DOCUMENT RESUME

ED 187 518 SE 030 374

AUTHOR	Allen, Frank B.; And Others
TITLE	Matematica Para La Escuela Secundaria: Geometria (Parte 1). Traduccion Preliminar de la Edicion Inglesa Revisada. (Mathematics for High School: Geometry, Part 1. Preliminary Translation of the Revised English Edition).
INSTITUTION	Stanford Univ., Calif. School Mathematics Study Group.
SPONS AGENCY	National Science Foundation, Washington, D.C.
PUB DATE	63
NOTE	368p.; For related document in Spanish, see SE 030 375.
LANGUAGE	Spanish
EDRS PRICE	MF01/PC15 Plus Postage.
DESCRIPTORS	*Bilingual Education; *Geometry; *Instructional Materials; Mathematics Curriculum; Mathematics Education; Mathematics Instruction; *Secondary Education; *Secondary School Mathematics; *Textbooks
IDENTIFIERS	*School Mathematics Study Group

ABSTRACT

This is part one of a two-part SMSG mathematics text for high school students. Topics include plane geometry, real numbers, triangles and angles, congruence, construction, parallel lines, perpendicular lines, and parallelograms. The text is written in Spanish. (RH)

GRUPO DE ESTUDIO DE LA MATEMATICA ESCOLAR

MATEMATICA PARA LA ESCUELA SECUNDARIA

GEOMETRIA (Parte 1)

(Traducción preliminar de la edición inglesa revisada)

SMSG

MATEMATICA PARA LA ESCUELA SECUNDARIA

GEOMETRIA (Parte 1)

(Traducción preliminar de la edición inglesa revisada)

Texto preparado bajo la supervisión del Personal de las Muestras de Libros de Texto, del Grupo de Estudio de la Matemática Escolar:

Frank B. Allen, Escuela Secundaria del Pueblo de Lyons

Edwin C. Douglas, Escuela Taft

Donald E. Richmond, Colegio Williams

Charles E. Rickart, Universidad de Yale

Henry Swain, Escuela Secundaria del Pueblo de New Trier

Robert J. Walker, Universidad de Cornell

El apoyo financiero para el Grupo de Estudio de la Matemática Escolar provino de la Fundación Nacional de Ciencias.

Proyecto de Traducción al Español

Comisión Consultiva

Edward G. Begle, Universidad de Stanford

Howard F. Fehr, Universidad de Columbia

Mariano García, Universidad de Puerto Rico

Max Kramer, San Jose State College

PROLOGO

La creciente contribución de las matemáticas a la cultura del mundo moderno, y su importancia como parte vital de la educación científica y humanística, han hecho necesario que las matemáticas del programa escolar se seleccionen juiciosamente y que se enseñen bien en nuestras escuelas.

Tomando esto en consideración, las organizaciones de matemáticas en los Estados Unidos cooperaron en la formación del Grupo de Estudio de la Matemática Escolar (SMSG). Este grupo lo constituyen matemáticos de colegios y universidades, maestros de matemáticas de todos los niveles, expertos en educación y representantes de la ciencia y la tecnología. El propósito general del SMSG es el mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas en las escuelas de los Estados Unidos. La Fundación Nacional de Ciencias ha provisto fondos sustanciales para el financiamiento de esta labor.

Uno de los prerrequisitos para el mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas en nuestras escuelas es un mejor programa de estudios, un programa que tome en consideración el uso creciente de las matemáticas en la ciencia, la tecnología y otros campos del conocimiento y que, a la vez, refleje los avances recientes de las matemáticas mismas. Uno de los primeros proyectos del SMSG fue reclutar un grupo de matemáticos y maestros de matemáticas distinguidos para preparar una serie de libros de texto ilustrativos de un programa de estudios como el ya mencionado.

Los matemáticos profesionales en el SMSG creen que el contenido matemático presentado en este texto es valioso para todos los ciudadanos cultos de nuestra sociedad, y que su aprendizaje es importante para los estudiantes que van a ingresar en universidades, como preparación para estudios avanzados en este campo. Al mismo tiempo, los maestros en el SMSG creen que la forma en que aquí se presenta el material de estudio facilita al estudiante su asimilación.

