή διδασκαλία τοῦ όλικοῦ προγράμματος. Τέτοιου είδους ύλη δέν ίσχυρίζεται ότι ύποδεικνύει στούς δασκάλους μεθόδους πού θά τούς έπιτρέψουν νά κάνουν μιά βαθειά καί λεπτομερή διάγνωση αύτοῦ τοῦ θέματος, ούτε ότι είναι μιά μαγική καί άναμφισβήτητη λύση τών προβλημάτων αύτοῦ τοῦ έκπαιδευτικοῦ τομέα. Ό σκοπός λοιπόν τής παρούσης δημοσιεύσης είναι νά συνοψίσει μερικά συγκεκριμένα έπιχειρήματα πού έχουν χρησιμοποιηθεῖ έπιτυχώς άπό διάφορους δασκάλους στήν Πολιτεία τής Νέας Ύόρκης, γιά νά ένισχύσουν τίς μαθηματικές έπιδεξιότητες τών μαθητών. Τά διάφορα μέρη αύτής τής δημοσίευσης προσφέρουν ιδέες πού είχαν έπιτυχία μέ μαθητές άπό διαφορετικά έπίπεδα έκπαίδευσης, όπως στοιχειώδους καί μέσης έκπαίδευσης. Ό άναγνώστης λοιπόν ένθαρρύνεται νά άναθεωρήσει όλα τά συστατικά μέρη αύτοῦ τοῦ βιβλίου, άντιλαμβανόμενος όμως ότι τό κάθε μέρος προτείνει μιά ιδέα ή όποία έάν δέν έφαρμόζεται όπως είναι γραμμένη, μπορεῖ νά μετατραπεῖ άνάλογα μέ τήν περίπτωση στήν όποία θά χρησιμοποιηθεῖ.

Ἡ παρούσα δημοσίευση είναι ή μαζική προσπάθεια τών Γραφείων τής Μαθηματικής Έκπαίδευσης καί τής Δίγλωσσης Έκπαίδευσης. Είχε δέ χρηματοδοτηθεῖ άπό τό Πρόγραμμα Χρηματοδότησης Τίτλου VII τής Στοιχειώδους καί Μέσης Έκπαίδευσης τής Νομοθετικής Πράξης τοῦ 1965. Οί γνώμες όμως οί όποίες έχουν έκφρασθεῖ έδώ δέν άντιπροσωπεύουν άναγκαστικά ούτε τήν έκπαιδευτική τοποθέτηση ούτε τήν πολιτική τοῦ Ύπουργείου Παιδείας τών Ήνωμένων Πολιτειών. Έπιπλέον, αύτή ή ύλη είχε συγκεντρωθεῖ άπό διάφορους έκπαιδευτικούς Μαθηματικών τής Πολιτείας τής Νέας Ύόρκης, άπό τήν Lynn A. Richbart, Έκτακτη Έκπαιδευτικό Μαθηματικής Έκπαίδευσης, καί τήν Louise Lutz, Συντονίστρια Μαθηματικών τοῦ Προγράμματος Τίτλου I, γιά τήν πόλη Syracuse. Τό πρότυπο είχε άναπτυχθεῖ άπό τήν Δρ. Lutz, ύπό τήν έπιμέλεια τών Lynn A. Richbart καί Aaron L. Buchman, Έκτάκτων Έκπαιδευτικών Μαθηματικής Έκπαίδευσης. Ή τελική έπιμέλεια καί προπαρασκευή τοῦ άγγλικοῦ χειρόγραφου γιά έκτύπωση έγινε άπό τό Γραφεῖο Γενικής Έκπαίδευσης γιά τήν Άξιοποίηση Άκαδημαϊκών Προγραμμάτων.

Έκτός άπό τούς προαναφερόμενους, ή ύλη άνεπτύχθει καί άπό τούς έξής:

Thomas Huestis, Thomas Franklin, Larry Martinez -
Niagara Falls School District
Deborah Maxwell, John Bonura - Syracuse School District
Frank Broadbent - Syracuse University
Jean C. Buhrig - Holmes School, New York City

Ruth Renkens, N.J. Michaels, Ellen Malone - Rochester School District
Marlene Siegel - James Monroe High School, New York City
William E. Schall - State University of New York, College at Fredonia.

Ἐκτός τῆς Ἀγγλικῆς καί τῆς Ἑλληνικῆς μετάφρασης αὐτοῦ τοῦ κειμένου, σύντομα θά εἶναι διαθέσιμες καί ἐκδόσεις στήν Κρεολική, Ἰταλική καί Ἰσπανική γλώσσα.

Ἡ ἔκδοση στήν ἑλληνική τῶν Ἰδεῶν γιά τήν Ἐνίσχυση Μαθηματικῶν Ἐπιδεξιοτήτων ἀξιοποιήθηκε ἀπό τό Γραφεῖο τῆς Δίγλωσσης Ἐκπαίδευσης. Ἡ Κ. Δήμητρα Ν. Keane, ἔκτακτη στό γραφεῖο τῆς Δίγλωσσης Ἐκπαίδευσης συνδύασε καί ἐπέβλεψε τή μετάφραση αὐτοῦ τοῦ κειμένου στήν ἑλληνική γλώσσα. Ὁ Κ. Μάκης Νικολάου, ἐπιμελιτής καί ἐπιστημονικός ἐρευνητής τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Νέας Ὑόρκης μετάφρασε τό κείμενο αὐτό καί ἡ Κ. Laurie Wellman, ἔκτακτη στό Γραφεῖο τῆς Δίγλωσσης Ἐκπαίδευσης τό προετοίμασε γιά ἐκτύπωση.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Μερικές Σύντομες Παρατηρήσεις γιά την Ενίσχυση Μαθηματικών Επιδεξιοτήτων

Ο σκοπός αυτοῦ τοῦ ἄρθου εἶναι νά δώσει μιά περίληψη μερικῶν εἰδικῶν προσεγγίσεων, οἱ ὁποῖες εἶναι πολύτιμες γιά τήν ἐνίσχυση μαθηματικῶν ἐπιδεξιοτήτων.

Χειριζόμενα Ὑλικά

Ἡ χρήση τῶν χειριζόμενων ὑλικῶν καί ἡ ἐργαστηριακή προσέγγιση, γενικά, σημαίνει διαφορετικά πράγματα σέ διαφορετικούς ἀνθρώπους. Ἐδῶ, ἐννοοῦμε τή χρήση μιᾶς εὐρείας ποικιλίας συγκεκριμένων ἀντικειμένων. Μερικά ἴσως νά εἶναι ἐμπορεύσιμα, λεῖα πλαστικά, ἐνῶ ἄλλα προερχόμενα ἀπό ὑλικά σπιτικῆς κατασκευασίας. Διάφορες μελέτες ἔχουν ἀποδείξει ὅτι ὁ τελευταῖος ἀναφερόμενος τύπος ὑλικῶν εἶναι περισσότερο γνωστός στό μαθητή, καί πιθανόν νά χρησιμοποιεῖται συχνότερα ἀπό τό δάσκαλο.

Πολλοί δάσκαλοι τώρα ἔχουν ἐξοικειωθεῖ μέ τά βιβλία τῆς Edith Biggs, the Nuffield Project, N.C.T.M. Experiences in Mathematics Ideas, τά πολυάριθμα ἄρθρα στό Arithmetic and Mathematics Teacher, καί στά New York State Publications.* Ἀρκεῖ νά ποῦμε ὅτι ἡ ἔμφαση τοποθετεῖται σέ βαθμιαία κίνηση ἀπό τό συγκεκριμένο στό ἀφηρημένο. Τό περιβάλλον ἄν καί εἶναι φαινομενικά ἐλεύθερο, στήν πραγματικότητα εἶναι ἀρκετά κατασκευασμένο. Ὁ δάσκαλος πρέπει νά γνωρίζει ποιά ὑλικά εἶναι κατάλληλα γιά μιά ὁρισμένη ἰδέα, καί πρέπει νά κρατήσει προσεκτικές σημειώσεις πάνω στό τί ἔχει μάθει ὁ κάθε μαθητής. Σέ πολλές περιπτώσεις ἀπαιτεῖται ἀπό τούς μαθητές νά κρατήσουν σημειώσεις τῆς ἀναπτυσσόμενης πορείας τους.

Ἐναλλασσόμενοι Ἀλγόριθμοι

Ἄν καί ἀκόμη ἐπιδοκιμάζεται, φαίνεται ὅμως νά ὑπάρχει κάποια ἀξία στό νά δείξεις στούς μαθητές ὅτι οἱ ὑπολογιστικοί μέθοδοι μποροῦν νά ἐκτελεστοῦν μέ τή χρήση τῶν διαφορετικῶν κανόνων ἤ ἀλγόριθμων. Πράγματι, τά περισσότερα τῶν στοιχείων τῶν βιβλίων ἀναπτύσσουν ὁρισμένους ἀλγόριθμους ὅπως τόν πολλαπλασιασμό καί τή διαίρεση διά μέσου μιᾶς σειρᾶς ἐπεξεργασιῶν, μέχρι πού νά ἐπιτευχθεῖ ὁ πιό ἀποδοτικός κανόνας. Σάν παράδειγμα, προσέξετε τήν ἀκόλουθη ἀνάπτυξη:

*Προτάσεις γιά τή διδασκαλία μαθηματικῶν χρησιμοποιώντας ἐργαστηριακές προσεγγίσεις.

```
            2550 |75
75 x 10      750
            1800
75 x 10      750
            1050
75 x 10      750
             300
75 x  3      225
              75
75 x  1       75
     34        0
```

```
            2550 |75
75 x 30     2250
             300
75 x  4      300
     34        0
```

```
2550 |75
2250  34
 300
 300
   0
```

"Αν καί κάθε παράδειγμα σ' αὐτή τήν ἀνάπτυξη βασίζεται στήν κατανόηση τοῦ προηγουμένου παραδείγματος, μερικοί μαθητές φαίνεται νά χάνονται κάπου στή μέση. Σ' αὐτούς τούς μαθητές ἡ τελική μορφή δέν ἔχει καμμιά σχέση μέ τίς ἐνδιάμεσες φάσεις.

Τά σχολικά βιβλία φαίνεται νά ἔχουν ἀφθονία παραδειγμάτων αὐτοῦ τοῦ εἴδους,"ἀνάπτυξης φάσεων" πού τελικά ὁδηγεῖ σ' ἕνα παραδοσιακό ἀλγόριθμο. (Σ' αὐτή τήν περίπτωση, ὁ ἀλγόριθμος τῆς μακρᾶς διαίρεσης.)

'Υπάρχουν πολλοί ἄλλοι ἐναλλασσόμενοι ἀλγόριθμοι πού συνήθως δέν βρίσκονται μέσα στά σχολικά βιβλία, ἀλλά τείνουν νά διεγείρουν περισσότερο τό ἐνδιαφέρον τῶν μαθητῶν γιά νά ἐξασκήσουν τίς μαθηματικές τους ἐπιδεξιότητες.*

Παιχνίδια

'Υπάρχουν πολύ λίγα παιχνίδια πού δέν χρησιμοποιοῦν κάποια μορφή μαθηματικῶν. Ἔστω καί ἄν κρατοῦν σκόρ, ἤ ἄν ἀλλάζουν, ἤ ἁπλῶς μετακινοῦν ἕνα ὁρισμένο ἀριθμό ὑπολογισμῶν. Πολλοί δάσκαλοι χρησιμοποιοῦν παιχνίδια σάν μιά ἀνταμοιβή ἤ κατά τή διάρκεια τῆς τελευταίας τάξης πρίν ἀπό τίς διακοπές.

Ὅπως στήν περίπτωση τῶν χειριζόμενων ὑλικῶν, ἔτσι καί ἐδῶ ὑπάρχουν πολλά παιχνίδια ἀπό τά ὁποῖα μποροῦμε νά διαλέξουμε. 'Υπάρχουν τά ἐμπορικά παιχνίδια μέ ἰδιαίτερους μαθηματικούς σκοπούς ἤ μέ ἐντεταγμένες μαθηματικές ἀπαιτήσεις. 'Υπάρχουν τά παιχνίδια πού ἔχουν φτιαχτεῖ ἀπό τό δάσκαλο καί ἔχουν ἀναπτυχθεῖ ἤ ἀπό τά πολλά καί διάφορα βιβλία μαθηματικῆς ψυχαγωγίας ἤ ἀπό τή δημιουργική φαντασία τοῦ δασκάλου ἤ τοῦ μαθητή, καί αὐτά εἶναι προτιμότερο.

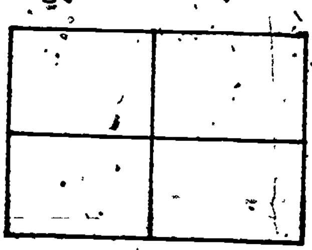
'Επειδή τά παιχνίδια ἔχουν τουλάχιστον τόν δυαδικό ρόλο τῆς ψυχαγωγικῆς εὐχαρίστησης καί τῆς ἀνάπτυξης μαθηματικῶν ἱκανοτήτων, ὁ δάσκαλος θά πρέπει νά γνωρίζει καλά ποιός ρόλος

---

*Μερικά ἀπό αὐτά περιγράφονται στό ἄρθρα "Ἰσότιμο" - Γρίφοι + Ἀριθμητική = Ἐπιδιόρθωση, πού περιλαμβάνεται σέ αὐτό τό κείμενο.

εἶναι ὁ ἐπιθυμητός. Ἄν ὁ σκοπός εἶναι ἡ ἀνάπτυξη τῶν ἐπιδεξιοτήτων, ὁ δάσκαλος πρέπει νά γνωρίζει ποιές ἐπιδεξιότητες ἐνισχύονται ἀπό τό κάθε παιχνίδι καί πρέπει νά ἀποφασίσει ἄν πρέπει ἤ δέν πρέπει καί οἱ δύο παῖχτες νά κατέχουν τήν ἴδια μαθηματική ειδικότητα.

Παιχνίδια σάν κι αὐτό πού περιγράφεται παρακάτω, μποροῦν νά συνδυάσουν πολλές καί διάφορες μαθηματικές ἰδέες. Π.χ., ἕνα ἁπλό παιχνίδι εἶναι νά φτιάξει ὁ κάθε μαθητής ἕνα τετράγωνο μέ τέσσερα χωρίσματα, ὅπως:



Ἔπειτα, ὁ δάσκαλος ἤ ὁ ἀρχηγός τοῦ παιχνιδιοῦ διαλέγει τέσσερα ψηφία κατά τύχη ἐξάγοντας τα μέσα ἀπό ἕνα καπέλο, εἴτε στρίβοντας μία ἀριθμημένη σβούρα, εἴτε ρίχνοντας ἕνα ζάρι. Καθώς οἱ ἀριθμοί γίνονται γνωστοί, οἱ μαθητές καταγράφουν τούς ἀριθμούς σέ ὁποιοδήποτε χώρισμα θέλουν. Μιά καί τά τέσσερα ψηφία διαλέχθησαν, τότε οἱ μαθητές ἐκτελοῦν μιά ὁρισμένη πράξη ὅπως στό παράδειγμα αὐτό: τόν πολλαπλασιασμό. Ἐκεῖνοι πού ἔχουν τό μεγαλύτερο ἀποτέλεσμα κερδίζουν.

Ἕνα τέτοιο ἁπλό παιχνίδι συμπεριλαμβάνει ἐξάσκηση σέ ὑπολογιστική ἐπιδεξιότητα, κατανόηση τῆς σημαντικότητας τῆς ἀξίας τῆς πλεονεκτικῆς τοποθέτησης γιά νά κερδίσει κανείς τό παιχνίδι, καί ἐπίσης μιά προαίσθηση γιά τήν πιθανότητα ὁρισμένων ψηφίων πού θά διαλεχθοῦν.

Σχετικές Ἐφαρμογές

Συχνά, ἀναπτύσσομε ἐφαρμογές γιά μιά ὑπολογιστική ἐξάσκηση πού ἐμεῖς νομίζομε πώς ἔχουν κάποια σχετικότητα γιά τόν μαθητή. Ἀλλά πολλές φορές δέν ἔχουν. Ὁ φόρος εἰσοδήματος, τά ἀσφάλιστρα, οἱ ὑποθῆκες γιά τά σπίτια, εἶναι ὅλα σημαντικά θέματα πού πρέπει νά διδαχτοῦν, ἀλλά γιά πολλούς μαθητές ἡ σχετικότητά τους εἶναι μηδαμινή. Ἐάν ὑπάρχει ἕνας μεγαλύτερος σέ ἡλικία μαθητής πού θά ὑποβάλλει ἔντυπο δήλωσης εἰσοδήματος στή φορολογία, τότε θά ὑπάρχει καί σχετικότητα.

Ἕνας τρόπος εἶναι νά ἀνακαλύψετε σέ τί ἐνδιαφέρονται οἱ μαθητές. Ποιές εἶναι οἱ συνήθειές τους; Τούς ἀρέσουν τά σπόρ; Ἐάν ναί, τότε ποιά προτιμοῦν; Προσδοκοῦν νά βοηθήσουν στό σπίτι κάνοντας εἰδικές ἀγγαρεῖες ἤ νά βοηθήσουν τούς γονεῖς τους ἤ τά μεγαλύτερα ἀδέλφια τους σέ πιό πολύπλοκες δουλειές;

Μιά καί γνωρίζετε καλά τούς μαθητές σας, τότε οἱ σχετικές ἐφαρμογές ἀρχίζουν νά φανερώνονται. Ἕνας μαθητής μπορεῖ νά ἐνδιαφέρεται γιά τό "baseball". Τά σπόρ, γενικά, ἀπαιτοῦν στατιστική, καί ἑπομένως προσφέρουν εὐκαιρίες γιά ὑπολογιστική ἐξάσκηση. Π.χ., ὁ μέσος ὅρος τῶν κτυπημάτων τῆς μπάλλας στό παιχνίδι τοῦ "baseball" * εἶναι, ὅπως ὑποδεικνύεται παρακάτω, μιά ἁπλή διαίρεση τοῦ ἀριθμοῦ (Κ) τῶν ἐπιτυχῶς κτυπημένων μπαλλῶν διά τοῦ ἀριθμοῦ (Π) πού ἀντιπροσωπεύει τίς προσπάθειες ἑνός παίχτη νά χτυπήσει ἐπιτυχῶς τή μπάλλα.

Π = 524	Κ = 154	154,0000 | 524
Μέσος Ὅρος	.294	,2938

Ὁ μέσος ὅρος τῶν κτυπημάτων στό "baseball" στρογγυλοποιεῖται στό πλησιέστερο χιλιοστό καί ἡ δεκαδική τελεία διαγράφεται. Π.χ., στό παραπάνω παράδειγμα λέμε ὅτι ὁ μέσος ὅρος τῶν κτυπημάτων εἶναι 294.

Διάγνωση καί Ὑπολογισμοί

Ὅταν οἱ μαθητές σκέπτονται τήν τάξη τῶν μαθηματικῶν, συνήθως σκέπτονται γιά τήν καθημερινή προετοιμασία καί τά πολυάριθμα διαγωνίσματα. Καί οἱ δύο αὐτές ἀπόψεις χαρακτηρίζονται εἴτε σάν μιά δυσάρεστη γραφική ἐργασία, εἴτε σάν μιά πολύτιμη συνεισφορά γιά διάγνωση. Ἐάν τό μέγεθος τοῦ ἔργου τῆς διόρθωσης κάθε προπαρασκευαστικῆς ἄσκησης σᾶς φαίνεται τρομακτικό, μήν ἀπορρίπτετε τήν ἰδέα. Προσεκτική διάγνωση θά πρέπει νά γίνει ἀμέσως μετά ἀπό μιά ὑπόδειξη στήν τάξη μιᾶς ὑπολογιστικῆς ἐπιδεξιότητας καί τότε ὁ ἀριθμός τῶν ὁρισθέντων ἀσκήσεων θά μποροῦσε νά εἶναι ἀρκετά περιορισμένος. Θά μπορούσατε νά ὁρίσετε πολυάριθμα παραδείγματα ἀργότερα γιά νά ὀξύνουν τίς ἐπιδεξιότητες, ἀλλά ἀκόμα καί τότε, μιά μελετημένη ἀνάλυση ὁρισμένων μαθητῶν ἤ ὁρισμένων εἰδικῶν ἀσκήσεων εἶναι προτιμότερη γιατί θά σᾶς γλυτώσει πολύ κόπο ἀργότερα. Ἕνα ἄλλο σημεῖο πού πρέπει νά ἀναφερθεῖ εἶναι στόν τομέα τῆς προπαρασκευῆς τῶν μαθητῶν. Οἱ μαθητές πρέπει νά ἐνθαρρύνονται νά σημειώσουν πάνω στό χαρτί τῶν ἀσκήσεων τούς συλλογισμούς τους στίς μαθηματικές πράξεις ὥστε νά ἔχετε, ὅσο τό δυνατόν περισσότερα ἐνδεικτικά στό τί συνέβη ἐάν ἡ τελική ἀπάντηση εἶναι λανθασμένη.

