DOCUMENT RESUME

ED 187 519 SE 030 375

AUTHOR Allen, Frank B.; And Others
TITLE Matematica Para La Escuela Secundaria: Geometria (Parte 2). Traduccion Preliminar de la Edicion Inglesa Revisada. (Mathematics for High School: Geometry, Part 2. Preliminary Translation of the Revised English Edition).
INSTITUTION Stanford Univ., Calif. School Mathematics Study Group.
SPONS AGENCY National Science Foundation, Washington, D.C.
PUB DATE 63
NOTE 411p.: For related document in Spanish, see SE 030 374.

EDRS PRICE MF01/PC17 Plus Postage.
DESCRIPTORS *Bilingual Education; *Geometry; *Instructional Materials; Mathematics Curriculum; Mathematics Education; Mathematics Instruction; *Secondary Education; *Secondary School Mathematics; *Textbooks
IDENTIFIERS *School Mathematics Study Group

ABSTRACT

This is part two of a two-part SMSG mathematics text for high school students. Chapter topics include: (1) perpendicular lines and planes in space; (2) parallel lines in a plane; (3) parallel lines in space; (4) areas of polygonal regions; (5) similarity; (6) circles and spheres; (7) constructions; (8) the area of a circle and related topics; and (9) plane coordinate geometry. This text is written in Spanish. (RH)

GRUPO DE ESTUDIO DE LA MATEMATICA ESCOLAR

MATEMATICA PARA LA ESCUELA SECUNDARIA

GEOMETRIA (Parte 2)

(Traducción preliminar de la edición inglesa revisada)

SMSG

MATEMATICA PARA LA ESCUELA SECUNDARIA

GEOMETRIA (Parte 2)

(Traducción preliminar de la edición inglesa revisada)

Texto preparado bajo la supervisión del Personal de las Muestras de Libros de Texto, del Grupo de Estudio de la Matemática Escolar:

Frank B. Allen, Escuela Secundaria del Pueblo de Lyons

Edwin C. Douglas, Escuela Taft

Donald E. Richmond, Colegio Williams

Charles E. Rickart, Universidad de Yale

Henry Swain, Escuela Secundaria del Pueblo de New Trier

Robert J. Walker, Universidad de Cornell

El apoyo financiero para el Grupo de Estudio de la Matemática Escolar provino de la Fundación Nacional de Ciencias.

Proyecto de Traducción al Español

Comisión Consultiva

Edward G. Begle, Universidad de Stánford

Howard F. Fehr, Universidad de Columbia

Mariano García, Universidad de Puerto Rico

Max Kramer, San Jose State College

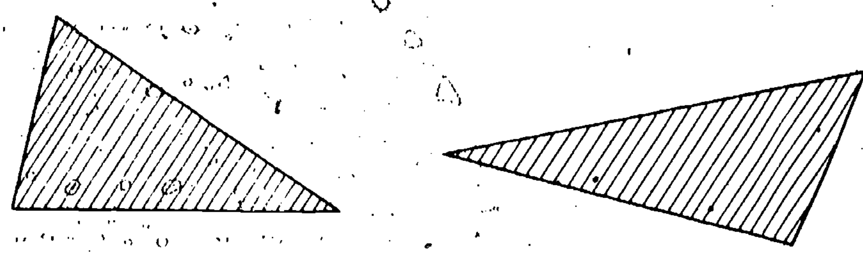
TABLA DE MATERIAS

Capítulo 11

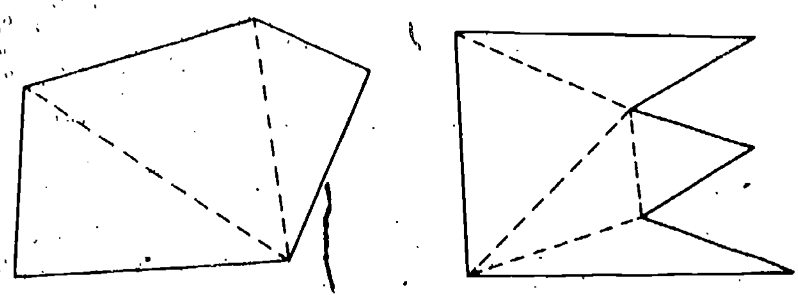
AREAS DE REGIONES POLIGONALES

11-1. Regiones poligonales

Una región triangular es una figura que consiste en un triángulo más su interior, como una de las que se ilustran aquí:



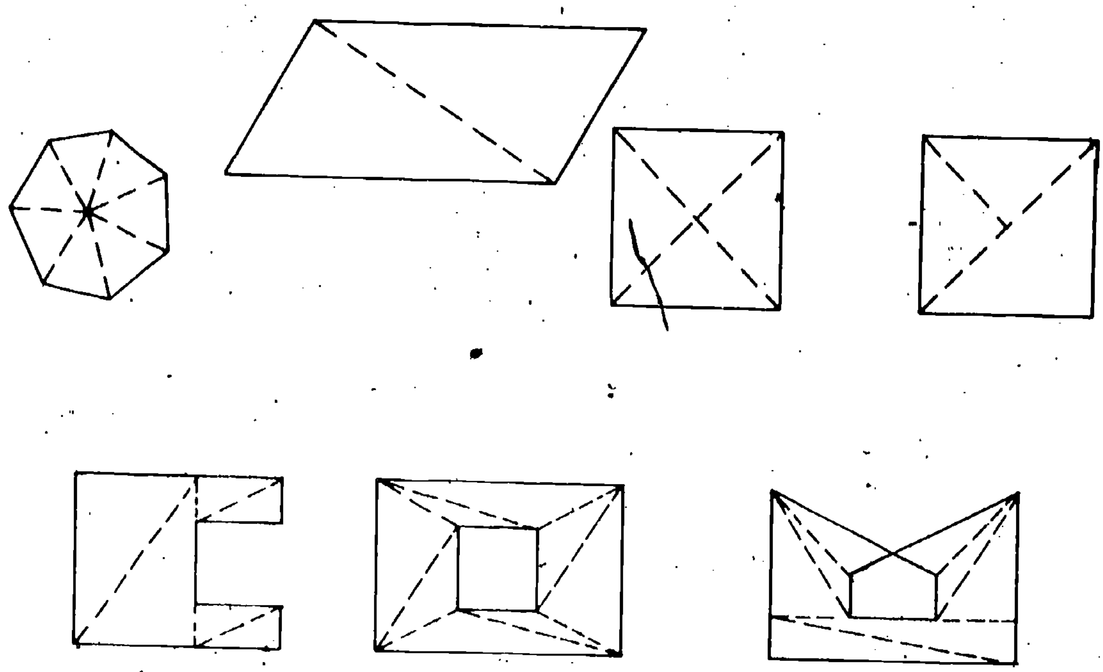
Una región poligonal es una figura en un plano, como una de éstas:



que puede "dividirse" en regiones triangulares. Con mayor precisión:

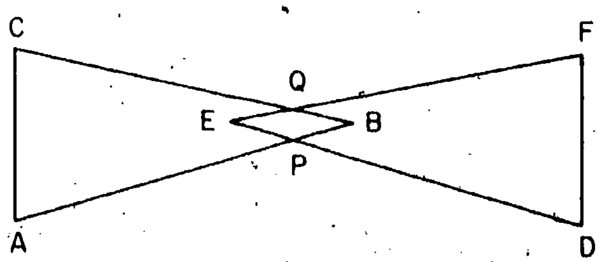
Definiciones: Una <u>región triangular</u> es la reunión de un triángulo y su interior. Una <u>región poligonal</u> es la reunión de un número finito de regiones triangulares en un plano, tales que si dos cualesquiera de ellas se intersecan, la intersección es o bien un segmento o un punto.

Las líneas de trazos en las figuras anteriores muestran la manera en que se podría dividir cada una de las figuras de este modo. He aquí otros ejemplos:

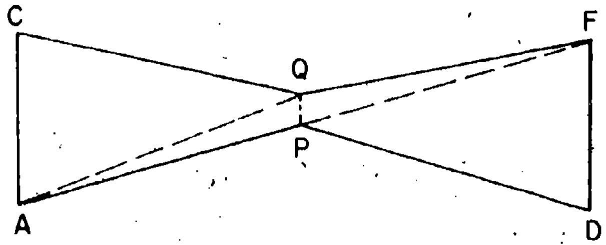


En los últimos dos ejemplos las figuras tienen "agujeros". La definición no excluye esta posibilidad, y, por tanto, estas figuras son regiones poligonales legítimas.

Por otra parte, la región APDFQC no puede "dividirse" en

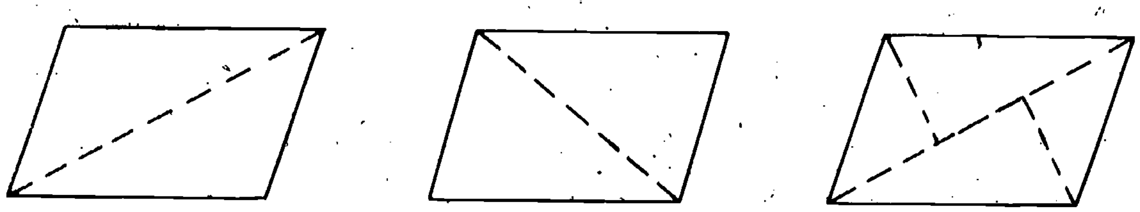


el ΔABC y el ΔDEF, aunque <u>es</u> la reunión de estos dos triángulos. La intersección de los dos triángulos es el cuadrilátero EPBQ, que ciertamente no es un segmento ni un punto. Esto no significa que APDFQC no sea una región poligonal, sino que el describirla como la reunión del ΔABC y el ΔDEF no es suficiente para demostrar que lo es. APDFQC es efectivamente una región poligonal, en la forma ilustrada a continuación:



Las regiones poligonales constituyen una clase muy extensa de figuras. Desde luego, hay figuras sencillas e importantes que no son regiones poligonales. Por ejemplo, la figura formada por una circunferencia junto con su interior no es de este tipo.

Si una figura puede dividirse en regiones triangulares, esto es posible de muchas maneras. Por ejemplo, un paralelogramo más su interior puede dividirse de muchas maneras. Aquí ilustramos tres de ellas.



En este capítulo estudiaremos las áreas de regiones poligonales, y aprenderemos a calcularlas. Los dieciséis postulados ya presentados nos permiten hacer esto, pero el trabajo sería extremadamente difícil y poco propio para un curso introductorio de geometría como es éste. En cambio, presentaremos la medida del área, en forma parecida a como lo hicimos con la medida de distancias y de ángulos, usando postulados adecuados.

> Postulado 17. A toda región poligonal le corresponde un número positivo único.

Definición: El área de una región poligonal es el número que se le asigna según el postulado 17.

Designamos el área de una región R simplemente como el área R. En los postulados siguientes, cuando hablemos de una región, por abreviar, se entenderá que hablamos de una región poligonal.

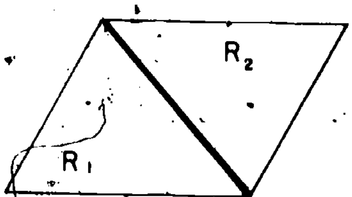
Nuestra intuición nos dice que dos regiones de la misma forma y tamaño deben tener la misma área, no importa su posición en el espacio. Este concepto fundamental nos sugiere el postulado siguiente:

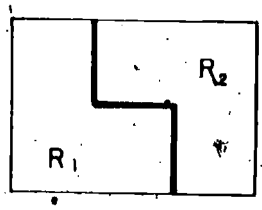
> Postulado 18. Si dos triángulos son congruentes, entonces las regiones triangulares tienen la misma área.

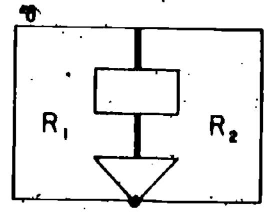
Si una región se divide en dos partes, es claro que el área de la región debe ser la suma de las áreas de las partes. Esto es lo que dice nuestro próximo postulado. Enunciémoslo y consideremos después su significado.

> <u>Postulado 19</u>. Supongamos que la región R es la reunión de dos regiones R_1 y R_2. Supongamos que R_1 y R_2 se intersecan en a lo sumo un número finito de segmentos y puntos. Entonces el área de R es la suma de las áreas de R_1 y R_2.

Las tres figuras siguientes ilustran ejemplos de la aplicación de este postulado:

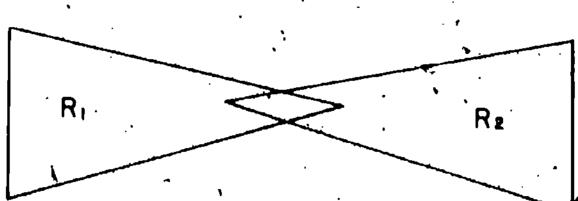






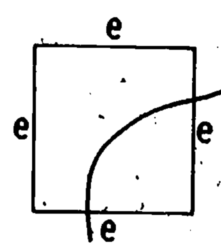
En cada figura la intersección está marcada con líneas gruesas, y consiste en un segmento en la primera figura, en tres segmentos en la segunda, y en dos segmentos y un punto en la tercera.

Por otra parte, la figura siguiente es la reunión de dos



regiones triangulares, R_1 y R_2, pero su intersección <u>no</u> consiste en un número finito de segmentos y puntos. La intersección es la región cuadrilátera del centro. Entonces el postulado 19 no se puede aplicar en este caso. Si tratáramos de calcular el área de toda la región sumando las áreas de R_1 y R_2, el área de la región cuadrilátera se contaría dos veces. Fue pensando en esta situación por lo que insistimos, en la definición de región poligonal, en que los triángulos que determinan la región deberían ser como allí especificados.

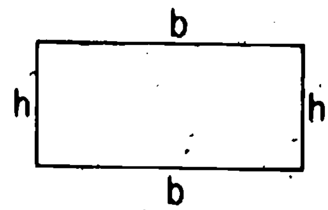
Al igual que ocurría en el caso de distancias y ángulos, la "unidad de área" puede elegirse arbitrariamente. Sin embargo, conviene y es costumbre escoger una unidad estrechamente asociada a la unidad de distancia. Si vamos a medir la distancia en pulgadas, mediremos el área en pulgadas cuadradas; y en general, para cualquier unidad de distancia que elijamos, usaremos la correspondiente unidad cuadrada para medir el área. Una manera de asegurar esto sería enunciar como un postulado el que el área de un cuadrado será el cuadrado de la longitud de una arista.



(Entendemos por "área de un cuadrado", desde luego, el área de la región poligonal que es la reunión del cuadrado y su interior. Análogamente, entenderemos por área de cualquier cuadrilátero, el área de la región poligonal correspondiente.)

La afirmación $A = e^2$ es, sin embargo, muy particular para que sea adecuada. La dificultad estriba en que si establecemos nuestra unidad de área por el postulado $A = e^2$, entonces tendremos el problema de demostrar que la fórmula correspondiente será cierta también para rectángulos. Es decir, tendremos que demostrar que el área de un rectángulo es el producto de la longitud de su base y la longitud de su altura. Desde luego, si sabemos que esto es cierto para los rectángulos, concluiremos inmediatamente que en el caso de los cuadrados $A = e^2$, porque todo cuadrado es un rectángulo. Podemos demostrar la afirmación recíproca, pero la demostración es más difícil de lo que uno pudiera creer. Lo más conveniente, por ahora, es tomar como postulado la fórmula más general, es decir, la de los rectángulos:

> <u>Postulado</u> <u>20</u>. El área de un rectángulo es el producto de la longitud de su base y la longitud de su altura.



$A = bh$

Notarás que en los párrafos anteriores y en el postulado 20 cuidamos de decir, "longitud de su base" y "longitud de su altura". De ahora en adelante, al usar el postulado 20, diremos sencillamente:

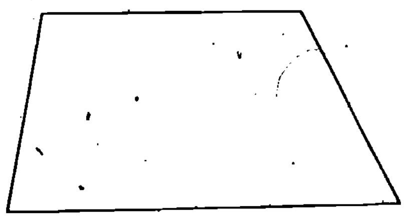
"El área de un rectángulo es el producto de su base y su altura". Esto quiere decir que a veces usamos "base" y "altura" para indicar segmentos rectilíneos y a veces para indicar sus longitudes. De ahora en adelante haremos esto generalmente, confiando en tu habilidad para distinguir por el contexto cuál de los sentidos de una palabra debe sobrentenderse. Si "bisecamos un lado de un triángulo", la palabra "lado" tendrá su sentido original, el de un conjunto de puntos. Si "cuadramos un lado de un triángulo", usamos la palabra "lado" para abreviar "longitud de un lado". Tales maneras de abreviar serán muy convenientes en este capítulo y los siguientes.

Podemos ahora, a base de los cuatro postulados del área, calcular las áreas de triángulos, paralelogramos y varias otras figuras.

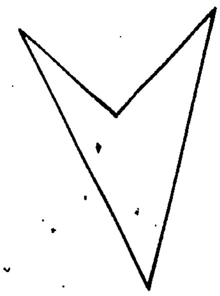
Conjunto de problemas 11-1

1. Muestra que cada una de las figuras siguientes es poligonal, indicando un modo de dividirla en regiones triangulares tales que si dos de ellas se intersecan, su intersección es un punto o un segmento de cada una de ellas. Trata de hallar en cada caso el menor número posible de regiones triangulares.

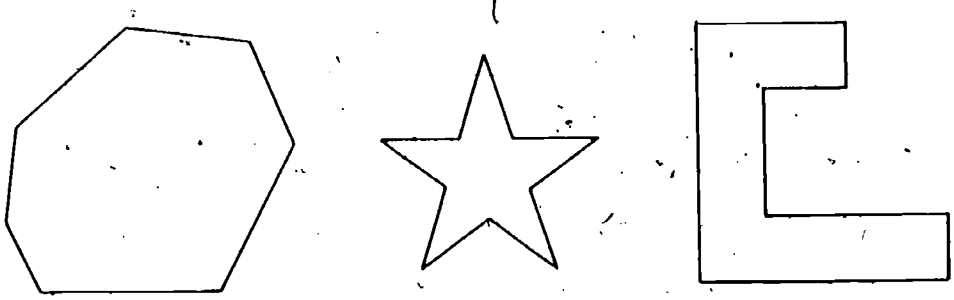
a.



b.



c.



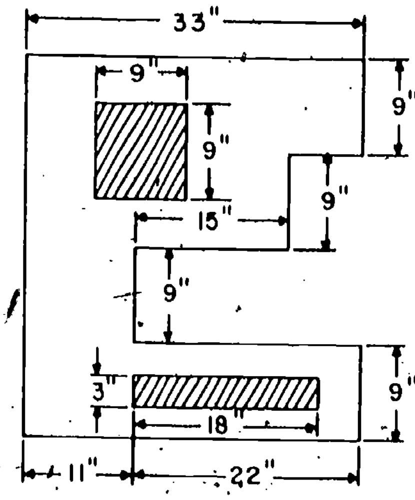
2. Calcula el área de un rectángulo de 50 pies de largo y $16\frac{1}{2}$ pies de ancho.

3. a. Si duplicas la altura de un rectángulo y dejas la misma base, ¿cómo cambia el área?

   b. Si duplicas ambas, la altura y la base de un rectángulo, ¿cómo cambia el área?

4. ¿Cuántas losetas, cada una cuadrada y de 6 pulgadas de lado, se necesitarán para cubrir un piso rectangular de 37 pies 6 pulgadas por 12 pies?

5. La figura nos muestra una cara de cierta parte de una máquina. Para computar el costo de pintar un gran número de estas partes, es necesario conocer el área de una cara. Las regiones sombreadas no se van a pintar. Halla el área a pintarse.



*6. ¿Serán ciertas o falsas las siguientes afirmaciones? Da una razón para cada respuesta.

a. Un triángulo es una región poligonal.

b. El postulado 17 dice que a todo número positivo A le corresponde alguna región poligonal R.

c. Toda región poligonal tiene una área única.

d. Si dos triángulos son congruentes, entonces sus regiones triangulares tienen la misma área.

e. La reunión de dos regiones poligonales tiene un área igual a la suma de las áreas de cada una de las regiones.

f. El postulado 20 nos asegura que el área de un cuadrado de lado e es $A = e^2$.

g. El interior de un trapecio es una región poligonal.

h. Una región triangular es una región poligonal.

7. Una región rectangular con base 6 y altura 4 se puede dividir en cuadrados de lado 2, como en la figura 1. Notarás que un cuadrado de lado 2 es el mayor cuadrado posible que podemos utilizar para dividir la región rectangular en un número

exacto de cuadrados congruentes.

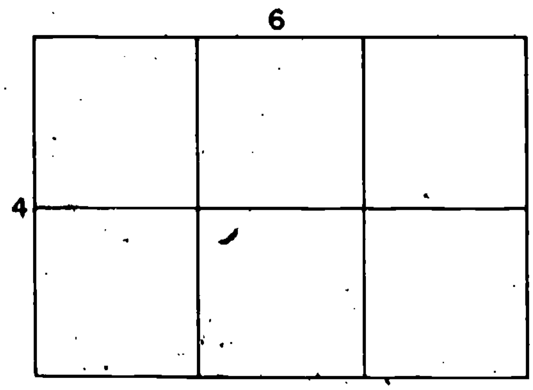


Figura 1

De manera análoga, un cuadrado de lado $\frac{1}{2}$ es el mayor cuadrado posible que podemos utilizar para dividir una región rectangular de base 4 y altura $1\frac{1}{2}$ en un número exacto de cuadrados congruentes, como en la figura 2.

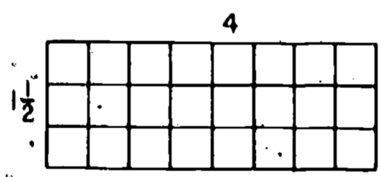


Figura 2

Determina el lado del mayor cuadrado posible que podemos utilizar para dividir en un número exacto de cuadrados congruentes las regiones rectangulares con las medidas siguientes:

a. $b = 4$ $h = 12$

b. $b = 5$ $h = 2\frac{3}{4}$

c. $b = 3.5$ $h = 1.7$

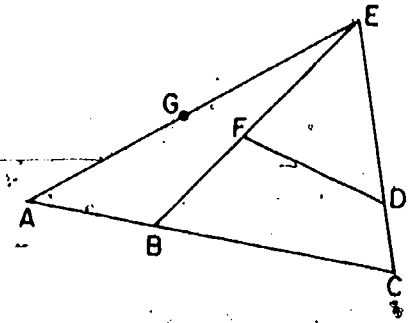
d. $b = 1.7$ $h = 1.414$

e. $b = 2.0$ $h = \sqrt{2}$

f. $b = \sqrt{2}$ $h = \sqrt{3}$

¿Qué dificultad encuentras en las partes (e) y (f)? ¿Te das cuenta de que esto tiene que ver con lo explicado en el texto antes de presentar el postulado 20?

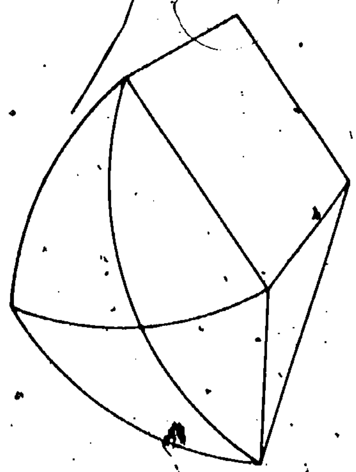
*8. En la figura siguiente, A, B, C, D, E, F, G se llaman <u>vértices</u>, los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EG}$, $\overline{GA}$, $\overline{EF}$, $\overline{FD}$, $\overline{FB}$ se llaman <u>aristas</u>, y las regiones poligonales ABE, FED, BCDF se llaman <u>caras</u>. El exterior de la figura también se considerará ~~como~~ una <u>cara</u>.



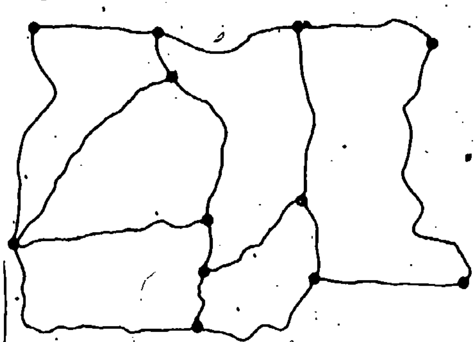
Sea c el número de caras, v el número de vértices, y a el número de aristas. En un teorema descubierto por Euler, un famoso matemático, aparece la siguiente expresión: c - a + v, que se refiere a figuras de las que la anterior es un ejemplo. Usando la figura, calculemos el valor de c - a + v. Verás que c = 4, v = 7, a = 9, lo que da c - a + v = 2.

Usando las dos figuras que siguen, calcula c - a + v. Observa que las aristas no tienen necesariamente que ser segmentos.

a.



b. Supon te que esta figura es una sección de un mapa en que se muestran distritos:



c. ¿Qué característica observas en los resultados de los tres cómputos?

d. En la parte (a) marca un punto en el interior del cuadrilátero y dibuja segmentos desde cada uno de los cuatro vértices al punto. ¿Cómo influye esto en el cálculo de c - a + v? ¿Puedes explicar por qué?

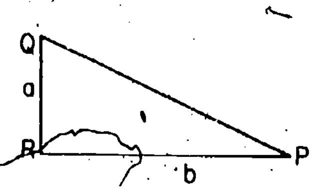
e. Marca un punto en el exterior de la figura de la parte (a) y únela a los dos vértices más cercanos. ¿Cómo influye esto en los cómputos?

f. Si te interesa este problema y quieres seguir estudiándolo, lo verás tratado en "The Enjoyment of Mathematics" por Rademacher y Toeplitz y en "Fundamental Concepts of Geometry" por Meserve.

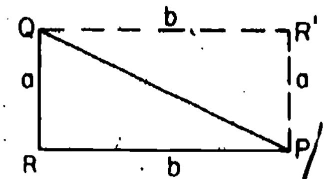
11-2. Areas de triángulos y cuadriláteros

Calculemos ahora algunas áreas, basándonos en nuestros postulados.

Teorema 11-1. El área de un triángulo rectángulo es la mitad del producto de sus catetos.



$A = \frac{1}{2}ab$



$2A = ab$

Demostración: Dado el $\triangle PQR$, con un ángulo recto en R. Sea A el área del $\triangle PQR$. Sea R' la intersección de la paralela a $\overleftrightarrow{PR}$ que pasa por Q y la paralela a $\overleftrightarrow{QR}$ que pasa por P. Entonces QR'PR es un rectángulo, y $\triangle PQR \cong \triangle QPR'$. Por el postulado 18, esto significa que el área del $\triangle QPR'$ es A. Por el postulado 19, el área del rectángulo es $A + A$, porque los dos triángulos se intersecan sólo en el segmento $\overline{PQ}$. Por el postulado 20, el área del rectángulo es ab. Por lo tanto,

$$2A = ab$$

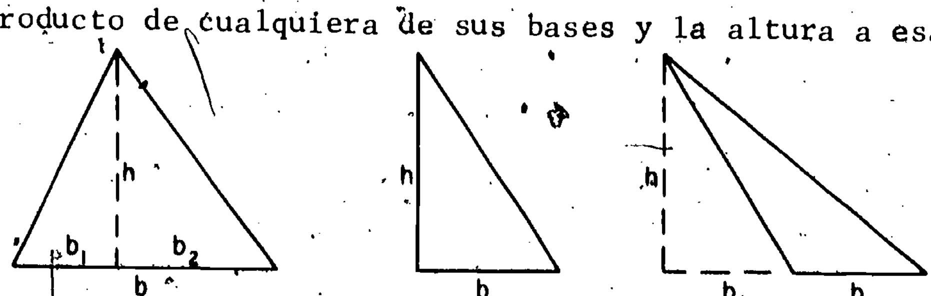
y

$$A = \frac{1}{2}ab$$

que era lo que teníamos que demostrar.

De esto podemos obtener la fórmula para el área de cualquier triángulo. Una vez tengamos esta fórmula, ella incluirá el teorema 11-1 como un caso particular.

Teorema 11-2. El área de un triángulo es la mitad del producto de cualquiera de sus bases y la altura a esa base.



$A = \frac{1}{2}bh$

Demostración: Sea A el área del triángulo dado. Las tres figuras ilustran los tres casos a considerar:

(1) Si el pie de la altura está entre los extremos de la base, entonces la altura divide al triángulo dado en dos triángulos rectángulos, con bases b_1 y b_2, según se indica. Por el teorema anterior, estos dos triángulos tienen áreas $\frac{1}{2}b_1h$ y $\frac{1}{2}b_2h$. Por el postulado 19, tenemos

$$A = \frac{1}{2}b_1h + \frac{1}{2}b_2h.$$

Puesto que $b_1 + b_2 = b$, tenemos

$$A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$$

$$= \frac{1}{2}bh$$

como queríamos demostrar.

(2) Si el pie de la altura es un extremo de la base, nada nos queda por demostrar: ya sabemos por el teorema anterior que $A = \frac{1}{2}bh$.

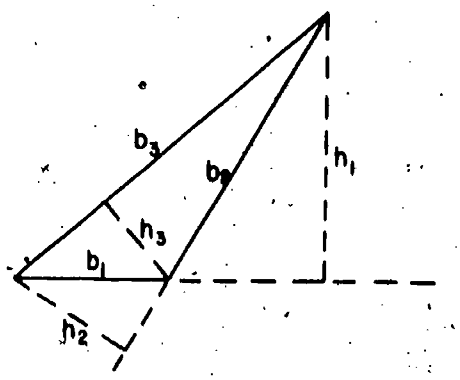
(3) En la tercera figura, vemos el triángulo dado, con área A, y dos triángulos rectángulos (uno mayor y otro más pequeño). Tenemos

$$\frac{1}{2}b_1h + A = \frac{1}{2}(b_1 + b)h.$$

El alumno explicará el porqué de este paso. Despejando algebraicamente A, obtenemos $A = \frac{1}{2}bh$, que era lo que se quería demostrar.

Notarás que el teorema 11-2 se puede aplicar a cualquier triángulo de tres maneras, porque cualquier lado puede tomarse como la base; después lo multiplicamos por la altura correspondiente y dividimos por 2, para así conseguir el área. La figura que sigue ilustra las tres posibilidades para un solo triángulo.

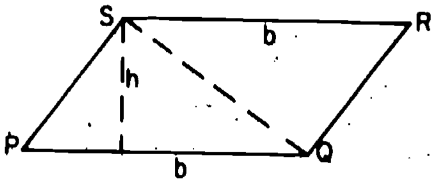
Las tres fórmulas $\frac{1}{2}b_1h_1$, $\frac{1}{2}b_2h_2$ y $\frac{1}{2}b_3h_3$ tienen que dar una misma respuesta, porque todas ellas dan el valor correcto para el área del triángulo.



Notarás también que una vez sepamos la manera de hallar el área de un triángulo, no tenemos gran problema con las áreas de regiones poligonales: todo lo que necesitamos es partir las regiones poligonales en regiones triangulares (lo que sabemos que se puede hacer) y luego sumar las áreas de las regiones triangulares.

Esto es bastante trivial para el caso de paralelogramos y trapecios.

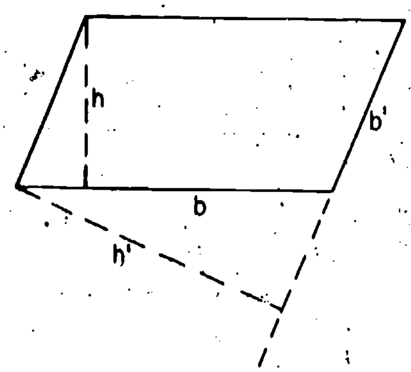
Teorema 11-3. El área de un paralelogramo es el producto de cualquiera de sus bases y la correspondiente altura.



$A = bh$

Demostración: Dibuja la diagonal $\overline{SQ}$. Según el teorema 9-14, $\overline{SQ}$ divide al paralelogramo en dos triángulos congruentes. El postulado 18 nos dice que los triángulos congruentes tienen áreas iguales. Pero el área del $\triangle PSQ = \frac{1}{2}bh$. Por lo tanto, el área del paralelogramo PQRS es bh, como se quería demostrar.

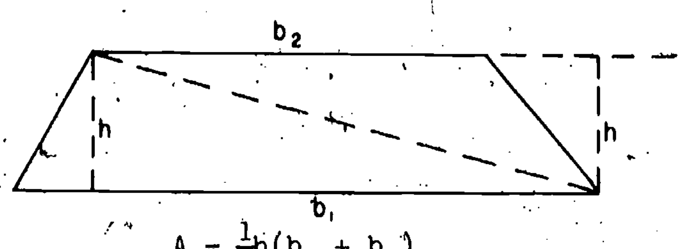
Notarás que el teorema 11-3 se puede aplicar a cualquier paralelogramo de dos maneras, porque se puede tomar cualquier lado como base, y luego multiplicarlo por la altura correspondiente, para así conseguir el área.



En el primer caso, tenemos que $A = bh$ y en el segundo caso $A = b'h'$. Estas dos expresiones bh y $b'h'$ deben dar el mismo resultado, pues ambas dan el valor correcto para el área del paralelogramo.

El área de un trapecio puede obtenerse también descomponiéndolo en dos triángulos.

<u>Teorema</u> <u>11-4</u>. El área de un trapecio es la mitad del producto de su altura y la suma de sus bases.



$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$

Demostración: Sea A el área del trapecio. Cualquier diagonal divide al trapecio en dos triángulos, con áreas $\frac{1}{2}b_1h$ y $\frac{1}{2}b_2h$. (Las líneas de trazos a la derecha indican por qué el segundo triángulo tiene la misma altura h que el primero.) Por el postulado 19,

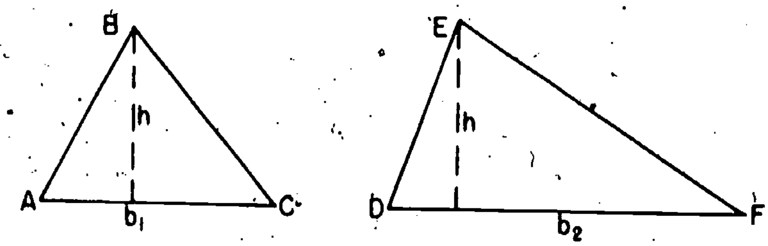
$$A = \frac{1}{2}b_1h + \frac{1}{2}b_2h.$$

Algebraicamente, esto equivale a la fórmula

$$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2).$$

La fórmula para el área de un triángulo tiene dos consecuencias útiles, ambas obvias:

Teorema 11-5. Si dos triángulos tienen alturas iguales, entonces la razón de sus áreas es igual a la razón de sus bases.

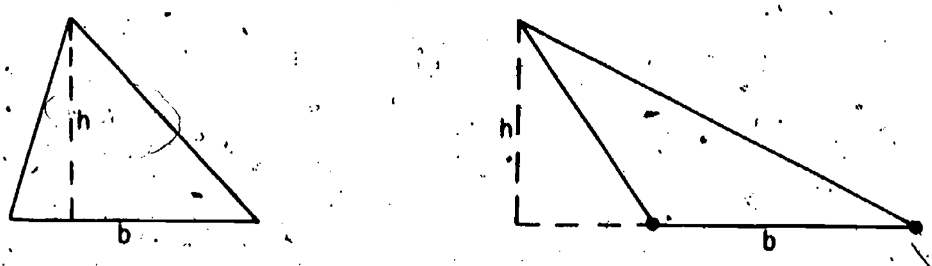


Datos: $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ con alturas iguales.

Demostrar: $\dfrac{\text{Area del } \triangle ABC}{\text{Area del } \triangle DEF} = \dfrac{b_1}{b_2}.$

Esto es fácil de ver una vez tenemos la fórmula $A = \frac{1}{2}bh$, puesto que entonces se deduce que $\dfrac{\frac{1}{2}b_1h}{\frac{1}{2}b_2h} = \dfrac{b_1}{b_2}.$

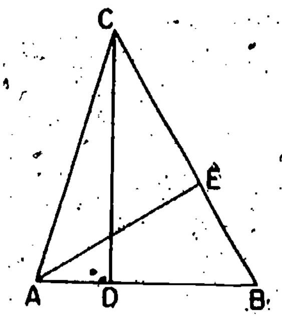
Teorema 11-6. Si dos triángulos tienen alturas iguales y bases iguales, entonces tienen áreas iguales.



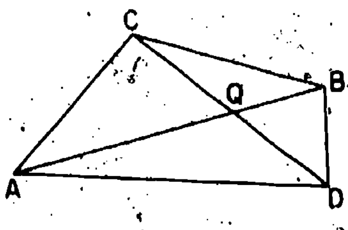
La demostración de este teorema es fácil, pues la fórmula $A = \frac{1}{2}bh$ da el mismo resultado en cada caso.

Conjunto de problemas 11-2

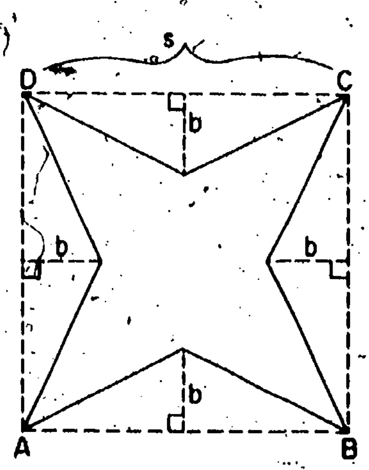
1. En el triángulo rectángulo ABC, con ángulo recto en C, AC = 7, BC = 24, AB = 25.
   a. Calcula el área del $\triangle ABC$.
   b. Determina la altura de la hipotenusa.
2. La hipotenusa de un triángulo rectángulo es 30, un cateto es 18 y el área del triángulo es 216. Halla la longitud de la altura de la hipotenusa y la longitud de la altura del cateto dado.
3. En el $\triangle ABC$, $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{BC}$.



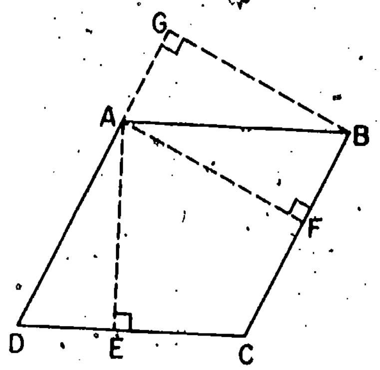
   a. Si AB = 8, CD = 9, AE = 6, calcula BC.
   b. Si AB = 11, AE = 5, BC = 15, calcula CD.
   c. Si CD = 14, AE = 10, BC = 21, calcula AB.
   d. Si AB = c, CD = h, BC = a, determina AE.
4. En la figura, CQ = QD.
   Demuestra que Area $\triangle ABC$ = Area $\triangle ABD$.



5. Si ABCD es un cuadrado, halla el área de la estrella dibujada a la derecha en términos de s y b. Los segmentos que forman el contorno de la estrella son congruentes.



6. En el paralelogramo ABCD, $\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{DC}$, $\overleftrightarrow{AF} \perp \overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{BG} \perp \overleftrightarrow{DA}$.



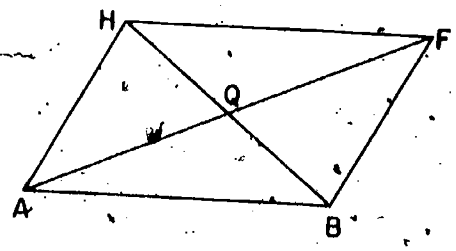
a. Si AE = 7, DC = 12, BC = 14, entonces AF = ________.

b. Si AE = 10, AB = 18, GB = 15, entonces AD = ________.

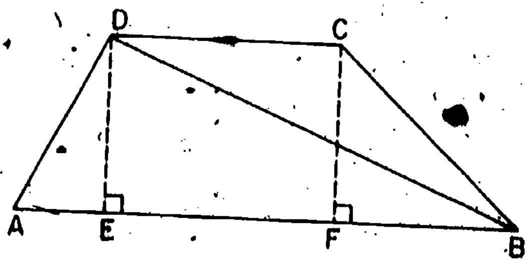
c. Si AF = 6, DC = 14, AE = 8, entonces AD = ________.

d. Si GB = 16, AD = 20, AF = 16, entonces AE = ________.

7. Demuestra que las diagonales de un paralelogramo lo dividen en cuatro triángulos con áreas iguales.



8. Determina el área del trapecio ABCD,



a. si AB = 12, DC = 6, DE = 4.

b. si AB = 9, AD = 4, DC = 5, CF = 3.

c. si AE = 4, FB = 6, DE = 5, DB = 13, DC = 6.

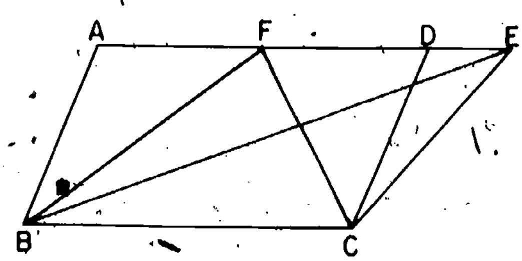
d. si AB = 27, DE = 7, AE = 3, EF = FB.

e. si AE = 12, EF = 3, FB = 9, CF = FB.

9. Calcula el área de un trapecio si su altura tiene longitud 7 y su mediana tiene longitud 14. (Sugerencia: V. el problema 10 del Conjunto de problemas 9-6.)

10. Un triángulo y un paralelogramo tienen áreas iguales y bases iguales. ¿Qué relación hay entre sus alturas?

11. Compara las áreas de:



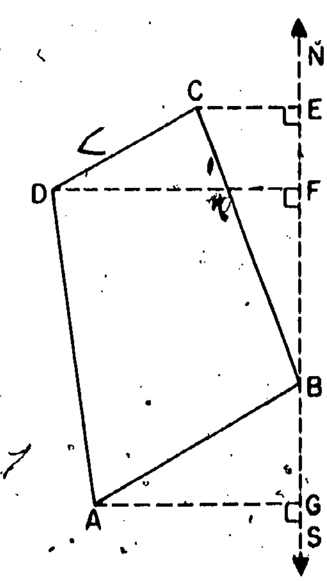
a. El paralelogramo ABCD y el triángulo BCE.

b. El $\triangle BCF$ y el $\triangle BCE$.

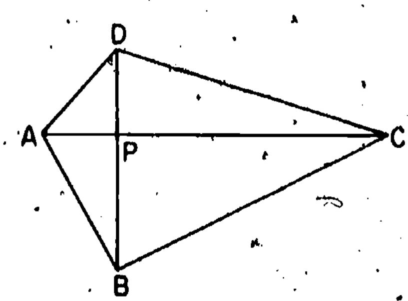
c. El $\triangle ABF$ y el $\triangle FCD$, si F es el punto medio de $\overline{AD}$.

d. Los triángulos CFD y BCE y el paralelogramo ABCD, si F es el punto medio de $\overline{AD}$.

12. Al medir el terreno dibujado aquí, un agrimensor marcó la recta $\overleftrightarrow{NS}$ en dirección norte-sur y pasando por B. Después localizó las rectas $\overleftrightarrow{CE}$, $\overleftrightarrow{DF}$, $\overleftrightarrow{AG}$ en dirección este-oeste. Encontró que CF = 5 varas, DF = 12 varas, AG = 10 varas, BG = 6 varas, BF = 9 varas, FE = 4 varas. Calcula el área del terreno.



13. Demuestra el teorema: Si el cuadrilátero ABCD tiene diagonales perpendiculares, su área es igual a la mitad del producto de las longitudes de las diagonales.

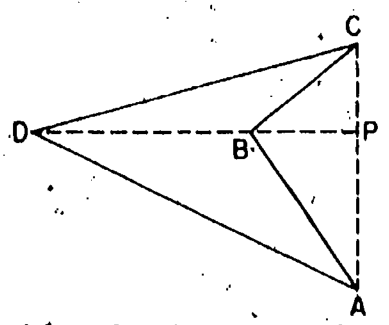


14. Redacta un corolario del teorema del problema 13 que se refiera al área de un rombo.

15. El área de un cuadrilátero es 126 y la longitud de una diagonal es 21. Si las diagonales son perpendiculares, calcula la longitud de la otra diagonal.

16. Las diagonales de un rombo tienen longitudes de 15 y 20. Calcula su área. Si una altura del rombo es 12, determina la longitud de un lado.

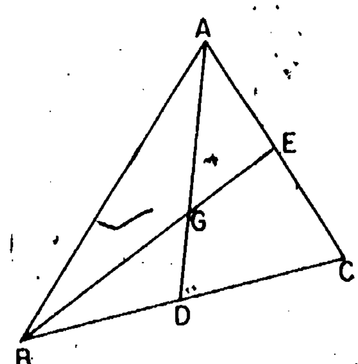
*17. ¿Será también cierto el teorema del problema 13 si la región poligonal ABCD no fuera convexa, como es el caso de la figura?



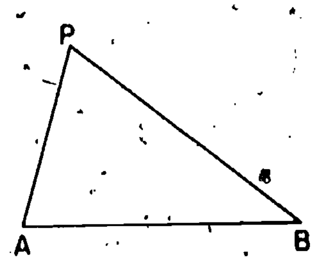
18. Demuestra que una mediana de un triángulo divide a éste en dos triángulos, cada uno de los cuales tiene un área igual a la mitad del área del triángulo original.

19. a. Si $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$ son dos medianas del $\triangle ABC$ que se intersecan en G, demuestra que Area $\triangle AEG$ = Area $\triangle BDG$.

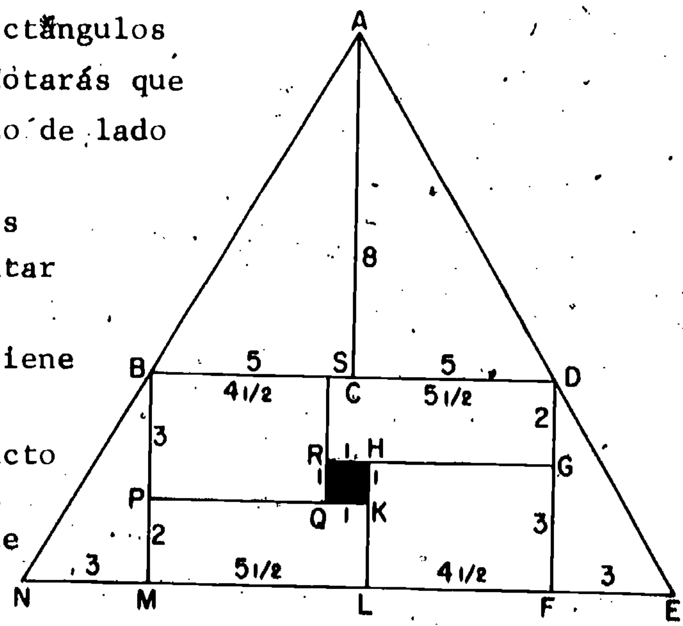
b. Determina qué parte del Area $\triangle ABC$ es el Area $\triangle BDG$. (Sugerencia: Dibuja $\overline{CF}$, la otra mediana.)



20. Si $\overline{AB}$ es un segmento fijo en el plano E, ¿qué otras posiciones de P en el plano E harán que el área del $\triangle ABP$ se mantenga constante? Describe el lugar de todas las posibles posiciones de P en el plano E que satisfagan la condición. Describe el lugar de todas las posibles posiciones de P en el espacio que satisfagan la condición.



*21. La figura de la derecha está formada por cuatro triángulos rectángulos y cuatro rectángulos. Notarás que hay un "agujero" cuadrado de lado unidad.

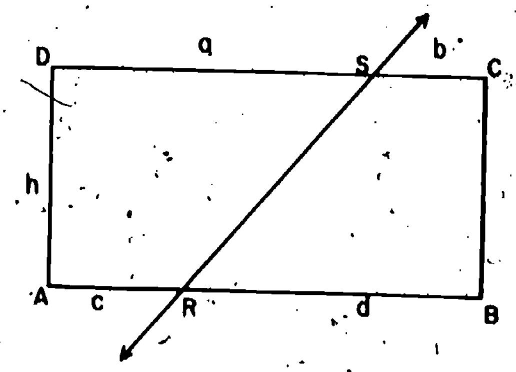


a. Suma las áreas de las ocho partes (sin contar el "agujero").

b. Demuestra que se obtiene el mismo resultado tomando el semiproducto de la longitud de la base y la longitud de la altura.

c. Explica por qué los resultados obtenidos en (a) y (b) son iguales, a pesar del "agujero".

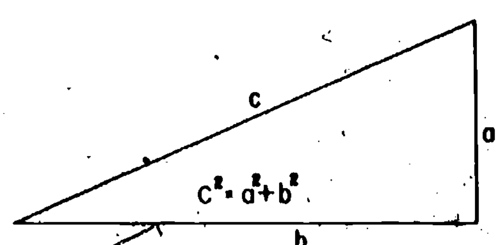
*22. Una recta divide a una región rectangular en dos regiones de igual área. Demuestra que esa recta pasa por la intersección de las diagonales del rectángulo.



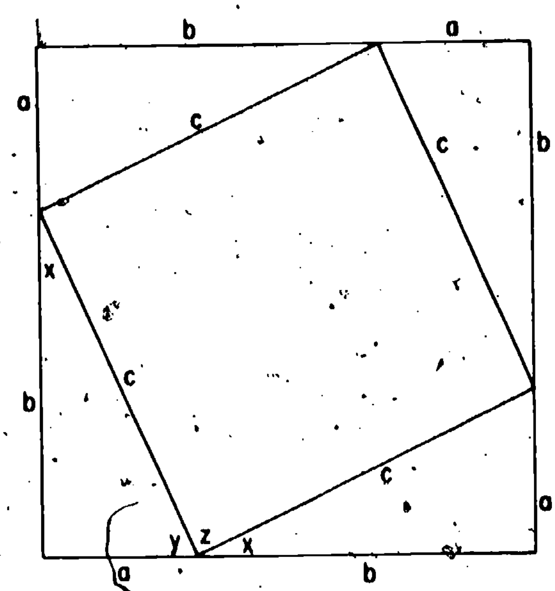
11-3. El teorema de Pitágoras

Ahora que sabemos trabajar con áreas, es relativamente fácil demostrar el teorema de Pitágoras.

Teorema 11-7. (El teorema de Pitágoras) En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



Demostración: Construimos un cuadrado cada uno de cuyos lados tiene longitud $a + b$. En este cuadrado dibujamos cuatro triángulos rectángulos con catetos a y b, así:



Entonces,

(1) Cada uno de los cuatro triángulos rectángulos es congruente al triángulo dado, por el postulado L.A.L. Por lo tanto, sus hipotenusas tienen longitud c, según se indica en la figura.

(2) El cuadrilátero formado por las cuatro hipotenusas es un cuadrado. Podemos demostrar esto del modo siguiente:

$\angle z$ es un ángulo recto, porque $m\angle y + m\angle z + m\angle x = 180$, y $m\angle y + m\angle x = 90$. (Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.) Como cada uno de los cuatro lados es igual a c, el cuadrilátero es un cuadrado.

(3) El área del cuadrado mayor es igual al área del cuadrado menor, más las áreas de los cuatro triángulos rectángulos congruentes.

Luego,

$$(a + b)^2 = c^2 + 4(\tfrac{1}{2}ab).$$

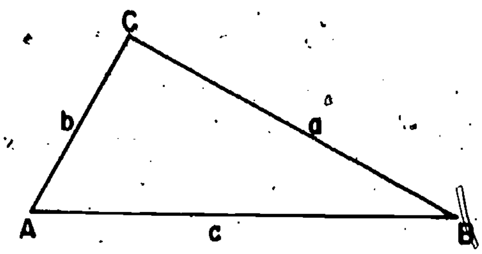
Por lo tanto,

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab,$$

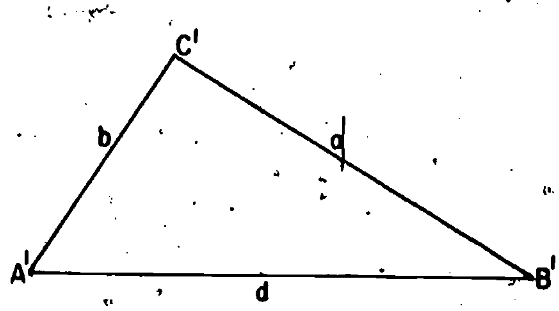
y finalmente, $a^2 + b^2 = c^2$, que era lo que ibamos a demostrar.

El recíproco del teorema de Pitágoras es igualmente cierto.

Teorema 11-8. Si el cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, entonces el triángulo es rectángulo, con un ángulo recto opuesto al primer lado.



Demostración: Dado el $\triangle ABC$, como en la figura, y $c^2 = a^2 + b^2$. Sea el $\triangle A'B'C'$ un triángulo rectángulo con catetos a y b.



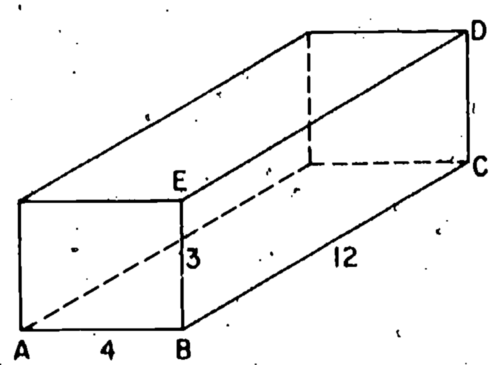
Sea d la hipotenusa del segundo triángulo. Por el teorema de Pitágoras,

$$d^2 = a^2 + b^2.$$

Por lo tanto, $d^2 = c^2$. Como c y d son ambos positivos, esto significa que $d = c$. Por el teorema L.L.L., tenemos que $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$. Entonces, $\angle C \cong \angle C'$. Por tanto, $\angle C$ es recto, como se quería demostrar.

Conjunto de problemas 11-3a

1. Un hombre camina hacia el norte 10 millas y después hacia el este 3 millas. ¿A qué distancia está del punto de partida? ("En vuelo directo")
2. Un hombre camina 7 millas hacia el norte, 6 millas al este y luego 4 millas al norte. ¿A qué distancia está del punto de partida?
3. Un hombre camina 5 millas hacia el norte, 2 millas al este, 1 milla al norte y finalmente 4 millas al este. ¿A qué distancia está del punto de partida?
4. En el cuerpo rectangular indicado en el diagrama, determina la longitud de $\overline{AC}$ y la de $\overline{AD}$.



5. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de números podrían ser las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo?

a. 10, 24, 26	d. 9, 40, 41
b. 8, 14, 17	e. 1.5, 3.6, 3.9
c. 7, 24, 25	f. $1\frac{2}{3}$, $2\frac{2}{3}$, $3\frac{1}{3}$

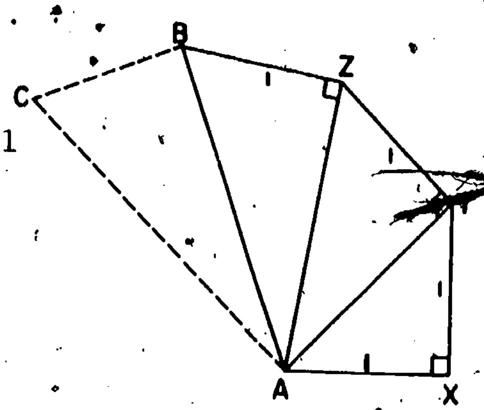
6. a. Demuestra, mediante el recíproco del teorema de Pitágoras, que podemos determinar enteros que representan longitudes de lados de triángulos rectángulos de la siguiente manera:

   Elige dos enteros positivos cualesquiera m, n tales que $m > n$. Entonces, $m^2 - n^2$, y $2mn$ serán las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo, y $m^2 + n^2$ será la longitud de la hipotenusa.

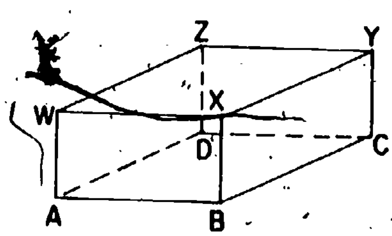
b. Usa el método anterior para hacer una lista de longitudes enteras de lados de triángulos rectángulos en los que la hipotenusa sea menor o igual que 25. Hay seis triángulos de esa clase.

7. a. Si los ángulos rectos y las longitudes son los de la figura, determina AY, AZ y AB.

b. Si continúas la disposición que hay en la figura, y tomas BC = 1 y m$\angle$CBA = 90, ¿cuál será la longitud de $\overline{AC}$? ¿Y la del siguiente segmento desde A? Notarás que se va desarrollando una regla interesante.



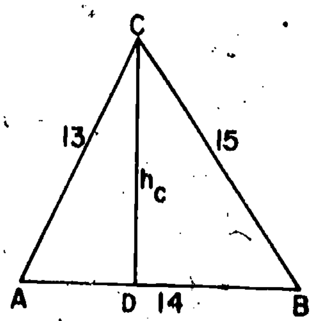
8. En el cuerpo rectangular de la derecha, AW = 1, AB = 2, AD = 2. Determina AY.



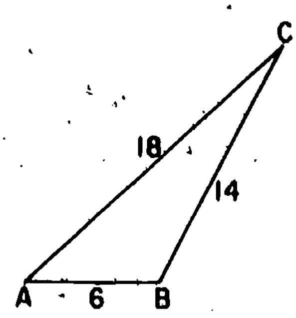
*9. En el $\triangle$ABC, AB = 14, BC = 15, AC = 13.

a. Calcula la longitud de la altura, h_c, de $\overline{AB}$.

b. Calcula la longitud de la altura, h_a, de $\overline{BC}$.

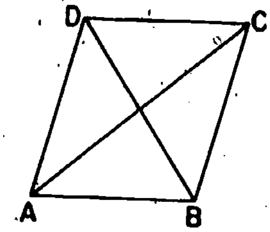


*10. El $\triangle$ABC tiene un ángulo obtuso, el $\angle$B, y AB = 6, BC = 14, AC = 18. Calcula la longitud de la altura, h_c, de $\overleftrightarrow{AB}$.

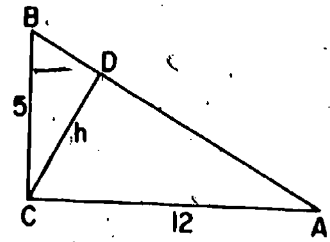


11. Un ángulo de un rombo tiene medida de 60 y un lado longitud de 8. Determina la longitud de cada diagonal.

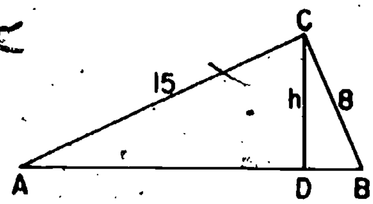
12. En el rombo ABCD, AC = 6 y BD = 4. Calcula la longitud de la perpendicular desde cualquier vértice a cualquiera de los lados opuestos.



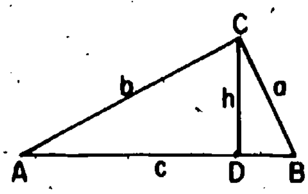
13. En la figura, $\overline{BC} \perp \overline{CA}$, BC = 5, CA = 12, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$. Calcula CD.



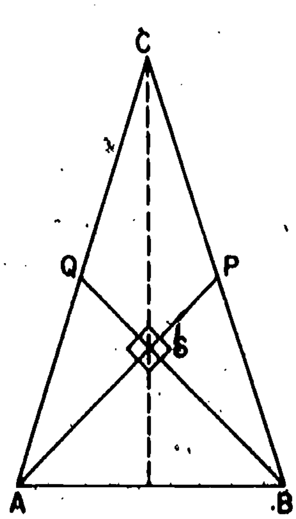
14. Las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo ABC son 15 y 8. Calcula la longitud de la hipotenusa. Calcula la longitud de la altura de la hipotenusa.



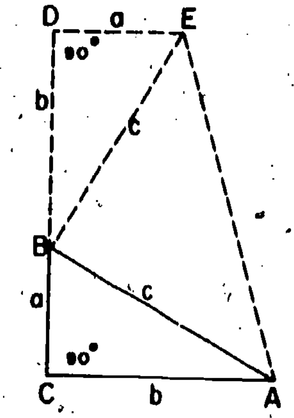
15. Si las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo ABC son a y b, determina la longitud de la altura de la hipotenusa.



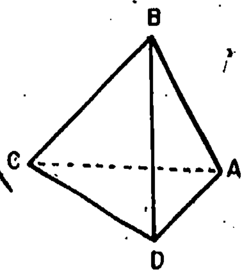
16. El $\triangle ABC$ es isósceles, con CA = CB. Las medianas $\overline{AP}$ y $\overline{BQ}$ son perpendiculares entre sí en el punto S. Si SP = n, determina la longitud de cada segmento y las áreas de las regiones poligonales ASQ, ASB, ABC y QSPC en términos de n. (No conviertas los radicales en decimales.)



17. Una demostración del teorema de Pitágoras, a base de la figura de la derecha, fue descubierta por el General James A. Garfield varios años antes de llegar a ser Presidente de los Estados Unidos. Se publicó alrededor del año 1875 en el "New England Journal of Education". Demuestra que $a^2 + b^2 = c^2$, expresando algebraicamente el hecho de que el área del trapecio es igual a la suma de las áreas de los tres triángulos. Deberás explicar en la demostración por qué el $\angle EBA$ es recto.

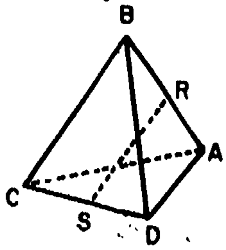


*18. ABCD es un cuerpo tridimensional "a manera de una pirámide". Observa que los puntos A, B, C y D no están en un plano. Se nos da que $BD = BC = AC = CD = DA = 2$.

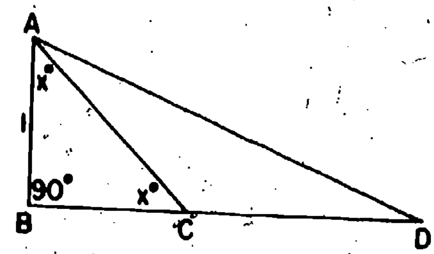


a. Si R y S son los puntos medios de $\overline{BA}$ y $\overline{CD}$, respectivamente, demuestra que $\overline{RS}$ es perpendicular a ambos $\overline{BA}$ y $\overline{CD}$.

b. Determina la longitud de $\overline{RS}$.

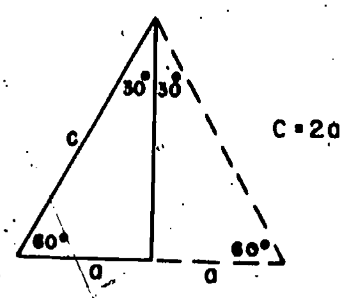


*19. En el $\triangle ABD$, el $\angle ABD$ es recto, $AB = BC = 1$, $AC = CD$. Calcula AD, $m\angle ADC$ y $m\angle DAB$.

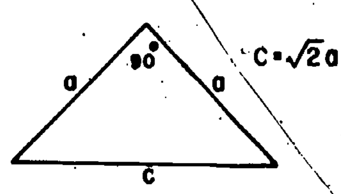


El teorema de Pitágoras también nos dice algo acerca de las formas de ciertos triángulos sencillos. Dos relaciones muy útiles constituyen los enunciados de los dos siguientes teoremas. Presentamos figuras que sugieren sus demostraciones.

Teorema 11-9. (El teorema del triángulo 30-60) La hipotenusa de un triángulo rectángulo es dos veces el largo de un cateto si, y solamente si, las medidas de los ángulos agudos son 30 y 60.



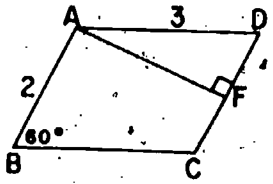
Teorema 11-10. (El teorema del triángulo rectángulo isósceles) Un triángulo rectángulo es isósceles si, y solamente si, la hipotenusa es $\sqrt{2}$ veces el largo de un cateto.



Conjunto de problemas 11-3b

1. Las longitudes de dos lados de un triángulo son 10 y 14 y la medida del ángulo comprendido entre estos lados es 30. ¿Cuál es la longitud de la altura del lado de 14? ¿Cuál es el área del triángulo?

2. Las medidas de los ángulos congruentes de un triángulo isósceles son 30 cada una y los lados congruentes tienen cada uno de ellos longitud de 6. ¿Cuál es la longitud de la base del triángulo?
3. La medida de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es dos veces la medida del otro ángulo agudo. Si la longitud del cateto mayor es $5\sqrt{3}$, ¿cuál es la longitud de la hipotenusa?
4. Demuestra que en cualquier triángulo rectángulo 30° - 60° y de hipotenusa s, la longitud del cateto opuesto al ángulo de 60° es $h = \frac{s}{2}\sqrt{3}$.
5. En el paralelogramo ABCD, AB = 2, AD = 3 y $m\angle B = 60$. Calcula la longitud de la altura que va de A a $\overleftrightarrow{DC}$.



6. Si una altura de un triángulo equilátero tiene 15 pulgadas de largo, ¿cuál es la longitud de un lado del triángulo?
7. En un triángulo rectángulo que tiene ángulos agudos de 30° y 60°, ¿cuál es la razón del cateto más corto a la hipotenusa? ¿Y de la hipotenusa al cateto más corto? ¿Del cateto más corto al cateto opuesto al ángulo de 60°? ¿Del cateto opuesto al ángulo de 60° al cateto más corto? ¿Del cateto opuesto al ángulo de 60° a la hipotenusa? ¿De la hipotenusa al cateto opuesto al ángulo de 60°? ¿Son esas razones las mismas para todo triángulo rectángulo 30° - 60°? Si has trabajado cuidadosamente este problema, encontrarás que los resultados te ayudarán grandemente en muchos de los problemas siguientes.
8. Calcula el área de cada uno de los triángulos isósceles cuyos lados congruentes tienen longitudes de 20 pulgadas cada uno y cuyos ángulos en la base tienen medidas de:

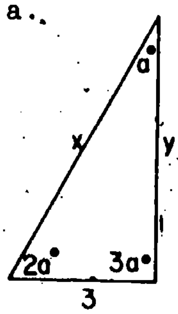
a. 30 b. 45 c. 60

9. Calcula el área de cada uno de los triángulos isósceles cuyas bases tienen longitud de 24 pulgadas y cuyos ángulos en la base tienen medidas de:

a. 45 b. 30 c. 60

10. Usa la información dada en las figuras para determinar los valores numéricos pedidos en cada ejercicio.

a.



a =

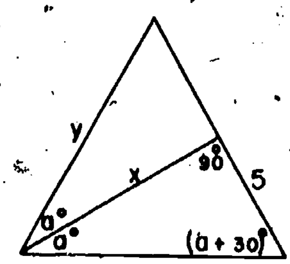
2a =

3a =

x =

y =

b.

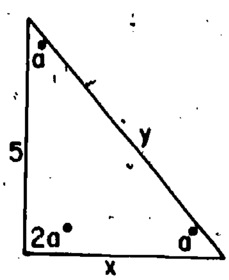


a =

x =

y =

c.



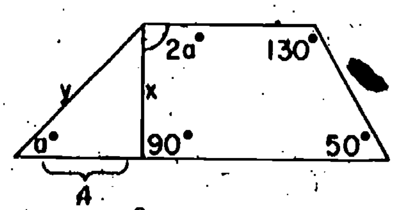
a =

2a =

x =

y =

d.

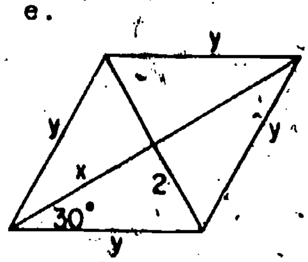


a =

x =

y =

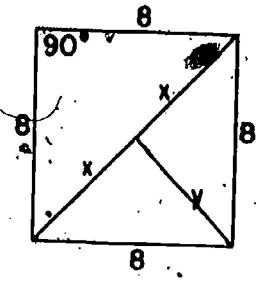
e.



x =

y =

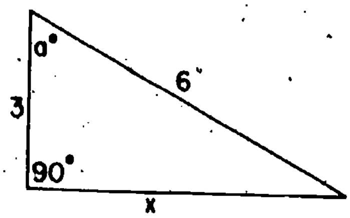
f.



x =

y =

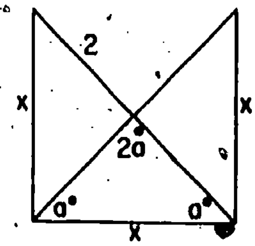
g.



a =

x =

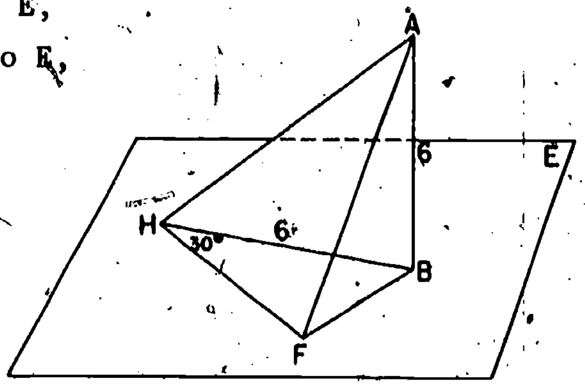
h.



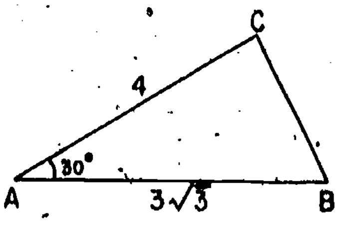
a =

x =

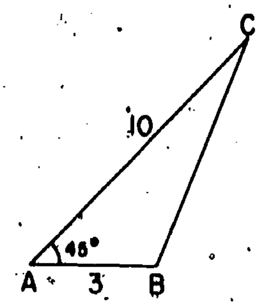
11. En la figura, $\overline{AB} \perp$ plano E, el $\triangle BFH$ está en el plano E, $\overline{HF} \perp \overline{FB}$, $AB = BH = 6$, y $m\angle FHB = 30$.
Da las medidas de todos los segmentos y ángulos de la figura que puedas determinar.



*12. En el $\triangle ABC$, $m\angle A = 30$, $AC = 4$, y $AB = 3\sqrt{3}$. Calcula BC. ¿Será $\angle C$ un ángulo recto?

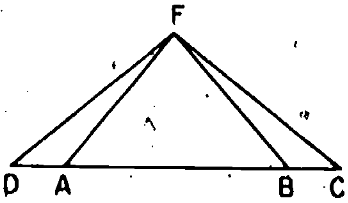


*13. En el $\triangle ABC$ ilustrado en la figura, determina BC. (Sugerencia: Dibuja la altura desde C.)

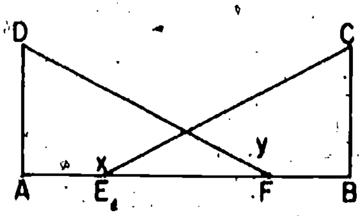


14. La base de un triángulo isósceles tiene 20 pulgadas y un lado 26 pulgadas. Calcula el área.

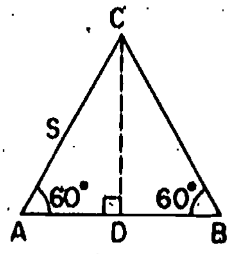
15. En la figura, $FD = FC$, $DB = CA$, $\overline{DF} \perp \overline{FB}$, y $\overline{CF} \perp \overline{FA}$. Demuestra que el $\triangle FAB$ es isósceles.



16. En la figura, $\overline{DA}$ y $\overline{CB}$ son ambos perpendiculares a $\overline{AB}$, $AE = FB$ y $DF = CE$. Demuestra que $\angle x \cong \angle y$.



17. Demuestra el teorema: El área de un triángulo equilátero de lado s se da por la fórmula Area $= \frac{s^2}{4}\sqrt{3}$.



18. Calcula el área de un triángulo equilátero cuyos lados son cada uno de longitud:

a. 2

b. 8

c. $\sqrt{3}$

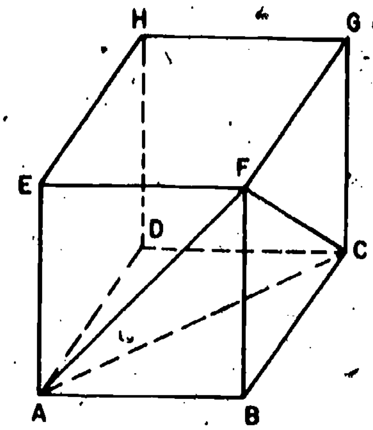
d. 7

19. El área de un triángulo equilátero es $9\sqrt{3}$. Determina su lado y su altura.

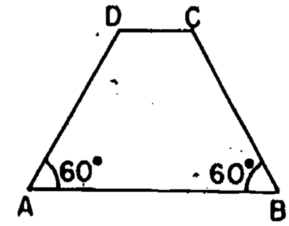
20. El área de un triángulo equilátero es $16\sqrt{3}$. Determina su lado y su altura.

21. Un cuadrado cuya área es de 81 tiene su perímetro con longitud igual a la longitud del perímetro de un triángulo equilátero. Determina el área del triángulo equilátero.

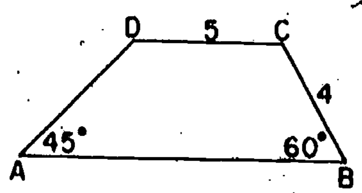
22. La figura representa un cubo. El plano determinado por los puntos A, C y F está señalado. Si $\overline{AB}$ mide 9 pulgadas, ¿cuál es la longitud de $\overline{AC}$? ¿Cuál es la medida del $\angle FAC$? ¿Cuál es el área del $\triangle FAC$?



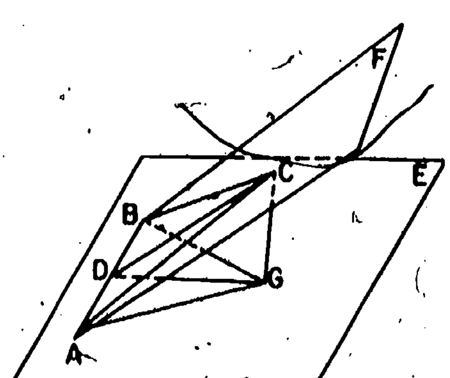
23. En el trapecio ABCD, ángulos en la base de 60° cada uno comprenden una base de longitud 12. El lado no paralelo $\overline{AD}$ tiene longitud de 8. Calcula el área del trapecio.



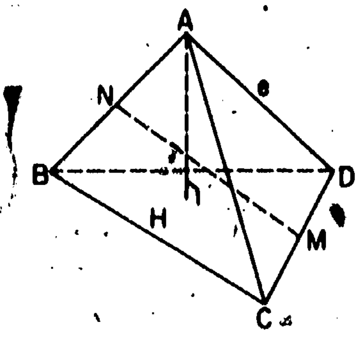
24. Determina el área del trapecio de la figura.



*25. En la figura, el plano E y el plano F se intersecan en $\overleftrightarrow{AB}$, formando el ángulo diedro $\angle F\text{-}AB\text{-}E$, $\overline{CG} \perp$ plano E, $\overline{DG} \perp \overline{AB}$ y $\overline{CD} \perp \overline{AB}$. D es el punto medio de $\overline{AB}$ y $\overline{BC} \cong \overline{AC}$. Si $AB = 4\sqrt{6}$, $AG = 6$, $m\angle CBG = 45$ y $m\angle CAG = 45$, determina CG y $m\angle F\text{-}AB\text{-}E$.



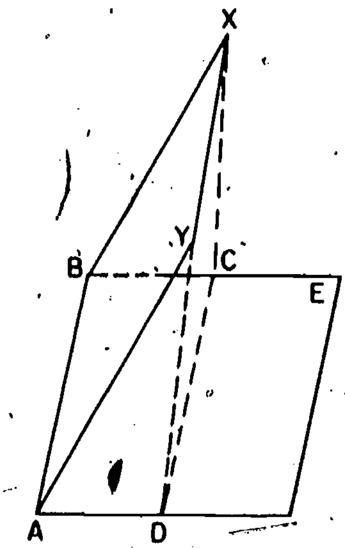
*26. La figura ABCD es un tetraedro regular (sus caras son equiláteras). Sea e cualquier arista y sean $\overline{NM} \perp \overline{AB}$ y $\overline{NM} \perp \overline{DC}$.



a. Demuestra que la longitud de una bi-mediana, es decir, del segmento, $\overline{NM}$, que une los puntos medios de aristas opuestas, es $\frac{\sqrt{2}}{2}e$. (Sugerencia: Dibuja $\overline{AM}$.)

b. Demuestra que la longitud de la altura, $\overline{AH}$, del tetraedro es $\frac{\sqrt{6}}{3}e$. (Sugerencia: Dibuja $\overline{HC}$ y $\overline{HD}$. ¿Está H en $\overline{BM}$? Recuerda que las medianas de un triángulo se encuentran en un punto a $\frac{2}{3}$ de la distancia desde cada vértice.)

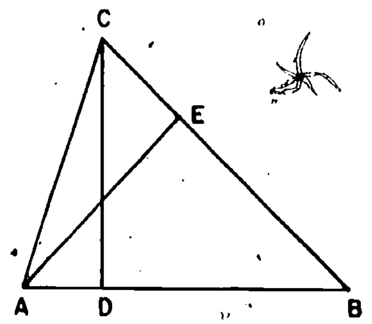
27. ABXY es un cuadrado, AB = 6, y $m\angle$ X-AB-E = 60. El rectángulo ABCD es la proyección del cuadrado ABXY en el plano E. ¿Cuál es el área del rectángulo ABCD?



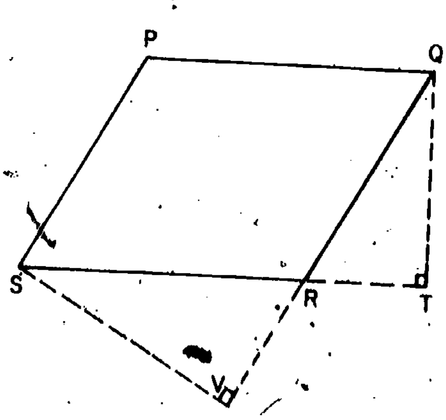
*28. Dados dos rectángulos cualesquiera en un plano, ¿cómo se podrá dibujar una sola recta que divida a cada región rectangular en dos regiones de igual área?

Problemas de repaso

1. Si el lado de un cuadrado es el duplo del lado de otro cuadrado, entonces el área del primer cuadrado es ______ veces el área del segundo cuadrado.
2. En el $\triangle ABC$, $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{BC}$, $AB = 8$, $CD = 9$ y $AE = 6$. Determina BC.



3. Un hombre camina 5 millas hacia el norte, luego 2 millas al este, después 1 milla al norte y finalmente 6 millas al este. ¿A qué distancia estará del punto de partida?
4. Si la diagonal de un cuadrado tiene 15 pies de largo, ¿cuál es la longitud de cada lado?
5. Calcula el área de un triángulo isósceles en el que la base es 12 y cada lado congruente es 10.
6. En la figura, $PQRS$ es un paralelogramo, $\overleftrightarrow{QT} \perp \overleftrightarrow{SR}$, y $\overleftrightarrow{SV} \perp \overleftrightarrow{QR}$.
   a. Si $SV = 7$ y $PS = 5$, calcula el área de $PQRS$.
   b. Si $SV = 8$, $QT = 4$ y $SR = 10$, determina QR.

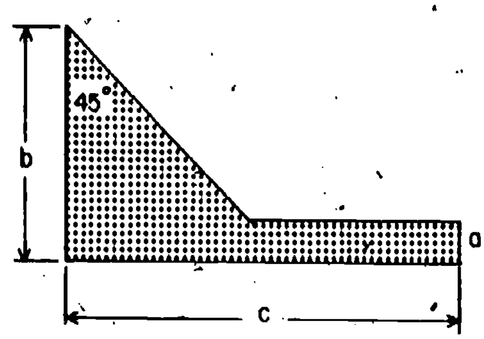


7. En un triángulo equilátero, la longitud de la altura es 6 pulgadas. ¿Cuál es la longitud de cada lado?

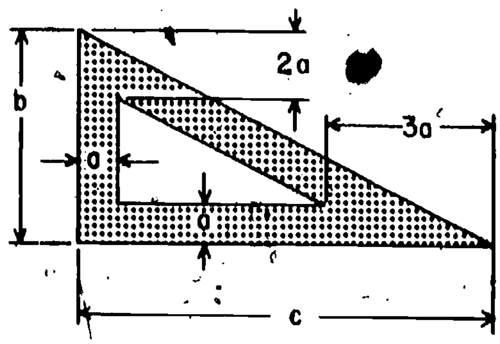
8. El lado de un rombo es 13 y una de sus diagonales 24. Calcula su área.

9. En el $\triangle ABC$, la base $AB = 12$, la mediana $CD = 8$, y $m\angle ADC = 30$. El área del $\triangle ABC$ es _____.

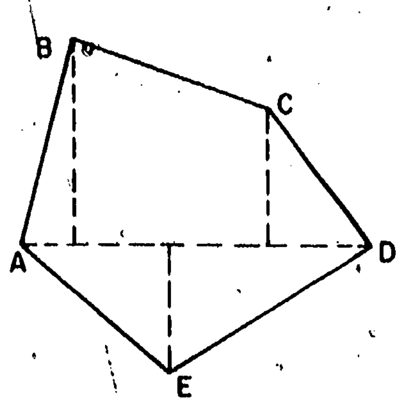
10. Deduce una fórmula para el área de la figura de la derecha en términos de las longitudes indicadas.



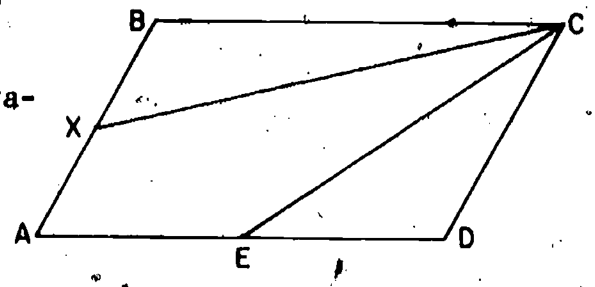
11. Calcula el área de la región sombreada en la figura de la derecha.



12. La diagonal $\overline{AD}$ del pentágono ABCDE de la derecha es 44 y las perpendiculares desde B, C y E son 24, 16 y 15, respectivamente. $AB = 25$ y $CD = 20$. ¿Cuál es el área del pentágono?



13. Dato: El paralelogramo ABCD en el que X y E son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$, respectivamente.
Demuestra que el área de la región AECX es igual a $\frac{1}{2}$ del área del paralelogramo ABCD.



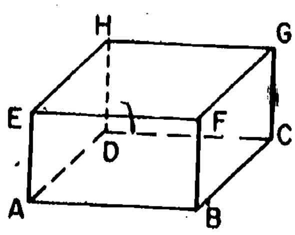
14. Demuestra que el área de un triángulo rectángulo isósceles es igual a $\frac{1}{4}$ del área del cuadrado que tiene la hipotenusa del triángulo como lado.

*15. Un triángulo equilátero tiene un lado en un plano dado. El plano del triángulo está inclinado a un ángulo de 60° con el plano dado. ¿Cuál es la razón del área del triángulo al área de su proyección en el plano?

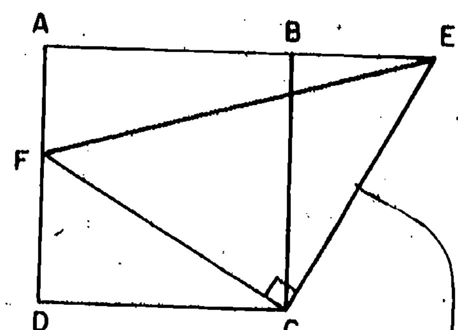
*16. Explica la manera de dividir un trapecio en dos partes que tengan áreas iguales por medio de una recta que pase por un vértice.

*17. Calcula la longitud de la diagonal de un cubo con arista de 6 unidades de largo.

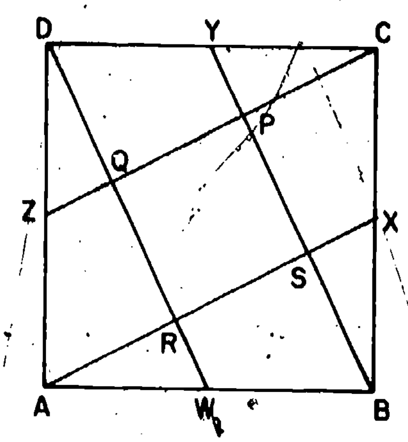
*18. En el cuerpo rectangular, AE = 5, AB = 10 y AD = 10.
a. Calcula AC.
b. Calcula AG.



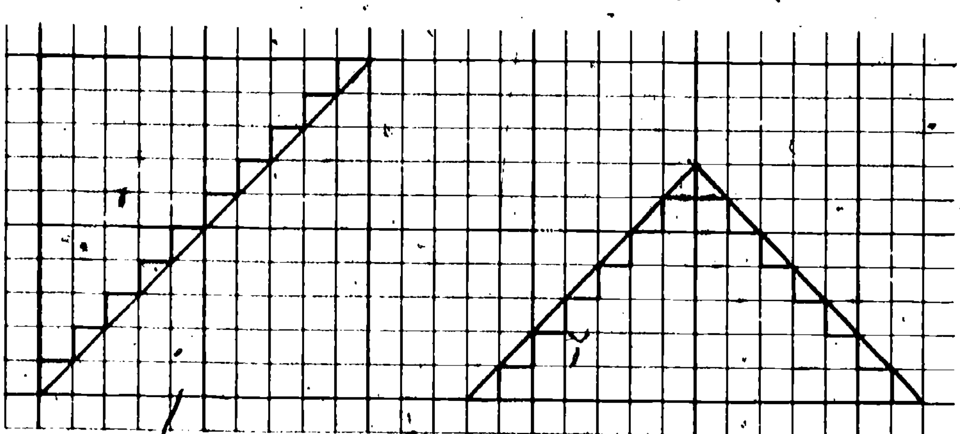
*19. Datos: El cuadrado ABCD y, como puede verse en la figura, los puntos E y F de manera que $\overline{EC} \perp \overline{FC}$; el área de ABCD = 256 pies cuadrados, y el área del $\triangle CEF$ = 200 pies cuadrados.
Determina BE.



*20. Si W, X, Y, Z son puntos medios de los lados del cuadrado ABCD, como en la figura, compara el área de este cuadrado con la del cuadrado RSPQ.



*21. La figura muestra dos triángulos rectángulos isósceles. El primero de ellos tiene un cateto horizontal de 10 unidades de longitud y el segundo una hipotenusa horizontal de 14 unidades de longitud.



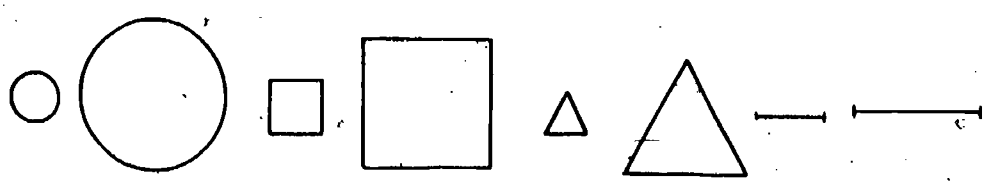
a. Dibuja dos triángulos así en papel cuadriculado. Recorta el segundo triángulo y colócalo sobre el primero para mostrar que sus áreas son aparentemente iguales.
b. En la primera figura cuenta el número de cuadritos y el número de medios cuadritos (triángulos rectángulos isósceles). A base de estos números, calcula el área.
c. Haz lo mismo con la segunda figura.
d. Explica la discrepancia.

Capítulo 12

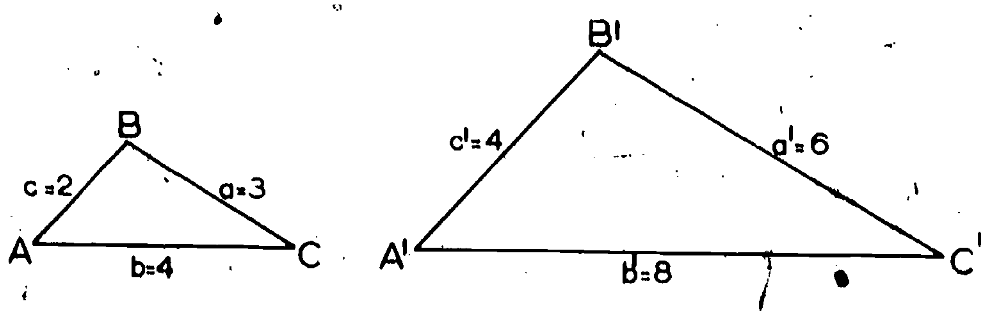
SEMEJANZA

12-1. La idea de semejanza

Proporcionalidad. En términos corrientes, dos figuras geométricas son semejantes si tienen exactamente la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño. Por ejemplo, dos circunferencias cualesquiera son semejantes; dos cuadrados cualesquiera son semejantes; dos triángulos equiláteros cualesquiera son semejantes; y dos segmentos cualesquiera son semejantes.



Aparecen a continuación dos triángulos, las medidas de cuyos lados son las indicadas:



Estas figuras tienen una relación muy peculiar entre sí. Una manera de describir esta relación, de un modo muy tosco, es diciendo que el triángulo de la izquierda se puede "estirar", o el de la derecha se puede "encoger", hasta coincidir con el otro según la correspondencia

$$ABC \longleftrightarrow A'B'C'.$$

Desde luego, esta correspondencia no es una congruencia, pues cada lado del triángulo de la derecha tiene doble largo que el lado correspondiente del otro triángulo. Llamamos <u>semejanzas</u> a las correspondencias de este tipo. Más tarde, en este capítulo, daremos la definición precisa de una semejanza.

Notarás que las longitudes de los lados de nuestros dos triángulos forman dos sucesiones de números positivos, a, b, c <u>y</u> a', b', c', que están en una relación muy particular: cada número de la segunda sucesión es exactamente el doble del número correspondiente de la primera sucesión, o, dicho de otro modo, cada número de la primera sucesión es exactamente la mitad del número correspondiente de la segunda sucesión. Así

$$\begin{aligned} a' &= 2a & & & a &= \tfrac{1}{2}a' \\ b' &= 2b & &\text{ó} & b &= \tfrac{1}{2}b' \\ c' &= 2c & & & c &= \tfrac{1}{2}c' \end{aligned}$$

Otra manera de indicar esto sería escribir

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = 2, \quad \text{ó} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{1}{2}.$$

Las sucesiones de números positivos que están relacionadas de esta manera se dicen ser proporcionales.

<u>Definición</u>: Dos sucesiones de números, a, b, c, ... <u>y</u> p, q, r, ..., ninguno de los cuales es cero, son <u>proporcionales</u>

si

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} = \ldots \quad ó \quad \frac{p}{a} = \frac{q}{b} = \frac{r}{c} = \ldots$$

Las proporcionalidades más sencillas son las que comprenden solamente cuatro números; ellas tienen propiedades particulares que vale la pena señalar. Indicamos algunas de ellas para referencia futura.

Propiedades algebraicas de una proporción simple

Si

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

donde a, b, c, d son todos diferentes de cero,

entonces (1) $ad = bc$

(2) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

(3) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

(4) $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

Demostración: De la ecuación original $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, obtenemos

(1) $ad = bc$, multiplicando ambos miembros por bd;

(2) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, multiplicando ambos miembros por $\frac{b}{c}$;

(3) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$, sumando 1 a ambos miembros;

(4) $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$, restando 1 de ambos miembros.

Podemos deducir otras relaciones, pero éstas son las de mayor utilidad.

Definición: Si a, b, c son números positivos y $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, entonces b es la media geométrica entre a y c.

De la propiedad (1) anterior, se deduce que la media geométrica de a y c es $\sqrt{ac}$.

Conjunto de problemas 12-1

1. Completa cada enunciado:

   a. Si $\frac{a}{b} = \frac{3}{7}$, entonces $7a =$ ________.

   b. Si $\frac{x}{3} = \frac{1}{4}$, entonces $4x =$ ________.

   c. Si $\frac{6}{5} = \frac{4}{y}$, entonces $6y =$ ________.

2. En cada una de las siguientes proporciones, halla x:

   a. $\frac{x}{2} = \frac{3}{4}$

   b. $\frac{5}{x} = \frac{4}{7}$

   c. $\frac{5}{4} = \frac{x}{13}$

   d. $\frac{2}{3} = \frac{11}{x}$

3. Completa cada enunciado:

   a. Si $3a = 2x$, entonces $\frac{a}{x} =$ ______, y $\frac{a}{2} =$ ______.

   b. Si $5 \cdot 3 = 4m$, entonces $\frac{4}{3} =$ ______, y $\frac{m}{3} =$ ______.

   c. Si $7b = 4a$, entonces $\frac{a}{b} =$ ______, y $\frac{b}{a} =$ ______.

   d. Si $5 \cdot 9 = 6x$, entonces $\frac{x}{5} =$ ______, y $\frac{5}{x} =$ ______.

4. En cada una de las siguientes proporciones, expresa el número a en términos de los números b, c y d:

   a. $\frac{2a}{3b} = \frac{4c}{5d}$

   b. $\frac{2b}{5a} = \frac{7c}{11d}$

   c. $\frac{3b}{4c} = \frac{5a}{7d}$

   d. $\frac{b}{2c} = \frac{6d}{5a}$

*5. Completa cada enunciado:

   a. Si $\frac{a}{b} = \frac{3}{1}$, entonces $\frac{a+b}{b} =$ ____, y $\frac{a-b}{b} =$ ____.

   b. Si $\frac{x}{3} = \frac{y}{2}$, entonces $\frac{y+2}{2} =$ ____, y $\frac{y-2}{2} =$ ____.

   c. Si $\frac{a+c}{c} = \frac{11}{7}$, entonces $\frac{a}{c} =$ ____, y $\frac{a-c}{c} =$ ____.

   d. Si $\frac{a}{b} = \frac{5}{3}$, entonces $\frac{b+a}{a} =$ ____, y $\frac{b-a}{a} =$ ____.