En la mayoría de los casos el material parecerá familiar, pero su presentación y punto de vista serán diferentes. Algún material será completamente nuevo en relación con los programas de estudios tradicionales. Así debe ser, porque las matemáticas constituyen una disciplina viva y en constante crecimiento y no un producto inerte y rígido de la antigüedad. Esta fusión saludable entre lo antiguo y lo nuevo debe guiar a los estudiantes hacia una mejor comprensión de los conceptos básicos y de la estructura de las matemáticas y ofrecer una base sólida para la comprensión y el uso de las matemáticas en una sociedad científica.

No pretendemos que este libro se considere como la única manera definitiva de presentar correctamente las matemáticas a los estudiantes en este nivel. En cambio debe considerarse como una muestra de la clase de programa de estudios que necesitamos y como una fuente de sugerencias para los autores de textos comerciales. Esperamos sinceramente que estos textos señalen el camino hacia una enseñanza más inspirada y significativa de las matemáticas, disciplina que es la reina y sierva de las ciencias.

TABLA DE MATERIAS

Capítulo

PREFACIO

Este libro se proyectó para el curso de introducción a la geometría que se enseña generalmente durante el décimo grado escolar (edades de 15 a 17 años). A estas alturas los alumnos ya han aprendido bastante geometría intuitiva, incluyendo el cómputo de áreas y volúmenes de las figuras más conocidas, la relación pitagórica y el uso de los triángulos rectángulos semejantes en el cálculo de alturas y distancias no dadas. Aquellos alumnos que no hayan tratado estas cuestiones posiblemente necesitarán horas extraordinarias de esfuerzo, pero aún así podrán estudiar el libro aunque sea a un ritmo algo más lento. En cuanto al álgebra, no se requieren conocimientos y destrezas adicionales a los que normalmente se aprenden en el curso anterior de noveno grado.

El libro se dedica principalmente a la geometría del plano; tiene también unos pocos capítulos de la geometría del espacio y al final una breve introducción a la geometría analítica. Parece natural, en un prefacio, explicar las novedades que ofrece el libro. Comprendemos, desde luego, el peligro envuelto. Una larga lista de innovaciones ofrecida para llamar la atención del lector, puede muy bien dar la impresión de que los autores se han dedicado al indeseable propósito de hacer cambios por el mero gusto de hacerlos. No ha sido éste nuestro propósito. Desde el principio hasta el final hemos tenido la firme convicción de que el contexto tradicional de la geometría de Euclides justifica con creces el puesto eminente que ocupa en los estudios de la enseñanza secundaria; los cambios que hicimos los hemos creído imperativos.

El esquema fundamental de los postulados es el de G. D. Birkhoff. En él se supone el conocimiento de los números reales y se emplean éstos libremente en la medida de distancias y ángulos, lo que conlleva dos ventajas principales.

En primer lugar, los números reales nos dan en cierto modo una ventaja inicial. Se ha señalado acertadamente que los postulados de Euclides no bastan como fundamento lógico de la geometría y que el desarrollo de ésta sobre tal base no alcanza el debido rigor según se exige hoy en día. Hilbert mejoró, a la vez que aclaró, los postulados de Euclides. Pero los fundamentos de la geometría, a la manera de Hilbert, no son parte de la matemática elemental y no caben en el programa del décimo grado. Si suponemos los números reales, como lo hace Birkhoff, entonces podremos manejar más fácilmente nuestros postulados y no tendremos que vernos en la molesta disyuntiva de elegir entre exactitud matemática e inteligibilidad.

En segundo lugar, parece una buena idea relacionar la geometría con el álgebra, en tanto sea posible hacerlo, de manera que el conocimiento en uno de estos campos contribuya lógicamente a la mejor comprensión de ambas materias. Algunos de los temas estudiados en la geometría son esencialmente algebraicos. Esto es cierto, por ejemplo, en cuanto a las relaciones de proporcionalidad en los triángulos semejantes. En este libro discutiremos tales temas algebraicamente para así destacar cómo se relacionan con el trabajo de los grados noveno y undécimo.