Αὐτό τό τελευταῖο σημεῖο εἶναι ἐπίσης σημαντικό γιά τά διαγωνίσματα πού γράφονται στήν τάξη. Ἐάν πραγματικά τό διαγώνισμα χρησιμοποιεῖται σάν βοήθημα στήν ἀνάλυση παρά σάν ἐπιχείρημα κατάταξης τοῦ μαθητή, εἶναι πολύ σημαντικό νά δεῖ κανείς πῶς σκέπτεται ὁ μαθητής. Ἴσως θεωρήσετε ἐπιθυμητό νά ἐξετάσετε μερικούς μαθητές προφορικά. Τότε ρωτήσετέ τους νά σᾶς ποῦν τί σκέπτονται ὅταν ἐκτελοῦν τίς πράξεις. Π.χ., ἐάν δέν θυμοῦνται ὅτι 7Χ8=56, πῶς σκέπτονται νά βροῦν τήν ἀπάντηση μέ αὐτά πού θυμοῦνται;

*Παρμένο ἀπό τό N.Y. State Publication, Arithmetic Around the Home, πού ἔχει μεταφρασθεῖ καί στά Ἱσπανικά.

Ἡ διδασκαλία ὑπολογισμῶν συμβαίνει νά εἶναι συχνά μιά ἀπογοητευτική ἐμπειρία. Τό γεγονός πού πρέπει νά ἀποδειχτεῖ εἶναι ὅτι πολλοί μαθητές κάνουν συχνά λάθη. Ἀλλά ἀντί νά χασομερίσετε μέ τίς ἐλλείψεις τοῦ μαθητή, ἐργαστεῖτε μέ τίς ἱκανότητές του. Μερικοί ἴσως ὀνομάσουν αὐτό "προσανατολισμός ἐπιτυχίας" ἤ "διδασκαλία μή ἀποτυχίας", ἀλλά τό θέμα εἶναι ἡ καλλιέργεια τῆς ἐμπιστοσύνης τοῦ μαθητή στίς ἱκανότητές του καί αὐτό εἶναι ἕνα κλειδί στή διδασκαλία τῶν ὑπολογισμῶν πού βασίζεται στήν ἱεραρχία τῶν ἐπιδεξιοτήτων.

<u>Τό Ἰσορροπημένο Πρόγραμμα Μαθηματικῶν</u>

Γιά μερικούς, τά μαθηματικά εἶναι ἕνα ἀπό τά πιό ἀντιπαθητικά καί ἀνιαρά θέματα πού διδάσκονται στά σχολεῖα. Οἱ περισσότεροι ἀπό τούς μαθητές πού ἀντιπαθοῦν τά μαθηματικά εἶναι συνήθως μαθητές χαμηλῶν ἐπιτευγμάτων στό μάθημα αὐτό. Γιά χρόνια, τά μαθηματικά τούς φαίνονταν σάν μιά συνεχής ἐργασία σέ ἐξάσκηση πράξεων πού ἀκολουθεῖται τήν ἑπομένη ἡμέρα ἀπό διορθώσεις. Ἔτσι, ἐκτός τό ὅτι δημιουργήσαμε ἕνα μίσος γιά τά μαθηματικά, ἐπιπλέον ἀποφοιτήσαμε μιά ὁλόκληρη γενιά ἀπό μαθητές πού δέν μποροῦν νά κάνουν ἁπλούς μαθηματικούς ὑπολογισμούς πού ἀπαιτοῦνται στήν καθημερινή ζωή τους.

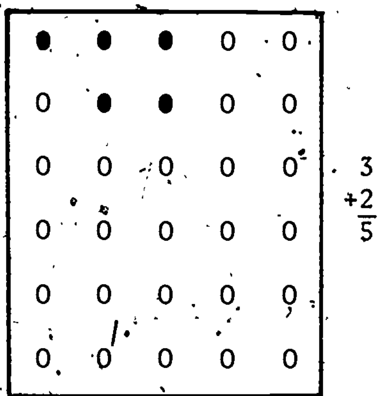
Προσπαθώντας νά διορθώσουμε αὐτές τίς ἐλλείψεις, ἀρχίσαμε τήν κατήχηση ἐπιδιορθωτικῶν μαθηματικῶν προγραμμάτων σχεδόν σέ κάθε σχολική περιφέρεια τῆς πολιτείας μας. Ἀλλά σχεδόν ὅλα αὐτά τά προγράμματα εἶχαν σχεδιαστεῖ πάνω σέ μιά πολύ στενή ὄψη μαθηματικῶν καί μέ ἰδιαίτερους περιορισμούς σχετικά μέ τίς ἱκανότητες καί ἀνάγκες τῶν μαθητῶν πού παρακολουθοῦσαν τά προγράμματα ἐπιδιορθωτικῶν μαθηματικῶν. Γιά αὐτές καί πολλές ἄλλες αἰτίες ἔγινε ἀπαραίτητη μιά καινούργια προσέγγιση στήν διδασκαλία τῶν μαθηματικῶν. Μιά προσέγγιση πού ἀναπτύχθηκε στό πρόγραμμα τοῦ Niagara Falls School System's ESEA Title I καί ὀνομάστηκε τό "Ἰσορροπημένο" ἤ "Συνολικό Πρόγραμμα Μαθηματικῶν."

Σ' αὐτή τήν ἰσορροπημένη προσέγγιση ὑπάρχουν τρία ἐξ ἴσου σπουδαιότητας μέρη: ἡ <u>διδασκαλία</u>, ἡ <u>ἐνδυνάμωση</u> καί ἡ <u>ἐφαρμογή</u>. Βέβαια, αὐτά δέν εἶναι καινούργιοι ὅροι γιά τούς περισσότερους τῶν ἐκπαιδευτῶν. Ἀλλά ἀπό τούς ὁρισμούς αὐτῶν τῶν ὅρων καί ἀπό τίς σχέσεις πού ὑπάρχουν μεταξύ τους, ἡ πόλη τοῦ Niagara Falls ἐλπίζει πώς μιά νέα προσέγγιση πού θά ἀσχολεῖται μέ τά μαθηματικά θά γίνει ὁρατή. Γιά νά ἐπιτύχουμε αὐτό τό σκοπό, ἔχουμε ἐκλέξει ἕνα θέμα τῶν μαθηματικῶν μελετῶν πού θά χρησιμοποιηθεῖ σάν ὑπόδειγμα.

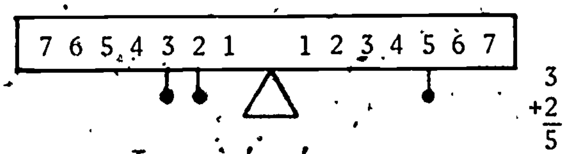
$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, προσέγγιση

Ἰδανικῶς, ἕνας μαθητής θά πρέπει νά ξοδεύει τό ἕνα τρίτο τοῦ χρόνου του ἀπασχολούμενος μέ τά μαθηματικά διδασκόμενα ἀπό τόν δάσκαλο. Δέν ὑπάρχει ἀντικατάσταση τῆς <u>ἀμέσου διδασκαλίας</u> στά περισσότερα θέματα τῶν μαθηματικῶν μελετῶν. Ὁ δάσκαλος θά πρέπει νά χρησιμοποιεῖ μιά ποικιλία χειριζόμενων ὑλικῶν, δηλαδή κύβους, μασούρια, πίνακες μετρήματος, ἄβακες, ἀριθμημένους κύβους δεκαδικῆς βάσης, καί ἄλλα ἀντικείμενα σπιτικῆς κατασκευῆς πού θά παρακινοῦν ἐμφατικά τόν μαθητή νά ἐξερευνήσει, νά χειριστεῖ καί νά ἀναπτύξει ἰδέες ἤ ἔννοιες. Θά πρέπει νά ἐπιτρέπεται στά παιδιά νά ἀναπτύσσονται διά μέσου τῶν φυσικῶν φάσεων τῆς μάθησης, ἀπό τό συγκεκριμένο στό εἰκονογραφημένο, στό ἀφηρημένο. Ἐπακολουθοῦν τά ἑξῆς παραδείγματα:

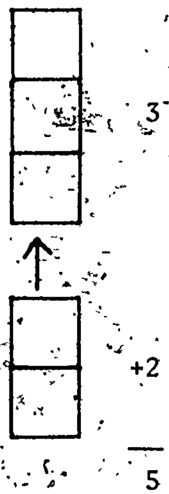
Συγκεκριμένες εἰκονογραφήσεις στή διδασκαλία τῆς πρόσθεσης ἀφηρημένων ἰδεῶν.



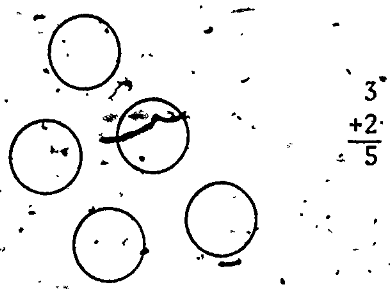
πίνακας μέτρησης



ζυγαριά μέτρησης



κύβοι μέτρησης



δίσκοι μέτρησης

Τό δεύτερο μέρος τοῦ ἰσορροπημένου προγράμματος εἶναι ἡ <u>ἐνδυνάμωση</u>. Πάλι, τό ἕνα τρίτο τοῦ χρόνου πού τό παιδί ἀσχολεῖται μέ τά μαθηματικά, θά πρέπει νά περιλαμβάνει ἐξάσκηση πράξεων. Ἐμεῖς, μερικές φορές, ξεχνᾶμε πώς ὁ καθένας χρειάζεται ἐξάσκηση, ἀκόμη καί τό παιδί πού δείχνει πώς ὑπερέχει σέ ἕνα θέμα. Γνωρίζουμε ἀπό τή ζωή μας πώς ἐάν διακόψομε τήν ἐξάσκηση μιᾶς ὁρισμένης ἐπιδεξιότητας, γρήγορα θά χάσομε μέρος τῆς ἱκανότητάς μας σ' αὐτό τόν τομέα. Τό ἴδιο ἰσχύει καί στήν ἐργασία τῶν μαθηματικῶν ἑνός παιδιοῦ.

Στό παρελθόν, ἐνδυνάμωση μέσα στήν τάξη σήμαινε δύο πράγματα: ἐπαναλήψεις καί βιβλία ἐξασκήσεων. Σήμερα, ὁ δάσκαλος ἔχει στή διάθεσή του καταπληκτική ποικιλία ὑλικῶν καί μηχανιμάτων πού μπορεῖ νά χρησιμοποιήσει. Ἕνας ἐπιμέρους κατάλογος συμπεριλαμβάνει ὑπολογιστές, ἠλεκτρονικούς ἐγκεφάλους, κινηματογραφικές ταινίες, ἠχογραφημένες ταινίες, παιχνίδια ἐξάσκησης ἐπιδεξιοτήτων, μηχανήματα διδασκαλίας, καθώς καί παιχνίδια κατασκευασμένα ἀπό τούς δασκάλους. Εἴμαστε τῆς γνώμης ὅτι τά παιχνίδια κατασκευασμένα ἀπό τούς δασκάλους προσφέρουν τίς περισσότερες δυνατότητες γιά τήν ἔκφραση ἀτομικότητας, ἐνῶ ταυτόχρονα διεγείρουν τό πνεῦμα τῶν μαθητῶν. Μελέτες ἔχουν ἀποδείξει ὅτι ἡ στάση πού κρατᾶ ἕνα παιδί ἔναντι τῆς σπουδῆς τῶν μαθηματικῶν καί ἡ αὐτοπεποίθηση τῶν ἱκανοτήτων του στά μαθηματικά τελοῦν στήν ἐπιτυχία του στό θέμα αὐτό.

Τρία σημαντικά σημεῖα πρέπει νά ἔχετε ὑπ' ὄψιν σας ὅταν χρησιμοποιεῖτε παιχνίδια καί ἐνασχολήσεις γιά τήν δυνάμωση τῶν ἐπιδεξιοτήτων τῶν παιδιῶν:

- Νά σχεδιάζετε τό παιχνίδι γιά τό παιδί μόνο ἀφοῦ διαπιστώσετε πρῶτα μιά ἀνάγκη ἤ ἐάν τό παιδί ἔχει δείξει ἐνδιαφέρον.

- Τά παιχνίδια καί οἱ ἐκπαιδευτικές ἐνασχολήσεις βοηθοῦν συμπτωματικά τή διδασκαλία, ἀλλά ἐάν νομίζετε πώς θά ἐπιτύχουν κατ' ἀκολουθία στό σκοπό αὐτό, τότε πέφτετε ἔξω. Γιατί δέν μποροῦμε ποτέ νά ἀντικαταστήσουμε ἱκανοποιητικά τήν ἄμεση διδασκαλία.

- Ὅποτε εἶναι δυνατό, τά παιχνίδια καί οἱ ἐκπαιδευτικές ἐνασχολήσεις νά συγχωνεύσουν τή χρήση τῶν διαφόρων χειριζομένων ὑλικῶν πού εἶχαν εἰσαχθεῖ προηγουμένως στή διδασκαλία.

Ἄς ρίξουμε μιά ματιά σέ μερικές δυνατότητες πού ὑπάρχουν στήν πρόσθεση.

Ἐνασχόληση 1

ΠΑΙΧΤΕ... ΜΠΑΛΛΑ! - $\boxed{3+4}$

Γιατί σχεδιάστηκε;

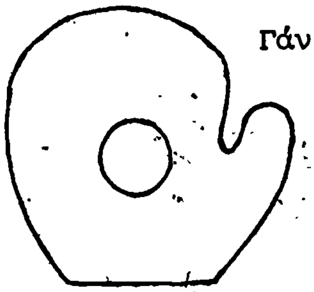
Γιά νά βοηθήσει ἕνα παιδί πού ἐνδιαφέρεται στό "baseball" νά ἐξασκήσει ἀριθμητικά γεγονότα.

Γήπεδο

2	9	11	14	4
7	18	5	3	16
1	8	6	10	18
12	15	19	13	20

Πώς;

Δείξετε ξαφνικά μιά κάρτα πού φέρει άριθμούς (ίδετε σκίτσο) στό παιδί πού θά προσπαθήσει νά βρεϊ τήν άπάντηση μέ τήν τρύπα στό γάντι.



Γάντι

Ενασχόληση 2

Γιατί σχεδιάστηκε;

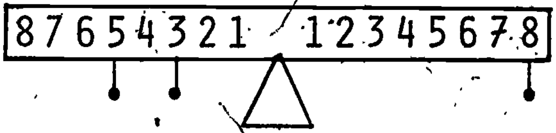
Γιά νά βοηθήσει τά παιδιά νά καταλάβουν τή σχέση μεταξύ πρόσθεσης καί άφαίρεσης.

Τά παιδιά χρησιμοποιοῦν τόν μεγεθυντικό φακό γιά νά βροῦν τίς κατηγορίες άριθμῶν καί νά τίς καταγράψουν. Π.χ.,

	3 + 4 = 7	7 - 3 = 4
3,4,7	4 + 3 = 7	7 - 4 = 3

Μεγεθυντικός Φακός

Ενασχόληση 3



Γιατί σχεδιάστηκε;

Γιά νά βοηθήσει τό παιδί νά άρχίσει νά μαθαίνει τά άριθμητικά γεγονότα καί νά τό ένθαρρύνει νά λύσει προβλήματα.

5 + 3 = 8
_ + _ = 8
_ + _ + _ = 8
κλπ.

Χαρτί Καταγραφῆς

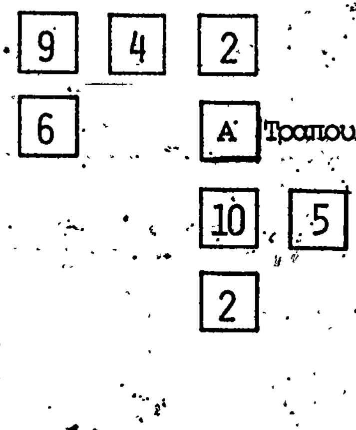
Μέ πόσους τρόπους μποροῦμε νά βροῦμε τό άριθμό 8 χρησιμοποιώντας 2 βάρη; 3 βάρη; 4 βάρη;

Ενασχόληση 4

Γιατί σχεδιάστηκε;

Σχηματισμός Αριθμῶν

Γιά νά δυναμώσει τήν άναγνώριση άριθμητικῶν γεγονότων.



Τραπουλόχαρτα

Χρειαζόμαστε	-	1 τράπουλα.
Κανονισμοί	-	Μοιράστε 7 χαρτιά σέ κάθε παίχτη.
Σκοπός	-	Νά σχηματίσουν ένα άθροισμα τῶν 15.

Τελικά, έχουμε τό μέρος τῆς εφαρμογῆς. Ἐδῶ προσπαθοῦμε νά δείξωμε στά παιδιά ὅτι τά μαθηματικά δέν εἶναι ἀπομονωμένα ἀπό τά ἄλλα θέματα τῆς μόρφωσής τους καί οὔτε ἀπό τήν καθημερινή ζωή τους. Τά παιδιά πρέπει νά εἶναι ενήμερα καί νά ἀσχοληθοῦν μέ τά μαθηματικά γιατί ζοῦν σέ ἕνα "πραγματικό κόσμο." Αὐτό ἐδῶ εἶναι τό τμῆμα τοῦ συνολικοῦ μαθηματικοῦ προγράμματος στό ὁποῖο τόσο συχνά ἀναμένομε τό παιδί νά καθήσει κάτω, νά καταφέρει κάτι, καί νά τό παραδώσει στό δάσκαλο σέ 30 λεπτά. Οἱ μαθητές ἀκόμη κι ἐκεῖνοι πού εἶναι χαμηλῶν ἐπιτευγμάτων, χρειάζονται τήν εὐκαιρία νά μάθουν πῶς νά διαχειρισθοῦν πολύμορφα προβλήματα πού δέν μποροῦν νά λυθοῦν σέ 30 λεπτά. Πρέπει νά ἀντιμετωπίσουν προβλήματα πού ἀπαιτοῦν τή χρήση ποικίλων μαθηματικῶν ἐπιχειρημάτων πού συνδιάζουν τήν ἐπιστήμη μέ τήν ἀνάγνωση, μέ τήν τέχνη τῆς γλώσσας, κλπ. Χρειάζονται νά ἀσχοληθοῦν μέ καταστάσεις πού ἀπαιτοῦν λύσεις προβλημάτων γιά νά ἀποκτήσουν μιά ὑπευθυνότητα στό νά κάνουν ἀποφάσεις, καταγραφές, καί ἀναφορές τῶν ἀποτελεσμάτων τῶν ἐρευνῶν τους. Θά πρέπει νά τούς δωθεῖ ἡ εὐκαιρία νά ἐργαστοῦν ὁμαδικά σέ τμήματα γιά ἕνα κοινό σκοπό. Οἱ δυνατότητες αὐτῆς τῆς μεθόδου εἶναι ἀπεριόριστες καί θά πρέπει νά ἀπαιτοῦν ἀπό τούς μαθητές νά μεταχειριστοῦν ὅ,τι ἔχουν μάθει προηγουμένως. Ἀλλά ἡ μεγαλύτερη φροντίδα πρέπει νά δωθεῖ στήν ἀναγνώριση τοῦ ἐνδιαφέροντος κάθε μαθητή.

Τά ἀκόλουθα παριστάνουν μιά δυνατότητα.

I. Θέμα: Ἀθλητισμός

II. Στόχος

Αὐτή ἡ μονάδα προγράμματος ἔχει σχεδιαστεῖ γιά νά συσχετίζει παιχνίδια σταδίου μέ διάφορες μαθηματικές ἔννοιες.

III. Σκοποί:

Α. Νά ἀναπτύξετε τήν ἐμπιστοσύνη τῶν παιδιῶν στίς ἱκανότητές τους.

Β. Νά συνδιάσετε τά σπόρ μέ τά μαθηματικά.

Γ. Νά δώσετε τήν εὐκαιρία γιά πρακτική ἐξάσκηση διαφόρων μαθηματικῶν ἐννοιῶν.

Δ. Νά ἐνισχύσετε τήν καταvόηση τῶν μαθηματικῶν ἐννοιῶν.

Ε. Νά δείξετε τήν χρήση διαφόρων ὑλικῶν γιά τόν ὑπολογισμό δεδομένων μετρημάτων.