6. Aquí aparecen tres sucesiones de números. ¿Serán proporcionales dos pares cualesquiera de estas sucesiones?

a. 3, 7, 12

b. 9, 21, 36

c. $\frac{5}{2}$, $\frac{35}{6}$, 10

Se puede afirmar prontamente que las sucesiones a y b son proporcionales, ya que cada número de b es 3 veces el número correspondiente de a. Comparar las sucesiones a y c no es tan fácil. Una manera eficaz de hacer tal comparación sería cambiar cada una en una nueva sucesión proporcional que empiece con 1, es decir,

a. 1, $\frac{7}{3}$, 4

b. 1, $\frac{7}{3}$, ___

c. 1, ___, ___

7. En la siguiente lista de sucesiones de números, ¿qué pares de sucesiones son proporcionales? Prepara una lista completa de esos pares.

a. 5, 7, 9

b. 1, 2, 3

c. 9, 7, 17

d. $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$

e. 18, 14, 34

f. $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1

g. 27, 21, 51

h. 15, 30, 45

i. 10, 14, 18

8. Si $\frac{w}{40} = \frac{v}{50} = \frac{20}{1}$, ¿cuáles son los valores de w y v?

9. Si $\frac{3}{x} = \frac{4}{y} = \frac{11}{z} = \frac{4}{1}$, ¿cuáles son los valores de x, y, z?

10. ¿Cuáles de los siguientes son correctos para todos los valores de las letras, suponiendo que ningún número que

aparece en una sucesión sea cero?

a. $\frac{3}{13} = \frac{4}{14}$

b. $\frac{j}{10j} = \frac{k}{10k}$

c. $\frac{r}{r^2} = \frac{s}{rs} = \frac{t}{st}$

d. $\frac{a+b}{a^2+b^2} = \frac{1}{a+b}$

e. $\frac{x}{x^2} = \frac{y}{y^2} = \frac{z}{z^2} = \frac{w}{w^2}$

f. $\frac{1}{c+d} = \frac{c-d}{c^2-d^2}$

11. Si $\frac{16}{40} = \frac{p}{45} = \frac{q}{60} = \frac{28}{t}$, ¿cuáles son los valores de p, q y t?

12. La media geométrica de dos números positivos a y c es $b = \sqrt{ac}$. La media aritmética de a y c es $d = \frac{a+c}{2}$. Halla la media geométrica y la media aritmética de los pares siguientes:

a. 4 y 9

b. 6 y 12

c. 8 y 10

d. 2 y 24

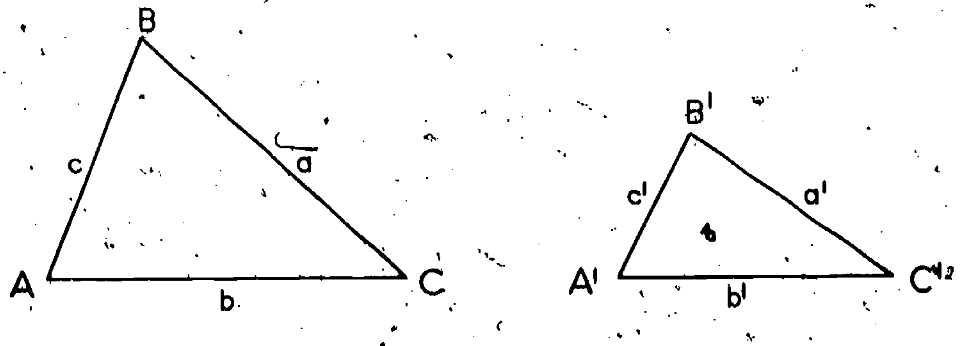
e. 2 y 3

12-2. Semejanzas entre triángulos

Podemos ahora redactar la definición de una semejanza entre dos triángulos. Supongamos que se nos da una correspondencia

$$ABC \longleftrightarrow A'B'C'$$

entre dos triángulos.



Como se indica en la figura, a es la longitud del lado opuesto a A, b la del lado opuesto a B, y así sucesivamente. Si los ángulos correspondientes son congruentes, y

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'},$$

entonces la correspondencia $ABC \leftrightarrow A'B'C'$ es una semejanza, y escribimos

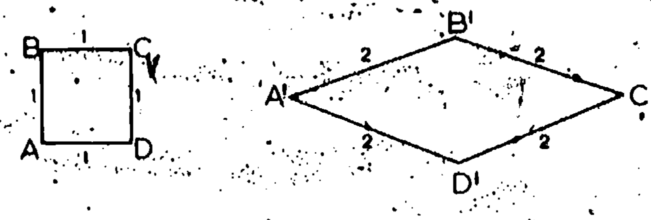
$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

<u>Definición</u>: Sea S una correspondencia entre los vértices de dos triángulos. Si los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales, entonces la correspondencia S es una <u>semejanza</u>, y decimos que los triángulos son <u>semejantes</u>.

Notarás que la definición exige dos cosas: (1) los ángulos correspondientes deben ser congruentes, y (2) los lados correspondientes deben ser proporcionales. Al poner ambas condiciones en la definición, nos aseguramos de que la definición se puede aplicar a figuras poligonales de más de tres lados. Para ver qué dificultades podrían surgir al usar solamente una de las condiciones, veamos cuál es la situación para los cuadriláteros.

Considera primero la correspondencia $ABCD \leftrightarrow A'B'C'D'$, entre los dos rectángulos de la figura. Los ángulos correspondientes son congruentes, porque todos ellos son rectos, pero los dos rectángulos no tienen, de manera alguna, la misma forma.

Considera ahora un cuadrado y un rombo, con lados de longitud 1 y 2, como éstos:

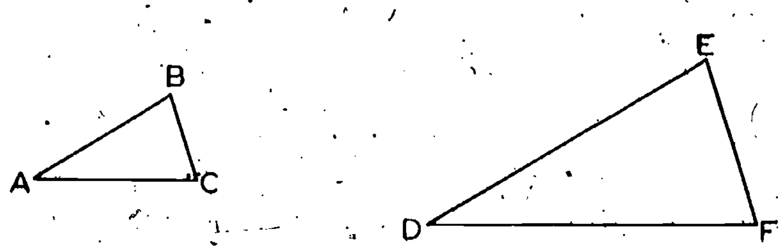


En la correspondencia $ABCD \leftrightarrow A'B'C'D'$, los lados correspondientes son proporcionales, pero las formas son bien diferentes.

Veremos más tarde que en el caso de <u>correspondencias entre triángulos</u>, si se satisface una de las dos condiciones, también es satisfecha la otra. Es decir, si los ángulos correspondientes son congruentes, entonces los lados correspondientes son proporcionales; y recíprocamente, si los lados correspondientes son proporcionales, entonces los ángulos correspondientes son congruentes. Estas relaciones se presentan en el teorema de semejanza A.A.A. y el teorema de semejanza L.L.L., que se demostrarán más adelante en este capítulo.

<u>Conjunto de problemas 12-2</u>

1. Dada una semejanza $\triangle ABC \sim \triangle DEF$,



escribe la proporcionalidad entre los lados correspondientes usando la notación AB, AC, etc. Entonces:

a. Expresa AB en términos de AC, DE y DF.

b. Expresa BC en términos de AB, DE y EF.

c. Expresa AC en términos de BC, EF y DF.

d. Expresa AB en términos de BC, DE y EF.

e. Expresa BC en términos de AC, EF y DF.

f. Expresa AC en términos de AB, DE y DF.

2. Más abajo enumeramos cinco conjuntos de 3 números. Señala qué pares de conjuntos de números (no necesariamente en el orden dado) pueden ser longitudes de lados de triángulos semejantes. Escribe en cada caso las razones iguales. Por ejemplo, a, b; $\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{6}{12}$.

a. 3, 4, 6
b. 8, 6, 12
c. 3, 4, 9
d. 9, 12, 18
e. 2, $4\frac{1}{2}$, 4

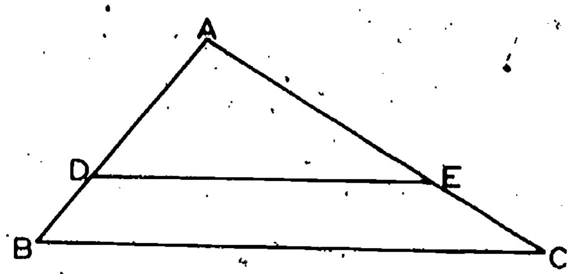
3. Se sacan dos copias de un negativo, una natural y la otra ampliada. En la primera un objeto tiene longitud igual a 2 pulgadas y altura de 1.6 pulgadas. En la ampliada el mismo objeto tiene una longitud de 7.5 pulgadas. Determina qué altura tiene en la ampliación.

4. Si $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, ¿sabemos entonces que $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$? Explica por qué sí o por qué no.

5. Demuestra que el triángulo cuyos vértices son los puntos medios de los lados de un triángulo dado es semejante al triángulo dado.

12-3. <u>Teoremas fundamentales de la semejanza</u>

Considera un triángulo $\triangle ABC$. Sean D y E dos puntos diferentes en los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, y supongamos que $\overleftrightarrow{DE}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ son paralelas.

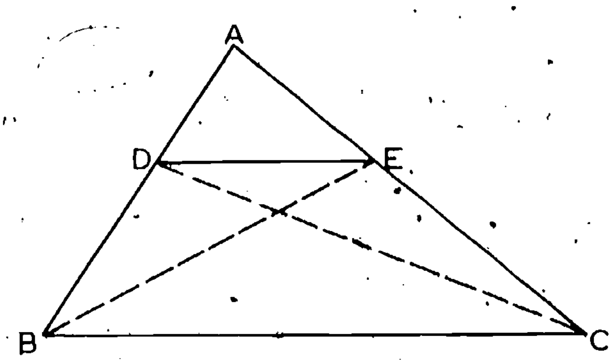


Parece que la correspondencia $ABC \longleftrightarrow ADE$ debiera ser una semejanza, y lo es en efecto, como veremos pronto. Prepararemos el camino mediante una serie de teoremas.

<u>Teorema 12-1</u>. (El teorema fundamental de la proporcionalidad) Si una recta paralela a un lado de un triángulo, corta a los otros dos lados en puntos distintos, entonces determina sobre ellos segmentos que son proporcionales a estos lados.

<u>O de otro modo</u>: En el $\triangle ABC$, sean D y E puntos de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ tales que $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. Entonces

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$



Demostración: (1) En el $\triangle ADE$ y en el $\triangle BDE$ tomemos $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$ como bases, y la altura desde E a $\overleftrightarrow{AB}$ como altura común. Entonces, por el teorema 11-5,

$$\frac{\text{área } \triangle BDE}{\text{área } \triangle ADE} = \frac{BD}{AD}.$$

(2) En el $\triangle AED$ y en el $\triangle CED$ tomemos $\overline{AE}$ y $\overline{CE}$ como bases, y la altura desde D a $\overleftrightarrow{AC}$ como altura común. Entonces, por el teorema 11-5,

$$\frac{\text{área}\, \triangle CDE}{\text{área}\, \triangle ADE} = \frac{CE}{AE}.$$

(3) $\triangle BDE$ y $\triangle CDE$ tienen la misma base, $\overline{DE}$, y alturas congruentes, ya que las rectas $\overleftrightarrow{DE}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ son paralelas. Por tanto, por el teorema 11-6,

$$\text{área}\, \triangle BDE = \text{área}\, \triangle CDE.$$

(4) De las observaciones (1), (2) y (3) deducimos que

$$\frac{BD}{AD} = \frac{CE}{AE}.$$

Aplicando la propiedad algebraica (3) de la sección 12-1, obtenemos

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

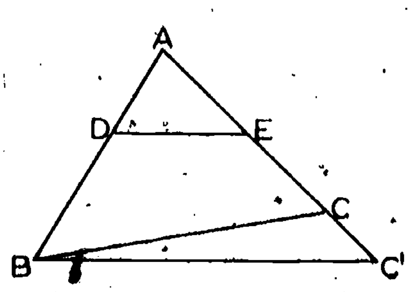
El recíproco del teorema 12-1 es también cierto (y de más fácil demostración). Es decir, tenemos:

Teorema 12-2. Si una recta corta a dos lados de un triángulo, y determina segmentos proporcionales a esos dos lados, entonces es paralela al tercer lado.

O de otro modo: Sea $\triangle ABC$ un triángulo cualquiera. Sea D un punto entre A y B, y sea E un punto entre A y C. Si

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE},$$

entonces $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{DE}$ son paralelas.



Demostración: Sea $\overleftrightarrow{BC'}$ la recta pasando por B, paralela a $\overleftrightarrow{DE}$, e intersecando a $\overleftrightarrow{AE}$ en C'. Por el teorema 12-1,

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC'}{AE},$$

de manera que

$$AC' = AE \cdot \frac{AB}{AD}.$$

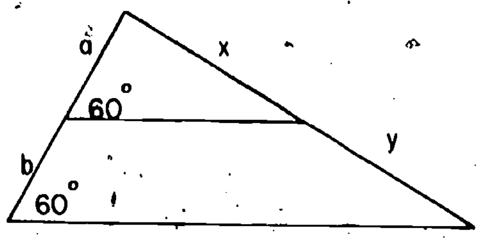
Pero la ecuación dada en la hipótesis del teorema significa que

$$AC = AE \cdot \frac{AB}{AD}.$$

Por lo tanto, AC' = AC. Y entonces C' = C, y $\overleftrightarrow{BC}$ es paralela a $\overleftrightarrow{DE}$, lo que se quería demostrar.

<u>Conjunto de problemas 12-3a</u>

1. En la figura, las longitudes de los segmentos son a, b, x, y, según aparecen señalados.

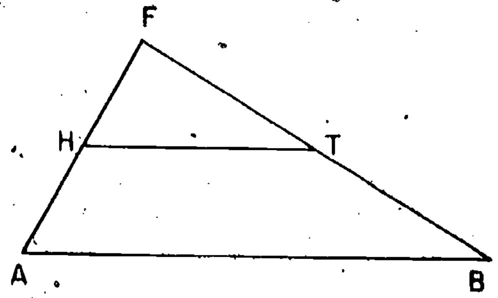


$\frac{a+b}{a} = \frac{\_\_\_}{x}$ $\qquad \frac{a}{b} = \_\_\_$

$\frac{a+b}{b} = \frac{x+\_\_\_}{\_\_\_}$ $\qquad \frac{a}{x} = \_\_\_$

$\frac{a+b}{x+y} = \frac{\_\_\_}{x}$ $\qquad \frac{x+y}{a+b} = \frac{y}{\_\_\_}$

2. En la figura, si $\overline{HT} \parallel \overline{AB}$,



$\frac{FA}{FH} = \_\_\_$ $\qquad \frac{TB}{FT} = \_\_\_$

$\frac{FA}{HA} = \_\_\_$ $\qquad \frac{FT}{FH} = \_\_\_$

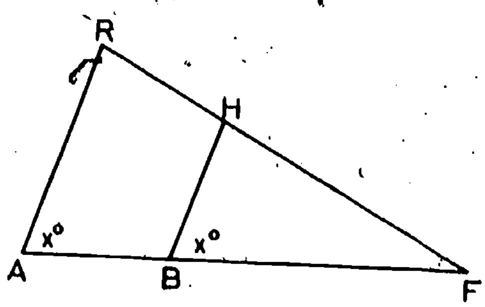
$\frac{FH}{HA} = \_\_\_$ $\qquad \frac{BT}{AH} = \_\_\_$

3. En la figura,

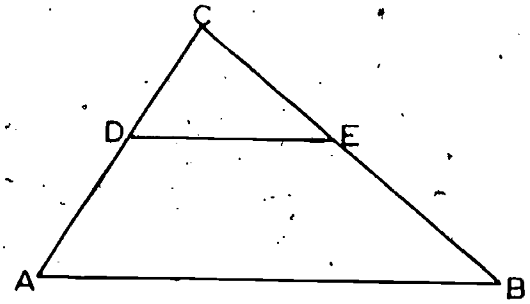
   a. si RH = 4, HF = 7, BF = 10, entonces AB = ____.

   b. si RH = 6, HF = 10, AB = 3, entonces BF = ____.

   c. si RH = 5, RF = 20, AF = 18, entonces BF = ____.



4. En la figura, $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$.



   a. Si AC = 12, CD = 4, CE = 8, halla BC.

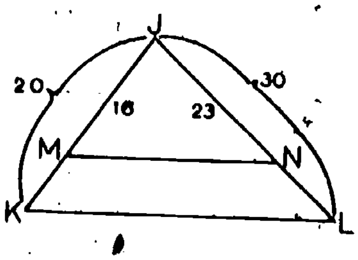
   b. Si AD = 6, BE = 10, CD = 4, halla CE.

   c. Si BC = 22, EB = 6, CD = 8, halla AC.

   d. Si AD = 5, CD = 7, BC = 18, halla BE.

   e. Si AC = 15, CE = 6, BC = 18, halla AD.

5. En la figura, los segmentos tienen las medidas indicadas. ¿Será posible que $\overline{MN} \parallel \overline{KL}$? Justifica tu respuesta.

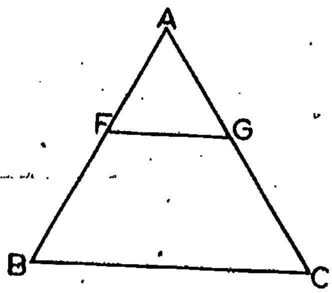


6. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de valores harán que $\overline{FG} \parallel \overline{BC}$?

   a. AB = 14, AF = 6, AC = 7, AG = 3.

   b. AB = 12, FB = 3, AC = 8, AG = 6.

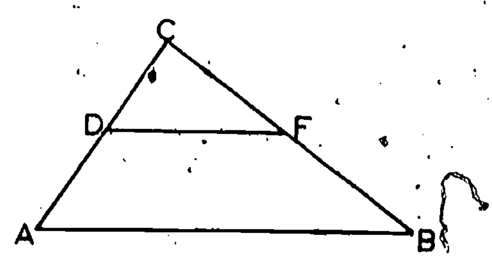
   c. AF = 6, FB = 5, AG = 9, GC = 8.



d. AC = 21, GC = 9, AB = 14,
AF = 5.

e. AB = 24, AC = 6, AF = 8,
GC = 4.

7. Si, en la figura, $\overline{DF} \parallel \overline{AB}$, demuestra que :



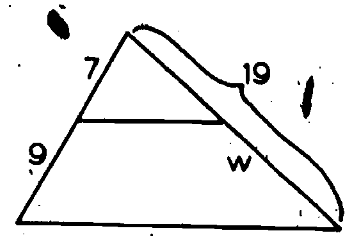
a. $\frac{DA}{CD} = \frac{FB}{CF}$

(Sugerencia: Usa el teorema 12-1 y resta 1 de cada fracción.)

b. $\frac{CA}{DA} = \frac{CB}{FB}$

c. $\frac{CA}{CB} = \frac{CD}{CF}$

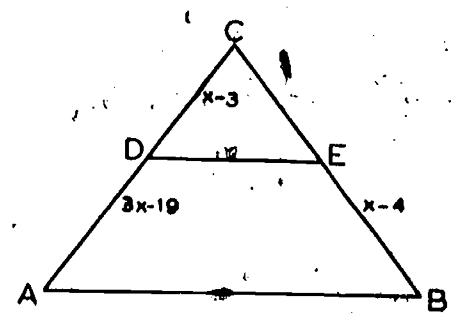
8. Dada la figura, alguien trató el problema de cómo hallar w, así:



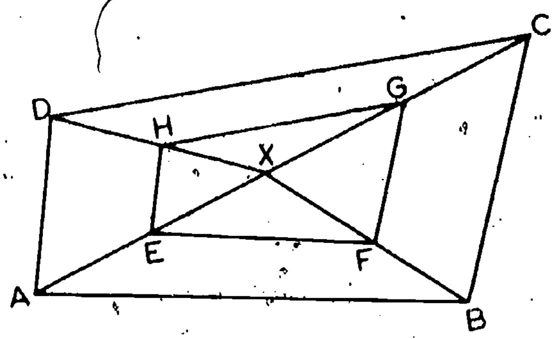
$$\frac{7}{9} = \frac{19 - w}{w}$$

Sugiere una ecuación más conveniente. ¿Obtienes el mismo resultado?

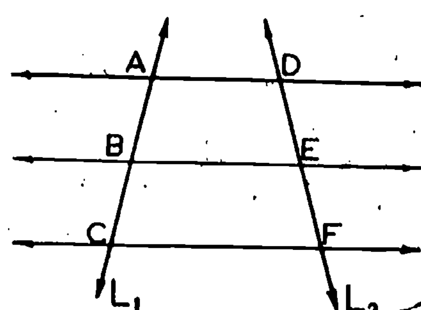
9. Dado que CD = x - 3, DA = 3x - 19, CE = 4, y EB = x - 4, ¿para qué valores de x será $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$?



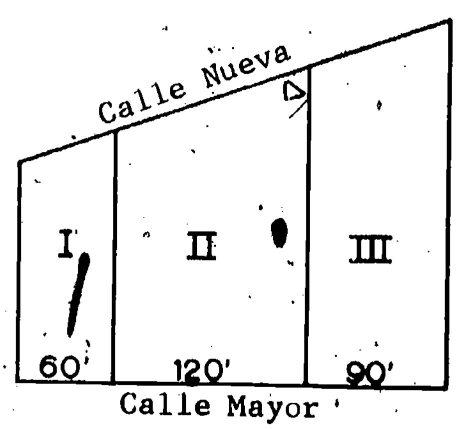
10. En la figura, si $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$, $\overline{FG} \parallel \overline{BC}$, y $\overline{GH} \parallel \overline{DC}$, demuestra que $\overline{HE} \parallel \overline{DA}$. ¿Deberá ser plana la figura?



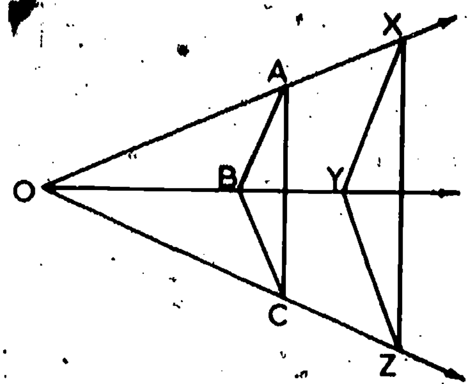
11. Demuestra que si tres o más paralelas son cortadas por dos secantes, los segmentos de las secantes entre las paralelas son proporcionales. De otro modo: Si las rectas L_1 y L_2 son secantes a las paralelas $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{BE}$ y $\overleftrightarrow{CF}$, entonces $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.



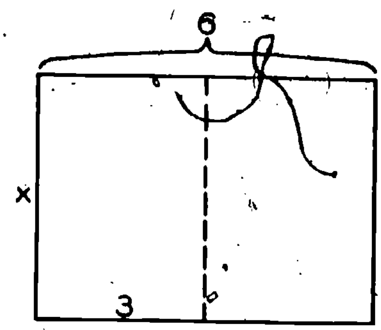
12. Tres solares se extienden de la calle Nueva a la calle Mayor, como en el dibujo. Las rectas de los lados forman ángulos rectos con la calle Mayor y el frente total de los solares en la calle Nueva mide 360 pies. Halla el frente de cada solar en la calle Nueva.



13. Datos: Los $\triangle$ ABC, XYZ, tales que $\overleftrightarrow{XA}$, $\overleftrightarrow{YB}$, $\overleftrightarrow{ZC}$ se encuentran en O y $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{XY}$, $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{YZ}$. Demuestra que $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{XZ}$.



14. Un impresor quiere hacer una tarjeta, como la de la figura, de 6 pulgadas de largo y de tal ancho que al doblarla por la línea de trazos tenga la misma forma que sin doblarla. ¿Qué ancho debe tener la tarjeta?



Teorema 12-3. (El teorema de semejanza A.A.A.) Sea S una correspondencia entre dos triángulos. Si los ángulos correspondientes son congruentes, entonces la correspondencia S es una semejanza.

O de otro modo: Sea

$$ABC \longleftrightarrow DEF$$

una correspondencia entre dos triángulos. Si $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ y $\angle C \cong \angle F$, entonces

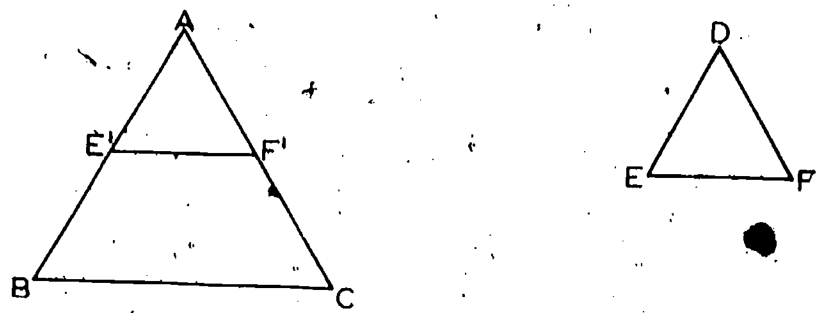
$$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

Notarás que para demostrar que la correspondencia es una semejanza, solamente tendremos que probar que los lados correspondientes son proporcionales. (No necesitamos ocuparnos de los ángulos, pues los ángulos correspondientes son congruentes por hipótesis.) La proporcionalidad de los lados significa que

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}.$$

Bastará con demostrar que es cierta la primera igualdad. (El mismo argumento podría repetirse exactamente para demostrar la validez de la segunda ecuación.)

Así, pues, debemos demostrar que $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$.



Demostración: Sean E' y F' puntos de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, tales que AE' = DE y AF' = DF. Por el postulado L.A.L., tenemos que

$$\triangle AE'F' \cong \triangle DEF.$$

Por lo tanto, $\angle A'E'F' \cong \angle B$. Así, $\overleftrightarrow{E'F'}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ son paralelas, o coinciden. Si coinciden, entonces $\triangle AE'F' = \triangle ABC$, y, por tanto, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$; en este caso,

$$AB = DE \text{ y } AC = DF,$$

o sea

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = 1,$$

como queríamos demostrar. Si $\overleftrightarrow{E'F'}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ son paralelas, entonces por el teorema 12-1, tenemos que

$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}.$$

Pero AE' = DE y AF' = DF. Por lo tanto,

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF},$$

como queríamos demostrar.

El teorema que acabamos de probar nos permite demostrar un corolario que, según resulta, vamos a citar más frecuentemente que el teorema para mostrar que dos triángulos son semejantes. Recordemos del corolario 9-13-1 que si dos pares de ángulos correspondientes de dos triángulos son congruentes, el tercer par tiene la misma propiedad. Así, del teorema 12-3 deducimos inmediatamente el corolario siguiente:

Corolario 12-3-1. (El corolario A.A.) Sea S una correspondencia entre dos triángulos. Si dos pares de ángulos correspondientes son congruentes, entonces la correspondencia S es una semejanza.

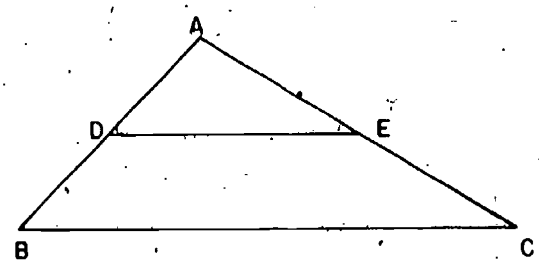
Por ejemplo, si $\angle A \cong \angle D$ y $\angle B \cong \angle E$, entonces

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

Si $\angle A \cong \angle D$ y $\angle C \cong \angle F$, deducimos la misma conclusión. Y de manera análoga para el tercer caso.

Podemos ahora justificar la afirmación que hicimos al principio de esta sección, demostrando el siguiente corolario:

Corolario 12-3-2. Si una recta paralela a un lado de un triángulo interseca a los otros dos lados en puntos distintos, entonces determina un triángulo semejante al triángulo dado.



Si $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC}$, entonces $\angle ADE \cong \angle B$ y $\angle AED \cong \angle C$, siendo ángulos correspondientes. También $\angle A \cong \angle A$. Por lo tanto, $\triangle ADE \cong \triangle ABC$, por el teorema 12-3 o el corolario 12-3-1.

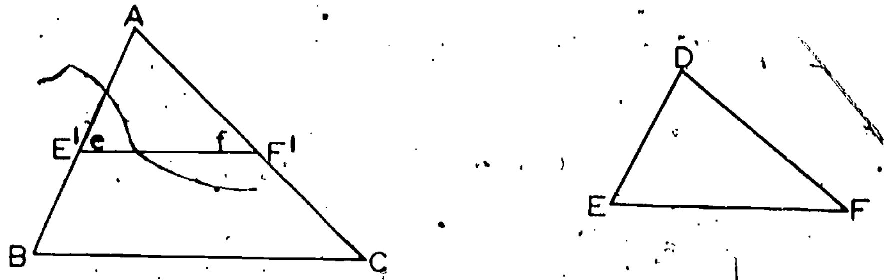
Teorema 12-4. (El teorema de semejanza L.A.L.) Sea S una correspondencia entre dos triángulos. Si dos pares de lados correspondientes son proporcionales y los dos ángulos comprendidos son congruentes, entonces la correspondencia S es una semejanza.

De otro modo: Sea $ABC \leftrightarrow DEF$ una correspondencia entre dos triángulos.

Si $\angle A \cong \angle D$

y $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$,

entonces $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.



Demostración: Sean E' y F' puntos de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, tales que $AE' = DE$ y $AF' = DF$. Entonces

$$\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}.$$

Por el teorema 12-2, esto significa que $\overleftrightarrow{E'F'}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ son paralelas. Cuando dos rectas paralelas son cortadas por una secante, los ángulos correspondientes son congruentes. Por lo tanto,

$$\angle B \cong \angle e$$

y

$$\angle C \cong \angle f.$$

Pero sabemos, por el postulado L.A.L., que

$$\triangle AE'F' \cong \triangle DEF.$$

Por lo tanto, $\angle e \cong \angle E$

y $\angle f \cong \angle F$.

Entonces, $\angle B \cong \angle E$

y $\angle C \cong \angle F$.

Por la hipótesis ya sabíamos que

$$\angle A \cong \angle D.$$

Luego, por el teorema de semejanza A.A.A., tenemos que

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF,$$

como se quería demostrar.

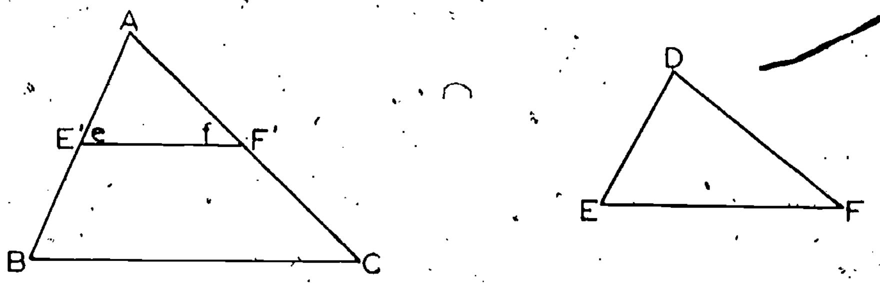
Nos queda un teorema fundamental más de semejanza de triángulos.

Teorema 12-5. (El teorema de semejanza L.L.L.) Sea S una correspondencia entre dos triángulos. Si los lados correspondientes son proporcionales, entonces la correspondencia S es una semejanza.

O de otro modo: Sea $ABC \leftrightarrow DEF$ una correspondencia entre dos triángulos.

Si $$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF},$$

entonces $$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$$



Demostración: Como anteriormente, sean E' y F' puntos de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, tales que $AE' = DE$ y $AF' = DF$.

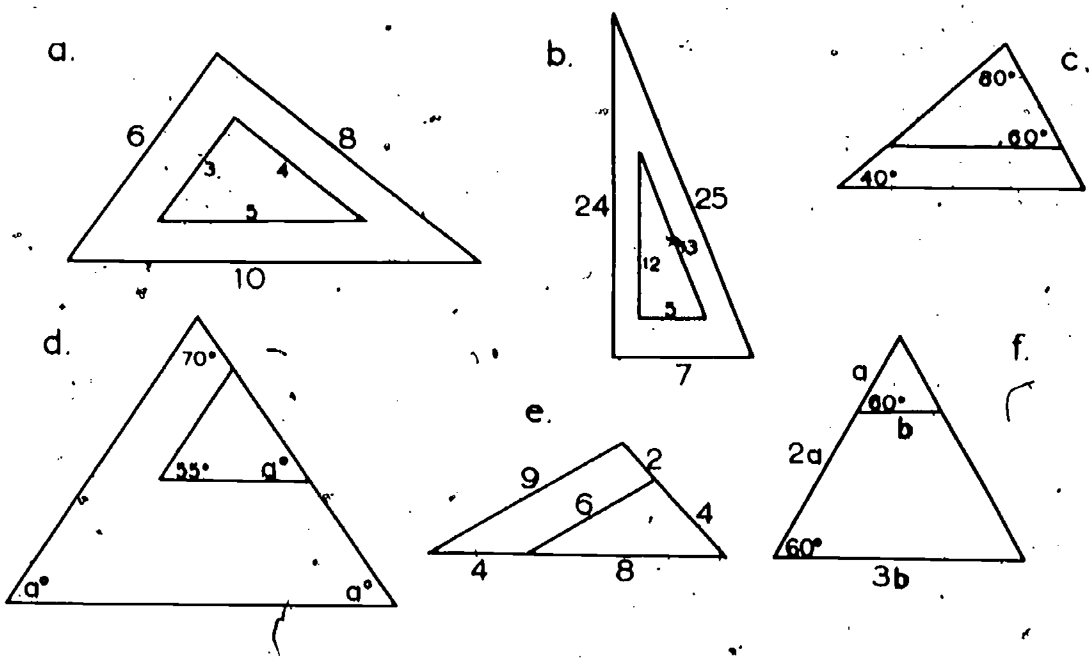
Afirmaciones	Razones
1. $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$	1. Hipótesis
2. $\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}$	2. Sustitución
3. $\overline{E'F'}$ y $\overline{BC}$ son paralelos.	3. Por la afirmación 2 y el teorema 12-2
4. $\angle e \cong \angle B$ y $\angle f \cong \angle C$	4. Teorema 9-9
5. $\triangle ABC \sim \triangle AE'F'$	5. El corolario A.A.
6. $\frac{E'F'}{BC} = \frac{AE'}{AB}$	6. Definición de triángulos semejantes
7. $E'F' = BC\frac{AE'}{AB} = BC\frac{DE}{AB}$	7. Por las afirmaciones 6 y 1

8.	$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ o $EF = BC\frac{DE}{AB}$	8.	Hipótesis
9.	$E'F' = EF$	9.	Por las afirmaciones 7 y 8
10.	$\triangle AE'F' \cong \triangle DEF$	10.	El teorema L.L.L.
11.	$\angle e \cong \angle E$ y $\angle f \cong \angle F$	11.	Partes correspondientes
12.	$\angle B \cong \angle E$ y $\angle C \cong \angle F$	12.	Por las afirmaciones 4 y 11
13.	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	13.	El corolario A.A.

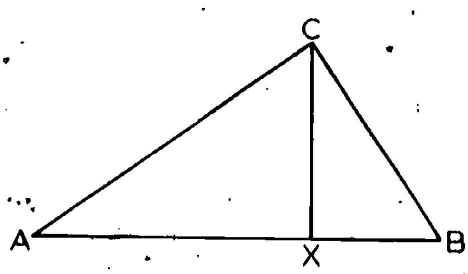
Conjunto de problemas 12-3b

1. Sea $ABC \leftrightarrow DEF$ una correspondencia entre dos triángulos. ¿Cuáles de las siguientes condiciones serán suficientes para demostrar que la correspondencia es una semejanza?
   a. $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$.
   b. $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$.
   c. Los lados correspondientes son proporcionales.
   d. Ambos triángulos son equiláteros.
   e. Ambos triángulos son isósceles, y $m\angle A = m\angle D$.
   f. $m\angle C = m\angle F = 90$, y $AB = DE$.
2. Señala cuáles de estos teoremas de semejanza no tienen su análogo entre los teoremas de congruencia: L.A.L., L.L.L., A.A.A., A.A.
3. ¿Cabe alguna posibilidad de que en los siguientes ejercicios el $\triangle I$ sea semejante al $\triangle II$?
   a. Dos ángulos del $\triangle I$ tienen medidas de 60 y 70, mientras que dos ángulos del $\triangle II$ tienen medidas de 50 y 80.
   b. Dos ángulos del $\triangle I$ tienen medidas de 40 y 60, mientras que dos ángulos del $\triangle II$ tienen medidas de 60 y 80.
   c. El $\triangle I$ es rectángulo, mientras que el $\triangle II$ es isósceles y uno de sus ángulos tiene medida de 40.
   d. El $\triangle I$ tiene lados de longitudes 5, 6, 7, mientras que el $\triangle II$ tiene un perímetro de 36,000.

4. Aquí hay seis pares de triángulos. En cada caso indica si los dos triángulos son semejantes. Si lo son, enuncia el teorema en que basarías la demostración correspondiente.



5. En la figura de la derecha, $\overline{AC} \perp \overline{BC}$ y $\overline{CX} \perp \overline{AB}$.

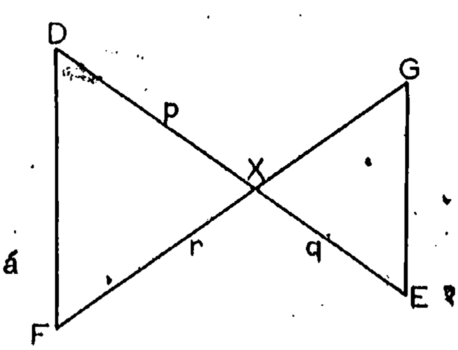


a. Nombra un ángulo que sea congruente al $\angle ACB$.

b. Nombra un ángulo con la misma medida que el $\angle B$.

c. Nombra un triángulo semejante al ΔACB.

6. Si las longitudes de $\overline{DX}$, $\overline{XE}$ y $\overline{FX}$ son p, q y r, respectivamente, ¿qué longitud de $\overline{XG}$ nos aseguraría la semejanza de los triángulos? Si $p = 3q$, ¿deberá ser $m\angle D = 3m\angle E$?



7. A continuación hay una serie de afirmaciones en las que se dan las longitudes de los lados de varios triángulos. Para cada par, decide si los triángulos son semejantes, y después presenta un enunciado como uno de éstos:

El $\triangle$ ______ es semejante al $\triangle$ ______, o

el $\triangle$ ______ no es semejante al $\triangle$ ______.

Para cada par de triángulos semejantes, redacta un enunciado que indique la proporcionalidad de los lados.

a. $AB = 5$, $AF = 3$, $FB = 7$. $QR = 15$, $QS = 9$, $RS = 21$

b. $MT = 2$, $MW = 5$, $TW = 6$. $RS = 7\frac{1}{2}$, $LS = 9$, $RL = 3$.

c. $AB = 5$, $BC = 2$, $AC = 4$. $XY = 2\frac{1}{2}$, $XZ = 2$, $YZ = 3$.

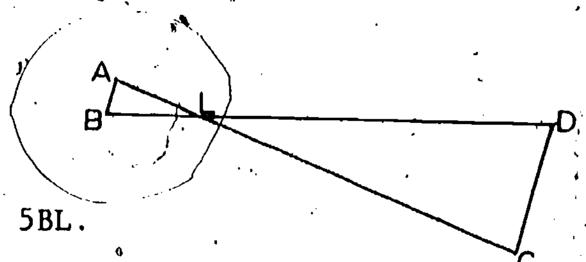
d. $AB = 6$, $AC = 7$, $BC = 8$. $RS = 40$, $RT = 35$, $ST = 30$.

e. $AB = 1.8$, $BC = 2.4$, $AC = 3$.
$XW = 0.4$, $XT = 0.5$, $WT = 0.3$.

8. Datos: $\angle B \cong \angle D$

$CD = 4AB$

Demuestra que $BD = 5BL$.



9.

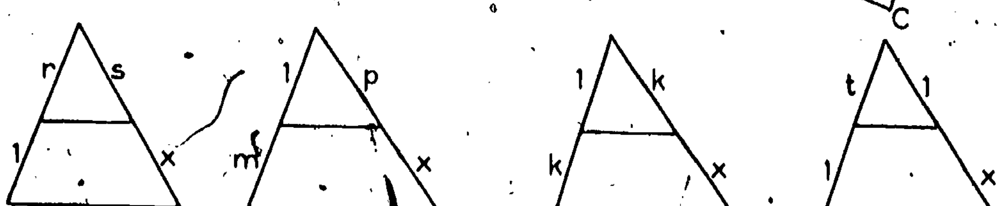


Fig. a. Fig. b. Fig. c Fig. d

En cada figura se ha dibujado un segmento paralelo a la base de un triángulo y se han marcado las longitudes de algunos segmentos.

a. Demuestra que $x = \frac{s}{r}$. (Sugerencia: Escribe una proporción.)

b. Demuestra que $x = m$.

c. Demuestra que $x = k^2$.

d. Demuestra que $x = \frac{1}{t}$.

e. ¿De qué otra parte es la parte c un caso especial?

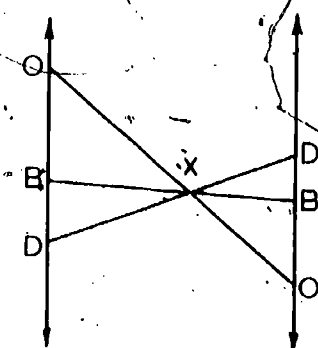
f. ¿De qué otra parte es la parte d un caso especial?

g. ¿Dependen los resultados del tamaño del ángulo en el vértice?

10. Explica cómo dos triángulos pueden tener cinco partes (lados, ángulos) de uno congruentes a cinco partes del otro y <u>no</u> ser triángulos congruentes.

11. Datos: En el diagrama, $\overleftrightarrow{OD} \parallel \overleftrightarrow{O_1D_1}$.

Demuestra que $\frac{OB}{O_1B_1} = \frac{OD}{O_1D_1}$.



12. a. Si $\overline{BR}$, $\overline{CS}$ y $\overline{DT}$ son perpendiculares a $\overline{BD}$, nombra los pares de triángulos semejantes.

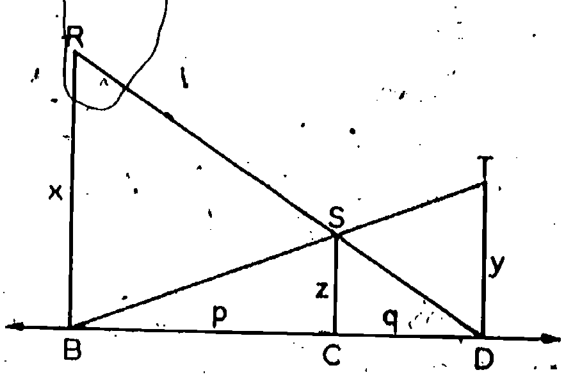
b. Señala cuál de estas dos igualdades es correcta:

$\frac{z}{y} = \frac{p}{q}$, $\frac{z}{y} = \frac{p}{p+q}$.

c. Señala cuál de estas dos igualdades es correcta:

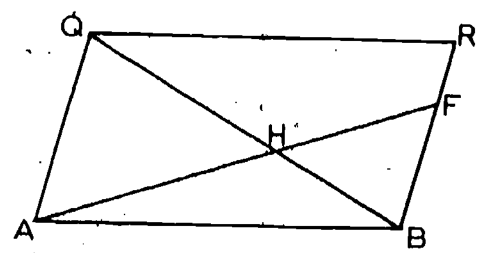
$\frac{z}{x} = \frac{q}{p}$, $\frac{z}{x} = \frac{q}{p+q}$.

d. Demuestra que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$.



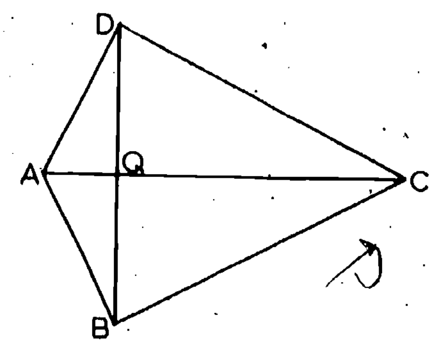
e. El problema, "¿Cuánto tardarán dos hombres en completar una tarea que uno solo puede hacer en 6 horas y el otro solo en 3 horas?", se puede resolver mediante la ecuación $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{n}$. Resuelve esa ecuación <u>geométricamente</u>. (Sugerencia: Mira la parte (d) y la figura.)

13. Dado el paralelogramo ABRQ, con la diagonal $\overline{QB}$ y el segmento $\overline{AF}$ intersecándose en H, según se ve en la figura, demuestra que $QH \cdot HF = HB \cdot AH$.

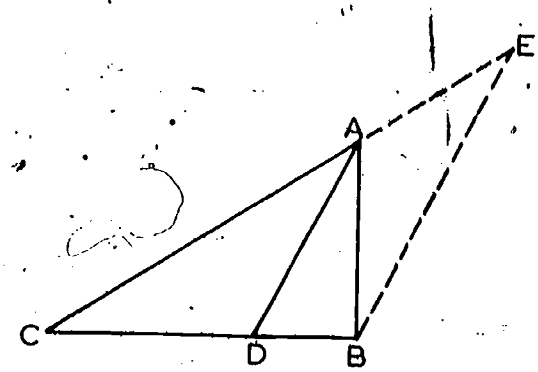


14. En la figura, si $\overline{DB} \perp \overline{AC}$ y también $DQ = BQ = 2AQ = \frac{1}{2}QC$, demuestra que:

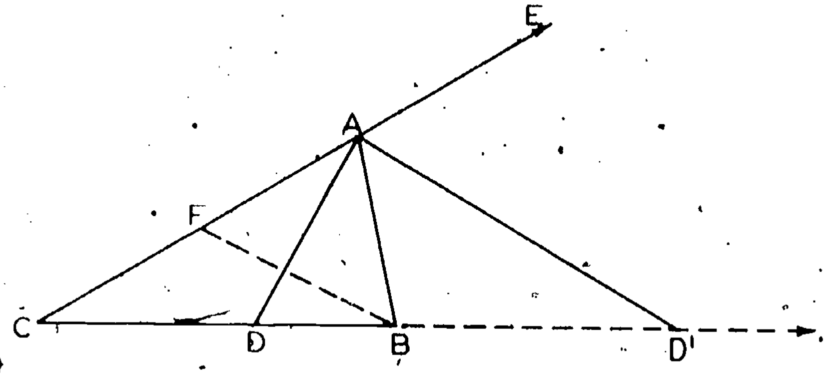
   a. $\triangle AQD \sim \triangle DQC$
   b. $\triangle BQC \sim \triangle AQD$
   c. $\overline{AD} \perp \overline{DC}$



15. Demuestra el siguiente teorema: La bisectriz de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los lados del ángulo.
Dato: El $\triangle ABC$, con la bisectriz $\overline{AD}$ del $\angle A$ intersecando a $\overline{BC}$ en D.
Demostrar: $\frac{CD}{DB} = \frac{CA}{AB}$
(Sugerencia: Dibuja $\overline{BE} \parallel \overline{AD}$.)

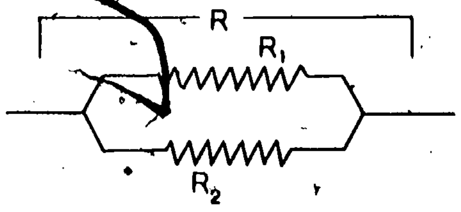


*16. En el $\triangle ABC$, hagamos que las bisectrices de los ángulos interno y externo en A corten a $\overleftrightarrow{CB}$ en los puntos D y D', respectivamente. Demuestra que $\frac{CD'}{D'B} = \frac{CD}{DB}$. (Sugerencia: Dibuja $\overline{BF} \parallel \overline{D'A}$.)

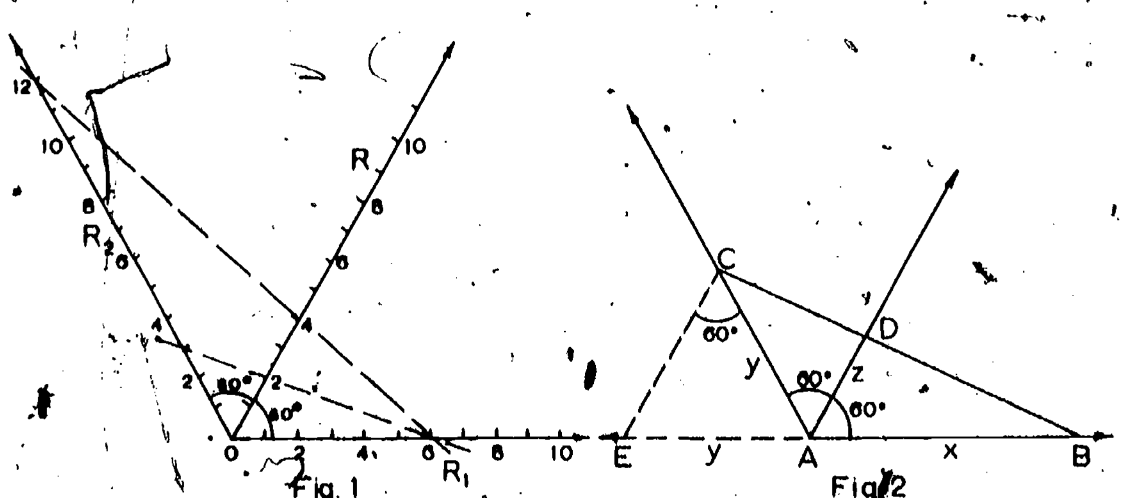


*17. Si tenemos un circuito eléctrico que consta de dos alambres en paralelo, con resistencias R_1 y R_2, entonces la resistencia R del circuito se obtiene mediante la ecuación

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$



Usamos el siguiente dibujo para hallar R, conocidos R_1 y R_2.

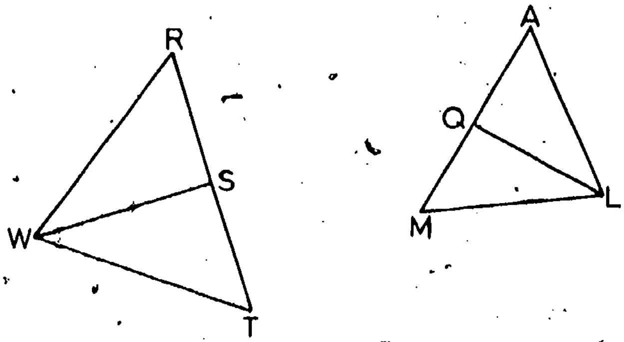


Marcamos escalas numéricas sobre tres rayos, como en la figura 1. Colocamos una regla pasando por R_1 y R_2 en las escalas externas, y leemos R en la tercera escala. Usando las escalas de la figura, escoge valores para R_1, R_2, halla R en la figura, y comprueba tus resultados observando si la ecuación anterior se satisface.

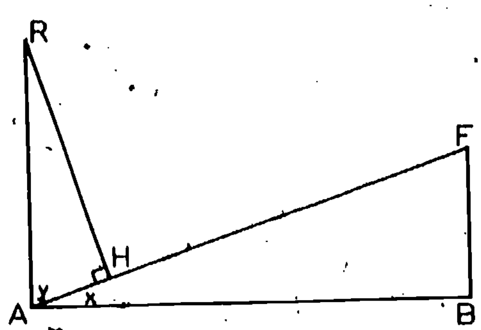
a. Demuestra que el método realmente funciona. Fíjate en la figura 2.

b. ¿Podría usarse el mismo diagrama para hallar R en la ecuación $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}$?

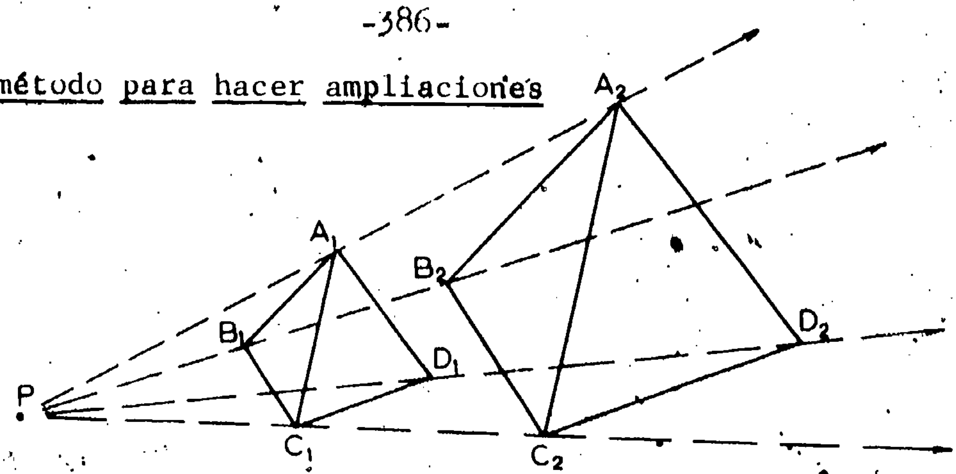
18. En la figura, $\overline{WS}$ y $\overline{LQ}$ son medianas y $\frac{RW}{AL} = \frac{RT}{AM} = \frac{WS}{LQ}$. Demuestra que $\triangle RWT \sim \triangle ALM$.



19. En la figura, sabemos que $\overline{RA} \perp \overline{AB}$, $\overline{FB} \perp \overline{AB}$ y $\overline{RH} \perp \overline{AF}$. Demuestra que $\triangle HRA \sim \triangle BAF$ y que $HR \cdot BF = BA \cdot HA$.



20. <u>Un método para hacer ampliaciones</u>



La figura $A_1B_1C_1D_1$ se ha ampliado tomando un punto arbitrario P, y trazando los rayos $\overrightarrow{PA_1}$, $\overrightarrow{PB_1}$, $\overrightarrow{PC_1}$ y $\overrightarrow{PD_1}$; localizando A_2, B_2, C_2, y D_2 de manera que $PA_2 = 2PA_1$, $PB_2 = 2PB_1$, etc.; y finalmente dibujando los segmentos $\overline{A_2B_2}$, $\overline{A_2D_2}$, etc.

a. Dibuja un objeto sencillo, un bloque o una mesa, por ejemplo, y amplía el dibujo por el método antes indicado. ¿Será necesario <u>duplicar</u> PA_1, PB_1, etc.?

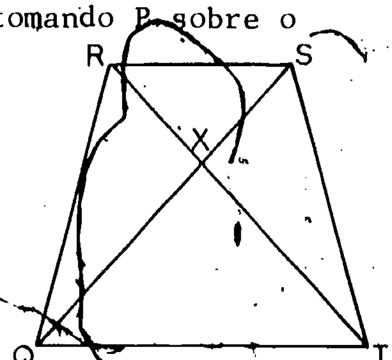
b. ¿Cómo podría modificarse el método para dibujar una figura con lados <u>la mitad</u> de los de $A_1B_1C_1D_1$?

c. Demuestra que $\triangle PA_1B_1 \sim \triangle PA_2B_2$ y $\frac{A_2B_2}{A_1B_1} = \frac{PA_2}{PA_1}$.

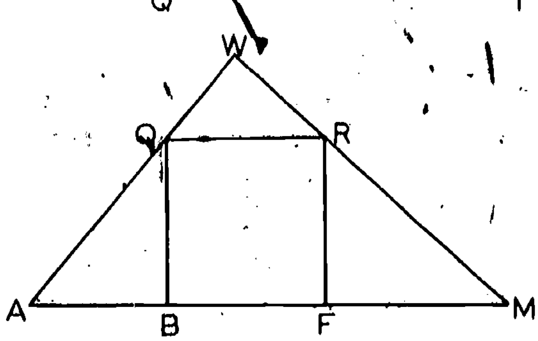
d. Demuestra que $\triangle A_1B_1D_1 \sim \triangle A_2B_2D_2$.

e. ¿Podría haberse hecho la ampliación tomando P sobre o dentro de la figura dada?

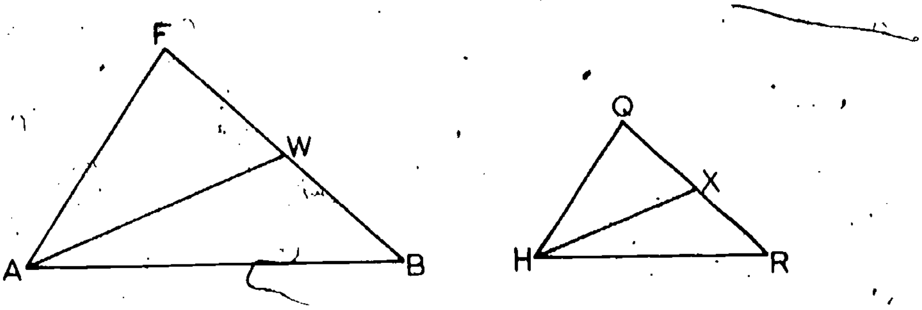
*21. Dado el cuadrilátero RSTQ, como en la figura, con $\overline{RS} \parallel \overline{QT}$ y $\triangle QXR \sim \triangle TXS$, demuestra que $QR = TS$.



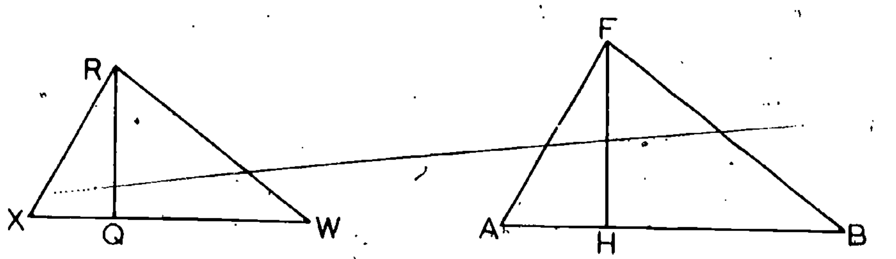
22. Datos: $\overline{AW} \perp \overline{MW}$, BFRQ es un cuadrado, Q está en $\overline{AW}$ y R en $\overline{WM}$, como ilustra la figura.
Demuestra que $AB \cdot WR = QW \cdot BQ$,
y $AB \cdot FM = RF \cdot BQ$.



23. Demuestra el siguiente teorema: Si dos triángulos son semejantes, las medianas correspondientes tienen la misma razón que los lados correspondientes.



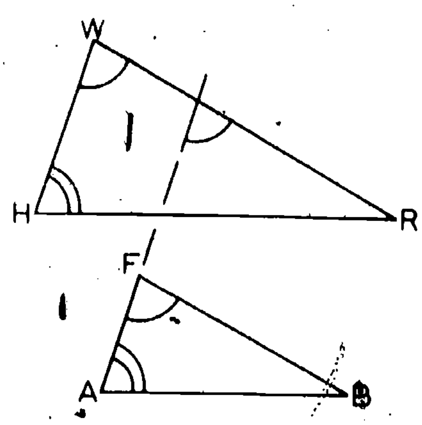
24. Demuestra el siguiente teorema: Si dos triángulos son semejantes, las alturas correspondientes tienen la misma razón que los lados correspondientes.



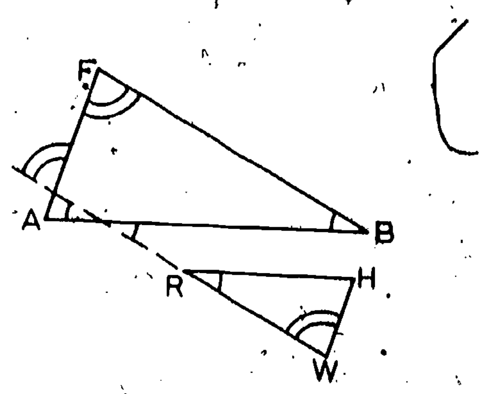
25. Demuestra que si los lados de dos triángulos son respectivamente paralelos, los triángulos son semejantes.

Datos: $\overline{AB}$ $\overline{HR}$, $\overline{AF} \parallel \overline{HW}$ y $\overline{BF} \parallel \overline{RW}$.

Demuestra que $\triangle ABF$ $\triangle HRW$.

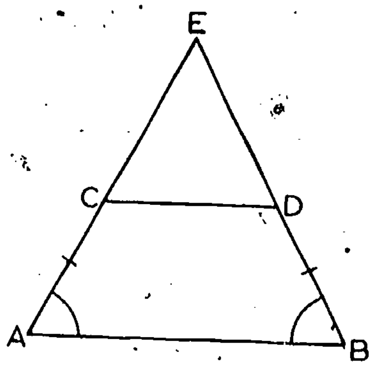


Caso I

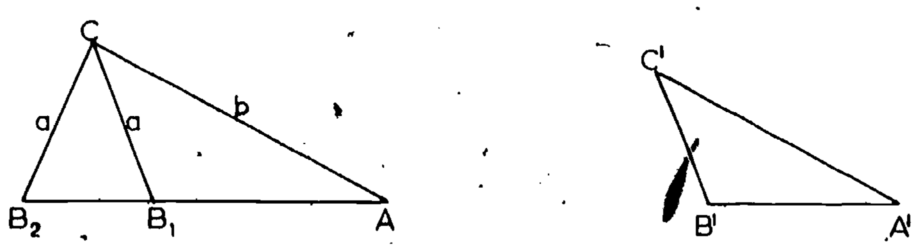


Caso II

26. Dado que $\angle A \cong \angle B$ y $AC = BD$, muestra que $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$.

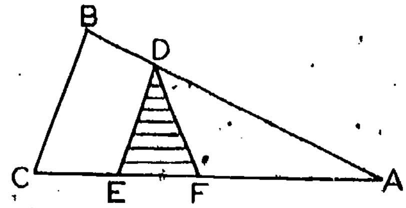


*27. Sabemos (V. el Capítulo 5) que si dos triángulos se corresponden de manera que dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos en un triángulo son respectivamente congruentes a dos lados y el ángulo opuesto al lado correspondiente del otro (L.L.A.), los triángulos no necesariamente son congruentes. (Observa el diagrama.)



¿Será o no cierta la siguiente afirmación? Explícalo. Si dos triángulos se corresponden de manera que dos lados de un triángulo son proporcionales a dos lados del otro, y los ángulos opuestos a un par de lados correspondientes son congruentes, entonces los triángulos son semejantes.

*28. El $\triangle EDF$ es isósceles, siendo $DE = DF$. El $\triangle ABC$ es tal que E y F están entre A y C, $\overline{CB} \parallel \overline{ED}$, y A, B, D están alineados.

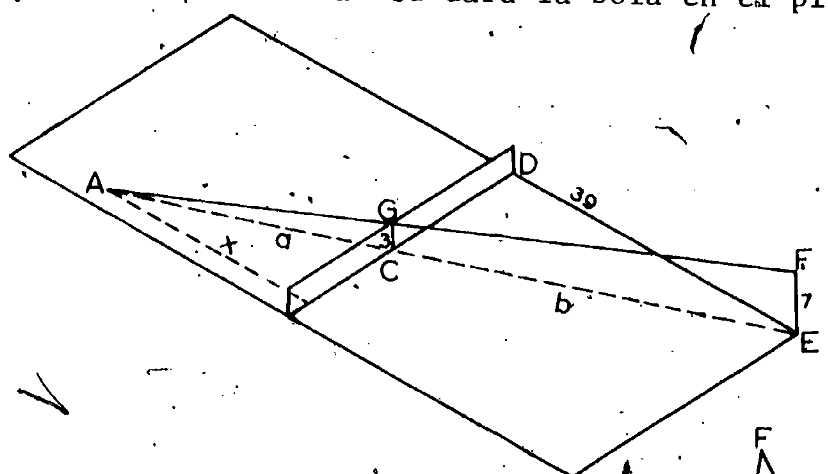


a. ¿Qué afirmaciones ciertas relativas a semejanza y proporciones se pueden hacer en cada uno de los siguientes casos?

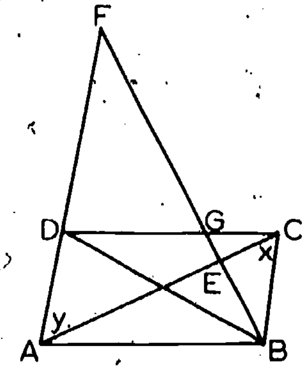
1. Para el $\triangle ABC$ y el $\triangle ADE$.
2. Para el $\triangle ABC$ y el $\triangle ADF$.

b. ¿Será cierta o falsa la siguiente afirmación? Explícalo. Si en el $\triangle ABC$, D está en el segmento $\overline{AB}$ y X en el segmento $\overline{AC}$ de manera que $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DX}$, entonces $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{DX}$ son paralelas.

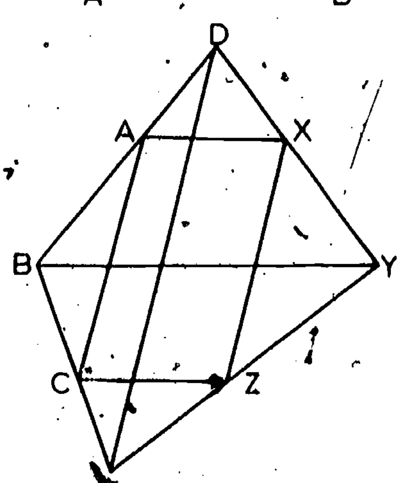
*29. Se sirve una bola de tenis desde una altura de 7 pies pasando sobre una red de 3 pies de altura. Si el servicio se hace en línea recta desde una recta distante a 39 pies de la red, ¿a qué distancia de la red dará la bola en el piso?



*30. En el paralelogramo ABCD de la figura, la recta $\overleftrightarrow{BF}$ interseca a $\overleftrightarrow{AC}$ en E, a $\overleftrightarrow{CD}$ en G, y a $\overleftrightarrow{AD}$ en F. Demuestra que EB es la media geométrica de EG y EF.



*31. Sean $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$ tales que $\overleftrightarrow{AX}$, $\overleftrightarrow{BY}$ y $\overleftrightarrow{CZ}$ son paralelas, y también $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{XZ}$. $\overleftrightarrow{BA}$ y $\overleftrightarrow{YX}$ se intersecan en D y $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{YZ}$ se intersecan en E. Demuestra que $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{XZ}$.

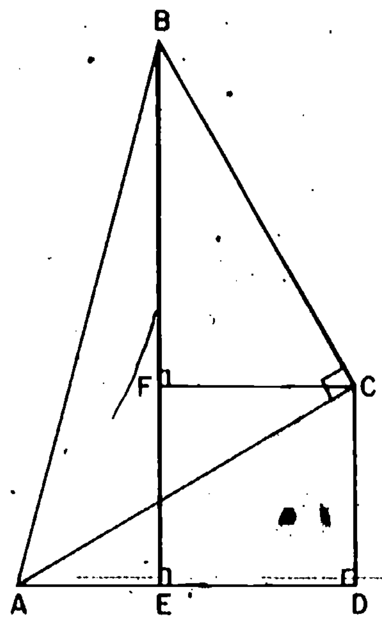


*32. Los ángulos señalados con cuadritos en la figura son rectos.

a. Demuestra que $\frac{BF}{BC} = \frac{AD}{AC}$.

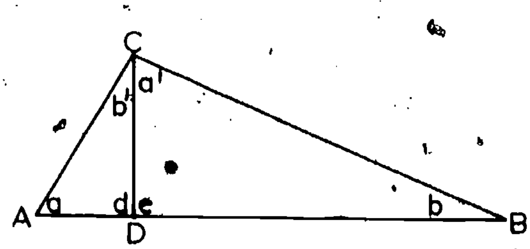
b. Demuestra luego que

$$\frac{BE}{AB} = \frac{CD}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} + \frac{AD}{AC} \cdot \frac{BC}{AB}.$$



12-4. Semejanzas en los triángulos rectángulos

Teorema 12-6. En cualquier triángulo rectángulo, la altura correspondiente a la hipotenusa divide al triángulo en dos triángulos que son semejantes uno a otro y también semejantes al triángulo original.



O de otro modo: Sea el $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo con ángulo recto en C. Sea $\overline{CD}$ la altura desde C a la hipotenusa $\overline{AB}$. Entonces

$$\triangle ACD \sim \triangle ABC \sim \triangle CBD.$$

Notarás que este nuevo enunciado del teorema es más explícito que el primero; nos dice exactamente cómo deberemos aparear los vértices para obtener las semejanzas. Notarás también qué sistema usamos al aparear los ángulos: (1) los ángulos rectos van uno con otro, como tiene que ser en cualquier semejanza de triángulos rectángulos, (2) cada uno de los triángulos pequeños tiene un ángulo común con el triángulo mayor, y así ese ángulo se aparea consigo mismo, y (3) se aparean los dos ángulos restantes.

Demostración: En la demostración, usamos para los ángulos la notación de la figura.

Como el $\angle C$ es un ángulo recto, sabemos que $\angle a$ y $\angle b$ son complementarios. Es decir,

$$m\angle a + m\angle b = 90.$$

También, como $\angle d$ es un ángulo recto,

$$m\angle a + m\angle b' = 90.$$

Por lo tanto, $\angle b \cong \angle b'$.

También, $\angle a \cong \angle a$, (esto es trivial)

y $\angle C \cong \angle d$,

pues el $\angle d$ es recto. Por el teorema de semejanza A.A.A., tenemos que

$$\triangle ACD \sim \triangle ABC.$$

La demostración de la otra mitad del teorema es justamente la misma, con el único cambio de que el punto B ocupa en ella el lugar del punto A.

~~Corolario 12-6-1. Dado un triángulo rectángulo y la altura~~ desde el vértice del ángulo recto a la hipotenusa,

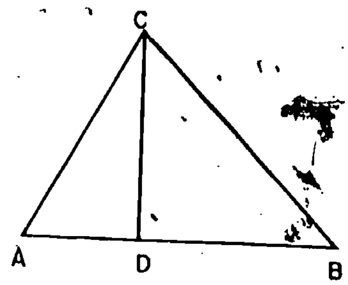
(1) la altura es la media geométrica de los segmentos en que divide a la hipotenusa, y

(2) cada cateto es la media geométrica entre la hipotenusa y el segmento de la hipotenusa adyacente a ese cateto.

O de otro modo: Sea el $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo y C su ángulo recto, y sea D el pie de la altura desde C a $\overline{AB}$. Entonces

(1) $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$, y también

(2) $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$ y $\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{BA}$.



Demostración: (1) Por el teorema 12-6, $\triangle ADC \sim \triangle CDB$.

Por lo tanto, $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$.

(2) Por el teorema 12-6, $\triangle ADC \sim \triangle ACB$.

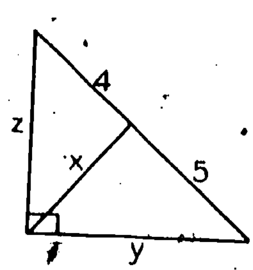
Por lo tanto, $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$.

También, $\triangle BDC \sim \triangle BCA$,

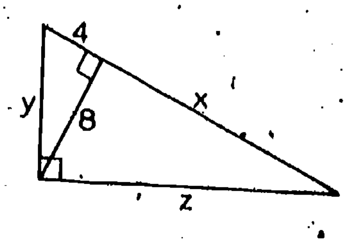
y, por tanto, $\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{BA}$.

Conjunto de problemas 12-4

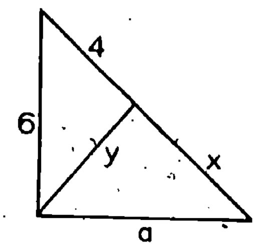
1. Dado el triángulo rectángulo, con la altura correspondiente a la hipotenusa y las longitudes de los lados según aparecen en la figura, halla las longitudes no conocidas.



2. Sigue las instrucciones del problema 1.

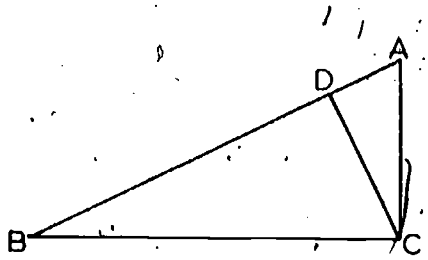


3. En este triángulo rectángulo, en el que se dibujó la altura correspondiente a la hipotenusa, es posible hallar un valor numérico para cada uno de los segmentos a, x, y. Determínalos.



4. En un triángulo rectángulo, si la altura correspondiente a la hipotenusa es 12 y la hipotenusa es 25, determina la longitud de cada cateto y la de los segmentos de la hipotenusa.

5. El $\triangle ABC$ es rectángulo, con el ángulo recto en C y altura $\overline{CD}$.



   a. Si AD = 2 y DB = 8, halla AC, CD y CB.
   b. Si CD = 9 y AD = 3, halla AC, CB y AB.
   c. Si CB = 12 y AD = 10, ¿cuáles son las longitudes de los otros segmentos?
   d. Si AC = 8 y DB = 12, ¿cuáles son las longitudes de los otros segmentos?

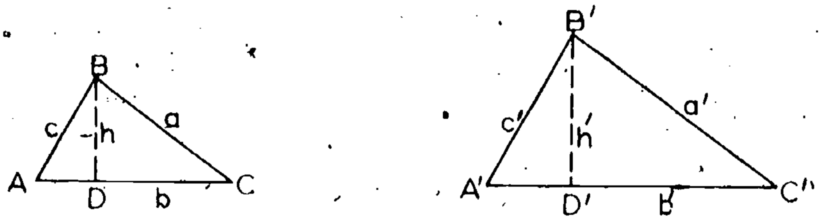
12-5. Areas de triángulos semejantes

Dado un cuadrado de lado a, y un cuadrado de lado 2a, es fácil ver que el área del segundo cuadrado es 4 veces el área del primero. (Esto es porque $(2a)^2 = 4a^2$.) En general, si dos cuadrados tienen lados a y ka, entonces la razón de sus áreas es k^2, pues

$$\frac{(ka)^2}{a^2} = \frac{k^2a^2}{a^2} = k^2 .$$

Obtenemos un resultado análogo para los triángulos semejantes.

Teorema 12-7. La razón de las áreas de dos triángulos semejantes es el cuadrado de la razón de dos lados correspondientes cualesquiera.



Demostración: Supongamos que $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Entonces

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}.$$

Sea k el valor común de estas razones, de modo que $a' = ka$, $b' = kb$, $c' = kc$; sea $\overline{BD}$ la altura desde B a $\overleftrightarrow{AC}$; y sea $\overline{B'D'}$ la altura desde B' a $\overleftrightarrow{A'C'}$. Como $\triangle ABD$ y $\triangle A'B'D'$ son triángulos rectángulos, y $\angle A \cong \angle A'$, tenemos que

$$\triangle ABD \sim \triangle A'B'D'.$$

Por lo tanto, $$\frac{h'}{h} = \frac{c'}{c} = k.$$

Sean A_1 y A_2 las áreas de los dos triángulos. Entonces

$$A_1 = \frac{1}{2}bh$$

y

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{2}b'h' \\ &= \frac{1}{2}(kb)(kh) \\ &= k^2 \cdot (\frac{1}{2}bh) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\frac{A_2}{A_1} = k^2 = (\frac{a'}{a})^2 = (\frac{b'}{b})^2 = (\frac{c'}{c})^2$,

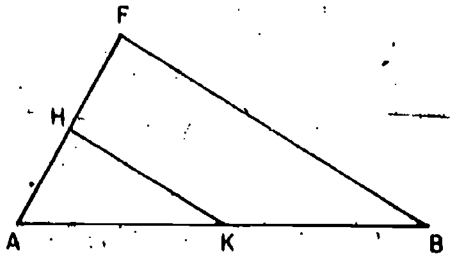
lo que queríamos demostrar.

Conjunto de problemas 12-5

1. ¿Cuál es la razón de las áreas de dos triángulos semejantes cuyas bases son de 3 pulgadas y 4 pulgadas?; ¿de x pulgadas y y pulgadas?

2. Un lado de uno de dos triángulos semejantes es 5 veces el lado correspondiente del otro. Si el área del primero es 6, ¿cuál es el área del segundo?

3. En la figura, si H es el punto medio de $\overline{AF}$ y K el punto medio de $\overline{AB}$, ¿cuál será la razón del área del $\triangle ABF$ al área del $\triangle AKH$? Si el área del $\triangle ABF$ es 15, determina el área del $\triangle AKH$.



4. El área del mayor de dos triángulos semejantes es 9 veces el área del menor. ¿Cuál será la razón de uno de los lados del triángulo mayor al lado correspondiente del menor?

5. Las áreas de dos triángulos semejantes son 225 pulgadas cuadradas y 36 pulgadas cuadradas. Calcula la base del más pequeño si la base del mayor es 10 pulgadas.

6. Las áreas de dos triángulos semejantes son 144 y 81. Si un lado del primero es 6, ¿cuál es el lado correspondiente del segundo?

7. En el $\triangle ABC$, el punto D está en el lado $\overline{AC}$, y AD es dos veces CD. Dibuja $\overline{DE}$ paralelo a $\overline{AB}$ e intersecando a $\overline{BC}$ en E, y compara las áreas de los triángulos ABC y DEC.

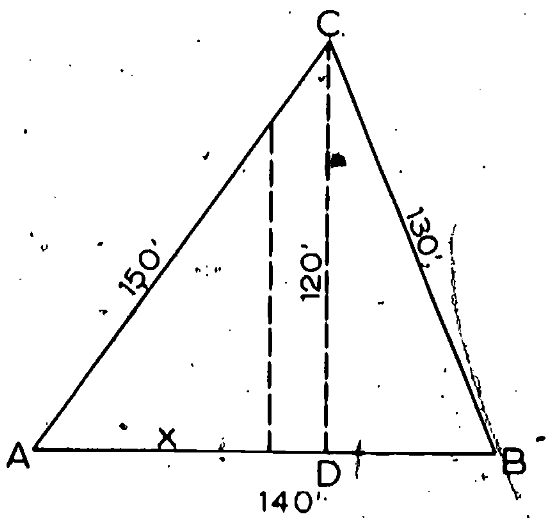
8. Las aristas de un cubo son dos veces las de otro cubo.
   a. ¿Cuál es la razón de las sumas de sus aristas?
   b. ¿Cuál es la razón de las áreas totales de sus superficies?

9. ¿Qué longitud deberá tener un lado de un triángulo equilátero para que su área sea dos veces la de un triángulo equilátero cuyo lado es 10?

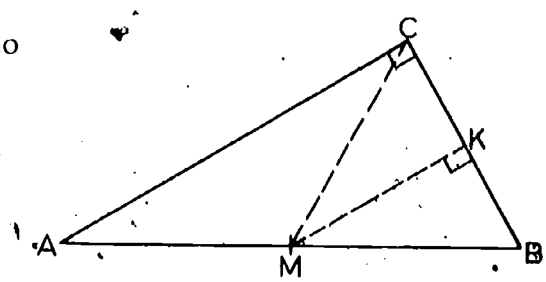
10. Si dibujamos triángulos semejantes sobre el lado y la altura de un triángulo equilátero, de modo que el lado y la altura sean lados correspondientes de los triángulos, demuestra que la razón de sus áreas es de 4 a 3.

11. Dos pedazos de alambre de igual largo se doblan para formar un cuadrado y un triángulo equilátero, respectivamente. ¿Cuál es la razón de las áreas de las dos figuras?

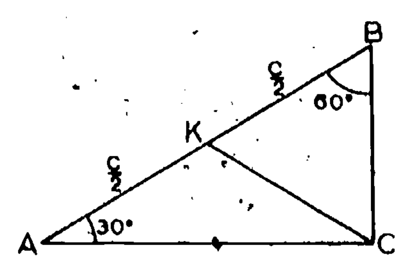
12. Un solar triangular tiene lados de longitudes 130 pies, 140 pies y 150 pies. El largo de la perpendicular desde una esquina al lado de 140 pies es de 120 pies. Se va a levantar una verja perpendicular al lado de 140 pies de manera que el área del solar quede dividida en dos partes iguales. ¿A qué distancia de A, a lo largo de $\overline{AB}$, deberá levantarse esa verja perpendicular?



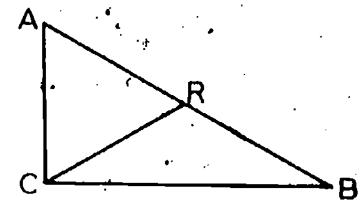
13. Demuestra el teorema: El punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo equidista de los vértices.



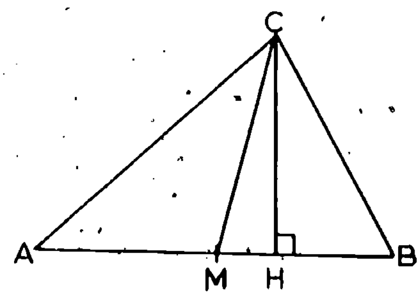
14. Demuestra el teorema 11-9 usando el diagrama de la derecha y el problema 13.



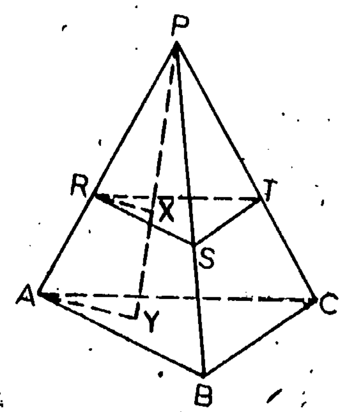
15. En el triángulo de la figura, $AR = RC = RB$. Demuestra que el $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo.



*16. Demuestra que la media geométrica de dos números positivos es menor que su media aritmética, excepto cuando los dos números son iguales, en cuyo caso la media geométrica es igual a la media aritmética. (Sugerencia: Sean los dos números dados las distancias AH y HB, sea $\overline{HC}$ perpendicular a $\overline{AB}$, siendo $HC = \sqrt{AH \cdot HB}$, y sea M el punto medio de $\overline{AB}$. Demuestra que el $\angle ACB$ es recto y utiliza los dos problemas anteriores.)

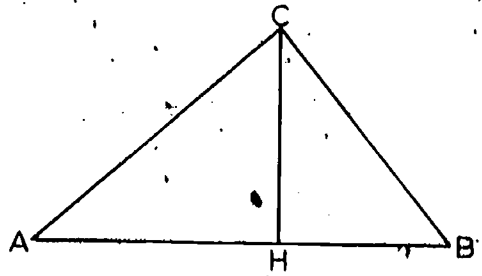


17. Datos: P-ABC es una pirámide triangular que tiene una sección RST paralela a la base ABC. $\overline{PY}$ es perpendicular al plano de la base, y X es la intersección de $\overline{PY}$ con el plano del $\triangle RST$.



Demuestra que $\dfrac{\text{área } \triangle RST}{\text{área } \triangle ABC} = \left(\dfrac{PX}{PY}\right)^2$

*18. En la figura, el $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es $\overline{AB}$, y $\overline{CH}$ es la altura desde C. Sean K_1, K_2 y K_3 las áreas de $\triangle ABC$, $\triangle ACH$ y $\triangle CBH$, respectivamente.



La siguiente sucesión de enunciados constituye una demostración diferente del teorema de Pitágoras. Da una razón para cada uno de estos enunciados:

1. $K_1 = K_2 + K_3$

2. $1 = \frac{K_2}{K_1} + \frac{K_3}{K_1}$

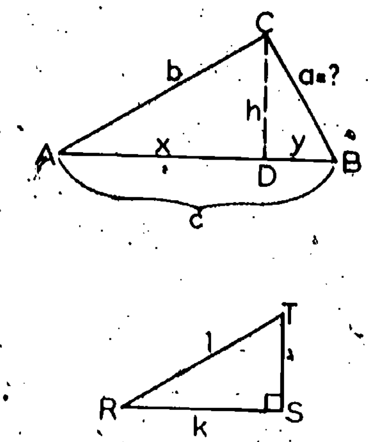
3. $\triangle ACH \sim \triangle ABC \sim \triangle CBH$

4. $1 = (\frac{AC}{AB})^2 + (\frac{BC}{AB})^2$

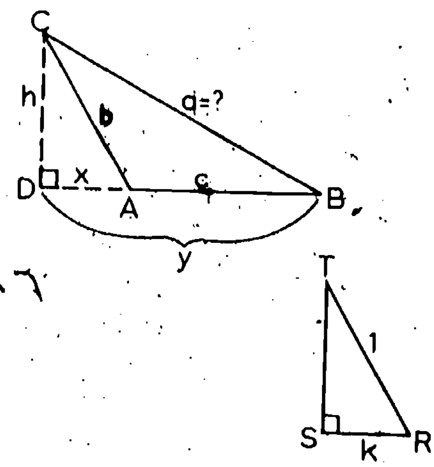
5. $(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$

<u>Preámbulo</u>. En los siguientes problemas, conocemos las longitudes de dos lados de un triángulo y la medida del ángulo comprendido entre ellos, y deseamos saber la longitud del tercer lado. Por el teorema de congruencia L.A.L., el tercer lado queda determinado unívocamente, así que debe haber una manera de hallar el valor numérico de su longtiud. Otro modo de dar el ángulo comprendido es mediante un triángulo rectángulo en el cual el ángulo (o su suplemento) sea uno de los ángulos agudos. Realmente, necesitamos sólo el número $k = \frac{RS}{RT}$. Para el cálculo numérico, este número, que depende del $\angle R$, se ha tabulado, y si contamos con esta tabla el cómputo de la longitud del tercer lado se hace en forma directa. El número k se llama el <u>coseno</u> del $\angle R$, abreviado $k = \cos\angle R$, y la tabla se llama una tabla de cosenos. Por esta razón la fórmula que deduciremos para a^2 se llama la <u>ley de cosenos</u>. La volverás a encontrar en la trigonometría.

*19. En los dos triángulos del diagrama, $\angle A \cong \angle R$, $AC = b$, $AB = c$, $RS = k$ y el $\angle S$ es recto. Determina a en términos de b, c y k. (Sugerencia: Sea D el pie de la altura a $\overline{AB}$, y sean x, y, h como se indican en la figura. Expresa a^2 en términos de h y y; expresa h y y en términos de x, b y c; entonces, de la semejanza $\triangle ADC \sim \triangle RST$, expresa x en términos de b y k.)



*20. En los dos triángulos del diagrama, el $\angle BAC$ es el suplemento del $\angle R$, $AC = b$, $AB = c$, $RS = k$ y $\angle S$ es recto. Determina a en términos de b, c y k. (Sugerencia: Sea D el pie de la perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ desde C. Entonces $\triangle ADC \sim \triangle RST$.)



*21. a. Sea m_a la longitud de la mediana al lado $\overline{BC}$ del $\triangle ABC$, y sean $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Demuestra que

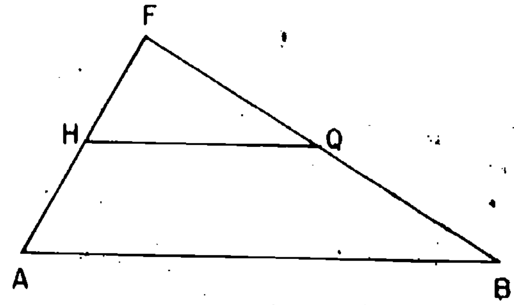
$$m_a^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}).$$

b. Sean m_a, m_b, m_c las longitudes de las medianas del $\triangle ABC$, que tiene lados de longitudes a, b, c. Demuestra que

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

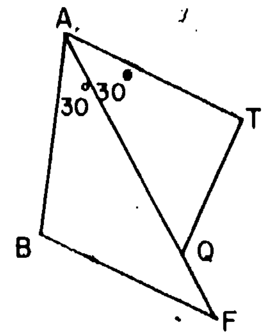
Problemas de repaso

1. En la figura, $\overline{HQ} \parallel \overline{AB}$.



   a. Si FA = 11, FQ = 4, FH = 2, FB = ?
   b. Si FB = 6, FH = 1, HA = 4, FQ = ?
   c. Si FA = 9, FB = 7, FH = $2\frac{1}{2}$, FQ = ?
   d. Si HA = 6, FB = 12, FH = 3, QB = ?

2. a. ¿Serán semejantes los dos triángulos de la figura si AB = 4, AF = 9, QF = 3 y AT = $2\frac{2}{3}$?



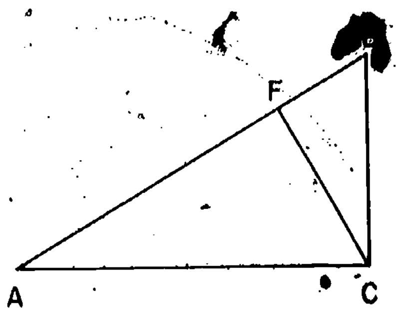
   b. Si AB = 5, AT = 3, AQ = $4\frac{4}{5}$, ¿cuánto deberá valer AF para que $\triangle TAQ \sim \triangle BAF$?

3. Calcula la media geométrica y la media aritmética para cada uno de los siguientes ejemplos:

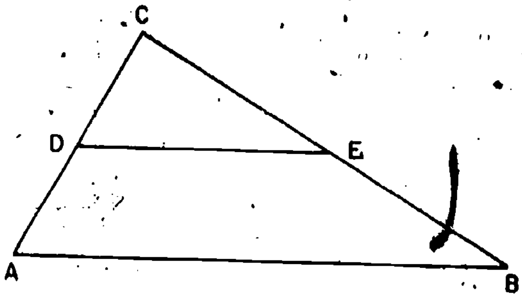
   a. 8 y 10 b. $6\sqrt{2}$ y $3\sqrt{2}$

4. Dibuja dos figuras que no sean semejantes, pero que tengan los lados de la una proporcionales a los lados correspondientes de la otra.

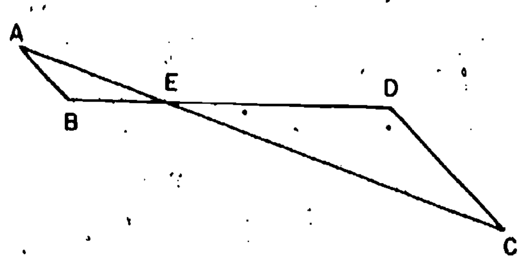
5. En el triángulo rectángulo ABC, si $\overline{FC}$ es la altura de la hipotenusa, AF = 12 y BF = 3, halla AC, FC y BC.



6. Si $CD = x + 3$, $DA = 3x + 3$, $CE = 5$ y $EB = x + 5$, ¿cuál deberá ser el valor de x para que $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$?

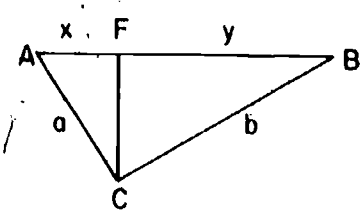


7. Dado en la figura que $\angle B \cong \angle D$, $CD = 4AB$, demuestra que $BD = 5BE$.



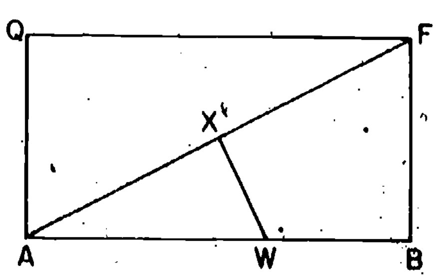
8. Un lado de un triángulo equilátero es congruente a una altura de otro triángulo equilátero. ¿Cuál es la razón de las áreas de los triángulos?

9. En el $\triangle ABC$, $\overline{AC} \perp \overline{BC}$, $\overline{CF} \perp \overline{AB}$, $AB = 20$ y $FC = 8$. Calcula a, b, x, y.



10. Si $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ y $\triangle ACB \sim \triangle DEF$, demuestra que $AB = AC$.

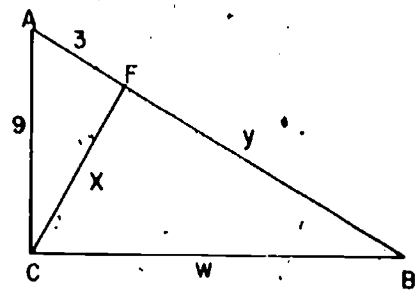
11. Dado el rectángulo ABFQ de la figura con $\overline{WX} \perp \overline{AF}$, demuestra que:
    a. $AF \cdot XW = AW \cdot QA$
    b. $QF \cdot XW = AX \cdot QA$
    c. $AF \cdot AX = AW \cdot QF$



12. Los árboles más altos del mundo son los secoyas que hay a lo largo de la costa en la California septentrional. Para medir uno de estos gigantes, te retiras a alguna distancia del árbol y colocas un palo en la tierra.

Después colocas un espejo sobre el terreno y lo vas moviendo, alejándolo del palo, hasta que veas en él en línea recta al punto más alto del palo y el punto más alto del árbol. Si el palo que colocaste en el terreno tiene 5 pies de altura y está a 520 pies de la base del árbol, y si el espejo está a 8 pies del palo cuando quedan alineados el punto más alto del palo y el del árbol, ¿cuál es la altura del árbol?

13. En el triángulo rectángulo ABC en el que $\overline{CF}$ es la altura correspondiente a la hipotenusa, y los segmentos tienen las medidas que se indican en la figura, determina x, y, w.



*14. Une los vértices del $\triangle ABC$ a un punto R fuera del triángulo. Por cualquier punto X en $\overline{AR}$, traza $\overline{XY} \parallel \overline{AB}$, intersecando a $\overline{BR}$ en Y. Traza $\overline{YZ} \parallel \overline{BC}$, intersecando a $\overline{RC}$ en Z. Demuestra que $\triangle XYZ \sim \triangle ABC$.

15. Cuando retratamos un triángulo, ¿será la fotografía siempre semejante al triángulo original? ¿Cuándo podemos estar seguros de que lo sea?

Capítulos 7 a 12

EJERCICIOS DE REPASO

Escribe (1) si la afirmación es cierta y (0) si es falsa. Procura explicar por qué marcaste falsa una afirmación.

1. Un ángulo externo de un triángulo es mayor que cualquiera de los ángulos internos del triángulo.
2. En el espacio, y pasando por un punto exterior dado, hay solamente una perpendicular a una recta dada.
3. El ángulo opuesto al lado más largo de un triángulo es siempre el ángulo mayor.
4. En el $\triangle ABC$, si $m\angle A < m\angle B$, entonces $AC < BC$.
5. Si $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, entonces $AB < AC$.
6. Podemos construir un triángulo con lados de longitudes 351, 513 y 135.
7. Si un ángulo de un triángulo es mayor que un ángulo de un segundo triángulo, entonces el lado opuesto al ángulo del primero es más largo que el lado opuesto al ángulo del segundo.
8. Dos rectas en el espacio son paralelas si ambas son perpendiculares a la misma recta.
9. Por todo punto en un plano hay siempre una recta paralela a una recta dada en el plano.
10. Dadas dos rectas y una secante a ellas, si un par de ángulos alternos internos son congruentes, el otro par es también de ángulos congruentes.
11. Si dos rectas son cortadas por una secante de manera que uno de los ángulos alternos internos es 90° mayor que el otro, las dos rectas son perpendiculares.
12. Si dos rectas son cortadas por una secante, hay exactamente cuatro pares de ángulos correspondientes.
13. Si dos rectas que se intersecan son cortadas a su vez por una secante, ningún par de ángulos correspondientes son congruentes.

14. Si los ángulos alternos internos formados por dos rectas y una secante no son congruentes, las dos rectas son perpendiculares.
15. Dadas dos rectas paralelas y una secante, dos ángulos internos a un mismo lado de la secante son complementarios.
16. Si L, M y N son tres rectas tales que $L \parallel M$ y $M \parallel N$, entonces $L \parallel N$.
17. Si L, M y N son tres rectas tales que $L \perp M$ y $M \perp N$, entonces $L \perp N$.
18. Como la suma de las medidas de los ángulos de cualquier triángulo es 3 veces 60, la suma de las medidas de los ángulos de cualquier cuadrilátero es 4 veces 60.
19. Si dos ángulos de un triángulo son congruentes a dos ángulos de otro triángulo, entonces los terceros ángulos son también congruentes.
20. Si dos ángulos y un lado de un triángulo son congruentes a dos ángulos y un lado de otro triángulo, los triángulos son congruentes.
21. Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.
22. Un ángulo externo de un triángulo es el suplemento de uno de los ángulos internos del triángulo.
23. Si una diagonal de un cuadrilátero lo divide en dos triángulos congruentes, el cuadrilátero es un paralelogramo.
24. Si cada dos lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes, el cuadrilátero es un paralelogramo.
25. Los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes.
26. Una diagonal de un paralelogramo biseca a dos de sus ángulos.
27. Un cuadrilátero con tres ángulos rectos es un rectángulo.