Esperamos que los enunciados de las definiciones y teoremas sean precisos; nos hemos esforzado porque lo sean. Lo mismo que un abogado necesita aprender a redactar contratos que digan lo que se quiere que digan, así un estudiante de matemática necesita aprender a escribir oraciones matemáticas que puedan aceptarse literalmente. Sin embargo, no nos hacemos ilusiones en cuanto a que este tipo de precisión pueda sustituir la penetración intuitiva. Por eso, basamos el plan del texto y de los problemas en nuestra creencia de que la intuición y la lógica deben marchar cogidas del brazo.

Capítulo 1

EL SENTIDO COMUN Y EL SABER SISTEMATICO

1-1. Dos tipos de problemas

Considera los siguientes problemas:

1. Un segmento rectilíneo de 14 pulgadas de longitud se parte en dos. Si una de las partes es de 6 pulgadas, ¿cuál es la longitud de la otra?

2. En un cierto rectángulo, la suma de su longitud y anchura es 14 (medida de pulgadas). Un segundo rectángulo tiene de longitud tres veces la longitud del primero, y de anchura el doble. El perímetro del segundo rectángulo es 72. ¿Cuáles son las dimensiones del primer rectángulo?

La respuesta del problema 1 es, desde luego, 8 pulgadas, ya que $6 + 8 = 14$. Podríamos resolver este problema algebraicamente, si quisiéramos, formulando la ecuación

$$6 + x = 14,$$

y resolviéndola para obtener $x = 8$. Pero esto parece un poco trivial, por ser tan innecesario. Si todas las ecuaciones algebraicas fueran así de superfluas, ninguna persona sería se preocuparía por ellas; en verdad, lo más probable es que jamás las hubieran inventado.

El problema 2, sin embargo, es otra cosa. Si la longitud y la anchura del primer rectángulo fueran x e y, entonces la longitud y anchura del segundo rectángulo serían $3x$ y $2y$. Por lo tanto,

$$3x + 2y = \frac{1}{2} \cdot 72 = 36$$

porque la suma de la longitud y anchura es la mitad del perímetro. Sabemos ya que $x + y = 14$. Así es que tenemos un sistema de dos ecuaciones lineales en dos incógnitas:

$$x + y = 14$$
$$3x + 2y = 36$$

Para resolverlo, multiplicamos cada término de la primera ecuación por 2, obteniendo

$$2x + 2y = 28,$$

y luego restamos esta ecuación, término a término, de la segunda. Esto nos da

$$x = 8.$$

Toda vez que $x + y = 14$, tenemos que $y = 6$, lo que completa la solución de nuestro problema. Es fácil comprobar que una longitud de 8 y una anchura de 6 satisfacen las condiciones del problema.

En cierto modo, estos dos problemas parecen análogos. Pero, en un sentido muy importante, son diferentes. El primero es lo que llamarías un problema de sentido común. Es muy fácil anticipar cuál debe ser la respuesta, y también es muy fácil comprobar que la contestación prevista es en realidad la correcta. El segundo problema es muy distinto. Para resolverlo necesitamos saber algo acerca de los métodos matemáticos.

Hay casos parecidos en la geometría. Considera los siguientes enunciados:

1. Si un triángulo tiene lados con longitudes 3, 4 y 5, es rectángulo y tiene un ángulo recto opuesto al lado mayor.

2. Consideremos un triángulo con lados a, b y c. Si

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

el triángulo es rectángulo y tiene un ángulo recto opuesto al lado mayor.

El primero de estos enunciados era conocido de los antiguos egipcios. Lo comprobaron mediante la experimentación. También tú puedes comprobarlo, con regla y compás, dibujando un triángulo de lados 3-4-5, y luego midiendo con un transportador el ángulo opuesto al lado mayor. Deberás tener en cuenta, sin embargo, que este tipo de comprobación es solamente aproximado. Por ejemplo, si el ángulo tuviera realmente 89° 59' 59", en vez de 90°, difícilmente podrías notar la diferencia a base meramente de la figura que dibujas y la medida que tomas con tu transportador. Sin embargo, el "método egipcio" es un método de sano sentido común para comprobar un hecho experimental.

Los egipcios tenían gran destreza para medir objetos físicos. Las aristas de la base de la gran pirámide tienen cerca de 756 pies de largo; y las longitudes de estas cuatro aristas coinciden salvo un error de unos dos tercios de pulgada. Nadie parece saber, hoy día, cómo los constructores lograron tal grado de exactitud.