ΣΤ. Νά δώσετε τήν εὐκαιρία νά ἀποκτήσουν ἐμπειρία στούς ὑπολογισμούς.

Ζ. Νά διδάξετε τά παιδιά νά ἀκοῦν καί νά ἀκολουθοῦν ὁδηγίες.

Η. Νά κινήσετε τό ἐνδιαφέρον τῶν παιδιῶν.

IV. Πορεία

Α. Εἰσαγωγή (ὀργάνωση)-Νά δημιουργήσετε ἐνδιαφέρον ὁμιλῶντας σχετικά μέ τό τί πρόκειται νά συμβεῖ κατά τή διάρκεια τοῦ καλοκαιριοῦ. Νά συνεχίσετε μέ τήν ὀργάνωση τῆς τάξης. Νά πεῖτε στά παιδιά νά φτιάξουν μέσα στήν τάξη διάφορες ἀθλητικές σκηνές. Νά ὀργανώσετε ἐπιδείξεις ἀθλητισμοῦ. Αὐτή ἡ σκέψη εἰδικά θά περιλαμβάνει δουλειά τέχνης, πού θά μποροῦσε νά κινήσει τό ἐνδιαφέρον τῶν παιδιῶν.

Β. Ὅταν τό περιβάλλον τῆς τάξης τελειοποιηθεῖ, νά πᾶτε ἔξω καί νά ἐλέγξετε τήν αὐλή τοῦ σχολείου. Νά κοιτάξετε τί εἶναι στή διάθεσή σας πού μπορεῖ νά σᾶς ἐξυπηρετήσει, στήν ἐκτέλεση τῶν παιχνιδιῶν σταδίου.

Γ. Τώρα νά ἀρχίσετε τά διάφορα ἀθλητικά γεγονότα. Νά κάνετε ἕνα ἤ περισσότερα ἀπό αὐτά καθημερινά. Αὐτό θά ἀφεθεῖ στήν ἐκλογή σας.

Δ. Ἀθλητικά γεγονότα:

1. Κλώτσησμα μπάλλας
   ἐφαρμογές-μετρήσεις, μέσος ὅρος, γραφική παράσταση.

2. Πέταγμα μπάλλας - basketball, football
   ἐφαρμογές-γραφική παράσταση, μετρήσεις, ποσοστά, μέσος ὅρος.

3. Πήδημα (ἤ Ἅλμα σέ μῆκος)-ἐσωτερικό, ὑπαίθριο
   ἐφαρμογές-μετρήσεις μήκους.

4. Τρέξιμο-σκυταλοδρομίες, μέσων καί μακρῶν ἀποστάσεων, ταχύτητος, sprints
   ἐφαρμογές-χρονικές μετρήσεις.

5. Τρέξιμο μετ' ἐμποδίων
   ἐφαρμογές-μετρήσεις διαστάσεων: χρονικές, γωνιακές, μήκους.

Σχεδόν όλα τά άθλητικά γεγονότα άπαιτοῦν γραφικές παραστάσεις οἱ όποῖες συμπεριλαμβάνουν καί πολύ ὑπολογιστική έπεξεργασία. Ἐρωτήσεις σάν τό πόσο; πόσοι; πόσο γρήγορα; ποιές είναι οἱ πιθανότητες; πῶς γίνεται; γιατί είναι; ποιά είναι ἡ διαφορά; καί πολλές ἄλλες έπιτρέπουν τή χρησιμοποίηση πολλῶν μαθηματικῶν ίδεῶν.

Τό πρόγραμμα πού ἔχει άναφερθεῖ έδῶ δέν προσφέρει μιά άπλή ὄψη έπιδιορθωτικοῦ έργαστηρίου. Ἀλλά μιά πολύ χρήσιμη μέθοδο πού μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ σέ τάξεις πού εἶναι εἴτε άνοιχτές εἴτε άτομιστικές, εἴτε παραδοσιακές. Δέν εἶναι οὔτε μιά είδική μέθοδος μέ συγκεκριμένους κανόνες. Ἀλλά άντιπροσωπεύει μιά λογική ἄποψη τῆς διδασκαλίας τῶν μαθηματικῶν καί ἔναν τρόπο μέ τόν όποῖο μποροῦμε νά συμπληρώσουμε τίς άνάγκες τῶν παιδιῶν σ' αὐτό τό θέμα.

"Ἰσότιμο" - Γρίφοι + Ἀριθμητική = Ἐπιδιόρθωση

Σέ όλες τίς περιπτώσεις διδασκαλίας τῶν μαθηματικῶν, άλλά ίδιαίτερα σέ έπιδιορθωτικές τάξεις, ό ίδανικός τρόπος διδασκαλίας εἶναι νά προχωρήσουμε σιγά-σιγά άπό τά συγκεκριμένα (πράξεις μέ κατηγορίες άντικειμένων) στά άφηρημένα (χειρισμοί συμβόλων). Πρῶτα λοιπόν, χρησιμοποιοῦμε άντικείμενα ὅπως τά χειροπιαστά ὑλικά. Ὅταν τό παιδί φαίνεται νά άντιλαμβάνεται τή σχέση μεταξύ ένός ψηφίου μέ τόν άντίστοιχο άριθμό άντικειμένων, τότε συστήνουμε τούς μηχανισμούς γραφῆς τῶν ψηφίων καί άντικαταστοῦμε τά άντικείμενα μέ είκονικές παραστάσεις.

Ἀφοῦ μερικά άπλά γεγονότα άριθμῶν ἔχουν γίνει σωστά, τότε ἡ ένδυνάμωση (συνήθως άποκαλούμενη "έπαναληπτική έξάσκηση") μπορεῖ νά προσφερθεῖ μέ διάφορους τρόπους. Π.χ., άριθμητικά παιχνίδια, γρίφοι, κλπ.

Οἱ άσκήσεις πού άκολουθοῦν ἔχουν άποδειχθεῖ νά βοηθοῦν πολύ στήν άνάπτυξη τῶν ίκανοτήτων τῶν μαθητῶν κατωτέρων έπιτευγμάτων, καί έπιπλέον άνατρέφουν μέσα τους μιά έκτίμηση γιά τόν κόσμο τῶν μαθηματικῶν καί μιά έπιθυμία νά τόν κατανοήσουν καλύτερα.

1. Εἰσαγωγική ένασχόληση (μέσα στήν τάξη) πού τονίζει:

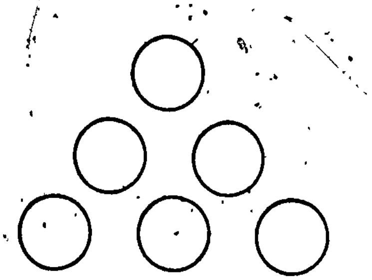
   (α) στρατηγικές γιά λύσεις προβλημάτων

   (β) σχεδιαγραμματικές τάσεις καί σχέσεις άριθμῶν

   (γ) προβλέψεις

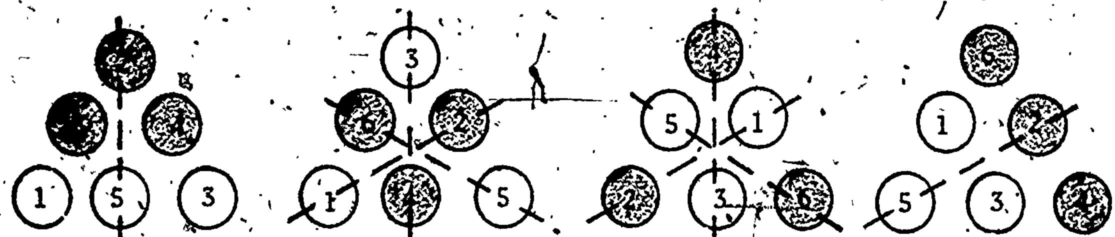
   (δ) συμμετρία

Χρησιμοποιώντας ψηφία άπό τό 1 μέχρι τό 6 (αὐτά τά ψηφία μποροῦν νά γραφοῦν σέ κομμάτια άπό χαρτί γιά νά μπορέσουν νά μετακινηθοῦν), παρατάξετέ τα σέ μιά διάταξη όπως ύποδεικνύεται στό σχῆμα, ἔτσι ὥστε τό ἄθροισμα σέ κάθε πλευρά νά εἶναι 9. (Όταν λυθεῖ αὐτή ἡ ἄσκηση, παρατάξετε τά ψηφία ἔτσι ὥστε τό πλευρικό ἄθροισμα νά εἶναι 10, ἔπειτα 11, καί ἔπειτα 12.)



Λύσεις

I II III IV



πλευρικό άθροισμα 9 — πλευρικό ἄθροισμα 10 — πλευρικό ἄθροισμα 11 — πλευρικό ἄθροισμα 12

Ὁρισμένα πράγματα πού γίνονται ἀντιληπτά:

Ἡ τριγωνική διάταξη (I) ἔχει τούς μικρότερους ἀριθμούς στίς γωνίες ἐνῶ ἡ τριγωνική διάταξη (IV) ἔχει τούς μεγαλύτερους ἀριθμούς στίς γωνίες.

Ἡ τριγωνική διάταξη (II) ἔχει μόνους ἀριθμούς στίς γωνίες ἐνῶ ἡ τριγωνική διάταξη (III) ἔχει διπλούς ἀριθμούς στίς γωνίες.

Ἐάν ἡ τριγωνική διάταξη (I) ἐπιστραφεῖ "μέσα-ἔξω", τότε εἶναι ἰσοδύναμη τῆς τριγωνικῆς διάταξης (IV).

Ἐάν ἡ τριγωνική διάταξη (II) ἐπιστραφεῖ "μέσα-ἔξω", τότε εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν τριγωνική διάταξη (III).

Τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν σχηματίζουν μιά ἀκολουθία πολλαπλασίων τοῦ 3 - δηλαδή, 6,9,12,15.

Ἐάν οἱ διπλοί ἀριθμοί σκιασθοῦν, τότε οἱ διατάξεις (I) καί (IV) ἔχουν ἕναν ἄξονα συμμετρίας ἐνῶ οἱ διατάξεις (II) καί (III) ἔχουν τρεῖς ἄξονες συμμετρίας.

2. Χρησιμοποιώντας ψηφία άπό τό 2 ἕως τό 7, στήν ἴδια διάταξη ὅπως προηγουμένως, βρεῖτε τά πλευρικά ἀθροίσματα 12, 13, 14 καί 15. Συγκρίνετε αὐτές τίς λύσεις μέ ἐκεῖνες πού εὑρέθησαν προηγουμένως. Προσδιορίσετε μερικά ἀποτελέσματα ἐάν τά ψηφία 3 ἕως 8 εἶχαν χρησιμοποιηθεῖ.

3. Γρίφοι σταυρωτῶν ἀριθμῶν.

(α) Πρόσθεση

Γρίφοι σταυρωτῶν ἀριθμῶν σάν τόν εἰκονογραφημένο παρακάτω (ὑποδεικνύοντας: +, 2, 4, 6, 5), συμπεριλαμβάνει ἔξι διαφορετικά παραδείγματα πρόσθεσης.

Δεδομένο

2	4	
6	5	

Λύση

2	4	6
6	5	11
8	9	17

Ὅταν δίδονται μόνο 4 ἀριθμοί ἡ ἀφαίρεση πρέπει νά χρησιμοποιηθεῖ.

3		9
	8	18

(β) Ὁ γρίφος πολλαπλασιασμοῦ σταυρωτῶν ~~ἀρι~~θμῶν ἔχει "αὐτιά" στίς πάνω γωνίες. Αὐτά τά "αὐτιά" χρησιμοποιοῦνται στήν καταγραφή τοῦ γινομένου τῶν δύο ἀριθμῶν πού εἶναι πάνω στή διαγώνιο.

Παράδειγμα:

3 X 8 = 24

1	2	2
4	3	12
4	6	24

Νά λύσετε τούς ἑπόμενους γρίφους:

X =

2	5	
3	2	

X =

4	1	
2	1	10

X 12 =

	5	30
12		

7 X =

	7	
2		70

6 X =

		8
	3	
		72

(γ) Διαφοροποίηση γρίφου σταυρωτῶν ἀριθμῶν. Οἱ παράγοντες τοποθετοῦνται στούς κύκλους καί τό γινόμενο γράφεται στό ὀρθογώνιο. Τά τετράγωνα χρησιμοποιοῦνται γιά καταγραφές. Ἐδῶ τώρα, παρουσιάζουμε ἕνα δείγμα στό πῶς χρησιμοποιεῖται τό διάγραμμα γιά νά βρεθεῖ τό γινόμενο τοῦ 9x8 Πρῶτα γράφουμε τό 9, τό 8 καί τό 72 στά κατάλληλα μέρη. Προσθετέοι, τῶν ὁποίων τό ἄθροισμα εἶναι 8, γράφονται κάθετα πάνω ἀπό τό 8. Προσθετέοι, τῶν ὁποίων τό ἄθροισμα εἶναι 9, γράφονται ὁριζόντια στά δεξιά τοῦ 9. Νά κοιτάξετε ἐάν μπορεῖτε νά βρεῖτε πῶς ἀποκτοῦνται οἱ ἄλλοι ἀριθμοί. Νά φτιάξετε ἕναν ἄλλο γρίφο γιά τό 9x8 χρησιμοποιώντας διαφορετικούς προσθετέους.

9	4	5	
45	20	25	5
27	12	15	3
72	32	40	8

Νά λύσετε μερικά ἄλλα παραδείγματα ὅπως τά παρακάτω:

(α) 7 x 6
(β) 9 x 26
(γ) 41 x 26
(δ) 55 x 13

4. Τό "παλίνδρομο" εἶναι μιά λέξη ἤ μιά φράση πού γράφεται κατά τόν ἴδιο τρόπο ἀπό τά μπροστά πρός τά πίσω καί ἀπό τά πίσω πρός τά μπροστά.

Παραδείγματα: "Νίψον ἀνομήματα μή μόναν ὄψιν"

"Σᾶς"

Παλινδρομικοί ἀριθμοί: 121, 353, 18981, κλπ.

Κάθε ἀριθμός ἔχει ἕνα παλινδρομικό ἀντίστοιχο. Νά ἀρχίσετε μέ ὁποιονδήποτε ἀριθμό. Νά ἀλλάζετε τή σειρά τῶν ψηφίων του καί νά προσθέσετε τόν παλινδρομικό ἀριθμό στόν ἀρχικό. Ἐάν τό ἄθροισμα εἶναι παλινδρομικό, νά σταματήσετε. Διαφορετικά νά ἀλλάξετε ξανά τή σειρά τῶν ψηφίων καί νά τό προσθέσετε ξανά. Νά συνεχίσετε μέχρι νά βρεῖτε ἕναν παλινδρομικό ἀριθμό.

$$\begin{array}{r} 238 \\ \underline{832} \\ 1070 \\ \underline{0710} \\ 1771 \end{array}$$

(α) Ποιοί ἀριθμοί, μικρότεροι τοῦ 100, εἶναι παλινδρομικοί;

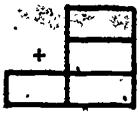
(β) Ποιοί ἀριθμοί, μικρότεροι τοῦ 100, χρειάζονται μιά πρόσθεση μόνο γιά νά γίνουν παλινδρομικοί;

(γ) Πόσες προσθέσεις χρειάζονται γιά νά βροῦμε ἕναν παλινδρομικό ἀριθμό ἀρχίζοντας μέ τό 89, μέ τό 98;

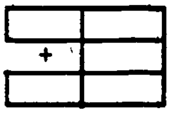
5. "ΑΟΨ" παιχνίδι ("Αθροισμα "Ολων τῶν Ψηφίων)

Παραδείγματα:

$$\begin{array}{r} 3 \\ +\,2 \\ \hline 5 \end{array} \quad 3 + 2 + 5 = 10 \quad \text{ΑΟΨ αποτέλεσμα}$$



Ποιό εἶναι τό μεγαλύτερο ΑΟΨ αποτέλεσμα πού μπορεῖτε νά βρεῖτε γιά τό παράδειγμα στά ἀριστερά; (Μόνο ἕνα ψηφίο σέ κάθε τετράγωνο)

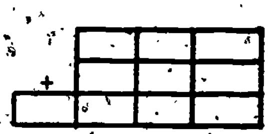


Ποιό εἶναι τό μεγαλύτερο ἀποτέλεσμα γιά αὐτό τό σχῆμα;

Προφανῶς, τό ΑΟΨ παιχνίδι μπορεῖ νά ἐπεκταθεῖ χρησιμοποιώντας πολλές διατάξεις τετραγώνων.

6. Ένα ἄλλο πρόβλημα διάταξης ψηφίων:

Νά χρησιμοποιήσετε ψηφία ἀπό τό 0 ἕως τό 9, κάθε ἕνα μιά φορά μόνο, ὥστε νά πραγματοποιηθεῖ τό παράδειγμα τῆς πρόσθεσης.



Σημείωση: 21 λύσεις ἔχουν βρεθεῖ γι' αὐτό τό πρόβλημα. Υπάρχουν ὅμως πιθανότητες γιά πολλές ἄλλες λύσεις. Νά μιά λύση:

$$\begin{array}{r} 789 \\ +\,246 \\ \hline 1035 \end{array}$$

7. Ημερολογιακή Αριθμητική

Νά χρησιμοποιήσετε ἕνα ἡμερολόγιο γιά ὅλες τίς ἐρωτήσεις.

(α) Νά διαλέξετε ἕνα 2 x 2 τετράγωνο ἡμερομηνιῶν ἀπό τό ἡμερολόγιο. Νά βρεῖτε τό ἄθροισμα κάθε διαγωνίου. Νά γράψετε τά ἀποτελέσματα. Συμβαίνει αὐτό πάντοτε;

(β) Νά διαλέξετε ἕνα 3 x 3 τετράγωνο ἡμερομηνιῶν ἀπό τό ἡμερολόγιο. Υπάρχει ἐδῶ ἡ διαγωνιακή σχέση; Νά βρεῖτε τά ἀθροίσματα τῆς μεσαίας στήλης καί τῆς μεσαίας γραμμῆς. Νά πολλαπλασιάσετε τόν κεντρικό ἀριθμό μέ τό 3. Νά γράψετε τά ἀποτελέσματα.

(γ) Νά διαλέξετε ένα 4x4 τετράγωνο ημερομηνιών άπό τό ήμερολόγιο. Νά βρεΐτε τό άθροισμα κάθε μιάς άπό τίς τρεΐς πρώτες στήλες. Νά προβλέψετε τό άθροισμα τής τελευταίας στήλης. Νά βρεΐτε τό άθροισμα κάθε μιάς άπό τίς τρεΐς πρώτες γραμμές. Νά προβλέψετε τό άθροισμα τής τελευταίας γραμμής.

(δ) Νά βρεΐτε τό άθροισμα τών άριθμών μιάς όλόκληρης γραμμής του ήμερολογίου (άπό τήν Κυριακή μέχρι τό Σάββατο). Νά τό διαιρέσετε μέ τόν άριθμό τής Τετάρτης. Νά κάνετε τό ίδιο καί γιά τίς άλλες γραμμές. Τί συμβαίνει;

ΚΥΡΙΑΚΗ	ΔΕΥΤΕΡΑ	ΤΡΙΤΗ	ΤΕΤΑΡΤΗ	ΠΕΜΠΤΗ	ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ	ΣΑΒΒΑΤΟ
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

8. Τό Αίγυπτιακό σύστημα πολλαπλασιασμού βασιζόμενο στό διπλασιασμό.

Πρόβλημα:

Ό Ραμσής, ένας ίδιοκτήτης καμήλων, άποφάσισε νά πουλήσει 12 άπό τίς καμήλες του στόν Άτεν. Ό Άτεν συμφώνησε νά πληρώσει έξι άργυρά νομίσματα γιά κάθε καμήλα. Πόσα άργυρά νομίσματα πήρε ό Ραμσής;

6 X 1 = 6
6 X 2 = 12
6 X 4 = 24
6 X 8 = 48
6 X 16 = 96

Λύση:

Έχουμε σχηματίσει έναν πίνακα όπως στά δεξιά. Νά αρχίσετε μέ τό 6x1 καί νά συνεχίσετε νά διπλασιάσετε τό συντελεστή μέχρι πού νά βρεῖτε ἕνα συντελεστή μεγαλύτερο άπό τό 12.

$8 + 4 = 12$, έτσι $24 + 48 = 6 \times 12$.