28. El perímetro del triángulo formado al unir los puntos medios de los lados de un triángulo dado, es la mitad del perímetro del triángulo dado.
29. Si las diagonales de un cuadrilátero son perpendiculares y congruentes, el cuadrilátero es un rombo.
30. Un conjunto de rectas paralelas corta segmentos congruentes en cualquier secante.
31. El área de un triángulo rectángulo es el producto de la hipotenusa y la altura correspondiente.
32. El área de un paralelogramo es el producto de las longitudes de dos de sus lados adyacentes.
33. El área de un trapecio es la mitad del producto de su altura y la suma de sus bases.
34. Si dos triángulos tienen igual área y bases iguales, entonces tienen alturas iguales.
35. Si los catetos de un triángulo rectángulo tienen longitudes a, b, y si la hipotenusa es de longitud c, entonces $b^2 = (c - a)(c + a)$.
36. Si las longitudes de los lados de un triángulo son 20, 21 y 31, el triángulo es rectángulo.
37. Dos triángulos rectángulos son congruentes si la hipotenusa y un cateto de uno son respectivamente congruentes a la hipotenusa y un cateto del otro.
38. Si uno de los ángulos de un triángulo rectángulo es de 30°, entonces un cateto tiene doble longitud que el otro cateto.
39. La longitud de la diagonal de un cuadrado se puede obtener multiplicando la longitud de un lado por $\sqrt{2}$.
40. Si una recta que corta a dos lados de un triángulo determina un triángulo semejante al mayor, la recta es paralela al tercer lado del triángulo.
41. Si cada uno de dos triángulos tiene ángulos de 36° y 37°, los dos triángulos son semejantes.

42. Si dos triángulos tienen un ángulo de uno congruente a un ángulo del otro, y dos lados de uno proporcionales a dos lados del otro, los triángulos son semejantes.
43. Si los lados de un triángulo tienen longitudes de 6, 12 y 10, y los lados de otro triángulo tienen longitudes de 15, 9 y 18, entonces los triángulos son semejantes.
44. Una altura de un triángulo rectángulo lo divide en dos triángulos semejantes.
45. Un triángulo cuyos lados miden 4, 6 y 8 tendrá un área mayor que la mitad del área de un triángulo cuyos lados miden 6, 9 y 12.
46. Si A, B, X, Y están en un mismo plano, y si AX = BX, AY = BY, entonces $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{XY}$.
47. Si tres puntos no alineados de un plano equidistan todos de los puntos P y Q, entonces $\overleftrightarrow{PQ}$ es perpendicular al plano.
48. Si una recta que no está en un plano es perpendicular a una recta en el plano, entonces es perpendicular al plano.
49. Una recta perpendicular a cada una de dos rectas en un plano es perpendicular al plano.
50. Si un plano biseca a un segmento, todo punto del plano equidista de los extremos del segmento.
51. Si un plano es perpendicular a cada una de dos rectas, las dos rectas están en un mismo plano.
52. Hay infinidad de planos perpendiculares a una recta dada.
53. En un punto de una recta hay infinidad de rectas perpendiculares a ella.
54. Por un punto fuera de un plano, pasa exactamente una recta perpendicular al plano.
55. Si la intersección de un plano y otros dos planos consiste en rectas paralelas, entonces los dos planos son paralelos.
56. Dos planos perpendiculares a la misma recta son paralelos.

57. Si el plano E es perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, entonces $E \perp \overleftrightarrow{CD}$.

58. Si cada uno de dos planos es paralelo a una recta, los planos son paralelos entre sí.

59. Si un plano corta a las caras de un ángulo diedro, la intersección se llama un ángulo rectilíneo del diedro.

60. La proyección de una recta sobre un plano es siempre una recta.

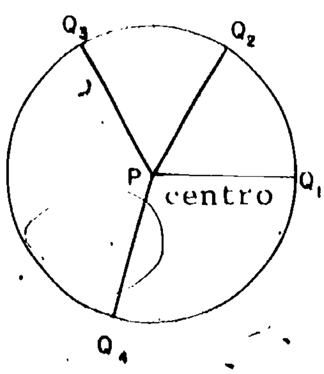
Capítulo 13

CIRCUNFERENCIAS Y SUPERFICIES ESFERICAS

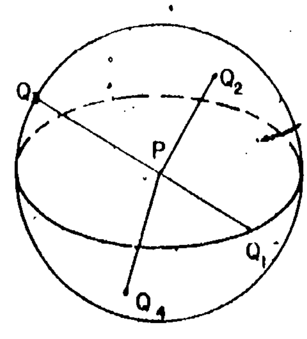
13-1. Definiciones básicas

En este capítulo comenzamos el estudio de conjuntos de puntos no constituidos por planos, semiplanos, rectas, rayos y segmentos. Las más sencillas entre tales figuras curvas son la circunferencia y la superficie esférica y porciones de ellas. Como de costumbre al tratar con nuevas figuras, empezamos con algunas definiciones.

Definiciones: Una superficie esférica es el conjunto de los puntos que están a una distancia especificada de un punto dado. Una circunferencia es el conjunto de los puntos situados en un plano dado, que están a una distancia especificada de un punto dado en el plano. En cada caso el punto dado se llama centro y la distancia dada el radio de la superficie esférica o de la circunferencia. Dos o más superficies esféricas o circunferencias con el mismo centro se dice que son concéntricas.



Circunferencia



Superficie esférica

$PQ_1 = PQ_2 = PQ_3 = PQ_4 =$ radio

<u>Teorema</u> <u>13-1</u>. La intersección de una superficie esférica con un plano que pasa por su centro es una circunferencia con el mismo centro y el mismo radio.

Demostración: Puesto que la superficie esférica incluye <u>todos</u> los puntos que están a una distancia del centro igual al radio, su intersección con un plano que pasa por el centro será el conjunto de todos los puntos <u>situados</u> <u>en</u> <u>el</u> <u>plano</u> a dicha distancia del centro, esto es, la circunferencia situada en este plano, y con el mismo centro y el mismo radio.

<u>Definición</u>: La circunferencia de intersección de una superficie esférica con un plano que pasa por su centro se llama <u>circunferencia</u> <u>máxima</u> de la superficie esférica.

Hay dos tipos de segmentos asociados con las superficies esféricas y con las circunferencias.

<u>Definiciones</u>: Una <u>cuerda</u> de una circunferencia o de una superficie esférica es un segmento cuyos extremos son puntos de la circunferencia o de la superficie esférica. La recta que contiene una cuerda es una <u>secante</u>. Un <u>diámetro</u> es una cuerda que contiene el centro. Un <u>radio</u> es un segmento, uno de cuyos extremos es el centro y el otro un punto de la circunferencia o de la superficie esférica. Este último extremo se llama <u>extremo</u> <u>exterior</u> del radio.

El uso de la palabra "radio" para significar tanto un segmento como la longitud de éste, está de acuerdo con el convenio introducido en el capítulo 11. Del mismo modo usamos "diámetro" para referirnos tanto a una cuerda que pasa por el centro, como a su longitud.

Nos referimos a una circunferencia diciendo circunferencia C, o simplemente C (C se usa con más frecuencia). Al plantear problemas es conveniente usar el convenio de que, circunferencia P denota la circunferencia cuyo centro es P, con tal que no haya ambigüedad respecto de la circunferencia a que nos referimos. Observaciones análogas se aplican a las superficies esféricas.

Conjunto de problemas 13-1

1. Estudia la sección 13-1 para que puedas decidir si los siguientes enunciados son ciertos o falsos:
   a. En una superficie esférica hay exactamente una circunferencia máxima.
   b. Toda cuerda de una circunferencia contiene dos puntos de la circunferencia.
   c. Un radio de una circunferencia es una cuerda de la circunferencia.
   d. El centro de una circunferencia biseca a una sola de las cuerdas de la circunferencia.
   e. Una secante de una circunferencia puede intersecar a la circunferencia en un punto solamente.
   f. Todos los radios de una superficie esférica son congruentes.
   g. Una cuerda de una superficie esférica puede ser más larga que un radio de la superficie esférica.
   h. Si una superficie esférica y una circunferencia tienen el mismo centro y se intersecan, entonces la intersección es una circunferencia.
2. Utilizando tu previo conocimiento acerca de las circunferencias y las superficies esféricas, así como lo que se dice en tu texto, decide si los enunciados siguientes son verdaderos o falsos:
   a. Si una recta interseca a una circunferencia en un punto, la interseca en dos puntos.
   b. La intersección de una recta y una circunferencia puede ser vacía.
   c. Una recta en el plano de una circunferencia y que pase por el centro de la circunferencia tiene dos puntos comunes con ella.
   d. Una circunferencia y una recta pueden tener tres puntos comunes.

e. Si un plano interseca a una superficie esférica en dos puntos al menos, entonces la intersección es una recta.
f. Un plano no puede intersecar a una superficie esférica en un punto.
g. Si un plano interseca a un radio de una superficie esférica en su punto medio, entonces la intersección del plano y de la superficie esférica es una circunferencia.
h. Si dos circunferencias se intersecan, su intersección consiste en dos puntos.

3. Una ciudad ha sido planificada en bloques cuadrados de 100 yardas por cada lado. No tengas en cuenta la anchura de las calles en los problemas que siguen.
   a. Describe la localización de los puntos que distan 200 yardas (en vuelo de pájaro) de una intersección de calles dada.
   b. Describe la localización de los puntos a que un taxi puede llegar recorriendo 200 yardas a partir de una intersección de calles dada. (Las leyes de circulación de la ciudad prohiben las vueltas en forma de U.)

4. Demuestra el teorema: Un diámetro de una circunferencia es su cuerda de máxima longitud.

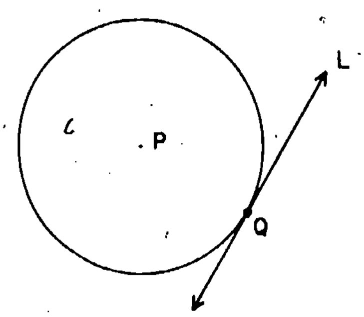
13-2. Rectas tangentes; el teorema fundamental para las circunferencias

Definiciones: El interior de una circunferencia es la reunión del centro y del conjunto de todos los puntos del plano de la circunferencia cuyas distancias al centro son menores que el radio. El exterior de la circunferencia es el conjunto de todos los puntos del plano de la circunferencia cuyas distancias al centro son mayores que el radio. La reunión de la circunferencia y de su interior es una <u>región circular cerrada</u>, o un <u>círculo</u>.

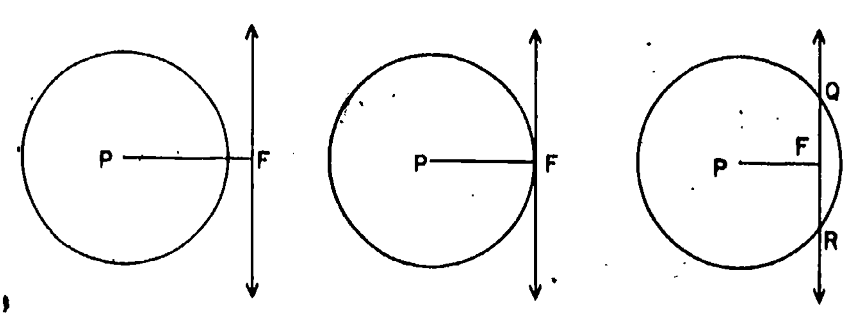
De estas definiciones se deduce que un punto en el plano de una circunferencia o está en el interior de la circunferencia, o en la circunferencia, o en el exterior de la circunferencia. (Con frecuencia diremos "dentro" en vez de "en el interior de", etc.)

<u>Definiciones</u>: Una <u>tangente</u> a una circunferencia es una recta en el plano de la circunferencia que interseca a ésta solamente en un punto. Este punto se llama <u>punto de tangencia</u> o <u>punto de contacto</u>, y decimos que la recta y la circunferencia <u>son tangentes</u> en este punto.

En la figura, L es tangente a la circunferencia en Q.



Necesitamos ahora averiguar qué posiciones relativas pueden tener una recta y una circunferencia en el mismo plano. Las tres figuras siguientes parecen mostrar todas las posibilidades:



En cada caso, P es el centro de la circunferencia, y F es el pie de la perpendicular desde P a la recta. Veremos pronto que este punto F, el pie de la perpendicular, es la clave de la situación. Si F está fuera de la circunferencia, como en la primera figura, entonces todos los demás puntos de la recta están también fuera, y la recta y la circunferencia no se intersecan. Si F está en la circunferencia, entonces la recta es una recta tangente, como sucede en la segunda figura, y el punto de tangencia es F. Si F está dentro de la circunferencia, como acontece en la tercera figura, entonces la recta es una recta secante, y los puntos de intersección equidistan del punto F. Para poder justificar todo lo dicho, es necesario demostrar el teorema siguiente:

Teorema 13-2. Dadas una recta y una circunferencia en el mismo plano, sea P el centro de la circunferencia y sea F el pie de la perpendicular trazada por P, a la recta. Entonces, o bien

(1) Todo punto de la recta es exterior a la circunferencia, o

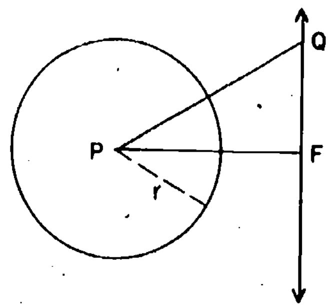
(2) F está en la circunferencia, y la recta es tangente a la circunferencia en el punto F, o

(3) F es interior a la circunferencia, y la recta interseca a la circunferencia exactamente en dos puntos que equidistan de F.

Este teorema es largo, pero su longitud vale la pena, porque una vez demostrado, todas las propiedades elementales referentes a secantes, tangentes y cuerdas son simples corolarios de él.

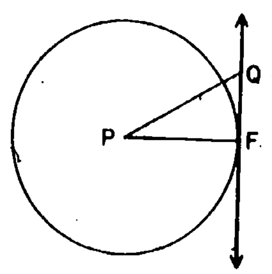
Demostración: Para ello, mostraremos que si F es exterior a la circunferencia, entonces vale (1); si F está en la circunferencia, entonces vale (2); y si F es interior a la circunferencia, entonces vale (3).

Si F es exterior a la circunferencia, entonces vale (1).



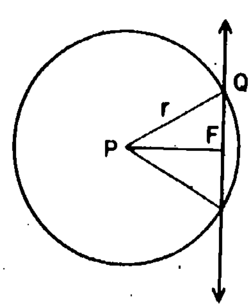
Sea r el radio de la circunferencia. Entonces PF > r. Por el teorema 7-6, el segmento $\overline{PF}$ es el más corto entre los que van desde P a la recta. Si Q es otro punto cualquiera de la recta, entonces PQ > PF. Por consiguiente, PQ > r, y Q es exterior a la circunferencia.

Si F está en la circunferencia, entonces vale (2).



Aquí tenemos PF = r. Si Q es otro punto cualquiera de la recta, entonces PQ > r. (¿Por qué?) Por tanto, la recta es tangente a la circunferencia, y el punto de tangencia es F.

Si F es interior a la circunferencia, entonces vale (3).



La demostración es como sigue: Si Q está a la vez en la recta y en la circunferencia, entonces ΔPFQ es un triángulo rectángulo cuyo ángulo recto está en F. Por el teorema de Pitágoras,

$$PF^2 + FQ^2 = r^2,$$

de modo que

$$FQ^2 = r^2 - PF^2,$$

y

$$FQ = \sqrt{r^2 - PF^2}.$$

(El número bajo el signo radical es positivo, porque $PF < r$.) Así que, cualquier punto Q común a la recta y a la circunferencia, tiene que satisfacer a esta última ecuación.

Inversamente, cualquier punto Q que esté en la recta y satisfaga a la ecuación, tiene que estar a la distancia r de P, como es fácil mostrar sin más que retroceder en el proceso algebraico que nos ha dado la última fórmula. La ecuación

$$FQ = \sqrt{r^2 - PF^2}$$

es, por consiguiente, la que caracteriza los puntos Q que son intersecciones de la recta y la circunferencia.

Por el teorema de la localización de puntos, hay exactamente dos tales puntos, uno en cada uno de los dos rayos que inciden en F. Evidentemente, son puntos equidistantes de F.

Este razonamiento no se aplica cuando la recta pasa por el punto P, pero en este caso se tiene $P = F$, $PQ = FQ = r$, y hay dos puntos Q también, como antes.

Podemos ahora pasar a nuestros primeros teoremas básicos sobre tangentes y cuerdas que son corolarios del teorema 13-2. En todos ellos se entenderá que C es una circunferencia en un plano E, con centro en P. Para demostrarlos, sólo necesitas tener en cuenta el teorema 13-2 y ver cuál de las tres condiciones de la conclusión del teorema se aplica al caso en consideración.

Corolario 13-2-1. Toda recta tangente a C es perpendicular al radio trazado por el punto de contacto.

Aquí es la condición (2) la que se aplica; y ello significa que la tangente y el radio son perpendiculares.

Corolario 13-2-2. Toda recta en E, perpendicular a un radio en su extremo exterior, es tangente a la circunferencia.

Puesto que el extremo exterior del radio debe ser F, se aplica entonces la condición (2), y tenemos la tangencia.

Corolario 13-2-3. Toda perpendicular desde el centro de C a una cuerda biseca a esta cuerda.

En este caso se aplica la condición (3). (En los casos (1) y (2) no hay cuerda alguna.)

Corolario 13-2-4. El segmento que une el centro de C con el punto medio de una cuerda es perpendicular a la cuerda.

Utiliza el corolario 13-2-3 ó la condición (3).

Corolario 13-2-5. En el plano de una circunferencia, la mediatriz de una cuerda pasa por el centro de la circunferencia.

Utiliza los corolarios 13-2-4 ó 13-2-3, o la condición (3).

Corolario 13-2-6. Si una recta en el plano de una circunferencia interseca al interior de la circunferencia, entonces corta a la circunferencia en exactamente dos puntos.

Aquí también se aplica la condición (3). (En los casos (1) y (2) la recta no interseca al interior de la circunferencia.)

Definición: Circunferencias con radios congruentes, se llaman congruentes.

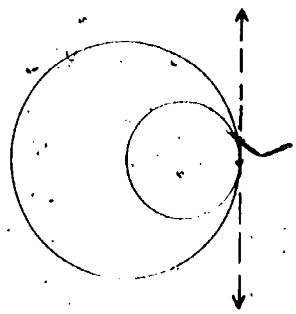
Por distancia de una cuerda al centro de una circunferencia, entendemos la distancia entre el centro y la recta que contiene la cuerda, tal como fue definida en la sección 7-. Las demostraciones de los dos teoremas siguientes se dejan para que tú las hagas:

Teorema 13-3. En la misma circunferencia o en circunferencias congruentes, las cuerdas equidistantes del centro son congruentes.

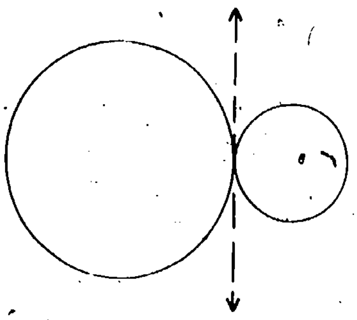
Teorema 13-4. En la misma circunferencia o en circunferencias congruentes, cada dos cuerdas congruentes equidistan del centro.

Las definiciones siguientes son útiles en el estudio de las rectas y las circunferencias:

Definiciones: Dos circunferencias son tangentes si cada una de ellas es tangente a la misma recta en el mismo punto. Si dos circunferencias tangentes son coplanarias, se dirán tangentes exteriormente o interiormente según que sus centros estén a distinto lado o del mismo lado de la tangente común.



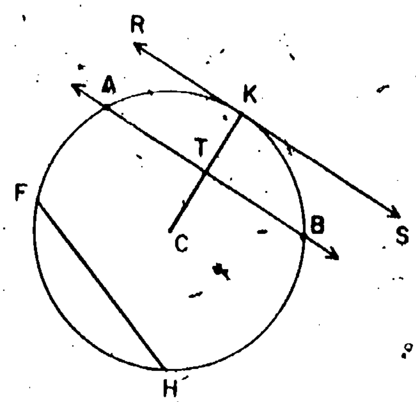
Tangente interiormente



Tangente exteriormente

Conjunto de problemas 13-2

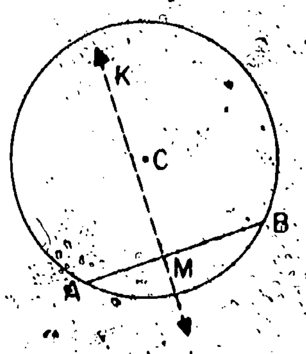
1. Indica el número del teorema o corolario que justifica cada una de las conclusiones siguientes: (C es el centro de la circunferencia en la figura plana.)



   a. Si TA = TB, entonces $\overline{CK} \perp \overline{AB}$.
   b. Si $\overleftrightarrow{RS} \perp \overline{CK}$, entonces $\overleftrightarrow{RS}$ es tangente a la circunferencia.
   c. Si T está en el interior de la circunferencia, entonces $\overleftrightarrow{KC}$ intersecará a la circunferencia en exactamente otro punto distinto de K.
   d. La mediatriz de $\overline{FH}$ contiene a C.
   e. Si $\overline{AB}$ y $\overline{FH}$ equidistan de C, entonces $\overline{AB} \cong \overline{FH}$.
   f. Si $\overleftrightarrow{RS}$ es tangente a la circunferencia C, entonces $\overline{CK} \perp \overleftrightarrow{RS}$.
   g. Si $\overline{CK} \perp \overline{AB}$, entonces AT = TB.
   h. Si $\overline{AB} \cong \overline{FH}$, entonces $\overline{AB}$ y $\overline{FH}$ equidistan de C.

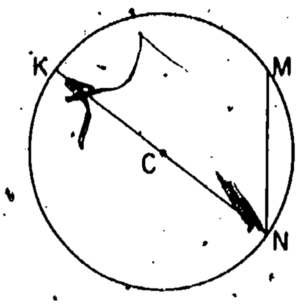
2. Demuestra el corolario 13-2-3: Toda perpendicular desde el centro, C, de una circunferencia, biseca a la cuerda.

3. Utiliza la figura adjunta para demostrar el corolario 13-2-5: En el plano de una circunferencia, la mediatriz de una cuerda pasa por el centro de la circunferencia.



4. Dada una circunferencia, ¿cómo se puede determinar su centro?

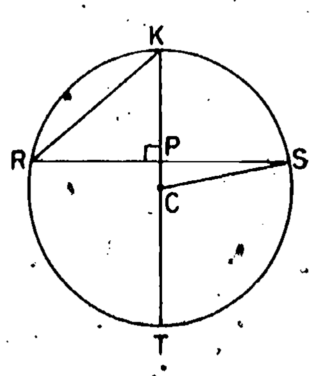
5. En la circunferencia C, KN = 40, y MN = 24. ¿A qué distancia está $\overline{MN}$ del centro de la circunferencia?



6. En una circunferencia cuyo diámetro tiene 30 pulgadas, se traza una cuerda perpendicular a un radio. La distancia de la intersección de la cuerda y el radio al extremo exterior del radio es de 3 pulgadas. Determina la longitud de la cuerda.

7. Se da la figura adjunta, con C el centro de la circunferencia y $\overline{KT} \perp \overline{RS}$. Contesta los diez problemas de la manera indicada a continuación:
Escribe "A" si se da más información que la necesaria para resolver el problema.
Escribe "B" si la información dada es insuficiente para resolver el problema.
Escribe "C" si la información es suficiente y no hay información innecesaria en el enunciado.
Escribe "D" si la información es contradictoria.
(No es necesario que resuelvas los problemas.)

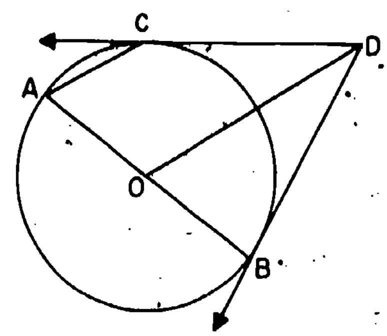
a. KP = 4, PC = 1, CT = 6, KT = ?
b. RP = 5, RS = ?
c. CT = 13, CP = 5, RS = ?
d. KP = 18, RS = 48, KC = 25, RK = ?
e. PC = 3.5, RS = 24, RK = ?
f. KT = 40, RP = 16, CS = ?
g. CS = 8, TK = 16, PC = ?
h. RK = 20, RS = 32, KP = 13, KT = ?
i. RS = 6, KC = 5, PT = ?
j. PT = 5, CS = 6, RS = ?



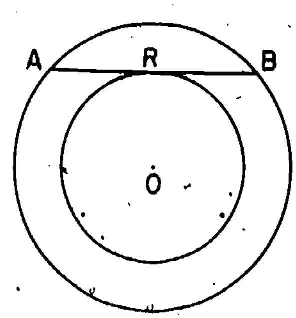
8. En una circunferencia con centro P, una cuerda $\overline{AB}$ es paralela a una tangente y corta al radio que pasa por el punto de tangencia en su punto medio. Si AB = 12, determina el radio de la circunferencia.

9. Demuestra que las tangentes a una circunferencia en los extremos de un diámetro son paralelas.

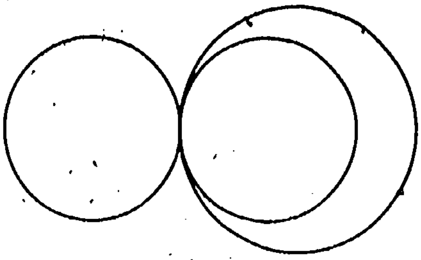
*10. En la circunferencia O con centro O, $\overline{AB}$ es un diámetro y $\overline{AC}$ es una cuerda distinta trazada por A. Si $\overleftrightarrow{CD}$ es la tangente en C, y $\overleftrightarrow{DO} \parallel \overleftrightarrow{AC}$, demuestra que $\overleftrightarrow{DB}$ es tangente en B.



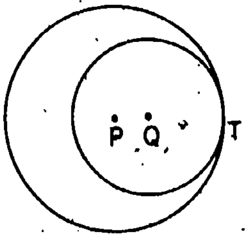
11. Respecto de las circunferencias concéntricas de la figura adjunta, demuestra que todas las cuerdas de la circunferencia mayor que son tangentes a la menor, están bisecadas por el punto de contacto. De otra manera: Para cada circunferencia el centro es O. $\overline{AB}$ es una cuerda de la circunferencia mayor, que es tangente a la circunferencia menor en R. Demuestra que AR = BR.



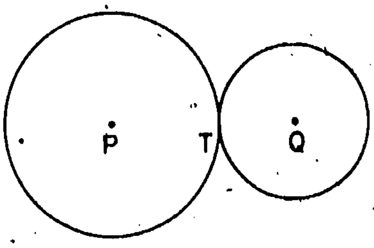
12. En la figura adjunta se presenta una cierta disposición de tres circunferencias tal que una cualquiera de ellas es tangente a las otras dos. Dibuja otras tres disposiciones posibles de las tres circunferencias con cada una de ellas tangente a las otras dos.



*13. Demuestra que la recta de los centros de dos circunferencias tangentes contiene al punto de contacto. (Sugerencia: Traza la tangente común.)

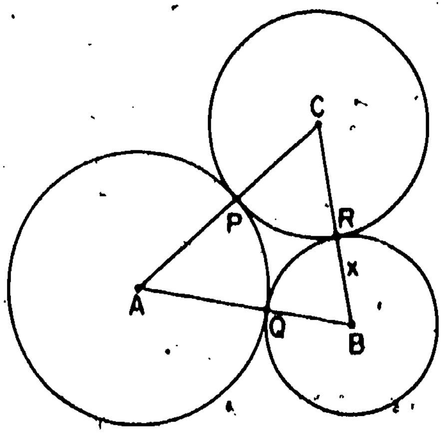


Caso I



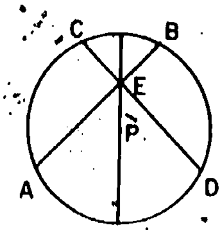
Caso II

14. En la figura adjunta, A, B y C son los centros de las circunferencias. AB = 14, BC = 10, y AC = 18. Determina el radio de cada circunferencia.

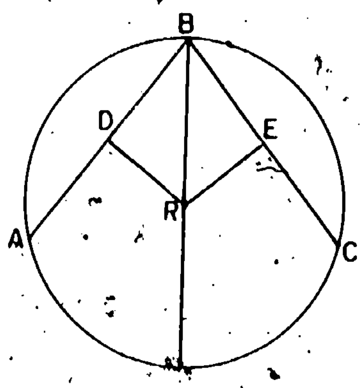


15. Demuestra el teorema 13-3: En la misma circunferencia o en circunferencias congruentes, las cuerdas equidistantes del centro son congruentes.

*16. En la figura adjunta, P es el centro de la circunferencia, y $m\angle AEP = m\angle DEP$. Demuestra que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

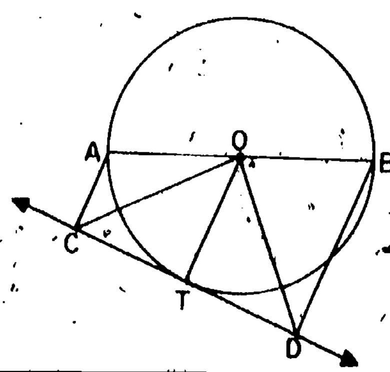


17. En la circunferencia R, $\overline{RD} \perp \overline{AB}$, $\overline{RE} \perp \overline{BC}$, y $RD = RE$. Demuestra que $DA = EC$.



18. Demuestra que los puntos medios de todas las cuerdas congruentes de una circunferencia cualquiera están en una circunferencia concéntrica con la original y con radio igual a la distancia de una cuerda al centro; demuestra también que las cuerdas son todas tangentes a esta circunferencia interior.

*19. Se da: $\overline{AB}$ es un diámetro de la circunferencia O, $\overleftrightarrow{CD}$ es tangente a O en T, $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{CD}$, y $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{CD}$. Demuestra que $\overline{CO} \cong \overline{DO}$.

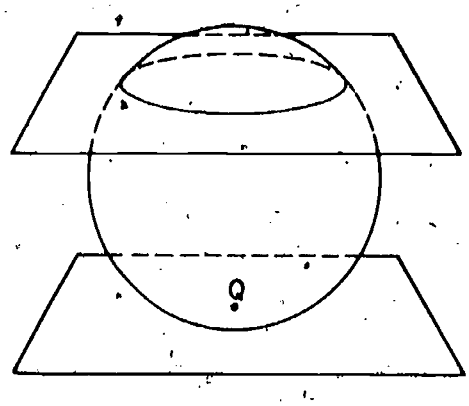


13-3. Planos tangentes; el teorema fundamental para las superficies esféricas

Una vez que hayas estudiado y entendido lo expuesto en la última sección, encontrarás muy pocas dificultades en la que vamos a iniciar. Veremos que superficies esféricas y planos en el espacio se comportan de una manera muy parecida a las circunferencias y rectas en el plano, y que la analogía entre los teoremas de la sección anterior y los de ésta es muy íntima.

Definiciones: El interior de una superficie esférica es la reunión de su centro y el conjunto de todos los puntos cuyas distancias al centro son menores que el radio. El exterior de la superficie esférica es el conjunto de todos los puntos cuyas distancias al centro son mayores que el radio.

Definiciones: Un plano que interseca a una superficie esférica en un solo punto se llama plano tangente a la superficie esférica. Si el plano tangente interseca a la superficie esférica en el punto Q, entonces se dice que el plano es tangente a la superficie esférica en Q. Q se llama punto de tangencia, o punto de contacto.



El teorema fundamental referente a superficies esféricas y planos es el siguiente:

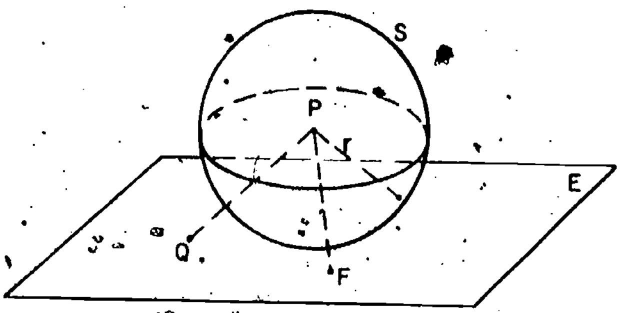
Teorema 13-5. Dados un plano E y una superficie esférica S con centro P, sea F el pie del segmento perpendicular desde P a E. Entonces, o bien

(1) Todo punto de E es exterior a S, o

(2) F está en S, y E es tangente a S en F, o

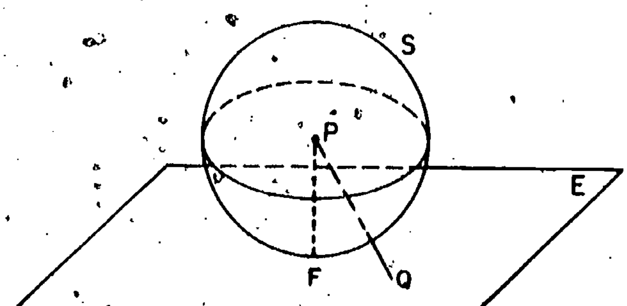
(3) F es interior a S, y la intersección de S y E consiste en una circunferencia con centro F.

Demostración: Si F es exterior a S, entonces vale (1).



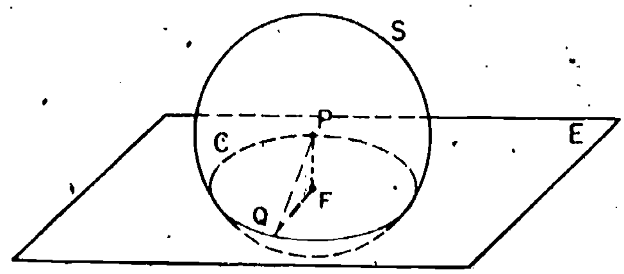
La demostración sigue, casi palabra por palabra, la correspondiente a la circunferencia en el teorema 13-2. El único cambio importante es el apoyarse en el teorema 8-11 (segmento más corto desde un punto a un plano) en vez de hacerlo en el teorema 7-5.

Si F está en S, entonces vale (2).

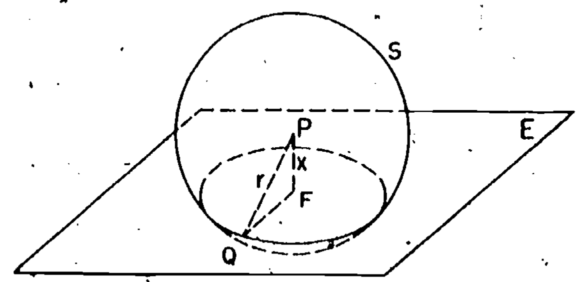


Aquí también, la prueba es casi idéntica a la del teorema 13-2.

Si F es interior a S, entonces vale (3).



Sea Q un punto cualquiera contenido en ambos E y S. Sea r el radio de S, y sea x = PF.



Entonces $\angle PFQ$ es un ángulo recto, porque toda recta en E, pasando por F, es perpendicular a $\overleftrightarrow{PF}$. Por tanto,

$$FQ^2 + x^2 = r^2,$$

y

$$FQ = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Puesto que Q es un punto cualquiera de la intersección de E y S, entonces todo punto Q de dicha intersección es tal, que FQ es constante. Por consiguiente, todo punto de la intersección está en la circunferencia con centro en F y radio $\sqrt{r^2 - x^2}$.

Aunque hemos mostrado que todo punto de la intersección está en la circunferencia, no hemos probado que este conjunto de puntos es la circunferencia. Esto es, sería concebible que hubiera algunos puntos en la circunferencia que no fueran puntos de la intersección. Vamos a probar ahora que esto no es posible, mostrando que si Q está en la circunferencia, tiene que ser un punto de la intersección.

Supongamos que Q está en la circunferencia cuyo centro es F y cuyo radio es $\sqrt{r^2 - x^2}$. Entonces $\angle PFQ$ es un ángulo recto, como antes, de modo que

$$PQ^2 = x^2 + \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 = r^2,$$

$$PQ = \sqrt{r^2} = r, \text{ puesto que } r > 0.$$

Por consiguiente, Q está en la superficie esférica. Luego, todo punto de la circunferencia pertenece a la intersección. Por lo tanto, la circunferencia es precisamente dicha intersección, que es lo que se quería demostrar.

Nuestros teoremas básicos sobre tangentes a una superficie esférica son, todos ellos, corolarios del teorema 13-5. En todos esos corolarios, deberá entenderse que S es una superficie esférica con centro en P.

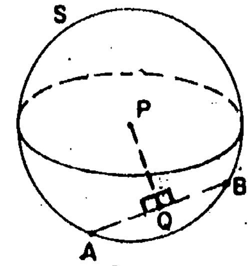
Corolario 13-5-1. Un plano tangente a S es perpendicular al radio trazado por el punto de contacto.

Corolario 13-5-2. Un plano perpendicular a un radio en su extremo exterior es tangente a S.

Corolario 13-5-3. Una perpendicular desde P a una cuerda de S biseca a la cuerda.

Dato: $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$

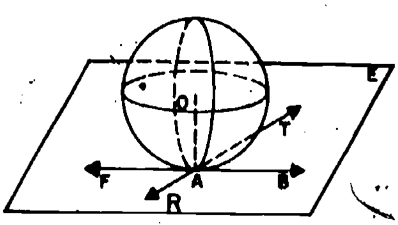
Demuestra que AQ = BQ.



Corolario 13-5-4. El segmento que une el centro de S con el punto medio de una cuerda es perpendicular a la cuerda.

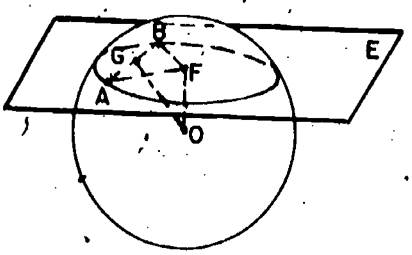
Conjunto de problemas 13-3

1. La superficie esférica O es tangente al plano E en el punto A. $\overleftrightarrow{FB}$ y $\overleftrightarrow{RT}$ son rectas de E trazadas por A. ¿Cuál es la relación de $\overleftrightarrow{OA}$ con $\overleftrightarrow{FB}$ y con $\overleftrightarrow{RT}$?



2. En una superficie esférica cuyo radio es 10, un segmento desde el centro perpendicular a una cuerda tiene una longitud igual a 6. ¿Cuál es la longitud de la cuerda?
3. En una superficie esférica cuyo radio tiene 5 pulgadas, ¿cuál es el radio de la circunferencia marcada en la superficie esférica por un plano que dista 3 pulgadas del centro?
4. Demuestra que las circunferencias determinadas sobre una superficie esférica por planos equidistantes del centro de la superficie, son congruentes.

*5. En la figura adjunta, el plano E interseca a la superficie esférica cuyo centro es O. A y B son dos puntos de la intersección. F está en el plano E. $\overline{OF} \perp E$ y $\overline{AF} \perp \overline{BF}$. Si AB = 5 y OF = AF, determina el radio de la superficie esférica y también $m\angle AOB$. Si G es el punto medio de $\overline{AB}$, determina OG.



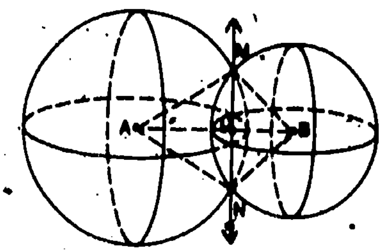
*6. Se dan una superficie esférica y tres puntos sobre ella. Explica cómo se halla el centro y el radio de la circunferencia determinada por dichos puntos. Explica cómo se pueden determinar el centro y el radio de la superficie esférica.

*7. Sabiendo que el plano E es tangente a la superficie esférica S en el punto T, y que F es un plano cualquiera distinto de E y que contiene a T, demuestra que: (a) el plano F interseca a la superficie esférica S y al plano E en una circunferencia y en una recta, respectivamente; y (b) la recta de intersección es tangente a la circunferencia de intersección.

8. Muestra que dos circunferencias máximas cualesquiera de una superficie esférica se intersecan en los puntos extremos de un diámetro de la superficie esférica.

*9. Dos circunferencias máximas se dice que son perpendiculares si están en planos perpendiculares. Demuestra que, si se tienen dos circunferencias máximas cualesquiera, existe otra circunferencia máxima perpendicular a ambas. Si dos circunferencias máximas sobre la tierra son meridianos (pasan por los polos), ¿cuál es la circunferencia máxima perpendicular a los dos?

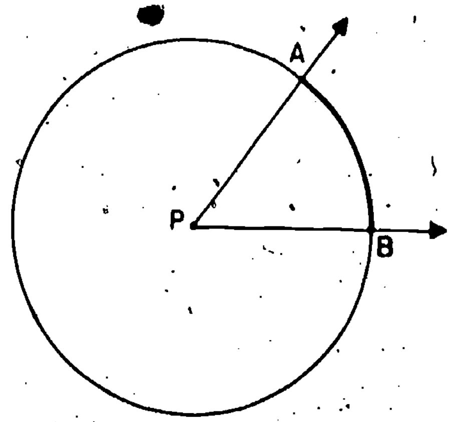
*10. En la figura adjunta, A y B son los centros de dos superficies esféricas que se cortan. Describe brevemente la intersección. M y N son puntos de la intersección. O es un punto en el plano de la intersección y está alineado con A y B. Si el radio de la superficie esférica A es 13, el de la superficie esférica B es $5\sqrt{2}$, y $\overline{MB} \perp \overline{NB}$, determina la distancia entre los centros de las superficies esféricas.



13-4. Arcos de circunferencias

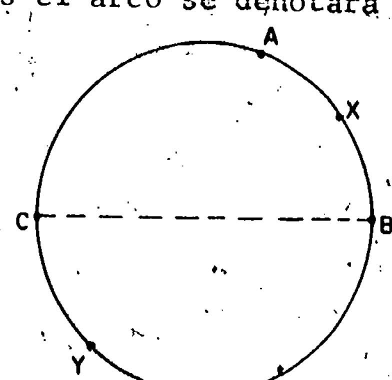
Hasta ahora en este capítulo hemos podido tratar las circunferencias y las superficies esféricas de una manera análoga. En el resto del capítulo, nos limitaremos exclusivamente a las circunferencias. Las cuestiones que estudiaremos tienen sus correspondientes analogías en la teoría de las superficies esféricas, pero son demasiado complicadas para ser consideradas en un curso inicial.

Definición: Un ángulo central de una circunferencia dada es un ángulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia.



Definiciones: Si A y B son dos puntos de una circunferencia con centro P, que no sean extremos de un diámetro, la reunión de A, B y todos los puntos de la circunferencia situados en el interior del $\angle APB$, es un arco menor de la circunferencia. La reunión de A, B y todos los puntos de la circunferencia situados en el exterior del $\angle APB$, es un arco mayor de la circunferencia. Si $\overline{AB}$ es un diámetro, la reunión de A, B y todos los puntos de la circunferencia situados en uno de los dos semiplanos del plano de la circunferencia, con arista $\overleftrightarrow{AB}$, es una semicircunferencia. Un arco es o un arco menor, o un arco mayor, o una semicircunferencia. A y B son los puntos extremos del arco.

Una notación sencilla para designar un arco cuyos extremos son A y B es: $\widehat{AB}$. Esta notación simple es siempre ambigua, porque sobre la misma circunferencia hay siempre dos arcos distintos con los puntos extremos A y B. Algunas veces estará claro por el contexto a cual de los dos nos referimos. Si no, tomaremos un punto cualquiera X en el arco, distinto de los extremos, y entonces el arco se denotará con $\widehat{AXB}$.

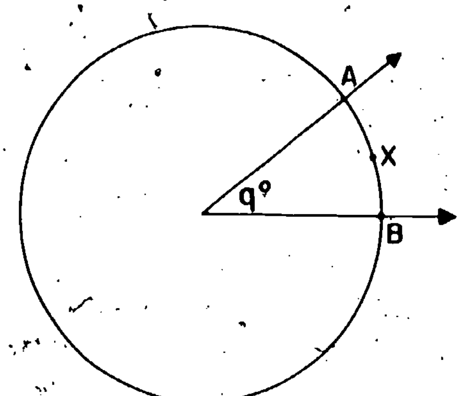


Por ejemplo, en la figura, $\widehat{AXB}$ es un arco menor, $\widehat{AYB}$ es el arco mayor correspondiente; y los arcos $\widehat{CAB}$ y $\widehat{CYB}$ son semicircunferencias.

La justificación de las denominaciones "menor" y "mayor" es obvia en cuanto se dibujan varios arcos de cada clase. Un arco mayor, intuitivamente, es un arco "más grande" que un arco menor. Esta relación se hará más explícita mediante la próxima definición.

<u>Definición</u>: La <u>medida en grados</u> $m\widehat{AXB}$ de un arco $\widehat{AXB}$ se define del modo siguiente:

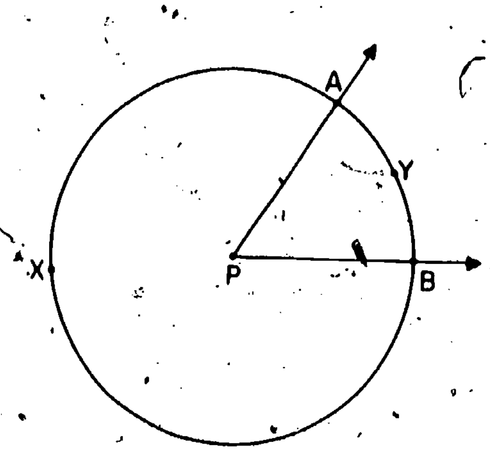
(1) Si $\widehat{AXB}$ es un arco menor, entonces $m\widehat{AXB}$ es la medida del ángulo central correspondiente.



$m\widehat{AXB} = q$

(2) Si $\widehat{AXB}$ es una semicircunferencia, entonces $m\widehat{AXB} = 180$.

(3) Si $\widehat{AXB}$ es un arco mayor, y $\widehat{AYB}$ es el arco menor correspondiente, entonces $m\widehat{AXB} = 360 - m\widehat{AYB}$.

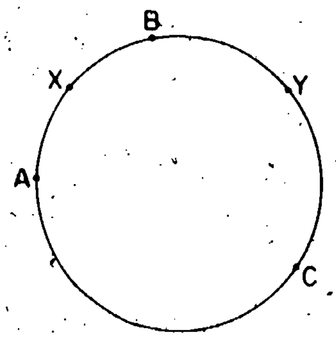


En la figura anterior, $m\angle APB$ es aproximadamente 60. Por consiguiente, $m\widehat{AYB}$ es aproximadamente 60 y $m\widehat{AXB}$ es aproximadamente 300.

De ahora en adelante, se dirá que $m\widehat{AXB}$ es sencillamente la <u>medida</u> del arco $\widehat{AXB}$. Observa que un arco es menor o mayor según su medida sea menor o mayor que 180.

El siguiente teorema es sencillo y plausible, pero su demostración es asombrosamente tediosa. Lo enunciaremos sin la demostración, y lo consideraremos, prácticamente, como un postulado:

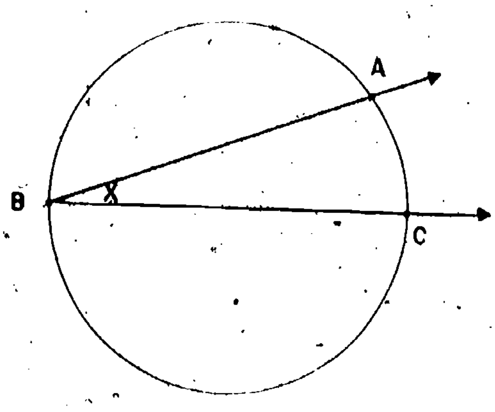
<u>Teorema 13-6</u>. Si $\widehat{AB}$ y $\widehat{BC}$ son arcos de la misma circunferencia que tienen común sólo el punto B, y si su reunión es un arco $\widehat{AC}$, entonces $m\widehat{AB} + m\widehat{BC} = m\widehat{AC}$.

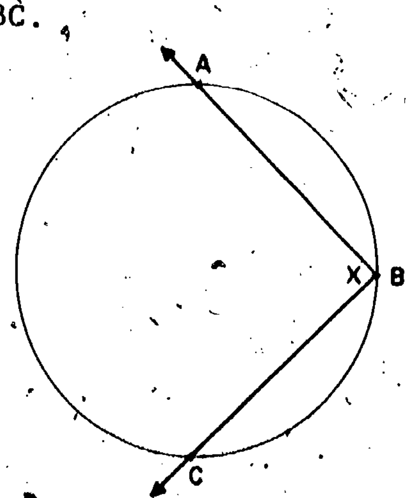


$m\widehat{AXB} + m\widehat{BYC} = m\widehat{ABC}$

Observa que en el caso cuando $\widehat{AC}$ es un arco menor, el teorema se consigue del postulado de adición de ángulos. La demostración en el caso general es más complicada.

En cada una de las figuras siguientes, el ángulo x se dice que está inscrito en el arco $\widehat{ABC}$.

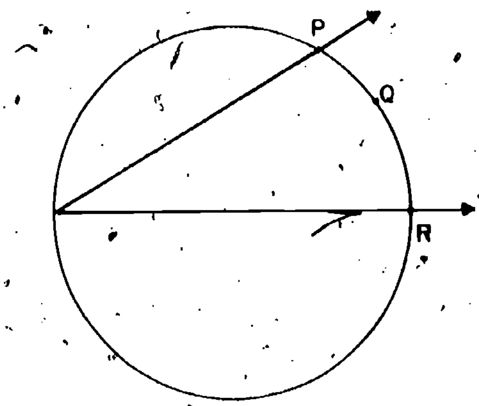


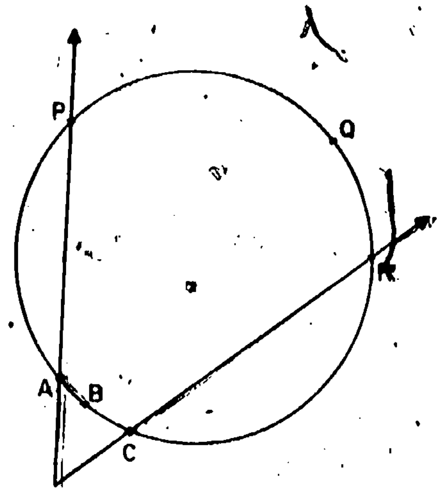


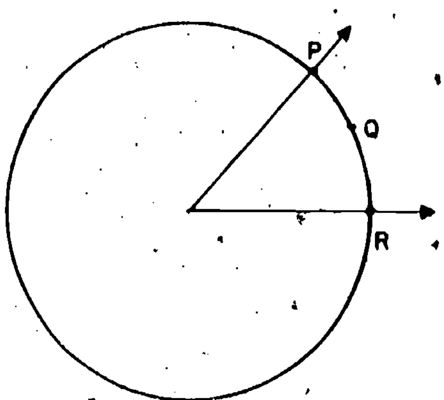
<u>Definición</u>: Un ángulo está <u>inscrito</u> en un arco si (1) los dos extremos del arco están en los dos lados del ángulo, y (2) el vértice del ángulo es un punto, pero no un extremo, de dicho arco. Más concisamente, $\angle ABC$ está inscrito en $\widehat{ABC}$.

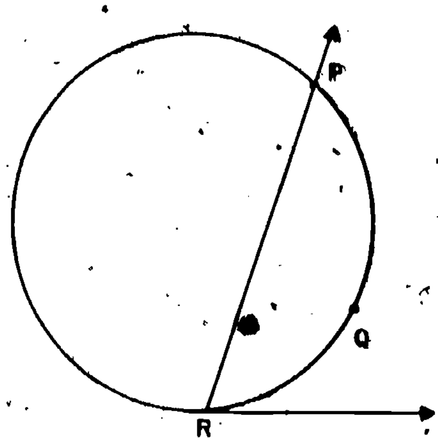
En la primera de las dos figuras anteriores, el ángulo está inscrito en un arco mayor, y en la segunda figura el ángulo está inscrito en una semicircunferencia.

En cada una de las figuras a continuación, se dice que la abertura del ángulo intercepta $\widehat{PQR}$.







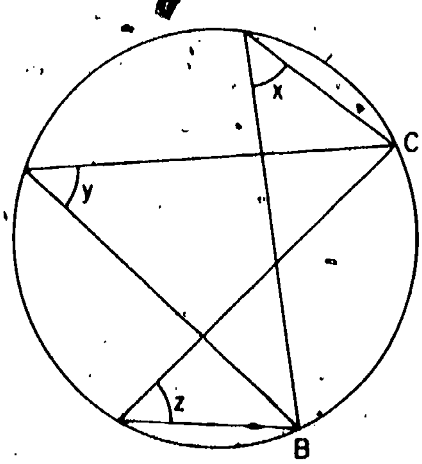


En el primer caso, el ángulo es inscrito; en el segundo caso, el vértice es exterior a la circunferencia; en el tercer caso, el ángulo es un ángulo central; y en el último caso, un lado del ángulo es tangente a la circunferencia. En el segundo caso, la abertura del ángulo intercepta no sólo el arco $\widehat{PQR}$ sino también el arco $\widehat{ABC}$. . .

Esas figuras dan la idea general. Presentaremos ahora la definición precisa de lo que significa decir que un ángulo intercepta un arco. Procura comprobar cuidadosamente que la definición abarca realmente todos los cuatro casos anteriores.

<u>Definición</u>: Un ángulo <u>intercepta</u> un arco si (1) los puntos extremos del arco están sobre el ángulo, (2) cada lado del ángulo contiene al menos un extremo del arco, y (3) exceptuados los extremos, el arco está en el interior del ángulo.

La razón por la cual consideramos los arcos interceptados por ángulos, es, que en ciertas condiciones, existe una relación simple entre la medida de un ángulo y la medida del arco.

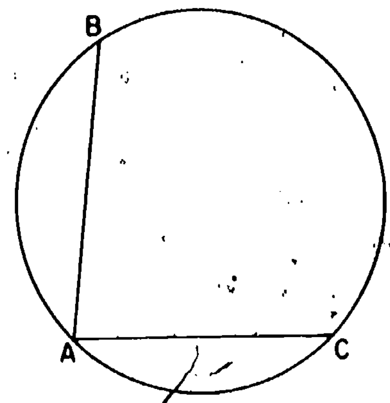


En la figura anterior, vemos tres ángulos inscritos, $\angle x$, $\angle y$, $\angle z$, y todos ellos interceptan el mismo arco $\widehat{BC}$. Parece como si estos ángulos fueran congruentes. Y en efecto esto es lo que siempre acontece. Ello es un corolario del teorema siguiente:

<u>Teorema</u> <u>13-7</u>. La medida de un ángulo inscrito es la mitad de la medida de su arco interceptado.

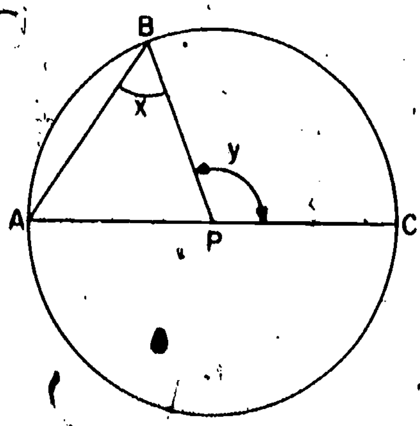
De otra manera: Sea $\angle A$ un ángulo inscrito en un arco de una circunferencia, interceptando el arco $\widehat{BC}$. Entonces

$$m\angle A = \frac{1}{2} m\widehat{BC}.$$



Para demostrar esto mediante los teoremas anteriores, consideraremos primero un ángulo inscrito de una manera especial.

Demostración: Caso 1. Supongamos que un lado del $\angle A$ contiene un diámetro de la circunferencia, como en la figura que sigue:



Sean $\angle x$ y $\angle y$ como en la figura. Entonces

$$m\angle A + m\angle x = m\angle y,$$

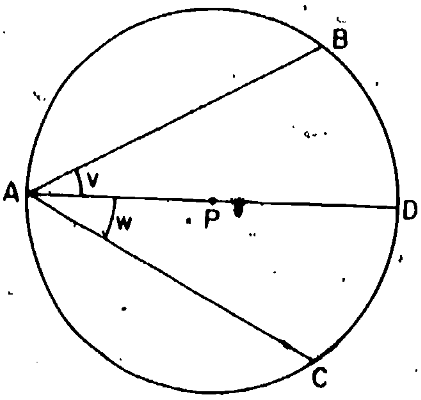
por el corolario 9-13-3. PA = PB, porque A y B están en la circunferencia. Puesto que los ángulos en la base de un triángulo isósceles son congruentes, tenemos $m\angle A = m\angle x$. Por consiguiente, $2(m\angle A) = m\angle y$,

y
$$m\angle A = \frac{1}{2}(m\angle y) = \frac{1}{2}(m\widehat{BC}),$$

que es lo que se quería demostrar.

Ahora sabemos que el teorema vale siempre en el caso 1. Utilizando este resultado, podemos mostrar que el teorema vale en todos los casos.

Caso 2. Supongamos que B y C están a distintos lados del diámetro que pasa por A, como en la figura siguiente:



Entonces
$$m\angle A = m\angle v + m\angle w,$$
y
$$m\widehat{BC} = m\widehat{BD} + m\widehat{DC}.$$

(¿Por qué, en cada caso?) Por el caso 1, sabemos que

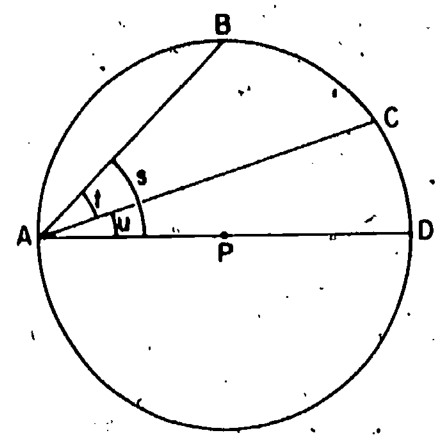
$$m\angle v = \frac{1}{2}\, m\widehat{BD}$$
y
$$m\angle w = \frac{1}{2}\, m\widehat{DC}.$$

Sumando las dos ecuaciones, obtenemos

$$m\angle A = \frac{1}{2}\, m\widehat{BD} + \frac{1}{2}\, m\widehat{DC}$$
$$= \frac{1}{2}\, m\widehat{BC},$$

como queríamos demostrar.

Caso 3. Supongamos que B y C están del mismo lado respecto del diámetro que pasa por A, como en la figura que sigue:



La demostración aquí es muy parecida a la del caso 2, y la enunciamos en forma abreviada:

$$
\begin{aligned}
m\angle BAC &= m\angle t = m\angle s - m\angle u \\
&= \frac{1}{2}\, m\widehat{BD} - \frac{1}{2}\, m\widehat{CD} \\
&= \frac{1}{2}(m\widehat{BD} - m\widehat{CD}) \\
&= \frac{1}{2}\, m\widehat{BC}.
\end{aligned}
$$

Debes comprobar cuidadosamente que te das cuenta clara por qué cada una de estas ecuaciones es correcta.

De este teorema obtenemos dos importantes corolarios:

Corolario 13-7-1. Un ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.

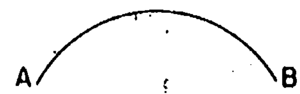
Esto es así, porque un tal ángulo intercepta una semicircunferencia, cuya medida es 180.

Corolario 13-7-2. Angulos inscritos en el mismo arco son congruentes.

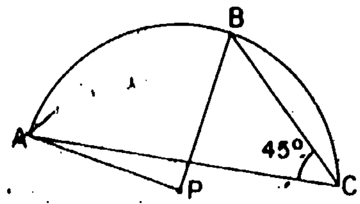
La demostración de esto es evidente, ya que tales ángulos interceptan todos al mismo arco.

Conjunto de problemas 13-4a

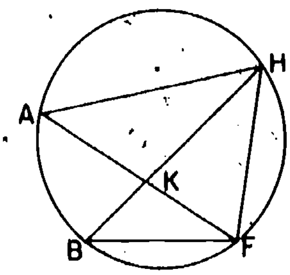
1. El centro de un arco es el centro de la circunferencia al cual pertenece el arco. ¿Cómo encontrarías el centro del arco $\widehat{AB}$?



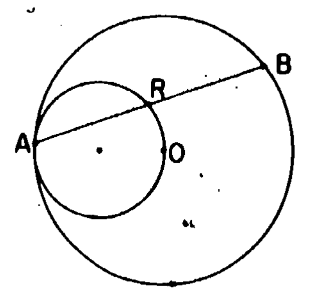
2. Datos: P es el centro de $\widehat{AC}$, $m\angle C = 45$.
   Demuestra que $\overline{BP} \perp \overline{AP}$.



3. En la figura adjunta, $m\widehat{AB} = m\widehat{BF}$.
   a. Demuestra que $\triangle AHK \sim \triangle BHF$.
   b. ¿Qué otro triángulo es semejante al $\triangle BHF$?

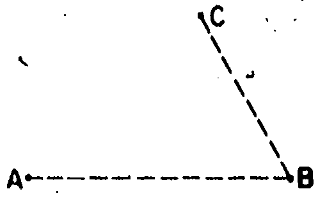


4. Las dos circunferencias de la figura adjunta son tangentes en A y la más pequeña pasa por O, centro de la circunferencia mayor. Demuestra que cualquier cuerda de la circunferencia mayor con uno de sus extremos en A es bisecada por la circunferencia más pequeña.

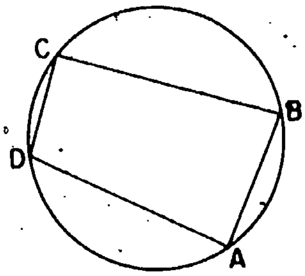


*5. Demuestra lo siguiente: Tres puntos no alineados cualesquiera están sobre una circunferencia.

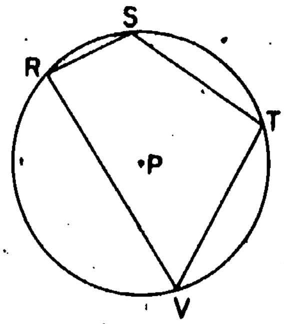
O de otra manera: A, B, y C son tres puntos no alineados. Demuestra que existe una circunferencia que contiene a A, B, y C. (Sugerencia: Traza $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. ¿Puedes determinar el centro de la circunferencia?)



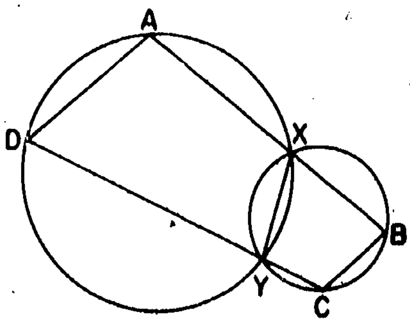
6. Un <u>cuadrilátero</u> <u>inscrito</u> es un cuadrilátero que tiene todos sus vértices situados en una circunferencia. Demuestra el teorema siguiente: Los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito son suplementarios.



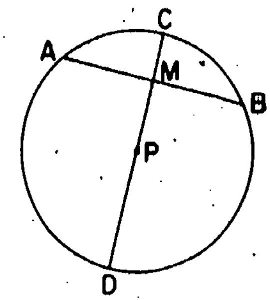
7. En la circunferencia P, sean $m\angle R = 85$, $m\widehat{RS} = 40$, $m\widehat{TV} = 90$. Determina las medidas de los otros arcos y ángulos de la figura.



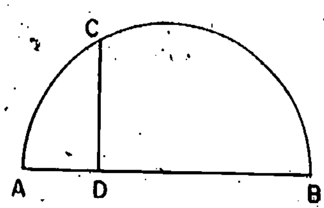
8. $\overline{XY}$ es la cuerda común a dos circunferencias que se intersecan. $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ son dos segmentos que cortan a las circunferencias como lo muestra la figura adjunta y que contienen a X y Y, respectivamente. Demuestra que $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. (Sugerencia: V. el problema 6.)



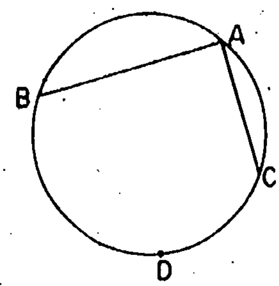
9. Demuestra lo siguiente: Un diámetro perpendicular a una cuerda de una circunferencia, biseca a los dos arcos determinados por la cuerda.



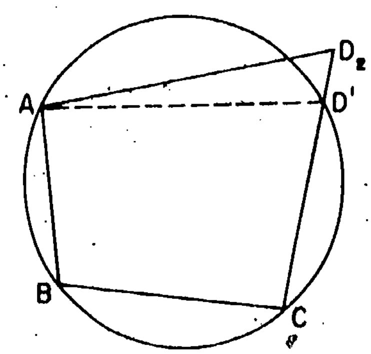
10. En la figura adjunta, $\widehat{ACB}$ es una semicircunferencia y $\overline{CD} \perp \overline{AB}$. Demuestra que CD es la media geométrica de AD y BD.



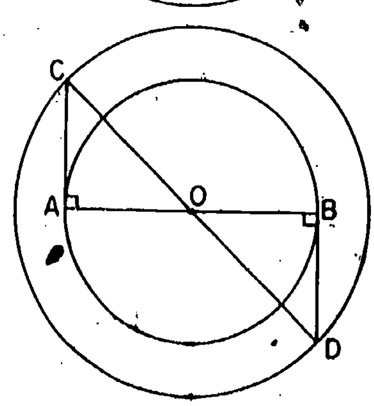
11. Demuestra el siguiente recíproco del corolario 13-7-1: Si un ángulo inscrito en un arco circular es un ángulo recto, entonces el arco es una semicircunferencia.



*12. Si un par de ángulos opuestos de un cuadrilátero son suplementarios, el cuadrilátero puede inscribirse en una circunferencia.
(Sugerencia: Utiliza los problemas 5 y 6 en una demostración indirecta.)



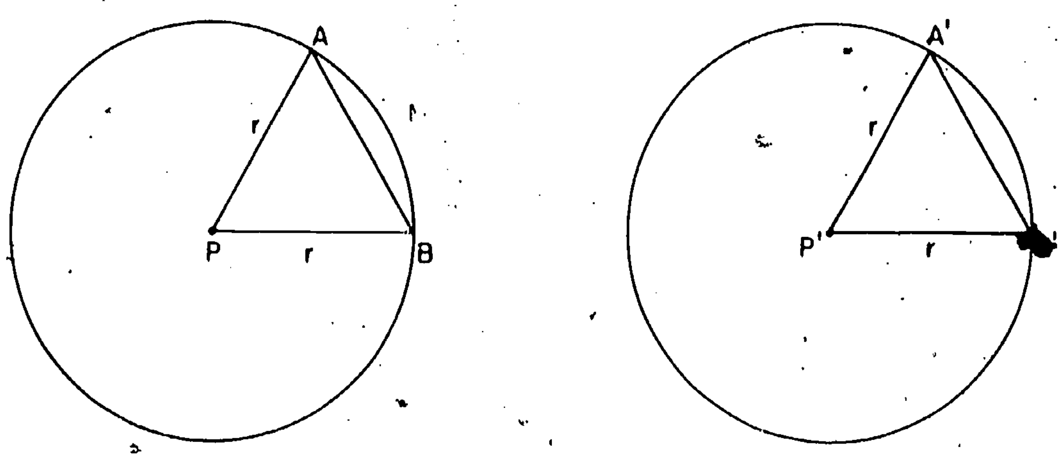
*13. En la figura adjunta, $\overline{AB}$ es un diámetro de la más pequeña de las dos circunferencias concéntricas, ambas con centro O, y $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son tangentes a la circunferencia más pequeña. $\overline{CO}$ y $\overline{DO}$ son radios de la circunferencia mayor. Demuestra que $\overline{CD}$ es un diámetro de la circunferencia mayor. (Sugerencia: Traza $\overline{AD}$ y $\overline{CB}$.)



<u>Definición</u>: En la misma circunferencia, o en circunferencias congruentes, dos arcos se dicen <u>congruentes</u> si tienen la misma medida.

Justamente como en la definición de segmentos, ángulos, triángulos o circunferencias congruentes, la idea intuitiva consiste en que uno de los arcos puede ser movido hasta hacerlo coincidir con el otro.

<u>Teorema 13-8</u>. En la misma circunferencia, o en circunferencias congruentes, si dos cuerdas son congruentes, entonces también lo son los arcos menores correspondientes.



Demostración: En las figuras inmediatas, tenemos que mostrar que si $AB = A'B'$, entonces $\widehat{AB} \cong \widehat{A'B'}$. Por el teorema L.L.L., tenemos

$$\triangle APB \cong \triangle A'B'P'.$$

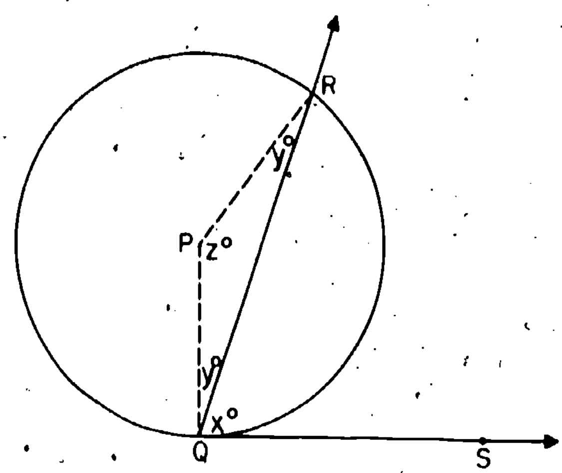
Por tanto, $\angle P \cong \angle P'$. Puesto que $m\widehat{AB} = m\angle P$ y $m\widehat{A'B'} = m\angle P'$, esto significa que $\widehat{AB} \cong \widehat{A'B'}$, como queríamos demostrar.

El recíproco es también cierto, y la demostración es muy parecida:

<u>Teorema 13-9</u>. En la misma circunferencia, o en circunferencias congruentes, si dos arcos son congruentes, entonces también lo son sus cuerdas correspondientes.

Esto es, en las figuras anteriores, si $\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$, entonces $AB = A'B'$. Y si los arcos que se sabe son congruentes son los arcos <u>mayores</u>, entonces vale la misma conclusión.

<u>Teorema 13-10</u>. Dado un ángulo con el vértice en la circunferencia, formado por un rayo secante y un rayo tangente, la medida del ángulo es la mitad de la medida del arco interceptado.



Demostración: Por el ángulo formado por un rayo secante y un rayo tangente entendemos un ángulo tal como el dibujado en la figura inmediata. Probaremos el teorema en el caso de un ángulo agudo, como el de la figura. Utilizaremos la notación de esa figura para las medidas de los diversos ángulos. En el $\triangle PQR$, $\angle PRQ$ y $\angle PQR$ tienen la misma medida, y, como se indica, por ser isósceles el $\triangle PQR$. Puesto que $m\widehat{QR} = m\angle QPR$, lo que tenemos que probar es que $x = \frac{1}{2}z$.

Por el corolario 13-2-1, $\angle PQS$ es un ángulo recto. Por consiguiente,

$$x = 90 - y.$$

En virtud del teorema 9-13, $z + y + y = 180$, de modo que

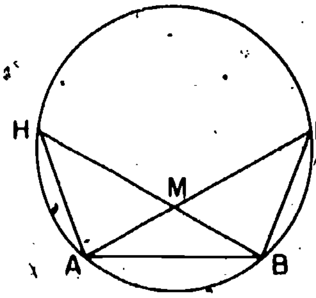
$$z = 180 - 2y.$$

En consecuencia, $x = \frac{1}{2}z$, como se quería demostrar.

Conjunto de problemas 13-4b

1. Demuestra el teorema 13-9: En la misma circunferencia, o en circunferencias congruentes, si dos arcos son congruentes, entonces también lo son las cuerdas correspondientes.

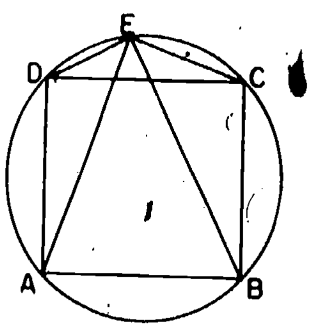
2. En la figura adjunta, $AF = BH$.



Demuestra que: a. $\widehat{AH} \cong \widehat{FB}$

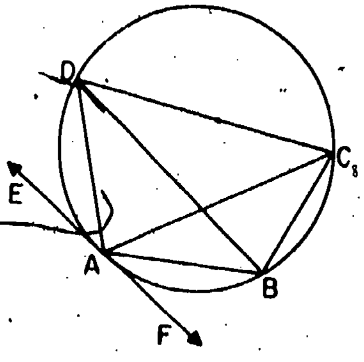
b. $\triangle AMH \cong \triangle BMF$

3. ABCD es un cuadrado inscrito. E es un punto cualquiera de $\widehat{DC}$, como muestra la figura adjunta.



Demuestra que $\overline{AE}$ y $\overline{BE}$ trisecan al $\angle DEC$.

4. En la figura adjunta, A, B, C, D están en la circunferencia y $\overleftrightarrow{EF}$ es tangente a la circunferencia en A. Completa los siguientes enunciados:

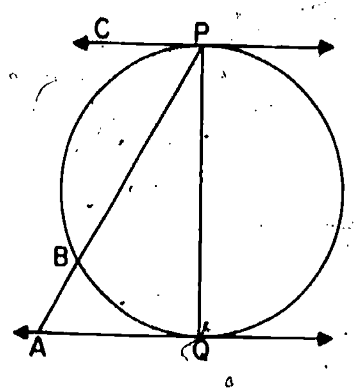


a. $\angle BDC \cong$ ________
b. $\angle ADC \cong$ ________
c. $\angle ACB \cong$ ________ $\cong$ ________
d. $\angle EAD$ es suplementario de ______.
e. $\angle DAB$ es suplementario de ______.
f. $\angle ABC$ es suplementario de ______.
g. $\angle DAE \cong$ ______ $\cong$ ______
h. $\angle DBA$ es suplementario de ______.

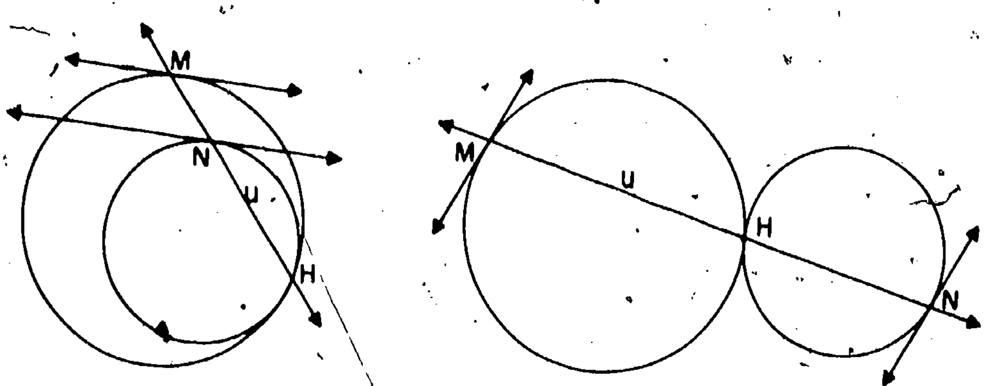
i. $\angle ADB$ es suplementario de _____.

j. $\angle DAC \cong$ _____.

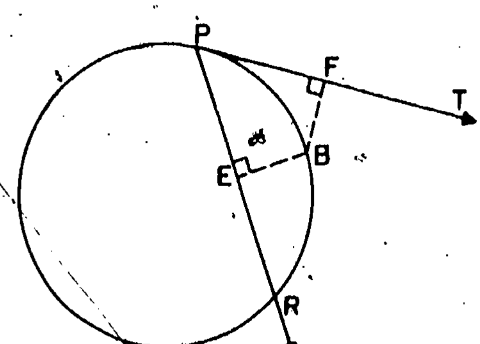
5. En la figura adjunta, $\overleftrightarrow{CP}$ y $\overleftrightarrow{AQ}$ son tangentes, y $\overline{PQ}$ es un diámetro de la circunferencia. Si $m\widehat{PB} = 120$ y el radio de la circunferencia es 3, determina la longitud de $\overline{AP}$.



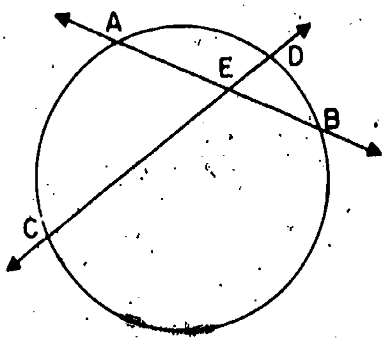
*6. Dos circunferencias son tangentes, interior o exteriormente, en el punto H. Sea u una recta cualquiera trazada por H y que corta a las circunferencias otra vez en M y en N. Demuestra que las tangentes en M y en N son paralelas.



*7. Se dan la tangente $\overleftrightarrow{PT}$ y la secante $\overleftrightarrow{PR}$. También B es el punto medio de $\widehat{PR}$. Demuestra que B es equidistante de $\overleftrightarrow{PT}$ y $\overleftrightarrow{PR}$.



8. Demuestra el teorema: La medida de un ángulo formado por dos secantes a una circunferencia que se intersecan en el interior de la circunferencia es la mitad de la suma de las medidas de los arcos interceptados por el ángulo y por su opuesto.

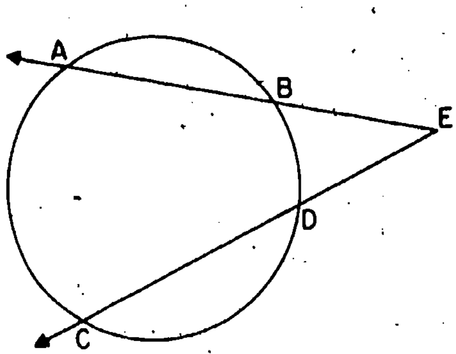


Datos: Una circunferencia con las secantes $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ que se intersecan en E.

Hay que demostrar que $m\angle DEB = \frac{1}{2}(m\widehat{DB} + m\widehat{AC})$.

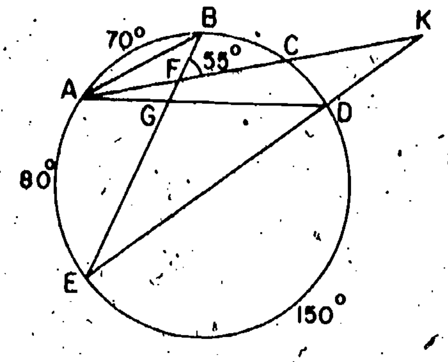
(Sugerencia: Traza $\overline{BC}$.)

9. Demuestra el teorema siguiente: La medida de un ángulo formado por dos secantes a una circunferencia que se intersecan en el exterior de la circunferencia es la mitad de la diferencia de las medidas de los arcos interceptados. (Sugerencia: V. el problema 8.)

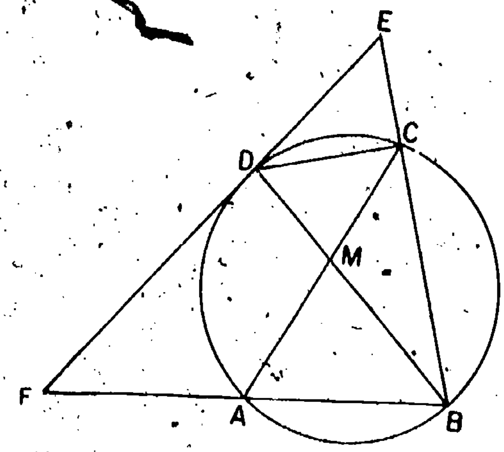


10. Verifica que el teorema del problema 9 continúa siendo válido si las palabras "dos secantes" se sustituyen por "una secante y una tangente" o por "dos tangentes".

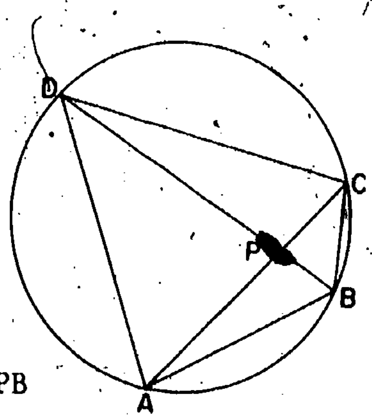
11. En la figura adjunta, sean $m\widehat{AB} = 70$, $m\widehat{AE} = 80$, $m\widehat{ED} = 150$, y $m\angle BFC = 55$.
Determina $m\widehat{BC}$, $m\widehat{CD}$, $m\angle K$, $m\angle E$, $m\angle BAD$, $m\angle AGE$, $m\angle DGE$, $m\angle ADK$.



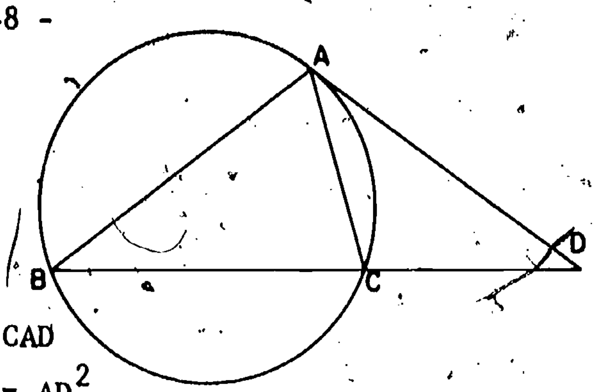
12. En la figura adjunta, $\overline{EF}$ es tangente a la circunferencia en D y $\overline{AC}$ biseca al $\angle BCD$. Si $m\widehat{AB} = 88$ y $m\widehat{CD} = 62$, determina la medida de cada arco y de cada ángulo de la figura.



13. Se da un cuadrilátero inscrito ABCD con diagonales que se intersecan en P.
Demuestra que: a. $\triangle APD \sim \triangle BPC$
b. $AP \cdot PC = PD \cdot PB$



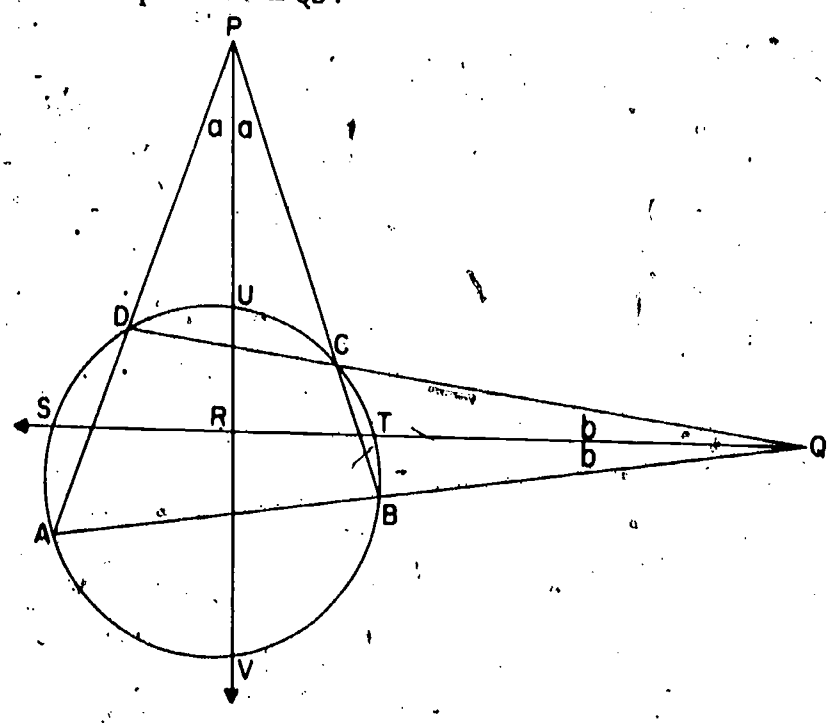
14. Se dan $\overleftrightarrow{AD}$ tangente a la circunferencia en A y la secante $\overrightarrow{BD}$ que interseca a la circunferencia en B y C.



Demuestra que: a. $\triangle ABD \sim \triangle CAD$

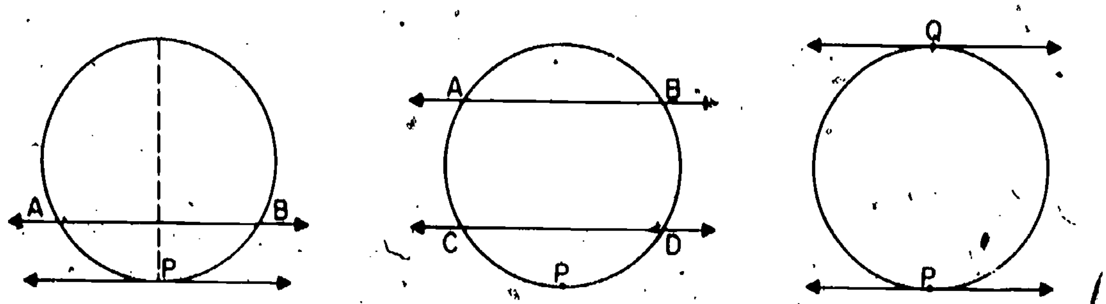
b. $BD \cdot CD = AD^2$

*15. En la figura adjunta, el cuadrilátero ABCD está inscrito en la circunferencia; las rectas $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ se intersecan en P, las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{DC}$ se intersecan en Q; $\overleftrightarrow{PV}$ y $\overleftrightarrow{QS}$ son las bisectrices de los ángulos $\angle APB$ y $\angle AQD$, respectivamente. Demuestra que $\overleftrightarrow{PV} \perp \overleftrightarrow{QS}$.



(Sugerencia: Muestra que $m\angle PRQ = m\angle QRV$. Utiliza teoremas desarrollados en este Conjunto de problemas.)

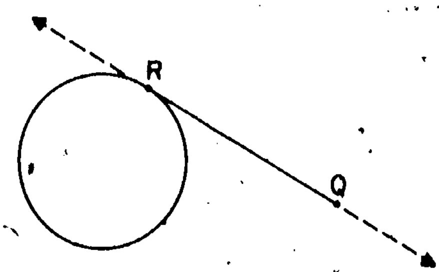
*16. Demuestra el teorema siguiente: Si dos rectas paralelas intersecan a una circunferencia, interceptan en ella arcos congruentes.



Caso I (Una tangente y una secante) — Caso II (Dos secantes) — Caso III (Dos tangentes)

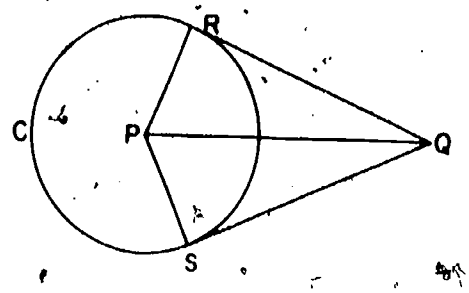
13-5. <u>Longitudes de segmentos tangentes y secantes</u>

<u>Definición</u>: Si la recta $\overleftrightarrow{QR}$ es tangente a una circunferencia en R, entonces el segmento $\overline{QR}$ es un <u>segmento tangente</u> desde Q a la circunferencia.



<u>Teorema 13-11</u>. Los dos segmentos tangentes a una circunferencia desde un punto exterior son congruentes y forman ángulos congruentes con la recta que une el punto exterior y el centro de la circunferencia.

De otra manera: Si $\overline{QR}$ es tangente a la circunferencia C en R, y $\overline{QS}$ es tangente a C en S, entonces $\overline{QR} \cong \overline{QS}$ y $\angle PQR \cong \angle PQS$.

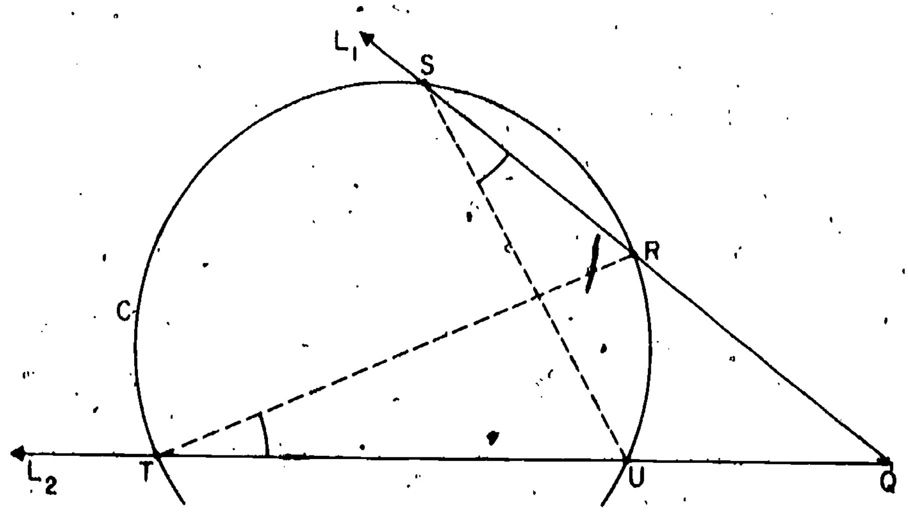


Demostración: En virtud del corolario 13-2-1, $\triangle PQR$ y $\triangle PQS$ son triángulos rectángulos, con los ángulos rectos en R y en S. Es obvio que PQ = PQ y PR = PS, pues R y S son puntos de la circunferencia. Por el teorema de la hipotenusa y el cateto (teorema 7-3), esto significa que

$$\triangle PQR \cong \triangle PQS.$$

Por consiguiente, $\overline{QR} \cong \overline{QS}$, y $\angle PQR \cong \angle PQS$, como se quería probar.

El enunciado del siguiente teorema es más fácil de comprender si se mira primero una figura.



El teorema dice que dadas dos rectas secantes cualesquiera pasando por Q, como en la figura, se tiene

$$QR \cdot QS = QU \cdot QT.$$

Teorema 13-12. Dada una circunferencia C y un punto exterior Q, sea L_1 una recta secante que pase por Q, y que corta a C en los puntos R y S; sea L_2 otra recta secante que pase por Q, y que corta a C en los puntos T y U. Entonces $QR \cdot QS = QU \cdot QT$.

Demostración: Considera los triángulos ΔSQU y ΔTQR. Esos triángulos tienen el $\angle Q$ común. Además $\angle S \cong \angle T$, como indica la figura, porque los dos ángulos están inscritos en el arco mayor $\widehat{RU}$. Por el corolario A.A. (corolario 12-3-1), esto significa que

$$\Delta SQU \sim \Delta TQR.$$

Por consiguiente, los lados correspondientes son proporcionales. Luego,

$$\frac{QS}{QT} = \frac{QU}{QR},$$

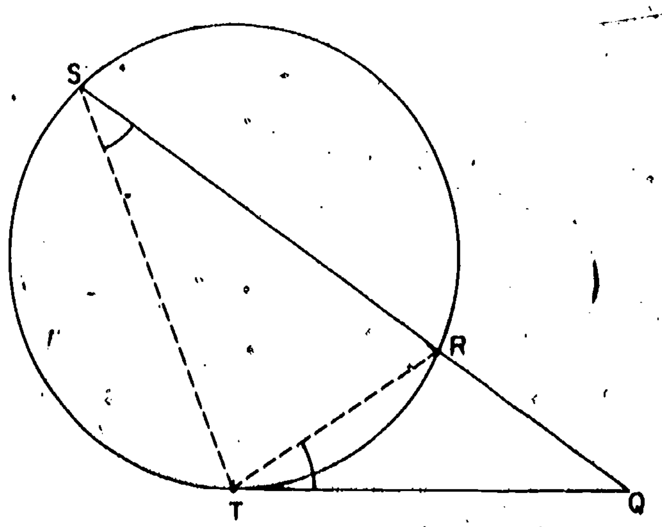
y

$$QR \cdot QS = QU \cdot QT,$$

como se quería demostrar.

Observa que este teorema significa que el producto $QR \cdot QS$ está determinado únicamente por la circunferencia dada y el punto exterior dado, y es independiente de la elección de la secante. (El teorema nos dice que cualquier otra recta secante da el mismo producto.) Este producto constante se llama potencia del punto con respecto a la circunferencia.

El teorema siguiente nos va a decir que en la figura adjunta, $QR \cdot QS = QT^2$.



<u>Teorema 13-13</u>. Dado un segmento tangente $\overline{QT}$ a la circunferencia, y una recta secante pasando por Q y que corta a la circunferencia en los puntos R y S, entonces

$$QR \cdot QS = QT^2.$$

Las etapas principales de la demostración son las siguientes (procura darte cuenta de las razones que justifican cada caso):

(1) $m\angle S = \frac{1}{2} m\widehat{TR}$

(2) $m\angle RTQ = \frac{1}{2} m\widehat{TR}$

(3) $\angle S \cong \angle RTQ$

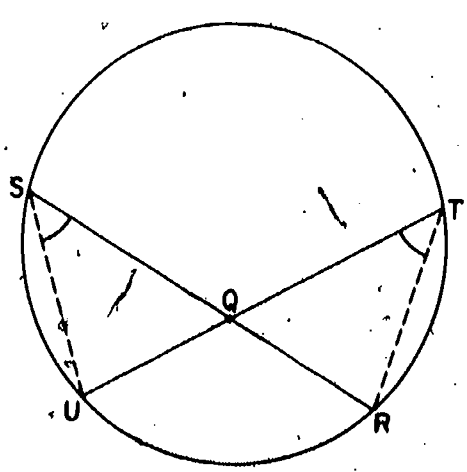
(4) $\Delta QRT \sim \Delta QTS$

(5) $\frac{QR}{QT} = \frac{QT}{QS}$

(6) $QR \cdot QS = QT^2$

El teorema que sigue es otra variante de los dos anteriores; la diferencia consiste en que las dos rectas, las trazaremos ahora pasando por un punto interior de la circunferencia. El teorema dice que en la figura adjunta, se tiene siempre

$$QR \cdot QS = QU \cdot QT.$$



Los pasos principales de la demostración son los siguientes (procura razonar cada caso):

(1) $\angle S \cong \angle T$

(2) $\angle SQU \cong \angle TQR$

(3) $\Delta SQU \sim \Delta TQR$

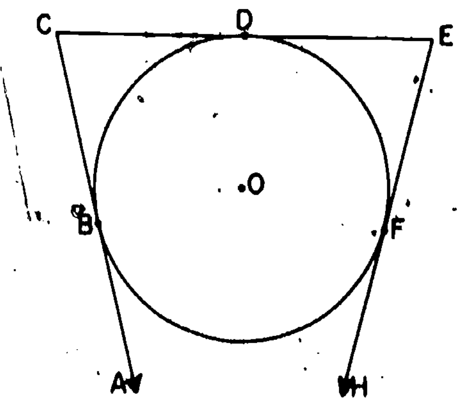
(4) $\frac{QS}{QT} = \frac{QU}{QR}$

(5) $QR \cdot QS = QU \cdot QT$

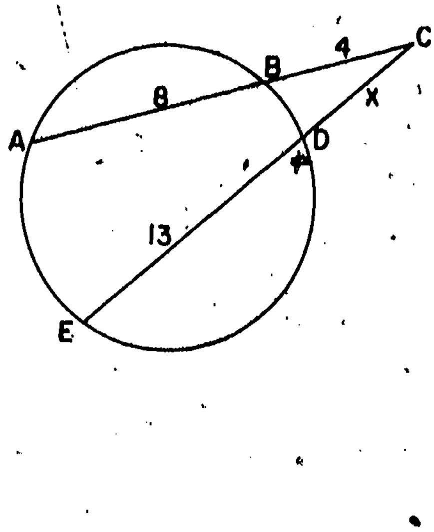
Para referirnos a este teorema lo llamaremos <u>Teorema 13-14</u>. Redacta un enunciado completo del teorema, es decir, un enunciado independiente de una figura.

<u>Conjunto de problemas 13-5</u>

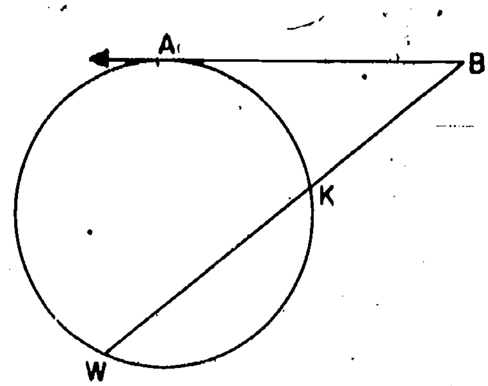
1. $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{CE}$ y $\overleftrightarrow{EH}$ son tangentes a la circunferencia O en B, D y F, respectivamente. Demuestra que $CB + EF = CE$.