Νά δοκιμάσετε τά ἀκόλουθα:

(α) 15 x 16 (β) 24 x 9 (γ) 18 x 31 (δ) 84 x 23

Ρωσσικός Χωρικός πολλαπλασιασμός - διπλασιασμός καί διχασμός

Αὐτός εἶναι ὁ τρόπος μέ τόν ὁποῖο ἕνας Ρῶσσος χωρικός θά ἔλυνε τό πρόβλημα τοῦ Ραμσῆ. Ὁ χωρικός θά σχημάτιζε ἕνα πίνακα ἀρχίζοντας μέ τό 6x12. Τήν ἐπόμενη σχέση πού θά ἔγραφε στόν πίνακα θά τήν σχημάτιζε διαιρώντας τό 6 διά τοῦ 2 καί ἀπλασιάζοντας τό 12. Αὐτός ὁ τρόπος θά συνεχιζόταν μέχρι πού τό 1 θά παρουσιαζόταν στό ἀριστερό μέρος τοῦ πίνακα (τά ὑπόλοιπα θά διαγράφονταν). Ἔπειτα ὁ χωρικός θά ἔσβηνε κάθε σχέση πού θά εἶχε ἕνα διπλό ἀριθμό στήν ἀριστερή στήλη καί θά εἶχε προσθέσει ὅλες τίς σχέσεις στή δεξιά στήλη πού δέν εἶχαν διαγραφεῖ. Ἐκεῖνο τό ἄθροισμα θά ἦταν ἴσο μέ τό 6 x 12.

6 x 12	~~6 x 12~~
3 x 24	3 x 24
1 x 48	1 x 48
	72

Περισσότερα παραδείγματα:

~~28 x 56~~	27 x 13
~~14 x 112~~	13 x 26
7 x 224	~~6 x 52~~
3 x 448	3 x 104
1 x 896	1 x 208
1568 = 28 x 56	351 = 27 x 13

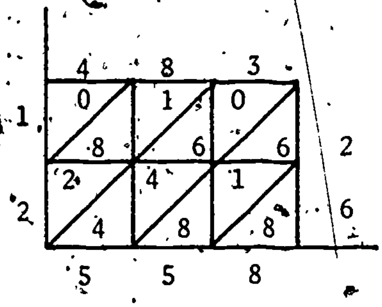
Τώρα νά κάνετε δικές σας ἀσκήσεις καί νά τίς λύσετε.

10. Δικτυωτός Πολλαπλασιασμός

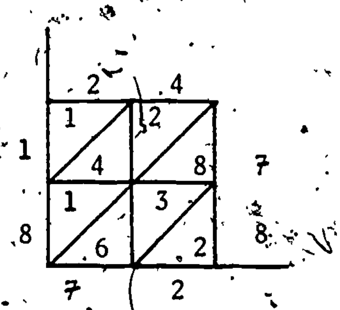
Αὐτή ἡ μέθοδος χρησιμοποιήθηκε στήν Εὐρώπη κατά τήν ἐποχή τοῦ Χριστόφορου Κολόμβου.

Οδηγίες: Φτιάξετε ἕνα κιγκλίδωμα σάν τό παρακάτω. (Οἱ διαστάσεις τοῦ κιγκλιδώματος ἐξαρτοῦνται ἀπό τόν ἀριθμό τῶν ψηφίων τῶν παραγόντων. Π.χ., 483x26 ἀπαιτεῖ ἕνα 3x2 κιγκλίδωμα, ἐνῶ τό 24x78 ἀπαιτεῖ ἕνα 2x2 κιγκλίδωμα). Τά μερικά γινόμενα εἰσέρχονται στά τετράγωνα (τά ψηφία τῶν δεκάδων χωρίζονται ἀπό τά ψηφία τῶν μονάδων). Προσθέστε τά μερικά γινόμενα χρησιμοποιόντας τούς διαγώνιους ἀριθμούς, ἀρχίζοντας μέ τό ψηφίο στή χαμηλότερη δεξιά γωνία, μεταφέροντας τίς δεκάδες (ἐάν ὑπάρχουν) μιᾶς διαγώνιας πρόσθεσης στήν ἑπομένη.

Παραδείγματα:



483 x 26 = 12,558



24 x 78 = 1,872

11. Τά κόκκαλα τοῦ Ναπιέρ

Τόν 16^{o} καί 17^{o} αἰῶνα στήν Εὐρώπη οἱ μεγάλες μάζες τῶν χωρικῶν εἶχαν πολύ λίγη μόρφωση. Μεταξύ ἄλλων, δέν γνώριζαν οὔτε τούς βασικούς πίνακες πολλαπλασιασμοῦ. Ὁ Τζών Ναπιέρ ὅμως, πού ἦταν ἕνας Σκωτσέζος μαθηματικός, ἀνέπτυξε ἕνα μαθηματικό τρόπο μέ τόν ὁποῖο ὁ καθένας μποροῦσε νά βρεῖ τά γινόμενα μερικῶν βασικῶν πράξεων πολλαπλασιασμοῦ. Κατασκευάζοντας ραβδιά πολλαπλασιασμοῦ τῆς τσέπης, τούς κουβάλαγε μαζί του καί ἔδειχνε στούς ἐνδιαφερόμενους πῶς νά τούς χρησιμοποιοῦν. Αὐτοί οἱ μικροί ράβδοι συνδέθηκαν τόσο πολύ μαζί του, ὥστε κατάντησαν νά ἀναφέρονται ὡς "τά κόκκαλα τοῦ Ναπιέρ".

Γιά παράδειγμα, παρουσιάζουμε ἐδῶ ἕνα σύνολο "κοκκάλων τοῦ Ναπιέρ". Τό πρῶτο "κόκκαλο" εἶναι τό δεικτικό κόκκαλο. Τό πρῶτο ψηφίο στήν κορυφή κάθε κόκκαλου εἶναι ἕνας διαφορετικός δεικτικός παράγων.

Γιά τόν πολλαπλασιασμό μονάδων (σάν τό 6x7) τά κόκκαλα χρησιμοποιοῦνται σάν ἕνας πίνακας πολλαπλασιασμοῦ. Γιά νά βρεῖτε τό γινόμενο τοῦ 6x7, χρειάζεστε δύο μόνο κόκκαλα- τό δεικτικό κόκκαλο καί εἴτε τό 6 κόκκαλο εἴτε τό 7 κόκκαλο.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0/1	0/2	0/3	0/4	0/5	0/6	0/7	0/8	0/9
2	0/2	0/4	0/6	0/8	1/0	1/2	1/4	1/6	1/8
3	0/3	0/6	0/9	1/2	1/5	1/8	2/1	2/4	2/7
4	0/4	0/8	1/2	1/6	2/0	2/4	2/8	3/2	3/6
5	0/5	1/0	1/5	2/0	2/5	3/0	3/5	4/0	4/5
6	0/6	1/2	1/8	2/4	3/0	3/6	4/2	4/8	5/4
7	0/7	1/4	2/1	2/8	3/5	4/2	4/9	5/6	6/3
8	0/8	1/6	2/4	3/2	4/0	4/8	5/6	6/4	7/2
9	0/9	1/8	2/7	3/6	4/5	5/4	6/3	7/2	8/1

7x6.

X	6
1	0/6
2	1/2
3	1/8
4	2/4
5	3/0
6	3/6
7	4/2
8	4/8
9	5/4

6x7

X	7
1	0/7
2	1/4
3	2/1
4	2/8
5	3/5
6	4/2
7	4/9
8	5/6
9	6/3

X	4	3
1		
2		
3		
4		
5	2/0	1/5
6		
7	2/8	2/1
8		
9		

Γιά νά πολλαπλασιάσετε 57x43, χρησιμοποιεῖτε τό δεικτικό κόκκαλο μαζί μέ τό 4 κόκκαλο καί τό 3 κόκκαλο.

Τά κόκκαλα δίνουν μόνο τά μερικά γινόμενα γι' αὐτό θά πρέπει νά γίνουν μερικές προσθέσεις, γιά νά βροῦμε τό συνολικό γινόμενο.

57=50+7, ἔτσι 57x43=(50+7)x43=
(50x43)+(7x43)

$$\begin{array}{r} 50\times43=2150 \\ 7\times43=\underline{\ \ 301} \\ 2451 \end{array}$$

Νά τό συνδιάσετε μέ τό δικτυωτό πολλαπλασιασμό.

	4	3	
2	2/0	1/5	5
4	2/8	2/1	7
	5	1	

Σημείωση: Ο πρῶτος παράγων παρουσιάζεται πάντοτε μέ τό δεικτικό κόκκαλο (ἄσχετα ἀπό πόσα ψηφία ἔχει). Νά φτιάξετε ἕνα δικό σας σύνολο "κοκκάλων" καί νά τά δοκιμάσετε στά δικά σας παραδείγματα.

'Ανασυγκρότηση στήν 'Αφαίρεση

Γιά νά χρησιμοποιοῦν καλύτερα τίς παρακάτω δραστηριότητες, οἱ μαθητές θά πρέπει νά μποροῦν νά:

* ἀναγνωρίζουν τίς μονάδες, δεκάδες καί ἑκατοντάδες σέ ἕνα δεδομένο ἀριθμό.

* συμπληρώνουν ἕνα διψήφιο ἤ πολυψήφιο πρόβλημα ἀφαίρεσης πού δέν ἀπαιτεῖ ἀνασυγκρότηση.

* ἀναπαριστοῦν ἕνα δεδομένο ἀριθμό μέ διάφορους τρόπους, σύμφωνα μέ τήν ἀξία τῆς τοποθέτησης ψηφίων χρησιμοποιώντας τούς "βάση 10" κύβους ἤ ἄλλα παρόμοια χειριζόμενα ὑλικά. Π.χ., νά ἀνασυγκροτήσετε 4 δεκάδες καί 3 μονάδες σέ 3 δεκάδες καί 13 μονάδες.

Τά ὑλικά πού βοηθοῦν περισσότερο τήν διδασκαλία τῆς ἀνασυγκρότησης στήν ἀφαίρεση εἶναι οἱ κύβοι "βάσης 10". 'Εάν δέν εἶναι διαθέσιμοι, τότε μποροῦμε νά χρησιμοποιήσουμε ξυλαράκια, γλυφιτζουριῶν ἤ παγωτῶν, σέ δέματα τῶν 10 γιά τίς δεκάδες καί μονά ξυλαράκια γιά τίς μονάδες.

Τά ἀκόλουθα ἀντιπροσωπεύουν μιά προτεινόμενη μέθοδο διδασκαλίας:

1. Χρησιμοποιώντας τούς κύβους νά δώσετε στούς μαθητές ἕνα πρόβλημα νά λύσουν καί νά καταγράψουν τίς ἀπαντήσεις τους. 'Ανάλογα μέ τό ἐπίπεδο τῶν μαθητῶν, νά σημειώσετε τίς στῆλες μέ εἰκόνες τῶν κύβων; δεκάδες, μονάδες, ἤ νά τίς ἀφήσετε ἀσημείωτες. 'Οποιοσδήποτε τρόπος καί νά χρησιμοποιηθεῖ, νά ὁδηγεῖ πρός τίς ἀχαρακτήριστες στῆλες.

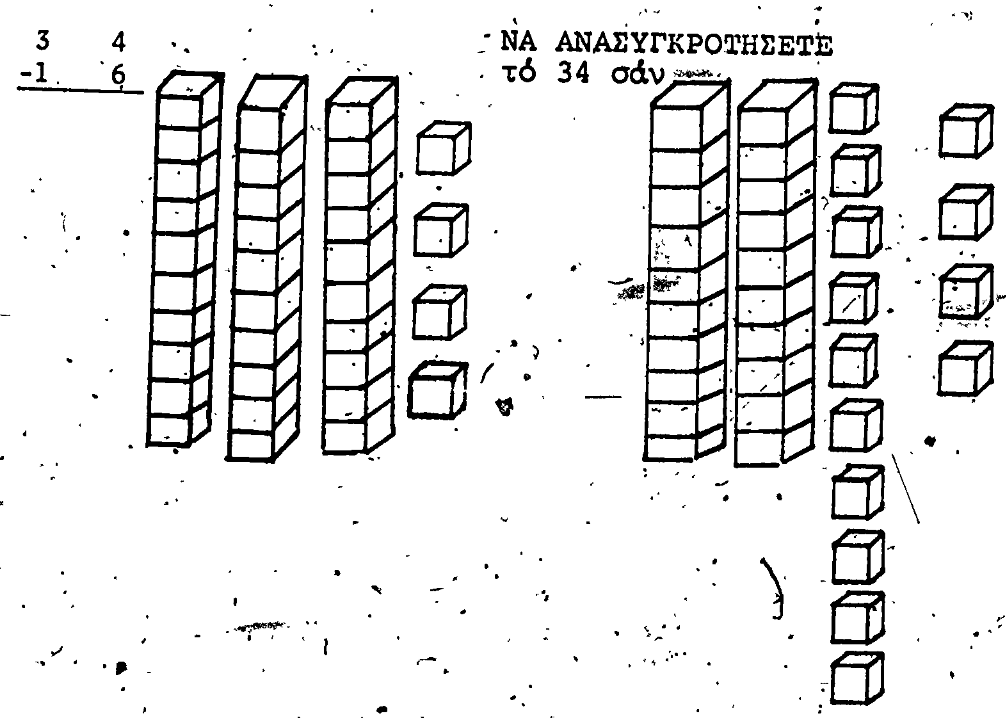
2	6
-1	4

Δεκάδες	Μονάδες
2	6
-1	4

$$\begin{array}{r} 26 \\ \underline{-14} \end{array}$$

Σχῆμά 1

2. Όταν οἱ μαθητές μποροῦν νά κάνουν τά προηγούμενα ἀνεξάρτητα, τότε νά τούς δώσετε ἕνα πρόβλημα πού νά ἀπαιτεῖ ἀνασυγκρότηση. Στό ὑποδεικνυόμενο παράδειγμα (σχῆμα 2), ἔχοντας παρουσιάσει τό 34 σάν 3 δεκάδες καί 4 μονάδες, ὁ μαθητής σύντομα θά παρατηρήσει ὅτι δέν μπορεῖ κανείς νά ἀφαιρέσει (ἤ νά βγάλει) 6 μονάδες. Ἔχοντάς τίς 4 μονάδες ἀκριβῶς μπροστά ἀπό τόν μαθητή δέν ἐπιτρέπει στό μαθητή νά ἀντιστρέψει τούς ἀριθμούς καί νά ἀφαιρέσει τό 4 ἀπό τό 6 (ἕνα συνηθισμένο λάθος). Σ' αὐτό τό παράδειγμα, ἔχουμε καθορίσει μέ τό μαθητή ὅτι τό 34 εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό 16, καί ἔτσι μποροῦμε νά κάνουμε τήν ἀφαίρεση. Τότε νά τόν ρωτήσετε γιά ὑποδείξεις στό τί μποροῦμε νά κάνουμε γιά νά ὁλοκληρώσουμε τήν ἀφαίρεση. Συχνές ἀπαντήσεις εἶναι νά ἀνταλλάξουμε μιά δεκάδα μέ μονάδες. Μερικά παιδιά θά προτείνουν νά ἀνταλλάξουν ὅλες τίς δεκάδες μέ μονάδες, ἀλλά σύντομα θά παρατηρήσουν ὅτι μόνο μία δεκάδα χρειάζεται νά ἀνταλλαχθεῖ. Ἐάν ὁ μαθητής δέν προτείνει μόνος του αὐτή τήν ἀνταλλαγή, τότε νά τόν ρωτήσετε γιά αὐτή τή δυνατότητα. Νά τονίσετε τίς δύο ἔννοιες: (1) ὅτι μιά δεκάδα = 10 μονάδες (μερικοί μαθητές ἁπλῶς ταυτίζουν τούς κύβους καί κάνουν τήν ἀνταλλαγή χωρίς νά ἀναγνωρίζουν αὐτή τήν ἰσότητα, καί (2) ὅτι οἱ δέκα μονάδες προσθέτονται στίς μονάδες πού ἤδη εἴχαμε, μέ ἀποτέλεσμα νά ἔχουμε 14 μονάδες. Μετά νά ἀφήσετε τό μαθητή νά τελειώσει τό πρόβλημα μέ τό νά ἀφαιρέσει πρῶτα τίς 6 μονάδες καί μετά τή μιά δεκάδα. Ἡ ἀπάντησή του τότε νά σημειωθεῖ.



Σχῆμα 2.

3. Όταν οἱ μαθητές μποροῦν νά ἀποτελειώσουν μόνοι τους προβλήματα σάν τά προηγούμενα, τότε νά τούς εἰσάγετε στήν πραγματική καταγραφή τῆς μεθόδου τῆς ἀνασυγκρότησης. Ἡ πεῖρα ἔχει δείξει ὅτι πολλοί μαθητές ἔχουν δυσκολία ὅταν καταγράφουν τήν ἀνασυγκρότηση μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο:

$$\begin{array}{r} {}^{2}\cancel{3}\ \ {}^{1}4 \\ \underline{-1\ \ \ 6} \end{array}$$

Δέν γνωρίζουν ὅτι μποροῦν νά βάλουν τό ἕνα μπροστά ἀπό τό τέσσερα γιά νά δείξουν τό 10+4=14; ὥστε αὐτή ἡ σκέψη νά γίνεται πιό μηχανικά. Καταγράφοντας ὅμως τήν ἀνασυγκρότηση σάν

$$\begin{array}{r} {}^{2}\cancel{3}\ \ 1\cancel{4} \\ \underline{-1\ \ \ 6} \end{array}$$

οἱ μαθητές προσθέτουν νοερά τό 4 μέ τό 10 καί ἔτσι καταλαβαίνουν πῶς συμβαίνει καί ἔχουν 14. Μερικοί μαθητές θά παρατηρήσουν ὅτι μποροῦν νά χρησιμοποιήσουν τόν προηγούμενο τρόπο καταγραφῆς καί θά τόν χρησιμοποιοῦν σάν μιά πιό γρήγορη μέθοδο.

4. Όταν δίνετε προβλήματα γιά ἐξάσκηση, νά συμπεριλαμβάνετε πάντα προβλήματα πού δέν ἀπαιτοῦν ἀνασυγκρότηση γιά νά ἀποφύγετε τή γενίκευση, ὅτι <u>πρέπει</u> νά ἀνασυγκροτοῦμε σέ κάθε πρόβλημα ἀφαίρεσης. Ἡ χρησιμοποίηση τῶν κύβων βοηθᾶ τό μαθητή νά ἐννοήσει εὐκολότερα πότε χρειάζεται ἡ ἀνασυγκρότηση. Νά χρησιμοποιήσετε τούς κύβους μαζί μέ τόν τρόπο καταγραφῆς μέχρι πού οἱ μαθητές νά καταλάβουν πώς δέν τούς χρειάζονται πιά.

5. Ἀφοῦ οἱ μαθητές ἔχουν ἀποκτήσει οἰκειότητα μέ τούς κύβους "βάσης 10" (ἤ μέ τά δέματα ἀπό ξυλαράκια ἤ μέ ὁτιδήποτε ἄλλο μέσο) τότε μποροῦν νά χρησιμοποιηθοῦν ὑλικά μέ περισσότερη ἀφηρημένη ἔννοια. Ὑπάρχει ἕνα παιχνίδι, ἐμπορικά κατασκευασμένο, ἀνταλλαγῆς κερμάτων πού εἶναι καλό γιά αὐτό τό σκοπό, ἀλλά ἐάν δέν ὑπάρχει ἄνεση χρημάτων δέν σημαίνει ὅτι δέν πρέπει νά χρησιμοποιήσετε αὐτή τήν ἰδέα. Τό μόνο πράγμα πού χρειάζεται εἶναι μερικά πολύχρωμα κέρματα (ἤ μάρκες) τοῦ πόκερ, ἤ νά κόψετε κομματάκια χρωματιστοῦ χαρτιοῦ. Ἕνα χρῶμα νά παριστάνει μονάδες, ἕνα ἄλλο δεκάδες, ἕνα ἄλλο ἑκατοντάδες καί ἕνα ἄλλο χιλιάδες. Πρίν ἀκόμη κάνετε παραδείγματα ἀφαίρεσης (ἤ πρόσθεσης) θά ἦταν καλύτερο νά συνηθίσετε πρῶτα τούς μαθητές στή σχέση μεταξύ τῶν χρωμάτων καί τῶν ἀριθμῶν. Αὐτό μπορεῖ νά γίνει πολύ εὔκολα παίζοντας ἕνα ἁπλό παιχνίδι μέ ζάρια. Ἕνας παίχτης ρίχνει τά ζάρια καί ἕνας τραπεζίτης τοῦ δίνει τόν ἴδιο ἀριθμό πού δείχνουν τά ζάρια σέ πολύχρωμα κέρματα. Νά ὑποθέσετε ὅτι μιά κίτρινη μάρκα παριστάνει μιά μονάδα, μιά κόκκινη μάρκα παριστάνει μιά δεκάδα, καί μιά μπλέ μάρκα παριστάνει μιά ἑκατοντάδα. Κάθε παίχτης παίζει μέ τή σειρά του καί μαζεύει τίς μάρκες ἀπό τόν τραπεζίτη. Ὁ μόνος

κανονισμός εἶναι ὅτι ὁ κάθε παίχτης δέν μπορεῖ νά ἔχει περισσότερες ἀπό 9 μάρκες τοῦ ἴδιου χρώματος. Μόλις ἕνας παίχτης ἔχει ἀποκτήσει 10 μάρκες τοῦ ἴδιου χρώματος, θά πρέπει νά τίς ἀνταλλάξει μέ μιά ἰσότιμη μάρκα.

Παραδείγματα ἀφαίρεσης (ὅπως καί πρόσθεσης) μποροῦν νά γίνουν χρησιμοποιώντας χρωματιστές μάρκες ἀνταλλαγῆς μέ τόν ἴδιο τρόπο πού περιγράφτηκε στήν περίπτωση τῆς χρήσης τῶν κύβων "βάσης 10".

Σημείωση: Τό παιχνίδι τῆς ἀνταλλαγῆς μέ τίς μάρκες θυμίζει πολύ ἔντονα τή χρήση χρημάτων. Π.χ., νά σκεφτεῖτε τήν κίτρινη μάρκα σάν πέννυ, τήν κόκκινη μάρκα σάν δεκάρα, καί τήν μπλέ μάρκα σάν δολλάριο. Αὐτό, μέ φυσικό τρόπο ὁδηγεῖ σέ χρηματικές ἀνταλλαγές, πού παρουσιάζονται στό ἑπόμενο ἄρθρο.

Χρηματικά Παιχνίδια

Χρηματικά παιχνίδια ἀντιπροσωπεύουν ἕνα καλό τρόπο εἰσαγωγῆς μαθηματικῶν σέ ἕνα μικρό παιδί. Ἀπό μικρή ἡλικία, στήν σημερινή κοινωνία, τά παιδιά ἐκτίθενται σέ θέματα πού ἀφοροῦν διαχειρισμό χρημάτων. Ἐμεῖς οἱ μεγάλοι ὅμως δέν συνειδητοποιοῦμε ὅτι ἔτσι γίνεται ἐπαφή μέ τούς ἀριθμούς. Ποιός καλύτερος τρόπος ὑπάρχει γιά νά εἰσαγάγει κανείς τά μαθηματικά - τό "βάση 10" σύστημα, τό δεκαδικό συμβολισμό, κλπ. - ἀπό τό νά χρησιμοποιήσει κανείς κάτι πού εἶναι ἤδη γνωστό στούς μαθητές. Ἐάν χρησιμοποιοῦνται ψεύτικα χρήματα, πράγμα πού εἶναι καί πιό λογικό, νά προσπαθήσετε νά χρησιμοποιήσετε ὅλες τίς χρηματικές διαβαθμήσεις πού θυμίζουν ἀληθινά χρήματα. Ὑπάρχουν πολλά καί διάφορα παιχνίδια αὐτοῦ τοῦ εἴδους πού πωλοῦνται στήν ἀγορά.

Ἐνασχόληση 1 Παιχνίδια ἀνταλλαγῆς κερμάτων
Ἀριθμός παιχτῶν: μέχρι 6 μαζί μέ τόν τραπεζίτη

1^{o} Παιχνίδι: Ἀνταλλαγή μέ πέννια, δεκάρες, δολλάρια

Σκοποί:
- Ἐνδυνάμωση τῆς ἀναγνώρισης τῆς ἀξίας τῶν κερμάτων καί τῶν ἰσοτιμιῶν
- Χειρισμός κερμάτων
- Ἀναγνώριση συνόλων καί ὑπολογισμοί (μέ ζάρια)
- Ἐνδυνάμωση τῶν ἐννοιῶν τοποθετικῆς ἀξίας

Ὑλικά:
- Πίνακες παιχνιδιῶν φτιαγμένοι ἀπό τούς δασκάλους-κάθε πίνακας ἔχει τρεῖς ἐπιγραφημένες στῆλες: πέννια, δεκάρες, δολλάρια
- Δύο ζάρια
- Ψεύτικα πέννια, δεκάρες, δολλάρια

Διαδικασία: Γιά τά πρῶτα δύο παιχνίδια ὁ δάσκαλος ἴσως νά χρειαστεῖ νά γίνει ὁ τραπεζίτης. Μετά, ἕνας μαθητής παίρνει τό ρόλο τοῦ τραπεζίτη καί οἱ ὑπόλοιποι μαθητές παραμένουν σάν παῖχτες. Κάθε μαθητής μέ τή σειρά του, ρίχνει δύο ζάρια καί ὑπολογίζει τά ἀνάλογα ποσά. Ὁ τραπεζίτης δίνει πέννια στό ποσό πού τοῦ ζητοῦν οἱ παῖχτες. Κάθε παίχτης βάζει τά πέννια στή στήλη τοῦ πίνακα πού εἶναι γιά τά πέννια. Δέν ἐπιτρέπεται στό μαθητή νά ἔχει περισσότερα ἀπό 9 πέννια στή στήλη. Ὅταν κάποιος ἔχει 10 πέννια τότε πρέπει νά τά ἀνταλλάξει γιά μιά δεκάρα ἀπό τόν τραπεζίτη καί νά τή βάλει στή στήλη γιά τίς δεκάρες. Ὁ πρῶτος παίχτης πού θά φτάσει στίς 10 δεκάρες τίς ἀνταλλάζει γιά ἕνα δολλάριο, καί εἶναι ὁ νικητής. Ὁ νικητής γίνεται καί ὁ ἑπόμενος τραπεζίτης. Κατά τή διάρκεια τοῦ παιχνιδιοῦ ὁ δάσκαλος πρέπει κατά διαστήματα νά λέει "σταματῆστε τίς ἀνταλλαγές" καί νά ρωτήσει κάθε παίχτη τήν ἀξία τῶν κερμάτων πού ἔχει στόν πίνακά του, καί τό σύνολο τῶν χρημάτων πού ἔχει.

2ο Παιχνίδι: Ἀνταλλαγή μέ πέννια, πεντάρες, εἰκοσιπεντάρες.

Αὐτό τό παιχνίδι παίζεται τό ἴδιο σάν τό προηγούμενο, ἀλλά ἐδῶ δέν ἐπιτρέπονται παραπάνω ἀπό τέσσερα κέρματα σέ κάθε στήλη. Οἱ πίνακες τοῦ παιχνιδιοῦ εἶναι ἴδιοι μέ αὐτούς τοῦ πρώτου παιχνιδιοῦ, μέ τή διαφορά ὅτι αὐτή τή φορά οἱ στῆλες εἶναι ἐπιγραμμένες: πέννια, πεντάρες, καί εἰκοσιπεντάρες. Ὁ πρῶτος μαθητής πού φτάνει τίς 5 εἰκοσιπεντάρες εἶναι ὁ νικητής καί πρέπει νά ἀνταλλάξει 4 εἰκοσιπεντάρες μέ ἕνα δολλάριο. Ἔτσι ὁ νικητής ἔχει $1.25. Καί τά δύο παιχνίδια μποροῦν νά ἔχουν μερικές παραλλαγές.

Ἐνασχόληση 2. Τό κουτί μέ τά σχήματα
Ἀριθμός παιχτῶν: Ὅλη ἡ τάξη

Σκοποί:
- Ἐνδυνάμωση τῶν ἐπιδεξιοτήτων στήν πρόσθεση
- Χρήση τῆς πρόσθεσης σάν πράξη γιά τήν εὕρεση συνόλων
- Γεωμετρικά σχήματα καί σχέσεις.

Ὑλικά:
- Ἕνα κουτί μέ χάρτινα τρίγωνα, τετράγωνα καί παραλληλόγραμμα, κομμένα στίς ἴδιες διαστάσεις.
- Φύλλα χαρτιοῦ
- Κόλλα

Πορεία: Σέ κάθε σχῆμα πρέπει νά εἶναι γραμμένη μιά τιμή σάν 1¢, 19¢, ἐξαρτόμενη ἀπό τό ἐπίπεδο τῶν ἀποδόσεων τῶν μαθητῶν. Οἱ μαθητές πρέπει νά κολλήσουν τά ἤδη κομμένα σχήματα σέ κόλλες χαρτιοῦ κάνοντας ἔτσι διαφορετικά σχήματα. Ἐδῶ ἴσως νά χρειαστοῦν ὁδηγίες.

Όταν πιά έχουν τελειώσει τό σχήμα, ή σχήματα, νά βροῦν τό σύνολο τῶν τιμῶν σέ κάθε σχῆμα καί νά τό γράψουν δίπλα του. Στό κάτω μέρος τοῦ χαρτιοῦ μποροῦν νά ὑπολογίσουν τό κόστος ὅλων τῶν σχημάτων καί νά προσθέσουν τά ποσά γιά νά βροῦν τήν "συνολική τιμή".

Ἐνασχόληση 3 Κατάστημα καί Ἀγορά
Ἀριθμός μαθητῶν: μιά μικρή ὁμάδα

Σκοποί: Οἱ σκοποί αὐτῆς τῆς ἀγοραστικῆς δραστηριότητας καλύπτουν ἕνα πλατύ τομέα, συμπεριλαμβάνοντας:

- Πρακτική ἐξάσκηση στή χρήση κερμάτων
- Δεκαδικός συμβολισμός σέ χρηματικά προβλήματα
- Ἐνδυνάμωση τοποθετικῆς ἀξίας τῶν ψηφίων στήν ἀριθμητική κατάταξη τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος ἀρίθμησης.
- Πρακτική ἐξάσκηση ὑπολογισμῶν
- Βελτίωση τῆς τεχνικῆς γνώσης στίς λύσεις προβλημάτων
- Πρακτική ἐμπειρία μέ διαστάσεις
- Βοήθεια στήν ἱκανότητα ὀργάνωσης ὑλικῶν

Ὑλικά:

- Παιχνιδοκατάστημα (ἄν δέν ὑπάρχει κανένα διαθέσιμο, νά φτιάξετε ἕνα ἁπλό ἀπό στοιβαγμένα μεγάλα χάρτινα κιβώτια)
- Ἄδειες, ἐπιγραμμένες, καθαρές κονσέρβες φαγητοῦ μέ τιμές γραμμένες πάνω τους
- Παιχνιδοχρήματα
- Χαρτί μέ γραμμές
- Μηχανή πρόσθεσης, μηχανή ταμείου ἤ ἕναν ἠλεκτρονικό ὑπολογιστή
- Διαφημίσεις ἀπό ἐφημερίδες
- Διάφοροι ἀγοραστικοί κατάλογοι
- Κάρτες δραστηριοτήτων πού δείχνουν τίς ἐργασίες πού πρέπει νά γίνουν

Πορεία: Στίς ἑπόμενες δραστηριότητες, εἶναι ἀπαραίτητο γιά τό δάσκαλο νά παρατηρεῖ τήν ἐργασία κάθε παιδιοῦ γιά νά σιγουρευτεῖ ὅτι χρησιμοποιοῦνται οἱ σωστές πράξεις, καί ὅτι οἱ ἀριθμοί γράφονται καί τοποθετοῦνται σωστά.

Οἱ ἀγοραστικές δραστηριότητες μποροῦν νά μποῦν στή σειρά μέ τόν ἑξῆς τρόπο:

(1) Ἁπλές ἀγοραστικές δραστηριότητες χρησιμοποιώντας παιχνιδοχρηματικά κέρματα, προοδεύοντας σέ δραστηριότητες πού τά παιδιά κάνουν καταλόγους, προσθέτουν τιμές πάνω σέ χαραγμένο χαρτί καί συγκρίνουν τά σύνολα μέ ἕναν καταστηματάρχη. Ὅταν τά παιδιά εἶναι ἕτοιμα γιά

αὐτό τό μέρος τῆς ἄσκησης, πού προϋποθέτει σωστή τοποθέτηση τῶν ἀριθμῶν, τότε πρέπει νά ἐπιβλεφθοῦν προσεκτικά.

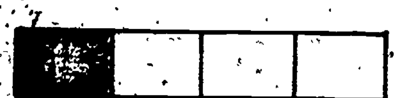
(2) Νά δώσετε στά παιδιά ἀγοραστικούς καταλόγους καί νά τά βάλετε νά βροῦν τό συνολικό κόστος τῶν προϊόντων στούς καταλόγους. Μέ αὐτό τόν τρόπο νά κάνετε κάθε κατάλογο σύμφωνα μέ τήν ἱκανότητα τοῦ κάθε παιδιοῦ. Κατά τή διάρκεια αὐτῆς τῆς ἐνασχόλησης, νά κάνετε χρήση συγκρίσεων: "Ποιός ξόδεψε περισσότερα...ἤ...;" "Πόσα περισσότερα;"

(3) Νά δώσετε στό κάθε παιδί ἕνα προκαθορισμένο ἀριθμό χρημάτων καί νά δεῖτε πόσα πράγματα μπορεῖ νά ἀγοράσει σύμφωνα μέ τίς τιμές στίς διαφημίσεις τῶν ἐφημερίδων ἤ τῶν καταλόγων.

Οἱ ἀνωτέρω ἐνασχολήσεις εἶναι ἁπλῶς σύντομες προτάσεις. Ὁ δάσκαλος μπορεῖ νά δημιουργήσει πολλές καί ἐνδιαφέρουσες προεκτάσεις αὐτῶν τῶν ἀσκήσεων γιά νά κινήσει τό ἐνδιαφέρον τῶν μαθητῶν καί νά ἱκανοποιήσει τούς σκοπούς πού ἤδη ἀναφέρθηκαν.

Μιά Ὀπτική Σειρά γιά τήν Διδασκαλία Κλασμάτων

Μερικοί μαθητές συναντοῦν δυσκολίες ὅταν πρόκειται νά γράψουν ἕνα κλάσμα γιά νά περιγράψουν ἕνα μέρος τοῦ συνόλου. Μιά αἰτία γι' αὐτή τή δυσκολία εἶναι ὅτι τό δεδόμενο παράδειγμα δέν ἀντιστοιχεῖ στόν κλασματικό ἀριθμό. Τό πρότυπο Α παρουσιάζει ἕνα ὁλόκληρο σχῆμα στό ὁποῖο ἕνα τμῆμα ἔχει σκιαστεῖ καί τρία τμήματα δέν ἔχουν σκιαστεῖ. Ἐνῶ τοῦτο δείχνει ὅτι οἱ ἀριθμοί <u>ἕνα</u> καί <u>τρία</u> πρέπει νά συμπεριληφθοῦν στό κλάσμα (ἕνα γιά τό σκιασμένο καί τρία γιά τά μή σκιασμένα), δέν συμβαίνει αὐτό, ἀφοῦ ἡ τιμή τοῦ κλάσματος γι' αὐτό τό τμῆμα εἶναι 1/4.



Πρότυπο Α

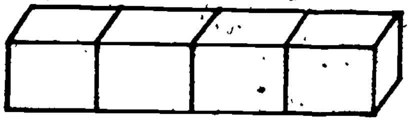
Μέ τό συμβολισμό τοῦ πρότυπου Α (1/4) ὁ δεύτερος ἀριθμός χαρακτηρίζει τήν κατηγορία τοῦ κλάσματος (τέταρτα), ὁ πρῶτος ἀριθμός μετράει τόν ἀριθμό τῶν τμημάτων αὐτῆς τῆς κατηγορίας πού ἔχουν προσδιοριστεῖ μέ τή σκιαγράφηση (ἕνα). Οἱ μαθητές πρέπει οὐσιαστικά νά μετρήσουν τό σκιαγραφημένο τμῆμα δύο φορές γιά νά φτάσουν στή τιμή τοῦ κλάσματος. Μιά σειρά ἀπό προαπαιτούμενες δραστηριότητες βοηθᾶ τούς μαθητές νά καταλάβουν τόν κλασματικό συμβολισμό 1/4 καί πῶς αὐτός συνδέεται μέ τό πρότυπο. Οἱ δραστηριότητες βασίζονται σ' ἕνα πρότυπο πού ὄντως ἀντιστοιχεῖ στόν ἀριθμό τοῦ κλάσματος ἀρχικά καί κατόπιν προχωρεῖ στήν σκιαγράφηση.*

Ἡ ἑπόμενη σειρά μπορεῖ νά ὁδηγήσει σέ μιά κατανόηση τοῦ συμβολισμοῦ γιά κλάσματα:

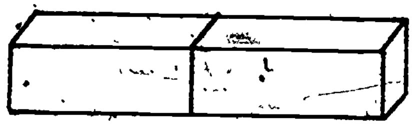
(1) Ἀνάπτυξη τῆς ἔννοιας πού ἀντιπροσωπεύεται ἀπό τόν ἀπό κάτω ἀριθμό (παρονομαστή): <u>κατηγορίες κλασμάτων</u>.

(2) Ἀνάπτυξη τῆς ἔννοιας πού ἀντιπροσωπεύεται ἀπό τόν ἀπό πάνω ἀριθμό (ἀριθμητή): <u>τμήματα</u>.

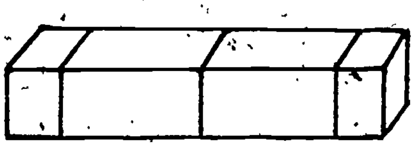
(3) <u>Μετάβαση</u> ἀπό τήν ἀντιστοιχία στή σκιαγράφηση.



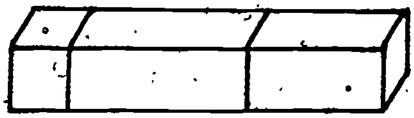
Πρότυπο Β



Πρότυπο Γ

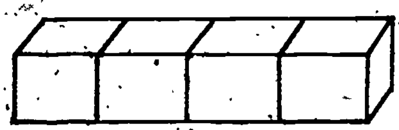


Πρότυπο Δ



Πρότυπο Ε

1ο Βῆμα: (Νά δεῖτε τά πρότυπα Β, Γ, Δ, Ε). Οἱ μαθητές κάνουν αὐτά τά πρότυπα (ἤ μποροῦν νά γίνουν ἀπό τό δάσκαλο) καί ἐξετάζουν νά προσδιορίσουν ἐάν παρουσιάζεται ἡ κατηγορία τῶν τετάρτων ἤ ὄχι. Κατόπιν διατυπώνονται ἐξηγήσεις ἀπό τούς μαθητές. Προσδιορίζεται ὅτι τό Β εἶναι τό σωστό πρότυπο.

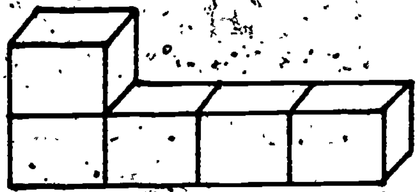


$\frac{\quad}{4}$

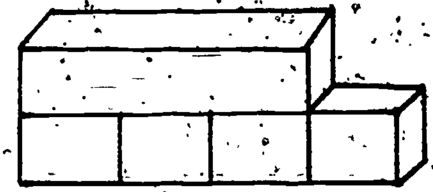
Πρότυπο Β - Κατηγορία τῶν Τετάρτων

Ὁ συμβολισμός /4 χρησιμοποιεῖται γιά νά παρουσιάσει τέταρτα ὅπως φαίνεται στό παραπάνω πρότυπο.

*Τό πρότυπο παρουσιάζεται στό "<u>Title IV-C, Fractions: An Early Approach</u>", ἕνα ἀρχικό πρόγραμμα πού ἀναπτύχθηκε ἀπό τό Rochester City School System's Mathematics Department καί χρησιμοποιεῖται σάν βάση στή διδασκαλία πρόσθεσης, ἀφαίρεσης καί μετονόμασης κλασμάτων.



Πρώτυπο ΣΤ



Πρώτυπο Η

2^o Βῆμα: (Νά δεῖτε τά πρώτυπα ΣΤ καί Η. Οἱ μαθητές φτιάχνουν αὐτά τά πρώτυπα (φτιάχνονται εὔκολα μέ ράβδους) καί γράφουν τόν συμβολισμό. Ὁ πάνω ἀριθμός μετρᾶ τό πλῆθος τῶν τμημάτων μιᾶς κατηγορίας κλασμάτων (ἡ κατηγορία τῶν τετάρτων χρησιμοποιεῖται καί στίς δύο περιπτώσεις) πού ἔχουν ἀντιστοιχηθεῖ. Στό πρώτυπο ΣΤ, ὁ ἀριθμός τῶν τετάρτων πού ἔχουν ἀντιστοιχηθεῖ εἶναι ἕνα, ἔτσι ὁ συμβολισμός τοῦ κλάσματος εἶναι 1/4. Στό πρώτυπο Η, ὁ ἀριθμός τῶν τετάρτων πού ἔχουν ἀντιστοιχηθεῖ εἶναι τρία, ἔτσι ὁ συμβολισμός τοῦ κλάσματος εἶναι 3/4.