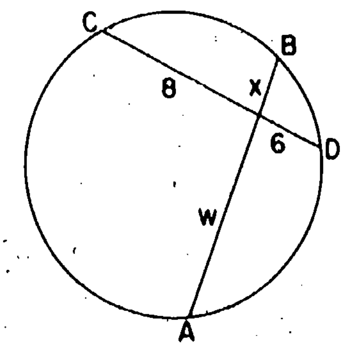
2. Las secantes $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CE}$ intersecan a la circunferencia en A, B y en D, E, como indica la figura adjunta. Si las longitudes de los segmentos son las indicadas, determina x.



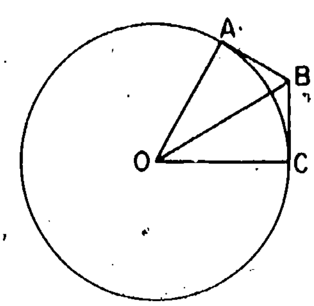
3. En la figura adjunta, $\overleftrightarrow{AB}$ es tangente a la circunferencia en A y la secante $\overleftrightarrow{BW}$ interseca a la circunferencia en K y W. Si AB = 6 y WK = 5, ¿cuál es la longitud de $\overline{BK}$?



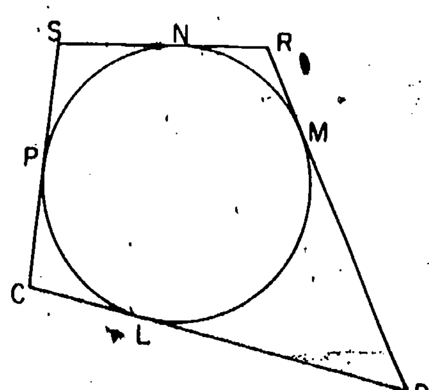
4. Dada una circunferencia y dos cuerdas que se intersecan, como indica la figura, y siendo $x < w$, si AB = 19, determina x y w.



5. $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ son tangentes a la circunferencia O en A y en C, respectivamente, y $m\angle ABC = 120$. Demuestra que AB + BC = OB.

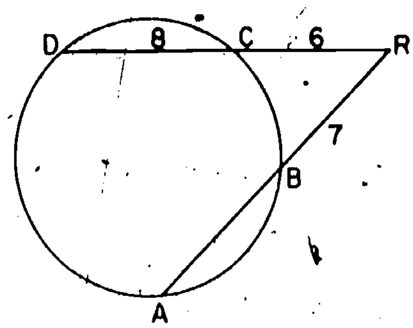


6. Se sabe que los lados del cuadrilátero CDRS son tangentes a una circunferencia en L, M, N y P, como indica la figura.
Demuestra que SR + CD = SC + RD.

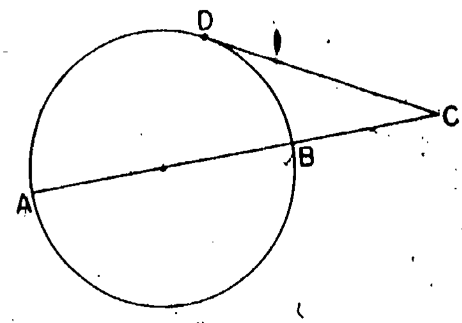


7. En una circunferencia, una cuerda cuya longitud es 12 está a 8 pulgadas del centro de la circunferencia. Utilizando el teorema 13-14, determina el radio de la circunferencia.

8. En la figura adjunta, están indicadas las longitudes de algunos segmentos de dos secantes. Determina la longitud de $\overline{AB}$.

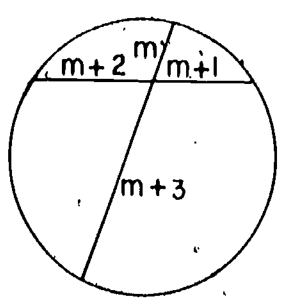


9. En la figura, $\overline{CD}$ es un segmento tangente a la circunferencia en D y $\overline{AC}$ es un segmento de una secante que pasa por el centro de la circunferencia. Si $CD = 12$ y $CB = 4$, determina el radio de la circunferencia.

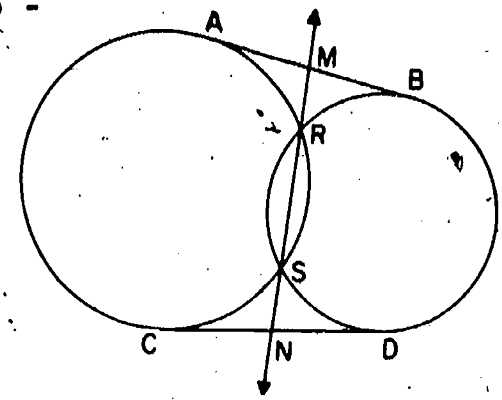


10. Si dos segmentos tangentes a una circunferencia forman un triángulo equilátero junto con la cuerda que tiene por extremos los puntos de contacto, determina la medida de cada arco interceptado por la cuerda.

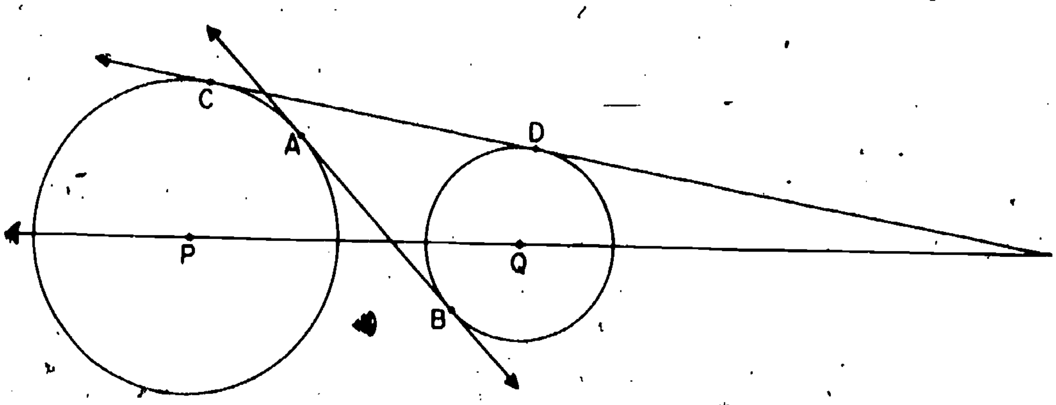
11. Muestra que no es posible que las longitudes de los segmentos determinados por dos cuerdas que se intersecan, sean cuatro números enteros consecutivos.



*12. Demuestra que si dos circunferencias se intersecan, la secante común biseca a cada uno de los segmentos tangentes comunes.



13. Si una tangente común a dos circunferencias interseca a la recta de los centros en un punto situado entre dichos centros, se dice que es una tangente común interna. Si no interseca a la recta de los centros en un punto entre ambos centros, se llama tangente común externa.



En la figura, $\overleftrightarrow{AB}$ es una tangente común interna y $\overleftrightarrow{CD}$ es una tangente común externa.

a. En la figura anterior, ¿cuántas tangentes comunes puede haber? Especifica cuántas hay de cada especie.

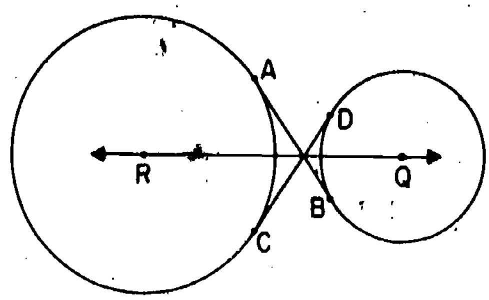
b. Si las circunferencias fueran tangentes exteriormente, ¿cuántas tangentes de cada especie habría?

c. ¿Y si las circunferencias se intersecan en dos puntos?

d. ¿Y si las circunferencias son tangentes interiormente?

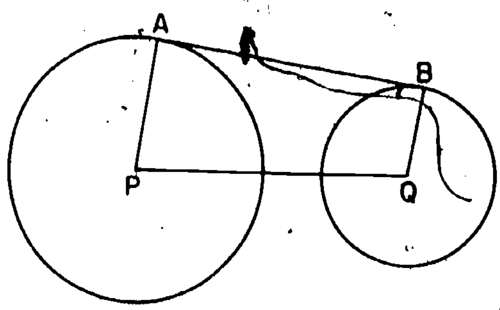
e. ¿Y si las circunferencias son concéntricas?

*14. Demuestra lo siguiente: Las tangentes comunes internas de dos circunferencias intersecan a la recta de los centros en un mismo punto. (Sugerencia: Utiliza una demostración indirecta.)



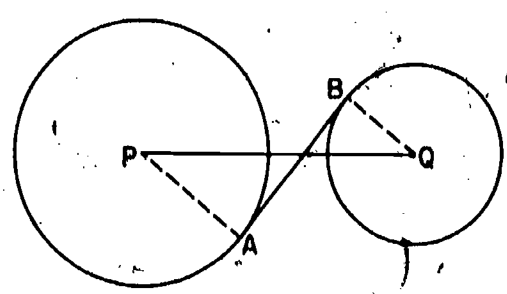
*15. Demuestra que los segmentos tangentes comunes de las tangentes comunes internas son congruentes. (Utiliza la figura del problema 14.)

16. Los radios de dos circunferencias tienen longitudes 22 y 8, respectivamente, y la distancia entre sus centros es 50. Determina la longitud del segmento tangente común externo. (Sugerencia: Traza una perpendicular a $\overline{AP}$ por Q.)

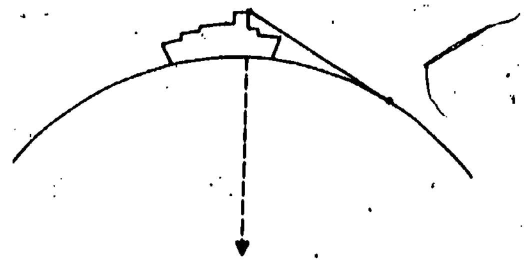


17. Dos circunferencias tienen común un segmento tangente externo de 36 pulgadas de longitud. Sus radios tienen 6 y 21 pulgadas, respectivamente. Determina la distancia entre sus centros.

18. La distancia entre los centros de dos circunferencias de radios 7 y 9, es 20. Determina la longitud del segmento tangente común interno.

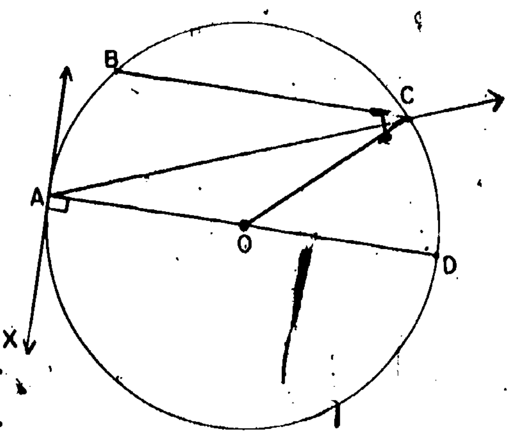


*19. Sobre el puente de un gran transatlántico en el océano, el capitán pide a un joven oficial nuevo que determine la distancia al horizonte. El joven oficial toma papel y lápiz y a los pocos instantes presenta una respuesta. En el papel ha escrito la fórmula $d = \frac{5}{4}\sqrt{h}$ millas. Demuestra que esta fórmula es aproximadamente correcta, siendo <u>h</u> la altura en pies del observador sobre el nivel del mar y <u>d</u> la distancia en millas al horizonte. (Puedes suponer que el diámetro de la tierra es 8000 millas.)

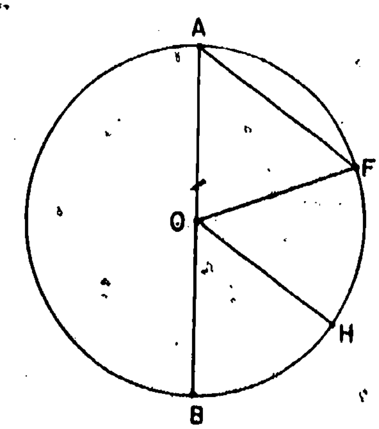


Problemas de repaso

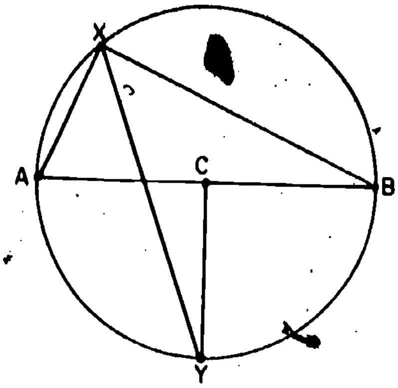
1. Para una circunferencia O,
   a. $\overline{BC}$ es una ________.
   b. $\overline{AD}$ es un ________.
   c. $\overleftrightarrow{AC}$ es una ________.
   d. $\overline{OA}$ es un ________.
   e. $\overrightarrow{AX}$ es una ________.
   f. $\widehat{CD}$ es un ________ ________.
   g. $\widehat{ADC}$ es un ________ ________.
   h. $\angle BCA$ es un ________ ________.
   i. $\angle COD$ es un ________ ________.



2. Dados en la figura adjunta, la circunferencia O y un diámetro $\overline{AB}$, $\overline{AF} \parallel \overline{OH}$ y $m\angle A = 55$, determina $m\widehat{BH}$ y $m\widehat{AF}$.



3. En la figura adjunta, $\overline{AB}$ es un diámetro de la circunferencia C, y $\overrightarrow{XY}$ biseca al $\angle AXB$. Demuestra que $\overline{CY} \perp \overline{AB}$. (Sugerencia: Determina $m\angle AXY$.)



4. Indica la verdad o falsedad de cada uno de los siguientes enunciados:

   a. Si un punto es el punto medio de dos cuerdas de una circunferencia, entonces tal punto es el centro de la circunferencia.

   b. Si la medida de un arco de una circunferencia es el doble de la medida de un segundo arco, entonces la longitud de la cuerda del segundo arco es menor que el doble de la longitud de la cuerda del primero.

   c. Una recta que biseca a dos cuerdas de una circunferencia es perpendicular a cada una de las cuerdas.

   d. Si los vértices de un cuadrilátero están en una circunferencia, entonces cada par de ángulos opuestos son suplementarios.

   e. Si cada uno de un par de circunferencias es tangente a una tercera circunferencia, entonces las dos circunferencias del par son tangentes entre sí.

   f. Una circunferencia no puede contener tres puntos alineados.

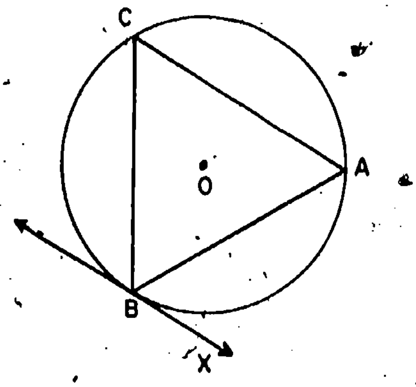
   g. Si una recta biseca a una cuerda de una circunferencia, entonces biseca al arco menor de esa cuerda.

   h. Si $\overline{PR}$ es un diámetro de la circunferencia O, y Q es un punto cualquiera del interior de la circunferencia no situado sobre $\overline{PR}$, entonces el $\angle PQR$ es obtuso.

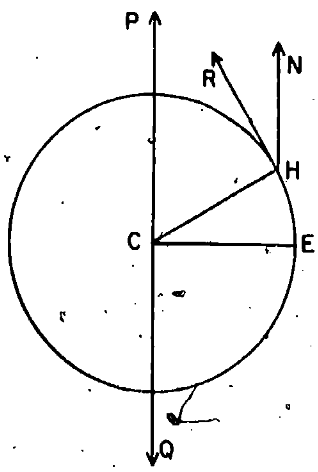
   i. Una tangente a una circunferencia en el punto medio de un arco es paralela a la cuerda del arco.

   j. Es posible que dos tangentes a la misma circunferencia sean perpendiculares la una a la otra.

5. En la figura adjunta, $\overleftrightarrow{BX}$ es tangente a la circunferencia O en B, AB = AC y $m\widehat{CB} = 100$. Determina $m\angle C$ y $m\angle ABX$.



6. Se da la circunferencia C con $\overline{EC} \perp \overleftrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{HN} \parallel \overleftrightarrow{PQ}$, y $\overrightarrow{HR}$ tangente a la circunferencia en H. Demuestra que $m\widehat{HE} = m\angle RHN$. (Nota: La circunferencia puede considerarse como representando la tierra, con $\overleftrightarrow{PQ}$ como eje terrestre, $\angle RHN$ el ángulo de altura o elevación de la estrella Polar, y $m\widehat{HE}$ la latitud del punto H.)



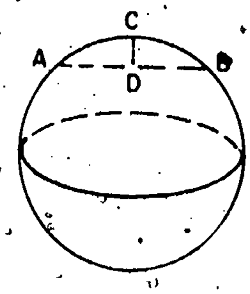
7. En un tablero de madera laminada, se abre un agujero redondo de 40 pulgadas de diámetro y se coloca en este agujero una bola esférica de 50 pulgadas de diámetro. ¿Cuánto sobresaldrá por debajo del tablero la bola?

8. Una rueda se rompe de tal modo que sólo queda un pedazo de la llanta o borde. Con el fin de determinar el diámetro de la rueda, se efectúan las siguientes medidas: Se toman tres puntos C, A, y B del borde de modo que cuerda $\overline{AB} \cong$ cuerda $\overline{AC}$. Las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ tienen cada una longitud de 15 pulgadas, y la cuerda $\overline{BC}$ tiene 24 pulgadas de longitud. Determina el diámetro de la rueda.

9. Sea B un punto de un diámetro $\overline{AD}$ de la circunferencia C, situado entre A y C. Demuestra que $\overline{BA}$ es el segmento más

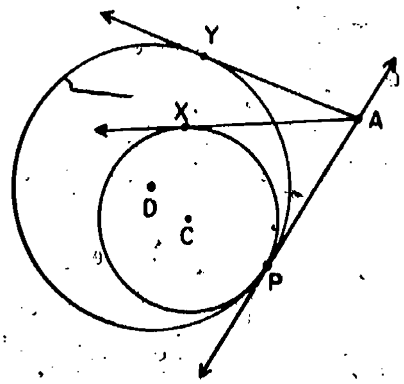
corto entre todos los que unen B con los puntos de la circunferencia, y que $\overline{BD}$ es el más largo.

*10. Suponte que la tierra es una bola esférica de radio 4,000 millas. Un túnel rectilíneo $\overline{AB}$ de 200 millas de longitud, conecta dos puntos A y B de la superficie, y una chimenea de ventilación $\overline{CD}$ se ha construido en el centro del túnel.

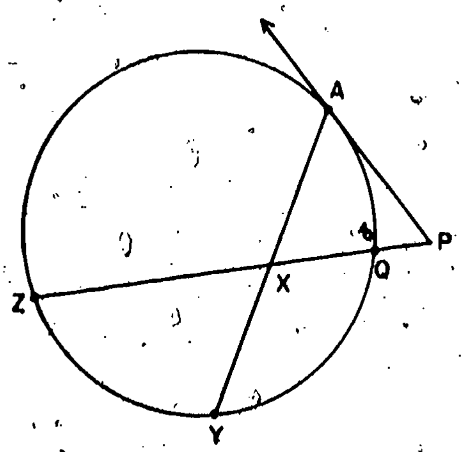


¿Cuál es la longitud en millas de esta chimenea?

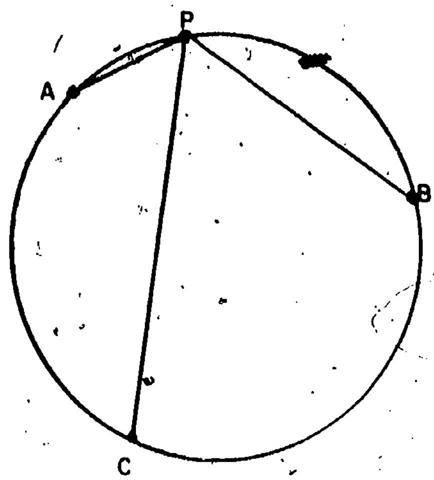
11. Se dan las circunferencias C y D tangentes interiormente en P con la tangente común $\overleftrightarrow{AP}$. $\overleftrightarrow{AX}$ es tangente a la circunferencia C en X y $\overleftrightarrow{AY}$ es tangente a la circunferencia D en Y. Demuestra que AY = AX.



*12. En la figura adjunta, $\overleftrightarrow{AP}$ es tangente a la circunferencia en A, y además, AP = PX = XY. Si PQ = 1 y QZ = 8, determina AX.



*13. En la figura adjunta se dan $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ y $\widehat{CA}$, los tres arcos de 120° sobre una circunferencia, y el punto P en el arco $\widehat{AB}$. Demuestra que PA + PB = PC. (Sugerencia: Considera una paralela a $\overline{PB}$ trazada por A, intersecando a $\overline{PC}$ en R y a la circunferencia en Q.)



Capítulo 14

CARACTERIZACION DE CONJUNTOS. CONSTRUCCIONES

14-1. Caracterización de conjuntos

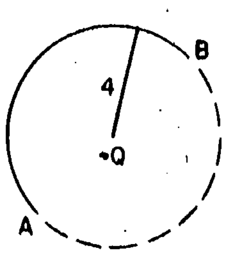
En el capítulo 6 hemos observado la manera en que una cierta figura, la mediatriz de un segmento, podría definirse mediante una propiedad característica de sus puntos, a saber, que cada uno de ellos equidista de los extremos del segmento.

En el capítulo 13 una circunferencia (y una superficie esférica) fue definida mediante una propiedad característica de sus puntos, a saber: cada uno de ellos está a una distancia dada del centro.

Tales caracterizaciones o descripciones de un conjunto de puntos (figura geométrica) mediante una propiedad común a todos sus puntos son frecuentemente muy útiles, y dedicaremos algún tiempo a estudiarlas.

¿Qué entendemos al decir que un conjunto está caracterizado por una condición, o un conjunto de condiciones, impuestas a sus puntos? En primer lugar, ciertamente queremos significar que cada punto del conjunto satisface a dichas condiciones. Pero esto no es todo, como fácilmente se ve con un ejemplo. Supone que la condición es "en el plano E a la distancia 4 del punto Q situado en E". Una semicircunferencia en E con centro Q y radio 4 está constituida por puntos que satisfacen todos ellos a la citada condición. Y lo mismo acontece con cualquier otro arco apropiado.

Todo punto de $\widehat{AB}$ está a 4 unidades de distancia de Q, pero no todo punto que dista 4 unidades de Q está en $\widehat{AB}$.



El inconveniente obvio de tales ejemplos es que dejan fuera algunos puntos que satisfacen a las condiciones propuestas. Queremos toda la circunferencia, no una parte de ella. En general, nos interesa que nuestro conjunto contenga todos los puntos que cumplen dichas condiciones. Otra manera de expresar esto es diciendo que todo punto que satisface a las condiciones propuestas es un punto del conjunto. Esta es la segunda parte del significado de la caracterización.

Resumamos las dos partes para futuras referencias:

(1) Todo punto del conjunto satisface a las condiciones.

(2) Todo punto que satisface a las condiciones es un punto del conjunto.

Si te refieres de nuevo al teorema 6-2, verás que su segundo planteamiento está redactado exactamente de esta forma.

Conjunto de problemas 14-1

Se proponen estos problemas para estudio. No se requieren demostraciones. En algunos de ellos se habla de la distancia de un punto a una figura: esta noción se define como la menor de las distancias del punto a cualquier punto de la figura.

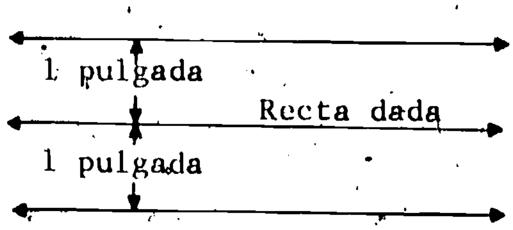
Ejemplo aclaratorio: Describe el conjunto de puntos a una pulgada de una recta dada, y haz un dibujo de dicho conjunto.

a. En un plano.

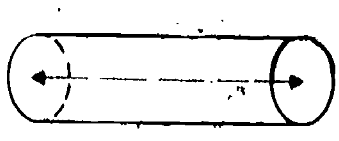
b. En el espacio.

Respuesta:

a. El conjunto consiste en dos rectas, cada una a una pulgada de la recta dada y paralela a ella.



b. El conjunto consiste en todos los puntos de una superficie cilíndrica con radio de una pulgada y con la recta dada por eje.



1. ¿Cuál es el conjunto de puntos P caracterizado por la condición de que CP = 3 pulgadas, siendo C un punto dado?
2. ¿Cuál es el conjunto de puntos P en un plano dado E, caracterizado por la condición de que CP = 3 pulgadas, siendo C un punto dado de E?
3. Describe el conjunto de puntos en un plano E equidistantes de dos rectas paralelas en E, y haz un dibujo de dicho conjunto.
4. E es un plano y C es un punto fijo a 3 pulgadas del plano. Describe el conjunto de puntos en E cuyas distancias a C son de:
   a. 5 pulgadas
   b. 3 pulgadas
   c. 2 pulgadas
5. E es un plano. L y M son dos rectas en E que se intersecan.
   a. ¿Cuántos puntos de E están a 2 pulgadas de L y a 2 pulgadas de M?
   b. Haz un dibujo del conjunto de puntos de E cuyas distancias a L y a M son a lo más de una pulgada.
6. E es un plano. A y B son dos puntos en E que distan entre sí 4 pies. Describe el conjunto de puntos de E que están:
   a. a 4 pies de A y a 4 pies de B.
   b. a lo más a 4 pies de A y a lo más a 4 pies de B.
   c. a 2 pies de A y a 2 pies de B.
   d. a 1 pie de A y a 1 pie de B.
7. $\overline{AB}$ es un segmento de 3 pulgadas de longitud en un plano E. Describe el conjunto de aquellos puntos de E que distan una pulgada de $\overline{AB}$, y haz un dibujo de dicho conjunto.

14-2. Caracterizaciones básicas; teoremas de concurrencia

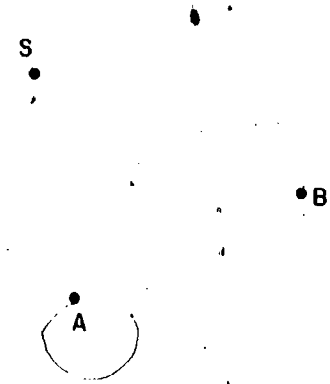
Para comodidad de las referencias volvemos a enunciar aquí algunas de las caracterizaciones que ya hemos encontrado. Algunas de ellas son definiciones y otras son teoremas.

1. Una superficie esférica es el conjunto de puntos a una distancia especificada de un punto dado.
2. Una circunferencia es el conjunto de puntos en un plano dado a una distancia especificada de un punto dado del plano.
3. El plano perpendicular que biseca a un segmento dado es el conjunto de puntos equidistantes de los extremos del segmento.
4. La mediatriz, en un plano dado, de un segmento dado en el plano, es el conjunto de puntos en el plano equidistantes de los extremos del segmento.

Conjunto de problemas 14-2a

1. Describe el conjunto de puntos que están a una distancia dada de:
   a. un punto dado.
   b. una recta dada.
   c. un plano dado.
   d. cada uno de dos planos que se intersecan.
   e. cada uno de dos puntos dados.
   f. un segmento.
2. Describe el conjunto de puntos de un plano equidistantes de:
   a. dos puntos.
   b. dos rectas paralelas.
   c. dos rectas que se intersecan.
   d. tres puntos no alineados.

3. Describe el conjunto de puntos equidistantes de:
   a. dos puntos dados.
   b. dos rectas paralelas.
   c. dos planos paralelos.
   d. dos planos que se intersecan.
   e. un plano y de una recta perpendicular a él.
4. Indica si cada enunciado es cierto o falso:
   a. Dada una recta <u>u</u> en un plano E, hay siempre un plano
      1. que contiene a <u>u</u> y es perpendicular a E.
      2. que contiene a <u>u</u> y es paralelo a E.
   b. Dadas dos rectas en el espacio que no se intersecan, hay siempre un plano que contiene a una de ellas y
      1. es paralelo a la otra.
      2. es perpendicular a la otra.
5. Los Rivera, los López y los Díaz viven en casas representadas por estos tres puntos. Proyectan erigir un asta para una bandera en un punto que equidiste de sus tres puertas traseras. Explica la manera en que se determina el punto en el cual deberán colocar el asta.



6. Describe el conjunto constituido por los vértices de todos los triángulos isósceles que tienen por base $\overline{AB}$.
7. Determina un punto en el plano igualmente distante de tres puntos no alineados. ¿Por qué deben ser los puntos no alineados?
8. ¿Cuál es el conjunto de puntos que equidistan de dos puntos dados y al mismo tiempo equidistan de dos planos paralelos dados? (Sugerencia: Considera la intersección de los conjuntos de puntos que representan las dos condiciones separadamente. Puede haber más de una solución, dependiendo de la posición de los elementos dados.)

*9. ¿Cuál es el conjunto de puntos en un plano distantes a lo sumo cuatro centímetros de uno u otro punto de un par de puntos en dicho plano distantes entre sí cuatro centímetros?

10. Sean L y M dos rectas cualesquiera que se intersecan. Elijamos dos sistemas de coordenadas cualesquiera sobre esas rectas (con el origen no necesariamente en el punto de intersección). Tracemos un cierto número de rectas que unan puntos correspondientes; esto es, puntos con las mismas coordenadas. Por ejemplo, véase la figura A.

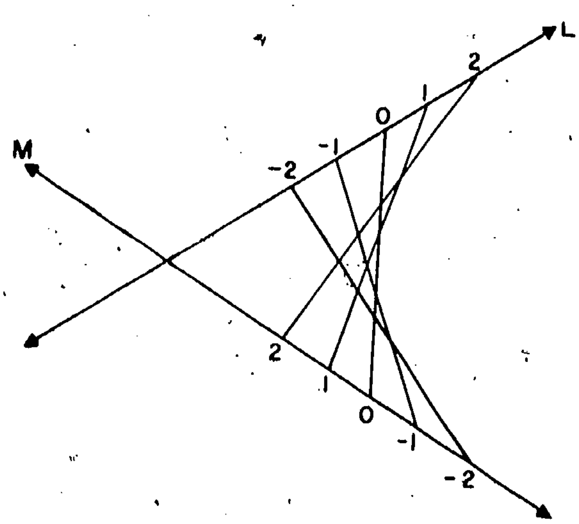


Figura A.

Si se dibujan bastantes rectas, la figura parecerá incluir una curva aproximadamente lisa. Ensaya esta construcción, utilizando diferentes pares de rectas y distintos sistemas de coordenadas.

La construcción es completamente general, pero algunos sistemas de coordenadas sobre las dos rectas nos darán mejores resultados que otros.

11. ¿Cuál es el conjunto de puntos en un plano que están a una distancia d especificada de un cuadrado de lado 2 en dicho plano? Considera los tres casos: $d > 1$, $d = 1$, $d < 1$.

*12. F y G son dos puntos en el plano E, y $FG = 4$. Haz un dibujo del conjunto de puntos P de E, tales que $PF + PG = 5$.

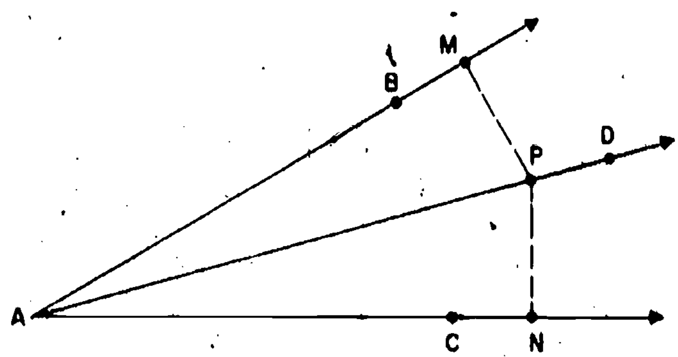
Otra caracterización que puedes incluir en la lista anterior es el teorema siguiente:

Teorema 14-1. La bisectriz de un ángulo, menos su extremo, es el conjunto de los puntos del interior del ángulo equidistantes de los lados de dicho ángulo.

Es decir: Sea $\overrightarrow{AD}$ la bisectriz del $\angle BAC$.

(1) Si P está sobre $\overrightarrow{AD}$, pero $P \neq A$, entonces P está en el interior del $\angle BAC$ y la distancia de P a $\overleftrightarrow{AB}$ es igual a la distancia de P a $\overleftrightarrow{AC}$.

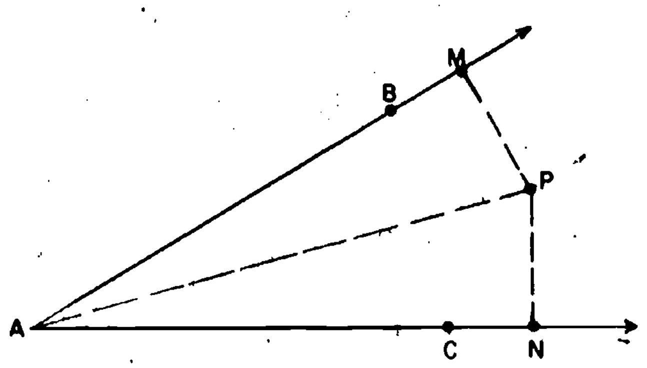
(2) Si P está en el interior del $\angle BAC$ y la distancia de P a $\overleftrightarrow{AB}$ es igual a la distancia de P a $\overleftrightarrow{AC}$, entonces P está sobre $\overrightarrow{AD}$ y $P \neq A$.



(1) Datos: P está sobre $\overrightarrow{AD}$, $P \neq A$, $\overline{PM} \perp \overleftrightarrow{AB}$, $\overline{PN} \perp \overleftrightarrow{AC}$.

Demostrar: P está en el interior del $\angle BAC$; $PM = PN$.

1. P está en el interior del $\angle BAC$.	1. P está sobre $\overrightarrow{AD}$, $P \neq A$, y la definición de bisectriz de un ángulo.
2. $\overline{AP} \cong \overline{AP}$	2. Un segmento es congruente consigo mismo.
3. $\angle PAM \cong \angle PAN$	3. Definición de bisectriz
4. $\angle PMA \cong \angle PNA$	4. Los ángulos rectos son congruentes.
5. $\triangle PMA \cong \triangle PNA$	5. Teorema L.A.A.
6. $PM = PN$	6. Partes correspondientes



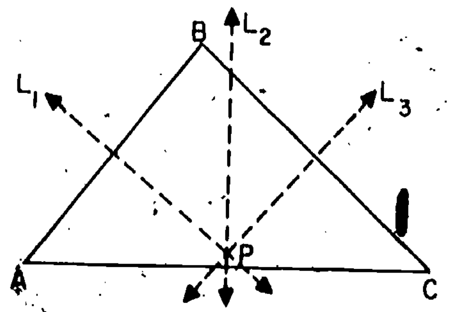
(2) Datos: P está en el interior del $\angle BAC$, $\overline{PM} \perp \overleftrightarrow{AB}$, $\overline{PN} \perp \overleftrightarrow{AC}$, $PM = PN$.

Demostrar: $P \neq A$; P está sobre $\overrightarrow{AD}$.

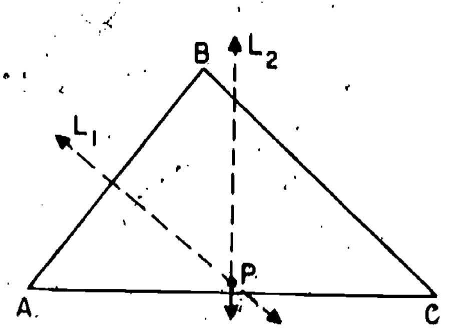
1. $P \neq A$	1. Definición de interior de un ángulo
2. $\overline{PM} \cong \overline{PN}$	2. Definición de segmentos congruentes
3. $\overline{PA} \cong \overline{PA}$	3. Un segmento es congruente consigo mismo.
4. $\angle PMA$ y $\angle PNA$ son ángulos rectos.	4. Datos
5. $\triangle PMA \cong \triangle PNA$	5. Teorema de la hipotenusa y el cateto
6. $\angle PAM \cong \angle PAN$	6. Partes correspondientes
7. P está sobre $\overrightarrow{AD}$.	7. Definición de bisectriz de un ángulo

Como primera aplicación de estas caracterizaciones de conjuntos, demostraremos tres teoremas de concurrencia análogos al teorema 9-27 sobre la concurrencia de las medianas.

Teorema 14-2. Las mediatrices de los lados de un triángulo concurren en un punto equidistante de los tres vértices del triángulo.



Demostración: Sean L_1, L_2, y L_3 las mediatrices de los tres lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$. Si L_1 y L_2 fueran paralelas, entonces $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ serían también paralelas. (¿Por qué?) Por tanto, L_1 y L_2 se intersecan en un punto P.



Por el teorema 6-2, AP = BP, puesto que P está sobre L_1. Además AP = CP, pues P está sobre L_2. Por consiguiente, BP = CP. En virtud del teorema 6-2, esto significa que P está sobre L_3. Por tanto, P está sobre las tres mediatrices y AP = BP = CP, que es lo que se quería demostrar.

<u>Corolario 14-2-1</u>. Existe una circunferencia y sólo una que pasa por tres puntos no alineados.

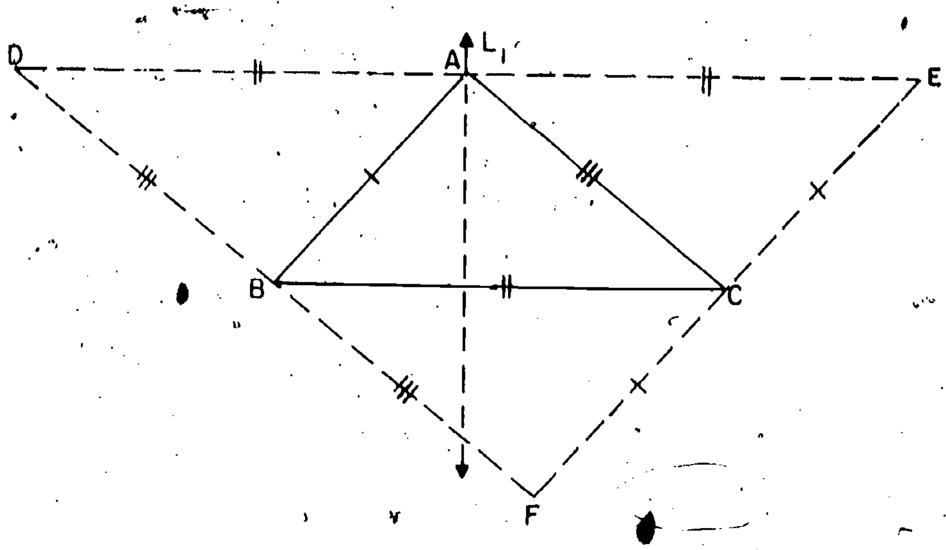
<u>Corolario 14-2-2</u>. Dos circunferencias distintas pueden intersecarse a lo más en dos puntos.

Sugerencia para la demostración: Si dos circunferencias pudieran intersecarse en tres puntos, éstos podrían ser o alineados o no alineados. Aplica el teorema 13-2 y el corolario 14-2-1 para mostrar que cada caso es imposible.

<u>Teorema 14-3</u>. Las tres alturas de un triángulo son concurrentes.

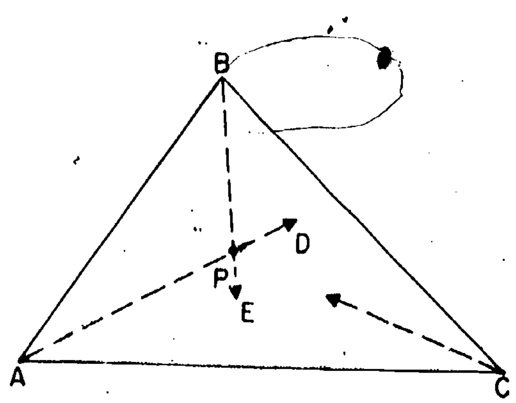
Hasta ahora, hemos empleado la palabra altura principalmente en dos sentidos: En el sentido (1) como el segmento perpendicular desde un vértice de un triángulo a la recta que contiene el lado opuesto y en el sentido (2) como longitud de este segmento perpendicular. En el teorema 14-3 empleamos la palabra en un tercer sentido: como la recta que contiene el segmento perpendicular.

El teorema 14-3 es fácil de demostrar, si se sigue el camino acertado.



Dado el $\triangle ABC$, tracemos por cada vértice una recta paralela al lado opuesto. Estas tres rectas determinan un triángulo $\triangle DEF$. Los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes. Por consiguiente, $BC = AE$ y $BC = DA$. Luego, $DA = AE$. De ahí resulta que la altura correspondiente a A, en el $\triangle ABC$, es la mediatriz de $\overline{DE}$. (Es la recta L_1 de la figura.) Por las mismas razones, las otras dos alturas del $\triangle ABC$ son las mediatrices de los otros dos lados del $\triangle DEF$. Y como las mediatrices son concurrentes, resulta que también lo son las tres alturas.

Teorema 14-4. Las bisectrices de los ángulos de un triángulo concurren en un punto equidistante de los tres lados.

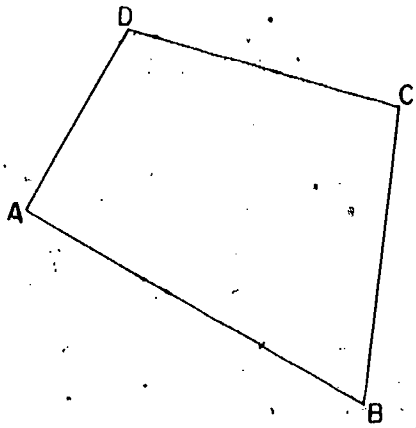


Demostración: Sea P la intersección de las bisectrices $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{BE}$. Por el teorema 14-1, P equidista de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$, por estar P en la bisectriz del $\angle A$. Además, P equidista de $\overleftrightarrow{BA}$ y y $\overleftrightarrow{BC}$, puesto que P está sobre la bisectriz del $\angle B$. Por tanto, P equidista de $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{BC}$. Por consiguiente, en virtud del teorema 14-1, P tiene que estar en la bisectriz del $\angle C$. Resulta así que las tres bisectrices tienen el punto P en común y P equidista de $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{BC}$, que es lo que se quería demostrar.

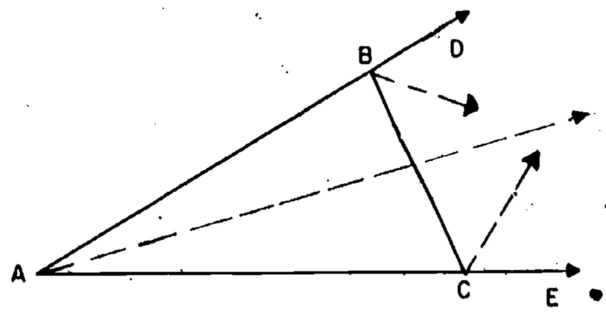
Conjunto de problemas 14-2b

1. Una recta interseca a los lados del $\angle ABC$ en P y en Q. Determina un punto de $\overleftrightarrow{PQ}$ que esté a igual distancia de los lados del ángulo.

2. Imagínate la figura adjunta como un parque de una ciudad. La comisión de parques proyecta colocar una fuente de agua en un punto que equidiste de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ y que también sea equidistante de D y C. Explica la manera cómo determinar ese punto.



3. Demuestra el teorema siguiente: Dado el ángulo $\angle DAE$ y los puntos B, C sobre $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, respectivamente, y situados entre A y D el primero y entre A y E el segundo, entonces las bisectrices de los ángulos BAC, DBC, BCE, son concurrentes.



4. Dadas las tres rectas determinadas por los lados de un triángulo, demuestra que hay exactamente cuatro puntos, cada uno de los cuales equidista de las tres rectas.

5. Dibuja los puntos M y N, distantes entre sí 2 pulgadas, y traza circunferencias con radios $\frac{1}{2}$ pulgada, 1 pulgada, 2 pulgadas y 3 pulgadas, tomando ambos puntos M y N cada vez, como centros.

   Observa que algunas de las circunferencias con centro en M intersecan a circunferencias con centro en N, pero que hay dos casos en los cuales no se intersecan. Describe estos dos casos.

6. Dibuja varios cuadriláteros diferentes y en cada uno traza las bisectrices de los cuatro ángulos. ¿Resulta en esos dibujos que las bisectrices son siempre concurrentes? ¿Puedes imaginar algún tipo especial de cuadrilátero cuyas bisectrices de los ángulos sean concurrentes? ¿Cómo podrías describir de un modo general tales cuadriláteros? (Sugerencia: Si las bisectrices de los ángulos concurren en un punto, este punto equidista de los cuatro lados.)

7. Un cuadrilátero se llama <u>cíclico</u> o <u>inscriptible</u>, cuando sus cuatro vértices están sobre una circunferencia. Demuestra que las mediatrices de los cuatro lados y las de las dos diagonales de un cuadrilátero cíclico son concurrentes.

8. ¿Cuál es el conjunto de los puntos que son vértices de los triángulos rectángulos que tienen un segmento dado $\overline{AB}$ como hipotenusa?

14-3. Intersección de conjuntos

Consideremos el siguiente problema: En un plano dado E, ¿cuántos puntos están a una distancia dada r de un punto dado A de E, y son, además, equidistantes de dos puntos dados B y C de E?

Un tal punto P tiene que satisfacer a las dos condiciones:

(1) $AP = r$ (2) $BP = CP$

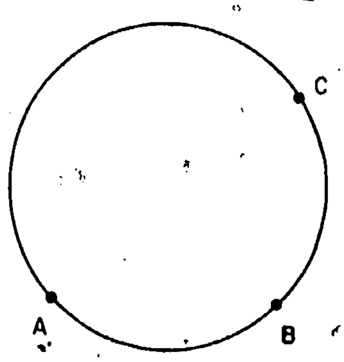
Consideremos estas condiciones separadamente. Si P satisface a (1), entonces P puede estar en cualquier punto de la circunferencia de centro A y radio r. Con otras palabras, el conjunto de los puntos que satisfacen a (1) es esta circunferencia. De manera análoga, en virtud del teorema 6-2, el conjunto de los puntos que satisfacen a (2) es la recta perpendicular en el punto medio de $\overline{BC}$, o sea, la mediatriz de este segmento. Si P tiene que satisfacer a ambas condiciones, entonces tiene que pertenecer a ambos conjuntos; esto es, P tiene que ser un punto de la intersección de los dos conjuntos. Puesto que la intersección de una recta y una circunferencia puede constar de dos puntos, uno, o ninguno, la respuesta a nuestro problema es dos puntos, uno solo, o ninguno, dependiendo de la posición relativa de A, B y C y del valor de r. El método ilustrado mediante este problema es muy útil, pues nos permite considerar un problema complicado descomponiéndolo en partes separadas que luego en la etapa final de la solución se vuelven a reunir. Si recuerdas las demostraciones de los teoremas 14-2 y 14-4, observarás que tal era el método fundamental de la prueba. En el teorema 14-2, por ejemplo, obtuvimos el punto P como intersección del conjunto L_1 definido por $PA = PB$ y el conjunto L_2 definido por $PA = PC$.

Muchas de las construcciones que consideraremos en las próximas secciones están basadas en el método de la intersección de conjuntos.

Conjunto de problemas 14-3

1. $\overline{AB}$ es un segmento de 6 pulgadas de longitud situado en un plano E. Describe la localización de los puntos P en E que están a 4 pulgadas de A, y a 5 pulgadas de B.
2. $\overline{AB}$ es un segmento de 4 pulgadas de longitud situado en un plano E. C y D son puntos de E tales que D está sobre $\overline{AB}$, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ y $\overline{CD}$ tiene 3 pulgadas de longitud. Describe el conjunto de los puntos P que equidistan de A y B, y que están a 5 pulgadas de C.

*3. En un lago circular hay tres muelles situados en los puntos A, B, C. Dibuja un diagrama que indique aquellos puntos del lago que están más cercanos a A que a B o a C.



4. ¿Hay puntos en un plano que satisfacen a las siguientes condiciones? Si los hay, di cuántos y cómo se determina cada uno. Haz un esquema para ilustrar tu respuesta.

   Se da BC = 6 pulgadas.

   a. 4 pulgadas de B y 3 pulgadas de C.
   b. 10 pulgadas de B y 10 pulgadas de C.
   c. 10 pulgadas de B y equidistante de C y B.
   d. 2 pulgadas de B y 4 pulgadas de C.

14-4. Construcciones con regla y compás

Un problema práctico que tiene alguna importancia es el de dibujar una figura con precisión. Esta es la tarea del dibujante o delineante, y en ella utiliza muchos instrumentos para facilitar su trabajo, tales como reglas, compases, compases de proporción o de división, triángulos, escuadras en T y otros muchos aparatos.

El proceso geométrico correspondiente generalmente se llama "construcción" más bien que "dibujo", pero la idea es la misma. Nos permitiremos usar también ciertos instrumentos y entonces el problema fundamental consiste en mostrar la manera como podemos construir diversas figuras con dichos instrumentos.

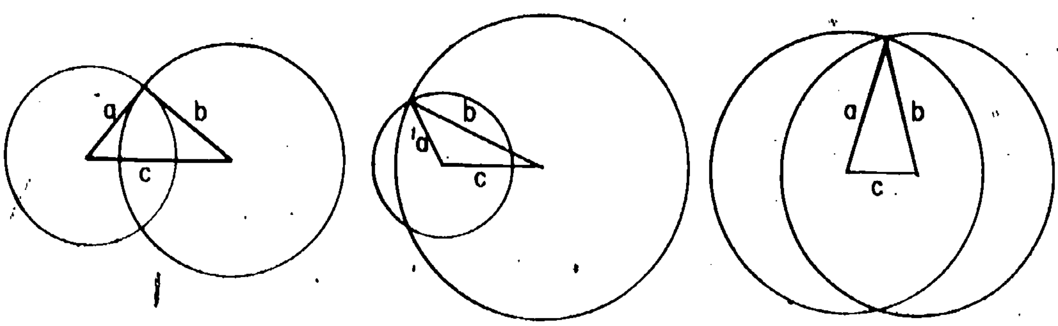
Desde luego, las construcciones dependerán de los instrumentos utilizados. Hasta ahora en nuestro texto hemos estado considerando la regla graduada y el transportador como nuestros instrumentos fundamentales, aunque hubiésemos tenido que introducir el compás en el capítulo 13 para construir circunferencias. Se han considerado varias otras combinaciones de instrumentos, pero la más interesante de todas es todavía la usada ya por los antiguos griegos, la regla y el compás. Dedicaremos lo restante de este capítulo a las construcciones con esos instrumentos.

Una regla es simplemente un aparato para dibujar rectas. No tiene marcas en su borde y, por tanto, no podemos medir distancias con ella. Con un compás podemos trazar una circunferencia con un centro dado y un radio dado. No disponemos de un instrumento para medir ángulos.

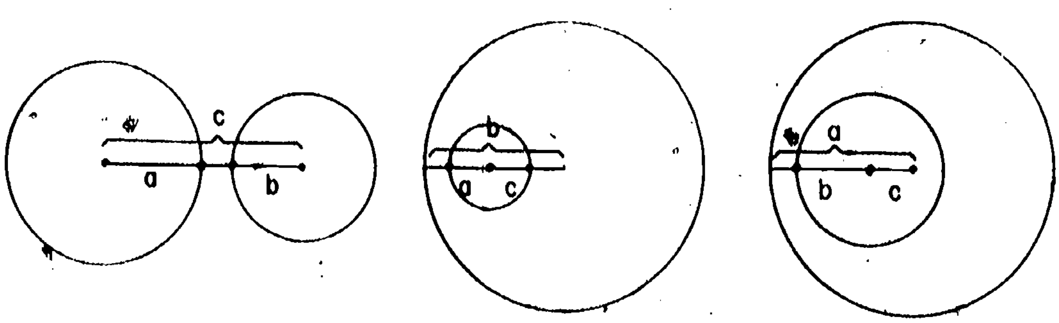
La mayor parte de nuestras construcciones dependerán de las propiedades de intersección de dos rectas, de una recta y una circunferencia, o de dos circunferencias. Se ha considerado el primero de esos tres casos ya en varios lugares como el teorema 3-1, el postulado de separación del plano y el postulado de las paralelas. Del caso de la recta y la circunferencia, se encargó el teorema 13-2. Pero todavía nos queda por considerar el caso de las dos circunferencias. Como era de esperar, éste es el más complicado de los tres, lo mismo en su enunciado que en su demostración. En efecto, esta prueba es tan complicada que no la daremos aquí y la expondremos en el Apéndice IX. He aquí el enunciado del teorema:

Teorema 14-5. (El teorema de las dos circunferencias). Si dos circunferencias tienen radios a y b, y si c es la distancia entre sus centros, entonces las circunferencias se intersecan en dos puntos, uno a cada lado de la recta de los centros, con tal que cada una de las cantidades a, b, c sea menor que la suma de las otras dos.

Algunos de los casos en los cuales se cumplen las desigualdades exigidas por el teorema y las circunferencias se intersecan, están dibujados a continuación:



Que la desigualdad impuesta sobre a, b, c es importante se pone de manifiesto mediante los casos siguientes en que una de las desigualdades estipuladas en el teorema no se verifica y las circunferencias no se intersecan:



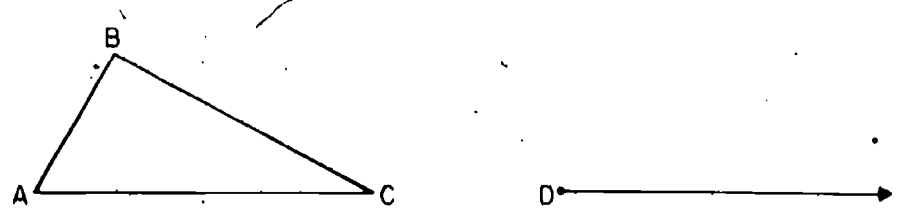
$c > a + b$ $\qquad$ $b > a + c$ $\qquad$ $a > b + c$

14-5. Construcciones elementales

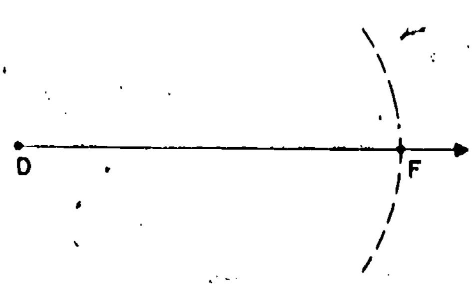
En esta sección, mostraremos la manera de efectuar varias construcciones simples que necesitaremos como etapas o construcciones auxiliares en casos más difíciles. Todas ellas ocurrirán en un plano dado. Tales construcciones las numeraremos del mismo modo que los teoremas.

Construcción 14-6. Reproducir un triángulo dado.

Suponte que se nos da el $\triangle ABC$. Necesitamos construir un triángulo $\triangle DEF$, congruente con $\triangle ABC$, con la base $\overline{DF}$ situada en un rayo dado con extremo D.

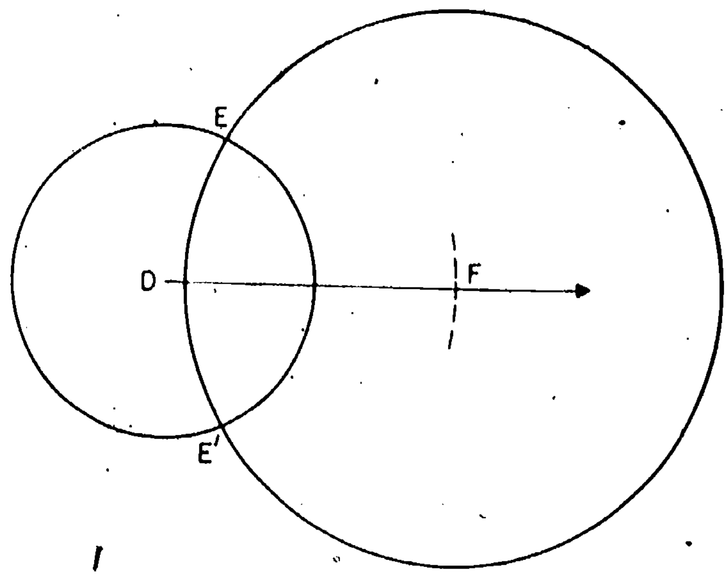


Paso 1. Con el compás, construye una circunferencia con centro en D y radio AC. Esta circunferencia interseca al rayo dado en un punto F, y DF = AC. En la figura, sólo está dibujado un cerco de la circunferencia trazada.



Paso 2. Con el compás, construye una circunferencia con centro en D y radio AB.

Paso 3. Construye una circunferencia con centro en F y con radio BC.

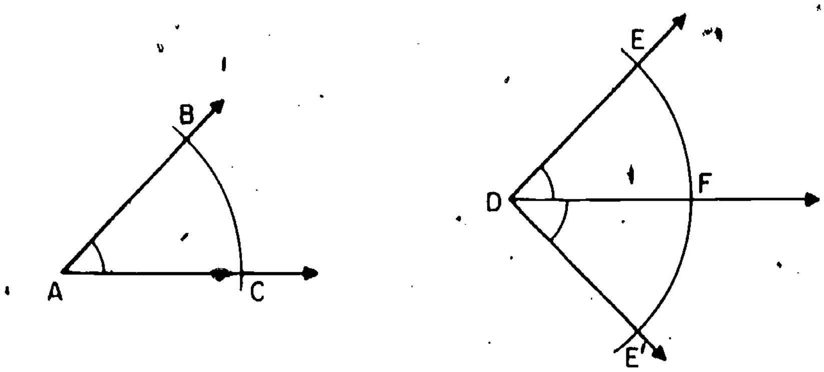


Estas dos circunferencias parece que se intersecan; pero por el teorema de las dos circunferencias tienen que intersecarse, porque cada una de las cantidades AC, AB y BC es menor que la suma de las otras dos, en virtud del teorema 7-7.

Cualquiera de los dos puntos E, E' puede tomarse como el tercer vértice del triángulo buscado. Trazamos los lados con la regla y ya sabemos por el teorema L.L.L. que $\triangle DEF \cong \triangle ABC$.

Quizás recuerdes que al demostrar el teorema L.L.L. se presentó el problema de reproducir un triángulo. Valdría la pena repasar el viejo método y compararlo con el nuevo. (En la demostración del teorema L.L.L. reproducimos el triángulo con la regla y el transportador, utilizando el postulado L.A.L. para verificar la validez de la construcción.)

Construcción 14-7. Reproducir un ángulo dado.

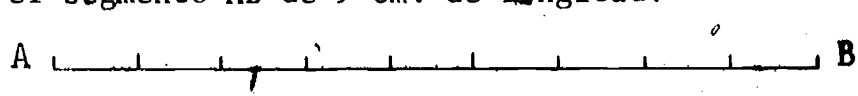


Aquí se nos da un ángulo con el vértice en A, y un rayo cuyo extremo está en D. Necesitamos construir los dos ángulos, que tienen el rayo dado como lado, congruentes con el ángulo dado.

Con A como centro, construimos un arco de circunferencia que corte a los lados del ángulo en los puntos B y C. Con D como centro construimos luego un arco de circunferencia suficientemente grande, con el mismo radio, que corte al rayo dado en F. Entonces haciendo centro en F y con radio BC, trazamos arcos de circunferencias que corten a la de centro D en E y en E'. Dibuja el rayo $\overrightarrow{DE}$ y el rayo $\overrightarrow{DE'}$. Por el teorema L.L.L. será $\triangle DEF \cong \triangle ABC$, y, por consiguiente, $\angle EDF \cong \angle BAC$. Análogamente, $\angle E'DF \cong \angle BAC$.

Conjunto de problemas 14-5a

1. Se da el segmento $\overline{AB}$ de 9 cm. de longitud.



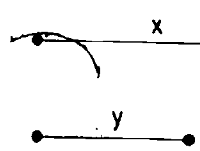
Construye un triángulo con lados que tengan las siguientes longitudes:

a. 5 cm., 6 cm., 8 cm.
b. 7 cm., 5 cm., 3 cm.
c. 3 cm., 3 cm., 3 cm.
d. 4 cm., 7 cm., 3 cm.

2. Dibuja un triángulo ABC en el papel y construye el $\triangle AB'C$ congruente con el $\triangle ABC$, utilizando $\overline{AC}$ como lado en cada uno, y aplicando el teorema A.L.A.
3. Dibuja en el papel un triángulo ABC y un segmento $\overline{MH}$ doble de largo que $\overline{AB}$. Con vértice en M, construye el $\angle HMQ \cong \angle A$. Con H como vértice, construye el $\angle QHM \cong \angle B$. $\angle Q \cong$ _____. $\frac{AB}{MH} =$ _____ $=$ _____.
4. a. Demuestra que siempre es posible construir un triángulo equilátero que tenga un segmento dado como uno de sus lados.

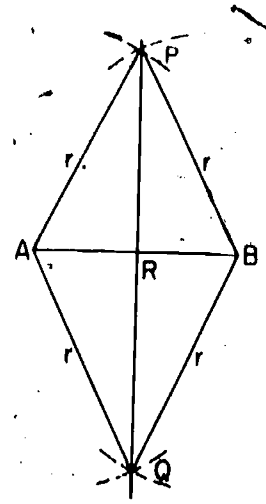
   b. ¿En qué condiciones es posible construir un triángulo isósceles que tenga un segmento dado como uno de sus lados y otro segmento dado como base?
5. a. Construye un triángulo equilátero que tenga x como longitud de un lado.

   b. Construye un triángulo isósceles con y como longitud de la base y x como longitud de uno de los lados congruentes.



<u>Construcción 14-8</u>. Construir la mediatriz de un segmento dado.

Se da el segmento $\overline{AB}$.



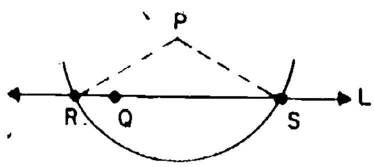
Paso 1. Con un radio r apropiado, construye una circunferencia con centro en A y otra con centro en B. Si se elige r de modo conveniente, esas dos circunferencias se intersecarán en dos puntos P y Q, situados en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AB}$.

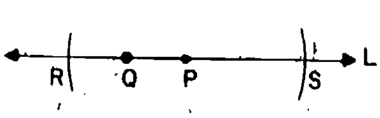
(Pregunta: ¿Qué condición deberá cumplir r para asegurar la intersección de las circunferencias tal como se ha dicho? ¿Puedes imaginar un valor particular de r que sirva con seguridad? En efecto, basta con un solo valor de r para efectuar la construcción.)

Paso 2. Construye la recta $\overleftrightarrow{PQ}$, intersecando a $\overleftrightarrow{AB}$ en R. Tenemos que demostrar que esta recta es la mediatriz de $\overline{AB}$. En virtud del teorema 6-2, R y S, por equidistar cada uno de A y B, están en la mediatriz de $\overline{AB}$. Puesto que dos puntos determinan una recta, resulta que $\overleftrightarrow{PQ}$ es la mediatriz del segmento.

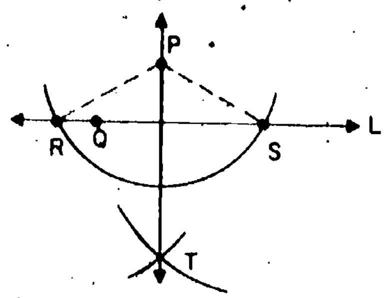
Corolario 14-8-1. Bisecar un segmento dado.

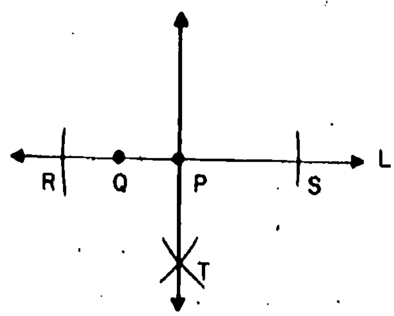
Construcción 14-9. Trazar por un punto dado una perpendicular a una recta dada.





Paso 1. Se nos da el punto P y la recta L. Sea Q un punto cualquiera de L. Dibuja una circunferencia con centro en P y radio r, tomando r mayor que PQ. Entonces L contiene ciertamente un punto interior a la circunferencia (a saber, Q), y por el corolario 13-2-6 interseca a la circunferencia en dos puntos, R y S.

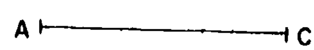




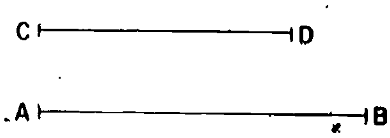
Paso 2. Haciendo centro en R y con radio mayor que $\frac{1}{2}$RS, construye un arco de circunferencia conveniente, y con centro en S y el mismo radio, traza otro arco de circunferencia cortando al primero en T. Entonces, como en la construcción 14-8, P y T equidistan cada uno de R y S, y, por consiguiente, $\overleftrightarrow{PT} \perp \overleftrightarrow{RS}$.

<u>Conjunto de problemas 14-5b</u>

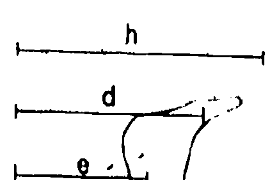
1. Construye un triángulo rectángulo isósceles.
2. Construye un cuadrado cuya diagonal sea congruente con $\overline{AC}$.



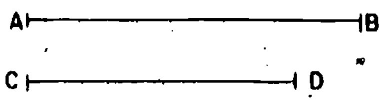
3. Construye un rombo cuyas diagonales sean congruentes con $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.



4. Construye un triángulo, dada una de las alturas h y los segmentos d y e determinados en el lado correspondiente por dicha altura.

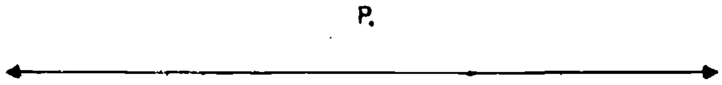


5. Construye un paralelogramo cuyas diagonales sean congruentes con $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, y que forman un ángulo de 60°.

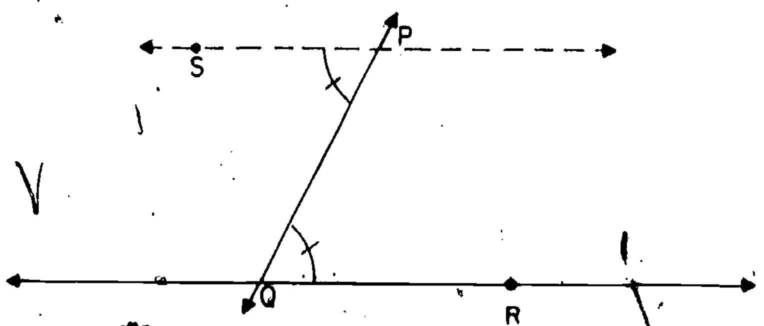


6. Construye un segmento cuya longitud sea la media geométrica de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ del problema 5. (Sugerencia: Consulta el problema 16 del Conjunto de problemas 13-4b.)

<u>Construcción 14-10</u>. Trazar una paralela a una recta dada por un punto exterior dado.

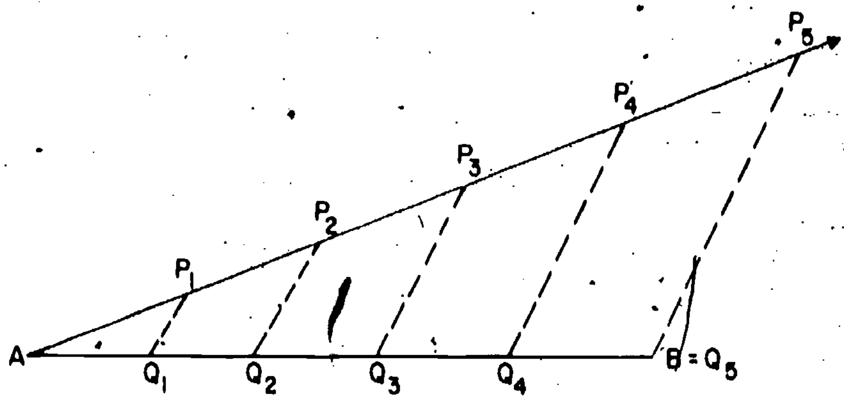


Paso 1. Toma un punto cualquiera Q de la recta, y une P con Q mediante una recta.



Paso 2. Ahora construye el $\angle QPS$, congruente con el $\angle PQR$, de modo que S y R estén en lados opuestos respecto de $\overleftrightarrow{PQ}$. El paso 2 es un ejemplo de la construcción 14-7. Entonces $\overleftrightarrow{PS}$ es paralela a $\overleftrightarrow{QR}$, como se quería.

<u>Construcción 14-11</u>. Dividir un segmento en un cierto número dado de segmentos congruentes.



Dado $\overline{AB}$, queremos dividirlo en n segmentos congruentes. (En la figura, consideramos el caso $n = 5$.)

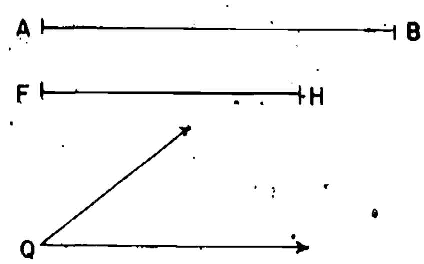
Paso 1. Dibuja un rayo cualquiera partiendo de A, y no situado sobre la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Lleva sobre el rayo a partir de A sucesivamente n segmentos congruentes, $\overline{AP_1}$, $\overline{P_1P_2}$, . . ., $\overline{P_{n-1}P_n}$, de modo que cada uno sólo tenga común con el siguiente un extremo. (La longitud que se elija no importa nada, con tal que sea la misma para todos los segmentos, de manera que se puede tomar arbitrariamente P_1 y luego con el compás llevar $\overline{P_1P_2} \cong \overline{AP_1}$, y así sucesivamente.)

Paso 2. Une P_n con B mediante una recta. Por los otros puntos P_1, P_2, . . ., P_{n-1} traza paralelas a $\overleftrightarrow{P_nB}$. (Esto puede hacerse, pues no es otra cosa que la construcción 14-8.)

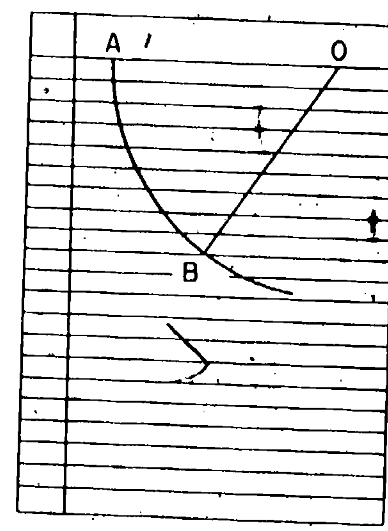
Tales rectas intersecan a $\overleftrightarrow{AB}$ en los puntos Q_1, Q_2, . . ., Q_{n-1}, que dividen al segmento $\overline{AB}$ en n segmentos congruentes. (V. el corolario 9-26-1.)

Conjunto de problemas 14-5c

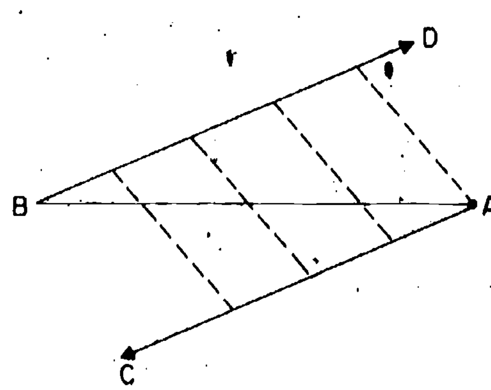
1. Construye un paralelogramo con dos lados y el ángulo comprendido congruentes con $\overline{AB}$, $\overline{FH}$ y $\angle Q$.



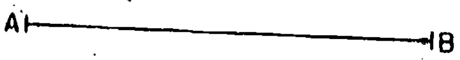
2. El dibujo adjunto muestra la manera en que Roberto Villanueva utilizaba una hoja de papel rayado para dividir un segmento $\overline{AO}$ en 9 partes de igual longitud. Explica la manera en que hubiera podido dividir tal segmento en otros números de partes congruentes. (Supón que las rectas del papel rayado están uniformemente espaciadas.)



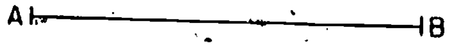
3. La figura adjunta ilustra otro método para dividir un segmento en cualquier número de partes congruentes. Aquí $\overleftrightarrow{AC}$ es una recta conveniente cualquiera y $\overleftrightarrow{BD}$ se ha trazado paralela a $\overleftrightarrow{AC}$. En cada una están marcados el mismo número de segmentos congruentes, y los puntos correspondientes están unidos. Demuestra que el método es correcto.



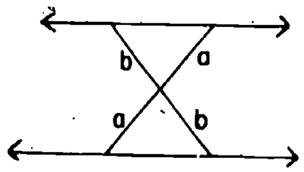
4. Si la longitud de $\overline{AB}$ es el perímetro de un triángulo equilátero, construye dicho triángulo.



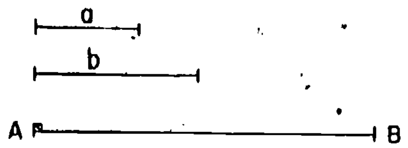
5. Dado $\overline{AB}$, construye un triángulo isósceles en el cual AB es el perímetro, y además la longitud de uno de los lados congruentes es el doble de la longitud de la base.



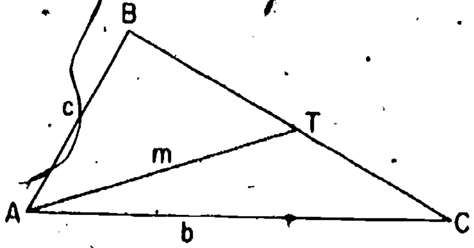
6. La figura adjunta ilustra otro método para trazar una recta paralela a otra, muy útil en la práctica. Explica el método y demuestra que es correcto.



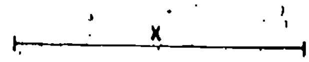
7. Divide un segmento dado $\overline{AB}$ en dos segmentos cuya razón sea igual a la de dos segmentos dados de longitudes a y b. (Sugerencia: Utiliza una construcción análoga a la construcción 14-11.)



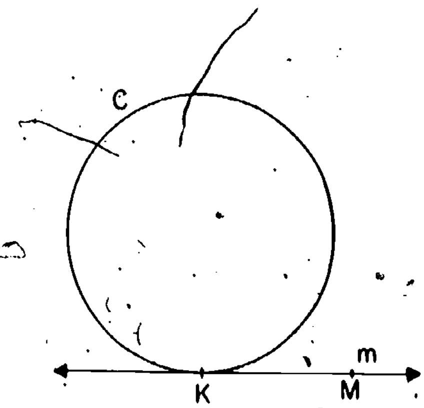
*8. Construye un triángulo ABC, dadas las longitudes de $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y de la mediana de A a $\overline{BC}$.
Datos: Las longitudes c, b, m.
Construir: $\triangle ABC$ de modo que $AB = c$, $AC = b$, mediana $AT = m$.

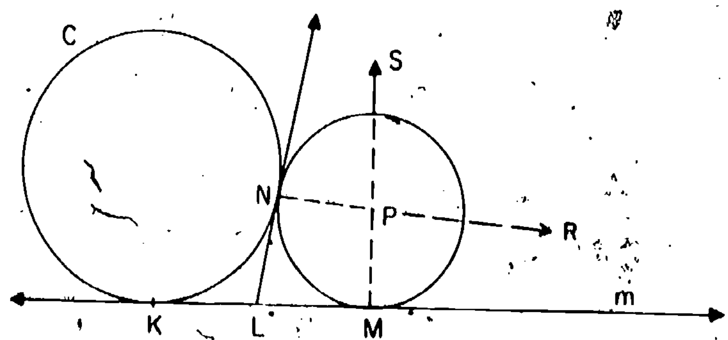


*9. Dado el segmento x como mediana de uno de los lados congruentes de un triángulo isósceles en el cual tales medianas son perpendiculares entre sí, construye dicho triángulo.



*10. Se da una circunferencia C tangente a una recta m en en el punto K. Construye una circunferencia tangente a C y también a m en un punto dado M. (Sugerencia: Analiza la figura segunda en la cual P es el centro de la circunferencia deseada, N el punto de tangencia y $\overleftrightarrow{LN}$ la tangente común en N.)

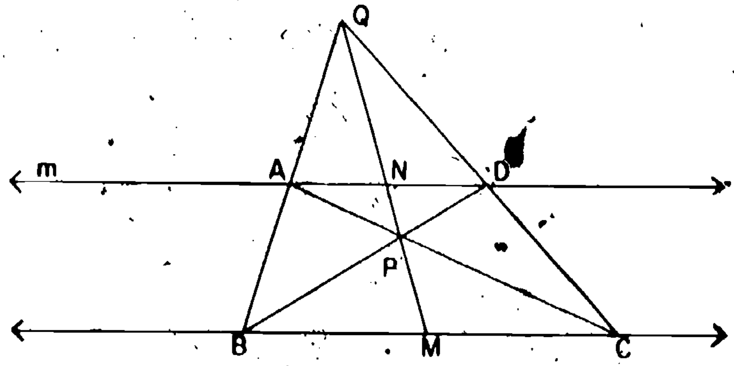




*11. Construye una tangente común externa a dos circunferencias dadas.

*12. Dado un triángulo ABC en el cual cada ángulo tiene medida inferior a 120, construye un punto P en el plano del triángulo tal que $m\angle APB = m\angle BPC = m\angle APC$.

*13. La figura inmediata muestra la manera en que un segmento puede ser bisecado utilizando una recta paralela a él, mediante la regla solamente. Esto es, dada la recta $m \parallel \overline{BC}$, se toma un punto Q cualquiera no situado ni en $\overleftrightarrow{BC}$ ni en m, y se trazan $\overleftrightarrow{QB}$ y $\overleftrightarrow{QC}$ intersecando a m en A y D. Luego se trazan $\overleftrightarrow{BD}$ y $\overleftrightarrow{AC}$, que se intersecan en P. Entonces $\overleftrightarrow{QP}$ biseca a $\overline{BC}$ en M. Demuéstralo.

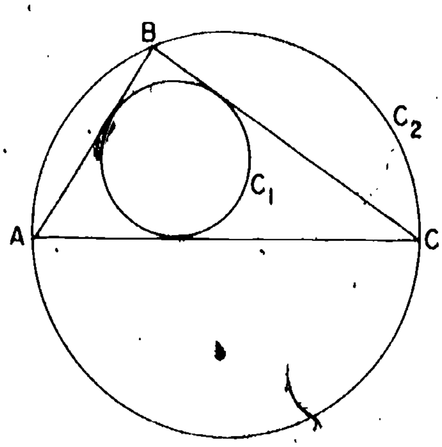


(Sugerencia: La demostración incluirá estas tres proporciones: $\frac{MB}{MC} = \frac{ND}{NA}$, $\frac{MB}{NA} = \frac{MC}{ND}$ y $\frac{MB}{MC} = \frac{MC}{MB}$.)

*14. Dadas dos rectas paralelas m y n, a una distancia d una de otra, determina el conjunto de todos los puntos P tales que la distancia de P a m sea k veces la distancia de P a n, siendo k un número entero positivo dado.)

14-6. Circunferencias inscrita y circunscrita

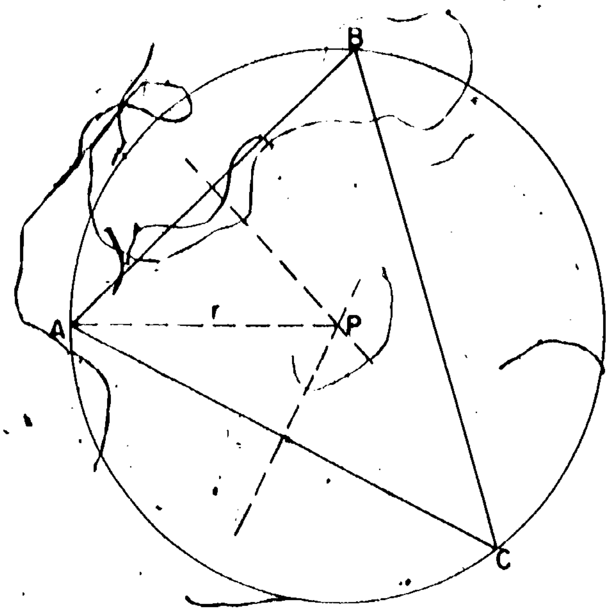
Definiciones: Una circunferencia está inscrita en un triángulo, o el triángulo está circunscrito a la circunferencia, cuando cada lado del triángulo es tangente a la circunferencia. Una circunferencia está circunscrita a un triángulo, o el triángulo está inscrito en la circunferencia cuando cada vértice del triángulo está situado sobre la circunferencia.



En esta figura, el $\triangle ABC$ está inscrito en C_2 y circunscrito a C_1. C_1 está inscrita en el $\triangle ABC$ y C_2 está circunscrita al $\triangle ABC$.

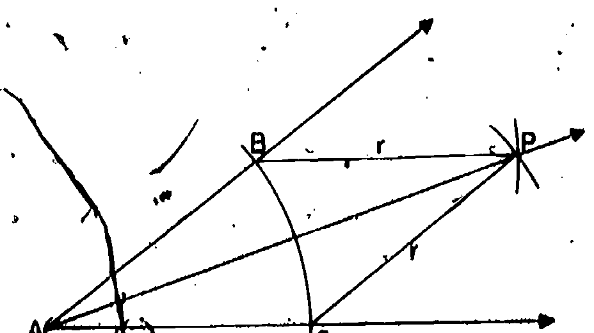
En esta sección aprenderemos a construir con la regla y el compás la circunferencia inscrita y la circunferencia circunscrita, para cualquier triángulo.

<u>Construcción</u> <u>14-12</u>. Circunscribir una circunferencia a un triángulo dado.



Paso 1. Traza las mediatrices de dos lados del triángulo. Para ello, basta con aplicar dos veces la construcción 14-8. Las dos rectas se intersecan en un punto P. Por el teorema 14-2, P está también en la mediatriz del tercer lado. Por el teorema 6-2, esto significa que P equidista de los tres vértices A, B, C, es decir, AP = BP = CP. Construye la circunferencia con centro en P que pasa por A. Entonces esta circunferencia pasará también por B y C.

<u>Construcción</u> <u>14-13</u>. Bisecar un ángulo dado.

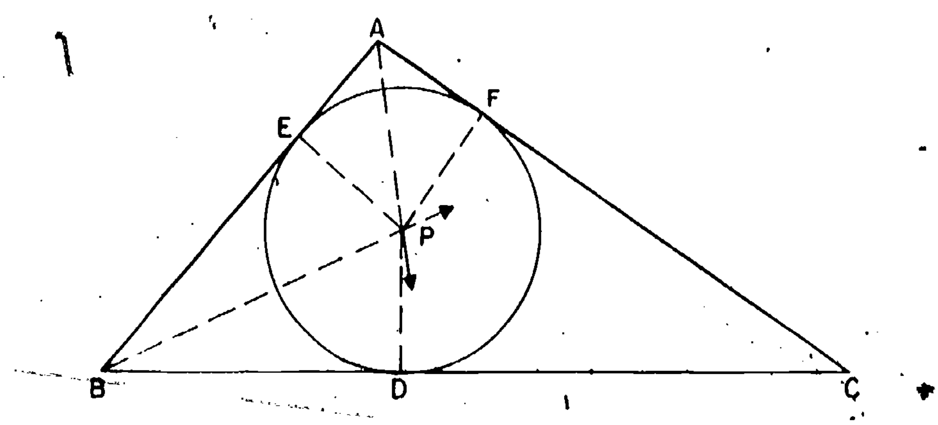


Paso 1. Construye una circunferencia cualquiera con centro en A, y que corte a los lados del ángulo dado en los puntos B y C. Entonces AB = AC.

Paso 2. Construye circunferencias con centros en B y en C, y con el mismo radio r, siendo $r > \frac{1}{2}BC$. En virtud del teorema de las dos circunferencias, las circunferencias construidas se intersecan en dos puntos, uno a cada lado de $\overleftrightarrow{BC}$. Sea P el punto que está a distinto lado que el punto A.

Paso 3. Traza el rayo $\overrightarrow{AP}$. Por el teorema L.L.L., $\triangle BAP \cong \triangle CAP$. Por consiguiente, $\angle BAP \cong \angle CAP$, como se quería.

<u>Construcción</u> <u>14-14</u>. Inscribir una circunferencia en un triángulo dado.



Paso 1. Biseca los ángulos $\angle A$ y $\angle B$, y sea P el punto de intersección de las bisectrices. Por el teorema 14-4, P está también en la bisectriz del $\angle C$.

Paso 2. Traza una perpendicular $\overline{PD}$, desde P hasta $\overline{BC}$. Construye una circunferencia con centro en P que pase por D. Tenemos que demostrar que la circunferencia es tangente a los tres lados del triángulo ABC.

(1) La circunferencia es tangente a $\overline{BC}$, porque $\overline{BC}$ es perpendicular al radio $\overline{PD}$. (V. el corolario 13-2-2.)

(2) Por el teorema 14-1, P equidista de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. Por consiguiente, la circunferencia contiene el punto E que es el pie de la perpendicular desde P a $\overline{AB}$. Luego la circunferencia es tangente a $\overline{AB}$.

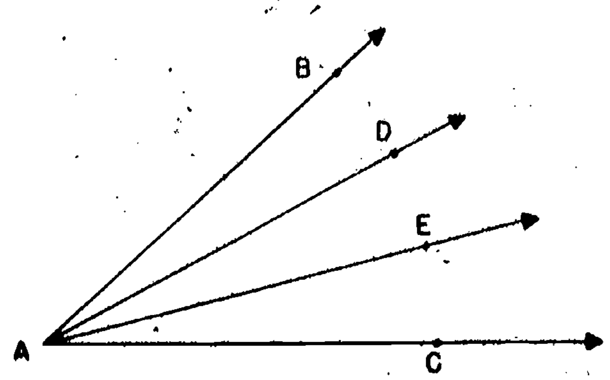
La demostración de la tangencia para el tercer lado es exactamente la misma.

Observa que si sólo queremos un dibujo ligeramente convincente, no hay más que trazar las dos bisectrices y poner una punta del compás en P, ajustando luego la abertura del compás de modo que el lápiz de la otra punta apenas toque a $\overline{BC}$. Sin embargo, para efectuar el dibujo con precisión hay que trazar la perpendicular $\overline{PD}$, como exige la construcción teórica.

14-7. Los problemas de construcciones imposibles de la antigüedad

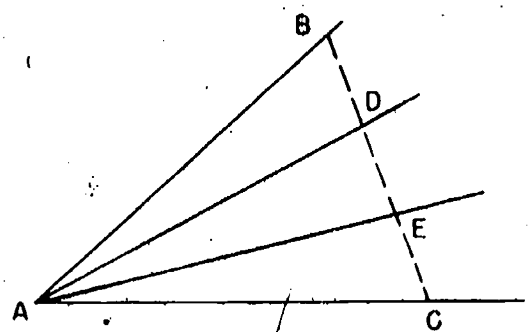
Los antiguos griegos descubrieron todas las construcciones con regla y compás estudiadas hasta ahora, y a la vez muchas más de mayor dificultad. Hubo, sin embargo, algunos problemas de construcciones geométricas, que trataron reiteradamente con gran ahinco de resolver, sin éxito alguno.

(1) El problema de la trisección del ángulo



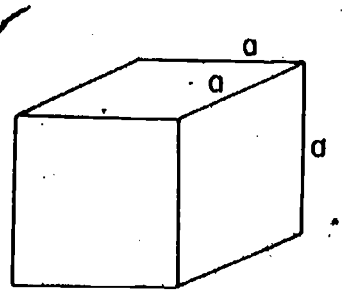
Dado un ángulo $\angle BAC$, queremos construir dos rayos $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AE}$ (con los puntos D y E en el interior del $\angle BAC$) que trisequen al $\angle BAC$. Es decir, queremos que $\angle BAD \cong \angle DAE \cong \angle EAC$.

Nadie ha podido averiguar el modo de hacer esto empleando la regla y el compás. Lo primero que se le ocurre a cualquiera es tomar $AB = AC$, trazar $\overline{BC}$ y luego trisecar a $\overline{BC}$ mediante los puntos D y E.



Pero esta construcción no funciona; nada se ha encontrado que funcione.

(2) La duplicación del cubo. Un cubo de arista a tiene un volumen igual a a^3.



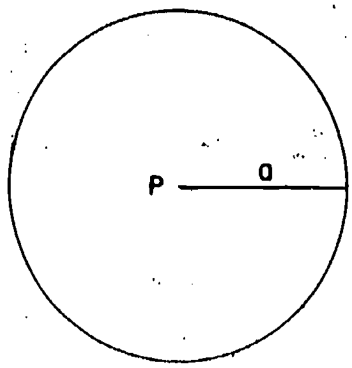
$V = a^3$

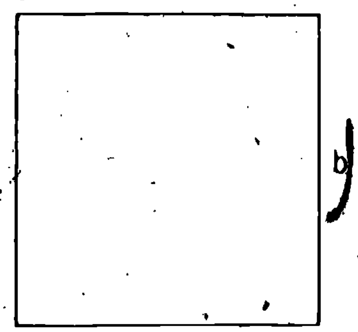
Suponte que se da un segmento de longitud a. Queremos construir un segmento de longitud b, tal que el cubo de arista b tenga un volumen doble que el cubo de arista a. (Algebraicamente esto significa que $b^3 = 2a^3$, o sea, $\frac{b}{a} = \sqrt[3]{2}$.)

Este problema fue atacado, durante mucho tiempo, por los mejores matemáticos griegos, que efectivamente eran hombres de gran talento, pero ninguno de ellos logró resolverlo.

Hay un curioso mito en relación con este problema. Una plaga amenazaba a la población de una cierta ciudad griega, y sus habitantes consultaron entonces al oráculo de Delfos para averiguar el dios que estaba enojado y por qué. La respuesta dada por el oráculo fue que Apolo estaba enojado. Había un altar dedicado a Apolo en la ciudad, que consistía en un cubo sólido de oro, y Apolo quería que su altar fuese exactamente el doble de grande. La gente regresó a sus casas y construyó un nuevo altar, con una arista doble que la del antiguo. Entonces la plaga empeoró en lugar de mejorar. La gente reflexionó y se dio cuenta de que el nuevo altar tenía un volumen ocho veces el del antiguo. Esto planteó el problema de la duplicación del cubo, pero los matemáticos locales fueron incapaces de resolver el problema. De modo que la primera oportunidad de aplicar la matemática a la salud pública fue un total fracaso.

(3) <u>Cuadratura del círculo</u>. Supongamos un círculo dado. Queremos construir un cuadrado cuya área sea exactamente igual a la del círculo.





$A = \pi a^2$ $A = b^2$

(Algebraicamente esto significa que $b = a\sqrt{\pi}$.)

Estos tres problemas ocuparon a mucha gente durante más de dos mil años. Diversos intentos se hicieron para resolverlos mediante construcciones con regla y compás. Finalmente se descubrió, en tiempos relativamente recientes, que dichos tres problemas son imposibles. Imposibilidad en la matemática no significa enteramente lo mismo que "imposibilidad" en la vida cotidiana, y, por consiguiente, requiere una somera explicación.

Ordinariamente cuando decimos que algo es "imposible" queremos significar simplemente que es extremadamente difícil, o que no podemos concebir la manera como puede hacerse, o que nadie ha encontrado la manera de hacerlo, al menos hasta ahora. Así la gente acostumbraba decir hace algún tiempo que era "imposible" construir una máquina que volase, y la gente siguió repitiendo la frase, hasta que vio el primer aeroplano que voló. Se supone "imposible", como se dice, encontrar una aguja en un pajar, y así sucesivamente.

La imposibilidad matemática no es esto. En la matemática hay algunas cosas que efectivamente no se pueden hacer, y es posible <u>demostrar</u> que no pueden hacerse.

(1) Un ejemplo muy sencillo es éste: Por muy listo y persistente que seas, no podrás encontrar un número entero entre 2 y 3, porque no existe tal número entero.

(2) Si el ejemplo anterior parece demasiado trivial para considerarlo seriamente, fíjate en la situación siguiente: Partimos de los números enteros, los positivos, los negativos y 0. Nos está permitido efectuar sumas, restas, multiplicaciones y divisiones. Decimos que un número <u>se puede construir</u>, si podemos obtenerlo a partir de los enteros mediante tales operaciones efectuadas un número finito de veces. Por ejemplo, el siguiente número <u>puede construirse</u>:

$$\frac{\frac{5}{2} - \frac{17}{37}}{\frac{3}{4} + \frac{7}{3}} + \frac{\frac{1}{7} + \frac{3}{5}}{\frac{9}{10} - \frac{37}{47}}$$

El obtenerlo exige 15 pasos.

Ahora supongamos que se nos propone construir el número $\sqrt{2}$. Este problema es imposible de resolver justamente en el mismo sentido que lo son los antiguos problemas griegos. La cuestión está en que los números que podemos construir de acuerdo con las reglas convenidas son todos racionales. Y precisamente, $\sqrt{2}$ no es uno de estos números. No sirve de nada el tratar de obtenerlo entre los números que pueden construirse, porque no pertenece a este conjunto.

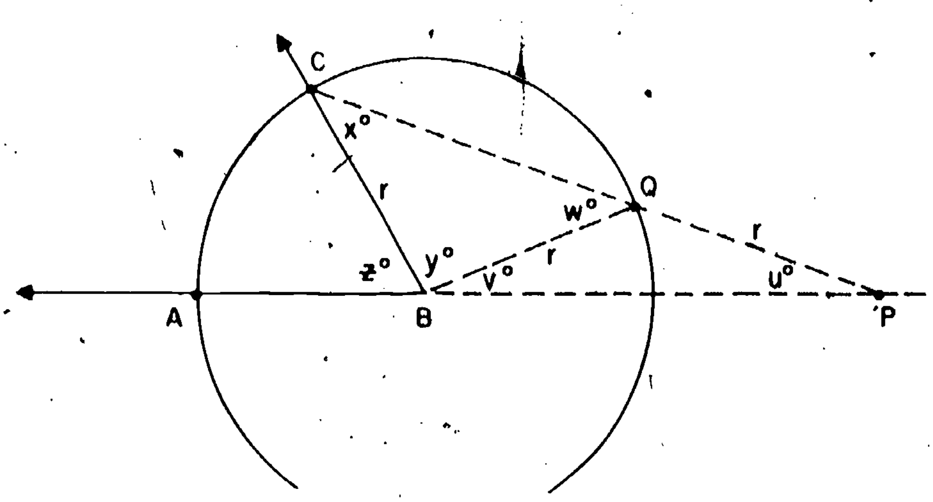
Los problemas referentes a construcciones con regla y compás son estrechamente análogos a los de este ejemplo. Partiendo de los enteros, hay ciertos números que podemos "construir" mediante la aritmética elemental, pero este conjunto de números no incluye $\sqrt{2}$.