Τμῆμα Σκίτσο τῆς Κατηγορίας τῶν Τετάρτων

Πρώτυπο Θ

3^o Βῆμα: (Νά δεῖτε τό πρώτυπο Θ). Οἱ μαθητές παραλαμβάνουν ἕνα χαρτί πού παρουσιάζει ἕνα σκίτσο τῆς κατηγορίας τῶν τετάρτων. Καθοδηγοῦνται νά ἀντιστοιχίσουν ἕνα ξεχωριστό κομμάτι μέ τό σκίτσο, καί κατόπιν νά σκιαγραφήσουν τήν ἐπιφάνεια πού αὐτό καταλαμβάνει. Ἀφοῦ τό σκιαγραφημένο σχῆμα ἀντιστοιχεῖ στό ξεχωριστό κομμάτι, μπορεῖ νά περιγραφτεῖ μέ τόν συμβολισμό 1/4.

Μεταφορικός Χῶρος σέ Ἁπλά Παραδείγματα Πρόσθεσης καί Πολλαπλασιασμοῦ

Ἡ πρόσθεση καί ὁ πολλαπλασιασμός παρουσιάζουν ὅμοια προβλήματα ὅταν ἀριθμοί πρέπει νά "μεταφερθοῦν" ἀπό τό ἕνα μέρος στό ἄλλο.

Πρόσθεση

Πρῶτο: Νά χρησιμοποιήσετε μιά διπλή γραμμή στό κάτω μέρος τοῦ κάθε προβλήματος ἔτσι ὥστε ὁριζόντια καί κάθετα προβλήματα νά χρησιμοποιοῦν τά ἴδια σύμβολα καί νά διαβάζονται μέ τόν ἴδιο τρόπο. Ἡ διπλή γραμμή στό κάθετο πρόβλημα διαβάζεται "ἴσον" καί προσομοιάζει τό ἐξισωτικό σύμβολο στό ὁριζόντιο πρόβλημα.

$$\begin{array}{r} 8 \\ +7 \\ \hline\hline \end{array}$$

Τό ἴδιο μέ τό

$8 + 7 =$

Δεύτερο: Ἀντί νά ζητήσετε ἀπό τό μαθητή νά γράψει τό ἄθροισμα κατά τήν ἀντίστροφη σειρά (ὅπως συνήθως γίνεται), νά γράψετε τόν "μεταφερόμενο ἀριθμό" πρῶτο. Π.χ., ὅταν σημειώνετε τό ἄθροισμα 9 σύν 6, τό 1 στή στήλη τῶν δεκάδων γράφεται πρῶτο, κατόπιν τό 5 στή στήλη τῶν μονάδων. Αὐτό τείνει νά περιορίζει τό λάθος τοῦ μαθητή, τό νά γράφει τό 1 στή θέση τῶν μονάδων καί νά μεταφέρει τό 5.

Τρίτο: Ὅταν ὁ μεταφερόμενος ἀριθμός σημειώνεται στήν κορυφή τοῦ προβλήματος, ἡ ἀπόσταση μεταξύ τῶν τμημάτων τοῦ ἀριθμοῦ ἐπιτρέπει ἐσφαλμένη τοποθέτηση.

Ἐάν οἱ γραμμές ἰσότητος εἶναι χωρισμένες ἐλαφρά, δημιουργεῖται ἕνας χῶρος ἐργασίας γιά νά τοποθετηθεῖ ὁ μεταφερόμενος ἀριθμός ἔτσι ὥστε τά τμήματα τοῦ ἀριθμοῦ νά εἶναι κοντά.

$$\begin{array}{r} 15 \\ 17 \\ +19 \\ \hline +\ 2 \\ \hline 51 \end{array}$$

Πολλαπλασιασμός

Ὁ πολλαπλασιασμός εἶναι μοναδικός κατά τό ὅτι εἶναι ἕνας συνδυασμένος ἀλγόριθμος πολλαπλασιασμοῦ καί πρόσθεσης. Μέ τόν μεταφερόμενο ἀριθμό πάνω ἀπό τό πρόβλημα τά ἑπόμενα λάθη εἶναι συνηθισμένα:

- Οἱ ἀριθμοί πρῶτα προσθέτονται, μετά πολλαπλασιάζονται.
- Ὁ μεταφερόμενος ἀριθμός τοποθετεῖται λανθασμένα.
- Ὁ μεταφερόμενος ἀριθμός χρησιμοποιεῖται σάν παράγοντας ἀντί γιά προσθετέος.

Ἐάν ὁ χῶρος ἐργασίας μεταξύ τῶν γραμμῶν ἰσότητας χρησιμοποιεῖται γιά τούς μεταφερόμενους ἀριθμούς, μόνο πολλαπλασιασμός γίνεται μέ ὅλους τούς ἀριθμούς πάνω ἀπό τίς γραμμές ἰσότητας, καί οἱ "ἐνδιάμεσες" γραμμές (διπλή γραμμή ἰσότητας) μποροῦν νά χρησιμοποιηθοῦν γιά μεταφερόμενους ἀριθμούς οἱ ὁποῖοι μόνο προσθέτονται. Τότε, κάθε χειρισμός ἔχει τή δική τοῦ τοποθεσία.

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times\ 7 \\ \hline +2 \\ \hline 91 \end{array}$$

Γιά νά σιγουρευτοῦμε ὅτι οἱ "ἐνδιάμεσοι ἀριθμοί" ἤ "μεταφερόμενοι ἀριθμοί" προσθέτονται, μπορεῖ ἀκόμη νά εἰσαχθεῖ τό σύμβολο "+".

Σημείωση: Αὐτό τό σύστημα τοῦ χρησιμοποιεῖται μιά διπλή γραμμή (ἰσοδύναμη πρός τό σύμβολο "=") στό κάτω μέρος ἑνός κάθετα γραμμένου παραδείγματος, χρησιμοποιεῖται μόνο σάν ἕνα "δεκανίκι" (βοηθητικό κρατούμενο) μέχρι νά χρησιμοποιηθεῖ ὁ παραδοσιακός ἀλγόριθμος.

Ὑπολογισμοί σέ Δικτυωτό Χαρτί

Μερικές φορές ἡ ἐπιδιόρθωση σέ ὑπολογιστική ἐπιδεξιότητα ἁπλῶς ἀνακατέβει τό πρόβλημα τῶν καλογραμμένων ἀριθμῶν σέ κομψές καί ἀκριβεῖς στῆλες.

Προσθέτω καί ἀφαιρῶ, ὤ τί θαυμάσια
Ὅλες αὐτές οἱ πράξεις δέν μοῦ εἶναι πρόβλημα
Ἀλλά οἱ στῆλες μοῦ λυγίζονται
Μπερδεύω τά μονά μέ τίς δεκάδες
Παρακαλῶ σας ἀριθμοί σταθεῖτε στή γραμμή!

Τί μπορεῖ νά εἶναι πιό ἀπογοητευτικό γιά ἕνα παιδί ἀπό τό νά προσθέτει ἤ ἀφαιρεῖ προσεκτικά ὅλα τά στοιχεῖα ἑνός πολυψήφιου προβλήματος, καί νά φτάσει σέ μιά ἀπάντηση μόνο καί μόνο γιά νά ἀνακαλύψει ὅτι, ἐπειδή οἱ στῆλες του τῶν ἀριθμῶν δέν ἦταν καθαρά καθορισμένες, τοποθέτησε στραβά ἕναν ἀριθμό, τόν πρόσθεσε δύο φορές ἤ τόν παράλειψε τελείως. Τό νά φτάσεις σέ ἕνα σωστό ἀποτέλεσμα συχνά ἐξαρτᾶται ἀπό τήν καθαρότητα τοῦ γραμμένου προβλήματος τόσο, ὅσο ἐξαρτᾶται ἀπό τή γνώση τῶν πράξεων ἤ χειρισμῶν. Ὁ δάσκαλος καί ὁ μαθητής ἔχουν ἕνα κοινό πρόβλημα: Πῶς μποροῦν νά ἀποφύγουν τή χαώδη κατάσταση τῶν κυρτωμένων στηλῶν ἔτσι ὥστε νά προχωρήσουν στά σπουδαιότερα θέματα τῶν μαθηματικῶν πράξεων, τῶν ἀκριβῶν ἀπαντήσεων καί τῆς ἀνασυγκρότησης;

Μιά ἁπλή λύση στό πρόβλημα τῆς κομψότητας συνιστᾶται στήν ἀλλαγή τοῦ εἴδους τοῦ χρησιμοποιούμενου χαρτιοῦ. Γραμμωτό χαρτί, ὅπως χρησιμοποιεῖται σήμερα γιά μαθηματικούς ὑπολογισμούς, δέν προσφέρει βοήθεια σέ παιδιά πού γράφουν τούς ἀριθμούς σέ στῆλες. Οἱ βοηθητικές γραμμές στό χαρτί εἶναι ὁριζόντιες, γιατί διαβάζουμε καί γράφουμε ἀπό ἀριστερά πρός τά δεξιά. Ἀλλά συνήθως ὑπολογίζουμε τά μαθηματικά προβλήματα καθέτως. Πῶς λοιπόν μποροῦμε νά χρησιμοποιήσουμε τήν ὑπάρχουσα τεχνολογία γιά νά λύσουμε αὐτό τό πρόβλημα; Ἁπλούστατα, χρησιμοποιώντας τετραγωνισμένο χαρτί (ἤ δικτυωτό χαρτί). Τώρα ὑπάρχουν γραμμές (ὅπως στό σύνηθες χαρτί) γιά νά διευθύνουν τούς ὁριζόντιους ἀριθμούς, καί ἐπίσης στῆλες γιά νά χρησιμοποιηθοῦν σάν ὁδηγός γιά κάθετους ὑπολογισμούς.

Ὑπάρχουν δύο ἁπλοί κανόνες γιά κάθε μαθηματική ἐργασία:

(1) Ψηφία γράφονται μόνο μέσα στά τετράγωνα.

(2) Ένα καί μόνο ένα ψηφίο από ένα δεδομένο αριθμό μπορεί νά γραφεί σέ ένα μόνο τετράγωνο.

Τά όφέλη άπ' αυτό τό σύστημα είναι σημαντικά:

- Δέν υπάρχει ερώτημα ώς πρός τά ποιά ψηφία από ένα αριθμό πρόκειται νά προστεθούν αφού είναι ακριβώς τό ένα κάτω από τό άλλο.

- Υπάρχει μόνο μιά θέση γιά νά τοποθετηθεί ή απάντηση σέ κάθε στήλη αριθμών καί αυτή είναι στό τετράγωνο ακριβώς από κάτω.

- Η συζήτηση τών χειρισμών στά τετράγωνα οδηγεί εύκολα στή συζήτηση τής άξίας τής τοποθέτησης κάθε ψηφίου σέ κάθε τετράγωνο. Τά παιδιά μπορούν επίσης νά ονομάσουν κάθε στήλη πρίν τόν υπολογισμό. (Νά δεΐτε τά παραδείγματα στά δεξιά). Π.χ., 3275 σημαίνει 3 χιλιάδες + 2 εκατοντάδες + 7 δεκάδες + 5 μονάδες.

	Χιλ	Εκ	Δεκ	Μον	
	3	2	7	5	

- Τά τετράγωνα εξυπηρετούν σάν μιά συνεχής υπενθύμηση γιά τήν ανασυγκρότηση τής πρόσθεσης, όποτε είναι απαραίτητο. Όταν οί 9 δεκάδες καί οί 7 δεκάδες προσθέτονται, δέν υπάρχει χώρος νά γραφούν οί 16 δεκάδες. Αφού μόνο ένα από τά ψηφία μπορεί νά τοποθετηθεί στό τετράγωνο τών δεκάδων, τό 1 τοποθετείται στό τετράγωνο τών εκατοντάδων γιά νά εκπροσωπήσει τίς 10 δεκάδες (100).

		1			
	3	0	9	2	
	+	3	7	5	
	3	4	6	7	

- Τά τετράγωνα παρέχουν μιά καθαρή εικόνα τής τοποθέτησης τών ψηφίων όταν ανασυγκροτούνται γιά τήν αφαίρεση. Τό παιδί τείνει νά συγκεντρώνεται στά τετράγωνα καί συνεπώς είναι πιό προσεκτικό όταν παίρνει καί τοποθετεί τούς αριθμούς του. Αφού 7 δεκάδες δέν μπορούν νά αφαιρεθούν από 6 δεκάδες, πρέπει νά φέρουμε μιά από τίς εκατοντάδες στό τετράγωνο τών δεκάδων σάν 10 δεκάδες. Αυτή ή πράξη δημιουργεί ένα προσωρινό περίσσευμα αριθμών στό τετράγωνο τών δεκάδων, αλλά καθιστά δυνατή τήν αφαίρεση.

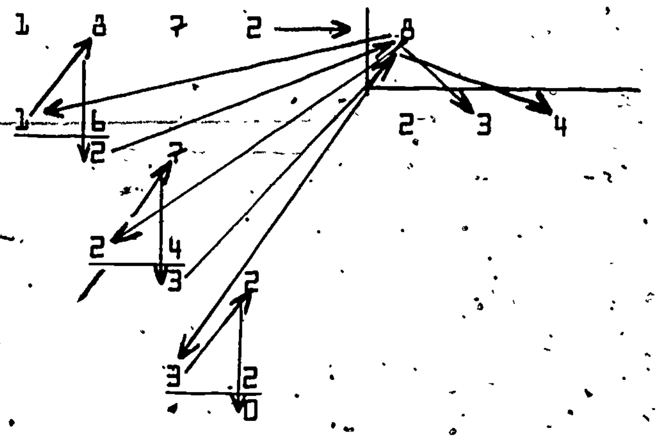
		2			
	4	~~3~~	16	2	
−	2	2	7	2	
	2	0	9	0	

Αὐτή ἡ μέθοδος τῆς χρήσης τοῦ τετραγωνισμένου χαρτιοῦ μπορεῖ προφανῶς νά χρησιμοποιηθεῖ στήν ἐκτέλεση πολλαπλασιασμοῦ καί διαίρεσης ἐπίσης.

Ἐάν τό δικτυωτό χαρτί δέν εἶναι προσιτό, νά χρησιμοποιήσετε κανονικό γραμμωτό χαρτί γυρισμένο 90° γιά νά ἐπιτρέψετε κολῶνες ὁδηγούς.

Ἡ Ἀνάγκη γιά Ἐπιδεξιότητα στό Διάβασμα Μαθηματικῶν

Δεῖχνει τό σκίτσο παρακάτω σάν δουλειά ἑνός προσεκτικοῦ ἀλλά ἀπογοητευμένου μαθητή μαθηματικῶν; Ἀντιθέτως, αὐτές οἱ γραμμές παριστάνουν τίς διαφορετικές διευθύνσεις πού πρέπει νά ἀκολουθήσει τό μάτι γιά νά συμπληρώσει αὐτό τό μᾶλλον ἁπλό πρόβλημα διαίρεσης. Αὐτό εἶναι ἕνα παράδειγμα τοῦ "διαβάσματος" πού συμβαίνει στά μαθηματικά. Πολλοί μαθητές δέν εἶναι ἕτοιμοι γιά αὐτό τό εἶδος διαβάσματος καί ἐδῶ ἔγκειται ἡ ἀνικανότητά τους. Συνήθως τούς χαρακτηρίζουν ὡς "ἀργόστροφους" πού χρειάζονται ἐπανεκπαίδευση.



"Ἡ γνώση τοῦ νά διαβάζει κανείς στή γλώσσα τῶν μαθηματικῶν εἶναι μιά κρίσιμη ἱκανότητα πού ἡ μεγάλη πλειονότητα τῶν μαθητῶν στά σχολεῖα μας χρειάζεται. Ἐπιπροσθέτως, τά συνήθη προγράμματα διαβάσματος καί μαθηματικῶν δέν παρέχουν, γενικά, τά εἴδη τῶν δραστηριοτήτων πού εἶναι ἀπαραίτητα γιά νά ἀποκτηθεῖ αὐτή ἡ ἱκανότητα."1

Ἡ προηγούμενη παράγραφος πάρθηκε ἀπό ἕνα ἄρθρο τῶν Hater, Kane καί Byrne πάνω στήν ἀνάπτυξη τῆς ἐπιδεξιότητας στό διάβασμα στήν τάξη τῶν μαθηματικῶν. Σ' αὐτό προσδιόρισαν δεκατρεῖς ἐπιδεξιότητες πού χρησιμοποιοῦνται στό διάβασμα τῆς

1Mary Ann Byrne, Mary Ann Hater, καί Robert B. Kane, "Building Reading Skills in the Mathematics Class," Arithmetic Teacher, Vol. 21, No.8 (December, 1974), p.668.

γλώσσας τῶν μαθηματικῶν. Μερικές ἀπ' αὐτές τίς ἐπιδεξιότητες θά παρουσιαστοῦν σέ συντομία στίς ἑπόμενες παραγράφους.

Ἡ γνώση τοῦ τί διαβάζεται ἔπειτα εἶναι μιά ἐπιδεξιότητα πού προσδιόρισαν οἱ συγγραφεῖς. Στά μαθηματικά, ἀντίθετα μέ τά γραμμένα Ἀγγλικά, τά σύμβολα μποροῦν νά διαβασθοῦν σέ μιά ποικιλία διευθύνσεων. Ἀπό ἀριστερά πρός τά δεξιά, ὅπως διαβάζετε τώρα, δέν εἶναι πάντοτε ὁ τρόπος στά μαθηματικά. Τά σύμβολα μποροῦν νά διαβασθοῦν ἀπό δεξιά πρός ἀριστερά, διαγωνίως, ἀπό πάνω πρός τά κάτω, ἀπό κάτω πρός τά πάνω, κλπ. Ἕνα ἁπλό σύνολο συμβόλων μπορεῖ νά διαβασθεῖ κατά πολλούς διαφορετικούς τρόπους. Π.χ., $2 + 5^2$ μπορεῖ νά διαβασθεῖ "δύο σύν τό τετράγωνο τοῦ πέντε" ἤ "πέντε στό τετράγωνο σύν δύο". Ἀρκετά ἄλλα διαβάσματα εἶναι πιθανά γιά τό ἴδιο σύνολο συμβόλων.

Ἕνα σύνολο συμβόλων μπορεῖ ὄχι μόνο νά προφερθεῖ διαφορετικά ἀλλά μιά προφορική ἔκφραση μπορεῖ νά γραφεῖ κατά διαφόρους τρόπους ἀπό διαφορετικούς μαθητές. Ἕνα παράδειγμα σάν τό "ἕξι ἐπί ἕντεκα" ἤ "ἕξι φορές τό ἕντεκα" μπορεῖ νά γραφεῖ σάν

6×11 $\qquad \begin{array}{r} 11 \\ \underline{\times\ 6} \end{array}$ $\qquad 6 \cdot 11$ $\qquad 6\,(11)$

Ἡ διαίρεση παρέχει ἕνα ἀκόμη καλλίτερο παράδειγμα γιά τήν πιθανότητα τοῦ νά χρησιμοποιήσουν διαφορετικούς μαθητές εἴτε τή γραμμή κλάσματος, τό σῆμα τῆς διαίρεσης (:) ἤ τό σύμβολο τῆς διαίρεσης (⌊‾) γιά νά παρουσιάσουν τό πρόβλημα. Ὅπως δείχνουν αὐτά τά παραδείγματα, συχνά στά μαθηματικά, ὑπάρχουν ἀρκετές συμβολικές παραστάσεις γιά τήν ἴδια ἔκφραση. Οἱ μαθητές πρέπει νά μάθουν νά αἰσθάνονται ἄνετα μέ τά μαθηματικά σύμβολα καί νά μήν μπερδεύονται μέ τήν ποικιλία τους. Ὁ M.A. Byrne ἀνακάλυψε 153 διαφορετικά σύμβολα, ξεχωριστά ἀπό τό ἀλφάβητο, πού ἐμφανίζονται σέ μαθηματικά βιβλία ἀπό τήν τετάρτη τάξη μέχρι τή δωδεκάτη.[2] Ἄν καί πολλοί μαθητές δέν θά μπορέσουν νά καταλάβουν καί νά χρησιμοποιήσουν αὐτά πού τούς παρουσιάζουν.