Empecemos con un segmento, $\overline{AB}$; hay ciertas figuras que podemos construir con la regla y el compás, pero acontece que entre estas figuras no está incluido ningún segmento $\overline{CD}$ para el cual se verifique que $CD^3 = 2 \cdot AB^3$. Esto es lo que significamos cuando decimos que la duplicación del cubo con regla y compás es imposible de resolver.

El problema de la trisección de un ángulo merece alguna consideración más.

(1) Algunos ángulos pueden trisecarse con regla y compás. Por ejemplo, un ángulo recto puede trisecarse de ese modo. Cuando decimos que el problema de la trisección de un ángulo es imposible de resolver, queremos decir que hay <u>algunos</u> ángulos para los cuales no pueden construirse rayos trisecantes.

(2) El problema de la trisección de un ángulo se convierte en uno soluble cuando cambiamos muy poco las reglas de construcción, <u>permitiéndonos el hacer en el borde de la regla dos marcas</u>. Una vez que hemos marcado así la regla, procedemos del modo siguiente:



Dado un ángulo cuyo vértice es B, dibujamos una circunferencia con centro en B y radio r igual a la distancia entre las dos marcas hechas en el borde de la regla. La circunferencia interseca a los lados del ángulo dado en los puntos A y C. Queremos construir un ángulo cuya medida sea $\frac{1}{3}(m\angle ABC)$.

Se coloca ahora la regla de manera que (1) pase por C. Luego mediante una rotación alrededor de C y un deslizamiento se puede lograr que (2) uno de los puntos marcados Q esté sobre la circunferencia, y (3) el otro punto marcado P esté sobre el rayo opuesto a $\overrightarrow{BA}$. Demostraremos que $m\angle BPC = \frac{1}{3}(m\angle ABC)$. En términos de las medidas angulares indicadas en la figura, las principales etapas de la prueba son las siguientes (procura averiguar las razones en cada caso):

(1) $y = u$

(2) $w = u + v = 2u$

(3) $x = w = 2u$

(4) $z = x + u = 3u$

La ecuación (4) es, desde luego, lo que deseábamos demostrar. Una vez obtenido el ángulo $\angle BPC$, es fácil trazar los rayos trisecantes en el interior del $\angle ABC$, mediante dos aplicaciones de la construcción 14-7.

Conjunto de problemas 14-7

1. Determina el conjunto de puntos que son intersecciones de las bisectrices de los ángulos en la base de los paralelogramos que tienen un segmento fijo de base.
2. Explica la manera de construir un ángulo de:

a. $45°$	e. $120°$
b. $30°$	f. $75°$
c. $22\frac{1}{2}°$	g. $105°$
d. $135°$	h. $67\frac{1}{2}°$

Menciona otros tres ángulos que podrías construir.

3. Al tratar con triángulos, resulta útil el poder designar las diferentes partes mediante símbolos sencillos. Una notación usada muy frecuentemente es la que sigue:

A, B, C, para los tres vértices

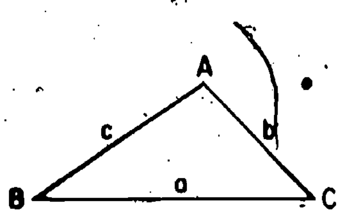
a, b, c, para las longitudes de los lados opuestos

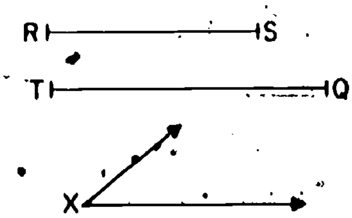
h_a, h_b, h_c, para las alturas correspondientes a $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CA}$, $\overleftrightarrow{AB}$

t_A, t_B, t_C, para las bisectrices de los ángulos A, B, C

m_a, m_b, m_c, para las medianas de los lados $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CA}$, $\overleftrightarrow{AB}$

En cada uno de los problemas siguientes, nos proponemos construir un triángulo que satisfaga a ciertas condiciones. Por ejemplo, podemos dar dos segmentos $\overline{RS}$ y $\overline{TQ}$ y un ángulo, digamos $\angle X$, y pedir que el triángulo ABC a construirse sea tal que $\overline{AB} \cong \overline{RS}$, $\overline{BC} \cong \overline{TQ}$, y $\angle B \cong \angle X$.





Para mayor brevedad, enunciaremos este problema en la forma siguiente: "Construye un triángulo del que se dan dos lados y el ángulo comprendido" o bien "Construye el $\triangle ABC$, dados c, a, y $\angle B$". El estudiante deberá hacer varios problemas de este tipo, enunciándolos en el lenguaje más exacto utilizado antes, hasta que logre la seguridad de comprender bien el significado del enunciado más corto.

Construye el $\triangle ABC$ cuando se dan:

a. a, m_a, $\angle B$

b. a, b y $\angle X$ tales que $m\angle A + m\angle B = m\angle X$

c. a, b, h_b

d. c, $\angle A$, t_A

e. m_a, h_a, $\angle B$

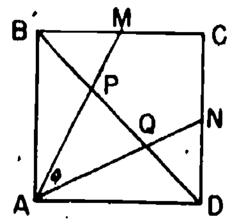
f. h_a, $\angle B$, $\angle C$

g. $\angle C$, h_c, t_c

h. $\angle A$, b, t_c

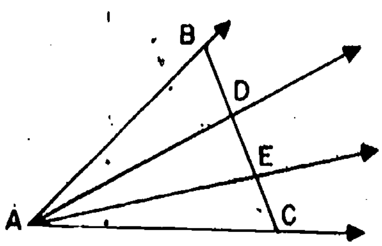
(Sugerencia: Cada vez debes dibujar una figura suponiendo el problema ya resuelto y tratar de ver en ella las posibles relaciones entre sus partes. El análisis de la figura te será de gran ayuda para resolver el problema.)

4. Dado un cuadrado ABCD, y siendo M y N los puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$, y P y Q los puntos en que $\overline{AM}$ y $\overline{AN}$ intersecan respectivamente a la diagonal, $\overline{BD}$, demuestra que P y Q trisecan a $\overline{BD}$, pero que $m\angle BAM \neq \frac{1}{3} \cdot 90$.

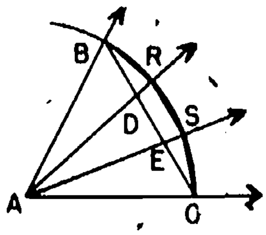


5. Prueba que el método de trisección mencionado en el texto en la página 496 no resulta nunca, utilizando uno de los siguientes métodos:

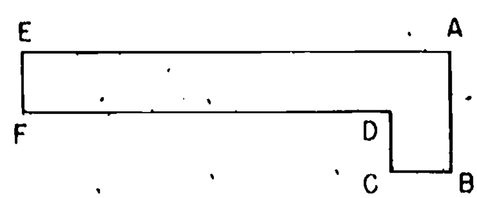
a. Suponte que el método resulta bien para algún ángulo. Entonces en la figura adjunta, $\overline{AD}$ es a la vez la bisectriz del ángulo A y la mediana correspondiente en el $\triangle BAE$. El triángulo es entonces isósceles y AB = AE (¿Por qué?) Pero AB = AC por construcción, de modo que la circunferencia con centro en A y radio AB es intersecada por la recta $\overleftrightarrow{BC}$ en tres puntos. Esto es imposible.



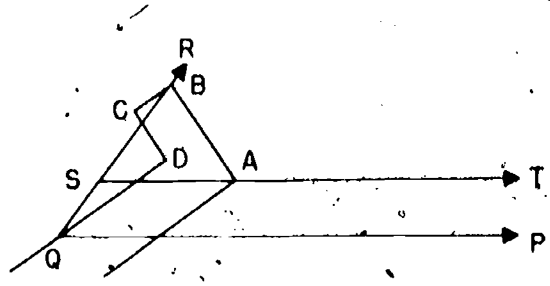
b. Suponte que el método resulta bien. Entonces en la figura adjunta, la circunferencia de centro A y radio AB interseca a los rayos $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AE}$ en R y S. Entonces D y E deberán estar dentro de la circunferencia. (¿Por qué?) Ahora bien, $\overline{RS} \parallel \overline{BC}$. (Considera la bisectriz del $\angle RAS$.) Además, $RS > DE$. (¿Por qué?) Los triángulos ABD, ADE y AEC tienen todos la misma área. (¿Por qué?) Ahora compara las áreas de BDR, DRSE y SEC para llegar a una contradicción.



6. Vamos a definir ahora una escuadra de geómetra como un instrumento hecho con una pieza de cartón o cartulina o un material análogo, de la forma siguiente:



Todos los ángulos son rectos y $EF = CD = \frac{1}{2}AB$. Para trisecar el ángulo PQR con una escuadra de geómetra se usa primero el lado más largo para



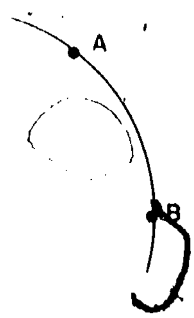
construir $\overrightarrow{ST} \parallel \overrightarrow{QP}$ a la distancia EF. Luego se coloca la escuadra de geómetra de manera que $\overleftrightarrow{DF}$ pase por Q, A esté situado sobre $\overrightarrow{ST}$, y B sobre $\overrightarrow{QR}$. Entonces $m\angle PQA = \frac{1}{3}(m\angle PQR)$. Demuestra esto.

Problemas de repaso

1. ¿Para qué valores enteros de x existe un triángulo cuyos lados tengan longitudes iguales a 4, 6, x?
2. Construye un rombo cuyo perímetro tenga una longitud dada AB y uno de cuyos ángulos mida 45.

3. a. Dado $\overline{AB}$, construye el conjunto de los puntos P en el plano, tales que $m\angle APB = 90$.

   b. Demuestra que este conjunto verifica las condiciones.
4. Se da la recta L y el punto P en el plano E. Describe el conjunto de los puntos en E que están a una distancia dada d de L y a una distancia dada r de P.
5. Dibuja varios cuadriláteros y, en cada uno de ellos, dibuja las mediatrices de los cuatro lados. En general, verás que dichas mediatrices no son concurrentes. Trata de pensar en algunos cuadriláteros especiales cuyas mediatrices sean concurrentes, y haz una lista de ellos. Piensa en algún modo general de describir el conjunto de los cuadriláteros que tienen esta propiedad.
6. Mediante una construcción, determina el centro de la circunferencia del cual $\widehat{AB}$ es un arco.



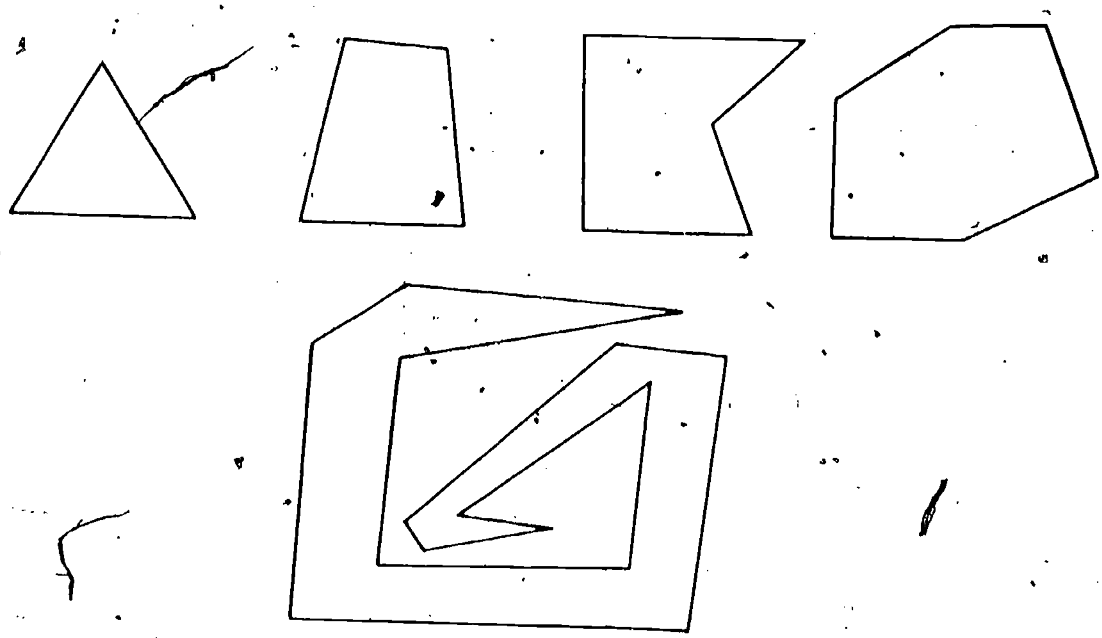
7. Se da un segmento que representa la diferencia entre la diagonal y el lado de un cuadrado. Construye el cuadrado.
8. Sea A el centro de una circunferencia de radio a, y B el centro de una circunferencia de radio b. Si $a + b > AB$, ¿se intersecarán siempre las dos circunferencias A y B?
9. ABCD es un paralelogramo en un plano E. P es un punto de E que equidista de A, B, C y D. Demuestra que entonces el paralelogramo es un rectángulo.
10. ABCD es un trapecio con $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. ¿En qué condiciones existirá un punto P, en el plano del trapecio, equidistante de A, B, C, D? ¿Puede haber más de un tal punto en dicho plano?
*11. Dadas dos rectas paralelas ℓ y m, y una secante n, ¿existen puntos que equidistan de ℓ, m, y n? Demuestra que tu respuesta es correcta.

Capítulo 15

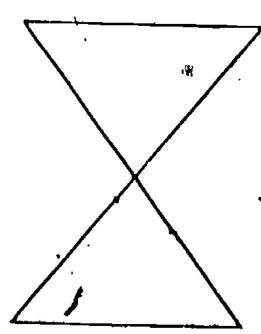
AREAS DE CIRCULOS Y SECTORES

15-1. Polígonos

Un polígono es una figura análoga a una de éstas:

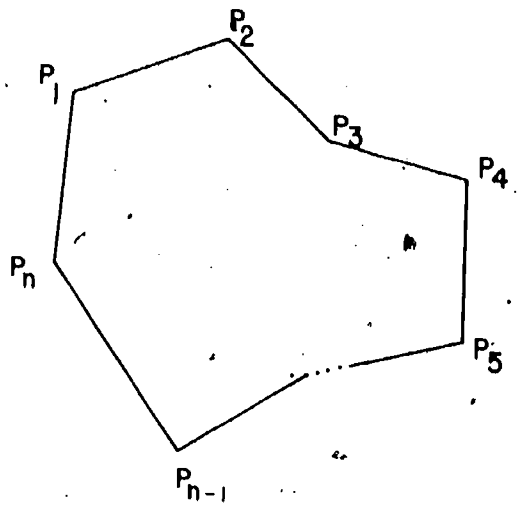


Pero no a ésta:



El concepto o idea de polígono puede definirse de un modo más preciso como sigue: Supongamos que tenemos una sucesión dada $P_1, P_2, \ldots, P_n$

de puntos distintos en un plano. Unimos cada punto con el siguiente mediante un segmento, y finalmente unimos P_n con P_1.



En la figura, la porción punteada indica otros posibles puntos y segmentos, puesto que no sabemos cómo de grande es el número n. Observa que el punto inmediatamente anterior a P_n es P_{n-1}, como debe ser.

Definiciones: Sean P_1, P_2, . . ., P_{n-1}, P_n, n puntos distintos en un plano ($n \geq 3$). Supongamos que los n segmentos $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, . . ., $\overline{P_{n-1}P_n}$, $\overline{P_nP_1}$ tienen las propiedades siguientes:

(1) Ningún par de segmentos se intersecan, excepto en sus puntos extremos, como indica la construcción;

(2) Ningún par de segmentos con un extremo común son colineales.

Entonces la reunión de los n segmentos es un <u>polígono</u>.

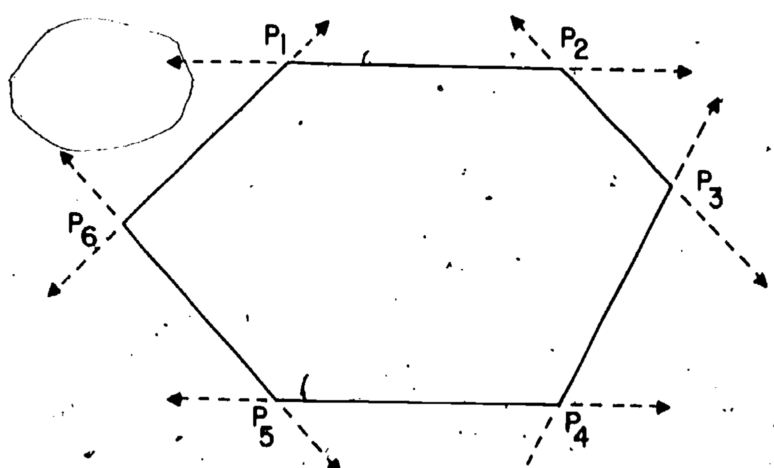
Los n puntos dados son los <u>vértices</u> del polígono, y los n segmentos son los <u>lados</u> del polígono. En virtud de (2), dos segmentos cualesquiera con un vértice común determinan un ángulo, que se llama <u>ángulo del polígono</u>.

Observa que los triángulos son polígonos de 3 vértices y 3 lados, y los cuadriláteros son polígonos de 4 vértices y 4 lados.

Los polígonos de n vértices y n lados se llaman algunas veces n-gonos. Así, un triángulo es un 3-gono y un cuadrilátero es un 4-gono(aunque los términos 3-gono y 4-gono casi nunca se usan.) Los 5-gonos se llaman pentágonos, los 6-gonos son hexágonos, los 8-gonos son octágonos, los 10-gonos son decágonos. Los otros n-gonos, para pequeños valores de n, tienen también nombres especiales derivados del griego, pero en esos casos los nombres especiales rara vez se usan.

Cada lado de un polígono está en una recta que separa al plano en dos semiplanos. Si, para cada lado, el resto del polígono está enteramente en uno de los semiplanos determinados por ese lado como arista, entonces el polígono se llama polígono convexo.

A continuación está dibujado un polígono convexo, con las rectas trazadas para indicar claramente por qué es convexo.



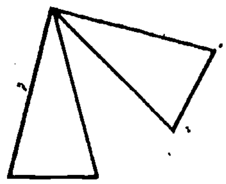
Es una designación natural, porque si un polígono es convexo, resulta que el polígono más su interior forman un conjunto convexo en el sentido definido antes en el Capítulo 3. Justamente antes de la definición de polígono, hemos presentado cinco ejemplos de polígonos. Puedes comprobar tú mismo que el primero, el segundo y el cuarto de esos ejemplos son polígonos convexos, pero en cambio el tercero y el quinto no lo son.

También podrías comprobar que en el primero, segundo y cuarto ejemplos, el polígono más su interior forman un conjunto convexo, pero que en el tercero y quinto casos no sucede así.

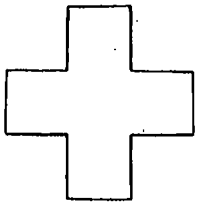
En este capítulo utilizaremos polígonos en el estudio de los círculos, para aprender a calcular áreas y longitudes de circunferencias. En el próximo capítulo calcularemos los volúmenes de prismas, pirámides, conos y esferas. El procedimiento fundamental consiste en aproximar las longitudes y las áreas de figuras curvas mediante las longitudes y las áreas de figuras poligonales y ver lo que sucede cuando las aproximaciones van siendo cada vez mejores. Un tratamiento completo de esta última etapa del proceso aproximativo rebasa el tema principal de este curso, pero no obstante explicaremos la lógica de la situación del modo más claro posible y tan completamente como se estime necesario.

Conjunto de problemas 15-1

1. En la figura de la derecha, cada tres puntos extremos no son colineales, ni cada dos segmentos tienen común más que un extremo. Sin embargo, la figura no es un polígono. ¿Por qué no lo es?



2. ¿Es un polígono la figura adjunta? ¿Cuántos lados tiene? ¿Cuántos vértices? ¿Qué se puede decir respecto de las longitudes de los lados? ¿Y sobre las medidas de los ángulos?



*3. a. Enuncia una definición del interior de un polígono convexo. (Sugerencia: Considera la definición del interior de un triángulo.)

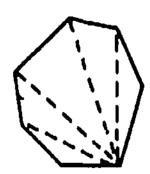
b. Dibuja una figura para ilustrar el hecho de que la reunión de un polígono convexo y de su interior es una región poligonal. (Recuerda la definición de región poligonal dada en el Capítulo 11.)

4. Un segmento que une dos vértices de un polígono que no son extremos de un mismo lado se dice ser una diagonal del polígono.

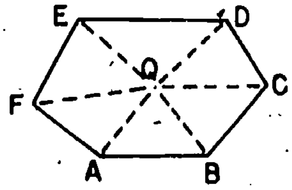
a. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de 3 lados? ¿Y uno de 4 lados? ¿Y uno de 5 lados? ¿Y uno de 6 lados? ¿Y uno de 103 lados? ¿Y uno de n lados?

b. Dibuja un pentágono tal que solamente dos de sus diagonales estén en su interior.

5. Utiliza la figura adjunta para mostrar que la suma de las medidas de los ángulos de un polígono convexo de n lados es $S = (n - 2)180$.

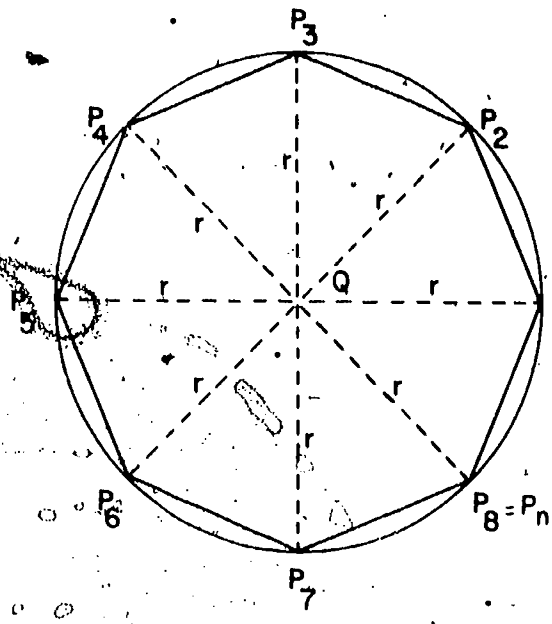


6. Comprueba el enunciado del problema anterior, mediante la figura adjunta.



15-2. Polígonos regulares

Supongamos que tenemos una circunferencia de centro Q y radio r, y dividimos la circunferencia en n arcos congruentes, mediante puntos de división. La figura presenta el caso n = 8.



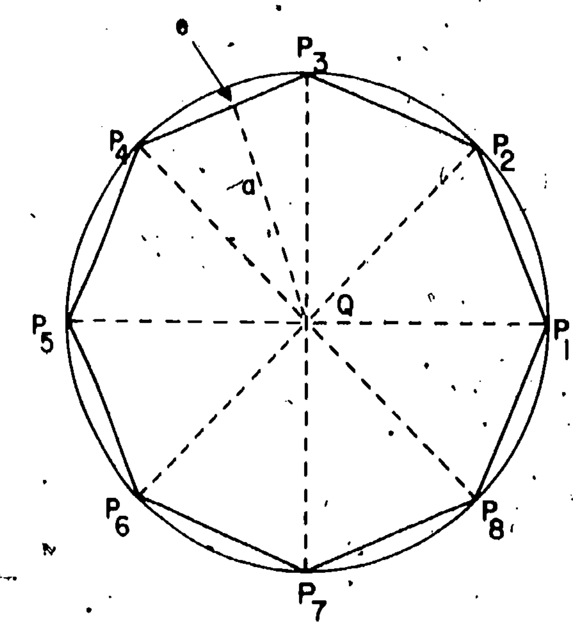
Para cada arco, trazamos la cuerda correspondiente. Esto nos da un polígono de vértices $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Los arcos son congruentes, y, por tanto, las cuerdas (que son los lados del polígono) son también congruentes. Si trazamos segmentos a partir de Q hasta cada vértice del polígono, obtenemos un conjunto de n triángulos isósceles. En cada triángulo, $m\angle Q = \frac{360}{n}$, porque $\frac{360}{n}$ es la medida del arco interceptado en cada caso. Por consiguiente, todos los triángulos isósceles son congruentes. De ahí se deduce que todos los ángulos del polígono son congruentes; la medida de un ángulo del polígono es el doble de la medida de cualquier ángulo en la base de cualquiera de los triángulos isósceles.

De modo que el polígono tiene todos sus lados y todos sus ángulos congruentes.

Definiciones: Un polígono convexo es regular, si todos sus lados son congruentes y también todos sus ángulos son congruentes. Un polígono se dice inscrito en una circunferencia cuando todos sus vértices están sobre la circunferencia.

Es cierto que todo polígono regular puede inscribirse en una circunferencia, pero no nos detendremos en demostrarlo, porque no necesitaremos dicha propiedad. Sólo utilizaremos polígonos regulares para estudiar las circunferencias, y, por tanto, todos los polígonos regulares que consideremos estarán inscritos en circunferencias de la manera ya descrita.

Si $P_1, P_2, \ldots, P_n$ es un polígono regular inscrito en una circunferencia, entonces los triángulos $\triangle P_1QP_2$, $\triangle P_2QP_3$, . . ., todos son congruentes y tienen la misma base e y la misma altura a. En la figura que sigue, están dibujados esos elementos para el $\triangle P_3QP_4$.



El área de cada triángulo es $\frac{1}{2}ae$, y por consiguiente, el área total del n-gono regular es

$$A_n = n \cdot \frac{1}{2}ae = \frac{1}{2}ane.$$

Definiciones: El número a se llama apotema del polígono. La suma de las longitudes de los lados se llama perímetro.

Denotaremos el perímetro con p. Así que, para un polígono regular, tenemos

$$p = n \cdot e.$$

Con esta notación la fórmula del área resulta ser:

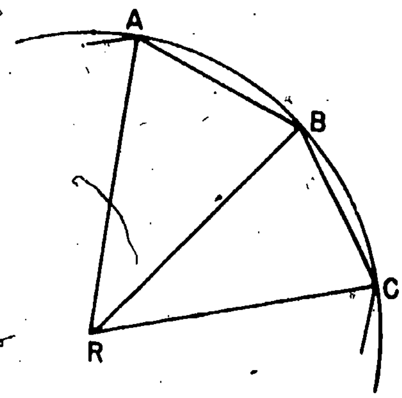
$$A_n = \frac{1}{2} a \cdot p.$$

Conjunto de problemas 15-2

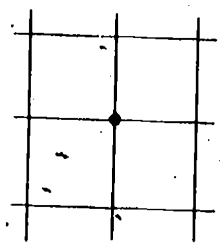
1. ¿Cuál es la razón de la apotema de un cuadrado a su perímetro?
2. a. ¿Qué magnitud angular se determinaría al trazar radios a los extremos de un lado de un octágono regular inscrito?
   b. Utiliza el transportador y la regla graduada para construir un octágono regular.
   c. Utiliza el compás y la regla para construir un octágono regular.
3. Utiliza el transportador y la regla graduada para construir un pentágono regular.
4. Una fórmula que da la suma de las medidas de los ángulos de cualquier polígono convexo de n lados, es $(n - 2)180$. (Consulta el problema 5 del Conjunto de problemas 15-1.) ¿Cuál sería la fórmula para obtener la medida de cada ángulo de un n-gono regular?
5. ¿Es el polígono considerado en el problema 2 del Conjunto de problemas 15-1, un 12-gono regular? Justifica tu respuesta.

6. La figura adjunta representa parte de un polígono regular del cual $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son lados, y R es el centro de la circunferencia en la cual está inscrito el polígono. Copia y completa la tabla siguiente:

Número de Lados	m∠ARB o m∠BRC	m∠ABR o m∠CBR	m∠ABC
3	___	___	___
4	___	___	___
5	___	___	___
6	___	___	___
___	45	___	___
9	40	70	140
___	___	___	144
12	___	___	___
15	___	___	___
18	___	___	___
20	___	___	___
24	___	___	___



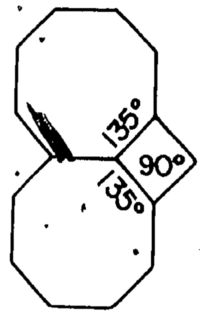
7. Un plano se puede cubrir por regiones cuadradas congruentes, con un vértice común cada cuatro de ellas, como muestra la figura.



a. ¿Cuántos triángulos equiláteros tienen que agruparse alrededor de un vértice para cubrir un plano con tales regiones?

b. ¿Qué otras clases de regiones poligonales regulares pueden utilizarse para cubrir un plano? ¿Cuántas se necesitan alrededor de cada vértice?

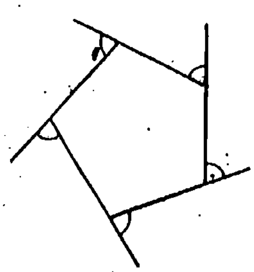
c. Dos octágonos regulares y un cuadrado pueden cubrir completamente la parte del plano alrededor de un punto sin solaparse, como muestra la figura adjunta. ¿Qué otras combinaciones de tres polígonos regulares (dos de los cuales sean análogos) pueden realizar esto? (Sugerencia: Considera las posibles medidas de ángulos, tales como las de la última columna de la tabla construida para el problema 6. Determina soluciones de la ecuación $2x + y = 360$, donde x, y son las medidas de los ángulos de las dos clases de polígonos regulares con distinto número de lados. En la figura $x = 135$, $y = 90$.)



$2 \cdot 135 + 90 = 360$

d. Averigua otras posibilidades de cubrimiento de un plano alrededor de un punto mediante polígonos regulares.

8. Demuestra que la suma de las medidas de los ángulos exteriores de un polígono convexo cualquiera es 360. (Sugerencia: Cuenta los suplementos de los ángulos interiores.)

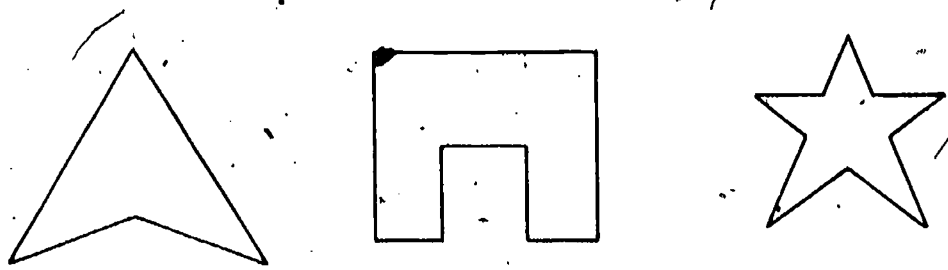


*9. a. Un polígono convexo de n lados (n es un número entero par mayor que 3) puede dividirse en varias regiones cuadrangulares, trazando diagonales desde un vértice dado. ¿Cuántas regiones se obtienen?

b. Deduce una fórmula para la suma de las medidas de los ángulos de un polígono convexo, de la respuesta a la parte (a).

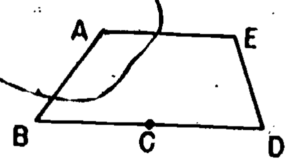
10. Sea S la suma de las medidas de los ángulos de un polígono de n lados. Si el polígono es convexo, entonces

$S = (n - 2)180$. En las tres figuras siguientes, que no son convexas, muestra que la fórmula es todavía correcta si consideramos S como la suma de las medidas de los ángulos de los triángulos en que cada uno puede dividirse, suponiendo que al efectuar la subdivisión no se introducen nuevos vértices.



(a) (b) (c)

11. Demuestra que si en cualquier polígono se inserta un nuevo vértice ("vértice artificial") en uno de los lados, como se indica en la figura, de manera que el número de "lados" resulta aumentado en 1, la fórmula para la suma de los ángulos continúa siendo válida.



12. Los lados de un hexágono regular tienen cada uno longitud igual a 2. Si el hexágono está inscrito en una circunferencia, determina el radio de la circunferencia y la apotema del hexágono.

*13. Un octágono regular cuyos lados tienen longitudes iguales a 1 está inscrito en una circunferencia. Determina el radio de esta circunferencia.

15-3. La longitud de una circunferencia; el número π

En esta sección y en la siguiente, consideraremos n-gonos regulares para diversos valores de n. Como es habitual, denotaremos el lado, la apotema, el perímetro, etc., de un n-gono regular inscrito en una circunferencia de radio r con e, a, p, etc., respectivamente.

Sea C la longitud de la circunferencia a considerarse. Parece razonable suponer que si queremos medir C aproximadamente, podemos hacerlo inscribiendo un polígono regular de un gran número de lados y midiendo entonces el perímetro de ese polígono. Esto es, el perímetro p debe ser una buena aproximación de C cuando n es lo bastante grande. O diciéndolo de otra manera: Si decidimos cuán cerca de C queremos que esté p, podremos obtener p aproximado a C, sin más que tomar n suficientemente grande. Enunciaremos esto en símbolos, escribiendo

$$p \longrightarrow C$$

y diremos que p se aproxima a C como límite suyo.

No podemos demostrar esto, sin embargo; y la razón de ello es un tanto inesperada. En efecto, hasta ahora no disponemos de ninguna definición matemática de lo que significa la longitud de una circunferencia. (No podemos obtener la longitud de la circunferencia meramente añadiendo longitudes de ciertos segmentos, como hicimos para obtener el perímetro de un polígono, puesto que una circunferencia no contiene ningún segmento. Cada arco de una circunferencia, por pequeño que sea, está siempre curvado, aunque sólo sea ligeramente.) Pero el remedio a esta dificultad es fácil: Tomamos el enunciado

$$p \longrightarrow C$$

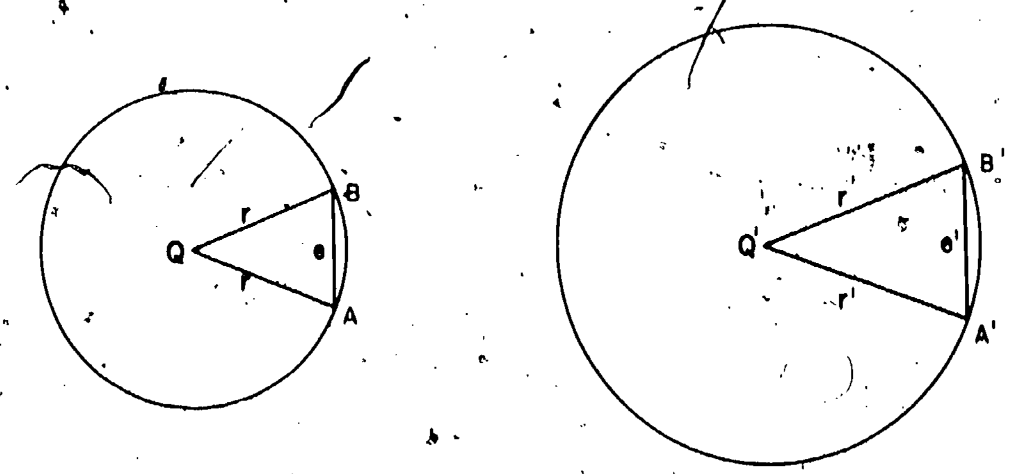
como definición de C, así:

Definición: La longitud de una circunferencia es el límite de los perímetros de los polígonos regulares inscritos.

Ahora nos gustaría seguir adelante, al modo usual, y definir π como la razón de la longitud de la circunferencia a su diámetro. Pero para estar seguros de que esta definición tiene sentido, necesitamos primero saber que la razón $\frac{C}{2r}$ es la misma para todas las circunferencias, cualquiera que sea su tamaño. De modo que necesitamos demostrar lo siguiente:

Teorema 15-1. La razón $\frac{C}{2r}$, de la longitud de la circunferencia al diámetro, es la misma para todas las circunferencias.

La demostración se basa en la semejanza de triángulos. Dada una circunferencia con centro en Q y radio r, y otra circunferencia con centro en Q' y radio r', inscribimos un n-gono regular en cada una de ellas. (Hay que utilizar el mismo valor de n en cada circunferencia.)



En la figura está dibujado un solo lado de cada n-gono, junto con el triángulo isósceles asociado. Ahora bien, $\angle AQB \cong \angle A'Q'B'$, porque cada uno de estos ángulos mide $\frac{360}{n}$. Por consiguiente, puesto que los lados adyacentes son proporcionales,

$$\triangle AQB \sim \triangle A'Q'B'$$

en virtud del teorema de semejanza L.A.L. Por tanto,

$$\frac{e}{r} = \frac{e'}{r'},$$

y así

$$\frac{p}{r} = \frac{p'}{r'},$$

donde p es el perímetro ne del primer n-gono, y p' el perímetro ne' del segundo n-gono. Sean C y C' las longitudes de las circunferencias. Entonces $p \longrightarrow C$, por definición, y $p' \longrightarrow C'$, por definición. Luego,

$$\frac{C}{r} = \frac{C'}{r'}$$

y

$$\frac{C}{2r} = \frac{C'}{2r'},$$

que es lo que se quería demostrar.

El número $\frac{C}{2r}$, que es el mismo para todas las circunferencias, se designa con π. Podemos, por consiguiente, expresar la conclusión del teorema 15-1 mediante la conocida fórmula

$$C = 2\pi r.$$

π es un número irracional que no puede representarse exactamente en forma fraccionaria. Sin embargo, puede aproximarse con números racionales tanto como se quiera. Algunas aproximaciones racionales de π son las siguientes:

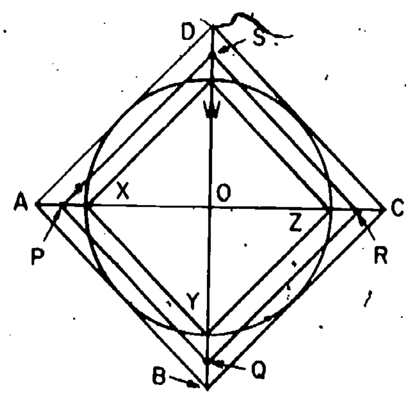
$$3,\ 3.14,\ \frac{22}{7},\ 3.1416,\ \frac{355}{113},\ 3.14159265358979.$$

Conjunto de problemas 15-3

1. Se inscribe un polígono regular en una circunferencia, y luego otro con un lado más que el primero, y así sucesivamente, aumentando un lado cada vez.
   a. ¿Cuál es el límite de la longitud de la apotema?
   b. ¿Cuál es el límite de la longitud de un lado?
   c. ¿Cuál es el límite de la medida de un ángulo?
   d. ¿Cuál es el límite del perímetro del polígono?
2. Una persona alta da pasos de una yarda de largo cada uno. Pasea alrededor de un estanque circular cerca del borde y da 628 pasos. ¿Cuál es el radio aproximado del estanque? (Utiliza 3.14 como valor aproximado de π.)

3. Indica cuál es la mejor de las aproximaciones siguientes de π : 3.14 ó $\frac{22}{7}$.
4. La luna está a una distancia de la tierra de alrededor de 240,000 millas y su trayectoria en torno a la tierra es casi circular. Determina la longitud de la circunferencia que la luna describe cada mes.
5. La tierra está a una distancia del sol de 93,000,000 millas aproximadamente. La trayectoria de la tierra alrededor del sol es casi circular. Determina el recorrido "en órbita" cada año. ¿Cuál es la velocidad de la tierra sobre su órbita en millas por hora?
6. El lado de un cuadrado tiene 12 pulgadas. ¿Cuál es la longitud de la circunferencia inscrita? ¿Y la de la circunferencia circunscrita?

*7. En la figura adjunta, el cuadrado XYZW está inscrito en la circunferencia O, y el cuadrado ABCD está circunscrito a la misma circunferencia. Las diagonales de ambos cuadrados están sobre las rectas $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{BD}$. Dado que los puntos medios P, Q, R y S de $\overline{AX}$, $\overline{BY}$, $\overline{CZ}$ y $\overline{DW}$, al unirlos forman un cuadrado PQRS, se pregunta: ¿es el perímetro de este cuadrado igual, mayor o menor que la longitud de la circunferencia O? Toma OX = 1 y justifica tu respuesta haciendo los cálculos correspondientes.



8. El radio de una circunferencia es 10 pies. ¿Cuánto cambia la longitud de la circunferencia si el radio se aumenta en 1 pie? Si el radio era originariamente 1,000 pies, ¿cuál sería el cambio en la longitud de la circunferencia al aumentar ese radio en 1 pie?

15-4. Area de un círculo

En el Capítulo 11 hemos considerado áreas de regiones poligonales, definidas en términos de una región básica, la región triangular, que es la reunión de un triángulo y de su interior. Al tratar de áreas asociadas con una circunferencia estableceremos una definición básica análoga.

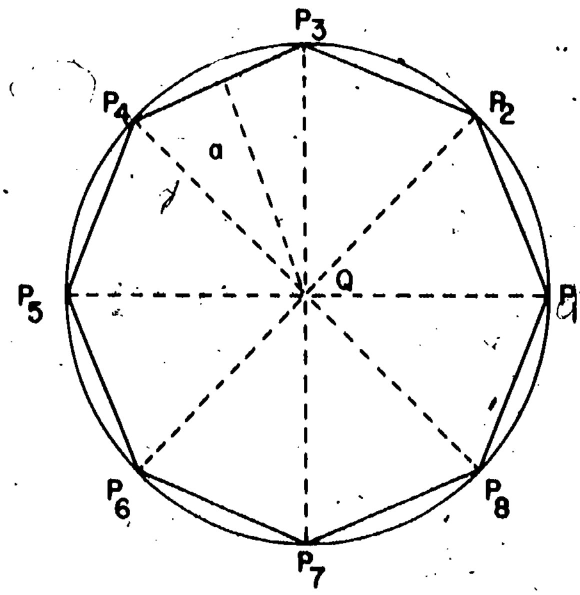
Definición: Una región circular o un círculo, es la reunión de una circunferencia y de su interior.

Al hablar del "área de una región triangular" nos pareció conveniente el abreviar la frase mediante otra: "el área de un triángulo". También, diremos habitualmente "el área de un círculo" como una abreviatura de "el área de una región circular".

Obtendremos ahora una fórmula para el área de un círculo. Ya tenemos una fórmula para el área de un n-gono regular inscrito; ésta es

$$A_n = \frac{1}{2} ap$$

donde a es la apotema y p es el perímetro.



Como se ve, hay tres cantidades implicadas, que son p, a, A_n, y cada una de ellas depende de n. Para obtener nuestra fórmula ~~para el~~ área de un círculo, necesitamos los límites de dichas cantidades cuando n crece indefinidamente.

(1) <u>Qué le sucede a A_n</u>: A_n es siempre un poco menor que el área A del círculo, porque existen siempre puntos que están dentro del círculo, pero fuera del n-gono. Pero la diferencia entre A_n y A es muy pequeña cuando n es muy grande, ya que cuando n es muy grande el polígono casi llena el interior del círculo. Así, esperamos que

$$A_n \longrightarrow A.$$

Pero lo mismo que en el caso de la longitud de la circunferencia, esto no puede demostrarse, puesto que no hemos dado todavía una definición del área del círculo. Aquí también la salida es fácil:

<u>Definición</u>: El <u>área de un círculo</u> es el límite de las áreas de los polígonos regulares inscritos.

Así que, $A_n \longrightarrow A$ por definición.

(2) <u>Qué le sucede a a</u>. La apotema a es siempre un poco menor que r, puesto que un cateto de un triángulo rectángulo es más pequeño que la hipotenusa. Pero la diferencia entre a y r es muy pequeña cuando n es muy grande. De modo que,

$$a \longrightarrow r.$$

(3) <u>Qué le sucede a p</u>. Por la definición de C, tenemos que $p \longrightarrow C$.

Reuniendo los resultados de (2) y de (3), obtenemos

$$\frac{1}{2}ap \longrightarrow \frac{1}{2}rC.$$

Por tanto, $$A_n \longrightarrow \frac{1}{2}rC.$$

Pero sabemos por (1) que $A_n \longrightarrow A$. Luego,

$$A = \frac{1}{2}rC.$$

Combinando esto con la fórmula $C = 2\pi r$, resulta

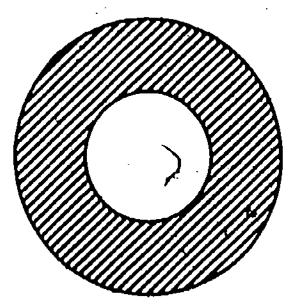
$$A = \pi r^2.$$

De manera que esta fórmula tan conocida resulta ahora ser un teorema:

Teorema 15-2. El área de un círculo de radio r es πr^2.

Conjunto de problemas 15-4

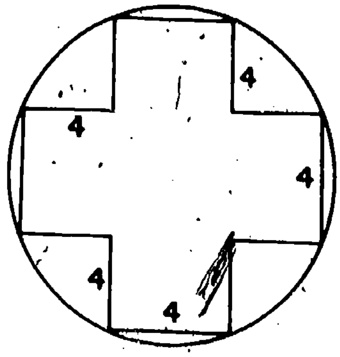
1. Determina la longitud de la circunferencia y el área de un círculo de radio:
   a. 5 b. 10
2. Determina la longitud de la circunferencia y el área de un círculo de radio:
   a. n b. 10n
3. a. Determina el área de la arandela mostrada en la figura adjunta, si su diámetro es 4 cm. y el diámetro del agujero es 2 cm.

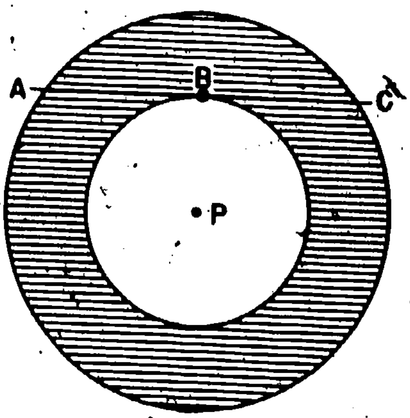
   b. ¿Cambiaría el área si los dos círculos no fueran concéntricos?
4. El radio del mayor de dos círculos es tres veces el radio del más pequeño. Compara el área del primero con el área del segundo.
5. La longitud de la circunferencia asociada con un círculo y el perímetro de un cuadrado son ambos iguales a 20 pulgadas. ¿Cuál de los dos tiene mayor área? ¿Cuánto mayor es?
6. Dado un cuadrado cuyo lado es 10 pulgadas, ¿cuál es el área comprendida entre sus circunferencias circunscrita e inscrita?
7. Un triángulo equilátero está inscrito en una circunferencia. Si el lado del triángulo tiene 12 pulgadas, ¿cuál es el radio del círculo asociado? ¿Cuál es la longitud de la circunferencia?

¿Cuál es el área del círculo?

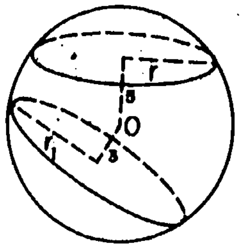
8. En la figura adjunta, la cruz dentro del círculo es divisible en 5 cuadrados. Determina el área que es interior al círculo y que está fuera de la cruz.



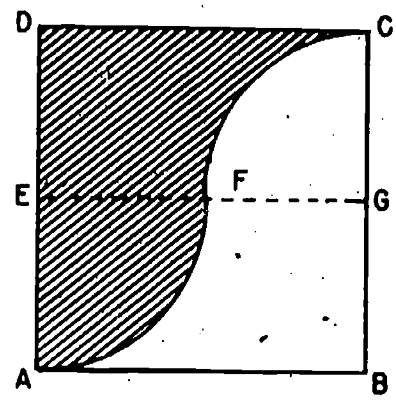
9. Sean dadas dos circunferencias concéntricas de centro P, y sea $\overline{AC}$ una cuerda de la circunferencia exterior que sea tangente a la interior en B. Demuestra que el área del anillo comprendido entre las dos circunferencias es $\pi\,BC^2$.



10. En una región esférica cuyo radio es de 10 pulgadas, se efectúan secciones mediante planos a las distancias 3 pulgadas y 5 pulgadas del centro. ¿Cuál será la sección de mayor área? Demuestra que tu respuesta es correcta.

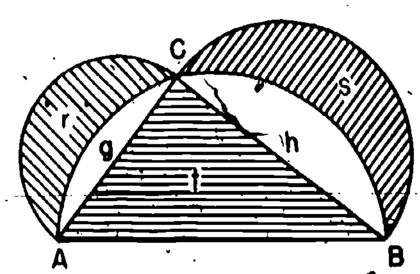


*11. En la figura adjunta, ABCD es un cuadrado en el cual E, F, G son los puntos medios de $\overline{AD}$, $\overline{AC}$, y $\overline{CB}$, respectivamente. $\widehat{AF}$ y $\widehat{FC}$ son arcos circulares con centros E y G, respectivamente. Si el lado del cuadrado es s, determina el área de la porción sombreada.

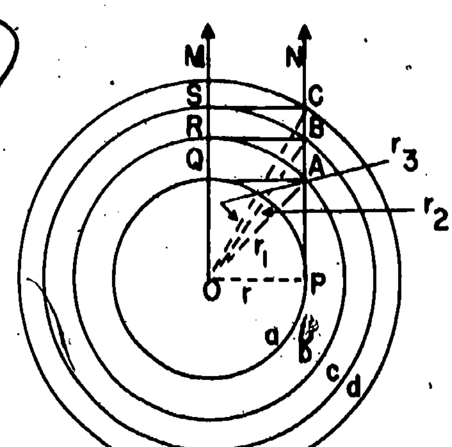


*12. En la figura adjunta, están dibujados semicírculos sobre cada cateto de un triángulo rectángulo, con ese lado como diámetro. Las áreas de las regiones rayadas están indicadas con letras minúsculas.

Demuestra que $r + s = t$.



*13. En la figura adjunta, se presenta un blanco especial para arqueros, mediante el cual puede esperarse que un aficionado dé en la región central con tanta frecuencia como en cualquier región anular. El blanco se ha construido de la manera siguiente: Los rayos $\overrightarrow{OM}$ y $\overrightarrow{PN}$ son paralelos. Se ha trazado una circunferencia de centro O



y radio r igual a la distancia entre los rayos, la cual interseca a $\overrightarrow{OM}$ en Q. $QA \perp \overrightarrow{QM}$. Entonces se ha dibujado una circunferencia de centro O y radio OA ó r_1. Este proceso se repite trazando perpendiculares en R y en S y circunferencias con radios QB y OC. Observa que hemos detenido la construcción al llegar a cuatro circunferencias concéntricas.

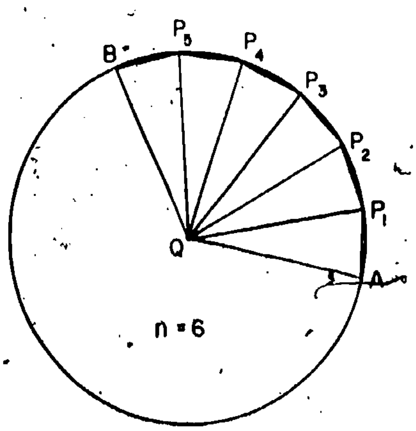
a. Determina r_1, r_2, r_3 en función de r.

b. Demuestra que las áreas del círculo interno y de los tres "anillos", representados por a, b, c, y d, son iguales.

14. Un trapecio isósceles cuyas bases tienen 2 pulgadas y 6 pulgadas está circunscrito a una circunferencia. Determina el área de la porción del trapecio que está fuera del círculo asociado.

15-5. Longitudes de arcos; áreas de sectores

Del mismo modo que hemos definido la longitud de una circunferencia como el límite de los perímetros de los polígonos regulares inscritos, así también podemos definir la longitud de un arco circular como un límite apropiado.



Si $\widehat{AB}$ es un arco de una circunferencia cuyo centro es Q, tomemos puntos P_1, P_2, ..., P_{n-1} sobre $\widehat{AB}$ de tal manera que cada uno de los n ángulos $\angle AQP_1$, $\angle P_1QP_2$, . . ., $\angle P_{n-1}QB$

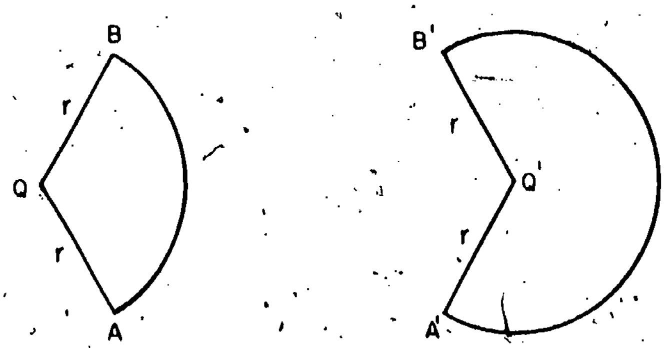
tenga por medida $\frac{1}{n} \cdot m\widehat{AB}$.

<u>Definición</u>: La <u>longitud del arco</u> $\widehat{AB}$ es el límite de $AP_1 + P_1P_2 + \ldots + P_{n-1}B$ al tomar n valores cada vez más grandes.

Es conveniente, en la discusión de longitudes de arcos, considerar la circunferencia completa como un arco cuya medida es 360. Cualquier punto de la circunferencia puede considerarse como los extremos coincidentes del arco. Entonces la longitud de una circunferencia puede considerarse simplemente como la longitud de un arco que mide 360.

El teorema fundamental sobre la longitud de un arco es el siguiente:

<u>Teorema 15-3</u>. Si dos arcos tienen radios iguales, sus longitudes son proporcionales a sus medidas.



$$\frac{\text{longitud } \widehat{AB}}{m\widehat{AB}} = \frac{\text{longitud } \widehat{A'B'}}{m\widehat{A'B'}}$$

La demostración de este teorema es muy difícil, y completamente inadecuada para un curso introductorio de geometría. No trataremos de darla aquí, pero, al igual que en el caso del teorema 13-6 (con el cual está íntimamente relacionado), consideraremos al teorema 15-3 como si fuera un nuevo postulado.

Los teoremas 15-1 y 15-3 pueden combinarse para obtener una fórmula general de la longitud de un arco.

Teorema 15-4. Un arco de medida q y de radio r, tiene una longitud igual a $\frac{\pi}{180}qr$.

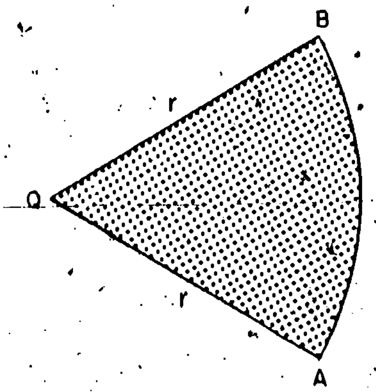
Demostración: Si C es la longitud de una circunferencia de radio r, se tiene, en virtud del teorema 15-3,

$$\frac{L}{q} = \frac{C}{360} .$$

Por el teorema 15-1, $C = 2\pi r$. Sustituyendo este valor de C en la fórmula anterior y resolviendo respecto de L, se obtiene

$$L = \frac{\pi}{180} qr.$$

Un sector de un círculo es una región limitada por dos radios y un arco, como muestra la figura:



Más precisamente:

Definiciones: Si $\widehat{AB}$ es un arco de una circunferencia con centro Q y de radio r, entonces la reunión de todos los segmentos $\overline{QP}$, donde P es un punto cualquiera de $\widehat{AB}$, se llama un sector. $\widehat{AB}$ es el arco del sector y r es el radio del sector.

El teorema siguiente se demuestra de manera análoga al teorema 15-2.

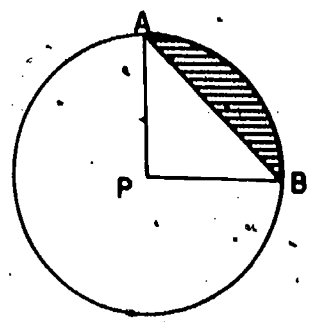
Teorema 15-5. El área de un sector es igual a la mitad del producto de su radio por la longitud de su arco.

Combinado con el teorema 15-4, obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 15-6. El área de un sector de radio r cuyo arco tiene medida q es $\frac{\pi}{360}qr^2$.

Conjunto de problemas 15-5

1. El radio de una circunferencia es de 15 pulgadas. ¿Cuál es la longitud de un arco de 60°? ¿Y la de un arco de 90°? ¿Y la de un arco de 72°? ¿Y la de un arco de 36°?
2. El radio de una circunferencia es de 6 pulgadas. ¿Cuál es el área de un sector cuyo arco es de 90°? ¿Y la de un sector cuyo arco es de 1°?
3. Si la longitud de un arco de 60° es igual a un centímetro, determina el radio del arco. Determina también la longitud de la cuerda del arco.
4. Un sector de radio 2, tiene área π. ¿Cuál es la medida de su arco?
5. Un segmento de un círculo es la región limitada por una cuerda y un arco de la circunferencia asociada. El área de un segmento se obtiene restando el área del triángulo formado por la cuerda y los radios a sus extremos del área del sector. En la figura, $m\angle APB = 90$. Si $PB = 6$, entonces



área del sector $PAB = \frac{1}{4}\pi \cdot 6^2 = 9\pi$.

área del triángulo $PAB = \frac{1}{2} \cdot 6^2 = 18$.

área del segmento $= 9\pi - 18$, ó aproximadamente 10.26.

Determina el área del segmento cuando:

a. $m\angle APB = 60$; $r = 12$.

b. $m\angle APB = 120$; $r = 6$.

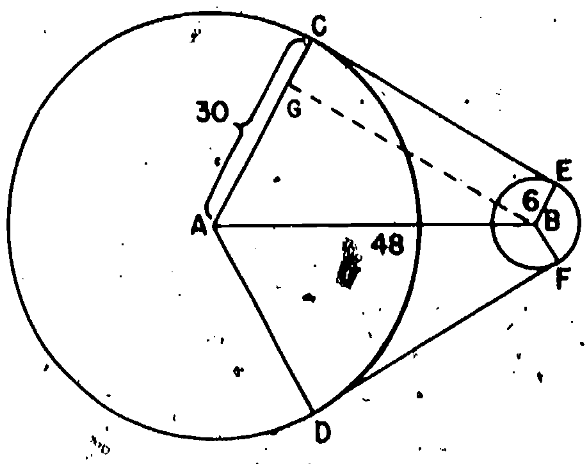
c. $m\angle APB = 45$; $r = 8$.

6. Si una rueda cuyo radio tiene 10 pulgadas gira un ángulo de 36°,

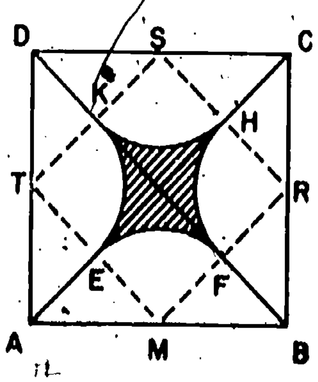
a. ¿cuántas pulgadas recorre un punto del borde de la rueda?

b. ¿cuántas pulgadas recorre un punto de la rueda que dista 5 pulgadas del centro?

7. Una correa continua corre en torno a dos ruedas de radios de 6 pulgadas y 30 pulgadas. Los centros de las ruedas distan 48 pulgadas. Determina la longitud de la correa.

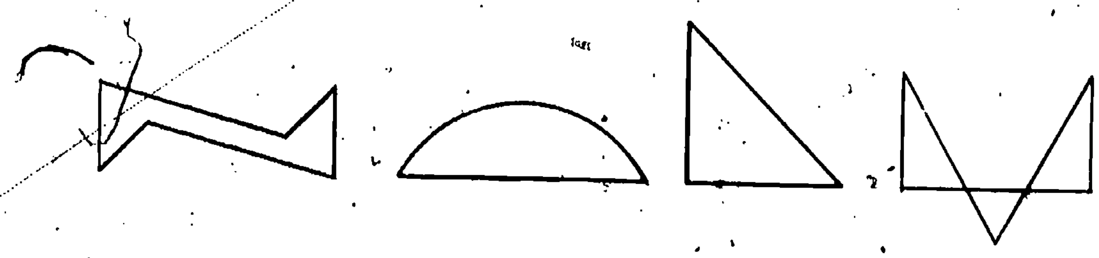


8. En la figura adjunta, ABCD es un cuadrado cuyo lado es de 8 pulgadas. Con centros en los puntos medios de los lados, se trazan arcos tangentes a las diagonales. Determina el área encerrada por los cuatro arcos.



Problemas de repaso

1. ¿Cuáles entre las figuras que siguen son polígonos? ¿Cuáles son polígonos convexos?



2. Indica si todo polígono regular tiene:
   a. cada uno de sus lados congruente con cualquier otro.
   b. cada ángulo congruente con cualquier otro.
   c. al menos dos lados paralelos.
3. ¿Cuál es la medida de un ángulo de cada uno de los siguientes polígonos regulares?
   a. pentágono
   b. hexágono
   c. octágono
   d. decágono
4. Si la medida de un ángulo de un polígono regular es 150, ¿cuántos vértices tiene dicho polígono?
5. a. Si un cuadrado y un octágono regular están inscritos en la misma circunferencia, ¿cuál de los dos tiene la mayor apotema?; ¿el mayor perímetro?
   b. Contesta las mismas preguntas cuando se trata de figuras circunscritas.
6. ¿De qué fórmula referente a polígonos regulares se deduce la fórmula del área de un círculo?
7. Si C es la longitud de una circunferencia de radio r, ¿cuál es el valor de $\frac{C}{r}$?
8. Si la longitud de una circunferencia es de 12 pulgadas, ¿entre qué dos números enteros consecutivos estará la longitud de su radio?

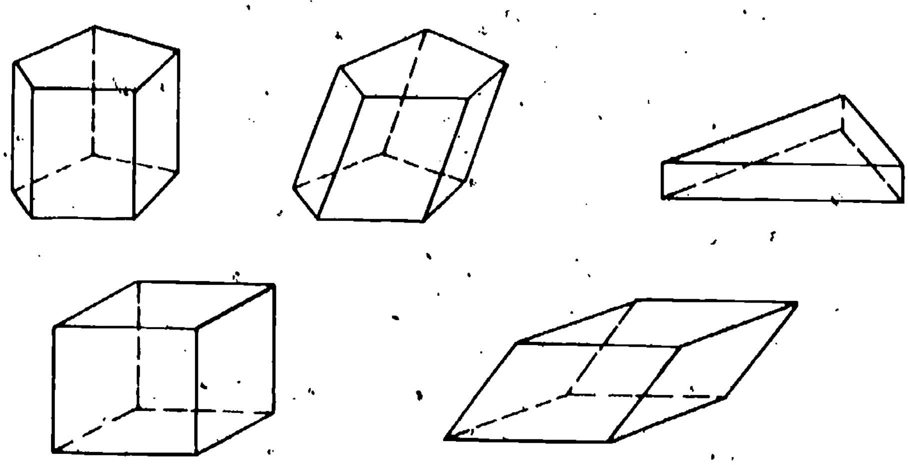
9. Determina la medida de un ángulo exterior de:
   a. un pentágono regular   b. un n-gono regular
10. ¿Cuál es el radio de un círculo, si la longitud de la circunferencia asociada es igual a su área?
11. Si el radio de un círculo es 10 veces el radio de otro, determina la razón de:
   a. sus diámetros.   c. sus áreas.
   b. las longitudes de las circunferencias asociadas.
12. Si un hexágono regular está inscrito en una circunferencia de radio 5, ¿cuál es la longitud de cada lado? ¿Cuál es la longitud del arco de cada lado?
13. Demuestra que el área de un círculo viene dada por la fórmula $A = \frac{1}{4}\pi d^2$, siendo d el diámetro del círculo.
14. Una rueda tiene 20 pulgadas de diámetro. ¿Qué distancia puede recorrer si gira 270°?
15. El ángulo de un sector es 10° y su radio es 12 pulgadas. Determina el área del sector y la longitud de su arco.
16. Demuestra que el área de un triángulo equilátero circunscrito a una circunferencia es cuatro veces el área del triángulo equilátero inscrito en la misma circunferencia.
*17. El siguiente problema surgió en un curso de zoología de colegio: Dos marmotas cavaron sus madrigueras a una distancia r una de la otra, resultando así ser las vecinas más cercanas la una de la otra. Si una tercera marmota llega a la región, ¿cuál es el tamaño del área en que podrá hacer su vivienda para convertirse en la vecina más cercana de cada una de las primeras marmotas?
18. Un polígono regular de 7 lados tiene área 8 y otro polígono regular de 7 lados tiene área 18. ¿Cuál es la razón de un lado del más pequeño a un lado del mayor?

Capítulo 16

VOLUMENES DE CUERPOS O SOLIDOS

16-1. Prismas

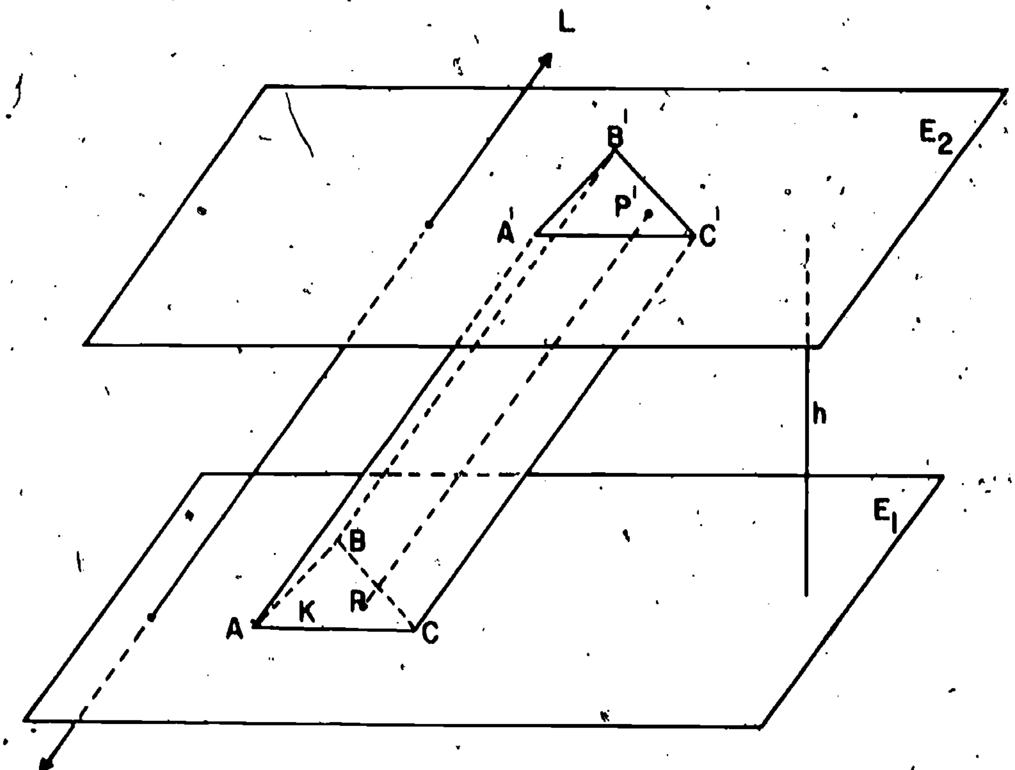
He aquí varias figuras que son prismas:



Un prisma puede concebirse como el sólido engendrado por una región poligonal que se mueve conservándose paralela a sí misma de una posición a otra. Cada punto describe entonces un segmento de recta y todos estos segmentos son paralelos entre sí. El prisma resulta ser así el conjunto de tales segmentos, como si estuviera hecho con un haz de fibras.

Estas consideraciones nos conducen a la siguiente definición precisa:

<u>Definición</u>: Sean E_1 y E_2 dos planos paralelos, L una secante y K una región poligonal en E_1 que no interseca a L. Por cada punto P de K, tracemos un segmento $\overline{PP'}$ paralelo a L y con P' en E_2. La reunión de todos esos segmentos se llama un <u>prisma</u>.

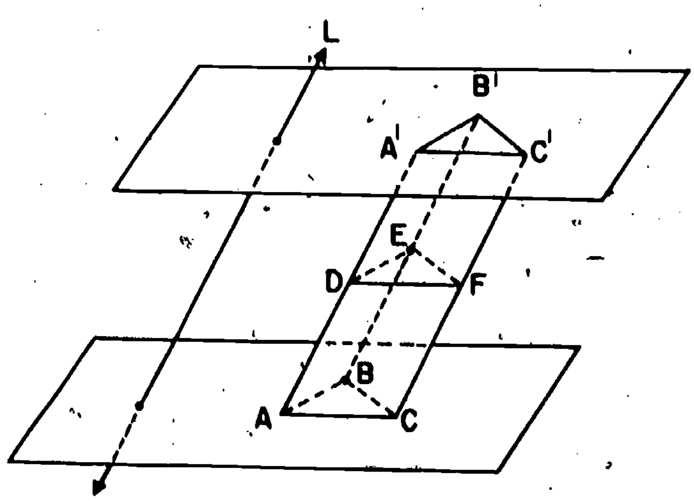


Definiciones: La región poligonal K se llama la base inferior o simplemente la base del prisma. El conjunto de todos los puntos P', esto es, la parte del prisma que está en E_2, se llama la base superior. La distancia h entre E_1 y E_2 es la altura del prisma. Si L es perpendicular a E_1 y E_2, el prisma se llama prisma recto.

Los prismas se clasifican según sean sus bases; un prisma triangular es uno cuya base es una región triangular, un prisma rectangular es uno cuya base es una región rectangular, y así sucesivamente.

Definición: Una sección transversal de un prisma es su intersección con un plano paralelo a su base, con tal que dicha intersección no sea vacía.

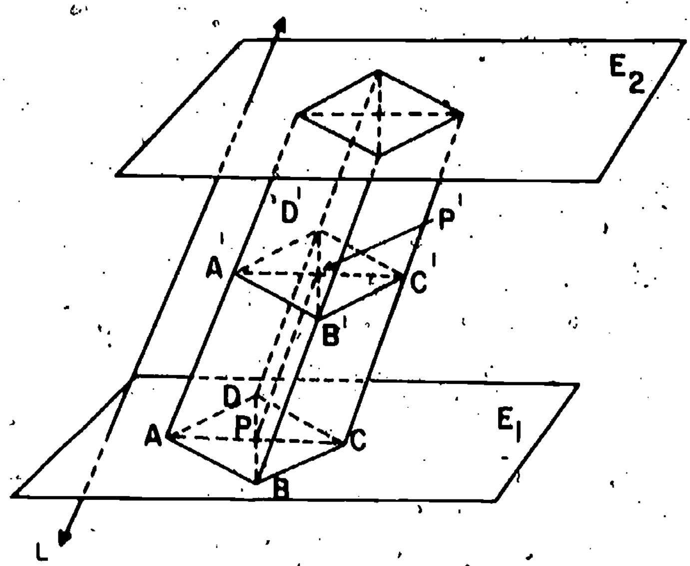
Teorema 16-1. Todas las secciones transversales de un prisma triangular son congruentes con la base.



Demostración: Sea la región triangular ABC la base de un prisma, y sean D, E y F las intersecciones con $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ del plano de la sección transversal. $\overline{AD} \parallel \overline{BE}$ en virtud de la definición de prisma, y $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ por el teorema 10-1., Luego, ABED es un paralelogramó, y en consecuencia, $DE = AB$, puesto que los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes. Análogamente, $DF = AC$ y $EF = BC$. Por el teorema L.L.L., $\triangle DEF \cong \triangle ABC$.

Corolario 16-1-1. Las bases inferior y superior de un prisma triangular son congruentes.

Teorema 16-2. (Teorema de la sección transversal del prisma) Todas las secciones transversales de un prisma tienen la misma área.



Demostración: Por la definición de región poligonal, la base puede descomponerse en regiones triangulares. Con ello el prisma resulta descompuesto en prismas triangulares cuyas bases son regiones triangulares.

Por el teorema 16-1, cada triángulo de la base es congruente con el triángulo correspondiente de la sección transversal. (Así, en la figura, $\triangle PAB \cong \triangle P'A'B'$, $\triangle PBC \cong \triangle P'B'C'$, y así sucesivamente.) El área de la base es la suma de las áreas de las regiones triangulares en que queda descompuesta la base; y el área de la sección transversal es la suma de las áreas de las correspondientes regiones triangulares en la sección transversal. Puesto que triángulos congruentes tienen la misma área, resulta demostrado el teorema.

Corolario 16-2-1. Las dos bases de un prisma tienen áreas iguales.

(Nota: Puesto que no hemos definido la congruencia para figuras más complicadas que los triángulos, el teorema 16-2, aunque intuitivamente claro, ha tenido que demostrarse utilizando las definiciones disponibles. Sin embargo, es evidente que con una razonable definición general de congruencia entre figuras geométricas, el teorema continuaría siendo válido para cualquier prisma. En el Apéndice VIII se da tal definición de congruencia, y entonces la demostración del teorema 16-1 sólo exige una leve modificación para probar que la sección transversal de cualquier prisma es congruente con la base.)

Ordinariamente sólo tendremos que tratar con prismas convexos, esto es, con prismas cuyas bases son regiones poligonales convexas. Podemos, pues, hablar de un "lado" o de un "vértice" de la base.

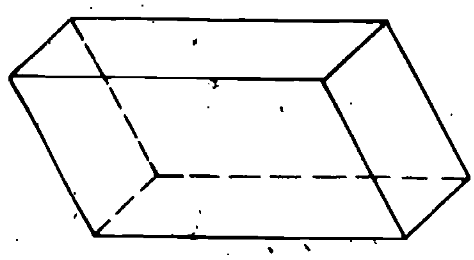
En las definiciones siguientes, la notación es la misma que la usada en la definición de un prisma:

Definiciones: Una arista lateral de un prisma es un segmento $\overline{AA'}$, donde A es un vértice de la base del prisma. Una cara lateral es la reunión de todos los segmentos $\overline{PP'}$ para los cuales P es un punto en un lado específico de la base. La superficie lateral de un prisma es la reunión de todas sus caras laterales. La superficie total de un prisma es la reunión de su superficie lateral y de sus bases.

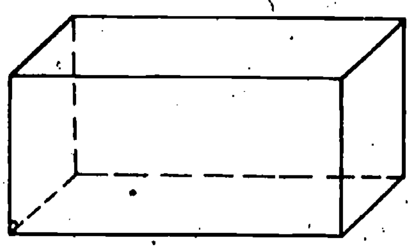
Teorema 16-3. Las caras laterales de un prisma son regiones paralelográmicas, y las caras laterales de un prisma recto son regiones rectangulares.

Una demostración formal implica un estudio de propiedades de separación y es más bien larga y tediosa. Aunque quizás desees desarrollar una demostración formal, puedes convencerte por ti mismo de la validez de lo afirmado por el teorema con sólo aplicar las definiciones de prisma y cara lateral a la figura correspondiente al teorema 16-1 ó al 16-2.

Definiciones: Un paralelepípedo es un prisma cuya base es una región paralelográmica. Un paralelepípedo rectangular es un prisma rectangular recto.



Paralelepípedo

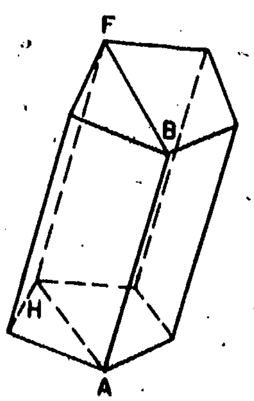


Paralelepípedo rectangular

Nota: Mientras que en el teorema precedente y en las definiciones hemos tenido el cuidado de referirnos a la base y a la sección transversal de un prisma como regiones, con frecuencia diremos base y sección transversal para significar el polígono que limita la región de que se trate, y el contexto mismo aclarará siempre la intención del uso.

Conjunto de problemas 16-1

1. Demuestra que dos aristas laterales no adyacentes de un prisma son coplanarias, y que la intersección de su plano con el prisma es un paralelogramo. (Sugerencia: En la figura adjunta, demuestra que ABFH es un paralelogramo.)

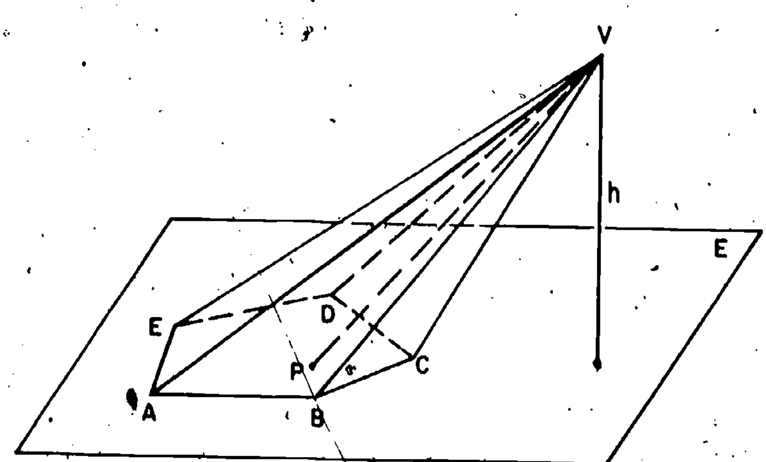


2. Determina el área de la superficie lateral de un prisma recto cuya altura es 10, cuando los lados de la base pentagonal son 3, 4, 5, 7, 2.
3. Determina el área de la superficie total de un prisma triangular recto cuya base es un triángulo equilátero, de 8 pulgadas de lado, teniendo la altura del prisma 10 pulgadas.
4. Demuestra que el área lateral (área de la superficie lateral) de un prisma recto es el producto del perímetro de su base y la longitud de una arista lateral.
5. Si los lados de una sección transversal de un prisma triangular tienen longitudes iguales a 3, 6, y $3\sqrt{3}$, entonces cualquier otra sección transversal será un triángulo cuyos lados son _____, _____, y _____, cuyos ángulos miden _____, _____, _____, y cuya área es _____.
6. La longitud de una arista lateral de un prisma recto es 10 pulgadas y su área lateral es 52 pulgadas cuadradas. ¿Cuál es el perímetro de su base?

16-2. Pirámides

Las pirámides son figuras análogas a los prismas en ciertos aspectos. En particular, muchos términos pueden seguir empleándose, y utilizaremos algunos de ellos sin definición formal.

Definiciones: Sea K una región poligonal de un plano E, y V un punto no situado en E. Para cada punto P en K, hay un segmento $\overline{PV}$. La reunión de todos estos segmentos se llama una pirámide con base K y vértice V. La distancia h de V a E es la altura de la pirámide.



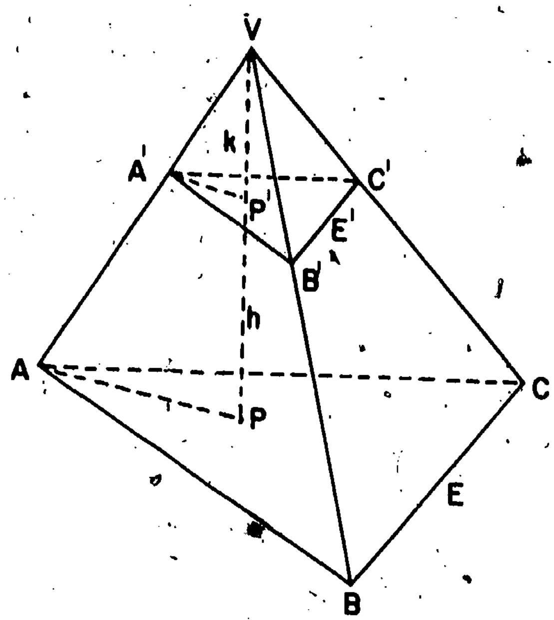
Los dos teoremas siguientes son análogos a los teoremas 16-1 y 16-2:

Teorema 16-4. Una sección transversal de una pirámide triangular, por un plano paralelo a la base y entre ésta y el vértice, es una región triangular semejante a la base. Si la distancia del vértice al plano de la sección transversal es k y la altura es h, entonces la razón del área de la sección transversal al área de la base es $\left(\frac{k}{h}\right)^2$.

O enunciado de otra manera: Sea el $\triangle ABC$ situado en el plano E y el punto V a una distancia h del plano E.

Sea E' un plano paralelo a E y a una distancia k de V, que interseca a $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, $\overline{VC}$ en A', B', C'. Entonces $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$, y

$$\frac{\text{área } \triangle A'B'C'}{\text{área } \triangle ABC} = \left(\frac{k}{h}\right)^2 .$$



Demostración: Sea $\overline{VP} \perp E$ y P' el punto de intersección de $\overline{VP}$ con E'. Entonces $h = VP$, $k = VP'$.

(1) $\overline{AP} \parallel \overline{A'P'}$ por el teorema 10-1

$\triangle VA'P' \sim \triangle VAP$ por el corolario 12-3-2.

$\frac{VA'}{VA} = \frac{VP'}{VP} = \frac{k}{h}$ por la definición de triángulos semejantes

(2) $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$ por el teorema 10-1

$\triangle VA'B' \sim \triangle VAB$ por el corolario 12-3-2

$\frac{A'B'}{AB} = \frac{VA'}{VA} = \frac{k}{h}$ por (1) y por definición

(3) Análogamente,

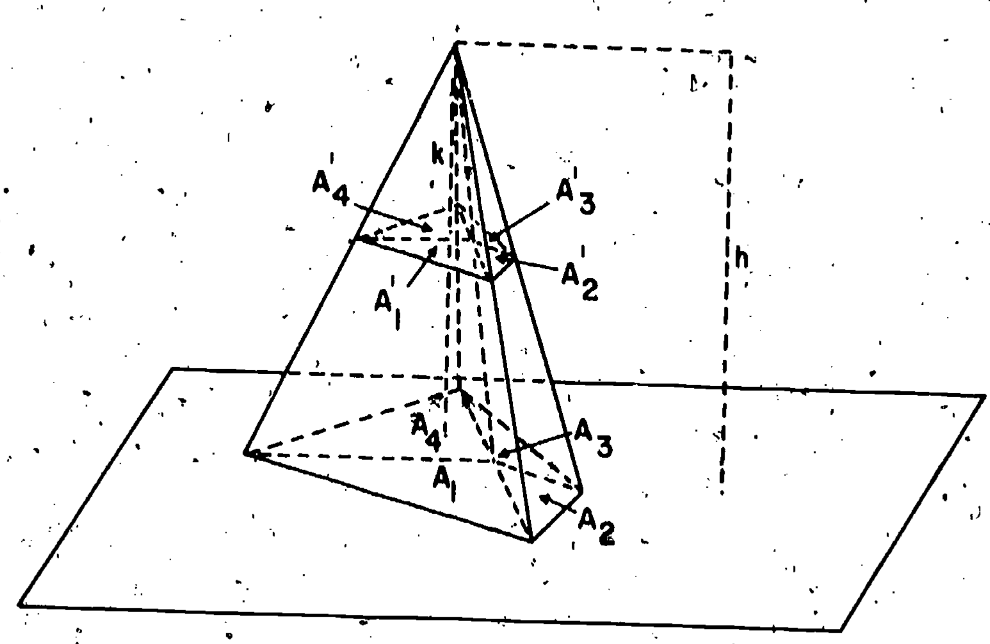
$\frac{B'C'}{BC} = \frac{k}{h}$, $\frac{C'A'}{CA} = \frac{k}{h}$

(4) De (2) y (3) se tiene

$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = \frac{k}{h}$.

Por consiguiente, $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$, en virtud del teorema de semejanza L.L.L., y $\frac{\text{área } \triangle A'B'C'}{\text{área } \triangle ABC} = (\frac{k}{h})^2$, por el teorema 12-7.

Teorema 16-5. En toda pirámide, la razón del área de una sección transversal al área de la base es $(\frac{k}{h})^2$, siendo h la altura de la pirámide y k la distancia del vértice al plano de la sección transversal.



Demostración: Descompongamos la base en regiones triangulares cuyas áreas sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$. (En la figura, $n = 4$.) Sean $A_1', A_2', \ldots, A_n'$ las áreas de las correspondientes regiones triangulares en la sección transversal. Sea A el área de la base y A' el área de la sección transversal. Entonces

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n,$$

y

$$A' = A_1' + A_2' + \ldots + A_n'.$$

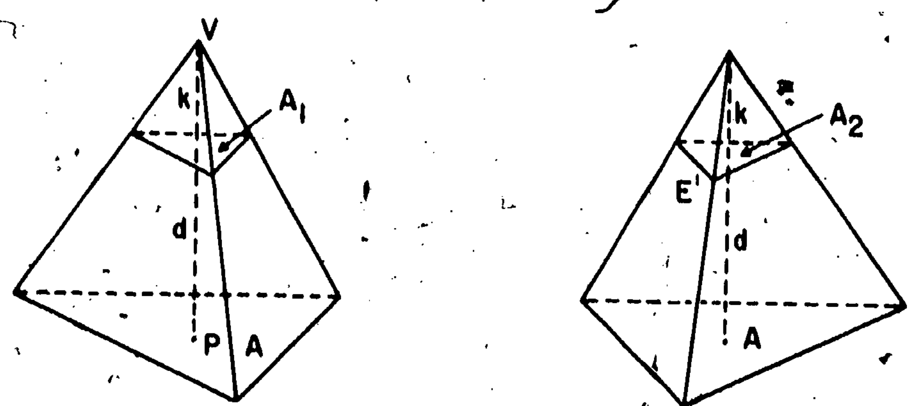
En virtud del resultado demostrado para las pirámides triangulares, sabemos que $A_1' = (\frac{k}{h})^2 A_1$, $A_2' = (\frac{k}{h})^2 A_2$, y así sucesivamente. Por consiguiente,

$$A' = (\frac{k}{h})^2 (A_1 + A_2 + \ldots + A_n)$$
$$= (\frac{k}{h})^2 A.$$

Luego, $\frac{A'}{A} = (\frac{k}{h})^2$, como queríamos demostrar.

Del teorema 16-5 se deduce la consecuencia siguiente:

Teorema 16-6. (Teorema de la sección transversal de la pirámide) Dadas dos pirámides de la misma altura, si las bases tienen la misma área, entonces las secciones transversales equidistantes de las bases tienen también la misma área.



En la figura, para mayor sencillez, se muestran pirámides triangulares, pero la demostración no depende de la forma de la base.

Sea A el área de cada una de las bases, y sean A_1 y A_2 las áreas de las secciones transversales. Sea h la altura de cada pirámide, y d la distancia entre cada sección transversal y la base correspondiente. Entonces los vértices de las dos pirámides están a la misma distancia $k = h - d$ de los planos de las secciones transversales. Por tanto,

$$\frac{A_1}{A} = (\frac{k}{h})^2 = \frac{A_2}{A}$$

en virtud del teorema anterior. Puesto que los denominadores de la izquierda y de la derecha son iguales, también lo serán los numeradores. Luego, $A_1 = A_2$, como se quería demostrar.

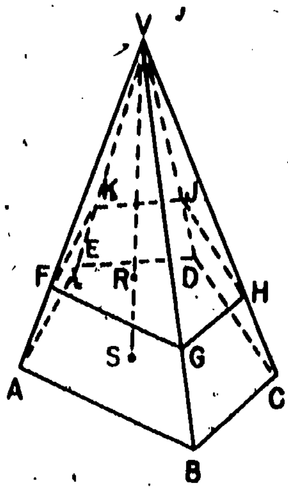
Conjunto de problemas 16-2

1. Si la base de una pirámide es un cuadrado, cada sección transversal será un ______. Si la base de una pirámide es un triángulo equilátero cuyo lado es 9, cada sección transversal será ______ y la longitud de un lado de la sección transversal a un tercio de la distancia del vértice a la base tendrá que ser ______.
2. Se dan dos pirámides, una triangular y otra hexagonal, con las áreas de sus bases iguales, y sus alturas de 6 pulgadas cada una. El área de una sección transversal de la pirámide triangular, que dista 2 pulgadas de la base, es de 25 pulgadas cuadradas. ¿Cuál es el área de una sección transversal a 2 pulgadas de la base de la pirámide hexagonal?
3. Una pirámide regular es una pirámide cuya base es una región poligonal regular que tiene por centro el pie de la perpendicular desde el vértice a la base. Demuestra que las caras laterales de una pirámide regular están limitadas por triángulos isósceles congruentes.

*4. Dada una pirámide triangular con vértice V y base ABC, determina un plano cuya intersección con la pirámide sea un paralelogramo.

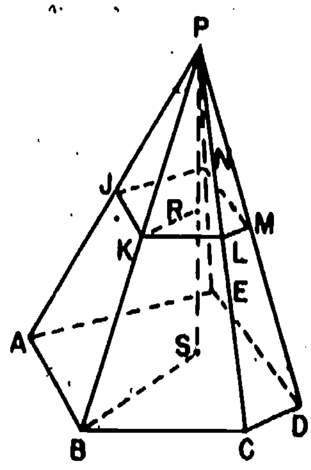
5. Muestra que el área lateral de una pirámide regular viene dada por $A = \frac{1}{2}ap$, donde p es el perímetro de la base y a es la altura de una cara lateral.

6. En la figura adjunta, FGHJK es paralela a la base ABCDE en la pirámide dibujada, la altura $VS = 7$ pulgadas y la altura $VR = 4$ pulgadas. Si el área de ABCDE es 336 pulgadas cuadradas, ¿cuál es el área de FGHJK?



7. Una pirámide regular tiene base cuadrada, de 10 pulgadas de lado, y tiene 1 pie de alto. Determina el área lateral de la pirámide y el área de la sección transversal a 3 pulgadas por encima de la base.

*8. Demuestra que en una pirámide cualquiera, la razón del área de una sección transversal al área de la base es $(\frac{a}{b})^2$, siendo a la longitud de la arista lateral de la pirámide más pequeña y b la de la correspondiente arista lateral de la pirámide mayor. (Sugerencia: Traza la altura $\overline{PS}$.)

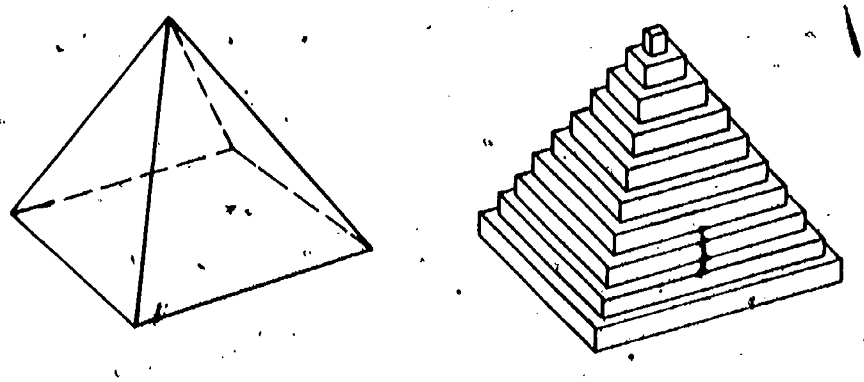


16-3. Volúmenes de prismas y pirámides; el principio de Cavalieri

Un tratamiento riguroso de los volúmenes requiere una definición cuidadosa de algo análogo a las regiones poligonales del plano (regiones poliédricas es su nombre) y la introducción de postulados parecidos a los cuatro postulados de las áreas. No daremos aquí ese tratamiento y en su lugar aprovecharemos tu intuición considerablemente, en particular cuando tengamos que descomponer sólidos mediante cortes o pegar éstos entre sí. Sin embargo, enunciaremos explícitamente los dos postulados numéricos que necesitamos. Uno de ellos es el análogo al postulado 20 que da el área de un rectángulo.

> Postulado 21. El volumen de un paralelepípedo rectangular es el producto de la altura por el área de la base.

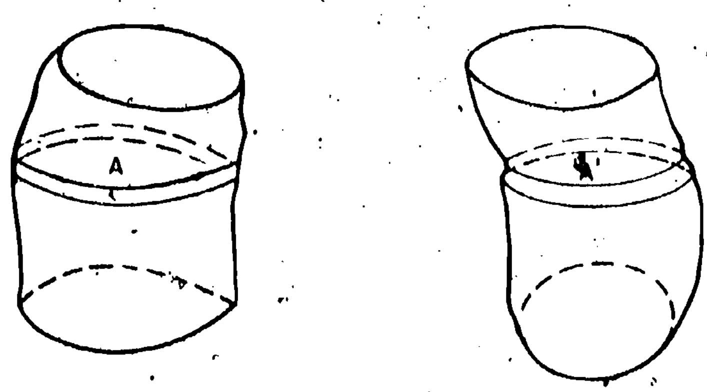
Para comprender el contenido del siguiente postulado, pensemos primero en un modelo físico. Podemos construir un modelo aproximado de una pirámide de base cuadrada formando un montón de tarjetas delgadas, del tamaño adecuado, de modo parecido al indicado en la figura.



La figura de la izquierda representa la pirámide exacta, y la de la derecha es el modelo apropiado construido con tarjetas.

Ahora supongamos que se taladra un estrecho agujero en el modelo, desde el tope hasta cierto punto de la base, e insertamos una varilla delgada de modo que atraviese todas las tarjetas del modelo. Podemos entonces inclinar la varilla como queramos, manteniendo su extremo de apoyo fijo en la base. La forma del modelo cambia con ello, pero su volumen no. La razón de esto es que su volumen es sencillamente el volumen total de las tarjetas, y éste no cambia cuando las tarjetas se deslizan o resbalan unas sobre otras.

El mismo principio se aplica de una manera más general. Supongamos que tenemos dos sólidos con bases en un plano que podemos imaginar horizontal. Si todas las secciones transversales horizontales de los dos sólidos y al mismo nivel sobre la base tienen la misma área, entonces los dos sólidos tienen el mismo volumen.



A = A'

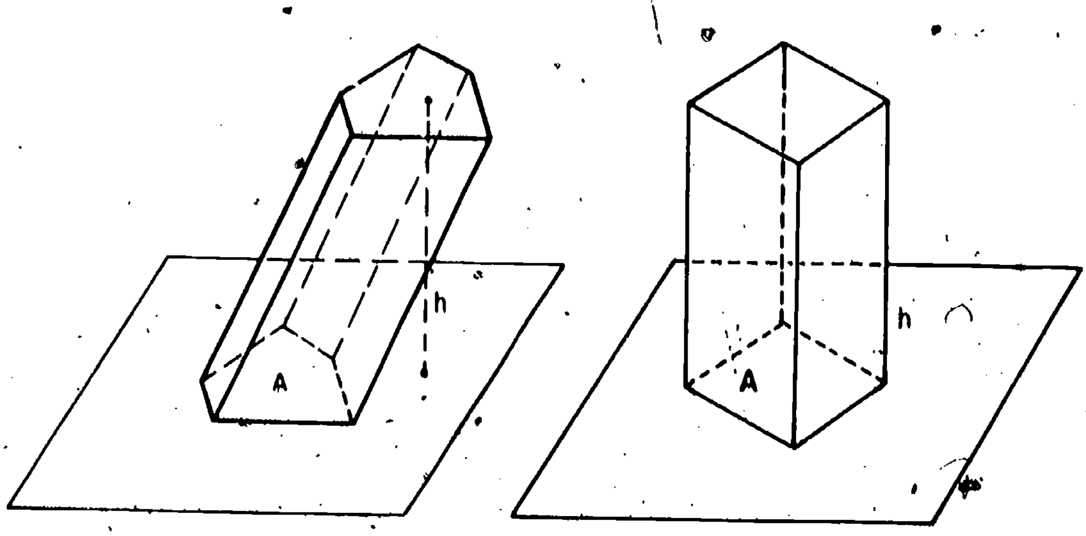
El porqué de esto es que si hacemos un modelo con tarjetas recortadas de los dos sólidos, entonces cada tarjeta en el primer modelo tiene exactamente el mismo volumen que la tarjeta correspondiente en el segundo modelo. Por consiguiente, los volúmenes de los dos modelos son exactamente iguales. La aproximación dada por los modelos puede ser todo lo próxima que se quiera al valor exacto, con tal de utilizar tarjetas suficientemente delgadas. Por tanto, los volúmenes de los dos sólidos de partida son iguales.