Λέξεις-κλειδί παίζουν ἐπίσης ἕνα ρόλο στό διάβασμα τῶν μαθηματικῶν. Ἄν καί οἱ δύο παρακάτω προτάσεις διαφέρουν σέ μιά μόνο λέξη, ἡ διαφορά τους στήν μαθηματική τους ἔννοια εἶναι μεγάλη. (Σχῆμα 1). Ἡ λέξη "φορές" πού εἶναι ἡ λέξη-κλειδί, πρέπει πρῶτα νά ἀναγνωρισθεῖ ἀπό τόν μαθητή, κατόπιν νά αἰσθητοποιηθεῖ καί τελικά νά γραφεῖ συμβολικά γιά νά λύσει ὁ μαθητής τό πρόβλημα.

ΕΠΤΑ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ ΤΟΥ ΟΚΤΩ

ΕΠΤΑ ΦΟΡΕΣ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ ΤΟΥ ΟΚΤΩ

Σχῆμα 1

[2] Ibid., p.665.

Οἱ λέξεις μέ πολλές σημασίες εἶναι ἕνα μέρος μιᾶς ἄλλης ἐπιδεξιότητας πού ἀνακάλυψαν οἱ συγγραφεῖς. Μερικές ἀπό τίς λέξεις πού χρησιμοποιοῦνται στά μαθηματικά ὅπως "πηλίκο", "τά ἑκατό", καί "δεκαδικό", ἔχουν συγκεκριμένη μαθηματική σημασία. Σάν λέξεις δέν προκαλοῦν σύγχιση γιά τήν πλειονότητα τῶν μαθητῶν. Ἄλλες λέξεις πού ἀκούγονται καί φαίνονται σάν λέξεις τῆς καθομιλουμένης ἀποτελοῦν μεγαλύτερο πρόβλημα. Λέξεις ὅπως "ρίζα", "ἐπίπεδο", "μόνος", "ἕνωση", "δύναμη", κλπ. ἀποτελοῦν αἰτία σύγχισης γιά πολλούς μαθητές. Ἐπειδή οἱ μαθητές εἶναι πιό πολύ ἐξοικιωμένοι μέ τήν καθημερινή σημασία παρά μέ τήν μαθηματική σημασία τῶν λέξεων αὐτῶν, τελευταία χρήση πρέπει νά τονισθεῖ πρός ἔμφαση.

Τό ἄρθρο τοῦτο μέ κανένα τρόπο δέν καλύπτει ὅλη τήν τεχνική γνώση πού χρειάζεται γιά νά διαβάσει κανείς μαθηματικά. Ὑπάρχουν πολλά περισσότερα ἐπί τοῦ προκειμένου ἀπό ὅ,τι θά μποροῦσαν ἐδῶ νά ἀναφερθοῦν.[3] Παρ' ὅλα αὐτά, πρέπει νά γίνει ἀντιληπτό ὅτι καμμιά ἀπό αὐτές τίς τεχνικές γνώσεις δέν εἶναι ἀπομονωμένη ἀλλά ὅλες ἐξαρτοῦνται ἡ μιά ἀπό τήν ἄλλη. Στό μάθημα τῶν μαθηματικῶν μαθαίνει κανείς νά διαβάζει μαθηματικά συνδυάζοντας τίς τεχνικές γνώσεις πού χρησιμοποιοῦνται στήν ἀνάγνωση μόνο ἑνός κειμένου ἐνῶ στήν πραγματικότητα διαβάζει καί ταυτόχρονα ἐργάζεται πάνω στά μαθηματικά.

Μιά Δομική Προσέγγιση στόν Πολλαπλασιασμό

Ἕνας ἀπό τούς σπουδαιότερους λόγους πού μαθαίνει τό παιδί πολλαπλασιασμό εἶναι γιά νά τό μάθουμε νά τόν χρησιμοποιεῖ κατάλληλα γιά λύση προβλημάτων τῆς καθημερινῆς ζωῆς.

Προκειμένου κανείς νά μπορεῖ ἀποτελεσματικά νά λύνει προβλήματα καί νά κάνει ὑπολογισμούς, πρέπει νά μάθει ἕνα γενικό τρόπο γιά νά κάνει τίς πράξεις. Τό παιδί πρέπει νά ἐξοικειωθεῖ μέ τούς παραδοσιακούς τύπους προκειμένου νά καταλάβει καί νά ἐκτιμήσει περισσότερο τήν ἐπίδραση καί τή χρησιμότητα τῶν εὐρύτατα χρησιμοποιουμένων ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν καί τίς εὐρύτατες ἐφαρμογές του στή λύση συγχρόνων προβλημάτων. Προφανῶς ἡ ἀποδοτικότητα εἶναι κάτι πού πρέπει νά λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν σ' ἕνα ὑπολογισμό. Συνεπῶς εἴμαστε ὑποχρεωμένοι νά διδάξουμε τό παιδί νά ἀπομνημονεύει ἀλγορίθμους. Αὐτοί οἱ ἀλγόριθμοι πρέπει νά ἐκτείνονται πέρα ἀπό τά γραπτά παραδείγματα; δηλαδή θά πρέπει νά περιλαμβάνουν γιά ὅλους τούς μαθητές, τόσο ἠλεκτρονικούς ὑπολογιστές ὅσο καί νοερούς ἀριθμητικούς ἀλγορίθμους. Τά παιδιά χρειάζονται πρακτική ἐξάσκηση προκειμένου νά ἀποφασίσουν ποιός εἶναι ὁ πιό κατάλληλος ἀλγό-

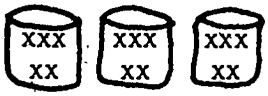
[3] Μιά ἄλλη πηγή πληροφορίας εἶναι ἡ δημοσίευση τοῦ Ἐκπαιδευτικοῦ Τμήματος τῆς Πολιτείας τῆς Νέας Ὑόρκης, Improving Reading - Study Skills in Mathematics.

ριθμος πού θά χρησιμοποιήσουν. Οἱ περισσότερες τῶν καθημερινῶν ἐφαρμογῶν λύνονται εὐκολότερα ἀπό μνήμη, μιά καί δέν ἔχουμε συνήθως μαζί μας ἄλλο τίποτε, δηλαδή μολύβια καί ἠλεκτρονικούς ὑπολογιστές.

Σέ μιά σωστή διδασκαλία ἀριθμητικῆς, ὁ ὑπολογισμός βγαίνει καί ἀναπτύσσεται μέσα ἀπό προβλήματα καί χρησιμοποιεῖται στήν ἱκανοποιητική λύση ἄλλων προβλημάτων. Τά δέ προβλήματα δέν εἶναι ἁπλῶς ἀσκήσεις πού μπαίνουν στό τέλος τοῦ κεφαλαίου περί πολλαπλασιασμοῦ. Ἀντιθέτως, χρησιμοποιοῦνται ἐντατικῶς κατά τή διάρκεια ὁλοκλήρου τοῦ κεφαλαίου. Ἡ λύση τῶν προβλημάτων αὐξάνει τήν κατανόηση, χρησιμότητα καί τόν σκοπό τοῦ ὑπολογισμοῦ καί ὅσο αὐξάνεται ἡ ἀποδοτικότητα στή χρήση τῶν ὑπολογισμῶν, τόσο αὐξάνεται καί ἡ ἱκανότητα τῶν μαθητῶν νά λύνουν προβλήματα.

Μιά παραμελημένη ἄποψη εἶναι αὐτή τῆς διδασκαλίας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μέ συγκεκριμένα ἤ εἰκονογραφημένα ὑποδείγματα. Τά ὑποδείγματα χρησιμεύουν στό νά μεταφράζουν λέξεις ἤ ἀληθινές καταστάσεις τῆς ζωῆς σέ μαθηματικά σύμβολα (προτάσεις ἤ ἀλγόριθμους) καί ἀντίστροφα, στό νά μεταφράσουν τά μαθηματικά σύμβολα σέ κατηγορίες ἐφαρμογῶν. Περιληπτικά, τά ὑποδείγματα πολλαπλασιασμοῦ εἶναι ἰσοδύναμα σύνολα, ἀριθμημένος ἄξονας, διατάξεις, σταυρωτό γινόμενο, καί ἐπιφάνεια. Κάθε ἕνα ἀπό τά πέντε αὐτά ὑποδείγματα φαίνεται στά παρακάτω σχήματα.

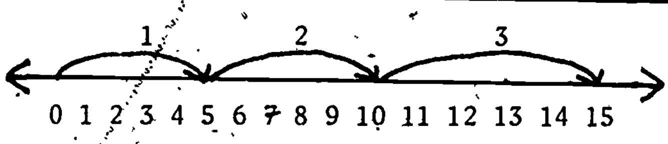
ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΣΥΝΟΛΑ



ΤΡΕΙΣ ΣΑΚΟΥΛΕΣ ΜΕ ΠΕΝΤΕ ΓΛΥΚΑ Η ΚΑΘΕ ΜΙΑ, ΠΟΣΑ ΓΛΥΚΑ ΕΧΟΥΝ;

3 x 5 =

ΑΡΙΘΜΗΜΕΝΟΣ ΑΞΟΝΑΣ



ΤΡΙΑ ΜΟΛΥΒΙΑ ΤΩΝ ΠΕΝΤΕ ΙΝΤΣΩΝ ΚΟΛΛΗΜΕΝΑ ΤΟ ΕΝΑ ΠΙΣΩ ΑΠΟ ΤΟ ΑΛΛΟ, ΠΟΣΟ ΜΗΚΟΣ ΕΧΟΥΝ;

3 x 5 =

ΔΙΑΤΑΞΗ

0 0 0 0 0

0 0 0 0 0

0 0 0 0 0

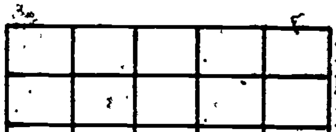
ΕΧΟΥΜΕ ΤΡΕΙΣ ΣΕΙΡΕΣ ΑΠΟ ΠΕΝΤΕ ΚΑΡΕΚΛΕΣ. ΠΟΣΕΣ ΚΑΡΕΚΛΕΣ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΟΛΙΚΑ;

3 x 5 =

ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

5μ

3μ



ΠΟΣΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΑ ΜΕΤΡΑ ΕΙΝΑΙ ΕΝΑ ΧΑΛΙ ΜΕ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ 3μ ΕΠΙ 5μ;

3 x 5 =

ΣΤΑΥΡΩΤΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ					
	ΜΠΛΟΥΖΕΣ				
ΦΟΥΣΤΕΣ	Ἄσπρες	Κόκκινες	Μπλέ	Πράσινες	Κίτρινες
Καφέ	0	0	0	0	0
Ἄσπρες	0	0	0	0	0
Μπλέ	0	0	0	0	0

ΠΟΣΕΣ ΦΟΡΕΣΙΕΣ ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΚΑΝΟΥΜΕ ΜΕ ΤΡΕΙΣ ΦΟΥΣΤΕΣ ΚΑΙ ΠΕΝΤΕ ΜΠΛΟΥΖΕΣ;

3 x 5 =

Τά σύγχρονα μαθηματικά βάζουν πολλή ἔμφαση στή μαθηματική δομή. Ἡ δομή αὐτή εἶναι ἐπίσης μιά πολύ σπουδαία ἄποψη γιά τήν ἐκμάθηση πολλαπλασιασμοῦ. Ἡ δομή στήν περίπτωση τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μπορεῖ νά διαιρεθεῖ σέ τρία μέρη: (α)ἀξιώματα ἤ ἰδιότητες, (β)σύστημα ἀρίθμησης καί (γ)ἀριθμητικά δεδόμενα. Οἱ τρεῖς σημαντικότερες ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι ἡ ἐπιμεριστική, ἡ ἀντιμεταθετική καί ἡ συνδετική. Ἡ ἀξία τῆς θέσης εἶναι ἡ περιοχή πού ἐμφανίζει τήν μεγαλύτερη δυσκολία στήν δομή τοῦ συστήματος τῆς ἀρίθμησης. Τά ἀριθμητικά δεδόμενα παραμένουν οὐσιῶδες μέρος τῆς δομῆς καί πρέπει πρῶτα νά κατανοηθοῦν καί κατόπιν νά ἀπομνημονευθοῦν.

Τά τέσσερα αὐτά σημεῖα μιᾶς καλῆς διδασκαλίας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δίνονται σχηματικά παρακάτω:

Ⓐ Πρόβλημα/Ἐφαρμογή
1. Πραγματικός Κόσμος
2. Γραπτό
3. Γρίφος

Ⓑ Ἀλγόριθμοι Ὑπολογισμοῦ
1. Γραπτό
2. Ὑπολογιστής
3. Νοερή Ἀριθμητική

Ⓖ Ὑποδείγματα
1. Σύνολα
2. Ἀριθμημένοι Ἄξονες
3. Διατάξεις
4. Σταυρωτά Γινόμενα
5. Ἐπιφάνεια

Ⓓ Μαθηματικές Δομές
1. Ἀξιώματα ἤ ἰδιότητες
2. Ἀρίθμηση
3. Ἀριθμητικά Δεδόμενα

Ὅπως φαίνεται στό σχῆμα ὁ ὑπολογισμός ἔχει κεντρική θέση σέ ὅλη τή διαδικασία. Οἱ γραπτοί ἀλγόριθμοι ἔχουν ἰδιαίτερη θέση στήν καλλιέργεια τῆς ἄνεσης τοῦ παιδιοῦ νά κάνει πολλαπλασιασμούς ἐπειδή τό παιδί μπορεῖ νά "δεῖ" τή δομή νά ἐφαρμόζεται στούς τύπους, καί μπορεῖ νά συσχετίσει τά ὑποδείγματα μέ τούς τύπους καί νά ἐπαληθεύσει τήν ἐργασία του ὡς πρός τό πρόβλημα ἤ τήν ἐφαρμογή. (Οἱ ὑπολογιστές ἤδη ἔχουν ἐνσωματωμένη τή δομή καί ἄν δέν χρησιμοποιηθοῦν προσεκτικά "κρύβουν" ἀπό τό παιδί τή δομή αὐτή καί καταντοῦν μαγικά κουτιά.)

Μερικά παραδείγματα μεταβατικῶν ἀλγορίθμων (τύπων) δείχνουν τό πῶς συνδέουν τήν ἀντίληψη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἀκόμη καί ἄν τό ἐπίπεδο ἀντίληψης τοῦ παιδιοῦ εἶναι χαμηλό.

(1) Τρεῖς ὁμάδες ἀπό 11 κορίτσια πᾶνε γιά παιχνίδια σταδίου. Πόσα κορίτσια συνολικά πᾶνε γιά παιχνίδι;

```
                 10              +    1

        x x x x x x x x x x           x

   3    x x x x x x x x x x           x

        x x x x x x x x x x           x
```

$$11 \times 3 = \begin{array}{r} 10 + 1 \\ \times\ 3 \\ \hline 30 + 3 \end{array} = 33$$

(2) Ἑκατόν πενῆντα ἕξι ἐπιβάτες σ' ἕνα ἀεροπλάνο πλήρωσαν $350 ὁ καθένας γιά ἕνα ταξίδι στήν Ἀγγλία. Πόσο πλήρωσαν ὅλοι μαζί;

(α)

δεκάδες χιλιάδες	χιλιάδες	ἑκατοντάδες	δεκάδες	μονάδες	
		3	5	0	
		x 1	5	6	
				0	6 x 0 =
		3	0	0	6 x 50 =
	1	8	0	0	6 x 300 =
				0	50 x 0 =
	2	5	0	0	50 x 50 =
1	5	0	0	0	50 x 300 =
3	5	0	0	0	100 x 350 =
5	4	6	0	0	

$54,600 πληρώθηκε συνολικά. (χρησιμοποιήθηκε πρόσθεση κατά στήλη γιά νά τηρηθεῖ ἡ τιμή θέσις. Κάθε φορά πολλαπλασιάστηκε ἕνα μόνο ψηφίο.)

(β)

$$\begin{array}{r} 350 \\ \underline{\times\ 156} \\ 2\,1^{3}00 \\ 1\,\cancel{7}^{2}500 \\ \underline{35000} \\ 54{,}600 \end{array}$$

$54,600 πληρώθηκε συνολικά.

(Στά μερικά γινόμενα προσθέτουμε μηδενικά καί επίσης χρησιμοποιούμε τή "βοηθητική" μέθοδο τῆς μεταφορᾶς τῶν ἀριθμῶν.)

(γ)

$$\begin{array}{r} 350 \\ \underline{\times\ 156} \\ 2100 \\ 1750 \\ \underline{350} \\ 54{,}600 \end{array}$$

$54,600 πληρώθηκε συνολικά.

(παραδοσιακός ἀλγόριθμος)

Οἱ παραπάνω ἀλγόριθμοι (τύποι) συζητοῦνται καί τά παιδιά τούς χρησιμοποιοῦν ὅπως τούς ἀρέσει. Ἡ συζήτηση θά ὁδηγήσει στά πλεονεκτήματα τοῦ συνήθους τύπου, παρ' ὅλο πού συνήθως τά "βοηθητικά κρατούμενα" ("δεκανίκια") συνεχίζονται νά χρησιμοποιοῦνται γιά πολύ καιρό ἀκόμα. Τό παιδί θά πρέπει νά παρακινηθεῖ νά παραλείψει τήν γραφή τῶν κρατούμενων ὅταν πιά δέν χρειάζονται.

Ὅταν διορθώνετε ἀσκήσεις πράξεων, νά κοιτάζετε νά βρεῖτε κατηγορίες σφαλμάτων καί κατόπιν νά ἐργαστεῖτε μέ τό κάθε παιδί ξεχωριστά καί νά τά διορθώσετε. Παραδείγματα κατηγοριῶν σφαλμάτων δίνονται παρακάτω:

Μαργαρίτα

(a)
$$\begin{array}{r} 1 \\ \cancel{3} \\ 306 \\ \underline{\times\ 25} \\ 180 \\ \underline{72} \\ 900 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{r} 3 \\ \cancel{4} \\ 208 \\ \underline{\times\ 45} \\ 140 \\ \underline{112} \\ 1260 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{r} 2 \\ \cancel{4} \\ 790 \\ \underline{\times\ 35} \\ 395 \\ \underline{237} \\ 2765 \end{array}$$

Δημήτρης

(a)
$$\begin{array}{r} 3 \\ 36 \\ \underline{\times\ 6} \\ 366 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{r} 2 \\ 53 \\ \underline{\times\ 7} \\ 491 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{r} 2 \\ 49 \\ \underline{\times\ 3} \\ 187 \end{array}$$

Ἡ Μαργαρίτα βλέπει τά μηδενικά σάν νά "καταλαμβάνουν θέση μόνο" καί καθώς δέν εἶναι ἀριθμοί τά ξεχνάει καί βάζει τίς δεκάδες στίς ἑκατοντάδες ὅπου ὑπάρχει ἕνας "πραγματικός" ἀριθμός.

Ὁ Δημήτρης ἐφαρμόζει μηχανικά τά κρατούμενα προσθέτοντάς τα στή στήλη τῶν δεκάδων πρίν προχωρίσει μέ τόν πολλαπλασιασμό.

Καί τά δύο παιδιά δείχνουν ἀδυναμία ἀντίληψης στοιχειωδῶν ὑπολογισμῶν. Τό νά πεῖς στή Μαργαρίτα νά πολλαπλασιάσει μέ τό μηδέν καί νά προσθέσει τίς ἀνασυγκροτημένες δεκάδες ἤ στό Δημήτρη νά βάλει τά κρατούμενα κάτω ἀπό τή γραμμή γιά νά θυμηθεῖ νά τά προσθέσει, μπορεῖ νά εἶναι βραχυπρόθεσμες λύσεις πού πολύ πιθανόν νά δημιουργήσουν σοβαρότερα προβλήματα ἀργότερα. Τό καλύτερο εἶναι νά τούς δώσετε νά καταλάβουν τόσο τόν τύπο ὅσο καί τόν συλλογισμό πού βρίσκεται πίσω ἀπό αὐτόν. Ἡ μελλοντική τους ἀνάπτυξη καί ἐμπιστοσύνη στίς μαθηματικές τους πράξεις ἐξαρτοῦνται ἀπό τόν τρόπο αὐτό τῆς ἐνέργειάς σας.