El principio implicado en todo lo dicho se llama Principio de Cavalieri. No lo hemos demostrado; solamente lo hemos explicado, tratando de mostrar por qué es razonable. Enunciémoslo, pues, en la forma de un postulado:

> Postulado 22. (Principio de Cavalieri)
> Dados dos sólidos y un plano, si para todo plano que interseca a los dos sólidos y es paralelo al plano dado, las dos intersecciones tienen áreas iguales, entonces los dos sólidos tienen el mismo volumen.

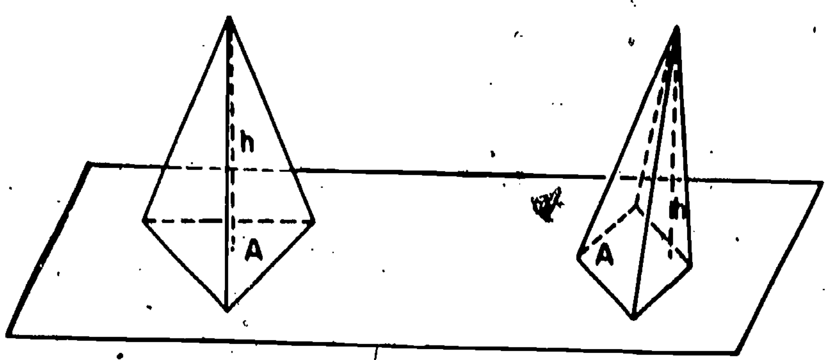
El principio de Cavalieri es la clave de los cálculos de volúmenes, como pronto veremos.

Teorema 16-7. El volumen de un prisma cualquiera es el producto de la altura por el área de la base.



Demostración: Sean h y A la altura y el área de la base de un prisma dado. Consideremos un paralelepípedo rectangular con la misma altura h y la misma área A de la base, y ésta en el mismo plano que la base del prisma. Sabemos por el teorema de la sección transversal del prisma que todas las secciones transversales, para ambos prismas, tienen la misma área A. Por el principio de Cavalieri, esto quiere decir que tienen el mismo volumen. Como el volumen del paralelepípedo rectangular es Ah en virtud del postulado 21, se obtiene el teorema.

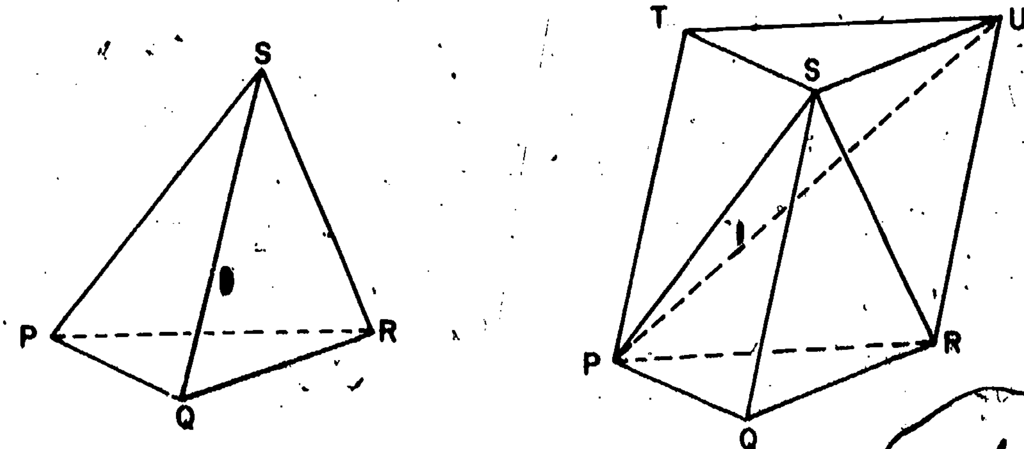
Teorema 16-8. Si dos pirámides tienen la misma altura y la misma área de la base, entonces tienen el mismo volumen.



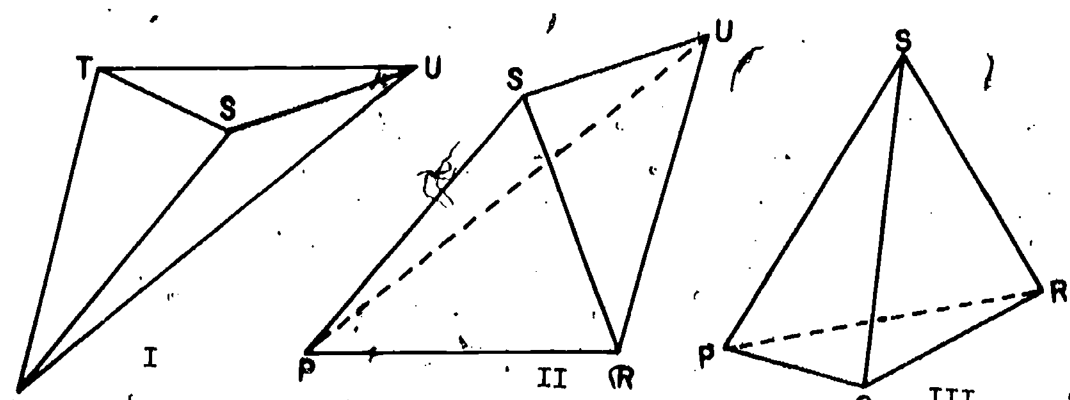
Demostración: Por el teorema de la sección transversal de la pirámide, las secciones transversales correspondientes de las dos pirámides tienen la misma área. En virtud del principio de Cavalieri, esto significa que las dos pirámides tienen el mismo volumen.

Teorema 16-9. El volumen de una pirámide triangular es un tercio del producto de su altura por el área de su base.

Demostración: Dada una pirámide triangular con base PQR y vértice S, tomemos un prisma triangular PQRTSU con la misma base y la misma altura, del modo indicado en la siguiente figura:



Ahora descompongamos el prisma en tres pirámides triangulares, una de ellas la dada, como se indica a continuación:



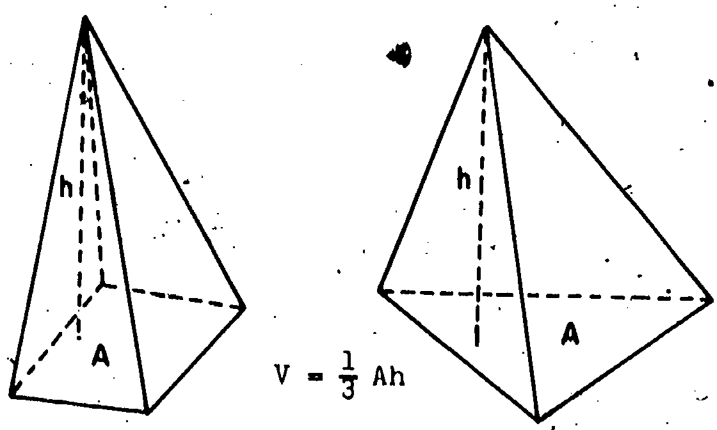
Imagínate las pirámides I y II con bases PTU y PRU y con el vértice común S. Los dos triángulos ΔPTU y ΔPRU están en el mismo plano y son congruentes, puesto que son los dos triángulos en que se descompone el paralelogramo PTUR mediante la diagonal $\overline{UP}$. Luego, las pirámides I y II tienen la misma área de la base y también la misma altura (la distancia de S al plano PTUR) y, por tanto, en virtud del teorema 16-8 tienen el mismo volumen. De la misma manera, imaginando las pirámides II y III con las bases SUR y SQR y el vértice común P, vemos que II y III tienen el mismo volumen. Por consiguiente, el volumen de las tres pirámides es el mismo número V, y el volumen del prisma es 3V. Si área $\Delta PQR = A$ y la altura SPQR es igual a h, entonces será

$$3V = Ah,$$

de donde $V = \frac{1}{3}Ah$, que es lo que se quería demostrar.

El mismo resultado es válido para las pirámides en general.

Teorema 16-10. El volumen de una pirámide es un tercio del producto de su altura por el área de su base.



Demostración: Se da una pirámide de altura h y área de la base A. Consideremos una pirámide triangular de la misma altura y de igual área de la base, con ésta en el mismo plano. Por el teorema de la sección transversal de la pirámide, las secciones transversales al mismo nivel respecto de la base, tienen la misma área. Por consiguiente, en virtud del principio de Cavalieri, las dos pirámides tienen el mismo volumen. Luego, el volumen de cada una de ellas es $\frac{1}{3}Ah$, como queríamos demostrar.

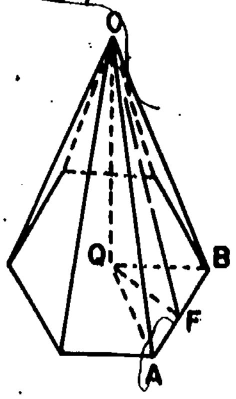
Conjunto de problemas 16-3

1. Un tanque rectangular de 5' x 4' está lleno de agua hasta un nivel de 9". ¿Cuántos pies cúbicos de agua hay en el tanque?; ¿cuántos galones? (1 galón = 231 pulgadas cúbicas).

2. Un trozo de metal sumergido en un tanque rectangular de agua de 20 pulgadas de largo y de 8 de ancho, hace subir el nivel del agua 4.6 pulgadas. ¿Cuál es el volumen del trozo de metal?

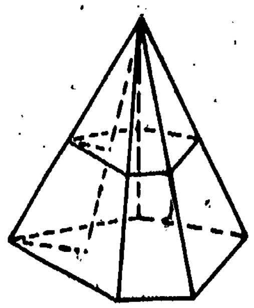
3. Si un pez necesita un galón de agua para estar en buenas condiciones de salud, ¿cuántos peces pueden mantenerse en un acuario de 2 pies de largo, $1\frac{1}{2}$ pies de ancho y $1\frac{1}{2}$ pies de profundidad?

4. Si una arista de la base de una pirámide hexagonal regular tiene 12 pulgadas y la altura de la pirámide es de 9 pulgadas, ¿cuál es el área lateral?; ¿cuál es el volumen?



5. El volumen de una tienda piramidal con base cuadrada es 1836 pies cúbicos. Si el lado de la base tiene 18 pies, determina la altura de la tienda.

6. Un plano biseca a la altura de una pirámide y es paralelo a su base. ¿Cuál es la razón de los volúmenes de los sólidos destacados por encima y por debajo del plano?

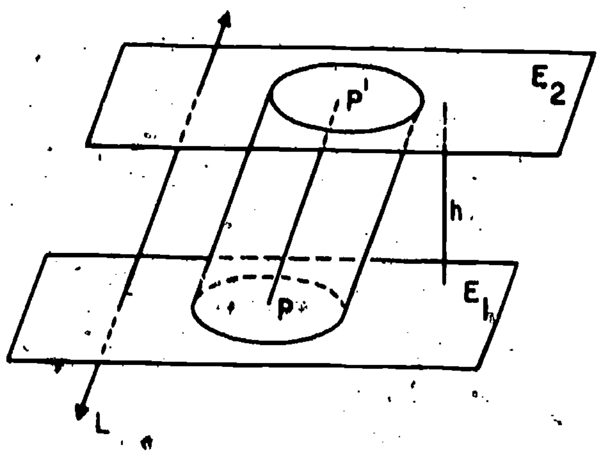


*7. Un monumento tiene la forma de un obelisco, es decir, una pirámide de base cuadrada, truncada a una cierta altura y cubierta con una segunda pirámide de base cuadrada. El vértice de la pirámide pequeña está 2 pies por encima de su base y 32 pies sobre el suelo. Si la pirámide que sirve de base no se hubiera truncado, su altura sería de 60 pies. Determina el volumen del obelisco, sabiendo que cada lado de la base, en el suelo, tiene 4 pies de largo.

*8. Enuncia e ilustra un principio, que corresponda al principio de Cavalieri, del cual resulte que dos regiones planas tienen la misma área.

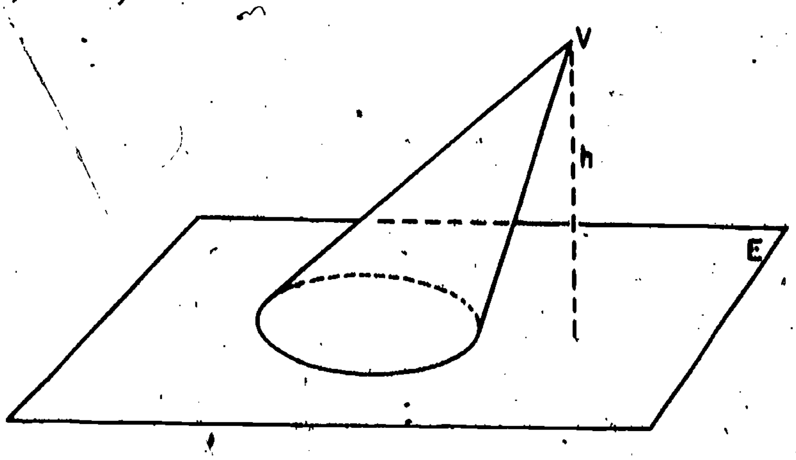
16-4. Cilindros y conos

Observa que en la definición de un prisma y de los términos asociados en la sección 16-1, no es necesario restringir K exigiendo que sea una región poligonal. K podría ser, en efecto, cualquier conjunto de puntos en E_1. Esta enorme generalidad no es necesaria, pero sí ciertamente podemos considerar el caso en el cual K es una región circular, la reunión de una circunferencia y su interior. En este caso llamamos el sólido resultante un cilindro circular. Redacta tú mismo una definición de un cilindro circular. Puedes utilizar la figura siguiente como ayuda:



Podemos obtener cilindros con otras especies de bases, tal como el cilindro elíptico, pero, no obstante, los cilindros circulares son los más comunes y además los únicos considerados en la geometría elemental.

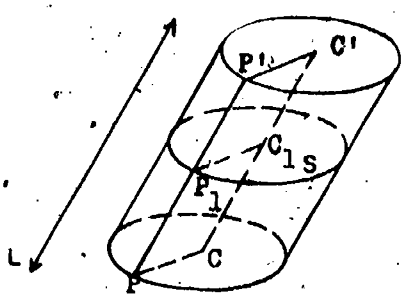
Exactamente lo mismo que la definición de un cilindro circular es análoga a la de un prisma, también la definición de un <u>cono circular</u> es análoga a la definición de una pirámide. Comprueba que entiendes esto redactando una definición de un cono circular. Puedes emplear como ayuda la notación indicada en la figura siguiente:



Definición: Si el centro de la circunferencia de la base es el pie de la perpendicular desde V a E, el cono se llama cono circular recto.

Los análogos de los teoremas sobre prismas y pirámides son demostrables mediante los mismos métodos generales. Omitimos los detalles.

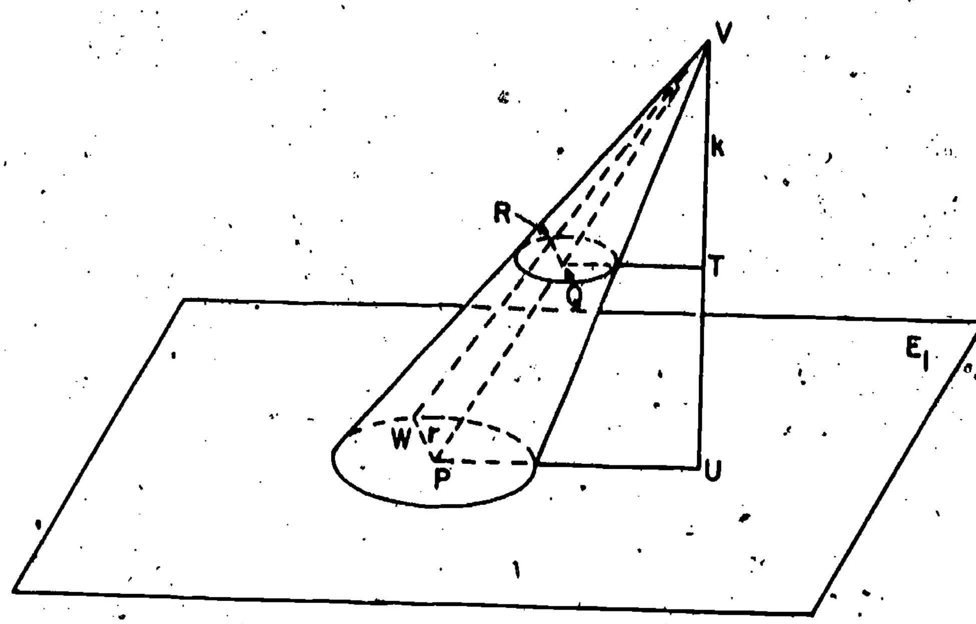
Teorema 16-11. Una sección transversal de un cilindro circular es una región circular congruente con la base.



Idea de la demostración: Sea C el centro y r el radio de la base. Entonces, por las propiedades de los paralelogramos, $P_1C_1 = PC = r$.

Teorema 16-12. El área de una sección transversal de un cilindro circular es igual al área de la base.

Teorema 16-13. Una sección transversal de un cono de altura h, producida por un plano a una distancia k del vértice, es una región circular cuya área está con el área de la base en la razón $(\frac{k}{h})^2$.



Idea de la demostración: Sea VU = h.

(1) $\triangle VQT \sim \triangle VPU$

$$\frac{VQ}{VP} = \frac{k}{h}$$

(2) $\triangle VQR \sim \triangle VPW$

$$\frac{QR}{PW} = \frac{k}{h}$$

(3) $QR = \frac{k}{h} PW$

Puesto que $\overline{PW}$ tiene un valor constante, independientemente de la posición de W, entonces QR también tiene un valor constante. De modo que todos los puntos R están en una circunferencia. La región circular correspondiente es la sección transversal.

(4) $$\frac{\text{área de la circunferencia de centro } Q}{\text{área de la circunferencia de centro } P} = \left(\frac{k}{h}\right)^2.$$

Podemos ahora aplicar el principio de Cavalieri para determinar los volúmenes de cilindros y conos.

Teorema 16-14. El volumen de un cilindro circular es el producto de la altura por el área de la base.

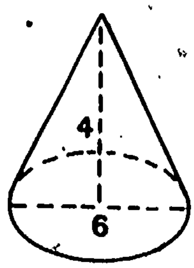
La demostración es parecida a la del teorema 16-7.

Teorema 16-15. El volumen de un cono circular es un tercio del producto de la altura por el área de la base.

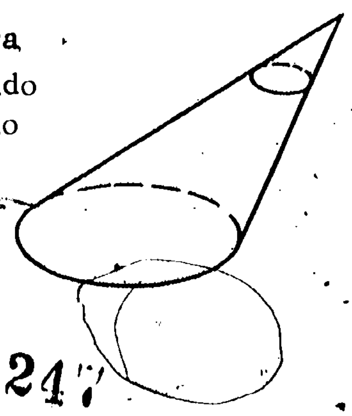
La demostración es parecida a la del teorema 16-10.

Conjunto de problemas 16-4

1. Determina el volumen del cono circular recto representado en la figura adjunta.

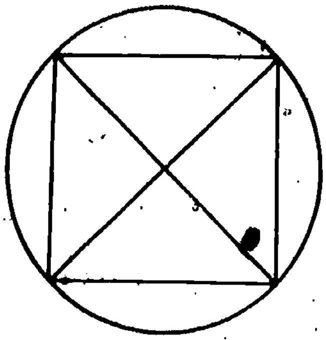


2. Determina el número de galones de agua que un tanque cónico contiene, si su profundidad es de 30 pulgadas y el radio del borde circular es de 14 pulgadas. (En un galón hay 231 pulgadas cúbicas. Utiliza $\frac{22}{7}$ como una aproximación de π. ¿Por qué es $\frac{22}{7}$ una aproximación más conveniente que 3.14 en problemas en los que interviene el número 231?)
3. Una canal de desagüe es una lámina cilíndrica de 16 pulgadas de largo. Los diámetros interno y externo tienen 5 pulgadas y 5.6 pulgadas. Determina el volumen de yeso necesario para construir la canal de desagüe.
4. Un cierto cono tiene un volumen de 27 pulgadas cúbicas. Su altura es 5 pulgadas. Se corta un segundo cono del primero mediante un plano paralelo a la base y dos pulgadas por debajo del vértice. Determina el volumen del segundo cono.



5. En un anaquel del supermercado hay dos latas de aceitunas importadas. La primera es doble de alta que la segunda, pero ésta tiene un diámetro doble que la primera. Si la segunda cuesta el doble que la primera, ¿cuál es la mejor compra?

6. En la figura adjunta, miramos desde arriba una pirámide cuya base es un cuadrado, inscrita en un cono circular recto. Si la altura del cono o pirámide es 36 y una arista de la base de la pirámide es 20, determina el volumen del cono y el de la pirámide.



7. La figura 1 representa un cono dentro de un cilindro y la figura 2, dos conos congruentes dentro de un cilindro. Si los cilindros son de igual tamaño, compara el volumen del cono en la figura 1 con el volumen de los dos conos en la figura 2. ¿Cambiaría tu respuesta si los conos en la figura 2 no fuesen congruentes?

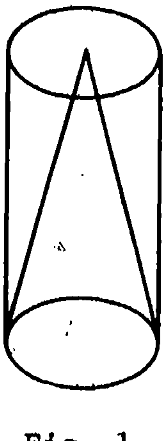


Fig. 1

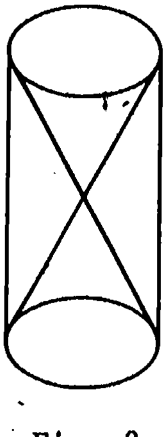
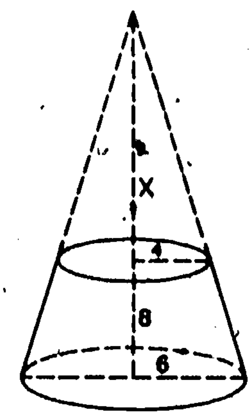


Fig. 2

8. Un cono circular recto está dentro de un cilindro circular recto de la misma base y de igual altura. Escribe la fórmula para el volumen del espacio comprendido entre el cilindro y el cono.

*9. Si un plano paralelo a la base de un cono (o de una pirámide) recorta otro cono (o pirámide), entonces el sólido entre el plano paralelo y la base se llama un <u>tronco</u>. Un tronco de cono tiene 6 pulgadas de radio inferior, y 4 pulgadas de radio superior, y la altura es 8 pulgadas. Determina su volumen.

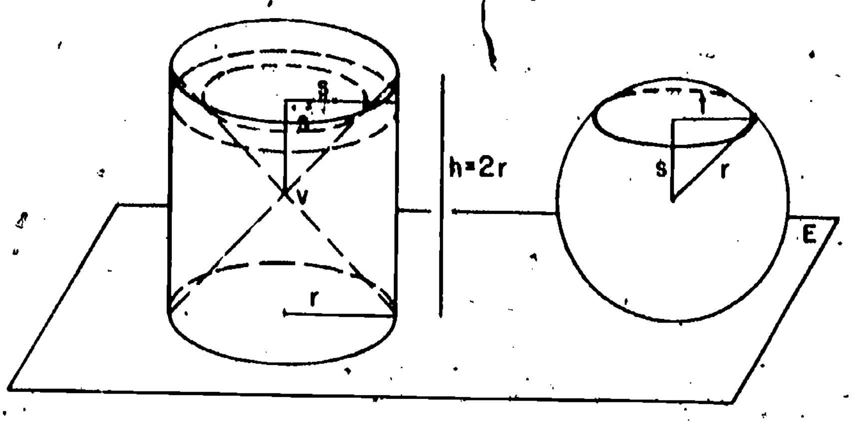


16-5. Regiones esféricas; volúmenes y áreas

<u>Definiciones</u>: El <u>interior</u> de una superficie esférica es la reunión del centro y del conjunto de todos los puntos cuyas distancias al centro son menores que el radio. El <u>exterior</u> de la superficie esférica es el conjunto de todos los puntos cuyas distancias al centro son mayores que el radio. La reunión de la superficie esférica y de su interior es una <u>región esférica cerrada</u>, también llamada <u>bola</u>, o <u>esfera</u>. Por <u>volumen de una esfera</u> entenderemos, pues, el volumen del sólido que es la reunión de la superficie esférica correspondiente y su interior.

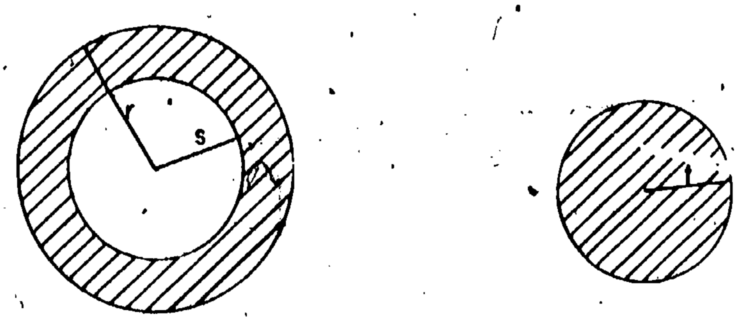
<u>Teorema 16-16</u>. El volumen de una esfera de radio r es $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Demostración: Se da una esfera de radio r, y E un plano tangente a la superficie esférica correspondiente. En E tracemos una circunferencia de radio r y consideremos un cilindro recto cuya base sea la región circular asociada con dicha circunferencia, de altura $2r$, y del mismo lado con respecto a E que la esfera.



Finalmente, consideremos dos conos, con sus bases en las dos del cilindro, y con su vértice común V en el punto medio del eje del cilindro.

Tracemos una sección transversal en cada sólido mediante un plano paralelo a E y a una distancia s de V. Las secciones se verán como sigue:



El área de la sección de la esfera es

$$A_1 = \pi t^2 = \pi(r^2 - s^2)$$

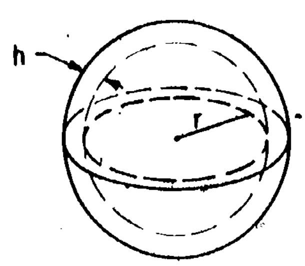
en virtud del teorema de Pitágoras. Queremos comparar esto con la sección del sólido entre los conos y el cilindro, esto es, fuera de los conos y dentro del cilindro. Esta sección es un anillo circular, cuyo radio exterior es r, y cuyo radio interior es s. (¿Por qué?) Luego, su área es

$$A_2 = \pi r^2 - \pi s^2 = \pi(r^2 - s^2).$$

De modo que $A_1 = A_2$, y, por el principio de Cavalieri, el volumen de la esfera es igual al volumen comprendido entre los conos y el cilindro. Por tanto, el volumen de la esfera es la diferencia entre el volumen del cilindro y dos veces el volumen de uno de los conos, es decir,

$$\pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Mediante la fórmula para el volumen de una esfera, podemos obtener una fórmula para el área de la superficie esférica correspondiente. Dada una esfera de radio r, formemos otra esfera un poco mayor, de radio $r + h$. El sólido comprendido entre las dos superficies esféricas correspondientes se llama una cáscara esférica y su aspecto es el de la figura siguiente:



Sea S el área de la superficie esférica interior. El volumen V de la cáscara es entonces hS, aproximadamente. De modo que, también aproximadamente, será $S = \frac{V}{h}$. A medida que la cáscara se hace más delgada, la aproximación va siendo cada vez mejor. Así que, cuando h se hace más y más pequeño, tendremos

$$\frac{V}{h} \longrightarrow S.$$

Ahora bien, podemos calcular $\frac{V}{h}$ con exactitud, y averiguar a qué se acerca cuando h se hace más y más pequeño. Esto nos dirá lo que es S. El volumen V es la diferencia entre los volúmenes de las dos esferas. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} V &= \tfrac{4}{3}\pi(r+h)^3 - \tfrac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \tfrac{4}{3}\pi[(r+h)^3 - r^3] \\ &= \tfrac{4}{3}\pi[r^3 + 3r^2h + 3rh^2 + h^3 - r^3] \\ &= \tfrac{4}{3}\pi[3r^2h + 3rh^2 + h^3]. \end{aligned}$$

(Comprueba, por multiplicación, que $(r + h)^3$ $= r^3 + 3r^3h + 3rh^2 + h^3$.)

Luego, $\frac{V}{h} = \frac{4}{3}\pi[3r^2 + 3rh + h^2]$

$$= 4\pi r^2 + h\left[4\pi r + \frac{4}{3}\pi h\right].$$

Aquí todo el segundo término tiende a cero, puesto que $h \longrightarrow 0$. Por tanto, $\frac{V}{h} \longrightarrow 4\pi r^2$, con lo cual resulta que $S = 4\pi r^2$. Tenemos así el teorema:

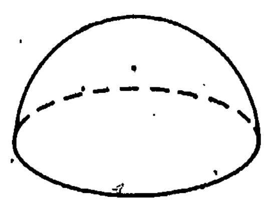
Teorema 16-17. El área de una superficie esférica de radio r, es

$$S = 4\pi r^2.$$

Hemos concluido así este capítulo con el interesante resultado de que el área de una superficie esférica de radio r es $4\pi r^2$. ¿Te has fijado en que el área de la superficie es precisamente 4 veces el área de la región circular asociada con una circunferencia máxima de la superficie esférica?

Conjunto de problemas 16-5

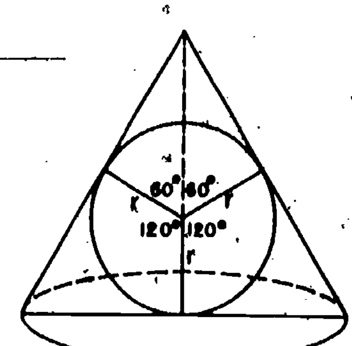
1. Calcula el área de una superficie esférica cuyo diámetro es 8. ¿Cuál es el volumen de la esfera correspondiente?
2. El radio de una superficie esférica es el doble del radio de otra. Expresa la razón que define la comparación de sus áreas de superficie, y haz lo mismo para los volúmenes de las esferas correspondientes. Si el radio de la primera superficie esférica es tres veces el de la segunda, compara también sus áreas de superficie y los volúmenes de las esferas correspondientes.
3. Un tanque esférico tiene de radio 7 pies. ¿Cuántos galones puede contener? (Utiliza $\pi = \frac{22}{7}$.)
4. Un cobertizo de almacén tiene la forma de un hemisferio y hay que pintarlo. Si el piso necesita 17 galones de pintura, ¿cuánta pintura será necesario emplear para cubrir el exterior del cobertizo?



5. Arquímides (287-212 a. de J.C.) demostró que el volumen de una esfera es $\frac{2}{3}$ el del cilindro circular recto más pequeño que la contiene. Verifica esto.
6. Un cono de mantecado tiene 5 pulgadas de hondo y 2 pulgadas de diámetro superior. Se echan en él dos cucharadas semiesféricas de helado, con un diámetro también de 2 pulgadas. Si el mantecado se funde dentro del cono, ¿lo rebasará?
7. a. Demuestra que si la longitud de un lado de un cubo es cuatro veces la de otro cubo, entonces la razón de sus volúmenes es de 64 a 1.

b. La luna tiene un diámetro aproximadamente igual a $\frac{1}{4}$ el de la tierra. ¿Cuál será la razón de sus volúmenes?

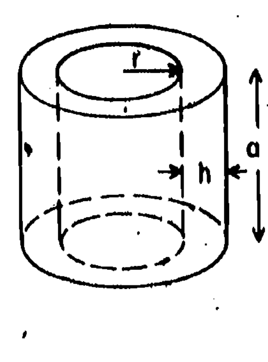
8. En la figura adjunta, la superficie esférica de radio r está inscrita en el cono. Las medidas de los ángulos formados por la altura y los radios que van a los puntos de tangencia están indicadas. Determina el volumen del cono en función de r.



*9. El ingeniero municipal que mide 6 pies de alto marchaba a inspeccionar el nuevo tanque esférico de agua. Cuando llegó a un lugar a 18 pies del punto de contacto del tanque con el piso, su cabeza tropezó con el tanque. Sabiendo que la ciudad gastaba 10,000 galones de agua por hora, inmediatamente calculó cuántas horas podría durar un tanque lleno. ¿Cómo hizo esto y cuál fue el resultado?

*10. La mitad del aire de un balón de goma se deja salir. Si el balón continúa siendo esférico, ¿qué relación hay entre el radio resultante y el radio original?

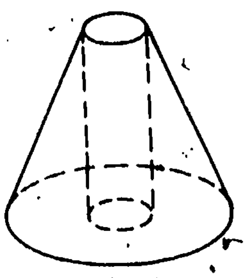
*11. Utiliza el método que permitió deducir el teorema 16-17 para demostrar que el área lateral de un cilindro circular recto es $2\pi ra$, donde a es la altura y r el radio de la base.



Problemas de repaso

1. Si la base de una pirámide es una región cuya frontera es un rombo con lado 16 y un ángulo que mide 120, entonces
   a. toda sección transversal es una región cuya frontera es un _______ y cuyos ángulos miden _____ y _____.
   b. la longitud de un lado de la sección transversal mediana entre el vértice y la base es _______.
   c. el área de la sección transversal mediana entre el vértice y la base es _______.
2. Una bola esférica de diámetro 5 tiene un agujero en el centro de diámetro 2. Determina el volumen aproximado de la cáscara.
3. Determina la altura de un cono cuyo radio es 5 y cuyo volumen es 500.
4. Una pirámide tiene una altura de 12 pulgadas y un volumen de 432 pulgadas cúbicas. ¿Cuál es el área de una sección transversal a 4 pulgadas por encima de la base?
5. Dados dos conos tales que la altura del primero es doble la del segundo y el radio de la base del primero es la mitad del radio de la base del segundo, ¿qué relación hay entre sus volúmenes?
6. Una lata cilíndrica de radio 12 y altura 20 está llena de agua. Si se mete dentro de la lata una bola de radio 10 y después se saca, ¿qué volumen de agua habrá quedado en la lata?
7. Una superficie esférica está inscrita en un cilindro circular recto, de manera que es tangente a ambas bases. ¿Cuál es la razón del volumen de la esfera correspondiente al volumen del cilindro?

*8. La altura de un cono circular recto es 15 y el radio de su base 8. Se hace un taladro cilíndrico de diámetro 6 en el cono siguiendo el eje del cono, quedando un sólido como muestra la figura. ¿Cuál es el volumen de este sólido?



9. Demuestra que si la base de una pirámide es una región paralelográmica, el plano determinado por el vértice de la pirámide y una diagonal de la base divide la pirámide en dos pirámides de igual volumen.

*10. Demuestra que es posible circunscribir una superficie esférica a un paralelepípedo rectangular.

Capítulo 17

GEOMETRIA DE LAS COORDENADAS EN EL PLANO

17-1. Introducción

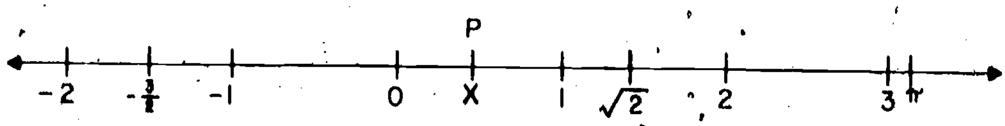
La matemática es la única ciencia en la que prácticamente todo es aprovechable. Desde luego, los matemáticos son seres humanos, y como tales, cometen errores. Pero, en general, estos errores se descubren rápidamente. Por lo tanto, cuando una generación descubre algo en el campo de la matemática, la próxima generación puede seguir adelante con nuevas investigaciones, sin tener que corregir errores serios en el trabajo ya hecho.

Prueba de esto es el hecho de que casi todo lo que se ha aprendido hasta ahora en este curso acerca de la geometría, era conocido por los antiguos griegos hace más de dos mil años.

Después de los griegos, el primer gran paso de avance en la geometría se dio en el siglo XVII. Consistió en el descubrimiento por René Descartes (1596-1650) de un nuevo método llamado la geometría de las coordenadas. En este capítulo ofreceremos una breve introducción a la geometría de las coordenadas; sólo lo suficiente para darte una idea de qué es y cómo trabaja.

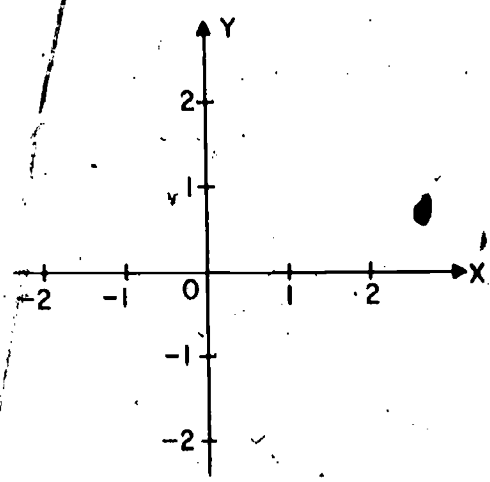
17-2. Sistemas de coordenadas en un plano

En el Capítulo 2 aprendimos la manera de construir un sistema de coordenadas en una recta.



Una vez construido un sistema de coordenadas, todo número representa un punto y todo punto P queda determinado cuando se da su coordenada x.

En la geometría de las coordenadas, hacemos lo mismo en un plano, salvo que en el plano no se representa un punto con un solo número, sino con un par de números. El esquema funciona así:

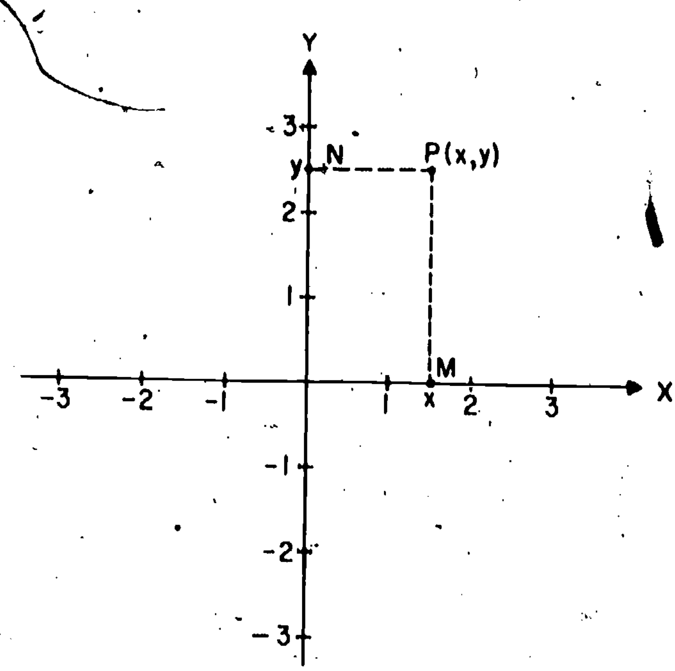


Empezaremos tomando una recta X del plano, y construyendo un sistema de coordenadas en X. Esta recta se llamará el eje x. En una figura acostumbramos a dibujar una punta de flecha para indicar el sentido positivo en el eje x.

Luego trazamos por el punto 0 de coordenada cero, la recta Y perpendicular al eje x, y construimos un sistema de coordenadas en Y. Por el postulado de la colocación de la regla, esto puede hacerse de tal manera que el punto 0 también tenga en Y coordenada cero. Llamaremos a Y el eje y. Como antes, indicaremos el sentido positivo mediante una punta de flecha. La intersección 0 de los dos ejes se llama el origen.

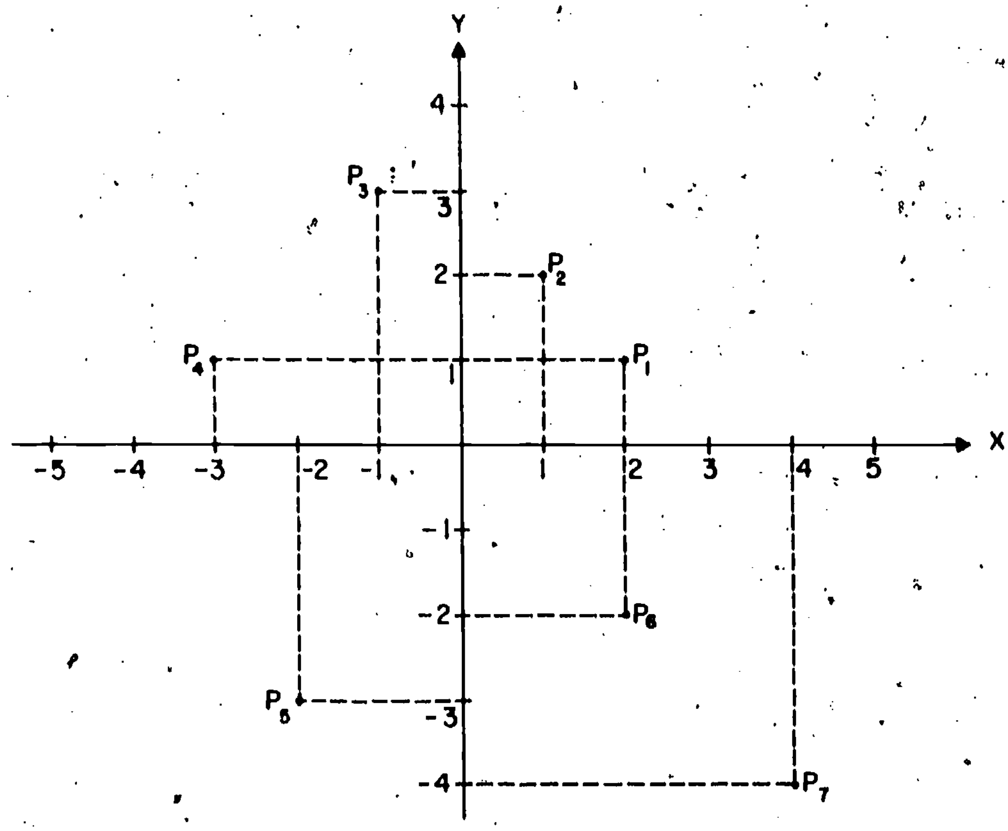
Ahora, podemos representar cualquier punto del plano mediante un par de números. El esquema es el siguiente: Dado un punto P, trazamos una perpendicular al eje x, con pie en el punto M de coordenada x. Luego, trazamos una perpendicular al eje y, con pie en el punto N de coordenada y. (De acuerdo con lo explicado en la sección 10-3, llamamos a M y a N las proyecciones de P sobre X e Y.)

Definiciones: Los números x, y se llaman las coordenadas del punto P; x es la coordenada x, e y es la coordenada y.



En la figura, $x = 1\frac{1}{2}$, $y = 2\frac{1}{2}$. Por lo tanto, el punto P tiene coordenadas $1\frac{1}{2}$ y $2\frac{1}{2}$. Escribimos estas coordenadas en la forma $(1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$, donde la coordenada x se escribe primero. Para indicar que el punto P tiene estas coordenadas, escribimos $P(1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$ ó $P:(1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$.

Veamos otros ejemplos.



Siguiendo las líneas de trazos, podemos leer las coordenadas de cada punto. Así, en este caso las coordenadas son las siguientes:

$P_1(2,1)$

$P_2(1,2)$

$P_3(-1,3)$

$P_4(-3,1)$

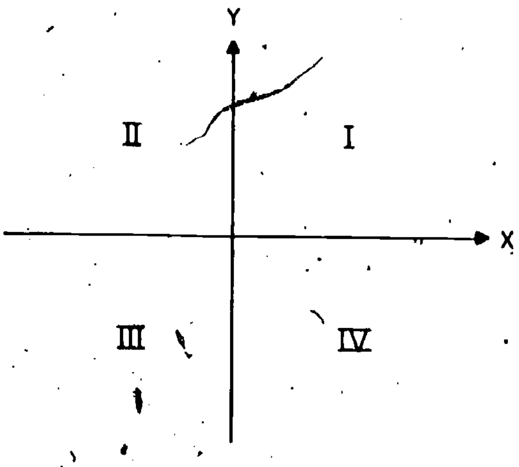
$P_5(-2,-3)$

$P_6(2,-2)$

$P_7(4,-4)$

Observa que es esencial el orden en que se escriben las coordenadas. El punto de coordenadas (2,1) no es el mismo que el punto (1,2). Así, pues, las coordenadas de un punto constituyen realmente un par ordenado de números reales, y no puedes determinar dónde está localizado dicho punto si no conoces el orden en que se dan las coordenadas. Es muy importante tener en cuenta el convenio de tomar el primer número del par ordenado como la coordenada x, y el segundo como la coordenada y.

Lo mismo que una sola recta separa al plano en dos partes (llamadas semiplanos), los dos ejes separan al plano en cuatro partes llamadas cuadrantes. Los cuadrantes se distinguen mediante un número, así:

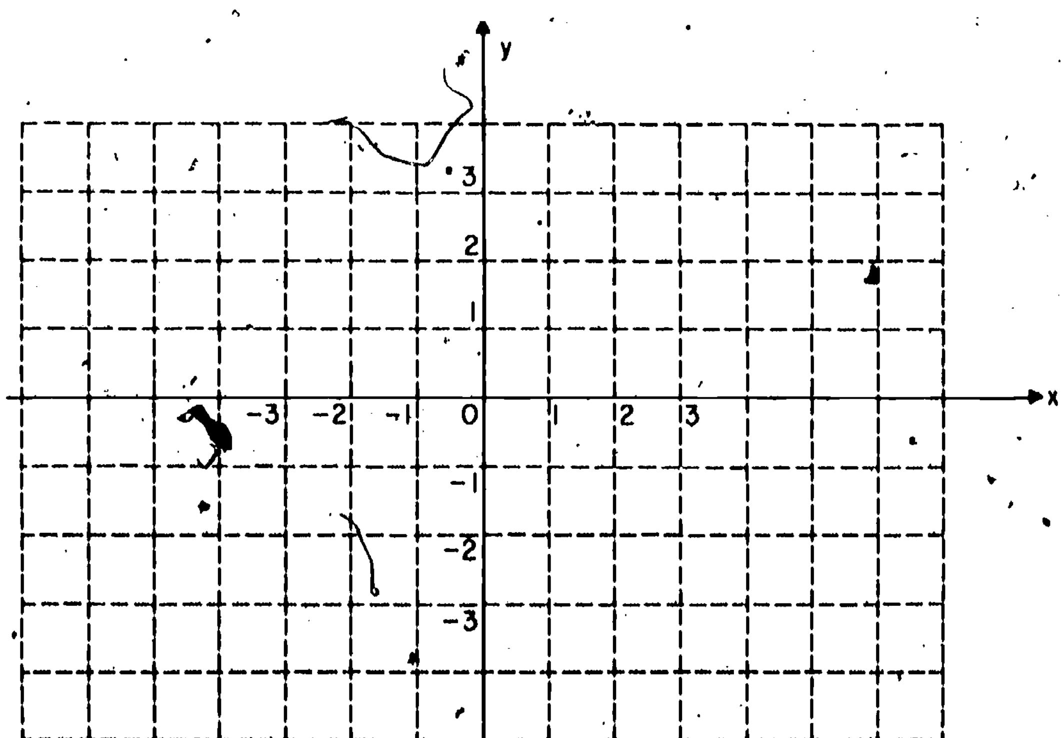


Hemos probado que cualquier punto de nuestro plano determina un par ordenado de números. ¿Podremos invertir el procedimiento? Es decir, dado un par de números (a,b), ¿podremos encontrar un punto cuyas coordenadas sean (a,b)? Se puede ver fácilmente que la respuesta es "sí". Efectivamente, sólo hay un punto tal, que se obtiene como intersección de la recta perpendicular al eje x en el punto de coordenada a con la recta perpendicular al eje y en el punto de coordenada b.

Así, tenemos una correspondencia biunívoca (uno a uno) entre puntos de un plano y pares ordenados de números. Una tal correspondencia se llama un sistema de coordenadas en el plano. Un sistema de coordenadas se particulariza eligiendo una unidad de medida, un eje x y un eje y, perpendiculares entre sí, y un sentido positivo en cada uno. Mientras utilicemos un sistema de coordenadas particular, como sucederá en todos los problemas de este libro, cada punto P estará asociado con un solo par de números (a,b), y cada par de números estará asociado con un solo punto. Por consiguiente, no habrá confusión si decimos que el par de números es el punto, lo cual nos permite utilizar algunas frases convenientes, tales como "el punto (2,3)" o "P = (a,b)".

17-3. Cómo marcar puntos en un papel cuadriculado

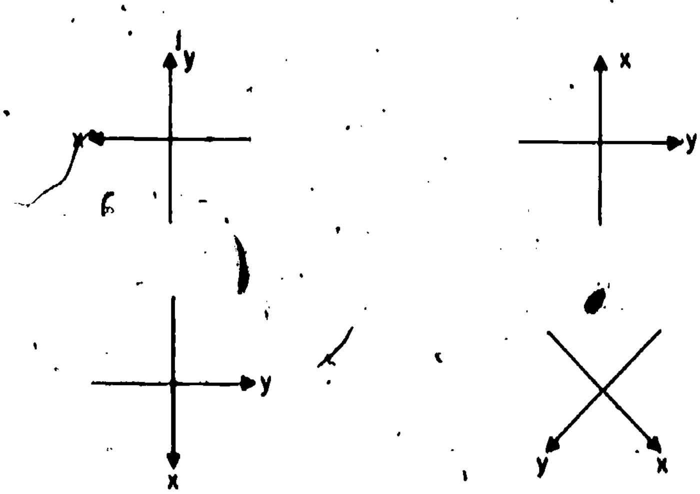
Por conveniencia, en la geometría de las coordenadas es costumbre emplear papel cuadriculado para dibujar figuras. Están ya impresas las rayas horizontales y las verticales; lo demás tenemos que dibujarlo nosotros.



En la figura anterior, las líneas de trazos representan las rectas que ya están impresas en el papel. El eje x y el eje y deberán dibujarse con lápiz o pluma. Observa que el eje x se marca con x y no con X; ésta es la costumbre. En cada caso el símbolo x no es el nombre de cosa alguna; es simplemente un recordatorio de que las coordenadas en este eje se denotarán por la letra x. Hacemos algo análogo con el eje y. Luego se deberán marcar los puntos de coordenadas (1,0) y (0,1) para indicar la unidad que se ha de emplear.

Esta es la manera corriente de preparar un papel cuadriculado para marcar puntos. Pudimos haber indicado menos detalles o bien muchos más. Para tu beneficio, conviene que muestres algunos más. Si muestras menos detalles, tal vez tu trabajo resulte ininteligible.

Observa que pudimos haber dibujado los ejes en cualquiera de las posiciones siguientes:



y así sucesivamente. <u>Nada hay lógicamente erróneo en ninguna de estas maneras de construir los ejes</u>. Sin embargo, resulta más fácil leer gráficas construidas por otras personas cuando se ha hecho el convenio de que el eje x será horizontal, con coordenadas en orden creciente de izquierda a derecha, y de que el eje y será vertical, con coordenadas en orden creciente de abajo hacia arriba.

Conjunto de problemas 17-3

1. Sugiere una razón por la cual el tipo de sistema de coordenadas empleado en este capítulo se llama algunas veces "Sistema cartesiano".
2. ¿Cuáles son las coordenadas del origen?
3. ¿Cuál es la coordenada y del punto (7,-3)?
4. Escribe el nombre del punto que es la proyección de (0,-4) sobre el eje x.
5. ¿Qué par de puntos están más cerca uno del otro, (2,1) y (1, 2) ó (2,1) y (2,0)?
6. ¿En qué cuadrante se encuentra cada uno de los siguientes puntos?

   a. (5,-3) c. (5,3)

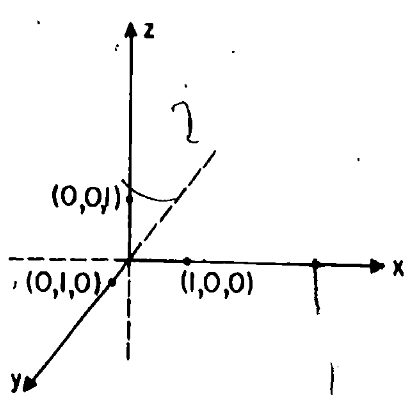
   b. (-5,3) d. (-5,-3)
7. ¿Cuáles son las coordenadas de un punto que no está situado en ningún cuadrante?
8. Se proyectan los puntos a continuación sobre el eje x. Escríbelos de tal manera que sus proyecciones resulten ordenadas de izquierda a derecha.

   A:(6,-3) B:(-2,5) C:(0,-4) D:(-5,0)
9. Dispón los puntos del problema anterior de tal manera que si se proyectan sobre el eje y queden ordenadas las proyecciones de abajo hacia arriba.
10. Si s es un número negativo y r es un número positivo, indica el cuadrante en que se encuentra cada uno de los siguientes puntos:

a. (s,r)
b. (-s,r)
c. (-s,-r)
d. (s,-r)
e. (r,s)
f. (r,-s)
g. (-r,-s)
h. (-r,s)

11. En un papel cuadriculado, construye un sistema de coordenadas. Utilizando segmentos, dibuja alguna figura simple en el papel. En un papel aparte, haz una lista de las coordenadas de los extremos de los segmentos utilizados en tu dibujo. Cambia tu lista de coordenadas por la de alguno de tus compañeros y reproduce el dibujo sugerido por su lista de coordenadas.

*12. Se puede construir un sistema de coordenadas en tres dimensiones considerando tres ejes perpendiculares entre sí, como los que muestra la figura. El eje y, aun cuando aparece dibujado en el papel, representa una recta perpendicular al plano del papel. Las porciones negativas de los ejes x, y, z, se prolongan hacia la izquierda, hacia atrás y hacia abajo, respectivamente. Tomados dos a dos, los tres ejes determinan tres planos llamados el plano yz, el plano xz, y el plano xy. Un punto (x, y, z) se localiza mediante sus tres coordenadas: la coordenada x es la coordenada de su proyección sobre el eje x; las coordenadas y, z se definen de manera análoga.



a. ¿En qué eje se encuentra cada uno de estos puntos?

(0,5,0); (-1,0,0); (0,0,8).

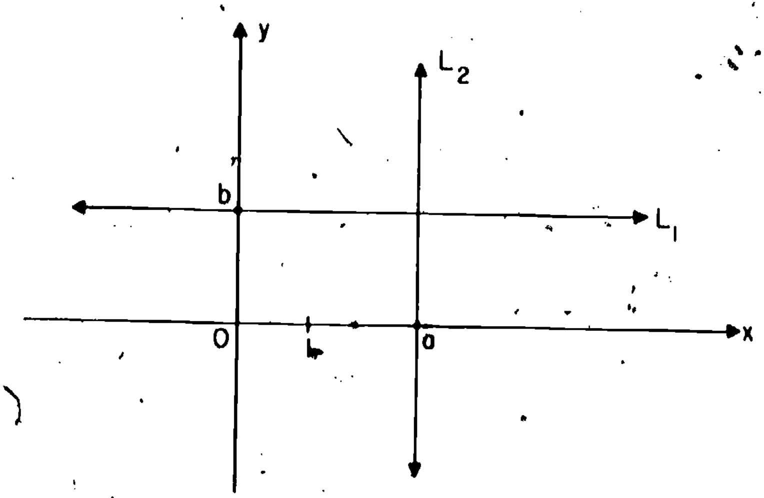
b. ¿En qué plano se encuentra cada uno de estos puntos?

(2,0,3); (0,5,-7); (1,1,0).

c. ¿Cuál es la distancia del punto (3,-2,4) al plano xy?; ¿y al plano xz?; ¿y al plano yz?

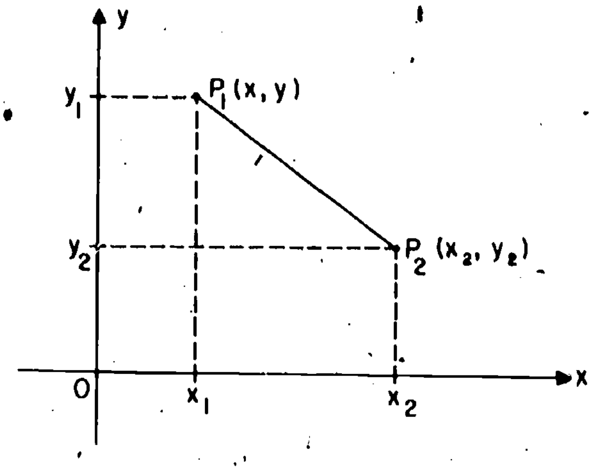
17-4. La pendiente de una recta no vertical

El eje x, y todas las rectas paralelas al mismo, se llaman horizontales. El eje y, y todas las rectas paralelas al mismo, se llaman verticales. Observa que estos términos se definen en relación con el sistema de coordenadas que hemos construido.



En la recta horizontal L_1, todos los puntos tienen la coordenada y igual a b, porque el punto (0,b) del eje y es el pie de todas las perpendiculares desde puntos de L_1. Análogamente, todos los puntos de la recta vertical L_2 tienen la coordenada x igual a a. Desde luego, un segmento es horizontal (vertical), si la recta que lo contiene es horizontal (vertical).

Considera, ahora, un segmento de recta $\overline{P_1P_2}$, donde $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, y supón que $\overline{P_1P_2}$ no es vertical.



<u>Definición</u>: La <u>pendiente</u> de $\overline{P_1P_2}$ es el número

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Efectivamente, éste es un número: puesto que el segmento no es vertical, P_1 y P_2 tienen diferentes coordenadas x, <u>y</u>, por lo tanto, el denominador no es cero. Algunos detalles acerca del concepto de pendiente son fáciles de ver.

(1) Es esencial que el orden en que se escriben las coordenadas en el numerador sea el mismo que en el denominador. De modo que si hemos de determinar la pendiente de $\overline{PQ}$, donde $P = (1,3)$ y $Q = (4,2)$, podemos elegir $P_1 = P$, $x_1 = 1$, $y_1 = 3$, $P_2 = Q$, $x_2 = 4$, $y_2 = 2$, obteniendo así la pendiente de $\overline{PQ} = \frac{2 - 3}{4 - 1} = -\frac{1}{3}$; o bien podemos elegir $P_1 = Q$, $x_1 = 4$, $y_1 = 2$, $P_2 = P$, $x_2 = 1$, $y_2 = 3$, obteniendo la pendiente de $\overline{PQ} = \frac{3 - 2}{1 - 4} = -\frac{1}{3}$.

Lo que no podemos decir es

$$\text{pendiente de } \overline{PQ} = \frac{3-2}{4-1} \text{ ó } \frac{2-3}{1-4}.$$

Observa que si se dan los puntos en orden invertido, la pendiente resulta ser la misma que antes. Algebraicamente,

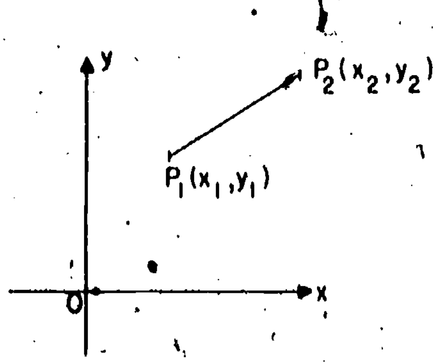
$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

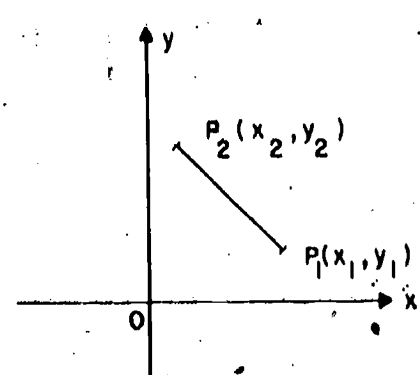
Así, el valor de m depende solamente del segmento en cuestión, y no del orden en que se dan sus extremos.

(2) Si $m = 0$, entonces el segmento es horizontal. (Algebraicamente, una fracción es cero solamente cuando su numerador es cero, y esto significa que $y_2 = y_1$.)

(3) Si el segmento se inclina hacia arriba de izquierda a derecha, como en la figura de la izquierda de esta página entonces $m > 0$, porque el numerador y el denominador son ambos positivos (o ambos negativos, si invertimos el orden de los extremos.)

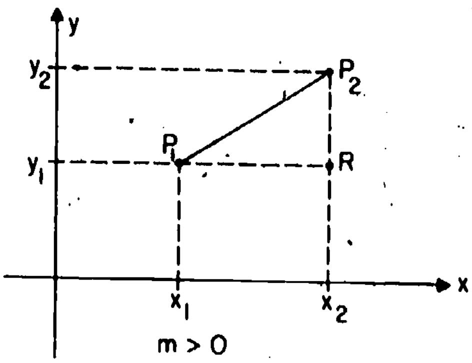
(4) Si el segmento se inclina hacia arriba de derecha a izquierda, como en la figura que aparece a continuación a la derecha, entonces $m < 0$. Esto es así porque m se puede escribir como una fracción con un numerador positivo $y_2 - y_1$, y un denominador negativo $x_2 - x_1$ (o lo que es equivalente, un numerador negativo $y_1 - y_2$ y un denominador positivo $x_1 - x_2$).

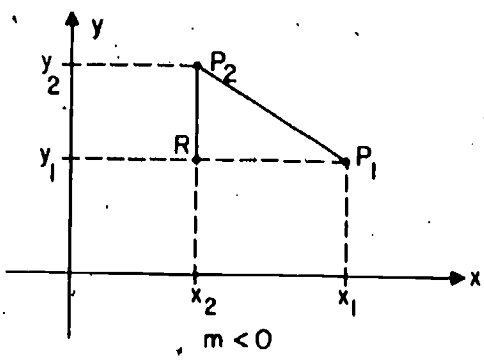




(5) No trataremos de escribir la pendiente de un segmento vertical, porque el denominador sería igual a cero, y, por lo tanto, la fracción no tendría significado.

En cualquiera de las figuras que aparecen a continuación podemos completar un triángulo rectángulo ΔP_1P_2R, trazando una recta vertical y una horizontal, respectivamente por P_1 y P_2, de la siguiente manera:





Puesto que lados opuestos de un rectángulo son congruentes, es fácil ver que

(1) si $m > 0$, entonces $m = \dfrac{RP_2}{P_1R}$

y

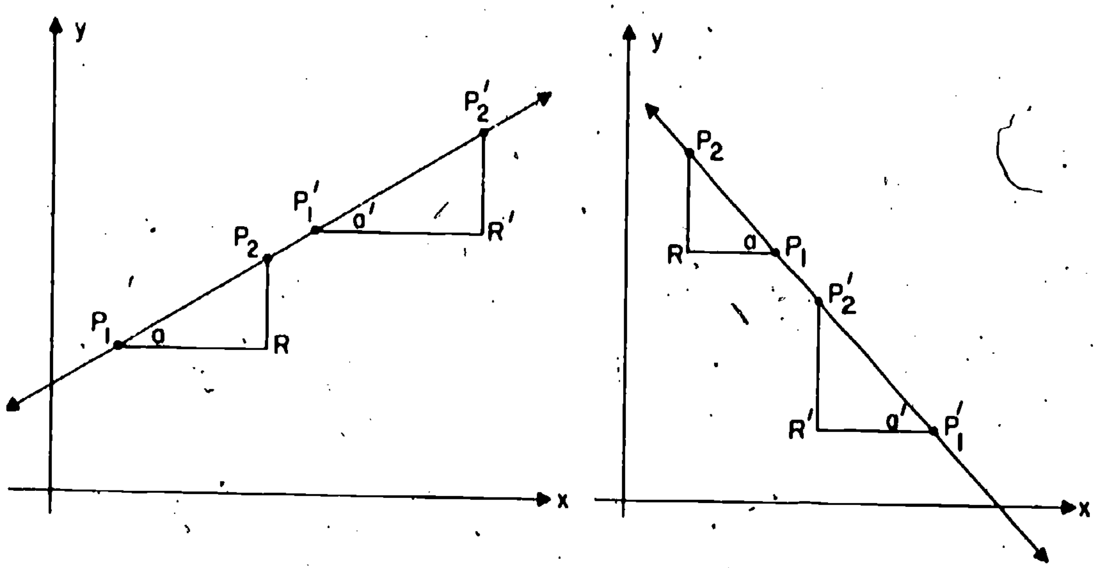
(2) si $m < 0$, entonces $m = -\dfrac{RP_2}{P_1R}$.

Una vez sabidos estos detalles acerca de las pendientes, es fácil entender nuestro primer teorema fundamental.

<u>Teorema</u> <u>17-1</u>: Todos los segmentos de una recta no vertical tienen la misma pendiente.

Demostración: Tenemos que considerar tres casos.

Caso (1): Si la recta es horizontal, todos los segmentos contenidos en la misma tendrán pendiente igual a cero:



Caso (2) Caso (3)

En cualquiera de los casos arriba presentados, $\angle a \cong \angle a'$, y como los triángulos son triángulos rectángulos, esto significa que

$$\Delta P_1P_2R \sim \Delta P_1'P_2'R'.$$

Por lo tanto, en cualquiera de los casos,

$$\frac{RP_2}{P_1R} = \frac{R'P_2'}{P_1'R'}.$$

En el caso (2), estas fracciones son las pendientes de $\overline{P_1P_2}$ y de $\overline{P_1'P_2'}$, respectivamente, y, por lo tanto, los segmentos tienen pendientes iguales. En el caso (3), las pendientes vienen dadas por los negativos de las mismas fracciones y, por consiguiente, son iguales.

El teorema 17-1 significa que no sólo podemos hablar de las pendientes de los segmentos sino también de las pendientes de rectas: la pendiente de una recta no vertical es el número m, pendiente de cualquier segmento contenido en dicha recta.

Conjunto de problemas 17-4

1. En cada uno de los siguientes ejercicios, remplaza el signo de interrogación de manera tal que la recta que pase por los dos puntos resulte horizontal:
   a. (5,7) y (-3,?)
   b. (0,-1) y (4, ?)
   c. (x_1,y_1) y $(x_2,?)$
2. En cada uno de los siguientes ejercicios, remplaza el signo de interrogación de manera tal que la recta que pase por los dos puntos resulte vertical:
   a. (?,2) y (6, -4)
   b. (-3,-1) y (?,0)
   c. (x_1,y_1) y $(?,y_2)$
3. Imagina cada uno de los pares de puntos dados en las partes (a), (b) y (c) representado en un sistema de coordenadas, y determina las distancias entre los dos puntos.
   a. (5,0) y (7,0)
   b. (5,1) y (7,1)
   c. (-3,-4) y (-6,-4)
   d. ¿Qué tienen en común las partes (a), (b) y (c)?
   e. Determina una regla que de un modo sencillo permita hallar la distancia entre los dos puntos asociados a tales pares.
   f. ¿Se podrá aplicar esa regla para hallar la distancia entre (6,5) y (3,-5)?
4. Imagina cada uno de los pares de puntos dados en las partes (a), (b), (c), y (d) representado en un sistema

de coordenadas, y determina la distancia entre los dos puntos.

a. (7,-3) y (7,0)

b. (-3,1) y (-3,-1)

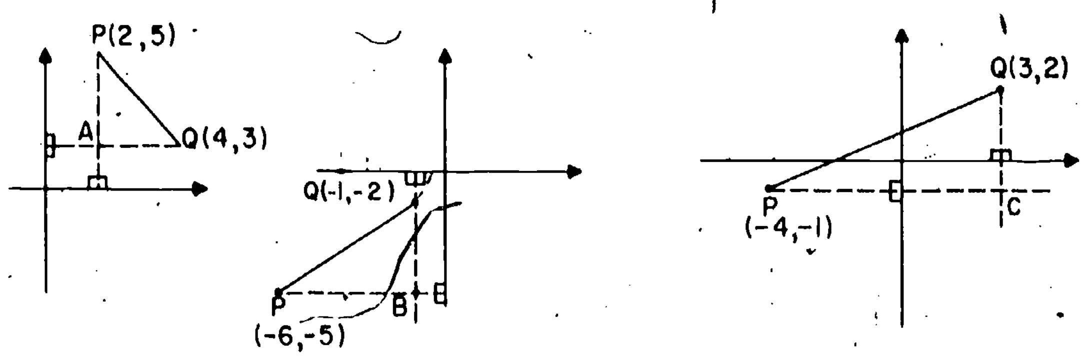
c. (6,8) y (6,4)

d. (x_1,y_1) y (x_1,y_2)

e. ¿Qué tienen en común las partes (a), (b), (c), y (d)?

f. Determina una regla que de un modo sencillo permita hallar la distancia entre los dos puntos asociados a tales pares.

5. Utilizando las perpendiculares que aparecen en las siguientes figuras, determina las coordenadas de A, B y C.



6. En el problema 5, halla las distancias desde los puntos A, B, C hasta los puntos P y Q correspondientes.

7. Halla la pendiente de $\overline{PQ}$ en cada una de las figuras del problema 5.

8. Una carretera se eleva dos pies por cada 30 pies de distancia horizontal. ¿Cuál será su pendiente?

9. En cada uno de los siguientes ejercicios, halla la pendiente del segmento que une los dos puntos dados:

a. (0,0) y (6,2)

b. (0,0) y (2,-6)

c. (3,5) y (7,12)
d. (0,0) y (-4,-3)
e. (-5,7) y (3,-8).
f. $(\frac{1}{2},\frac{1}{3})$ y $(\frac{1}{4},\frac{1}{5})$
g. (-2.8,3.1) y (2.2,-1.9)
h. $(\frac{1}{240},0)$ y $(0,\frac{1}{80})$

10. En cada uno de los siguientes ejercicios, sustituye el signo de interrogación por un número, de manera que la recta que pase por los dos puntos tenga la pendiente dada: (Sugerencia: Sustituye en la fórmula de la pendiente.)
a. (5,2) y (?,6) $m = 4$
b. (-3,1) y (4,?) $m = \frac{1}{2}$

*11. Las rectas $\overleftrightarrow{PA}$ y $\overleftrightarrow{PB}$ no son verticales. Demuestra que $\overleftrightarrow{PA} = \overleftrightarrow{PB}$ si, y solamente si, tienen pendientes iguales; y, en consecuencia, si $\overleftrightarrow{PA}$ y $\overleftrightarrow{PB}$ tienen pendientes diferentes, entonces P, A y B no están alineados.

12. a. ¿Estará el punto B(4,13) contenido en la recta que une los puntos A(1,1) y C(5,17)? (Sugerencia: ¿Es la pendiente de $\overline{AB}$ la misma que la de $\overline{BC}$?)
b. ¿Estará el punto (2,-1) contenido en el segmento de recta que une los puntos (-5,4) y (6,-8)?

13. Halla la pendiente del segmento que une los puntos:
a. (0,n) y (n,0)
b. (2d,-2d) y (0,d)
c. (a + b,a) y (a - b,b)

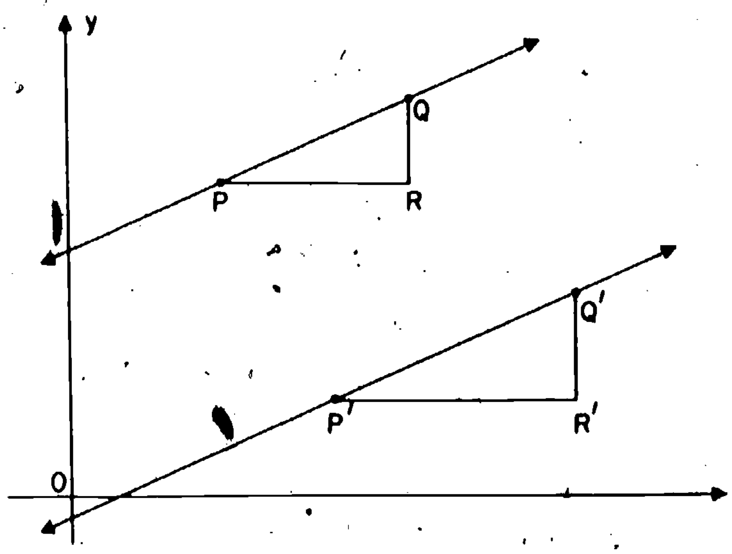
14. Dados los puntos A:(101,102), B:(5,6), C:(-95,-94), averigua si las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ coinciden o no.

15. Se dan los puntos A:(101,102), B:(5,6), C:(202,203), D:(203,204). ¿Son paralelas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$? ¿Sería posible que coincidieran?

16. Dibuja la parte del primer cuadrante de un sistema de coordenadas en la cual las coordenadas sean menores o iguales que 5. Dibuja un segmento que pase por el origen, y que, si se prolongara, pasaría por $P(80000000,60000000)$.

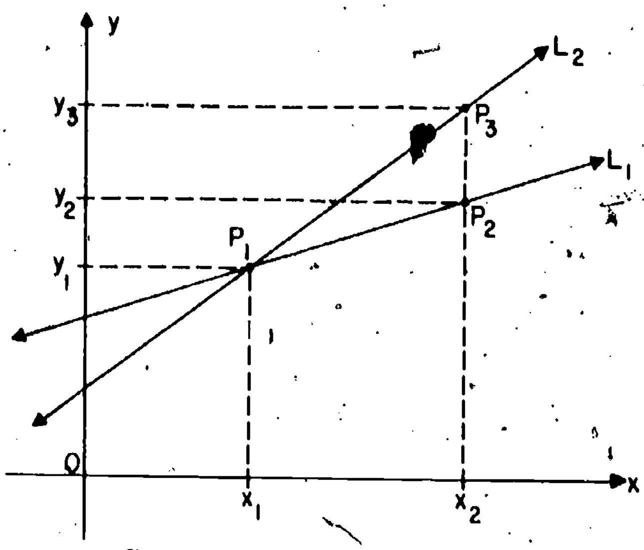
17-5. Rectas paralelas y perpendiculares

Es fácil ver las condiciones algebraicas que deben cumplirse para que dos rectas no verticales sean paralelas.



Si las rectas son paralelas, entonces $\triangle PQR \sim \triangle P'Q'R'$, y de aquí se deduce, como en la demostración del teorema anterior, que las rectas tienen pendientes iguales.

Recíprocamente, si dos rectas diferentes tienen la misma pendiente, entonces son paralelas. Esto lo demostraremos por el método de contradicción.

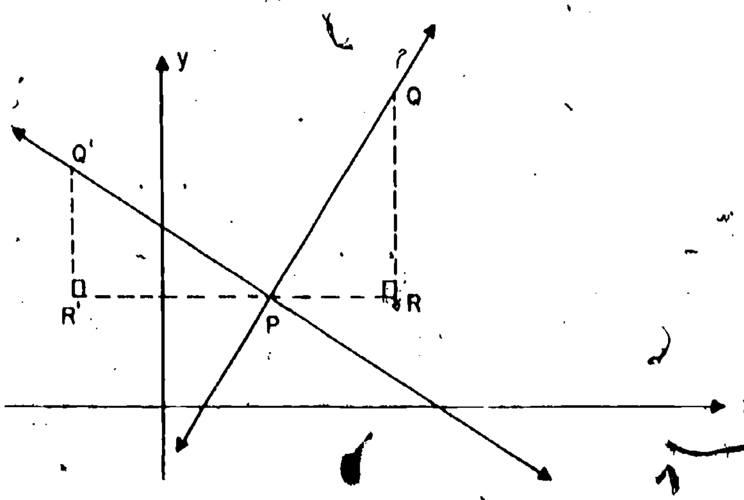


Supón que, como en la figura anterior, L_1 y L_2 no son paralelas. Si, como muestra la figura, P_1 es el punto de intersección de las dos rectas, y las coordenadas x de P_2 y P_3 son ambas iguales a x_2, la pendiente de L_1 es $m_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, y la pendiente de L_2 es $m_2 = \dfrac{y_3 - y_1}{x_2 - x_1}$. Como $y_3 \neq y_2$, las fracciones no pueden ser iguales y, por lo tanto, $m_1 \neq m_2$. Así, pues, nuestra suposición inicial de que las dos rectas L_1 y L_2 no eran paralelas nos condujo a una contradicción con la hipótesis de que $m_1 = m_2$. Por lo tanto, las dos rectas L_1 y L_2 son paralelas.

Así, pues, tenemos el siguiente teorema:

<u>Teorema 17-2</u>. Dos rectas no verticales son paralelas si, y solamente si, sus pendientes son iguales.

Consideremos ahora la condición para que dos rectas sean perpendiculares, y supongamos que se ~~nos~~ dan dos rectas perpendiculares, ninguna de las cuales es vertical.



Sea P el punto de intersección de las dos rectas. Como muestra la figura, sea Q un punto de una de las rectas, situado encima y a la derecha de P. Sea Q' un punto de la otra recta, situado encima y a la izquierda de P, de tal modo que PQ' = PQ. Como indica la figura, completamos los triángulos rectángulos ΔPQR y $\Delta Q'PR'$. Entonces

$$\Delta PQR \cong \Delta Q'PR' \quad (\text{¿Por qué?})$$

Por lo tanto,

$$Q'R' = PR \quad y \quad R'P = RQ.$$

y, por consiguiente,
$$\frac{Q'R'}{R'P} = \frac{PR}{RQ}.$$

Sea m la pendiente de $\overleftrightarrow{PQ}$ y sea m' la pendiente de $\overleftrightarrow{PQ'}$.

Entonces,

$$m = \frac{RQ}{PR},$$

y

$$m' = -\frac{Q'R'}{R'P} = -\frac{PR}{RQ}.$$

Por tanto,
$$m' = -\frac{1}{m}.$$

Es decir, para dos rectas perpendiculares, la pendiente de una es el recíproco negativo de la pendiente de la otra.

Recíprocamente, supón que sabemos que $m' = -\frac{1}{m}$. Entonces, construimos como antes el $\triangle PQR$, y también el triángulo rectángulo $\triangle Q'PR'$ haciendo $R'P = RQ$. Podemos luego demostrar que $Q'R' = PR$; esto conduce como en el caso anterior, a la misma congruencia, $\triangle PQR \cong \triangle Q'PR'$, y de aquí se desprende que $\angle Q'PQ$ es un ángulo recto y, por lo tanto, $\overleftrightarrow{PQ} \perp \overleftrightarrow{PQ'}$.

Estas dos propiedades se enuncian juntas en el siguiente teorema:

Teorema 17-3. Dos rectas no verticales son perpendiculares si, y solamente si, la pendiente de una de ellas es el recíproco negativo de la pendiente de la otra.

Observa que los teoremas 17-2 y 17-3 nada nos dicen acerca de rectas verticales, pero no es necesario, porque la cuestión de paralelismo y perpendicularidad resulta trivial cuando una de las rectas es vertical. Si L es vertical, entonces L' es paralela a L si, y solamente si, L' es también vertical (y distinta de L). Si L es vertical, entonces L' es perpendicular a L si, y solamente si, L' es horizontal.

Conjunto de problemas 17-5

1. Cuatro puntos tomados dos a dos determinan seis segmentos. Identifica cuáles de los segmentos determinados por los siguientes cuatro puntos son paralelos: $A(3,6)$, $B(5,9)$, $C(8,2)$, $D(6,-1)$. (Advertencia: Dos segmentos no son necesariamente paralelos porque tengan pendientes iguales.)
2. Mediante pendientes, demuestra que cuando se dibujan los segmentos que unen en orden sucesivo los puntos $A(-1,5)$, $B(5,1)$, $C(6,-2)$ y $D(0,2)$, se forma un paralelogramo.

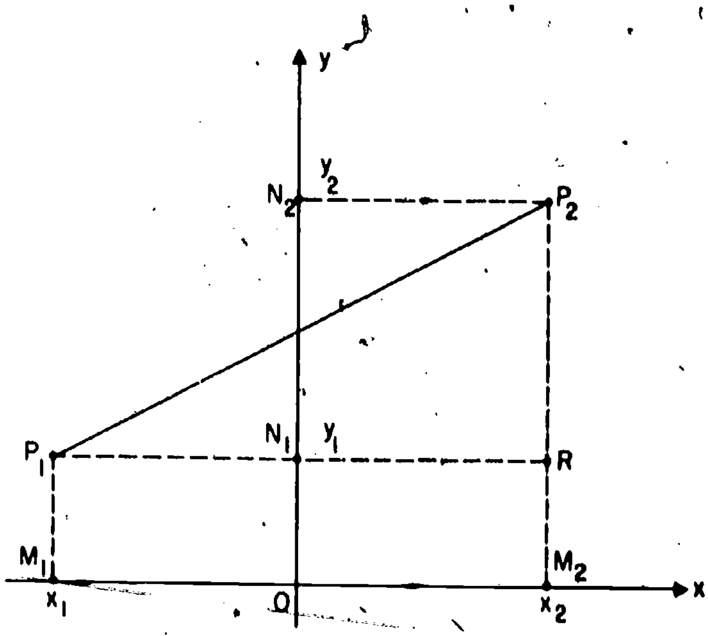
3. Las rectas L_1, L_2, L_3, y L_4 tienen pendientes $\frac{2}{3}$, -4, $-1\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$, respectivamente. ¿Qué pares de rectas son perpendiculares?
4. Se nos asegura que los dos cuadriláteros cuyos vértices se dan a continuación son paralelogramos. Sin marcar los puntos, determina si esto es cierto o no.
   (1) A:(-5,-2), B:(-4,2), C:(4,6), D:(3,1)
   (2) P:(-2,-2), Q:(4,2), R:(9,1), S:(3,-3)
5. Los vértices de un triángulo son A(16,0), B(9,2) y C(0,0).
   a. ¿Cuáles son las pendientes de sus lados?
   b. ¿Cuáles son las pendientes de sus alturas?
6. Demuestra que el cuadrilátero determinado por los puntos A(-2,2), B(2,-2), C(4,2) y D(2,4) es un trapecio con diagonales perpendiculares.
7. Demuestra que una recta que pasa por (3n,0) y (0,n) es paralela a una recta que pasa por (6n,0) y (0,2n).
8. Demuestra que una recta que pasa por (0,0) y (a,b) es perpendicular a una recta que pasa por (0,0) y (-b,a).

*9. Demuestra que si un triángulo tiene vértices X(r,s), Y(na + r, nb + s), Z(-mb + r, ma + s), tendrá un ángulo recto en X.

10. Dados los puntos P(1,2), Q(5,-6) y R(b,b), determina el valor de b de modo que $\angle PQR$ sea un ángulo recto.
11. Dados P = (a,1), Q = (3,2), R = (b,1), S = (4,2), demuestra que $\overleftrightarrow{PQ} \neq \overleftrightarrow{RS}$, y que si $\overline{PQ} \parallel \overline{RS}$, entonces a = b - 1.

17-6. La fórmula de la distancia

Si conocemos las coordenadas de dos puntos P_1 y P_2, entonces sabemos dónde se encuentran los puntos, de modo que podemos determinar la distancia P_1P_2. Veamos, ahora, cómo se puede calcular esta distancia. Deseamos hallar una fórmula que nos dé P_1P_2 en función de las coordenadas x_1, x_2, y_1, y_2.



Marquemos las proyecciones M_1, M_2, N_1 y N_2 como aparecen en la figura anterior. Por el teorema de Pitágoras,

$(P_1P_2)^2 = (P_1R)^2 + (RP_2)^2$;

y también $\quad P_1R = M_1M_2$ y $RP_2 = N_1N_2$,

puesto que los lados opuestos de un rectángulo son congruentes.

Por lo tanto, $\quad (P_1P_2)^2 = (M_1M_2)^2 + (N_1N_2)^2$.

Mas sabemos que $M_1M_2 = |x_2 - x_1|$

y que $N_1N_2 = |y_2 - y_1|$.

Por consiguiente, $(P_1P_2)^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$.

Desde luego, el cuadrado del valor absoluto de un número es igual al cuadrado del número mismo.

Por lo tanto, $(P_1P_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$,

y como $P_1P_2 \geq 0$, esto significa que

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

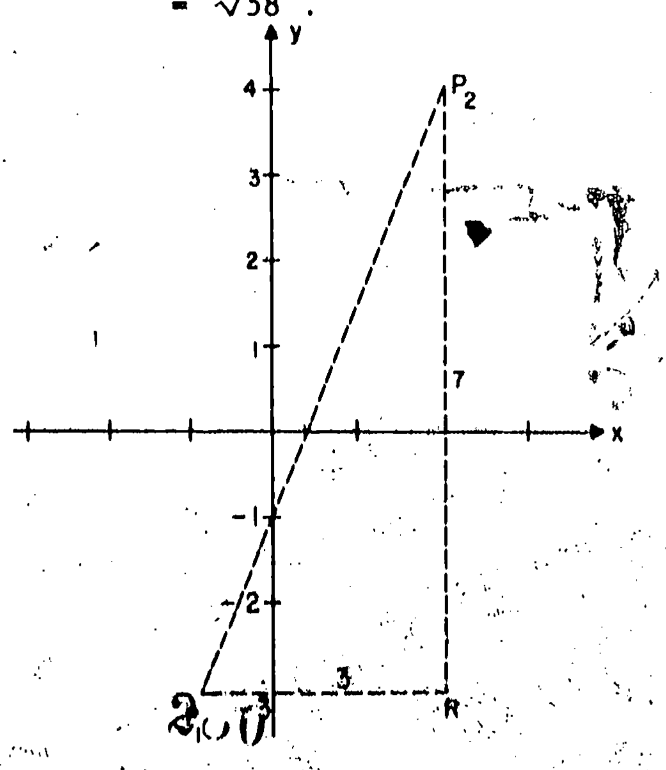
Esta es la fórmula que buscábamos. Así, pues, tenemos el siguiente teorema:

<u>Teorema</u> <u>17-4.</u> (La fórmula de la distancia) La distancia entre los puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2) es igual a

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Por ejemplo, toma los puntos $P_1 = (-1,-3)$ y $P_2 = (2,4)$.

Por la fórmula,
$$\begin{aligned} P_1P_2 &= \sqrt{(2 + 1)^2 + (4 + 3)^2} \\ &= \sqrt{9 + 49} \\ &= \sqrt{58}. \end{aligned}$$



Desde luego, si marcáramos los puntos, como en la figura anterior, podríamos obtener directamente la misma respuesta partiendo del teorema de Pitágoras; los catetos del triángulo rectángulo ΔP_1RP_2 tienen longitudes de 3 y 7, respectivamente, de manera que, como antes, $P_1P_2 = \sqrt{3^2 + 7^2}$. Por supuesto, si hallamos la distancia de esta manera, estamos simplemente reproduciendo para un caso particular la deducción de la fórmula de la distancia.

Conjunto de problemas 17-6

1. a. Sin utilizar la fórmula de la distancia, halla la distancia entre cada dos de los siguientes puntos: A(0,3), B(1,3), C(-3,3) y D(4.5,3).

   b. Sin utilizar la fórmula de la distancia, halla la distancia entre cada dos de los siguientes puntos: A(2,0), B(2,1), C(2,-3) y D(2,4.5).

2. a. Escribe una fórmula simple para la distancia entre (x_1, k) y (x_2, k). (Sugerencia: Los puntos estarán en una recta horizontal.)

   b. Escribe una fórmula simple para la distancia entre (k, y_1) y (k, y_2).

3. Utiliza la fórmula de la distancia para hallar la distancia entre:

   a. (0,0) y (3,4) e. (3,8) y (-5,-7)
   b. (0,0) y (3,-4) f. (-2,3) y (-1,4)
   c. (1,2) y (6,14) g. (10,1) y (49,81)
   d. (8,11) y (15,35) h. (-6,3) y (4,-2)

4. a. Escribe una fórmula para el cuadrado de la distancia entre los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

   b. Utilizando coordenadas, escribe y simplifica el siguiente enunciado:
   El cuadrado de la distancia entre (0,0) y (x,y) es 25.

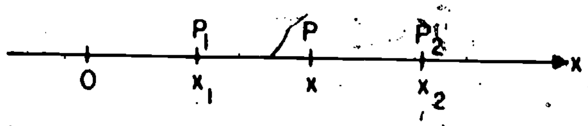
5. Demuestra que el triángulo cuyos vértices son R(0,0), S(3,4) y T(-1,1) es isósceles, calculando las longitudes de sus lados.
6. Utilizando el inverso del teorema de Pitágoras, demuestra que el triángulo determinado por los puntos D(1,1), E(3,0) y F(4,7) es un triángulo rectángulo, con un ángulo recto en D.
7. Dados los puntos A(-1,6), B(1,4) y C(7,-2), demuestra, <u>sin</u> marcar los puntos, que B está entre A y C.
8. Supongamos que las calles de una ciudad forman manzanas cuadradas congruentes, con las avenidas en dirección este a oeste y las calles en dirección norte a sur.
   a. Si caminas por las aceras, ¿qué distancia tendrías que recorrer para llegar desde la esquina de la cuarta avenida y la calle 8 hasta la esquina de la séptima avenida y la calle 12? (Utiliza el largo de una manzana como unidad de medida.)
   b. ¿Cuál sería la distancia "a vuelo de pájaro" entre las mismas dos esquinas?
9. Los vértices W, X y Z del rectángulo WXYZ tienen coordenadas (0,0), (a,0) y (0,b), respectivamente.
   a. ¿Cuáles son las coordenadas de Y?
   b. Utilizando coordenadas, demuestra que WY = XZ.

*10. a. Utilizando coordenadas tridimensionales (V. el problema 12 del Conjunto de problemas 17-3), calcula la distancia entre (0,0,0) y (2,3,6).
   b. Escribe una fórmula para la distancia entre (0,0,0) y (x,y,z).
   c. Escribe una fórmula para la distancia entre $P_1(x_1,y_1,z_1)$ y $P_2(x_2,y_2,z_2)$.

17-7. La fórmula del punto medio

En la sección 17-8 demostraremos, mediante el uso de sistemas de coordenadas, algunos teoremas geométricos. En algunas de estas demostraciones necesitaremos hallar las coordenadas del punto medio de un segmento $\overline{P_1P_2}$ en función de las coordenadas de P_1 y P_2.

Tomemos primeramente el caso en que P_1 y P_2 están en el eje x, con $x_1 < x_2$, como se muestra a continuación:



y donde P es el punto medio, con coordenada x. Como $x_1 < x < x_2$, sabemos que $P_1P = x - x_1$ y $PP_2 = x_2 - x$. Como P es el punto medio, de aquí se obtiene que

$$x - x_1 = x_2 - x,$$

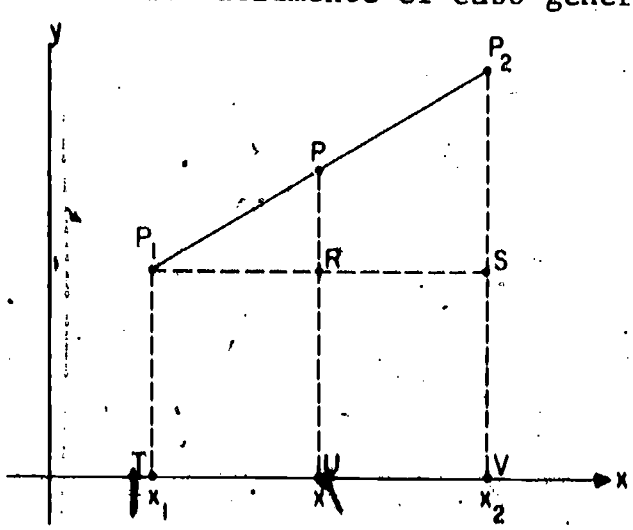
o

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Análogamente, en el eje y,

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Ahora podemos tratar fácilmente el caso general:



Como P es el punto medio de $\overline{P_1P_2}$, por triángulos semejantes tenemos que R es el punto medio de $\overline{P_1S}$. Como los lados opuestos de un rectángulo son congruentes, U es el punto medio de $\overline{TV}$.

Por tanto,

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Análogamente, proyectando los puntos sobre el eje y, podemos mostrar que

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Así, hemos demostrado el siguiente teorema:

<u>Teorema 17-5</u>. (La fórmula del punto medio) Sean dados $P_1 = (x_1,y_1)$, $P_2 = (x_2,y_2)$. Entonces el punto medio de $\overline{P_1P_2}$ es el punto

$$P = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

<u>Conjunto de problemas 17-7</u>

1. En cada uno de los siguientes ejercicios, imagínate la situación de los dos puntos cuyas coordenadas se dan y calcula mentalmente las coordenadas del punto medio del segmento de recta que une dichos puntos:
   a. (0,0) y (0,12)
   b. (0,0) y (-5,0)
   c. (1,0) y (3,0)
   d. (0,-7) y (0,7)
   e. (4,4) y (-4,-4)
2. En cada uno de los siguientes ejercicios, utiliza la fórmula del punto medio para determinar las coordenadas del punto medio del segmento de recta que une los dos puntos cuyas coordenadas se dan:
   a. (5,7) y (11,17)
   b. (-9,3) y (-2,-6)

c. $(\frac{1}{2},\frac{1}{5})$ y $(\frac{1}{3},\frac{1}{8})$

d. (2.51,-1.33) y (0.65,3.55)

e. (r + s,r - s) y (-r,s)

3. a. Uno de los extremos de un segmento de recta es (4,0); el punto medio es (4,1). Imagínate la situación de éstos puntos y determina, sin utilizar fórmulas, las coordenadas del otro extremo.

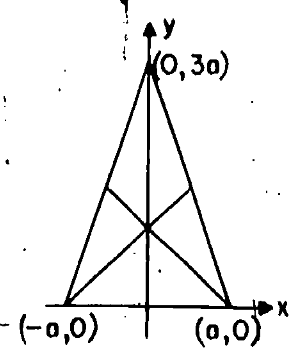
   b. Un extremo de un segmento de recta es (13,19). El punto medio es (-9,30). Utilizando las fórmulas apropiadas, determina las coordenadas x e y del otro extremo del segmento.

4. Un cuadrilátero será un cuadrado si sus diagonales son congruentes, perpendiculares, y se bisecan mutuamente. Comprueba que esto sucede en el caso del cuadrilátero cuyos vértices son A(2,1), B(7,4), C(4,9) y D(-1,6).

5. Si los vértices de un triángulo son A(5,-1), B(1,5) y C(-3,1), ¿cuáles son las longitudes de sus medianas?

6. Dado el cuadrilátero que une los puntos A(3,-2), B(-3,4), C(1,8) y D(7,4), demuestra que el cuadrilátero formado al unir ordenadamente los puntos medios es un paralelogramo.

7. Utilizando coordenadas, demuestra que dos de las medianas del triángulo con vértices (a,0), (-a,0) y (0,3a) son perpendiculares la una a la otra.



8. Cambia la posición del punto P en la figura que precede al teorema 17-5, de manera que $PP_1 = \frac{1}{3}P_1P_2$, y obtén fórmulas para las coordenadas de P en función de las

coordenadas de P_1 y P_2. (P está entre P_1 y P_2, y además $x_2 > x_1$.)

*9. a. Demuestra que si $P_1 = (x_1,y_1)$, $P_2 = (x_2,y_2)$, $P = (x,y)$ y si P está entre P_1 y P_2 de manera que $\frac{PP_1}{PP_2} = \frac{r}{s}$, entonces $x = \frac{rx_2 + sx_1}{r + s}$ y $y = \frac{ry_2 + sy_1}{r + s}$.

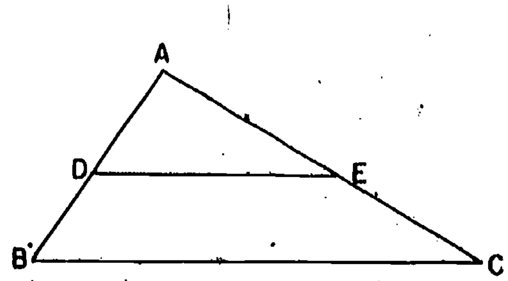
b. Utiliza el resultado de la parte (a) para hallar un punto P del segmento de recta que une los puntos $P_1(5,11)$ y $P_2(25,36)$, de manera que $\frac{PP_1}{PP_2} = \frac{3}{5}$.

17-8. Demostraciones de teoremas geométricos

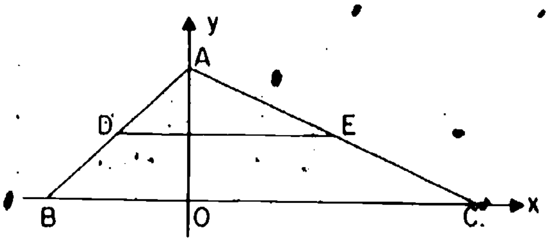
Utilicemos ahora nuestros sistemas de coordenadas en las demostraciones de algunos teoremas geométricos. Empezaremos con un teorema que ya hemos demostrado por otros métodos.

Teorema A. El segmento de recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado e igual a su mitad.

Enunciado de otra manera: En el $\triangle ABC$, sean D y E los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. Entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ y $DE = \frac{1}{2}BC$.



Demostración: Cuando se emplean coordenadas, el primer paso para demostrar un teorema como éste es introducir un sistema de coordenadas adecuado. Es decir, debemos decidir qué recta tomaremos como eje x, cuál como eje y, y qué sentido a lo largo de cada eje tomaremos como positivo. Tenemos muchas posibilidades, y a veces una buena elección puede simplificar grandemente nuestro trabajo. En el caso presente parece razonable tomar $\overleftrightarrow{BC}$ como eje x, con $\overrightarrow{BC}$ como sentido positivo. Elegiremos el eje y de manera que pase por A, con $\overrightarrow{OA}$ como sentido positivo, así:



El próximo paso es determinar las coordenadas de los diversos puntos de la figura: La coordenada x de A es cero, la coordenada y podría ser cualquier número positivo, de modo que escribimos $A = (0,p)$, con la única restricción $p > 0$. Análogamente, $B = (q,0)$ y $C = (r,0)$, siendo $r > q$. (Observa que podríamos tener cualquiera de los casos $q < r < 0$, $q < r = 0$, $q < 0 < r$, $0 = q < r$, $0 < q < r$. Nuestra figura ilustra el tercer caso.) Ahora se pueden determinar las coordenadas de D y E mediante la fórmula del punto medio. Obtenemos

$$D = (\frac{q}{2},\frac{p}{2}), \quad E = (\frac{r}{2},\frac{p}{2}).$$

Por tanto, la pendiente de $\overline{DE}$ es

$$\frac{\frac{p}{2} - \frac{p}{2}}{\frac{r}{2} - \frac{q}{2}} = \frac{0}{\frac{r-q}{2}} = 0,$$

(puesto que $q \neq r$, el denominador no es cero.)

De igual modo, la pendiente de $\overline{BG}$ es

$$\frac{0 - 0}{\frac{r}{2} - \frac{q}{2}} = 0;$$

y, por lo tanto, $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. Finalmente, por la fórmula de la distancia,

$$DE = \sqrt{(\frac{r}{2} - \frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{2} - \frac{p}{2})^2} = \frac{r - q}{2}$$

y

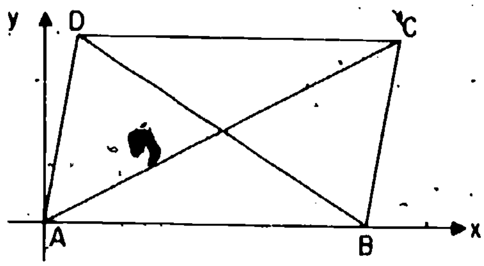
$$BC = \sqrt{(r - q)^2 + (0 - 0)^2} = r - q,$$

de modo que $DE = \frac{1}{2}BC$.

El álgebra en esta demostración se puede hacer aún más sencilla mediante un artificio simple. En vez de tomar $A = (0,p)$, $B = (q,0)$, $C = (r,0)$, podríamos tomar $A = (0,2p)$, $B = (2q,0)$; $C = (2r,0)$; es decir, tomar p, q, y r respectivamente, como la mitad de las coordenadas de los puntos A, B, y C. Si lo hacemos así, no obtendremos fracciones al dividir por 2 en la fórmula del punto medio. A menudo sucede esto; la previsión desde el principio puede sustituir a la paciencia más adelante.

Teorema B. Si las diagonales de un paralelogramo son congruentes, el paralelogramo es un rectángulo.

O de otro modo: Sea ABCD un paralelogramo, y sea $AC = BD$. Entonces ABCD es un rectángulo.



Demostración: Tomemos los ejes de la manera que muestra la figura. Entonces $A = (0,0)$, y $B = (p,0)$, siendo $p > 0$. Si nada suponemos acerca de la figura salvo que ABCD es un paralelogramo, D podría estar en cualquier sitio del semiplano superior, de manera que $D = (q,r)$, siendo $r > 0$, pero no habrá más restricciones sobre q o r. Sin embargo, ahora se determina C, partiendo del hecho de que ABCD es un paralelogramo. Es bastante obvio (para detalles, véase la demostración anterior) que para que $\overline{DC}$ sea paralelo a $\overline{AB}$ debemos tener el punto $C = (s,r)$. La coordenada s se puede determinar por la condición $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, de la siguiente manera:

$$\text{pendiente de } \overline{BC} = \text{pendiente de } \overline{AD},$$

$$\frac{r-0}{s-p} = \frac{r-0}{q-0} \quad \text{o} \quad \frac{r}{s-p} = \frac{r}{q}$$

$$rq = r(s-p)$$

$$q = s - p \quad (\text{puesto que } r \neq 0)$$

$$s = p + q$$

(Las coordenadas $(p+q,r)$ del punto C se pueden determinar por simple inspección de la figura, si aceptamos teoremas anteriores acerca de los paralelogramos, como por ejemplo, que ABCD es un paralelogramo, si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $AB = CD$.)

Finalmente, imponemos la condición de que $AC = BD$. Utilizando la fórmula de la distancia, obtenemos

$$\sqrt{(p + q - 0)^2 + (r - 0)^2} = \sqrt{(q - p)^2 + (r - 0)^2}.$$

Cuadrando, tenemos

$$(p + q)^2 + r^2 = (q - p)^2 + r^2,$$

$$p^2 + 2pq + q^2 + r^2 = q^2 - 2pq + p^2 + r^2,$$

o

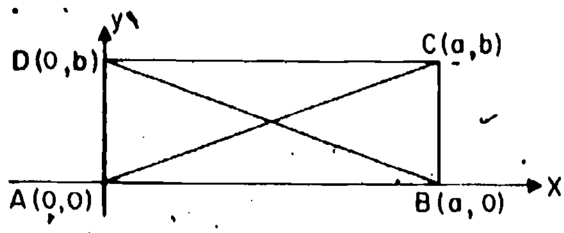
$$4pq = 0.$$

Ahora $4 \neq 0$ y $p \neq 0$; por consiguiente, $q = 0$. Esto significa que D está en el eje y, de manera que $\angle BAD$ es un ángulo recto y $ABCD$ es un rectángulo.

Conjunto de problemas 17-8

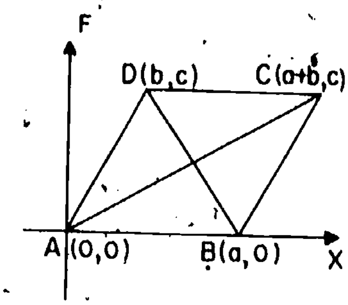
Utilizando la geometría de las coordenadas, demuestra los siguientes teoremas:

1. Las diagonales de un rectángulo tienen longitudes iguales. (Sugerencia: Coloca los ejes como muestra la figura.)

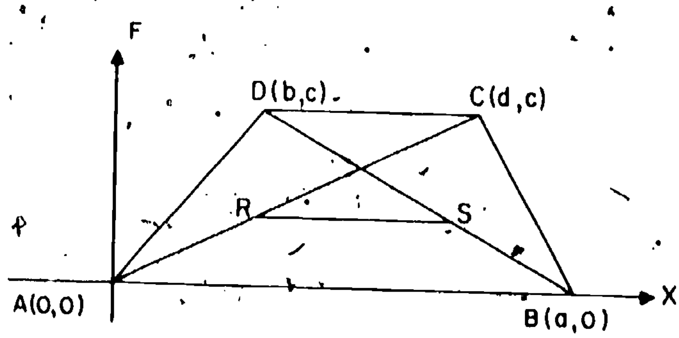


2. El punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo equidista de los vértices del triángulo.
3. Todo punto situado en la mediatriz de un segmento de recta equidista de los extremos del segmento. (Sugerencia: Elige los ejes en una posición tal que los cálculos algebraicos sean lo más simple posible.)
4. Todo punto equidistante de los extremos de un segmento de recta está en la mediatriz del segmento.

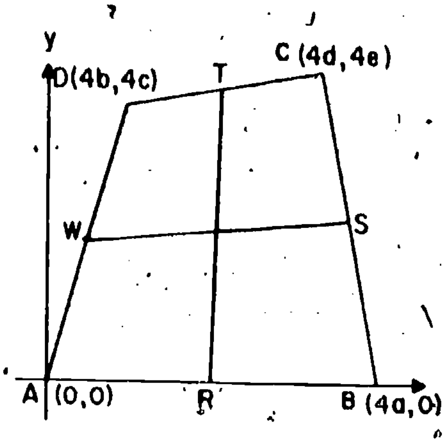
5. Las diagonales de un paralelogramo se bisecan la una a la otra. (Sugerencia: Elige para los vértices del paralelogramo ABCD las coordenadas que aparecen en el diagrama. Muestra que las dos diagonales tienen el mismo punto medio.)



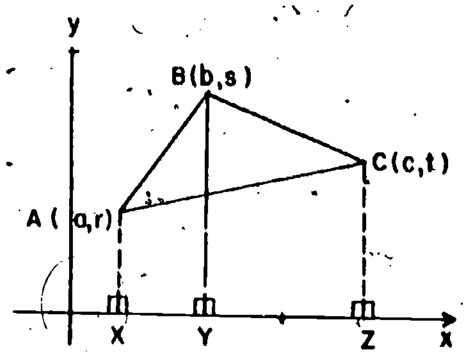
6. El segmento de recta que une los puntos medios de las diagonales de un trapecio es paralelo a las bases y de longitud igual a la mitad de la diferencia entre las longitudes de las bases.
En la siguiente figura, R y S son los puntos medios de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ del trapecio ABCD.



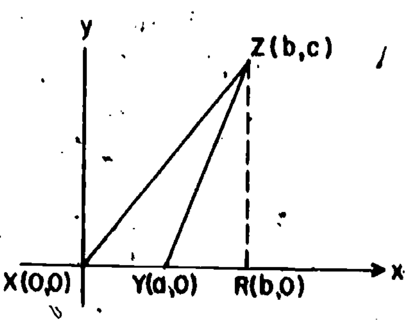
7. Los segmentos de recta que unen los puntos medios de lados opuestos de un cuadrilátero cualquiera se bisecan el uno al otro. (Los 4 en el diagrama vienen sugeridos por el hecho de que hay que hallar los puntos medios de los segmentos que unen puntos medios.)



8. El área del $\triangle ABC$ es $\frac{a(t-s)+b(r-t)+c(s-r)}{2}$, donde $A = (a,r)$, $B = (b,s)$ y $C = (c,t)$. (Sugerencia: Define tres trapecios en la figura.)



9. Dado que en el $\triangle XYZ$, $\angle X$ es agudo y $\overline{ZR}$ es una altura, demuestra que $ZY^2 = XZ^2 + XY^2 - 2XY \cdot XR$.



10. Si $ABCD$ es un cuadrilátero cualquiera con diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, y si M y N son los puntos medios de estas diagonales, entonces $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2$.

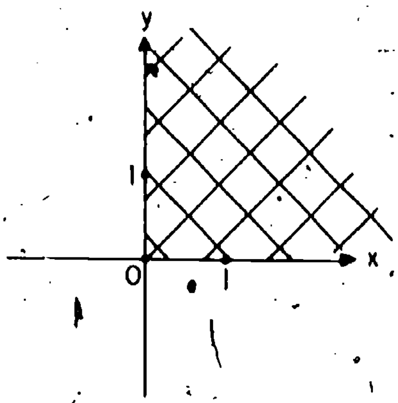
11. En el $\triangle ABC$, $\overline{CM}$ es la mediana al lado $\overline{AB}$. Demuestra que $AC^2 + BC^2 = \frac{AB^2}{2} + 2MC^2$.

17-9. La gráfica de una condición

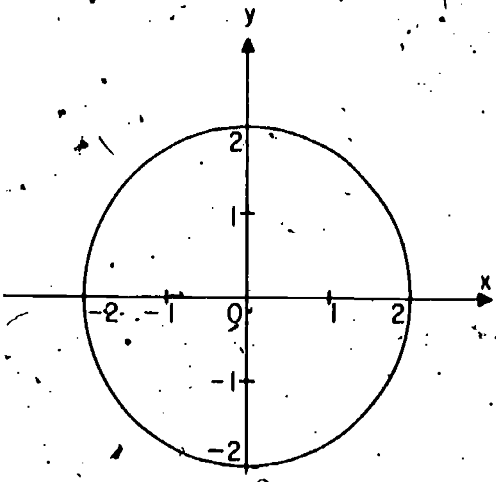
Por una gráfica entendemos simplemente una figura en el plano, es decir, un conjunto de puntos. Por ejemplo, triángulos, rayos, rectas y semiplanos son todos gráficas. Se puede describir una gráfica enunciando la condición que cumplen todos los puntos de la gráfica y ningún otro punto. A continuación damos algunos ejemplos, cada uno de los cuales muestra una condición y una descripción de la gráfica; aparece también la figura correspondiente.

Condición	Gráfica
1. Las dos coordenadas del punto P son positivas.	1. El primer cuadrante.
2. La distancia OP es 2.	2. La circunferencia con centro en el origen y radio igual a 2.
3. $OP < 1$	3. El interior de una circunferencia con centro en el origen y radio igual a 1.
4. $x = 0$	4. El eje y
5. $y = 0$.	5. El eje x
6. $x \geq 0$, y también $y = 0$.	6. El rayo $\overrightarrow{OA}$, donde $A = (1,0)$.
7. $x = 0$, y también $y \leq 0$.	7. El rayo $\overrightarrow{OB}$, donde $B = (0,-1)$.

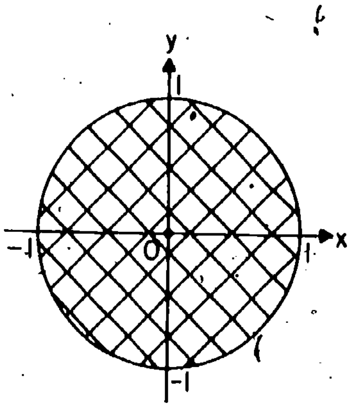
Las siete gráficas son las siguientes:



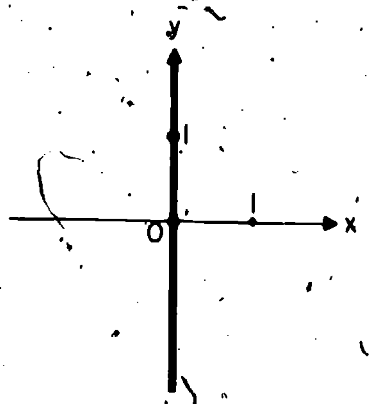
1.



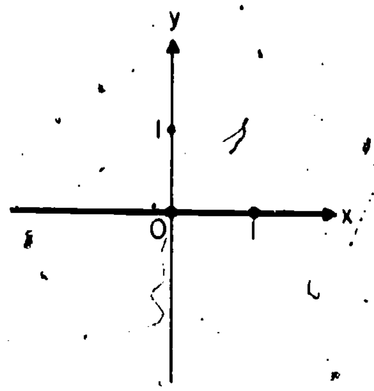
2.



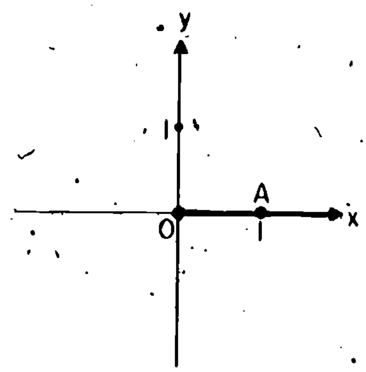
3.



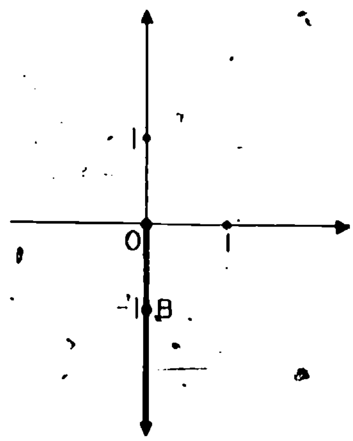
4.



5.



6.



7.

En cada uno de estos casos, debes comprobar cuidadosamente que, en realidad, la condición correspondiente en la columna de la izquierda describe exactamente la gráfica. Observa que empleamos rayitas cruzadas para indicar una región.

Si una gráfica se describe mediante cierta condición, entonces se le llama la gráfica de esa condición. Por ejemplo, el primer cuadrante es la gráfica de la condición $x > 0$, $y > 0$; la circunferencia en la figura 2 es la gráfica de la condición $OP = 2$; el eje y es la gráfica de la condición $x = 0$; el eje x es la gráfica de la condición $y = 0$; y así sucesivamente.

A menudo la condición que describe una gráfica se enunciará en forma de ecuación. Naturalmente, en estos casos hablaremos de la gráfica de la ecuación dada.

Si recuerdas el Capítulo 14, probablemente notarás que aquí hacemos lo mismo que en las secciones 14-1 y 14-2, a saber, particularizando un conjunto mediante una propiedad de sus puntos. El hecho de que aquí empleemos la palabra "gráfica" en lugar de "conjunto" no tiene importancia; simplemente se acostumbra emplear la palabra "gráfica" cuando trabajamos con sistemas de coordenadas.

Conjunto de problemas 17-9

En cada uno de los siguientes ejercicios, haz un esquema y describe la gráfica de la condición dada.

1. a. $x = 5$

   b. $|x| = 5$

2. a. $y > 3$

   b. $|y| < 3$

3. $0 < x < 2$

4. $-1 \leq x \leq 5$

5. $-2 \leq y < 2$

6. $x < 0$ y también $y > 0$

7. $x > 3$ y también $y < -1$

8. a. x es un entero positivo.

   b. y es un entero positivo.

   c. Ambos x, y son enteros positivos.

9. $x > 0$, $y > 0$, y además $y > x$.

10. $1 \leq x \leq 3$ y también $1 \leq y \leq 5$.

*11. $|x| < 4$ y también $|y| < 4$.

*12. $|x| < 4$ y también $|y| = 4$.

*13. $y = |x|$

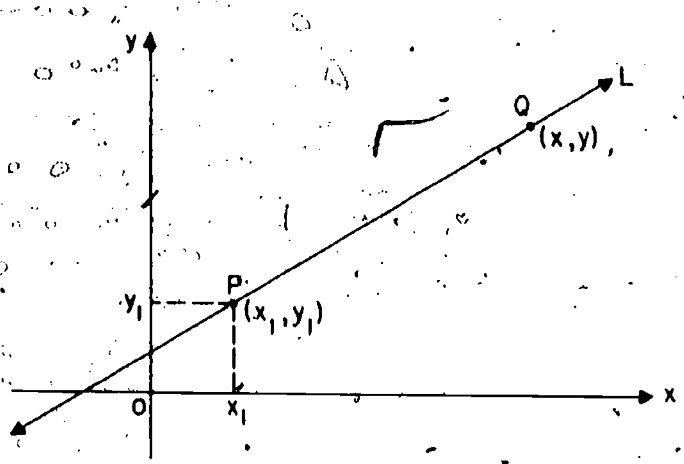
*14. $|x| = |y|$

*15. $|x| + |y| = 5$

17-10. La representación de una recta mediante una ecuación

Mostraremos que cualquier recta es la gráfica de un tipo de ecuación simple. Empezamos considerando la condición que caracteriza la recta.

Considera una recta no vertical L, con pendiente m. Sea P un punto de L, con coordenadas (x_1, y_1).



Suponte que Q es otro punto de L, con coordenadas (x,y). Como $\overline{PQ}$ está en L, la pendiente de $\overline{PQ}$ tiene que ser m, y las coordenadas de Q tienen que satisfacer a la condición

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m.$$

Observa que las coordenadas del punto P no satisfacen a ésta ecuación, porque cuando $x = x_1$ y $y = y_1$, el miembro de la izquierda de la ecuación resulta sin sentido, $\frac{0}{0}$, que no es igual a m (ni a nada). Si multiplicamos ambos miembros de esta ecuación por $x - x_1$, donde $x \neq x_1$, obtenemos $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Todo punto de la recta distinto de P también satisface a esta ecuación, como le acontece al mismo punto P; porque cuando $x = x_1$, $y = y_1$, la ecuación toma la forma $0 = 0$, lo cual constituye un enunciado cierto.

Esto lo resumimos en el siguiente teorema:

<u>Teorema</u> <u>17-6</u>. Sea L una recta no vertical con pendiente m, y sea P un punto de L, con coordenadas (x_1,y_1). Todo punto $Q = (x,y)$ de L satisface a la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$.

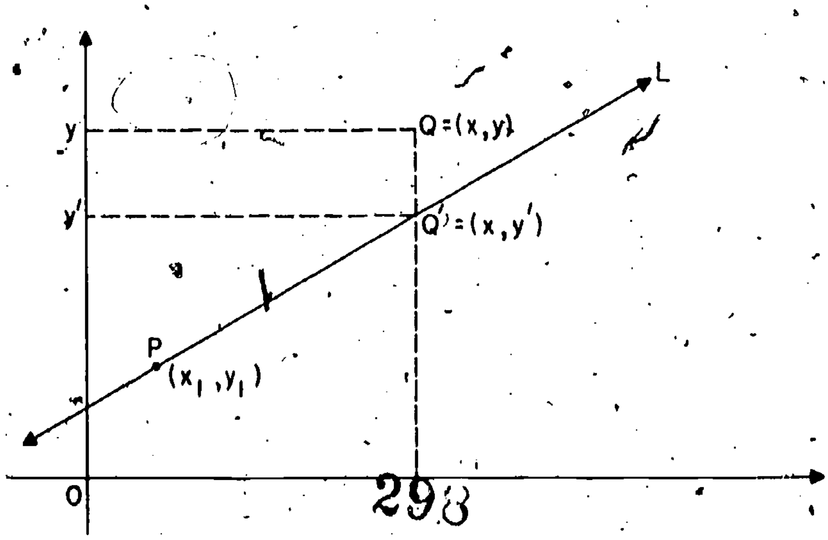
Tal vez de primera intención creas que hemos demostrado que la recta L es la gráfica de la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$. Pero para saber que esto es cierto, necesitamos saber que (compara con la sección 14-1):

(1) Todo punto de L satisface a la ecuación;

(2) Todo punto que satisface a la ecuación está en L.

Solamente hemos demostrado la parte (1), de manera que nos falta demostrar la parte (2). Lo haremos indirectamente, probando que si un punto <u>no</u> está en L entonces <u>no</u> satisface a la ecuación.

Supongamos que $Q = (x,y)$ no está en L. Entonces existe un punto $Q' = (x,y')$ que está en L, con $y' \neq y$, así:



Por el teorema 17-1, $\frac{y' - y_1}{x - x_1} = m;$

de donde obtenemos

$$y' = y_1 + m(x - x_1).$$

Toda vez que $y' \neq y$, esto significa que

$$y \neq y_1 + m(x - x_1).$$

Luego, $$y - y_1 \neq m(x - x_1).$$

Por lo tanto, sólo los puntos de la recta satisfacen a la ecuación.

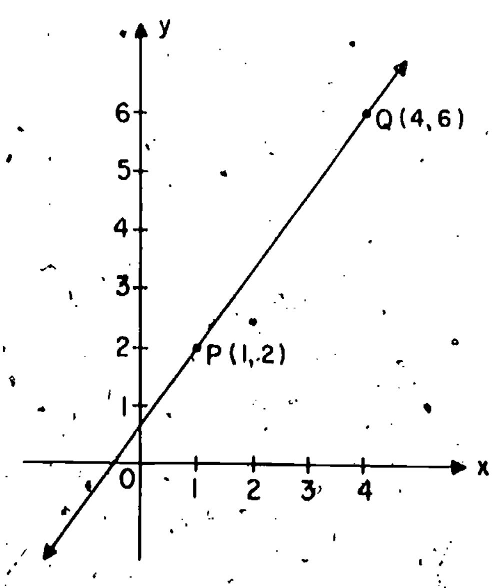
Así hemos demostrado un teorema muy importante:

Teorema 17-7. La gráfica de la ecuación

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

es la recta que pasa por el punto (x_1,y_1) y tiene pendiente igual a m.

La ecuación dada en el teorema 17-7 se llama la forma de punto y pendiente de la ecuación de una recta. Examinemos un ejemplo:



Tenemos aquí una recta que pasa por los puntos $P = (1,2)$ y $Q = (4,6)$. La pendiente es

$$m = \frac{6 - 2}{4 - 1} = \frac{4}{3}.$$

Utilizando $P = (1,2)$ como el punto fijo, obtenemos la ecuación

$$(1) \quad y - 2 = \frac{4}{3}(x - 1).$$

(Aquí $y_1 = 2$, $x_1 = 1$, y $m = \frac{4}{3}$.) Escrito en una forma equivalente, esto resulta ser

$$(2) \quad 3y - 6 = 4x - 4, \qquad \text{(¿Cómo?)}$$

o también $\quad (3) \quad 4x - 3y = -2.$

Sin embargo, observa que la ecuación (3) es a simple vista más sencilla, si sólo nos interesara el aspecto de ella, pero la ecuación (1) es más fácil de interpretar geométricamente. El teorema 17-7 nos dice que la gráfica de la ecuación (1) es la recta que pasa por el punto $P = (1,2)$ y tiene pendiente igual a $\frac{4}{3}$.

El estudiante puede fácilmente verificar que si en lugar de P se utiliza Q como el punto fijo, se obtendrá la misma ecuación o una equivalente.

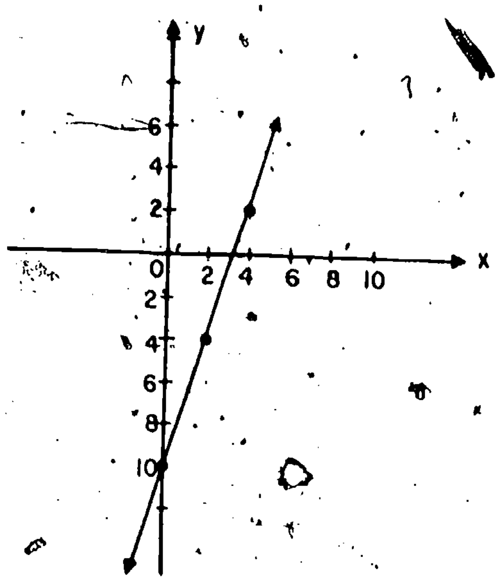
Dada una ecuación en la forma de punto y pendiente, es fácil ver que se trata de una recta. Por ejemplo, supongamos que se nos da la ecuación $y - 2 = 3(x - 4)$. La recta contiene el punto $(4,2)$ y tiene pendiente $m = 3$. Para dibujar una recta en papel cuadriculado, sólo tenemos que conocer las coordenadas de otro punto más. Si $x = 0$, entonces

$$y - 2 = -12,$$

es decir,

$$y = -10.$$

Por consiguiente, el punto $(0,-10)$ está en la recta, y podemos completar la gráfica:

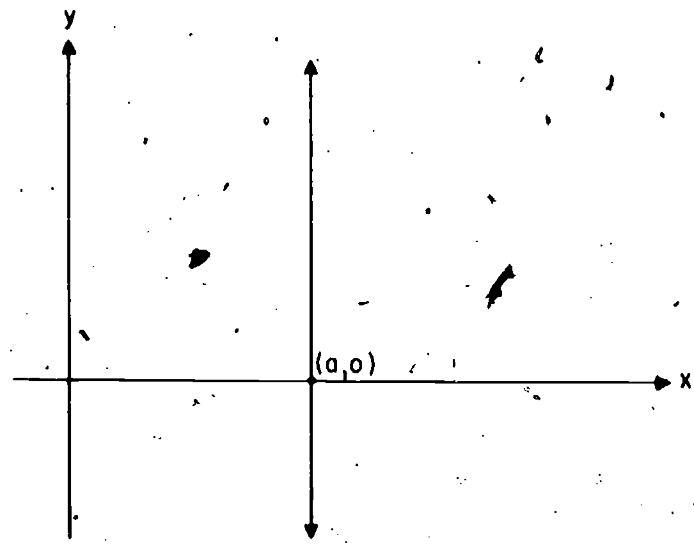


Lógicamente, esto era todo lo que necesitábamos. Para mayor seguridad, conviene comprobar las coordenadas de algún punto más. Este punto puede elegirse en cualquier porción de la recta, pero para que sirva como una buena comprobación no deberá estar muy cerca de los otros dos puntos. Si tomamos $x = 2$, obtenemos

$$y - 2 = -6 \quad ó \quad y = -4.$$

Como podemos apreciar en la figura, el punto $(2,-4)$ está en la recta.

Al principio de esta sección, prometimos demostrarte que cualquier recta es la gráfica de una ecuación de tipo simple. Lo hemos probado para cualquier recta no vertical, pero nos falta considerar el caso de una recta vertical. Supongamos que una recta vertical corta al eje x en el punto de coordenadas $(a,0)$, como en la figura.



Como la recta vertical es perpendicular al eje x, todo punto de la recta tiene su coordenada x igual a a. Más aún, todo punto que no esté en la recta tendrá su coordenada x distinta de a. Por lo tanto, la condición que particulariza la recta vertical es $x = a$, que ciertamente es un tipo muy simple de ecuación.

Conjunto de problemas 17-10

En cada uno de los siguientes problemas, se nos dan las coordenadas de un punto P y el valor de la pendiente m. Escribe la forma de punto y pendiente de la ecuación de la recta correspondiente y construye la gráfica. Verifica tu trabajo comprobando las coordenadas de por lo menos un punto que no se utilice para dibujar la recta. Mientras las figuras no resulten muy apiñadas, puedes dibujar varias de estas gráficas en el mismo sistema de ejes.

1. $P = (-1,2)$, $m = 4$.
2. $P = (1,-1)$, $m = -1$.

3. $P = (0,5)$, $m = -\frac{1}{3}$.

4. $P = (-1,-4)$, $m = \frac{5}{2}$.

5. $P = (3,-2)$, $m = 0$.

Transformando la ecuación dada en la forma de punto y pendiente en los casos en que sea necesario, demuestra que la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones es una recta. Después dibuja la gráfica y compruébala, como en los problemas anteriores.

6. $y - 1 = 2(x - 4)$

7. $y = 2x - 7$

8. $2x - y - 7 = 0$

9. $y + 5 = \frac{1}{3}(x + 3)$

10. $x - 3y = 12$

11. $y = x$

12. $y = 2x$

13. $y = 2x - 6$

14. $y = 2x + 5$

15. $x = 4$

16. $x = 0$

17. $y = 0$

18. Con respecto a un sistema de coordenadas tridimensionales, describe verbalmente el conjunto de puntos representado por cada una de las siguientes ecuaciones: Por ejemplo, $y = 0$ es la ecuación del plano xz, es decir, el plano determinado por el eje x y el eje z. (Refiérete al problema 12 del Conjunto de problemas 17-3.)

a. $x = 0$ c. $x = 1$

b. $z = 0$ d. $y = 2$

17-11. Diversas formas de la ecuación de una recta

Ya conocemos la manera de escribir la ecuación de una recta no vertical, si conocemos la pendiente m y las coordenadas (x_1, y_1) de un punto de la recta. En este caso, sabemos que la recta es la gráfica de la ecuación en la forma de punto y pendiente, es decir,

$$y - y_1 = m(x - x_1) .$$

Definición: El punto donde la recta corta al eje y se llama la intersección con y. Si este punto es $(0,b)$, entonces la ecuación en la forma de punto y pendiente es

$$y - b = m(x - 0),$$

o sea

$$y = mx + b.$$

Esta se llama la forma de ordenada en el origen y pendiente. El número b se llama la ordenada en el origen de la recta. De esta manera obtenemos el teorema siguiente:

Teorema 17-8. La gráfica de la ecuación

$$y = mx + b$$

es la recta con pendiente m y ordenada en el origen igual a b.

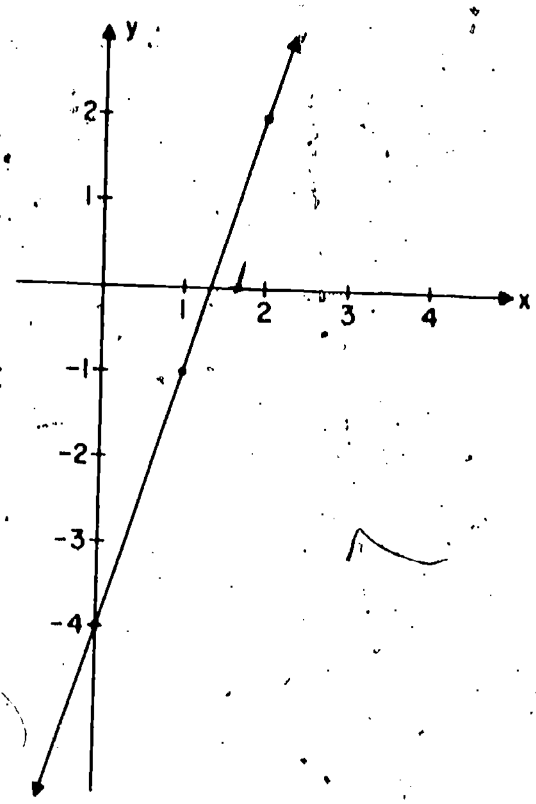
Si se nos da una ecuación en esta forma, entonces es fácil dibujar la gráfica. Todo lo que tenemos que hacer es dar a x cualquier valor distinto de cero, y hallar el valor correspondiente de y. De esta manera, tenemos las coordenadas de dos puntos de la recta y podemos trazarla. Por ejemplo, supongamos que se nos da

$$y = 3x - 4.$$

Evidentemente, el punto $(0,-4)$ está en la gráfica. Asignando a x el valor 2, obtenemos

$$y = 6 - 4 = 2.$$

Por tanto, (2,2) está en la recta y ésta aparecerá así:



Como comprobación, encontramos que para $x = 1$,

$$y = 3 - 4 = -1,$$

y, como podemos apreciar, el punto (1, -1) está en la gráfica.

Observa que una vez que tenemos el teorema 17-8, podemos demostrar que ciertas ecuaciones representan rectas poniendo las ecuaciones en la forma de pendiente y ordenada en el origen. Por ejemplo, supongamos que se nos da

$$(1) \qquad 3x + 2y + 4 = 0.$$

Algebraicamente, esto es equivalente a la ecuación

$$2y = -3x - 4,$$

o a la ecuación (2) $\quad y = -\frac{3}{2}x - 2.$

Siendo equivalentes, las ecuaciones (1) y (2) tienen la misma gráfica. La gráfica de (2) es una recta, a saber, la recta con pendiente $m = -\frac{3}{2}$ y ordenada en el origen $b = -2$. La gráfica de (1) es la misma recta.

17-12. La forma general de la ecuación de una recta.

Desde luego, el teorema 17-8 se aplica sólo en los casos de rectas no verticales, porque éstas son las que tienen pendiente. Algebraicamente, las rectas verticales son objetos muy simples, porque son las gráficas de ecuaciones sencillas de la forma

$$x = a.$$

Así, pues, tenemos dos clases de ecuaciones ($y = mx + b$ y $x = a$) para rectas no verticales y verticales, respectivamente. Podemos resumir todo esto, incluyendo los dos casos, de la siguiente manera:

Definición: Por una ecuación lineal en x e y entendemos una ecuación de la forma

$$Ax + By + C = 0,$$

donde A y B no son ambas iguales a cero.

Los dos teoremas siguientes describen la relación que hay entre la geometría y el álgebra en lo referente a las rectas:

Teorema 17-9. Toda recta en el plano es la gráfica de una ecuación lineal en x e y.

Teorema 17-10. La gráfica de una ecuación lineal en x e y es siempre una recta.

Con lo que sabemos hasta aquí, es fácil demostrar estos dos teoremas.

Demostración del teorema 17-9: Sea L una recta del plano. Si L es vertical, entonces L es la gráfica de una ecuación

$$x = a,$$

o

$$x - a = 0.$$

Esta tiene la forma $Ax + By + C = 0$, donde $A = 1$, $B = 0$, $C = -a$. Los coeficientes A y B no son ambos iguales a cero, porque $A = 1$, y por tanto, la ecuación es lineal.

Si L no es vertical, entonces L tiene una pendiente m y corta al eje y en algún punto $(0,b)$. Por consiguiente, L es la gráfica de la ecuación

$$y = mx + b,$$

o

$$mx - y + b = 0.$$

También tiene ésta la forma $Ax + By + C = 0$, donde $A = m$, $B = -1$, $C = b$. Los coeficientes A y B no son ambos cero, porque $B = -1$. En consecuencia, la ecuación es lineal. (Observa que puede ocurrir muy bien que m sea 0, lo cual acontece para todas las rectas horizontales. Observa también, que la ecuación no es única, es decir, $2Ax + 2By + 2C = 0$ tiene la misma gráfica que $Ax + By + C = 0$)

Demostración del teorema 17-10: Se nos da la ecuación $Ax + By + C = 0$ con al menos uno de los dos coeficientes, A, B, distinto de cero.

Caso 1. Si $B = 0$, entonces la ecuación tiene la forma

$$Ax = -C.$$

Como $B = 0$, sabemos que $A \neq 0$, Por lo tanto, podemos dividir por A, para obtener

$$x = -\frac{C}{A}.$$

La gráfica de esta ecuación es una recta vertical.

Caso 2. Supongamos que $B \neq 0$. Entonces podemos dividir por B, para obtener
$$\frac{A}{B}x + y + \frac{C}{B} = 0,$$
o, es decir,
$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$
La gráfica de esta ecuación es una recta, a saber, la recta con pendiente $m = -\frac{A}{B}$ y ordenada en el origen $b = -\frac{C}{B}$.

Para estar seguro de que entiendes lo que hemos demostrado en los teoremas 17-9 y 17-10, debes prestar especial atención a algo que no se ha demostrado. No hemos demostrado que si la gráfica de una ecuación dada es una recta entonces la ecuación es lineal. En efecto, esta afirmación no es cierta. Por ejemplo, considera la ecuación
$$x^2 = 0.$$
Ahora bien, el único número cuyo cuadrado es cero es el cero mismo. Por lo tanto, la ecuación $x^2 = 0$ dice lo mismo que la ecuación $x = 0$. Por consiguiente, la gráfica de la ecuación $x^2 = 0$ es el eje y, que desde luego, es una recta. Análogamente, la gráfica de la ecuación
$$y^{17} = 0$$
es el eje x.

Lo mismo sucede en los casos en que no es tan fácil darse cuenta de la situación. Por ejemplo, considera la ecuación
$$x^2 + y^2 = 2xy.$$
Esto puede escribirse en la forma
$$x^2 - 2xy + y^2 = 0,$$
o, es decir,
$$(x - y)^2 = 0.$$
La gráfica es la misma que la de la ecuación
$$x - y = 0,$$
o, es decir,
$$y = x.$$

La gráfica es una recta.

Observa que la demostración del teorema 17-10 nos da un procedimiento práctico para obtener, de la ecuación general, información acerca de la recta. Si $B = 0$, entonces tenemos la recta vertical dada por la ecuación

$$x = -\frac{C}{A}.$$

Si $B \neq 0$, despejamos y, obteniendo

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

donde la pendiente es $m = -\frac{A}{B}$

y la ordenada en el origen es

$$b = -\frac{C}{B}.$$

Conjunto de problemas 17-12

Dibuja la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $2x + 5y = 7$
2. $\frac{1}{2}y - 2x + 3 = 0$
3. $x + 4 = 0$
4. $y + 4 = 0$

Describe con palabras la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones:

5. $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$
6. $0 \cdot x + 0 \cdot y = 2$
7. $x^2 + y^2 = 0$
8. $x^2 = -1$

Dibuja la gráfica de cada una de las siguientes condiciones:

9. $3x + 4y = 0$ y también $x \leq 0$
10. $5x - 2y = 0$ y también $5 \leq y \leq 10$
11. $(x + y)^2 = 0$
12. $(y - 1)^{54} = 0$

En cada uno de los siguientes ejercicios, determina la ecuación lineal $(Ax + By + C = 0)$ de la recta dada. En tu contestación indica los valores de A, B y C.

13. La recta que pasa por (1,2) con pendiente 3.
14. La recta que pasa por (1,0) y por (0,1).
15. La recta con pendiente 2 y ordenada en el origen -4.
16. El eje x.
17. El eje y.
18. La recta horizontal que pasa por (-5,-3).
19. La recta vertical que pasa por (-5,-3).
20. La recta que pasa por el origen de coordenadas y el punto medio del segmento de recta con extremos (3,2) y (7,0).

17-13. Intersección de rectas.

Supongamos que nos dan las ecuaciones de dos rectas, así

$$L_1: \; 2x + y = 4$$

$$L_2: \; x - y = -1$$

Estas rectas no son paralelas, porque la pendiente de la primera es $m_1 = -2$ y la de la segunda es $m_2 = 1$. Por lo tanto, estas rectas se intersecan en algún punto $P = (x,y)$. El par de números (x,y) debe satisfacer a ambas ecuaciones.

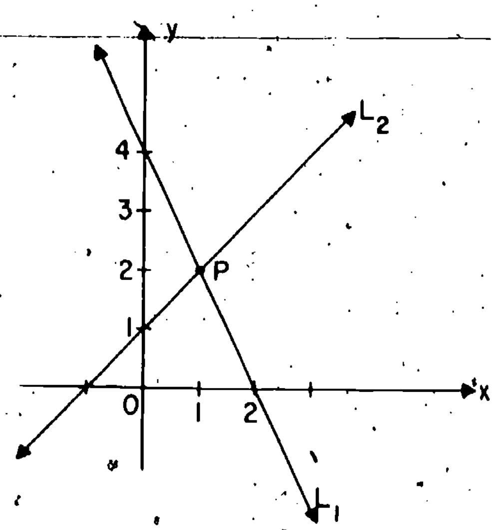
Por consiguiente, el problema geométrico de hallar el punto P es equivalente al problema algebraico de resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables.

Es fácil resolver el sistema. Sumando las dos ecuaciones, obtenemos $3x = 3$,

o, es decir, $x = 1$.

Sustituyendo x por 1 en la segunda ecuación, obtenemos $y = 2$. Los valores $x = 1$, $y = 2$ también satisfacen a la primera ecuación. ¿Será esto cierto?

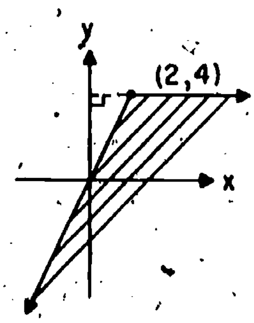
Por lo tanto, $P = (1,2)$. La gráfica nos dice que esto parece plausible.



Este método siempre nos da la respuesta a nuestro problema cuando éste tiene una respuesta, esto es, cuando las gráficas de las dos ecuaciones se intersecan. Si las rectas son paralelas, entonces el sistema de ecuaciones correspondientes será inconsistente, es decir, la solución del sistema será el conjunto vacío. Esto resultará evidente cuando tratemos de resolver el sistema.

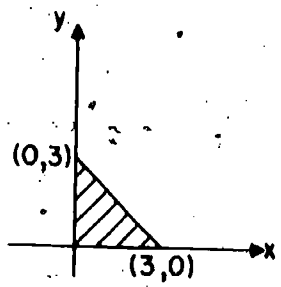
Conjunto de problemas 17-13

1. Determina la solución común a cada uno de los siguientes pares de ecuaciones y dibuja sus gráficas:
   a. $y = 2x$ y $x + y = 7$
   b. $y = 2x$ y $y - 2x = 3$
   c. $x + y = 3$ y $2y = 6 - 2x$
2. a. ¿Cuáles de los pares de ecuaciones que aparecen a continuación tendrán gráficas constituidas por rectas paralelas?
   b. ¿Y por rectas que se intersecan, pero que no coinciden?
   c. ¿Y por rectas que coinciden?
   Las ecuaciones en cuestión son:
   (1) $y = 3x + 1$
   (2) $y = 4x + 1$
   (3) $2y = 6x + 2$
   (4) $y - 3x = 2$
3. Supongamos que la unidad en nuestro sistema de coordenadas es 1 milla. ¿A cuántas millas del origen está el punto en que la recta $y = \frac{1}{1000}x - 4$ corta al eje x?
4. Halla la intersección de las gráficas de cada uno de los siguientes pares de condiciones:
   a. $y = 2x$ y $y = 4$
   b. $y = 2x$ y $y \geq 4$
   c. $y < 2x$ y $y > 4$
   d. ¿Qué par de condiciones determinarán el interior del ángulo que muestra la figura?



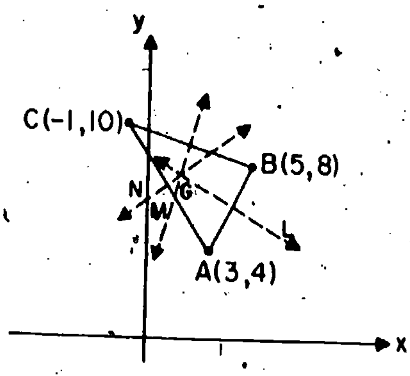
5. a. Dibuja la intersección de las gráficas de las tres condiciones: $x + y > 3$, $y < 4$, $x < 2$.

   b. Escribe las tres condiciones que determinarían el interior del triángulo dibujado.



6. Determina la ecuación de la mediatriz del segmento de recta con extremos (3,4) y (5,8).

7. Determina las ecuaciones de las mediatrices de los lados del $\triangle$ (3,4)(5,8)(-1,10), y demuestra que dichas rectas se intersecan en un punto.



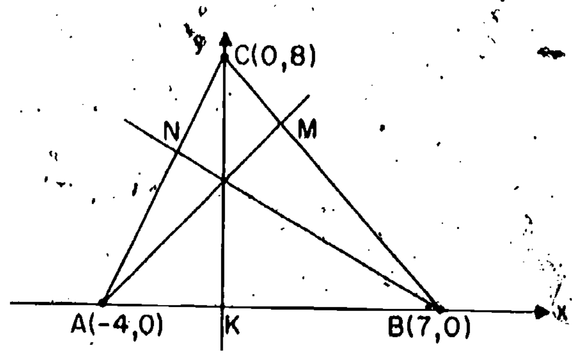
*8. En un antiguo documento se hallaron las siguientes instrucciones: "Empieza en la intersección del Camino del Rey y el Camino de la Reina. Sigue hacia el norte por el Camino del Rey, primero busca un árbol de pino y luego un arce. Regresa a la intersección. Hacia el oeste, en el Camino de la Reina, hay un olmo y hacia el este en ese camino hay un abeto. El punto en el cual la recta determinada por el olmo y el pino interseca a la recta determinada por el arce y el abeto es uno de dos puntos mágicos. El otro punto mágico está en la intersección de la recta determinada por el abeto y el pino y la recta determinada por el olmo y el arce. El tesoro está enterrado donde la recta que une los dos "puntos mágicos" interseca al Camino de la Reina."

Una patrulla de búsqueda encontró el olmo a 4 millas de la intersección, el abeto a 2 millas de ella, y el pino a 3 millas de la misma, pero no encontró trazas del arce. No obstante, mediante las instrucciones logró hallar el tesoro. ¿Cómo fue esto posible?

Uno de los miembros de la patrulla comentó acerca de lo afortunados que habían sido por haber encontrado el pino. El jefe de la patrulla sonrió y dijo: "Tampoco necesitábamos el pino". Muestra que estaba en lo cierto.

*9. Una de las alturas del $\triangle ABC$, donde $A = (-4,0)$, $B = (7,0)$, $C = (0,8)$ es el eje y. ¿Por qué? Utilizando los métodos de las coordenadas, demuestra que las alturas desde A y B se encuentran en ese eje. (Sugerencia: Halla las intersecciones de esas alturas con el eje y.)

Haz lo mismo con los triángulos cuyos vértices son $(a,0)$, $(b,0)$, $(0,c)$.



*10. El centroide o baricentro de un triángulo se define como la intersección de las tres medianas. Demuestra que las coordenadas del centroide son simplemente las medias aritméticas de las coordenadas de los vértices.

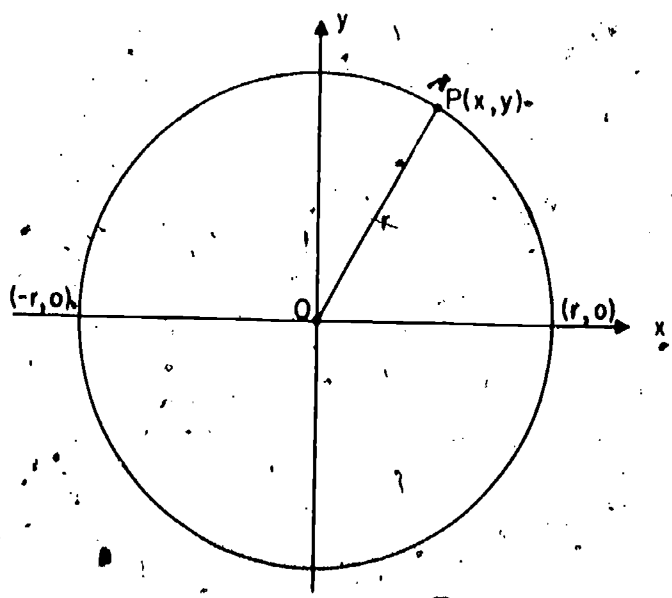
*11. Determina la distancia del punto (1,2) a la recta $x + 3y + 1 = 0$.

*12. Determina la distancia del punto (a,b) a la recta $y = x$.

*13. En el caso general del triángulo del problema 9, sea H el punto en que se encuentran las alturas, M el punto en que se encuentran las medianas y D el punto en que se encuentran las mediatrices de los lados. Utilizando los problemas 9 y 10, demuestra que estos tres puntos están alineados, y que M divide a $\overline{DH}$ en razón de dos a uno (refiérete al problema 8 del Conjunto de problemas 17-7).

17-14. Circunferencias

Considera la circunferencia con centro en el origen y radio r.



Esta figura viene definida por la condición

$$OP = r.$$

Algebraicamente, mediante la fórmula de la distancia, esto nos dice que

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = r,$$

o, es decir, $$x^2 + y^2 = r^2.$$

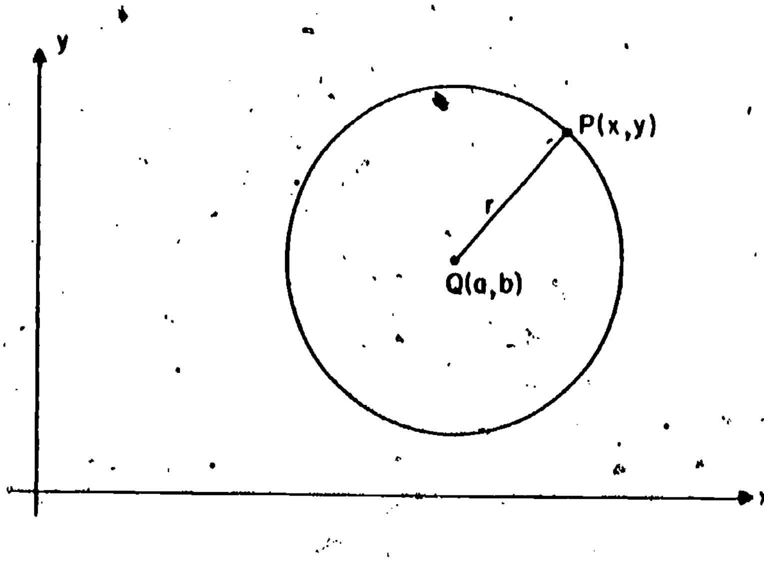
Con otras palabras, si $P(x,y)$ es un punto de la circunferencia, entonces $x^2 + y^2 = r^2$. Aún tenemos que demostrar que si $x^2 + y^2 = r^2$, entonces $P(x,y)$ es un punto de la circunferencia. Hacemos esto invirtiendo el proceso algebraico:

Si $$x^2 + y^2 = r^2,$$

entonces $$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = r,$$

puesto que r es un número positivo. Esta ecuación nos dice que $OP = r$, y, por lo tanto, P es un punto de la circunferencia.

Considera, de manera más general, la circunferencia con centro en el punto $Q = (a,b)$ y radio r.



Esta viene definida por la condición $QP = r$,

o $$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r,$$

es decir, $$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

También en este caso se puede invertir el proceso y, por lo tanto, podemos decir que

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

es la ecuación de la circunferencia.

Esta es la forma canónica de la ecuación de una circunferencia con centro en (a,b) y radio r. Para futuras referencias, enunciemos este resultado como un teorema.

Teorema 17-11. La gráfica de la ecuación

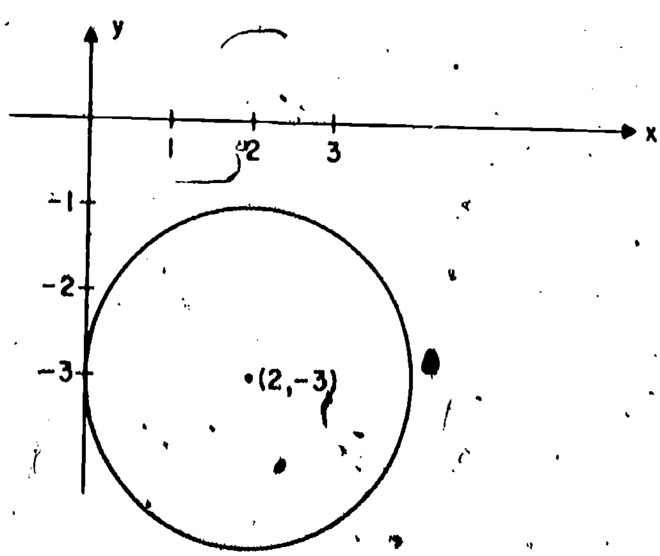
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

es una circunferencia con centro en (a,b) y radio r.

Si se da la ecuación en esta forma, podemos leer inmediatamente el radio y las coordenadas del centro. Por ejemplo, supongamos que se nos da la ecuación

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4.$$

El centro es el punto $(2,-3)$, el radio es 2, y la gráfica de la circunferencia es como sigue:



Hasta ahora, esto es muy fácil. Pero, supongamos que la forma canónica de la ecuación cae en manos de alguien que gusta de "simplificar" fórmulas algebraicas. Esta persona hubiera "simplificado" la ecuación así:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 4,$$

o sea,
$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0.$$

En esta forma final no es fácil ver cuál es la gráfica en cuestión. Algunas veces encontraremos ecuaciones dadas en esa forma. Por lo tanto, necesitamos saber cómo "desimplificar" tales formas de manera que obtengamos de nuevo la forma canónica

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

El procedimiento es el siguiente: Primero agrupamos los términos en x, luego los términos en y. Además escribimos la ecuación con el término constante en el miembro de la derecha, así:

$$x^2 - 4x \qquad + y^2 + 6y \qquad = -9.$$

De esta manera, vemos qué constante habría que sumar a los dos primeros términos para así completar un cuadrado perfecto. Recuerda que para hallar esta constante deberás cuadrar la mitad del coeficiente de x. En este caso, obtenemos 4. El mismo procedimiento aplicado al tercer y cuarto términos, muestra que tendríamos que sumar 9 para obtener un cuadrado perfecto. Así, pues, sumaremos un total de 13 unidades al miembro de la izquierda de la ecuación. Por consiguiente, tenemos que sumar 13 unidades al miembro de la derecha. Entonces la ecuación toma la forma equivalente

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = -9 + 13,$$

o, es decir,
$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4,$$

que teníamos originalmente.

Si multiplicamos y simplificamos en la forma canónica, obtenemos

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0.$$

Esta ecuación tiene la forma

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0.$$

Así, pues, tenemos el teorema:

<u>Teorema</u> <u>17-12.</u> Toda circunferencia es la gráfica de una ecuación de la forma

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0.$$

Tal vez parezca razonable suponer que lo inverso es también cierto. Es decir, podríamos pensar que la gráfica de toda ecuación de la forma que hemos estado considerando es una circunferencia. Pero de ningún modo es esto cierto. Por ejemplo, considera la ecuación

$$x^2 + y^2 = 0.$$

Aquí A, B y C son todos cero. Si x e y satisfacen a esta ecuación, entonces x e y son ambos cero. Es decir, la gráfica de la ecuación es un solo punto, a saber, el origen.

Ahora, considera la ecuación

$$x^2 + y^2 + 1 = 0.$$

Aquí $A = B = 0$ y $C = 1$. Esta ecuación no se cumple para las coordenadas de ningún punto. (Como $x^2 \geq 0$, $y^2 \geq 0$, <u>y</u> $1 > 0$, se deduce que $x^2 + y^2 + 1 > 0$ para todo par de números reales, x, y.) Para esta ecuación, la gráfica <u>no contiene punto alguno</u>, y, por lo tanto, es el conjunto vacío.

En realidad, las únicas posibilidades que hay son la circunferencia, como esperaríamos corrientemente, y además las dos posibilidades inesperadas que acabamos de señalar.

Teorema 17-13. Dada la ecuación

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0,$$

la gráfica de esta ecuación es (1) una circunferencia, (2) un punto, o (3) el conjunto vacío.

Demostración: Completemos el cuadrado en los términos en x, y el cuadrado en los términos en y, como acabamos de hacer en el caso particular que tratamos anteriormente. Esto nos da

$$x^2 + Ax + \frac{A^2}{4} + y^2 + By + \frac{B^2}{4} = -C + \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4},$$

o, es decir, $$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4C}{4}.$$

Si la fracción de la derecha es positiva, igual a r^2 con $r > 0$, entonces la gráfica es una circunferencia con centro en $(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$ y radio r. Si la fracción de la derecha es igual a cero, entonces la gráfica es el punto único $(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$. Si la fracción de la derecha es negativa, entonces la ecuación nunca se cumple y la gráfica no contiene punto alguno.

Conjunto de problemas 17-14

1. La circunferencia representada tiene 5 unidades de radio. Determina el valor de:

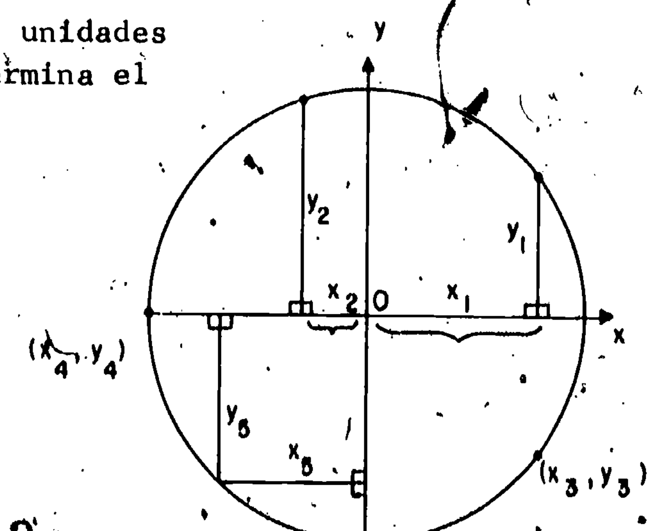
   a. $x_1^2 + y_1^2$

   b. $x_2^2 + y_2^2$

   c. $x_3^2 + y_3^2$

   d. $x_4^2 + y_4^2$

   e. $x_5^2 + y_5^2$



2. a. ¿Qué gráficas de las siguientes ocho ecuaciones son circunferencias?
   b. ¿Qué circunferencias tienen sus centros en el origen?
   c. ¿Cuáles tienen sus centros en un eje, pero no en el origen?

(1) $x^2 + (y - 1)^2 = 9$
(2) $y = x^2$
(3) $x^2 + y^2 = 7$
(4) $1 - x^2 = y^2$
(5) $(x - 2)^2 - (y - 9)^2 = 16$
(6) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$
(7) $3x^2 + y^2 = 4$
(8) $x^2 + y^2 = 0$

3. Determina el centro y el radio de cada una de las siguientes circunferencias:

a. $x^2 + y^2 = 3^2$
b. $x^2 + y^2 = 100$
c. $(x - 1)^2 + y^2 = 16$
d. $x^2 + y^2 = 7$
e. $y^2 = 4 - x^2$
f. $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 36$
g. $(x + 1)^2 + (y + 5)^2 = 49$
h. $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 25$
i. $x^2 - 2x + y^2 = 24$
j. $x^2 + 6x + y^2 - 4y = 12$

4. Una circunferencia tiene la ecuación: $x^2 - 10x + y^2 = 0$.
   a. Demuestra algebraicamente que los puntos (0,0), (1,3) y (2,4) están todos en la circunferencia.
   b. Determina el centro y el radio de la circunferencia.
   c. Demuestra que si se une el punto (1,3) con los extremos del diámetro en el eje x, se forma un ángulo recto con vértice en (1,3).

5. a. Determina los puntos en los que la circunferencia $(x - 3)^2 + y^2 = 25$ interseca a los ejes x, y.

   b. Considerando porciones del eje x y del eje y como cuerdas de la circunferencia de la parte a, demuestra que (como, desde luego, esperarías por el teorema 13-14) los productos de las longitudes de las partes en las cuales cada cuerda divide a la otra, son iguales.

6. Dibuja las cuatro circunferencias obtenidas al considerar las diversas combinaciones de signos posibles en la expresión

$$(x \pm 1)^2 + (y \pm 1)^2 = 1.$$

Entonces escribe la ecuación de la circunferencia tangente a las cuatro circunferencias y que las contiene a la vez. ¿Habrá otra circunferencia tangente a las cuatro? ¿Cuál es su radio?

7. Dibuja las cuatro circunferencias que vienen dadas por

$$x^2 + y^2 = \pm 10x, \qquad x^2 + y^2 = \pm 10y$$

y escribe la ecuación de una circunferencia tangente a todas ellas.

8. Se da la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$ y el punto $K(-7,0)$.

   a. Determina la ecuación (en la forma de punto y pendiente) de la recta L_m con pendiente m y que pasa por el punto K.

   b. Determina los puntos (o el punto) de intersección de L_m y la circunferencia.

   c. ¿Para qué valores de m hay solamente un punto de intersección? Interpreta este resultado geométricamente.

9. Determina la ecuación de una circunferencia tangente externamente a la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 10x - 6y + 30 = 0$$

y tangente también al eje x, y al eje y.

Problemas de repaso

1. ¿Cuáles son las coordenadas de la proyección sobre el eje x del punto (3,2)?
2. Tres de los vértices de un rectángulo son (-1,-1), (3,-1) y (3,5). ¿Cuál es el cuarto vértice?
3. Un triángulo isósceles tiene como vértices los puntos (0,0), (4a,0) y (2a,2b). ¿Cuál es la pendiente de la mediana desde el origen? ¿Y de la mediana desde (2a, 2b)?
4. En el problema 3, ¿cuál es la pendiente de la altura que contiene al origen?
5. ¿Cuál es la longitud de cada una de las medianas del triángulo del problema 3?
6. ¿Cuál es la pendiente de una recta que es paralela a la recta que pasa por el origen de coordenadas y por (-2,3)?
7. Los vértices de un cuadrilátero son (0,0), (5,5), (7,1), y (1,7). ¿Cuáles son las longitudes de sus diagonales?
8. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos medios de los segmentos de recta que unen los pares de puntos dados en el problema 7?
9. Los vértices de un cuadrado están marcados sucesivamente con P, Q, R y S. T es el punto medio de $\overline{QR}$ y U es el punto medio de $\overline{RS}$. $\overline{PT}$ interseca a $\overline{QU}$ en el punto V.

a. Demuestra que $\overline{PT} \cong \overline{QU}$.

b. Demuestra que $\overline{PT} \perp \overline{QU}$.

*c. Demuestra que VS = PQ.

(Sugerencia: Sea P = (0,0) y Q = (2a,0).)

10. Utiliza la geometría de las coordenadas para demostrar el siguiente teorema: La mediana de un trapecio biseca a una diagonal.

11. ¿Cuál es la ecuación cuya gráfica es el eje y?

12. Un rombo ABCD tiene su vértice A en el origen y su lado $\overline{AB}$ en la porción positiva del eje x. $m\angle A = 45$, AB = 6 y C está en el primer cuadrante. ¿Cuál es la ecuación de $\overleftrightarrow{AB}$?; ¿y de $\overleftrightarrow{BC}$?; ¿y de $\overleftrightarrow{CD}$?

13. Las coordenadas de los vértices de un trapecio son, sucesivamente, (0,0), (a,0), (b,c) y (d,c). Halla el área del trapecio en función de estas coordenadas.

14. ¿En qué punto son perpendiculares la una a la otra, las gráficas de $y = \frac{1}{2}x$ e $y = -2x + 5$?

15. Nombra el conjunto de puntos tal que la suma de los cuadrados de las distancias de cada uno de ellos a los dos ejes sea igual a 4.

16. Escribe la ecuación de la circunferencia que tiene:

a. 7 unidades de radio y centro en el origen.

b. k unidades de radio y centro en el origen.

c. 3 unidades de radio y centro en (1,2).

*17. Demuestra que la recta $x + y = 2$ es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$.

Capítulos 13 al 17

EJERCICIOS DE REPASO

En los ejercicios siguientes, escribe (1) si el enunciado es cierto y (0) si es falso. Procura estar seguro de que puedes explicar por qué marcas un enunciado como falso.

1. Si una recta que pasa por el centro de una circunferencia es perpendicular a una cuerda de esa circunferencia, entonces biseca a la cuerda.
2. Si $\overline{AB}$ es un radio de una circunferencia y $\overleftrightarrow{CB}$ es tangente a la circunferencia, entonces $\overline{AB} \perp \overleftrightarrow{CB}$.
3. Una recta que biseca a dos cuerdas de una circunferencia es perpendicular a ellas.
4. La intersección de los interiores de dos circunferencias puede ser el interior de una circunferencia.
5. Todo punto en el interior de una circunferencia es el punto medio de una sola cuerda de la circunferencia.
6. Mientras más largo sea un arco, más larga será la cuerda correspondiente.
7. Si una recta interseca a una circunferencia, la intersección consiste en dos puntos.
8. Si un plano y una superficie esférica se intersecan, y si además la intersección no es una circunferencia, entonces es un punto.
9. Si un plano es tangente a una superficie esférica, una recta perpendicular al plano en el punto de tangencia contiene al centro de la superficie esférica.
10. En una circunferencia dada, $m\,\widehat{XY} + m\,\widehat{YZ} = m\,\widehat{XZ}$.
11. Un ángulo inscrito de 90° siempre interceptará un arco de 45°.

12. Dos ángulos que interceptan el mismo arco son congruentes.
13. Cuerdas congruentes dibujadas en cada una de dos circunferencias concéntricas subtienden arcos congruentes.
14. Si un triángulo inscrito en una circunferencia no tiene ningún lado que interseque a un diámetro dado, entonces el triángulo contiene un ángulo obtuso.
15. Si dos cuerdas de una circunferencia se intersecan, la razón de los segmentos de una de las cuerdas es igual a la razón de los segmentos de la otra.
16. Si $\overline{AB}$ es tangente a una circunferencia en el punto B, y si $\overleftrightarrow{AC}$ interseca a la circunferencia en C y D, entonces $(AB)^2 = AC \cdot AD$.
17. En un plano, el conjunto de los puntos equidistantes de los extremos de un segmento de recta es la mediatriz del segmento.
18. El conjunto de los puntos que están a una pulgada de una recta dada es una recta paralela a la recta dada.
19. Cualquier punto en el interior de un ángulo que no sea equidistante de los lados del ángulo no está contenido en la bisectriz del ángulo.
20. Las tres alturas de cualquier triángulo rectángulo se encuentran en un punto.
21. Dos circunferencias se intersecan si la distancia entre sus centros es menor que la suma de sus radios.
22. Las bisectrices de los tres ángulos de un triángulo se encuentran en un punto equidistante de los vértices del triángulo.
23. Las mediatrices de dos lados de un triángulo pueden intersecarse en el exterior del triángulo.

24. Utilizando una regla y un compás se puede trisecar un segmento.

25. Para bisecar un ángulo dado mediante el método indicado en el texto, es necesario dibujar por lo menos cuatro arcos.

26. La razón del radio a la longitud de una circunferencia es la misma para todas las circunferencias.

27. El área de una región circular de diámetro d es $\frac{1}{2}\pi d^2$.

28. Una sección plana de un prisma triangular puede ser un paralelogramo.

29. Una sección plana de una pirámide triangular puede ser un paralelogramo.

30. El volumen de un prisma triangular es igual a la mitad del producto del área de su base y su altura.

31. En cualquier pirámide, una sección determinada por un plano que biseca a la altura y es paralelo a la base, tiene un área igual a la mitad del área de la base.

32. Dos pirámides que tengan el mismo volumen y bases con áreas iguales, tienen alturas iguales.

33. El volumen de una pirámide de base cuadrada es igual a un tercio de su altura multiplicado por el cuadrado de un lado de la base.

34. El área de la base de un cono se puede hallar dividiendo el triple del volumen por la altura.

35. El radio de la base de un cilindro circular viene dado por la fórmula $\sqrt{\frac{V}{\pi h}}$, donde V es el volumen del cilindro y h es su altura.

36. El volumen de una esfera viene dado por la fórmula $\frac{1}{6}\pi d^3$, donde d es su diámetro.

37. La pendiente de un segmento de recta depende del cuadrante o cuadrantes en los cuales esté el segmento.

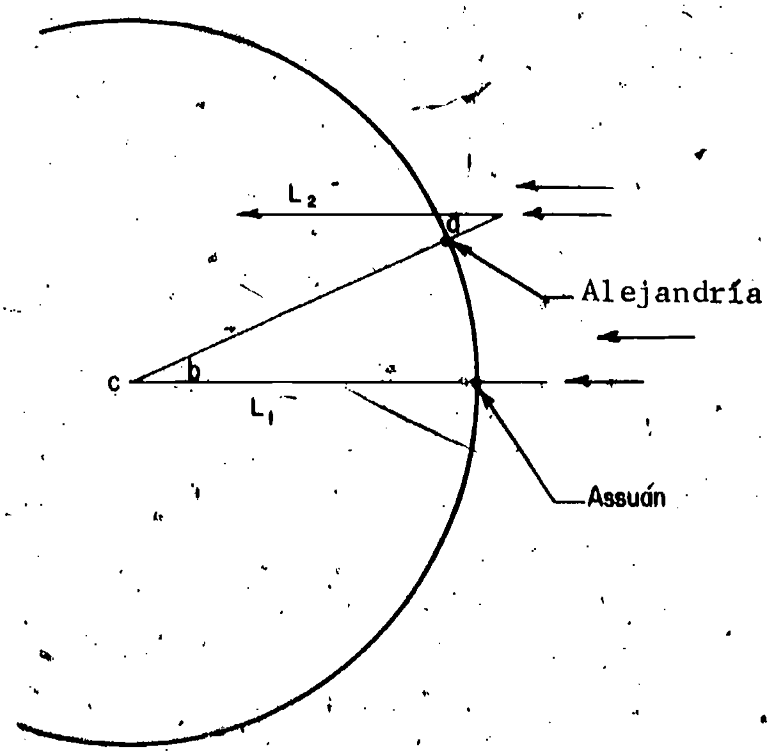
38. Si dos segmentos de recta tienen la misma pendiente, son paralelos.
39. Si las pendientes de dos rectas son -2 y 0.5, las rectas son perpendiculares.
40. Si las coordenadas de dos puntos son (a, b) y (c, d), la distancia entre ellos es $(d - b) + (c - a)$.
41. Si un segmento de recta une los puntos (r, s) y $(-r, -s)$, entonces su punto medio es el origen de coordenadas.
42. El punto $(-2, -1)$ está en la gráfica de $xy - 2x - y + 2 = 0$.
43. La distancia entre $(3, 0)$ y $(4, 0)$ es 5.
44. Si dos vértices de un triángulo rectángulo tienen coordenadas $(0, 10)$ y $(8, 0)$, el tercer vértice está en el origen de coordenadas.
45. Si tres vértices de un rectángulo tienen coordenadas $(0, m)$, $(r, 0)$ y (r, m), el cuarto vértice está en el origen de coordenadas.
46. La ecuación de una recta de pendiente 2 que contiene al punto $(3, 4)$ es $4y + 3x = 2$.
47. La abscisa en el origen, o abscisa del punto intersección con el eje x, de la gráfica de $y = 3x + 9$ es -3.
48. La intersección de las gráficas de $y = 3x + 2$, $y = 3x + 1$ es un solo punto.
49. La gráfica de $x^2 + y^2 - 4 = 0$ es una circunferencia.
50. La gráfica de toda condición es o una recta o una curva.

Apéndice VII

COMO ERATOSTENES MIDIO LA TIERRA

La longitud de la circunferencia de la tierra, medida en el ecuador, es alrededor de 40,000 kilómetros, ó 24,900 millas. Según parece, Cristóbal Colón pensó que la tierra era mucho más pequeña. De cualquier modo, las Indias Occidentales tomaron su nombre del hecho de que cuando Colón desembarcó en ellas, pensó que había llegado a la India. Por lo tanto, su margen de error fue un poco mayor que el ancho del Océano Pacífico.

Sin embargo, en el siglo III a. de J.C. un matemático griego calculó la longitud de la circunferencia de la tierra con un error de solamente uno o dos por ciento. Ese hombre fue Eratóstenes, y su método fue el siguiente:



Se observó que en Assuán, en la ribera del Nilo, y el día del solsticio de verano, a las doce del mediodía el sol estaba exactamente en el cenit (directamente sobre la cabeza del observador). Es decir, al mediodía de ese día en particular, un poste vertical no proyectaba sombra alguna, y el fondo de un pozo profundo quedaba completamente iluminado.

En la figura, C es el centro de la tierra. En Alejandría, al mediodía en el solsticio de verano, Eratóstenes midió el ángulo marcado con a en la figura, es decir, el ángulo entre el poste vertical y la recta de su sombra. Encontró que este ángulo era aproximadamente 7°12', o alrededor de $\frac{1}{50}$ de una circunferencia completa.

Observados desde la tierra, los rayos del sol parecen paralelos. Suponiendo que en realidad sean paralelos, se deduce que cuando las rectas L_1 y L_2 de la figura son cortadas por una secante, los ángulos alternos internos son congruentes. Por tanto, $\angle a \cong \angle b$. De manera que la distancia entre Assuán y Alejandría debe ser aproximadamente igual a $\frac{1}{50}$ de la longitud de la circunferencia de la tierra.

Se calculaba que la distancia desde Assuán a Alejandría era de 5,000 estadios griegos. (Un estadio era una antigua unidad de distancia.) Eratóstenes llegó a la conclusión de que la longitud de la circunferencia de la tierra debía ser alrededor de 250,000 estadios. Si convertimos esto en millas, teniendo en cuenta lo que nos dicen las fuentes de la historia antigua acerca de lo que Eratóstenes quería decir por estadio, obtenemos 24,662 millas.

Así, pues, el error de Eratóstenes era menor de dos por ciento. Más adelante, cambió su estimación a 252,000 estadios, que es aún más aproximado, pero nadie parece conocer cuál fue la base de su cambio. Basándose en los datos de que podemos disponer hoy, algunos historiadores creen que Eratóstenes fue no sólo muy inteligente y muy cuidadoso, sino también muy afortunado.

Apéndice VIII

MOVIMIENTO RIGIDO

VIII-1. La idea general de movimiento rígido

En los Capítulos 5 y 13, al tratar con diferentes tipos de figuras, hemos definido congruencias de varias maneras. La lista completa es la siguiente:

(1) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ si los dos segmentos tienen la misma longitud, es decir, si $AB = CD$.

(2) $\angle A \cong \angle B$ si los dos ángulos tienen la misma medida, es decir, si $m\angle A = m\angle B$.

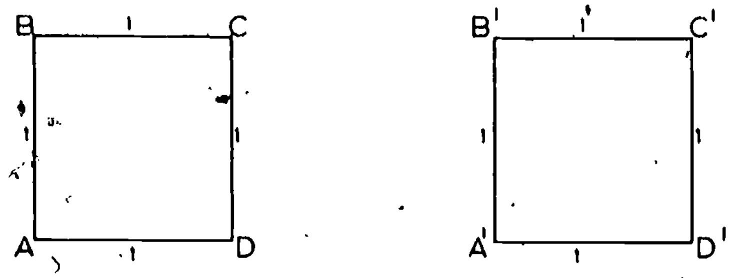
(3) $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ si, respecto de la correspondencia $ABC \longleftrightarrow DEF$, cada dos lados correspondientes son congruentes y cada dos ángulos correspondientes son congruentes.

(4) Dos circunferencias son congruentes si tienen el mismo radio.

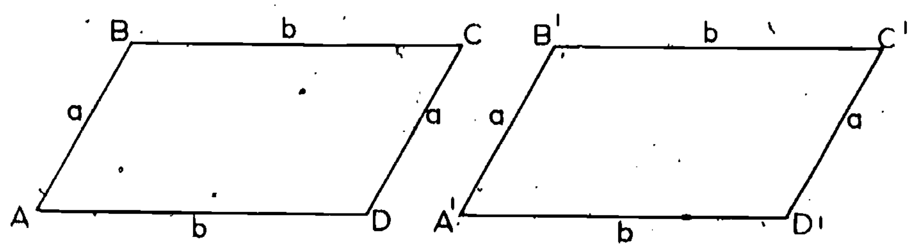
(5) Dos arcos circulares $\widehat{AB}$ y $\widehat{CD}$ son congruentes si las circunferencias que los contienen son congruentes y los dos arcos tienen la misma medida angular.

La idea intuitiva de congruencia es la misma en los cinco casos. A grandes rasgos, en cada uno de ellos las dos figuras son congruentes si se puede mover una de ellas de manera que coincida con la otra; y en el caso de los triángulos, una congruencia es una manera de mover la primera figura de modo que coincida con la segunda.

Al comenzar nuestro estudio de la congruencia, el esquema utilizado en los Capítulos 5 y 13 es el más fácil y probablemente el mejor. Sin embargo, es inconveniente tener cinco maneras diferentes de describir en cinco casos especiales la misma idea fundamental y, en cierto modo, es inconveniente que esta idea fundamental esté limitada a estos cinco casos especiales. Por ejemplo, por sentido común se ve que dos cuadrados, cada uno de lado 1, deberán ser congruentes en algún sentido válido:



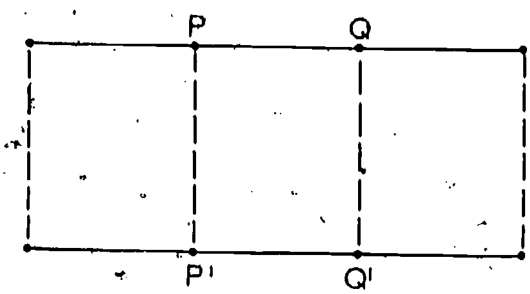
Lo mismo debe ser cierto para paralelogramos, si los lados correspondientes y los ángulos correspondientes son congruentes, como en estas figuras:



Sin embargo, obviamente, ninguna de nuestras cinco definiciones especiales de congruencia se aplica a cualquiera de estos casos.

En este apéndice explicaremos la idea de movimiento rígido. Esta idea se define de la misma manera, no importa la figura a la cual se aplique. Demostraremos que para segmentos, ángulos, triángulos, circunferencias y arcos esta idea significa lo mismo que la congruencia. Por último, demostraremos que mediante un movimiento rígido se pueden hacer coincidir los cuadrados y los paralelogramos de las figuras anteriores. Así, pues, primero se unificará la idea de congruencia y luego se extenderá el alcance de sus aplicaciones.

Antes de dar la definición general de un movimiento rígido, veamos algunos ejemplos sencillos. Considera dos lados opuestos de un rectángulo, así:



Los lados verticales se han marcado con líneas de trazos, porque no nos ocuparemos de ellos especialmente. Desde cada punto P, Q, ... etc. del lado superior, tracemos una perpendicular al lado inferior; sean los puntos P', Q', ... etc. los pies de dichas perpendiculares. Mediante este procedimiento, a cada punto del lado superior le corresponde exactamente un punto del lado inferior. Recíprocamente, a cada punto del lado inferior le corresponde exactamente un punto del lado superior. No podemos escribir todos los pares de puntos correspondientes $P \longleftrightarrow P'$, $Q \longleftrightarrow Q'$, ...etc., porque hay un número infinito de ellos. Sin embargo, podemos dar una regla general que explique cuál corresponde a cuál; en efecto, eso es lo que hemos hecho. Generalmente se escribe un par típico

$$P \longleftrightarrow P',$$

y se explica la regla que ha de utilizarse para formar los pares.

Observa que la idea de correspondencia biunívoca en este caso es exactamente la misma que en el Capítulo 5, cuando consideramos los triángulos. La única diferencia es que [illegible] apareáramos los vértices de dos triángulos, podríamos escribir todos los pares, porque sólo hay tres. (ABC $\longleftrightarrow$ DEF significa que A $\longleftrightarrow$ D, B $\longleftrightarrow$ E y C $\longleftrightarrow$ F.) En nuestro caso actual estamos haciendo lo mismo, salvo que hay demasiados pares para escribirlos todos.

Es muy fácil comprobar que si P, Q son dos puntos cualesquiera del lado superior y P', Q' son los puntos correspondientes del lado inferior, entonces

$$PQ = P'Q'.$$

Esto es cierto, porque los segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{P'Q'}$ son lados opuestos de un rectángulo. Expresamos esta propiedad diciendo que la correspondencia P $\longleftrightarrow$ P' conserva las distancias.

La correspondencia que hemos establecido es nuestro primer ejemplo y el más sencillo de un movimiento rígido. Para ser exactos:

Definición: Dadas dos figuras F y F', tenemos que un movimiento rígido entre F y F' es una correspondencia biunívoca

$$P \longleftrightarrow P'$$

entre los puntos de F y los puntos de F', que conserva las distancias.

Si la correspondencia P $\longleftrightarrow$ P' es un movimiento rígido entre F y F', escribiremos

$$F \approx F'.$$

Esta notación es análoga a la notación $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ utilizada para la congruencia entre triángulos. Podemos leer $F \approx F'$ como "F es isométrico a F' ". ("Isométrico" significa "de la misma medida".)

Conjunto de problemas VIII-1

1. Considera los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$, y supón que

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'.$$

Sea F el conjunto consistente en los vértices del primer triángulo, y sea F' el conjunto consistente en los vértices del segundo triángulo. Demuestra que hay un movimiento rígido

$$F \approx F'.$$

2. Sea F el conjunto de los vértices de un cuadrado de lado 1, y sea F' el conjunto de los vértices de otro cuadrado de lado 1, como los de la figura al comienzo de este apéndice. Demuestra que hay un movimiento rígido

$$F \approx F'.$$

(Primero tienes que explicar cómo se establece la correspondencia, y luego verificar que se conservan las distancias.)

3. Haz lo mismo con los vértices de los dos paralelogramos en la figura al comienzo de este apéndice.

4. Demuestra que si F consiste en tres puntos alineados, y F' consiste en tres puntos no alineados, entonces no habrá ningún movimiento rígido posible entre F y F'. (Lo que tendrás que hacer es suponer que existe tal movimiento rígido y luego mostrar que esta suposición nos conduce a una contradicción.)

5. Demuestra que no puede definirse un movimiento rígido entre dos segmentos de recta de diferentes longitudes.

6. Demuestra que no puede definirse un movimiento rígido entre una recta y un ángulo. (Sugerencia: Aplica el problema 4.)

7. Demuestra que dados dos rayos cualesquiera, hay un movimiento rígido entre ellos. (Sugerencia: Emplea el postulado de colocación de la regla.)

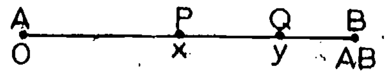
8. Demuestra que no puede haber un movimiento rígido entre dos circunferencias de radios diferentes.

VIII-2. Movimiento rígido de segmentos de recta

Teorema VIII-1. Si $AB = CD$, entonces existe un movimiento rígido $\overline{AB} \approx \overline{CD}$.

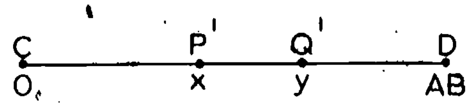
Demostración: Lo primero que necesitamos es establecer una correspondencia $P \longleftrightarrow P'$ entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. Luego tenemos que comprobar que las distancias se conservan.

Por el postulado de la regla, se pueden asignar a los puntos de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ coordenadas tales que la distancia entre dos puntos cualesquiera sea el valor absoluto de la diferencia entre las coordenadas. Y por el postulado de colocación de la regla, esto puede hacerse de manera tal que A tenga coordenada cero y B la coordenada positiva AB.



En la figura, mostramos los puntos genéricos P, Q, con sus respectivas coordenadas x, y.

De la misma manera, se pueden asignar coordenadas a los puntos de $\overleftrightarrow{CD}$:



Observa que D tiene la coordenada AB, puesto que $CD = AB$.

Ahora está claro qué regla debemos utilizar para establecer la correspondencia

$$P \longleftrightarrow P'$$

entre los puntos de $\overline{AB}$ y los puntos de $\overline{CD}$. La regla es que P corresponde a P' si P y P' tienen la misma coordenada. (En particular, $A \longleftrightarrow C$, porque A y C tienen coordenada cero, y $B \longleftrightarrow D$, porque B y D tienen coordenada AB.)

Es fácil ver que esta correspondencia es un movimiento rígido. Si $P \longleftrightarrow P'$, $Q \longleftrightarrow Q'$, y las coordenadas son x, y, como en la figura, entonces $PQ = P'Q'$, porque

$$PQ = |y - x| = P'Q'.$$

Por lo tanto, tenemos un movimiento rígido

$$\overline{AB} \approx \overline{CD},$$

y así queda demostrado el teorema.

Observa que este movimiento rígido entre dos segmentos de recta queda completamente descrito si explicamos la manera de aparear los puntos extremos. Por consiguiente, lo llamaremos el movimiento rígido inducido por la correspondencia

$$A \longleftrightarrow C$$

$$B \longleftrightarrow D.$$

Teorema VIII-2. Si existe un movimiento rígido $\overline{AB} \approx \overline{CD}$ entre dos segmentos, entonces $AB = CD$.

La demostración es fácil. (Este teorema es el problema 5 del Conjunto de problemas anterior.)

Conjunto de problemas VIII-2

1. Demuestra que hay otro movimiento rígido entre los segmentos congruentes $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, inducido por la correspondencia

$$A \longleftrightarrow D$$

$$B \longleftrightarrow C.$$

2. Demuestra que hay dos movimientos rígidos entre un segmento y sí mismo. (Desde luego, uno de estos movimientos es la correspondencia idéntica $P \longleftrightarrow P'$, de acuerdo con la cual todo punto corresponde a sí mismo. Este es un movimiento rígido, porque $PQ = PQ$ para todo P y todo Q.)

VIII-3. Movimiento rígido de rayos, ángulos y triángulos

Teorema VIII-3. Dados dos rayos cualesquiera $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, existe un movimiento rígido

$$\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{CD}.$$

La demostración de este teorema es análoga a la del teorema VIII-1, y dejamos los detalles al estudiante.

Teorema VIII-4. Si $\angle ABC \cong \angle DEF$, entonces existe un movimiento rígido

$$\angle ABC \approx \angle DEF$$

entre estos dos ángulos.

Demostración: Sabemos que hay los movimientos rígidos

$$\overrightarrow{BA} \approx \overrightarrow{ED}$$

y

$$\overrightarrow{BC} \approx \overrightarrow{EF}$$

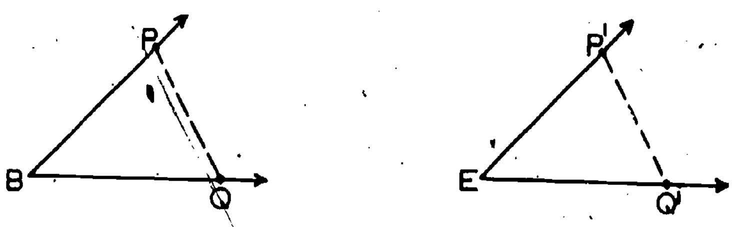
entre los rayos que forman los lados de los dos ángulos,

Convengamos en que los dos puntos P y P' (o Q y Q') corresponderán uno al otro si se corresponden en alguno de estos dos movimientos rígidos. Esto nos da una correspondencia biunívoca entre los dos ángulos. Lo que tenemos que mostrar es que esta correspondencia conserva las distancias.

Supongamos que se nos dan dos puntos P, Q del $\angle ABC$ y los puntos correspondientes P', Q' del $\angle DEF$. Si P y Q están en el mismo lado del $\angle ABC$, entonces, evidentemente

$$P'Q' = PQ,$$

debido a que las distancias se conservan en cada uno de los rayos que forman el $\angle ABC$. Suponte, pues, que P y Q están en lados diferentes del $\angle ABC$, de modo que P' y Q' también están en lados diferentes del ángulo $\angle DEF$, así:



Por el postulado L.A.L., tenemos que

$$\triangle PBQ \cong \triangle P'EQ'.$$

Por lo tanto, $PQ = P'Q'$, lo que teníamos que demostrar.

Ahora necesitamos demostrar el teorema análogo para los triángulos:

Teorema VIII-5. Si $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, entonces existe un movimiento rígido

$$\triangle ABC \approx \triangle A'B'C',$$

respecto del cual los vértices A, B y C corresponden a A', B' y C'.

Demostración: Empezaremos estableciendo una correspondencia biunívoca entre los puntos del $\triangle ABC$ y los puntos del $\triangle A'B'C'$. Ya hemos dado una correspondencia biunívoca

$$ABC \longleftrightarrow A'B'C'$$

para los vértices. Por el teorema VIII-1, esto nos da los movimientos rígidos inducidos

$$\overline{AB} \approx \overline{A'B'},$$

$$\overline{AC} \approx \overline{A'C'},$$

y

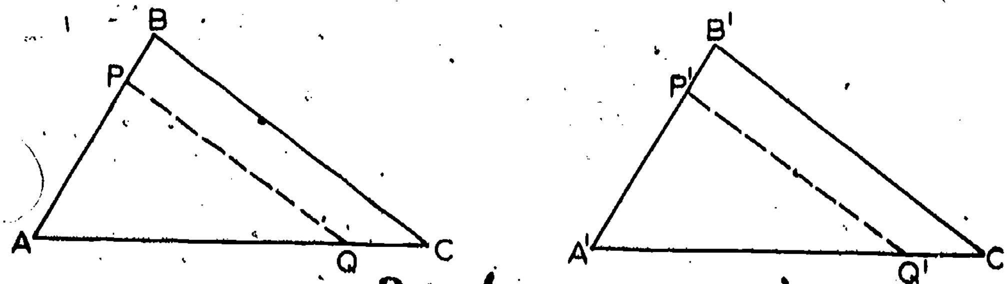
$$\overline{BC} \approx \overline{B'C'}$$

entre los lados de los triángulos. Tomados a la vez, estos tres movimientos rígidos nos dan una correspondencia biunívoca $P \longleftrightarrow P'$ entre los puntos de los dos triángulos. Tenemos que demostrar que esta correspondencia conserva las distancias.

Si P y Q están en el mismo lado del triángulo, entonces ya sabemos que

$$P'Q' = PQ.$$

Suponte, pues, que P y Q están en lados diferentes, digamos, en $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, así:



Sabemos que

$$AP = A'P',$$

porque $\overline{AB} \approx \overline{A'B'}$ es un movimiento rígido. Por esto mismo,

$$AQ = A'Q',$$

y tenemos que $\angle A \cong \angle A'$, debido a que $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Por el postulado L.A.L.,

$$\triangle PAQ \cong \triangle P'A'Q'.$$

Por lo tanto,

$$PQ = P'Q',$$

lo que teníamos que demostrar.

Observa que si bien la figura no muestra el caso $P = B$, la demostración sí lo tiene en cuenta. De todos modos, la demostración es más importante que la figura.

Conjunto de problemas VIII-3

1. Sea

$$ABC \longrightarrow A'B'C'$$

un movimiento rígido, y supongamos que A, B y C están alineados. Demuestra que si B está entre A y C, entonces B' está entre A' y C'.

2. Se nos da un movimiento rígido

$$F \approx F'.$$

Sean A y B puntos de F, y supón que F contiene al segmento $\overline{AB}$. Demuestra que F' contiene al segmento $\overline{A'B'}$.

3. Dado un movimiento rígido $F \approx F'$, demuestra que si F es convexo, entonces F' también lo es.

4. Dado un movimiento rígido $F \approx F'$, demuestra que si F es un segmento, entonces F' también lo es.

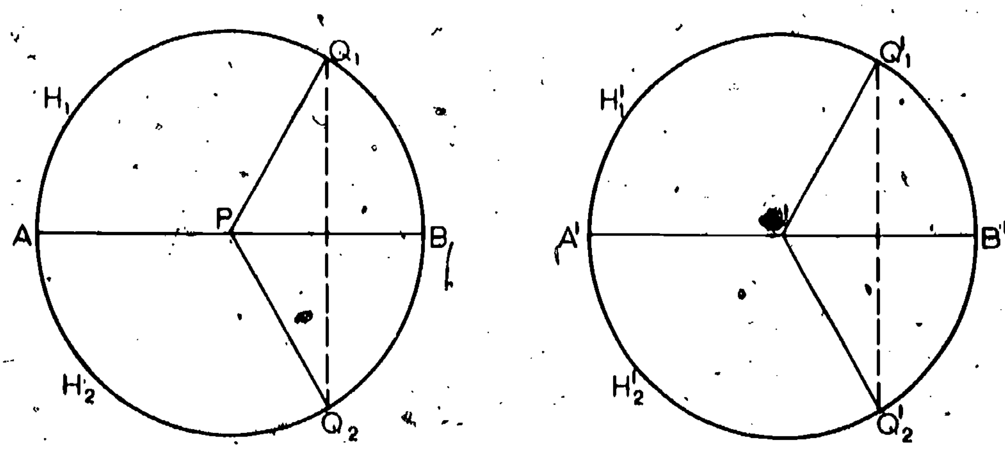
5. Dado un movimiento rígido $F \approx F'$, demuestra que si F es un rayo, entonces F' también lo es.
6. Demuestra que no existe un movimiento rígido entre un segmento y un arco circular (no importa lo pequeños que ambos sean).

VIII-4. <u>Movimiento rígido de circunferencias y arcos</u>

<u>Teorema VIII-6</u>. Sean C y C' dos circunferencias de radio r. Entonces existe un movimiento rígido

$$C \approx C'$$

entre C y C'.



Demostración: Sean P y P' los centros de las dos circunferencias. Sea $\overline{AB}$ un diámetro de la primera circunferencia, y sea $\overline{A'B'}$ un diámetro de la segunda. Sean H_1 y H_2 los semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{AB}$; y sean H'_1 y H'_2 los semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{A'B'}$.

Ahora podemos establecer nuestra correspondencia biunívoca $Q \longleftrightarrow Q'$ de la siguiente manera: (1) Sean A' y B'

los puntos que corresponden a A y B, respectivamente.