Ἡ κατάλληλη διάγνωση καί ἐπιδιόρθωση στόν πολλαπλασιασμό ἤ σέ ἄλλο τομέα τῶν μαθηματικῶν δέν εἶναι ξερή καί ἄκαμπτη. Περιλαμβάνει ἕναν εὐαίσθητο δάσκαλο πού νά ἐπικοινωνεῖ μέ τό παιδί, καί τό παιδί πρέπει νά δουλεύει μέ ὅλες τίς μορφές τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Ὑπολογιστική ἱκανότητα πού συνοδεύεται ἀπό λιγόλογα προβλήματα δέν εἶναι ἱκανοποιητική λύση. Ὅλες οἱ μορφές πολλαπλασιασμοῦ συνδέονται μεταξύ τους καί οἱ ὑπολογισμοί πρέπει νά λάβουν τή σωστή θέση τους στό γενικό πρόγραμμα.

Ὁ Ἠλεκτρονικός Ὑπολογιστής στά Ἐπιδιορθωτικά Μαθηματικά

Εἰσαγωγή

Οἱ ὑπολογιστές ἦρθαν καί θά μείνουν γιά πάντα. Τά παιδιά ἐντυπωσιάζονται πολύ ἀπό αὐτές τίς ἀπίστευτα μικρές ἀλλά πανίσχυρες συσκευές. Ποιός πρέπει νά εἶναι ὁ ρόλος τους στά ἐπιδιορθωτικά μαθηματικά; Παρά τήν ἀπλότητα τους αὐτές οἱ συσκευές εἶναι ἀπίστευτα δυναμικές, προπαντῶς γιά ἕναν πού ξέρει νά τίς χρησιμοποιεῖ. Ὑπάρχουν πολλές μέθοδοι καί τεχνάσματα πού θά σᾶς δώσουν τή δυνατότητα νά ἀποκομίσετε ὀφέλη, πού οὔτε καί οἱ μηχανικοί πού τά κατασκεύασαν δέν φαντάζονταν. Παρ' ὅλα αὐτά, ὑπάρχει ἕνας ἐγγενής κίνδυνος στή χρήση ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν στά προγράμματα διδασκαλίας μαθηματικῶν. Οἱ ὑπολογιστές κρύβουν τήν δομή τῶν ἀλγορίθμων, πρᾶγμα πού μπορεῖ νά ξεπεραστεῖ διδάσκοντας τή δομή τοῦ ἀλγόριθμου πρῶτα. Κατόπιν τούτου νά ἐξετάσετε τόν μαθητή ὅπως συνήθως κάνετε. Μετά ἀπό αὐτό νά διδάξετε τόν μαθητή νά κάνει τίς ἴδιες πράξεις μέ τόν ὑπολογιστή γιά νά ἐλέγξει τίς ἀπαντήσεις πού ἔχει ἤδη δώσει χρησιμοποιώντας χαρτί καί μολύβι.

Στά χέρια ένός δασκάλου μέ φαντασία, ή χρήση τοῦ ὑπολογιστή μπορεῖ νά λύσει πολλά άπό τά προβλήματα πού οἱ "κάτω τοῦ μετρίου" μαθητές συναντοῦν.

Τά παρακάτω προβλήματα σχεδιάστηκαν γιά τήν χρήση ἀριθμῶν σέ ὑπολογιστή. Νά ἀκολουθήσετε τίς ἁπλές ὁδηγίες.

<u>Ὁδηγίες</u>

1. Νά λύσετε κάθε πρόβλημα.

2. Νά γράψετε τά ψηφία στά τετράγωνα, ἕνα ψηφίο στό κάθε τετράγωνο.

(1) Πόσο κοστίζουν τρεῖς κονδυλοφόροι τῶν \$1.98 ὁ καθένας; ________

(2) Ἡ Ζωή διάβασε τό ἕνα τρίτο ἀπό ἕνα βιβλίο πού ἔχει 231 σελίδες. Πόσες σελίδες ἔχει διαβάσει; ________

(3) Ὁ Γιάννης ἔχει \$50. Ἡ Μαρία ἔχει \$36.32. Πόσα χρήματα παραπάνω ἔχει ὁ Γιάννης ἀπό τή Μαρία; ________

(4) Ὁ Γιάννης πῆρε στίς ἐξετάσεις τῶν μαθηματικῶν τούς ἑπόμενους βαθμούς: 80, 90, 75, 68 καί 47. Ποιός ἦταν ὁ ΜΕΣΟΣ ΟΡΟΣ τῶν βαθμῶν του; ________

(5) Πόσα χρόνια ὑπάρχουν σέ 1 1/2 αἰῶνα; ________

(6) Πόση εἶναι ἡ περίμετρος ἑνός ὀρθογωνίου πού ἔχει μῆκος 13 μέτρα καί πλάτος 9.5 μέτρα; ________

(7) Ἡ Ἑλένη ἔχει \$15. Τά μολύβια κοστίζουν \$.06 τό καθένα. Πόσα μολύβια μπορεῖ νά ἀγοράσει ἡ Ἑλένη; ________

(8) Πωλοῦνται σέ τιμή εὐκαιρίας κονσέρβες φασόλια 3 γιά 69¢. Πόσο κοστίζουν 21 κονσέρβες; ________

(9) Ὁ ἀδελφός τῆς Ἀγγελικῆς εἶναι 8 χρονῶν. Αὐτή εἶναι 9 χρόνια μεγαλύτερη ἀπό τόν ἀδελφό της. Πόσων χρονῶν εἶναι ἡ Ἀγγελική; ________

(10) Πόσο μακρυά μπορεῖ νά πάει ἕνα τραῖνο πού τρέχει 57 μίλια τήν ὥρα, ἄν ταξιδεύει 9 ὧρες; ________

Τά Μαθηματικά τῆς Φύσης

Ἡ ὑπαίθρια τάξη μπορεῖ νά δώσει πολλές εὐκαιρίες γιά νά δείξουμε τή σημασία καί τήν πρακτικότητα τῶν μαθηματικῶν/γεωμετρικῶν συμβόλων καί μεθόδων. Τά μαθήματα καί οἱ δραστηριότητες πού προτείνονται παρακάτω εἶναι κατάλληλα γιά εὐρεία κλίμακα ἱκανοτήτων καί ἐπιπέδων μαθητῶν. Μέ κατάλληλη προετοιμασία καί τροποποίηση τῶν δραστηριοτήτων, οἱ μαθητές γίνονται πιό εὐαίσθητοι καί πιό περίεργοι καί θά ἐννοήσουν καλύτερα τήν μαθηματική/γεωμετρική ἄποψη τοῦ περιβάλλοντός τους. Κάθε ἐπιτυχία μπορεῖ νά εἶναι μιά ἐμπειρία γεμάτη ἀνταμοιβές τόσο γιά τόν δάσκαλο ὅσο καί γιά τόν μαθητή.

Ἀντιστοιχία Σχημάτων

Γιά νά ἀρχίσουν τά παιδιά νά καταλαβαίνουν μερικά ἀπό τά βασικά γεωμετρικά σχήματα στή φύση, ὁ δάσκαλος μπορεῖ νά ἀρχίσει μέ τό νά βγάλει τά παιδιά ἔξω στήν ὕπαιθρο γιά νά μαζέψουν δεντρόφυλλα. Κατόπιν θά ἦταν καλά νά ἀκολουθήσει μιά συζήτηση πάνω σέ μερικά ἁπλά ὀνόματα φύλλων, ἤ σέ ὁμοιότητες ἀνάμεσα σέ φύλλα ἤ στό ρόλο πού παίζουν τά φύλλα, κλπ. Ὁ δάσκαλος τότε μπορεῖ νά διαλέξει μερικά βασικά φύλλα καί νά ζωγραφίσει κάθε φύλλο σέ μιά κάρτα. Μετά, κάθε φύλλο μπαίνει σέ ἄλλη κάρτα τοῦ ἰδίου μεγέθους καί αὐτά τά ζεύγη μπαίνουν σέ ἕνα κουτί. Τά παιδιά τότε πρέπει νά ταιριάσουν τό ἀληθινό φύλλο μέ τό περίγραμμά του, καί νά εἶναι σέ θέση νά συζητήσουν ὁρισμένα χαρακτηριστικά τῶν φύλλων πού τούς βοήθησαν νά ταιριάσουν τά ὅμοια. Τό ὄνομα τοῦ δέντρου ἀπό ποῦ προέρχεται τό φύλλο, θά μποροῦσε ἐπίσης νά συμπεριληφθεῖ γιά ὅσα παιδιά ξέρουν νά διαβάζουν.

Ἀπόδειξέ το

Αὐτή ἡ δραστηριότητα μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ γιά ἐνίσχυση τῆς ἱκανότητας τῶν παιδιῶν νά μετρήσουν ἀριθμούς γεωμετρικά σχήματα ἤ νά ἀναγνωρίζουν δέντρα καθώς ἐπίσης καί νά τούς ὀξύνει τήν ἐπιθυμία γνώσης τοῦ κόσμου πού τά περιβάλλει. Οἱ παῖχτες κάθονται σ' ἕνα κύκλο, ὁ καθένας μέ 3 μετρητές. Ἕνας πρέπει νά ἀρχίσει λέγοντας "Βλέπω ἕνα σπουργίτι" (ἤ ἕνα γεωμετρικό σχῆμα, ἤ ἕνα εἶδος δέντρου). Ὁ ἑπόμενος λέει: "Ἐγώ βλέπω ἕνα σπουργίτι καί δύο μυρμήγκια", ἕνας τρίτος προσθέτει τρία ἄλλα ἀντικείμενα, κλπ.

Σέ ὁποιαδήποτε στιγμή κάποιος μπορεῖ νά πεῖ: "Ἀπόδειξέ το". Ἄν κανείς λέει κάτι πού δέν μπορεῖ νά τό ἀποδείξει, τότε δίνει ἕνα μετρητή σ' αὐτόν πού τόν ρώτησε. Ἄν ὅμως ὁ μαθητής μπορεῖ νά τό ἀποδείξει τότε παίρνει ἕνα μετρητή ἀπό αὐτόν πού τόν προκάλεσε. Τό παιχνίδι τελειώνει σέ ὁποιοδήποτε σημεῖο καί ὅποιος ἔχει τούς περισσότερους μετρητές κερδίζει.

Κυνηγητό άχρήστων

Τά παιδιά μπορούν νά χρησιμοποιήσουν τό παιχνίδι αύτό σάν μέσο γιά νά μάθουν νά μετρούν. Συχνά τά παιδιά δέν μπορούν νά συνδέσουν τόν άριθμό-σύμβολο μέ τήν έννοια τοῦ άριθμοῦ. Μετά άπό ένα ψάξιμο όπου ό μαθητής ψάχνει γιά ένα όρισμένο άριθμό άντικειμένων, π.χ. τέσσερα, τό παιδί άντιλαμβάνεται τήν έννοια τοῦ τέσσερα. Εάν ένα άντικείμενο δέν πρέπει ή είναι άδύνατο νά μετακινηθεί, ό μαθητής πρέπει νά τό περιγράψει καί νά δηλώσει ότι πράγματι τό είδε.

Τά παρακάτω είναι ίδέες γιά κυνηγητό άχρήστων:

(α) Μάζεμα άπορριμάτων πού προέρχονται άπό τούς άνθρώπους:

καπάκια μπουκαλιών	σπάγγος
μπουκάλια	σύρμα
άδειες κονσέρβες	τσιγαρόχαρτο
καπάκια άναψυκτικών	χαρτιά
περιτυλίγματα καραμελών	σελλοφάν
σπιρτόκουτα	πλαστικά

(Σημείωση: Νά προειδοποιήσετε τούς μαθητές νά μήν πιάνουν σκουριασμένα ή σπασμένα άντικείμενα.)

(β) Άντικείμενα σέ άφθονία στή φύση:

φτερά	στρογγυλές πέτρες
βελανίδια	κόκκαλα
πικραλίδες	μοῦρα
κουκουνάρια	φλοῦδες δέντρων
κόκκινα φύλλα	τριφύλλια
γυαλιστερές πέτρες	καρύδια

Μάντεψε τήν θερμοκρασία άπό τά κελαϊδήματα τοῦ Γρύλλου

Νά μετρήσετε τόν άριθμό τῶν κελαϊδημάτων σέ 14 δευτερόλεπτα. Νά προσθέσετε 40 σ' αύτόν τόν άριθμό καί τό άθροισμα είναι ή θερμοκρασία (σέ Φαρενάϊτ). Αύτό προφανῶς έξασκεῖ τά παιδιά στό νά δουλεύουν μέ τό χρόνο, θερμοκρασία, πρόσθεση, συλλογή στοιχείων, παρατηρήσεις, τεχνικές καί φυσικά φαινόμενα.

Άνακαλύπτοντας τό Π

Αύτό τό παιχνίδι βοηθά τά παιδιά νά άντιληφθοῦν σαφῶς μιά κοινή μαθηματική σταθερότητα, τό Π. Οί μαθητές θά χρειαστοῦν μιά ταινία μέτρησης, χάρτι καί μολύβι. Νά ζητήσετε άπό τούς μαθητές νά μετρήσουν τήν περιφέρεια καί τή διάμετρο όσων περισσότερων "στρογγυλῶν" άντικειμένων πού μπορούν νά βροῦν σέ ένα όρισμένο χρονικό διάστημα καί νά τά γράψουν σ' ένα πίνακα όπως τόν άκόλουθο:

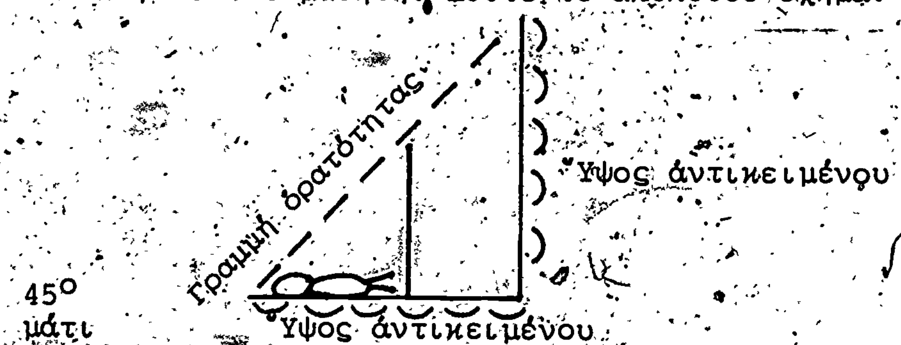
ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ	ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑ	ΔΙΑΜΕΤΡΟΣ	
λάστιχο αὐτοκινήτου	78 ἴντσες	25 ἴντσες	

Ἀφοῦ οἱ μαθητές μαζέψουν ἕνα ὁρισμένο ἀριθμό στοιχείων, νά τούς φωνάξετε καί νά συζητήσετε τά σχήματα καί νά τούς ρωτήσετε ἄν ὑπάρχει καμμιά σχέση μεταξύ περιφερείας καί διαμέτρου αὐτῶν τῶν ἀντικειμένων. Βάλετέ τους νά διαιρέσουν τήν περιφέρεια διά τῆς διαμέτρου καί νά μιλήσετε γιά τήν ἀπάντηση πού βγάζουν γιά κάθε ἀντικείμενο. Ὅταν μιλήσουν γιά τή σταθερότητα αὐτή, νά τούς ἐξηγήσετε ὅτι αὐτός ὁ ἀριθμός βρίσκεται στή φύση, ὀνομάζεται Π (καί γράφεται Π), καί ὅτι μποροῦμε νά χρησιμοποιήσουμε τόν ἀριθμό αὐτό σέ ὑπολογισμούς.

Προσδιορίζοντας τό ὕψος

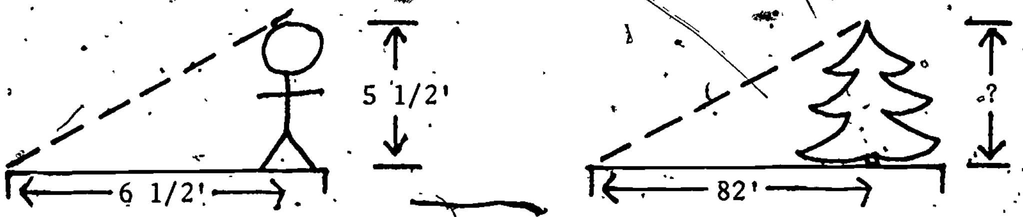
Ὑπάρχει κάτι στό μυαλό πού παρακινεῖ ἔντονα τούς μαθητές νά θέλουν νά μάθουν πόσο ψηλό εἶναι ἕνα δέντρο, ἕνα κτήριο, ἤ μιά κολώνα. Γιά νά ἐκμεταλλευτεῖτε αὐτή τήν περιέργεια, θά σᾶς ἐξηγήσουμε δύο ἀπό τίς καλύτερες μεθόδους ἐξεύρεσης ὑψόμετρου. Ἡ πρώτη μπορεῖ νά εἰσαχθεῖ συζητώντας καί διαβάζοντας γιά τόν Paul Bunyan καί τούς ξυλοκόπους (πού βρίσκονται στό τμῆμα "Tall Tales" τῶν περισσοτέρων βασικῶν ἀναγνωστηρίων) καί πῶς ὑπολόγιζαν τό ὕψος τῶν δέντρων.

Ὁ δάσκαλος θά χρειαστεῖ ἕνα μπαστούνι ἀρκετά μακρύ. Νά σημειώσετε πάνω σ' αὐτό τό ὕψος ἑνός μαθητῆ μέ ἕνα ζωηρόχρωμο χαρτί ἤ ταινία ἤ μαρκαδόρο. Νά βάλετε τόν μαθητή νά διαλέξει ἕνα δέντρο καί νά βρεῖ μιά ἀπόσταση ἀπό τήν βάση τοῦ δέντρου αὐτοῦ πού φαίνεται ἴση μέ τό σημειωμένο ὕψος. Ὁ μαθητής πρέπει νά ξαπλώσει ἀνάσκελα (ἕνας μουσαμάς θά ἦταν χρήσιμος) ἐνῶ ἕνας ἄλλος μαθητής θά κρατάει τό μπαστούνι ὄρθιο καί κάθετο στά πόδια τοῦ παιδιοῦ πού εἶναι ξαπλωμένο. Ὁ μαθητής πού εἶναι ξαπλωμένος πρέπει νά μετακινηθεῖ πιό κοντά ἤ πιό μακρυά ἀπό τό δέντρο, μέχρις ὅτου ἡ κορυφή τοῦ δέντρου νά εὐθυγραμμίζεται μέ τό σημάδι στό μπαστούνι. Ὅταν γίνει αὐτό (κρατώντας πάντα τό μπαστούνι στήν ἄκρη τῶν ποδιῶν τοῦ μαθητῆ) τό ὕψος τοῦ δέντρου εἶναι τό ἴδιο μέ τήν ἀπόσταση ἀπό τή βάση του μέχρι τό κεφάλι τοῦ μαθητῆ. Δεῖτε τό ἀκόλουθο σχῆμα.



Γνωρίζετε ὅτι ἡ μακρύτερη σκιά στόν κόσμο πέφτει ἀπό ἕνα βουνό στά νησιά τῶν Καναρίων καί ὑπερσκελεῖ τά 150 μίλια τό πρωΐ καί τό βράδυ. Ἄν θέλετε νά προσπαθήσετε νά μετρήσετε περπατώντας τήν ἀπόσταση αὐτή! Γιά νά γίνει αὐτό, μπορεῖτε νά χρησιμοποιήσετε τή "μέθοδο τῆς σκιᾶς" στόν προσδιορισμό τοῦ ὕψους. Αὐτό θά χρειάζονταν ἀναλογίες συγκρίνοντας τό ὕψος τῆς σκιᾶς ἑνός ἀνθρώπου (τοῦ ὁποίου τό ὕψος γνωρίζετε) μέ τό μῆκος τῆς σκιᾶς τοῦ ἀντικειμένου.

Παράδειγμα: $\frac{\text{ὕψος ἀνθρώπου}}{\text{μῆκος σκιᾶς ἀνθρώπου}} = \frac{\text{ὕψος δέντρου}}{\text{μῆκος σκιᾶς δέντρου}}$



$\frac{5.5}{6.5} = \frac{\text{ὕψος δέντρου}}{82}$

69 πόδια = ὕψος δέντρου
ΚΑΤΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΕΝΟΣ ΠΟΔΟΣ

$\frac{82 \times 5.5}{6.5} = \text{ὕψος δέντρου}$

<u>Σημείωση</u>: Μεγαλύτερα στήν ἡλικία παιδιά θά μποροῦσαν νά κάνουν αὐτούς τούς ὑπολογισμούς ἤ θά μποροῦσε νά χρησιμοποιηθεῖ ὑπολογιστής τσέπης. Ἤ, οἱ μαθητές θά μποροῦσαν νά ἔκαναν τίς μετρήσεις καί ὁ δάσκαλος τίς πράξεις.