(2) Si Q_1 es un punto de C, contenido en H_1, sea Q'_1 el punto de C', contenido en H'_1, tal que

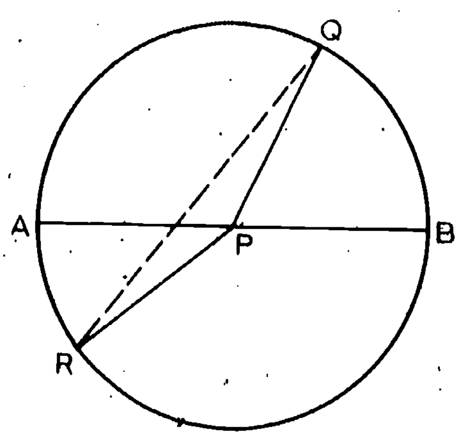
$$\angle Q'_1P'B' \cong \angle Q_1PB.$$

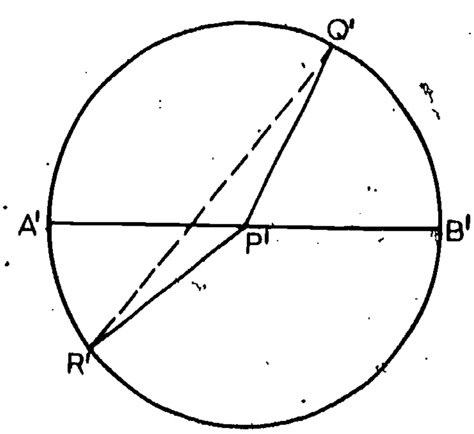
(3) Si Q_2 es un punto de C, contenido en H_2, sea Q'_2 el punto de C', contenido en H'_2, tal que

$$\angle Q'_2P'B' \cong \angle Q_2PB.$$

Tenemos que comprobar que esta correspondencia conserva las distancias, es decir, que para todo par de puntos Q, R de C, tendremos

$$Q'R' = QR .$$

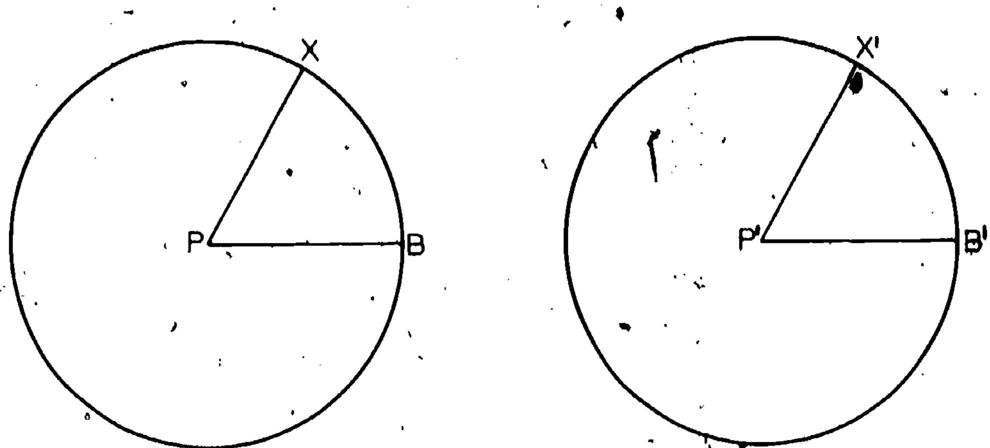




Si Q y R son los extremos de un diámetro, entonces también lo serán Q' y R', y, por consiguiente, $Q'R' = QR = 2r$. De otro modo, siempre tendremos que $\triangle QPR \cong \triangle Q'P'R'$, de manera que $Q'R' = QR$. (En la demostración se deben considerar dos casos, según esté B en el interior o en el exterior del $\angle QPR$.)

Los siguientes dos teoremas los deberás demostrar tú mismo. No son difíciles, una vez llegado hasta aquí.

Teorema VIII-7. Sean C y C' dos circunferencias de radios iguales, como en el teorema VIII-6. Sean $\angle XPB$ y $\angle X'P'B'$ ángulos centrales congruentes de C y C', respectivamente.



Entonces se puede elegir un movimiento rígido $C \approx C'$ de tal manera que $B \longleftrightarrow B'$, $X \longleftrightarrow X'$, y $\widehat{BX} \approx \widehat{B'X'}$.

Teorema VIII-8. Dados dos arcos congruentes cualesquiera, existe un movimiento rígido entre ellos.

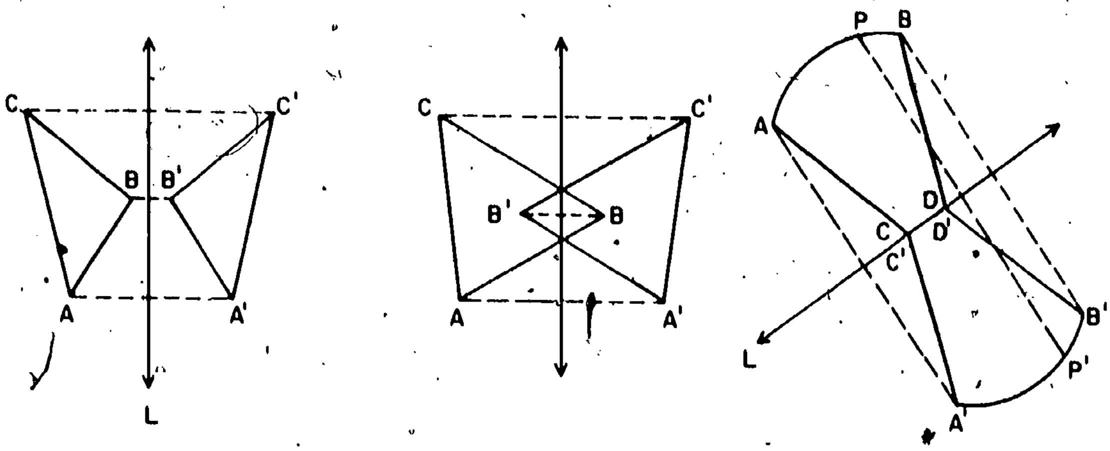
VIII-5. Reflexiones o simetrías

La definición de movimiento rígido dada en la sección VIII-1 es una buena definición matemática, pero podríamos alegar que, desde un punto de vista intuitivo, no lleva consigo idea alguna de "movimiento". Dedicaremos esta sección a mostrar cómo se puede "mover" una figura plana hasta hacerla coincidir con cualquier figura isométrica en el mismo plano.

En esta sección consideraremos todas las figuras como situadas en un plano fijo.

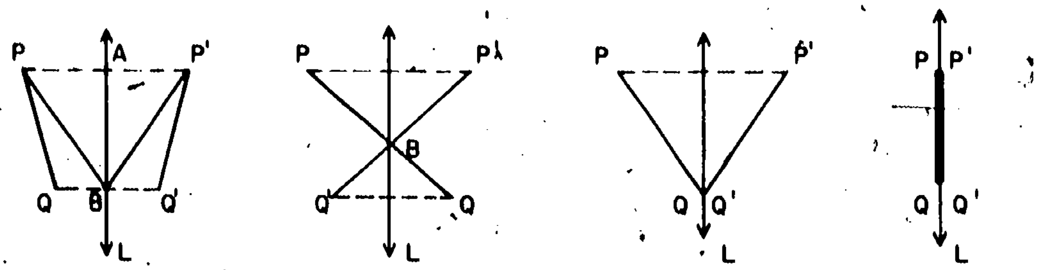
Definiciones. Una correspondencia biunívoca entre dos figuras es una reflexión o simetría si existe una recta L tal que para cualquier par de puntos correspondientes P y P', o bien (1) P = P' y está en L, o (2) L es la mediatriz de $\overline{PP'}$. L se llama el eje de reflexión o de simetría y se dice que cada figura es la reflexión, o la simétrica de la otra figura respecto de L.

En los dibujos que siguen se presentan algunos ejemplos de reflexiones, de figuras simples:



Teorema VIII-9. Una reflexión es un movimiento rígido.

Demostración: Necesitamos demostrar que si P y Q son dos puntos cualesquiera, y P' y Q' son los simétricos de dichos puntos respecto de la recta L, entonces PQ = P'Q'. Hay cuatro casos a considerar:



Caso (1) Caso (2) Caso (3) Caso (4)

Caso 1. P y Q están situados a un mismo lado de L. Consideremos el segmento $\overline{PP'}$ que interseca a L en el punto A y el segmento $\overline{QQ'}$ que interseca a L en el punto B. Por la definición de reflexión, $\overline{PP'} \perp L$ y $PA = P'A$, y $\overline{QQ'} \perp L$ y $QB = Q'B$. Por tanto, $\triangle PAB \cong \triangle P'AB$ y $PB = P'B$, $\angle PBA \cong \angle P'BA$. Restando, $\angle PBQ \cong \angle P'BQ'$. Entonces tenemos que (por el postulado L.A.L.) $\triangle PBQ \cong \triangle P'BQ'$, y, por tanto, $PQ = P'Q'$.

Caso 2. La demostración es análoga a la del caso 1.

Caso 3. Q está en L. Entonces $Q = Q'$ y $PQ = P'Q'$, puesto que Q está en la mediatriz de $\overline{PP'}$. El caso en que P está en L y Q no lo está, es idéntico a éste.

Caso 4. P y Q están ambos en L. Puesto que $P = P'$ y $Q = Q'$, ciertamente tenemos que $PQ = P'Q'$.

Empezando con la figura F, podemos reflejarla respecto de alguna recta para obtener una figura F_1; podemos reflejar F_1 respecto de otra recta para obtener una figura F_2, y así sucesivamente. Si al cabo de n reflexiones tales obtenemos una figura F', decimos que F ha sido <u>transformada en</u> F' mediante una <u>cadena</u> de n reflexiones.

<u>Corolario VIII-9-1</u>. Una cadena de reflexiones que transforme F en F' determina un movimiento rígido entre F y F'.

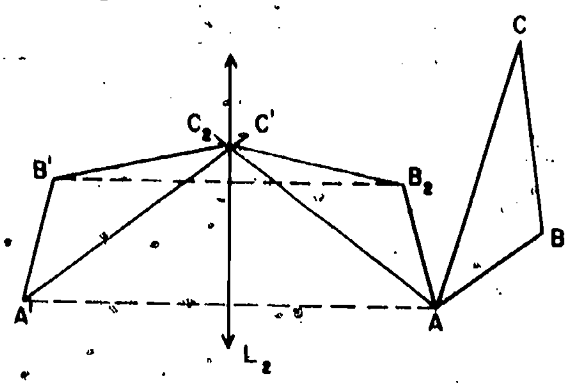
Volviendo a nuestras observaciones iniciales en esta sección, podemos considerar una reflexión como un movimiento físico, obtenido girando el plano completo 180° alrededor del eje de reflexión. El corolario nos dice que a los movimientos rígidos que se pueden obtener como una cadena de reflexiones, se les puede dar una interpretación física. Demostraremos ahora que <u>todo</u> movimiento rígido es de este tipo.

La demostración se dará en dos etapas, la primera sólo comprende una figura muy simple. Por conveniencia utilizaremos la notación $F \mid F'$, si F y F' son reflexiones una de la otra respecto de algún eje.

Teorema VIII-10. Sean A, B, C, A', B', C' seis puntos tales que AB = A'B', AC = A'C', BC = B'C'. Entonces hay una cadena de a lo más tres reflexiones que transforma A, B, C en A', B', C'.

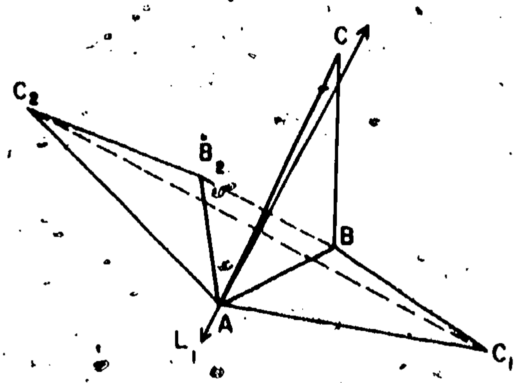
Demostración:

Paso 1.



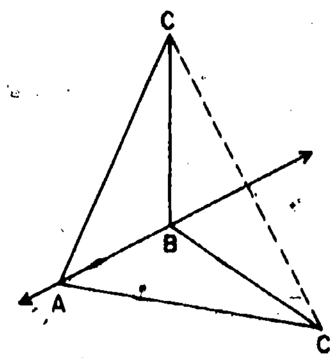
Sea L_2 la mediatriz de $\overline{AA'}$, y sean B_2 y C_2 las reflexiones de B' y C' respecto de L_2. Entonces A, B_2, C_2 | A', B', C'.

Paso 2.



Sea L_1 la mediatriz de $\overline{BB_2}$. Ahora bien, AB = A'B', y por el teorema VIII-9, A'B' = AB_2. Por consiguiente, AB = AB_2. Por lo tanto, A está en L_1, y es su propio simétrico en la reflexión respecto de L_1. Así, los simétricos de los puntos A, B_2, C_2 respecto de L_1 son A, B, C_1, respectivamente.

Paso 3.



Con argumentos análogos a los anteriores podemos ver que $AC = AC_1$ y $BC = BC_1$. Por consiguiente, $\overleftrightarrow{AB}$ es la mediatriz de $\overline{CC_1}$, y los simétricos de los puntos A, B, C_1 en la reflexión respecto de $\overleftrightarrow{AB}$ son A, B, C, respectivamente.

Así, pues, tenemos

$$A,B,C \mid A,B,C_1 \mid A,B_2,C_2 \mid A',B',C',$$

como se deseaba.

Uno o dos pasos cualesquiera de los tres antes mencionados pueden resultar innecesarios si el par de puntos con el cual trabajamos (A, A' en el paso 1; B, B' en el paso 2; C, C' en el paso 3) coinciden.

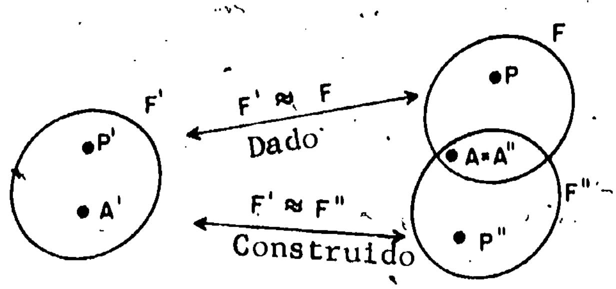
Ahora estamos preparados para la etapa final de la demostración.

Teorema VIII-11. Cualquier movimiento rígido es el resultado de una cadena de a lo más tres reflexiones.

Demostración: Se nos da un movimiento rígido $F \approx F'$. Sean A, B, C tres puntos no alineados de F, y A', B', C' los puntos correspondientes de F'.

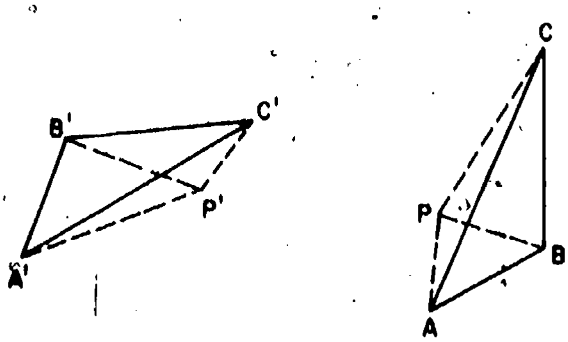
(Si todos los puntos de F están alineados, se necesita una demostración diferente, aunque más simple. Los detalles de esta demostración se dejan al estudiante.)

Por el teorema VIII-10, podemos pasar de A', B', C' a A, B, C mediante una cadena de a lo más tres reflexiones. Por el corolario VIII-9-1, esta cadena determina un movimiento rígido $F' \approx F''$, y por la construcción de las reflexiones, tenemos $A'' = A$, $B'' = B$ y $C'' = C$. De manera esquemática, la situación es como se muestra a continuación:



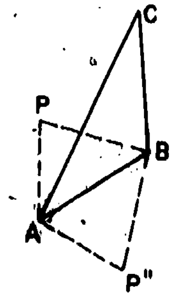
Demostraremos que para todo punto P de F será cierto que $P'' = P$. Esto probará que F'' coincide con F, y que el movimiento rígido dado $F \approx F'$ es idéntico al determinado mediante la cadena de reflexiones.

Consideremos, pues, cualquier punto P de F, el punto correspondiente P' de F' determinado por el movimiento rígido $F \approx F'$, y el punto P'' de F'' determinado partiendo de P' mediante la cadena de reflexiones. Ya sabemos que $A'' = A$, $B'' = B$, $C'' = C$.



Como todas las relaciones estudiadas son movimientos rígidos, tenemos que $AP'' = A'P' = AP$. Análogamente, $BP'' = BP$ y $CP'' = CP$. De las dos primeras igualdades y de $AB = AB$, se deduce que $\triangle ABP \cong \triangle ABP''$, y por lo tanto, $\angle BAP \cong \angle BAP''$. Si P y P'' están en el mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$, entonces, por el postulado de la construcción del ángulo, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP''}$, y como $AP = AP''$, del teorema de la localización de puntos se deduce que $P = P''$, lo que deseábamos demostrar.

Ahora supón que P y P'' están de lados opuestos respecto de $\overleftrightarrow{AB}$.

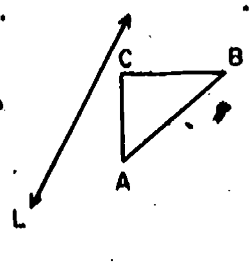


Puesto que $PA = P''A$ y $PB = P''B$, se deduce que A y B están en la mediatriz de $\overline{PP''}$. Como $PC = P''C$, C estará también en esta recta, lo cual contradice la elección de A, B y C como puntos no alineados. Por consiguiente, este caso no surge, y nos queda que $P = P''$, con lo cual queda demostrado el teorema.

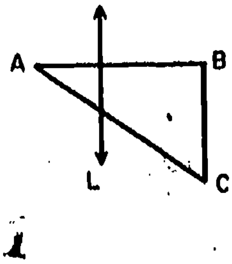
Conjunto de problemas VIII-5

1. En cada uno de los siguientes ejercicios, construye con cualesquiera instrumentos que creas convenientes, la reflexión de la figura dada respecto de la recta L:

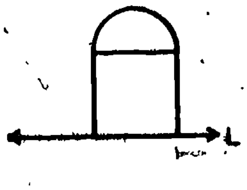
a.



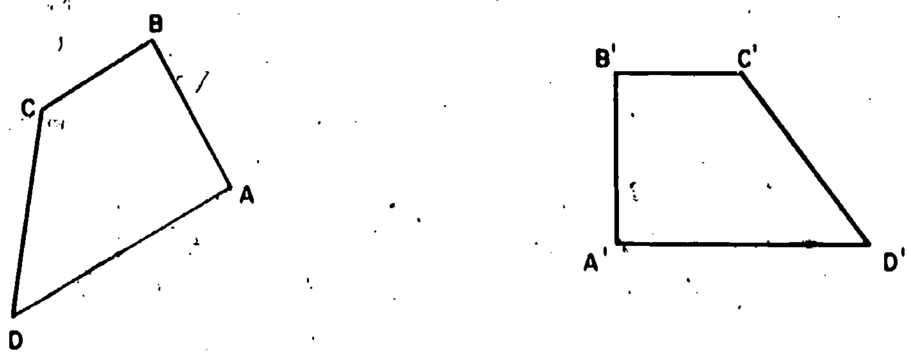
b.



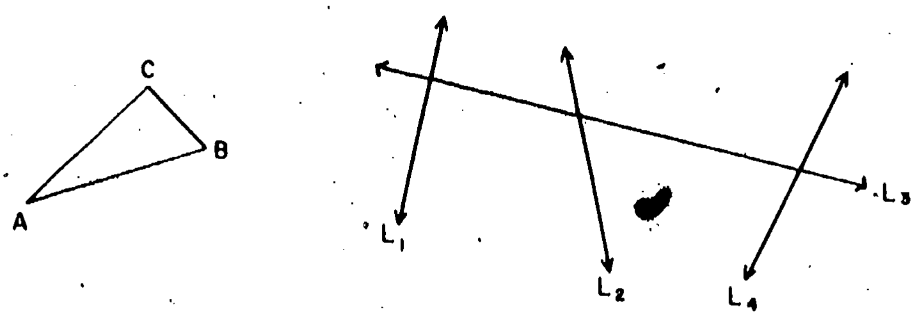
c.



2. Determina una cadena de tres o menos reflexiones que transforme ABCD en A'B'C'D'.



3. a. Mediante una cadena de cuatro reflexiones, transforma el $\triangle ABC$ respecto de los ejes L_1, L_2, L_3, L_4.



b. Determina una cadena más corta que produzca el mismo movimiento rígido.

<u>Definiciones</u>: Una figura es <u>simétrica</u> si es su propia reflexión respecto de algún eje. Un tal eje se llama un <u>eje de simetría</u> de la figura.

4. Demuestra que un triángulo isósceles es simétrico. ¿Cuál es el eje de simetría?

5. Una figura puede tener más de un eje de simetría. ¿Cuántos ejes de simetría tiene cada una de las siguientes figuras?

a. un rombo

b. un rectángulo

c. un cuadrado

d. un triángulo equilátero

e. una circunferencia

6. El movimiento rígido definido mediante una cadena de dos reflexiones respecto de ejes paralelos tiene la propiedad de que si $P \longleftrightarrow P'$, entonces $\overleftrightarrow{PP'}$ tiene una longitud fija (el duplo de la distancia entre los ejes) y una dirección fija (perpendicular a los ejes). Demuéstralo. Un movimiento de esta clase se llama una <u>traslación</u>.

7. El movimiento rígido definido por una cadena de dos reflexiones en ejes que se intersequen en Q tiene la propiedad de que si $P \longleftrightarrow P'$, entonces $\angle PQP'$ tiene una medida fija (el duplo de la medida del ángulo agudo entre los ejes). Demuéstralo. Un movimiento de esta clase se llama una <u>rotación</u> alrededor de Q.

8. Muestra la manera como, utilizando los resultados de los problemas 6 y 7, el teorema fundamental VIII-11 se puede enunciar también de la siguiente manera:

Cualquier movimiento rígido en un plano es una reflexión, una traslación, una rotación, una traslación seguida de una reflexión, o una rotación seguida de una reflexión.

Apéndice IX

DEMOSTRACION DEL TEOREMA DE LAS DOS CIRCUNFERENCIAS

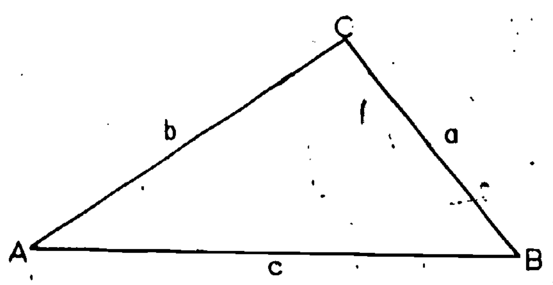
La validez del teorema de las dos circunferencias, enunciado en el Capítulo 14, se basa en la existencia de un cierto triángulo, y la demostración es más fácil de comprender si se establece dicha existencia primero.

<u>El teorema de existencia del triángulo</u>. Si a, b, c son números positivos, cada uno de los cuales es menor que la suma de los otros dos, entonces existe un triángulo cuyos lados tienen longitudes a, b, c.

Demostración: La parte difícil de la demostración es más bien algebraica que geométrica. Primero, supongamos respecto a la notación, que los tres números a, b, c están escritos según su orden de magnitud, es decir,

$$a \leq b \leq c.$$

Empecemos con un segmento $\overline{AB}$, siendo $AB = c$. Nuestro problema es hallar un triángulo $\triangle ABC$, con $BC = a$ y $AC = b$, así:



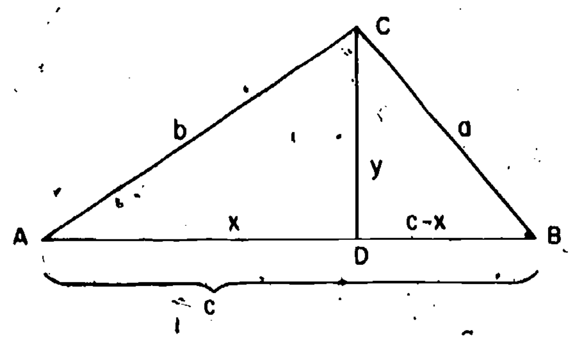
En cierto sentido, vamos a tratar este problema retrocediendo a partir de su solución. Es decir, vamos a empezar suponiendo que <u>existe</u> un triángulo que cumple las condiciones estipuladas. Basándonos en esta suposición, hallaremos exactamente dónde debe estar el tercer vértice C. Desde luego, este procedimiento no demostrará por sí mismo que el enunciado anterior es cierto, porque empezamos suponiendo lo mismo que teníamos que demostrar. Pero una vez que hayamos encontrado la situación exacta de los puntos que podrían ser apropiados, será muy fácil comprobar que, en verdad, son apropiados. (Claro está, hay dos posibles posiciones para C, a ambos lados de la recta $\overleftrightarrow{AB}$.)

(Este procedimiento es el que utilizamos al resolver ecuaciones. Para resolver $3x - 7 = x + 3$, primero suponemos que hay un número x que satisface a la ecuación. Para este número x obtenemos sucesivamente que,

$$3x = x + 10,$$
$$2x = 10,$$
$$x = 5.$$

Entonces invertimos el procedimiento y así verificamos que el número 5 efectivamente satisface a la ecuación dada.)

Suponte, pues, que existe un triángulo $\triangle ABC$ del tipo que buscamos. Tracemos una perpendicular desde C hasta $\overleftrightarrow{AB}$, y sea D el pie de la perpendicular. Entonces D estará entre A y B, porque $AD < b \leq c$ y $BD < a \leq c$.



Sea $y = CD$, y sea $x = AD$, como en la figura. Entonces $DB = c - x$, como se indica. Tenemos que buscar expresiones de x e y en función de a, b y c.

Por el teorema de Pitágoras, tenemos que

$$(1)\quad x^2 + y^2 = b^2$$

y

$$(2)\quad y^2 + (c - x)^2 = a^2.$$

Por consiguiente,

$$y^2 = b^2 - x^2$$

y también,

$$y^2 = a^2 - (c - x)^2.$$

Igualando estas dos expresiones de y^2, vemos que

$$b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2,$$

$$b^2 - x^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2,$$

$$2cx = b^2 + c^2 - a^2,$$

y

$$(3)\quad x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$$

Lo que hemos encontrado hasta aquí es que si x e y satisfacen a las ecuaciones (1) y (2), entonces x satisface a la ecuación (3). Recíprocamente, comprobaremos que si x e y satisfacen a las ecuaciones (1) y (3), entonces x e y también satisfacen a la ecuación (2). Pues, si las ecuaciones (1) y (3) son válidas, entonces partiendo de (1) tenemos que

$$y^2 = b^2 - x^2.$$

Sumando $(c - x)^2$ a ambos miembros, obtenemos

$$\begin{aligned} y^2 + (c - x)^2 &= (b^2 - x^2) + (c - x)^2 \\ &= b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2cx . \end{aligned}$$

Sustituyendo x en el miembro de la derecha por su expresión equivalente de la ecuación (3), obtenemos

$$y^2 + (c - x)^2 = b^2 + c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)$$
$$= a^2;$$

de manera que (2) es válida.

Ahora que sabemos el triángulo que debemos construir, volvamos a empezar. Tenemos tres números positivos, a, b, c, cada uno de los cuales es menor que la suma de los otros dos, y además $a \leq b \leq c$. Sea

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

Entonces $x > 0$, ya que $b^2 \geq a^2$ y $c^2 > 0$. Queremos poner

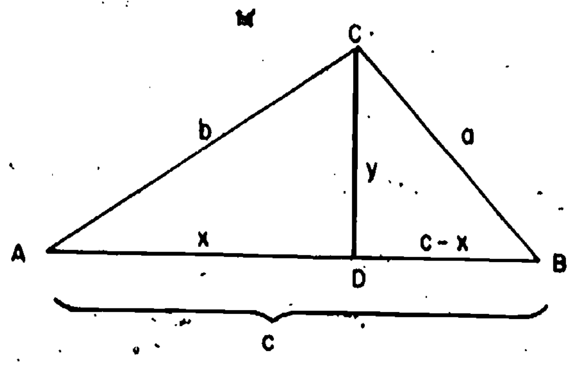
$$y = \sqrt{b^2 - x^2},$$

de manera que $x^2 + y^2 = b^2$, pero para hacerlo, primero debemos estar seguros de que $x < b$, es decir, que $b - x > 0$. Tenemos

$$b - x = b - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$$
$$= \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2c}$$
$$= \frac{a^2 - (c^2 - 2bc + b^2)}{2c}$$
$$= \frac{a^2 - (c - b)^2}{2c}$$

Ahora se nos da que $c < a + b$. Por consiguiente, $c - b < a$ y, por tanto, $(c - b)^2 < a^2$. De la ecuación anterior se deduce que $b - x > 0$, ó $x < b$.

Ahora estamos preparados para construir nuestro triángulo. Sea $\overline{AB}$ un segmento de longitud c.



Sea D un punto en $\overline{AB}$ tal que $AD = x = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$.

Tal punto existe, pues sabemos que $x < b \leq c$. Sea C un punto de la perpendicular a $\overline{AB}$ que pasa por D, tal que

$$DC = y = \sqrt{b^2 - x^2}.$$

Entonces

$$AC^2 = x^2 + y^2 = b^2,$$

y también,

$$BC^2 = y^2 + (c - x)^2 = a^2.$$

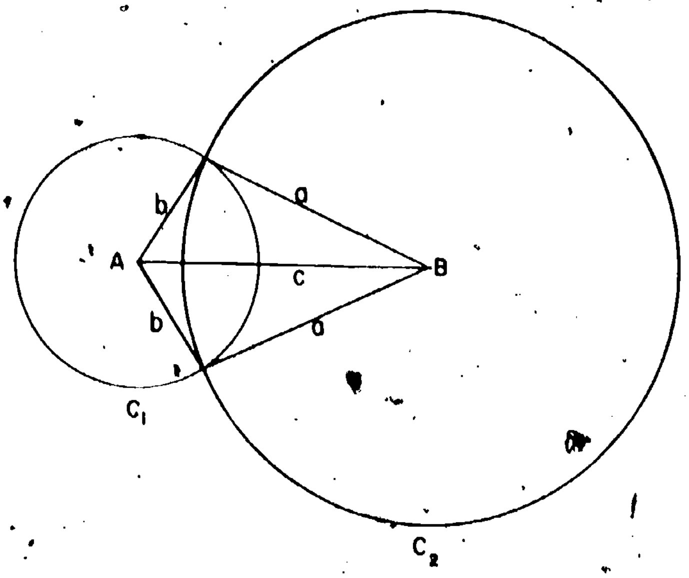
Por consiguiente, $AC = b$ y $BC = a$, lo que necesitábamos.

La demostración del teorema de las dos circunferencias es ahora bastante fácil.

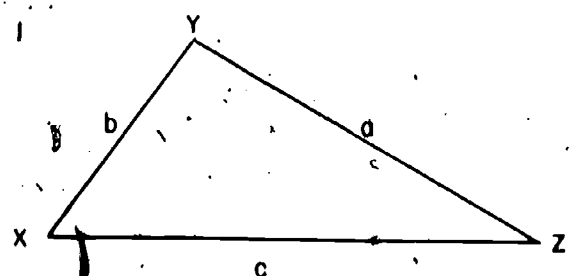
Teorema 14-5. (El teorema de las dos circunferencias)

Si dos circunferencias tienen radios a y b, y si c es la distancia entre sus centros, entonces las circunferencias se intersecan en dos puntos, uno a cada lado de la recta de los centros, con tal que cada una de las cantidades a, b, c sea menor que la suma de las otras dos.

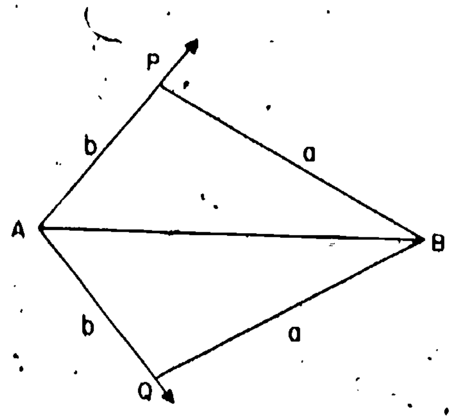
Demostración: Sea C_1 la circunferencia de radio b y centro A, y sea C_2 la circunferencia de radio a y centro B. Entonces AB = c.



Sabemos por el teorema de existencia del triángulo, que hay un triángulo ΔXYZ cuyos lados tienen longitudes a, b y c, así:



Utilizando el postulado L.A.L., copiaremos este triángulo a cada lado de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ de la siguiente manera: A cada lado de $\overleftrightarrow{AB}$ tomamos un rayo partiendo del punto A, de manera tal que los ángulos formados son congruentes al ángulo X.



En estos rayos, elijamos dos puntos P y Q, tales que $AP = AQ = b$. Por consiguiente, la circunferencia C_1 pasa por los puntos P y Q. Del postulado L.A.L. se deduce que

$$\triangle APB \cong \triangle XYZ \cong \triangle AQB.$$

Por lo tanto, $PB = a = QB$, y en consecuencia, la circunferencia C_2 pasa por los puntos P y Q.

Esto demuestra que P y Q son, por lo menos, parte de la intersección de C_1 y C_2. Para demostrar que constituyen la intersección, debemos demostrar que no hay un tercer punto, R, que esté en ambas C_1 y C_2. Si hubiera un punto tal R, por el teorema L.L.L. tendríamos

$$\triangle ABR \cong \triangle ABP, \text{ y, por tanto, } m\angle BAR = m\angle BAP.$$

Pero en el plano dado hay solamente dos ángulos tales, uno a cada lado de $\overleftrightarrow{AB}$, y en consecuencia, o bien $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AP}$ o $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AQ}$. Puesto que $AR = AP = AQ = b$, esto significa que o bien $R = P$ o $R = Q$, y, por tanto, no puede haber un tercer punto contenido en ambas C_1 y C_2.

Apéndice X

TRIGONOMETRIA

X-1. Razones trigonométricas

El estudio elemental de la trigonometría se basa en el siguiente teorema:

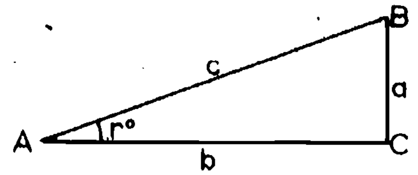
Teorema X-1. Si un ángulo agudo de un triángulo rectángulo es congruente con un ángulo agudo de otro triángulo rectángulo, entonces los dos triángulos son semejantes.

Demostración: Sean $\angle C$ y $\angle C'$ los ángulos rectos de los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ respectivamente, y sea $m\angle A = m\angle A'$. Entonces, por el corolario A.A. 12-3-1, $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

La aplicación de este teorema es como sigue: Sea r cualquier número entre 0 y 90, y sea ΔABC un triángulo rectángulo con $m\angle C = 90$ y $m\angle A = r$. Por conveniencia, elijamos

$$AB = c,\ AC = b,\ BC = a.$$

(Entonces, el teorema de Pitágoras nos dice que $c^2 = a^2 + b^2$.)



Si consideramos otro triángulo tal, $\Delta A'B'C'$, con $m\angle C' = 90$ y $m\angle A' = r$, obtenemos tres números correspondientes, a', b', c' que, en general, serían distintos de a, b, c. Sin embargo, siempre tenemos que

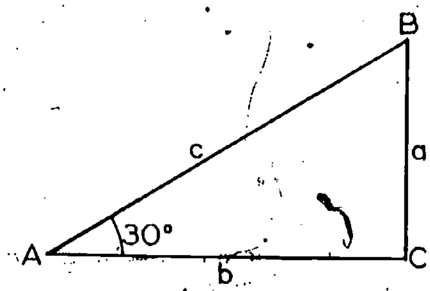
$$\frac{a'}{c'} = \frac{a}{c}.$$

Para ver esto, observa que del teorema X-1 se deduce que

$$\frac{a'}{a} = \frac{c'}{c}.$$

Si multiplicamos ambos miembros de esta ecuación por $\frac{a}{c'}$, obtenemos el resultado deseado.

Así, pues, la razón $\frac{a}{c}$ no depende del triángulo particular que utilicemos y sí de la medida r del ángulo agudo. El valor de esta razón se llama el <u>seno</u> de $r°$, el cual, para abreviar, se escribe sen $r°$. Especificamos que se usa el grado como unidad de medida, porque en aspectos más avanzados de la trigonometría se acostumbra utilizar otra unidad de medida para los ángulos, a saber, el radián.



Veamos qué podemos decir acerca de sen 30°. Por el teorema 11-9, sabemos que en este caso si $c = 1$, entonces $a = \frac{1}{2}$. Por consiguiente, sen $30° = \frac{a}{c} = \frac{1}{2}$.

Es evidente que se puede tratar la razón $\frac{b}{c}$ del mismo modo que $\frac{a}{c}$. La razón $\frac{b}{c}$ se se llama <u>coseno</u> de $r°$, y se escribe cos $r°$. Del teorema de Pitágoras vemos que si $a = \frac{1}{2}$ y $c = 1$, entonces $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Por tanto, cos $30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

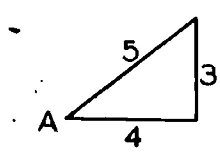
De las otras cuatro posibles razones de los tres lados del triángulo, sólo utilizaremos una, a saber, $\frac{a}{b}$. Esta razón se llama la <u>tangente</u> de $r°$, y se escribe tan $r°$. Vemos que tan $30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$. (Este uso de la palabra "tangente" tiene sólo una relación histórica sin importancia con su significado habitual en relación con una situación especial entre una recta y una circunferencia.)

Llamamos a estas tres cantidades razones trigonométricas.

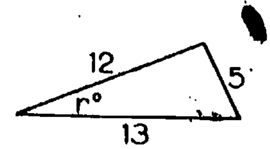
Conjunto de problemas X-1

1. En cada uno de los siguientes ejercicios, indica la información necesaria en función de las longitudes de los lados indicados:

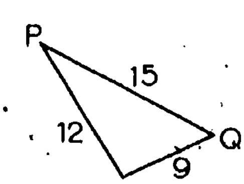
   a. sen A = ?, cos A = ?, tan A = ?



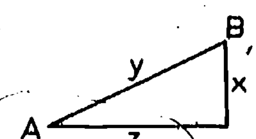
   b. sen r° = ?, cos r° = ?, tan r° = ?



   c. sen P = ?, cos P = ?, tan Q = ?

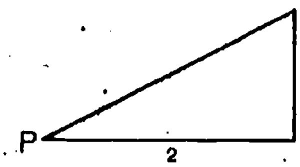


   d. sen A = ?, sen B = ?
   tan A = ?, tan B = ?

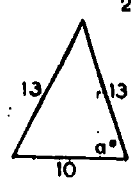


2. En cada uno de los siguientes ejercicios, determina el valor numérico correcto de x:

a. cos P = x



b. tan a° = x



3. Determina: sen 60°, cos 60°, tan 60°.

4. Determina: sen 45°, cos 45°, tan 45°.

5. Utilizando regla y transportador, traza algunos dibujos para determinar mediante medición las siguientes razones trigonométricas:

a. sen 20°, cos 20°, tan 20°.

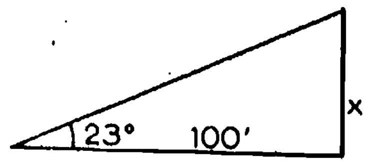
b. sen 53°, cos 53°, tan 53°.

X-2. Tablas trigonométricas y aplicaciones

Aunque se pueden calcular exactamente las razones trigonométricas de algunos ángulos, tales como 30°, 60°, y 45°, en la mayoría de los casos tenemos que conformarnos con valores aproximados. Estos se pueden determinar mediante varios métodos avanzados; al final de este apéndice ofrecemos una tabla de los valores correctos con tres cifras decimales de las tres razones trigonométricas.

Teniendo una tabla de razones trigonométricas, y un instrumento para medir ángulos, tal como un tránsito (o, unas cuerdas y un transportador) se pueden resolver varios problemas prácticos.

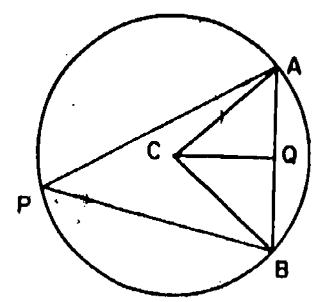
Ejemplo X-1. Se encontró que desde un punto que dista 100 pies de la base de un asta de bandera, el ángulo entre la horizontal y la recta desde el punto hasta el tope del asta es de 23°. Sea x la altura del asta. Entonces



$$\frac{x}{100} = \tan 23° = 0.425.$$

Por consiguiente, x = 42.5 pies. Un ángulo como el que consideramos en este ejemplo frecuentemente se llama el ángulo de elevación del objeto.

Ejemplo X-2. En una circunferencia de 8 centímetros de radio, una cuerda $\overline{AB}$ tiene 10 centímetros de longitud. ¿Cuál es la medida de un ángulo inscrito en el arco mayor $\widehat{AB}$? Tenemos que AC = 8, $AQ = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$. De aquí se tiene que $\text{sen}\angle ACQ = \frac{5}{8} = 0.625$, $m\angle ACQ = 39°$, $m(\text{arco menor } \widehat{AB}) = m\angle ACB = 2(m\angle ACQ) = 78°$. Por consiguiente, $m\angle APB = \frac{1}{2}m(\text{arco } \widehat{AB}) = 39°$, aproximado al grado.



Conjunto de problemas X-2

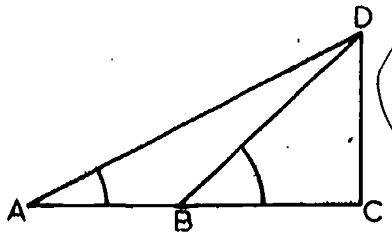
1. Mediante la tabla, calcula: sen 17°, cos 46°, tan 82°, cos 33°, sen 60°. ¿Concuerda el último valor con el determinado en el problema 3 del Conjunto de problemas X-1?

2. En cada uno de los siguientes casos, utiliza la tabla para determinar el valor de x con la aproximación de un grado:

$\cos x = 0.731$, $\operatorname{sen} x = 0.390$, $\tan x = 0.300$

$\operatorname{sen} x = 0.413$, $\tan x = 2$, $\cos x = \frac{1}{3}$

3. Un alpinista escala media milla por una pendiente cuya inclinación es de 17°. ¿Cuánta altura gana?
4. Cuando un poste de seis pies proyecta una sombra de cuatro pies, ¿cuál será el ángulo de elevación del sol?
5. Un triángulo isósceles tiene una base de 6 pulgadas y un ángulo opuesto de 30°. Determina:
   a. la altura del triángulo.
   b. las longitudes de las alturas correspondientes a los lados iguales.
   c. los ángulos determinados por estas alturas y la base.
   d. el punto de intersección de las alturas.
6. Un decágono regular (figura de 10 lados) está inscrito en una circunferencia de radio 12. Determina la longitud de un lado, la apotema y el área del decágono.
7. Dado $m\angle A = 26°$, $m\angle CBD = 42°$, $BC = 50$, calcula AD y AB.



X-3. Relaciones entre razones trigonométricas

Teorema X-2. Para cualquier ángulo agudo A, sen A < 1, cos A < 1.

Demostración: En el triángulo rectángulo $\triangle ABC$ de la sección X-1, $a < c$ y $b < c$. Al dividir cada una de estas desigualdades por c se obtiene

$$\frac{a}{c} < 1, \quad \frac{b}{c} < 1,$$

lo que queríamos demostrar.

Teorema X-3. Para cualquier ángulo agudo A,

$$\frac{\text{sen } A}{\cos A} = \tan A, \text{ y } (\text{sen } A)^2 + (\cos A)^2 = 1.$$

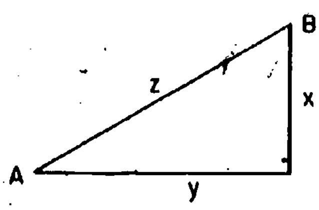
Demostración:

$$\frac{\text{sen } A}{\cos A} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \tan A.$$

$$(\text{sen } A)^2 + (\cos A)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}$$

$$= \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1 .$$

Teorema X-4. Si $\angle A$ y $\angle B$ son ángulos agudos complementarios, entonces sen A = cos B, cos A = sen B, y $\tan A = \frac{1}{\tan B}$.



Demostración: En la notación de la figura tenemos,

$$\text{sen } A = \frac{x}{z} = \cos B,$$

$$\cos A = \frac{y}{z} = \text{sen } B,$$

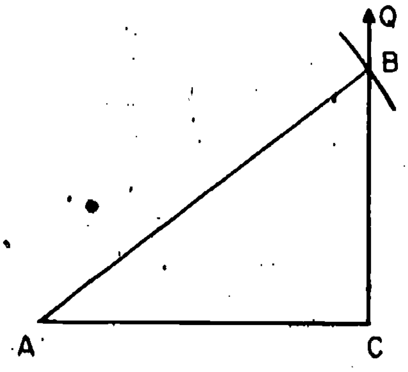
$$\tan A = \frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{y}{x}} = \frac{1}{\tan B}.$$

Conjunto de problemas X-3

Resuelve los siguientes problemas sin utilizar las tablas:

1. Si sen $A = \frac{1}{3}$, ¿cuál es el valor de cos A? ¿Cuál es el valor de tan A? (Utiliza el teorema X-3)
2. En cada uno de los siguientes casos, utiliza una regla y un compás para construir el $\angle A$, si es posible. Se permite que utilices los resultados de ejercicios anteriores para simplificar ejercicios posteriores.

a. $\cos A = 0.8$.



Solución: Elije cualquier segmento conveniente $\overline{AC}$ y construye $\overrightarrow{CQ} \perp \overline{AC}$. Con centro A y radio $\frac{AC}{0.8}$, construye un arco que interseque a $\overrightarrow{CQ}$ en el punto B. Entonces $\cos(\angle BAC) = 0.8$.

b. $\cos A = \frac{2}{3}$

c. $\cos A = \frac{3}{2}$

d. sen $A = 0.8$

e. sen $A = 0.7$

f. $\tan A = \frac{2}{3}$

g. $\tan A = \frac{3}{2}$

Tabla de razones trigonométricas

Angulo	Seno	Coseno	Tangente	Angulo	Seno	Coseno	Tangente
0	0.000	1.000	0.000				
1	.018	1.000	.018	46	0.719	0.695	1.036
2	.035	0.999	.035	47	.731	.682	1.072
3	.052	.999	.052	48	.743	.669	1.111
4	.070	.998	.070	49	.755	.656	1.150
5	.087	.996	.088	50	.766	.643	1.192
6	.105	.995	.105	51	.777	.629	1.235
7	.122	.993	.123	52	.788	.616	1.280
8	.139	.990	.141	53	.799	.602	1.327
9	.156	.988	.158	54	.809	.588	1.376
10	.174	.985	.176	55	.819	.574	1.428
11	.191	.982	.194	56	.829	.559	1.483
12	.208	.978	.213	57	.839	.545	1.540
13	.225	.974	.231	58	.848	.530	1.600
14	.242	.970	.249	59	.857	.515	1.664
15	.259	.966	.268	60	.866	.500	1.732
16	.276	.961	.287	61	.875	.485	1.804
17	.292	.956	.306	62	.883	.470	1.881
18	.309	.951	.325	63	.891	.454	1.963
19	.326	.946	.344	64	.899	.438	2.050
20	.342	.940	.364	65	.906	.423	2.145
21	.358	.934	.384	66	.914	.407	2.246
22	.375	.927	.404	67	.921	.391	2.356
23	.391	.921	.425	68	.927	.375	2.475
24	.407	.914	.445	69	.934	.358	2.605
25	.423	.906	.466	70	.940	.342	2.747
26	.438	.899	.488	71	.946	.326	2.904
27	.454	.891	.510	72	.951	.309	3.078
28	.470	.883	.532	73	.956	.292	3.271
29	.485	.875	.554	74	.961	.276	3.487
30	.500	.866	.577	75	.966	.259	3.732
31	.515	.857	.601	76	.970	.242	4.011
32	.530	.848	.625	77	.974	.225	4.331
33	.545	.839	.649	78	.978	.208	4.705
34	.559	.829	.675	79	.982	.191	5.145
35	.574	.819	.700	80	.985	.174	5.671
36	.588	.809	.727	81	.988	.156	6.314
37	.602	.799	.754	82	.990	.139	7.115
38	.616	.788	.781	83	.993	.122	8.144
39	.629	.777	.810	84	.995	.105	9.514
40	.643	.766	.839	85	.996	.087	11.43
41	.658	.755	.869	86	.998	.070	14.30
42	.669	.743	.900	87	.999	.052	19.08
43	.682	.731	.933	88	.999	.035	28.64
44	.695	.719	.966	89	1.000	.018	57.29
45	.707	.707	1.000	90	1.000	.000	

Soluciones a los problemas del apéndice

Conjunto de problemas X-1

1. a. $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$.

   b. $\frac{5}{13}$, $\frac{12}{13}$, $\frac{5}{12}$.

   c. $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{3}$.

   d. $\frac{x}{y}$, $\frac{z}{y}$, $\frac{x}{z}$, $\frac{z}{x}$.

2. a. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ b. $\frac{12}{5}$

3. $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\sqrt{3}$.

4. $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 1.

5. a. 0.34, 0.94, 0.36.

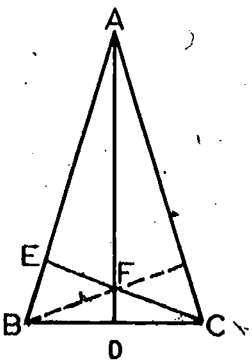
   b. 0.80, 0.60, 1.33.

Conjunto de problemas X-2

2. 43°, 23°, 17°, 24°, 63°, 71°.

3. $\text{sen } 17^\circ = \frac{x}{\frac{1}{2} \cdot 5280}$ $x = 0.292 \cdot 2640 = 771$ pies.

4. $\tan x = \frac{6}{4} = 1.5.$ $x = 56^\circ$.



5. $m\angle A = 30^\circ$, $m\angle B = m\angle C = 75^\circ$.

   a. $\frac{AD}{CD} = \tan C$, $AD = 3.732 \cdot 3 = 11.196$.

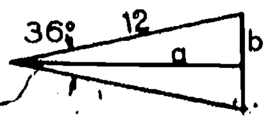
   b. $\frac{CE}{CB} = \text{sen } B$. $CE = 0.966 \cdot 6 = 5.796$.

   c. $m\angle ECB = 90^\circ - m\angle B = 15^\circ$.

   d. $\frac{DF}{CD} = \tan 15^\circ$. $DF = 0.268 \cdot 3 = 0.804$.

6. $\operatorname{sen} 18^\circ = \frac{b}{12}$,

$b = 3.71$, $2b = \underline{7.42}$



$\cos 18^\circ = \frac{a}{12}$,

$a = \underline{11.41}$.

$\text{área} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 7.42 \cdot 11.41 = 423.$

7. $\tan 42^\circ = \frac{CD}{50}$, $CD = 45.0$.

$\tan 26^\circ = \frac{45}{AC}$, $AC = 92.2$, $AB = \underline{42.2}$.

$\operatorname{sen} 26^\circ = \frac{45}{AD}$, $AD = \underline{103}$.

Conjunto de problemas X-3

1. $(\operatorname{sen} A)^2 + (\cos A)^2 = 1$, $\frac{1}{9} + (\cos A)^2 = 1$,

$\cos A = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$\tan A = \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

2. (c) Imposible

(d) Aquí A es congruente con el ángulo B de la parte (a).

(g) Aquí A es el complemento del ángulo A de la parte (f).

Apéndice XI

POLIEDROS REGULARES

Un poliedro es un cuerpo cuyas fronteras consisten en porciones de planos, llamadas caras, que son regiones poligonales. Los lados y los vértices de los polígonos se llaman aristas y vértices del poliedro. Los prismas y las pirámides son ejemplos de tipos especiales de poliedros. Un poliedro regular es un poliedro convexo (para la definición de convexidad refiérete a la sección 3-3) cuyas caras están limitadas por polígonos regulares que tienen todos el mismo número de lados y tal que en cada vértice concurren el mismo número de caras (y aristas). Determinaremos todos los poliedros regulares mediante la famosa fórmula de Euler que relaciona el número de vértices, aristas y caras de un poliedro convexo (más generalmente, uno que no contenga agujeros). Una exposición excelente de esta fórmula se encuentra en el libro de Rademacher y Toeplitz, "The Enjoyment of Mathematics". Demostraremos que hay solamente cinco posibilidades para los números de vértices, aristas y caras, pero omitiremos la demostración de que cada una de estas posibilidades se cumple en un poliedro regular de una manera y sólo una.

Suponte que tenemos un poliedro regular con V vértices, E aristas y F caras, y con r caras concurrentes en cada vértice y n lados (y vértices) en cada cara. Si se considerasen una a una todas las aristas, tendríamos E segmentos, cada uno con dos extremos, y por consiguiente, habría $2E$ extremos en total. Ahora bien, hay r de estos extremos incidentes en cada uno de los V vértices. Por tanto, hay un total de rV extremos y tenemos, pues, la relación $rV = 2E$ ó

(1) $$V = \frac{2E}{r}.$$

Análogamente, imagínate una a una todas las caras y cuenta el número total de los lados de tales polígonos. Hay 2 caras incidentes en cada arista, de manera que hay $2E$ lados. Hay n lados en cada cara, y, por lo tanto, hay un total de nF lados. Así, $nF = 2E$ ó

(2) $$F = \frac{2E}{n}.$$

La fórmula de Euler nos dice que

$$V - E + F = 2.$$

Sustituyendo V y F por sus valores en las ecuaciones (1) y (2), obtenemos

$$\frac{2E}{r} - E + \frac{2E}{n} = 2.$$

Dividiendo por $2E$, obtenemos

(3) $$\frac{1}{r} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{E}.$$

Por tanto,

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} > 0$$

o sea,

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}.$$

Ahora bien, $r \geq 3$, de modo que $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{3}$, $\frac{1}{n} > \frac{1}{2} - \frac{1}{r} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, y por tanto, $n < 6$. Así, pues, $n = 3$, 4 ó 5, y las únicas posibilidades para las caras son triángulos, cuadrados, o pentágonos regulares. Mediante el mismo argumento vemos que las únicas posibilidades para r son $r = 3, 4$ ó 5. El valor de E se determina mediante la ecuación (3) y los valores de V y F mediante las ecuaciones (1) y (2).

Para $n = 3$, $r = 3$, obtenemos $V = 4$, $E = 6$, $F = 4$.

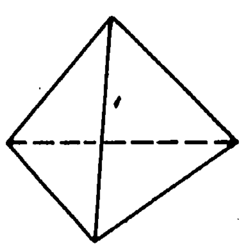
Para $n = 3$, $r = 4$, obtenemos $V = 6$, $E = 12$, $F = 8$.

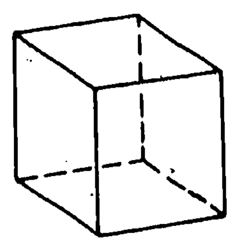
Para $n = 3$, $r = 5$, obtenemos $V = 12$, $E = 30$, $F = 20$.

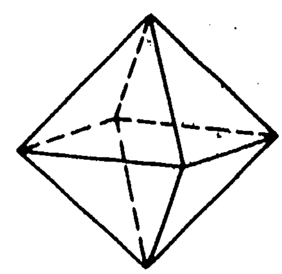
Ensayando con $n = 4$, vemos que la única posibilidad para r es 3, y en este caso $V = 8$, $E = 12$, $F = 6$. Finalmente, para $n = 5$ la única posibilidad es $r = 3$, que da $V = 20$, $E = 30$, $F = 12$.

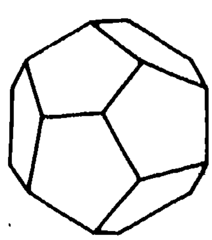
Estas cinco posibilidades se cumplen esencialmente de una sola manera para cada elección de F, E y V (en forma más precisa: dos poliedros regulares con los mismos valores para F, E y V son "semejantes"), aunque no lo hemos demostrado. En la siguiente tabla se indican los cinco poliedros regulares:

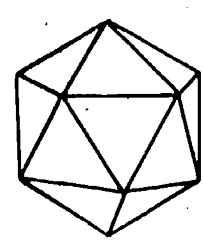
Poliedro regular	Frontera de la cara	Número de caras	Número de aristas	Número de vértices	Número de caras (o aristas) en un vértice
Tetraedro	Triángulo	4	6	4	3
Octaedro	Triángulo	8	12	6	4
Icosaedro	Triángulo	20	30	12	5
Cubo (hexaedro)	Cuadrado	6	12	8	3
Dodecaedro	Pentágono	12	30	20	3


Tetraedro


Hexaedro


Octaedro


Dodecaedro


Icosaedro

Observamos una dualidad curiosa entre el octaedro y el cubo y entre el icosaedro y el dodecaedro, obtenida mediante el intercambio de F y V, n y r, y dejando E inalterada. El tetaedro es el dual de sí mismo. Esta dualidad se puede establecer tomando uno de los cuerpos y formando un nuevo cuerpo cuyos vértices sean los centros de las caras del cuerpo original, y cuyas aristas sean los segmentos que conectan los centros de caras adyacentes. Estas y otras relaciones entre los poliedros regulares y los poliedros semirregulares relacionados con ellos se estudian en varios libros; por ejemplo, en el libro de Steinhaus, "Mathematical Snapshots", y el de Cundy y Rollet, "Mathematical Models".

EL SIGNIFICADO Y USO DE LOS SIMBOLOS

General

$=$ A = B puede leerse como "A igual a B", "A es igual a B", "A igual B" (como en "Sea A = B"), y posiblemente de otras maneras a fin de que se ajuste a la estructura del enunciado en el cual aparece el símbolo. Sin embargo, no debemos emplear el símbolo = en casos como "A y B son ="; el uso adecuado del símbolo es entre dos expresiones. Si dos expresiones están conectadas por el símbolo =, se sobrentenderá que dichas expresiones representan la misma entidad matemática, en nuestro caso ésta será o un número real o un conjunto de puntos.

$\neq$ "No es igual a". A ≠ B significa que A y B no representan la misma entidad. Las mismas variaciones y advertencias que se hicieron acerca del uso de = se aplican en el caso del uso de ≠.

Algebraico

$+, \cdot, -, \div$ Estos símbolos algebraicos familiares para las operaciones con números reales no necesitan comentarios. Los postulados fundamentales acerca de ellos aparecen en el Apéndice II.

$<, >, \leq, \geq$ Así como =, estos símbolos pueden leerse de varias maneras en los enunciados. Por ejemplo, A < B puede representar lo que está subrayado en las siguientes frases: "Si A es menor que B", "Sea A menor que B", "A es menor que B implica", etc. Lo mismo puede decirse para los otros tres símbolos, que se leen "mayor que", "menor que o igual a" y "mayor que o igual a". Estas desigualdades se aplican sólo a los números reales. Sus propiedades se mencionaron brevemente en la sección 2-2 y con más detalles en la sección 7-2.

$\sqrt{A}$, $\|A\|$	"Raíz cuadrada de A", y "valor absoluto de A". Estos símbolos se estudiaron en las secciones 2-2 y 2-3 y en el Apéndice IV.

Geométrico

Conjuntos de puntos	Una sola letra puede representar cualquier conjunto de puntos que esté bien definido. De modo que podemos hablar del punto P, la recta m, un semiplano H, una circunferencia C, un ángulo x, un segmento b, etc.
$\overleftrightarrow{AB}$	La recta que contiene los dos puntos A y B (pág. 32).
$\overline{AB}$	El segmento de recta cuyos extremos son A y B (pág. 47).
$\overrightarrow{AB}$	La semirrecta cuyo extremo es A y que contiene el punto B (pág. 48).
$\angle ABC$	El ángulo cuyo vértice es el punto B y cuyos lados son las semirrectas $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ (pág. 77).
$\triangle ABC$	El triángulo cuyos vértices son A, B y C (pág. 78).
$\angle A\text{-}BC\text{-}D$	El ángulo diedro cuya arista es $\overleftrightarrow{BC}$ y cuyos lados contienen los puntos A y D (pág. 302).

Números reales

AB	El número positivo que es la distancia entre los dos puntos A y B, y también la longitud del segmento de recta $\overline{AB}$ (pág. 36).
$m\angle ABC$	El número real entre 0 y 180 que es la medida angular del $\angle ABC$ (pág. 87).

b

Relaciones

$\cong$ Congruencia. $A \cong B$ se lee "A es congruente a B", pero deben tenerse en cuenta las mismas posibles variaciones y restricciones que en el caso de $A = B$. En el texto, A y B pueden ser dos segmentos (pág. 114), dos ángulos (pág. 114), o dos triángulos (pág. 116), no necesariamente distintos.

$\perp$ Perpendicular. $A \perp B$ se lee "A es perpendicular a B", y en este caso pueden añadirse los mismos comentarios que en el caso de $\cong$. A y B pueden ser o bien dos rectas (pág. 92), dos planos (pág. 305), o una recta y un plano (pág. 231).

$\parallel$ Paralelo. $A \parallel B$ se lee "A es paralelo a B", siendo válidos en este caso los mismos comentarios que para $\cong$. A y B pueden ser o bien dos rectas (pág. 251), dos planos (pág. 295), o una recta y un plano (pág. 295).

Lista de Postulados

Postulado 1. (pág. 32) Dados dos puntos diferentes cualesquiera, habrá exactamente una recta que los contenga.

Postulado 2. (pág. 36) (Postulado de la distancia.) A cada par de puntos diferentes corresponde un número positivo único.

Postulado 3. (pág. 38) (Postulado de la regla.) Podemos establecer una correspondencia entre los puntos de una recta y los números reales de manera que

(1) A cada punto de la recta corresponde exactamente un número real,

(2) A cada número real corresponde exactamente un punto de la recta, y

(3) La distancia entre dos puntos es el valor absoluto de la diferencia de los números correspondientes.

Postulado 4. (pág. 42) (El postulado de colocación de la regla.) Dados dos puntos P y Q de una recta, se puede escoger el sistema de coordenadas de manera tal que la coordenada de P sea cero y la coordenada de Q sea positiva.

Postulado 5. (pág. 59)

(a) Todo plano contiene por lo menos tres puntos que no están alineados.

(b) El espacio contiene por lo menos cuatro puntos que no están en un plano.

Postulado 6. (pág. 61) Si dos puntos están en un plano, entonces la recta que los contiene está en el mismo plano.

Postulado 7. (pág. 62) Tres puntos cualesquiera están por lo menos en un plano, y tres puntos cualesquiera no alineados están exactamente en un plano. Más brevemente, tres puntos cualesquiera son coplanarios y tres puntos cualesquiera no alineados determinan un plano.

Postulado 8. (pág. 63) Si dos planos diferentes se cortan, su intersección es una recta.

Postulado 9. (pág. 69) (El postulado de separación del plano.)

Se da una recta y un plano que la contiene. Los puntos del plano que no están en la recta forman dos conjuntos tales que (1) cada uno de los conjuntos es convexo, (2) si P está en un conjunto y Q en el otro, entonces el segmento $\overline{PQ}$ corta a la recta.

Postulado 10. (pág. 71) (Postulado de separación del espacio.) Los puntos del espacio que no están en un plano dado forman dos conjuntos tales que (1) cada uno de los conjuntos es convexo, y (2) si P está en un conjunto y Q en el otro, entonces el segmento $\overline{PQ}$ corta al plano.

Postulado 11. (pág. 86) (El postulado de la medida de ángulos.) A cada ángulo $\angle BAC$ le corresponde un número real entre 0 y 180.

Postulado 12. (pág. 87) (El postulado de la construcción del ángulo.) Sea $\overrightarrow{AB}$ un rayo de la arista del semiplano H. Para cada número r entre 0 y 180 hay exactamente un rayo $\overrightarrow{AP}$, con P en H, tal que $m\angle PAB = r$.

Postulado 13. (pág. 87) (El postulado de la adición de ángulos.) Si D es un punto en el interior del $\angle BAC$, entonces $m\angle BAC = m\angle BAD + m\angle DAC$.

Postulado 14. (pág. 88) (El postulado del suplemento.) Si dos ángulos forman un par lineal, entonces son suplementarios.

Postulado 15. (pág. 120) (El postulado L.A.L.) Sea G una correspondencia entre dos triángulos (o la de un triángulo consigo mismo). Si dos lados y el ángulo comprendido del primer triángulo son congruentes a las partes correspondientes del segundo triángulo, entonces la correspondencia G es una congruencia.

Postulado 16. (pág. 261) (El postulado de las paralelas.)

f

Por un punto externo dado hay a lo sumo una recta paralela a una recta dada.

Postulado 17. (pág. 322) A toda región poligonal le corresponde un número positivo único.

Postulado 18. (pág. 322) Si dos triángulos son congruentes, entonces las regiones triangulares tienen la misma área.

Postulado 19. (pág. 323) Supongamos que la región R es la reunión de dos regiones R_1 y R_2. Supongamos que R_1 y R_2 se intersecan en a lo sumo un número finito de segmentos y puntos. Entonces el área de R es la suma de las áreas de R_1 y R_2.

Postulado 20. (pág. 325) El área de un rectángulo es el producto de la longitud de su base y la longitud de su altura.

Postulado 21. (pág. 548) El volumen de un paralepípedo rectangular es el producto de la altura por el área de la base.

Postulado 22. (pág. 550) (Principio de Cavalieri.) Dados dos sólidos y un plano, si para todo plano que interseca a los dos sólidos y es paralelo al plano dado, las dos intersecciones tienen áreas iguales, entonces los dos sólidos tienen el mismo volumen.

<u>Lista de Teoremas y Corolarios</u>

<u>Teorema 2-1</u>. (pág. 44) Sean A, B, C tres puntos en una recta, con coordenadas x, y, z. Si $x < y < z$, entonces B está entre A y C.

<u>Teorema 2-2</u>. (pág. 46) Para cada tres puntos cualesquiera de la misma recta, uno de ellos estará entre los otros dos.

<u>Teorema 2-3</u>. (pág. 47) De cada tres puntos diferentes de la misma recta, solamente uno estará entre los otros dos.

<u>Teorema 2-4</u>. (pág. 49) (El teorema de la localización de puntos.) Sea $\overrightarrow{AB}$ un rayo, y sea x un número positivo. Entonces existe exactamente un punto P en $\overrightarrow{AB}$ tal que $AP = x$.

<u>Teorema 2-5</u>. (pág. 50) Todo segmento tiene exactamente un punto medio.

<u>Teorema 3-1</u>. (pág. 59) Dos rectas diferentes se intersecan a lo sumo en un punto.

<u>Teorema 3-2</u>. (pág. 61) Si una recta interseca a un plano que no la contiene, entonces la intersección será un solo punto.

<u>Teorema 3-3</u>. (pág. 62) Dada una recta y un punto fuera de ella, hay exactamente un plano que los contiene a ambos.

<u>Teorema 3-4.</u> (pág. 62) Dadas dos rectas que se cortan, hay exactamente un plano que las contiene.

<u>Teorema 4-1</u>. (pág. 93) Si dos ángulos son complementarios, entonces ambos son agudos.

<u>Teorema 4-2</u>. (pág. 93) Todo ángulo es congruente consigo mismo.

<u>Teorema 4-3</u>. (pág. 93) Dos ángulos rectos cualesquiera son congruentes.

<u>Teorema 4-4</u>. (pág. 93) Si dos ángulos son a la vez congruentes y suplementarios, entonces cada uno de ellos es un ángulo recto.

<u>Teorema 4-5</u>. (pág. 93) Los suplementos de ángulos congruentes son congruentes.

Teorema 4-6. (pág. 94) Los complementos de ángulos congruentes son congruentes.

Teorema 4-7. (pág. 95) Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

Teorema 4-8. (pág. 95) Si dos rectas que se cortan forman un ángulo recto, entonces forman cuatro ángulos rectos.

Teorema 5-1. (pág. 114) Todo segmento es congruente consigo mismo.

Teorema 5-2. (pág. 134) Si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces los ángulos opuestos a estos lados son congruentes.

Corolario 5-2-1. (pág. 136) Todo triángulo equilátero es equiángulo.

Teorema 5-3. (pág. 136) Todo ángulo tiene exactamente una bisectriz.

Teorema 5-4. (pág. 140) (El teorema A.L.A.) Sea G una correspondencia entre dos triángulos (o entre un triángulo y él mismo). Si dos ángulos y el lado común del primer triángulo son congruentes a las partes correspondientes del segundo triángulo, entonces la correspondencia G es una congruencia.

Teorema 5-5. (pág. 141). Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, los lados opuestos a estos ángulos son congruentes.

Corolario 5-5-1. (pág. 141) Un triángulo equiángulo es equilátero.

Teorema 5-6. (pág. 145) (El teorema L.L.L.) Sea G una correspondencia entre dos triángulos (o entre un triángulo y él mismo). Si los tres pares de lados correspondientes son congruentes, entonces la correspondencia G es una congruencia.

Teorema 6-1. (pág. 179) En un plano dado, y por un punto dado de una recta dada en el plano, pasa una y solamente una recta perpendicular a la recta dada.

Teorema 6-2. (pág. 181) La mediatriz de un segmento, en un plano, es el conjunto de todos los puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento.

Teorema 6-3. (pág. 183) Desde un punto externo dado, hay a lo sumo una recta perpendicular a una recta dada.

Corolario 6-3-1. (pág. 184) A lo sumo un ángulo de un triángulo puede ser recto.

Teorema 6-4. (pág. 184) Desde un punto externo dado, hay por lo menos una recta perpendicular a una recta dada.

Teorema 6-5. (pág. 195) Si M está sobre la recta L, entre A y C, entonces M y A están al mismo lado de otra recta cualquiera L' que contenga a C.

Teorema 6-6. (pág. 195) Si M está entre A y C, y B es cualquier punto fuera de la recta $\overleftrightarrow{AC}$, entonces M está en el interior de $\angle ABC$.

Teorema 7-1. (pág. 206) (El teorema del ángulo externo.) Un ángulo externo de un triángulo es mayor que cualquiera de los ángulos internos no contiguos.

Corolario 7-1-1. (pág. 209) Si un triángulo tiene un ángulo recto, entonces los otros dos ángulos son agudos.

Teorema 7-2. (pág. 209) (El teorema L.A.A.) Sea G una correspondencia entre dos triángulos. Si dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos en un triángulo son congruentes con las partes correspondientes del segundo triángulo, entonces la correspondencia G es una congruencia.

Teorema 7-3. (pág. 211) (El teorema de la hipotenusa y el cateto.) Sea G una correspondencia entre dos triángulos rectángulos. Si la hipotenusa y un cateto de un triángulo son congruentes con las partes correspondientes del segundo triángulo, entonces la correspondencia G es una congruencia.

Teorema 7-4. (pág. 213) Si dos lados de un triángulo no son congruentes, entonces los ángulos opuestos a estos lados no son congruentes, y el ángulo mayor es el opuesto al lado mayor.

Teorema 7-5. (pág. 214) Si dos ángulos de un triángulo no son congruentes, entonces los lados opuestos a ellos no son congruentes, y el lado mayor es el opuesto al ángulo mayor.

Teorema 7-6. (pág. 219) El segmento más corto que va desde un punto a una recta es el segmento perpendicular a la recta.

k

Teorema 7-7. (pág. 219) (La desigualdad del triángulo.) La suma de las longitudes de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado.

Teorema 7-8. (pág. 222) Si dos lados de un triángulo son congruentes respectivamente con dos lados de un segundo triángulo, y el ángulo comprendido en el primer triángulo es mayor que el ángulo comprendido en el segundo, entonces el lado opuesto del primer triángulo es mayor que el lado opuesto del segundo.

Teorema 7-9. (pág. 224) Si dos lados de un triángulo son congruentes respectivamente con dos lados de un segundo triángulo, y el tercer lado del primer triángulo es más largo que el tercer lado del segundo, entonces el ángulo comprendido en el primer triángulo es mayor que el ángulo comprendido en el segundo.

Teorema 8-1. (pág. 233) Si cada uno de dos puntos de una recta está equidistante de dos puntos dados, entonces todo punto de la recta está equidistante de los puntos dados.

Teorema 8-2. (pág. 236) Si cada uno de tres puntos no alineados de un plano equidista de dos puntos, entonces todo punto del plano equidista de estos dos puntos.

Teorema 8-3. (pág. 237) Si una recta es perpendicular a cada una de dos rectas que se cortan, en su punto de intersección, entonces es perpendicular al plano de esas rectas.

Teorema 8-4. (pág. 241) Por un punto en una recta dada pasa un plano perpendicular a la recta.

Teorema 8-5. (pág. 242) Si una recta y un plano son perpendiculares, entonces el plano contiene todas las rectas perpendiculares a la recta dada en su punto de intersección con el plano dado.

Teorema 8-6. (pág. 243) Por un punto en una recta dada hay a lo más un plano perpendicular a la recta.

Teorema 8-7. (pág. 243) El plano perpendicular que biseca a un segmento es el conjunto de todos los puntos equidistantes de los extremos del segmento.

Teorema 8-8. (pág. 244) Dos rectas perpendiculares al mismo plano están en un mismo plano.

Teorema 8-9. (pág. 245) Por un punto dado pasa un plano y solamente uno, perpendicular a una recta dada.

Teorema 8-10. (pág. 246) Por un punto dado pasa una recta y solamente una, perpendicular a un plano dado.

Teorema 8-11. (pág. 246) El segmento más corto a un plano desde un punto fuera del plano es el segmento perpendicular.

Teorema 9-1. (pág. 252) Dos rectas paralelas están en exactamente un plano.

Teorema 9-2. (pág. 252) Dos rectas en un plano son paralelas si ambas son perpendiculares a la misma recta.

Teorema 9-3. (pág. 253) Sea L una recta, y sea P un punto que no está en L. Entonces hay al menos una recta, que pasa por P y es paralela a L.

Teorema 9-4. (pág. 255) Si dos rectas son cortadas por una secante, y si un par de ángulos alternos internos son congruentes, entonces el otro par de ángulos alternos internos son también congruentes.

Teorema 9-5. (pág. 256) Si dos rectas son cortadas por una secante, y si un par de ángulos alternos internos son congruentes, entonces las rectas son paralelas.

Teorema 9-6. (pág. 261) Si dos rectas son cortadas por una secante, y si un par de ángulos correspondientes son congruentes, entonces los otros tres pares de ángulos correspondientes tienen la misma propiedad.

Teorema 9-7. (pág. 261) Si dos rectas son cortadas por una secante, y si un par de ángulos correspondientes son congruentes, entonces las rectas son paralelas.

Teorema 9-8. (pág. 262) Si dos rectas paralelas son cortadas por una secante, entonces los ángulos alternos internos son congruentes.

Teorema 9-9. (pág. 263) Si dos rectas paralelas son cortadas por una secante, cada par de ángulos correspondientes son congruentes.

Teorema 9-10. (pág. 263) Si, dos rectas paralelas son cortadas por una secante, los ángulos internos a un mismo lado de la secante son suplementarios.

Teorema 9-11. (pág. 264) En un plano, dos rectas paralelas a la misma recta son paralelas entre sí.

Teorema 9-12. (pág. 264) En un plano, si una recta es perpendicular a una de dos rectas paralelas, es perpendicular a la otra.

Teorema 9-13. (pág. 266) La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180.

Corolario 9-13-1. (pág. 267) Sea dada una correspondencia entre dos triángulos. Si dos pares de ángulos correspondientes son congruentes, entonces el tercer par de ángulos correspondientes son también congruentes.

Corolario 9-13-2. (pág. 268) Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.

Corolario 9-13-3. (pág. 268) En todo triángulo, la medida de un ángulo externo es la suma de las medidas de los dos ángulos internos no contiguos.

Teorema 9-14. (pág. 273) Cada diagonal separa a un paralelogramo en dos triángulos congruentes.

Teorema 9-15. (pág. 273) En un paralelogramo, dos lados opuestos cualesquiera son congruentes.

Corolario 9-15-1. (pág. 273) Si $L_1 \parallel L_2$ y si P y Q son dos puntos cualesquiera en L_1, entonces las distancias de P y Q a L_2 son iguales.

Teorema 9-16. (pág. 273) En un paralelogramo, dos ángulos opuestos cualesquiera son congruentes.

Teorema 9-17. (pág. 273) En un paralelogramo, dos ángulos consecutivos cualesquiera son suplementarios.

Teorema 9-18. (pág. 273) Las diagonales de un paralelogramo se bisecan.

Teorema 9-19. (pág. 274) Dado un cuadrilátero en el que ambos pares de lados opuestos son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

Teorema 9-20. (pág. 274) Si dos lados de un cuadrilátero son paralelos y congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

Teorema 9-21. (pág. 274) Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

Teorema 9-22. (pág. 274) El segmento entre los dos puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene la mitad de su longitud.

Teorema 9-23. (pág. 276) Si un paralelogramo tiene un ángulo recto, entonces tiene cuatro ángulos rectos, y el paralelogramo es un rectángulo.

Teorema 9-24. (pág. 276) En un rombo, las diagonales son perpendiculares entre sí.

Teorema 9-25. (pág. 276) Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan y son perpendiculares, entonces el cuadrilátero es un rombo.

Teorema 9-26. (pág. 281) Si tres rectas paralelas recortan segmentos congruentes en una secante, entonces recortan segmentos congruentes en cualquier otra secante.

Corolario 9-26-1. (pág. 283) Si tres o más rectas paralelas recortan segmentos congruentes en una secante, entonces recortan segmentos congruentes en cualquier otra secante.

Teorema 9-27. (pág. 284) Las medianas de un triángulo son concurrentes en un punto que está a dos tercios de la distancia de cualquier vértice al punto medio del lado opuesto.

Teorema 10-1. (pág. 296) Si un plano corta a dos planos paralelos, entonces la intersección consiste en dos rectas paralelas.

Teorema 10-2. (pág. 296) Si una recta es perpendicular a uno de dos planos paralelos, es perpendicular al otro.

Teorema 10-3. (pág. 297) Dos planos perpendiculares a la misma recta son paralelos.

Corolario 10-3-1. (pág. 297) Si dos planos son paralelos a un tercer plano, son paralelos entre sí.

Teorema 10-4. (pág. 298) Dos rectas perpendiculares al mismo plano son paralelas.

Corolario 10-4-1. (pág. 298) Un plano perpendicular a una de dos rectas paralelas es perpendicular a la otra.

Corolario 10-4-2. (pág. 298) Si dos rectas son paralelas a una tercera, son paralelas entre sí.

Teorema 10-5. (pág. 299) Dos planos paralelos son equidistantes en toda su extensión.

Teorema 10-6. (pág. 304) Dos ángulos rectilíneos cualesquiera de un ángulo diedro dado son congruentes.

Corolario 10-6-1. (pág. 305) Si una recta es perpendicular a un plano, entonces cualquier plano que contenga esta recta es perpendicular al plano dado.

Corolario 10-6-2. (pág. 305) Si dos planos son perpendiculares, entonces cualquier recta en uno de ellos perpendicular a su recta de intersección, es perpendicular al otro plano.

Teorema 10-7. (pág. 309) La proyección de una recta sobre un plano es una recta, a menos que la recta y el plano sean perpendiculares.

Teorema 11-1. (pág. 330) El área de un triángulo rectángulo es la mitad del producto de sus catetos.

Teorema 11-2. (pág. 331) El área de un triángulo es la mitad del producto de cualquiera de sus bases y la altura a esa base.

Teorema 11-3. (pág. 333) El área de un paralelogramo es el producto de cualquiera de sus bases y la correspondiente altura.

Teorema 11-4. (pág. 334) El área de un trapecio es la mitad del producto de su altura y la suma de sus bases.

Teorema 11-5. (pág. 335) Si dos triángulos tienen alturas iguales, entonces la razón de sus áreas es igual a la razón de sus bases.

Teorema 11-6. (pág. 335) Si dos triángulos tienen alturas iguales y bases iguales, entonces tienen áreas iguales.

Teorema 11-7. (pág. 341) (El teorema de Pitágoras.) En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Teorema 11-8. (pág. 343) Si el cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, entonces el triángulo es rectángulo, con un ángulo recto opuesto al primer lado.

Teorema 11-9. (pág. 348) (El teorema del triángulo 30-60.) La hipotenusa de un triángulo rectángulo es dos veces el largo de un cateto si, y solamente si, las medidas de los ángulos son 30 y 60.

Teorema 11-10. (pág. 348) (El teorema del triángulo rectángulo isósceles.) Un triángulo rectángulo es isósceles si, y solamente si, la hipotenusa es $\sqrt{2}$ veces el largo de un cateto.

Teorema 12-1. (pág. 368) (El teorema fundamental de la proporcionalidad.) Si una recta paralela a un lado de un triángulo, corta a los otros dos lados en puntos distintos, entonces determina sobre ellos segmentos que son proporcionales a estos lados.

Teorema 12-2. (pág. 369) Si una recta corta a dos lados de un triángulo, y determina segmentos proporcionales a esos dos lados, entonces es paralela al tercer lado.

Teorema 12-3. (pág. 374) (El teorema de semejanza A.A.A.) Sea S una correspondencia entre dos triángulos. Si los ángulos correspondientes son congruentes, entonces la correspondencia S es una semejanza.

Corolario 12-3-1. (pág. 376) (El corolario A.A.) Sea S una correspondencia entre dos triángulos. Si dos pares de ángulos correspondientes son congruentes, entonces la correspondencia S es una semejanza.

Corolario 12-3-2. (pág. 376) Si una recta paralela a un lado de un triángulo interseca a los otros dos lados en puntos distintos, entonces determina un triángulo semejante al triángulo dado.

Teorema 12-4. (pág. 376) (El teorema de la semejanza L.A.L.) Sea S una correspondencia entre dos triángulos. Si dos pares de lados correspondientes son proporcionales y los dos ángulos comprendidos son congruentes, entonces la correspondencia S es una semejanza.

Teorema 12-5. (pág. 378) (El teorema de semejanza L.L.L.) Sea S una correspondencia entre dos triángulos. Si los lados correspondientes son proporcionales, entonces la correspondencia S es una semejanza.

Teorema 12-6. (pág. 390) En cualquier triángulo rectángulo, la altura correspondiente a la hipotenusa divide al triángulo en dos triángulos que son semejantes uno a otro y también semejantes al triángulo original.

Corolario 12-6-1. (pág. 391) Dado un triángulo rectángulo y la altura desde el vértice del ángulo recto a la hipotenusa,

(1) la altura es la media geométrica de los segmentos en que divide a la hipotenusa, y

(2) cada cateto es la media geométrica entre la hipotenusa y el segmento de la hipotenusa adyacente a ese cateto.

Teorema 12-7. (pág. 394) La razón de las áreas de dos triángulos semejantes es el cuadrado de la razón de dos lados correspondientes.

Teorema 13-1. (pág. 410) La intersección de una superficie esférica con un plano que pasa por su centro es una circunferencia con el mismo centro y el mismo radio.

Teorema 13-2. (pág. 414) Dadas una recta y una circunferencia en el mismo plano, sea P el centro de la circunferencia y sea F el pie de la perpendicular trazada por P, a la recta. Entonces, o bien

(1) Todo punto de la recta es exterior a la circunferencia, o

(2) F está en la circunferencia, y la recta es tangente a la circunferencia en el punto F, o

(3) F es interior a la circunferencia, y la recta interseca a la circunferencia exactamente en dos puntos que equidistan de F.

Corolario 13-2-1. (pág. 417) Toda recta tangente a C es perpendicular al radio trazado por el punto de contacto.

Corolario 13-2-2. (pág. 417) Toda recta en E, perpendicular a un radio en su extremo exterior, es tangente a la circunferencia.

Corolario 13-2-3. (pág. 417) Toda perpendicular desde el centro de C a una cuerda biseca a esta cuerda.

Corolario 13-2-4. (pág. 417) El segmento que une el centro de C con el punto medio de una cuerda es perpendicular a la cuerda.

Corolario 13-2-5. (pág. 417) En el plano de una circunferencia, la mediatriz de una cuerda pasa por el centro de la circunferencia.

Corolario 13-2-6. (pág. 417) Si una recta en el plano de una circunferencia interseca al interior de la circunferencia, entonces corta a la circunferencia en exactamente dos puntos.

Teorema 13-3. (pág. 417) En la misma circunferencia o en circunferencias congruentes, las cuerdas equidistantes del centro son congruentes.

Teorema 13-4. (pág. 418) En la misma circunferencia o en circunferencias congruentes, cada dos cuerdas congruentes equidistan del centro.

Teorema 13-5. (pág. 425) Dados un plano E y una superficie esférica S con centro en P, sea F el pie del segmento perpendicular desde P a E. Entonces, o bién

(1) Todo punto de E es exterior a S, o

(2) F está en S, y E es tangente a S en F, o

(3) F es interior a S, y la intersección de S y E consiste en una circunferencia con centro F.

Corolario 13-5-1. (pág. 427) Un plano tangente a S es perpendicular al radio trazado por el punto de contacto.

Corolario 13-5-2. (pág. 427) Un plano perpendicular a un radio en su extremo exterior es tangente a S.

Corolario 13-5-3. (pág. 428) Una perpendicular desde P a una cuerda de S biseca a la cuerda.

Corolario 13-5-4. (pág. 428) El segmento que une el centro de S con el punto medio de una cuerda es perpendicular a la cuerda.

Teorema 13-6. (pág. 433) Si $\widehat{AB}$ y $\widehat{BC}$ son arcos de la misma circunferencia que tienen común sólo el punto B, y si su reunión es un arco $\widehat{AC}$, entonces $m\widehat{AB} + m\widehat{BC} = m\widehat{AC}$.

Teorema 13-7. (pág. 436) La medida de un ángulo inscrito es la mitad de la medida de su arco interceptado.

Corolario 13-7-1. (pág. 438) Un ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.

Corolario 13-7-2. (pág. 438) Angulos inscritos en el mismo arco son congruentes.

Teorema 13-8. (pág. 442) En la misma circunferencia, o en circunferencias congruentes, si dos cuerdas son congruentes, entonces también lo son los arcos menores correspondientes.

Teorema 13-9. (pág. 442) En la misma circunferencia, o en circunferencias congruentes, si dos arcos son congruentes, entonces también lo son sus cuerdas correspondientes.

Teorema 13-10. (pág. 443) Dado un ángulo con el vértice en la circunferencia, formado por un rayo secante y un rayo tangente, la medida del ángulo es la mitad de la medida del arco interceptado.

Teorema 13-11. (pág. 449) Los dos segmentos tangentes a una circunferencia desde un punto exterior son congruentes y forman ángulos congruentes con la recta que une el punto exterior y el centro de la circunferencia.

Teorema 13-12. (pág. 451) Dada una circunferencia C y un punto exterior Q, sea L_1 una recta secante que pase por Q, y que corta a C en los puntos R y S; sea L_2 otra recta secante que pase por Q, y que corta a C en los puntos T y U. Entonces $QR \cdot QS = QU \cdot QT$.

Teorema 13-13. (pág. 452) Dado un segmento tangente $\overline{QT}$ a la circunferencia, y una recta secante pasando por Q y que corta a la circunferencia en los puntos R y S, entonces

$$QR \cdot QS = QT^2 .$$

Teorema 13-14. (pág. 453) Si dos cuerdas se intersecan en el interior de una circunferencia, el producto de las longitudes de los segmentos de una de las cuerdas es igual al producto de las longitudes de los segmentos de la otra.

Teorema 14-1. (pág. 469) La bisectriz de un ángulo menos su extremo, es el conjunto de los puntos del interior del ángulo equidistante de los lados de dicho ángulo.

Teorema 14-2. (pág. 471) Las mediatrices de los lados de un triángulo concurren en un punto equidistante de los tres vértices del triángulo.

<u>Corolario</u> <u>14-2-1</u>. (pág. 472) Existe una circunferencia y sólo una que pasa por tres puntos no alineados.

<u>Corolario</u> <u>14-2-2</u>. (pág. 472) Dos circunferencias distintas pueden intersecarse a lo más en dos puntos.

<u>Teorema</u> <u>14-3</u>. (pág. 472) Las tres alturas de un triángulo son concurrentes.

<u>Teorema</u> <u>14-4</u>. (pág. 473) Las bisectrices de los ángulos de un triángulo concurren en un punto equidistante de los tres lados.

<u>Teorema</u> <u>14-5</u>. (pág. 479) (El teorema de las dos circunferencias.) Si dos circunferencias tienen radios a y b, y si c es la distancia entre sus centros, entonces las circunferencias se intersecan en dos puntos, uno a cada lado de la recta de los centros, con tal que cada una de las cantidades a, b, c sea menor que la suma de las otras dos.

<u>Construcción</u> <u>14-6</u>. (pág. 480) Reproducir un triángulo dado.

<u>Construcción</u> <u>14-7</u>. (pág. 482) Reproducir un ángulo dado.

<u>Construcción</u> <u>14-8</u>. (pág. 483) Construir la mediatriz de un segmento dado.

<u>Corolario</u> <u>14-8-1</u>. (pág. 484) Bisecar un segmento dado.

<u>Construcción</u> <u>14-9</u>. (pág. 484) Trazar por un punto dado una perpendicular a una recta dada.

<u>Construcción</u> <u>14-10</u>. (pág. 486) Trazar una paralela a una recta dada por un punto exterior dado.

<u>Construcción</u> <u>14-11</u>. (pág. 486) Dividir un segmento en un cierto número dado de segmentos congruentes.

<u>Construcción</u> <u>14-12</u>. (pág. 493) Circunscribir una

circunferencia a un triángulo dado.

Construcción 14-13. (pág. 493) Bisecar un ángulo dado.

Construcción 14-14. (pág. 494) Inscribir una circunferencia en un triángulo dado.

Teorema 15-1. (pág. 519) La razón $\frac{C}{2r}$, de la longitud de la circunferencia al diámetro, es la misma para todas las circunferencias.

Teorema 15-2. (pág. 524) El área de un círculo de radio r es πr^2.

Teorema 15-3. (pág. 528) Si dos arcos tienen radios iguales, sus longitudes son proporcionales a sus medidas.

Teorema 15-4. (pág. 529) Un arco de medida q y de radio r, tiene una longitud igual a $\frac{\pi}{180} q r$.

Teorema 15-5. (pág. 529) El área de un sector es igual a la mitad del producto de su radio por la longitud de su arco.

Teorema 15-6. (pág. 530) El área de un sector de radio r cuyo arco tiene medida q es $\frac{\pi}{360} q r^2$.

Teorema 16-1. (pág. 537) Todas las secciones transversales de un prisma triangular son congruentes con la base.

Corolario 16-1-1. (pág. 538) Las bases inferior y superior de un prisma triangular son congruentes.

Teorema 16-2. (pág. 538) (Teorema de la sección transversal del prisma.) Todas las secciones transversales de un prisma tienen la misma área.

Corolario 16-2-1. (pág. 539) Las dos bases de un prisma tienen áreas iguales.

Teorema 16-3. (pág. 539) Las caras laterales de un prisma son regiones paralelográmicas, y las caras laterales de un prisma recto son regiones rectangulares.

Teorema 16-4. (pág. 542) Una sección transversal de una pirámide triangular, por un plano paralelo a la base y entre ésta y el vértice, es una región triangular semejante a la base. Si la distancia del vértice al plano de la sección transversal es k y la altura es h, entonces la razón del área de la sección transversal al área de la base es $(\frac{k}{h})^2$.

Teorema 16-5. (pág. 544) En toda pirámide, la razón del área de una sección transversal al área de la bace es $(\frac{k}{h})^2$, siendo h la altura de la pirámide y k la distancia del vértice al plano de la sección transversal.

Teorema 16-6. (pág. 545) (Teorema de la sección transversal de la pirámide.) Dadas dos pirámides de la misma altura, si las bases tienen la misma área, entonces las secciones transversales equidistantes de las bases tienen también la misma área.

Teorema 16-7. (pág. 550) El volumen de un prisma cualquiera es el producto de la altura por el área de la base.

Teorema 16-8. (pág. 551) Si dos pirámides tienen la misma altura y la misma área de la base, entonces tienen el mismo volumen.

Teorema 16-9. (pág. 552) El volumen de una pirámide triangular es un tercio del producto de su altura por el área de su base.

Teorema 16-10. (pág. 553) El volumen de una pirámide es un tercio del producto de su altura por el área de su base.

Teorema 16-11. (pág. 557) Una sección transversal de un cilindro circular es una región circular congruente con la base.

Teorema 16-12. (pág. 557) El área de una sección transversal de un cilindro circular es igual al área de la base.

Teorema 16-13. (pág. 557) Una sección transversal de un cono de altura h, producida por un plano a una distancia k del vértice, es una región circular cuya área está con el área de la base en la razón $(\frac{k}{h})^2$.

Teorema 16-14. (pág. 559) El volumen de un cilindro circular es el producto de la altura por el área de la base.

Teorema 16-15. (pág. 559) El volumen de un cono circular es un tercio del producto de la altura por el área de la base.

Teorema 16-16. (pág. 561) El volumen de una esfera de radio r es $\frac{4}{3} \pi r^3$.

Teorema 16-17. (pág. 564) El área de una superficie esférica de radio r es $S = 4 \pi r^2$.

Teorema 17-1. (pág. 581) Todos los segmentos de una recta no vertical tienen la misma pendiente.

Teorema 17-2. (pág. 588) Dos rectas no verticales son paralelas si, y solamente si, sus pendientes son iguales.

Teorema 17-3. (pág. 589) Dos rectas no verticales son perpendiculares si, y solamente si, la pendiente de una de ellas es el recíproco negativo de la pendiente de la otra.

Teorema 17-4. (pág. 592) (La fórmula de la distancia.) La distancia entre los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es igual a

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

Teorema 17-5. (pág. 596) (La fórmula del punto medio.) Sean dados $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$. Entonces el punto medio de $\overline{P_1P_2}$ es el punto

$$P = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\ ,\ \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Teorema 17-6. (pág. 610) Sea L una recta no vertical con

y

pendiente m, y sea P un punto de L, con coordenadas (x_1, y_1). Todo punto Q = (x, y) de L satisface a la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Teorema 17-7. (pág. 611) La gráfica de la ecuación

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

es la recta que pasa por el punto (x_1, y_1) y tiene pendiente igual a m.

Teorema 17-8. (pág. 616) La gráfica de la ecuación

$$y = mx + b$$

es la recta con pendiente m y ordenada en el origen igual a b.

Teorema 17-9. (pág. 618) Toda recta en el plano es la gráfica de una ecuación lineal en x e y.

Teorema 17-10. (pág. 618) La gráfica de una ecuación lineal en x e y es siempre una recta.

Teorema 17-11. (pág. 629) La gráfica de la ecuación

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

es una circunferencia con centro en (a, b) y radio r.

Teorema 17-12. (pág. 631) Toda circunferencia es la gráfica de una ecuación de la forma

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0.$$

Teorema 17-13. (pág. 632) Dada la ecuación

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0,$$

la gráfica de esta ecuación es (1) una circunferencia, (2) un punto, o (3) el conjunto vacío.

INDICE DE DEFINICIONES

Para los términos geométricos definidos con precisión, la referencia dada en este Indice corresponde a la definición formal. La referencia correspondiente a los demás términos alude a una definición informal o a la discusión más destacada sobre ellos.