El segundo de los enunciados anteriores era desconocido de los egipcios; se descubrió más tarde por los griegos. Este segundo enunciado es muy diferente del primero. La diferencia fundamental estriba en que hay infinitas posibilidades para a, b y c. Por ejemplo, tendrías que construir triángulos, y tomar medidas con el transportador, para todos los casos siguientes:

a	b	c
1	1	$\sqrt{2}$
2	1	$\sqrt{5}$
2	2	$\sqrt{8}$
3	1	$\sqrt{10}$
3	2	$\sqrt{13}$
3	3	$\sqrt{18}$

y así sucesivamente, sin acabar nunca. Parece estéril el querer verificar nuestro enunciado general mediante un experimento, ni siquiera en forma aproximada. Por eso, una persona razonable no quedará convencida de que el segundo enunciado es cierto en todos los casos hasta que vea alguna razón lógica que implique su certeza en todos los casos.

En realidad, por eso fueron los griegos, y no los egipcios, quienes descubrieron que nuestro segundo enunciado es cierto. Los egipcios tenían muchos conocimientos de geometría del tipo que llamamos de sentido común. Pero los griegos hallaron algo mejor, y mucho más poderoso: descubrieron la ciencia del correcto razonamiento geométrico. Mediante el razonamiento correcto aprendieron muchas cosas desconocidas anteriormente. Lo que aprendieron constituyó el primer paso de avance hacia la matemática moderna, y, por lo tanto, hacia la ciencia moderna en general.

Conjunto de problemas 1-1

1. Trata el siguiente experimento. Coge un pedazo de cordel, como de seis pies de largo, y colócalo en el piso formando un lazo con sus extremos sueltos:

Luego, tira de los extremos del cordel, estrechando el lazo hasta que te parezca que está del tamaño de tu cintura. Comprueba tu cálculo, midiendo tu cintura con el cordel. Después que hagas eso, lee la observación que hay al final de este conjunto de problemas.

2. De este par de preguntas, la primera se puede contestar por "sentido común". Da solamente la respuesta. La segunda requiere alguna aritmética o proceso algebraico para su solución. Muestra el trabajo que hiciste para encontrarla.
   a. ¿Cuál es la mitad de 2?
   b. ¿Cuál es la mitad de 135,790?
3. Contesta cómo lo hiciste en el problema 2:
   a. Un tercio de la distancia entre dos ciudades es 10 millas. ¿Cuál es la distancia completa?

b. La distancia entre dos ciudades es 7 millas más que un tercio de la distancia entre ellas. ¿Cuál es esa distancia?

*4. Contesta como en el problema 2:

a. Si un pedazo de alambre de 5 pulgadas se corta en dos partes de manera que el largo de una parte sea 4 veces el de la otra, ¿qué largo tiene cada parte?

b. Si un pedazo de alambre de 5 pulgadas se corta en dos partes tales que el cuadrado formado doblando un pedazo tiene cuatro veces el área del cuadrado que se forma doblando el otro, ¿qué largo tiene cada parte?

5. Si los lados de un triángulo son 5, 12 y 13, ¿será rectángulo?

6. Si, independientemente uno de otro, dos alumnos miden con cuidado el ancho de un salón usando reglas, y uno mide de izquierda a derecha y el otro de derecha a izquierda, es de esperarse que obtengan distintos resultados. Puedes comprobar esto mediante un experimento. ¿Cuáles de las siguientes son explicaciones plausibles de la discrepancia?

a. Las reglas tienen longitudes diferentes.

b. Un alumno puede haber perdido la cuenta del número de pies en el ancho.

c. Los objetos son más largos (o más cortos) de izquierda a derecha que de derecha a izquierda.

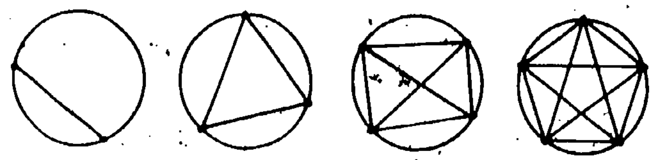
d. Los errores cometidos al cambiar la posición de la regla se acumulan, y la suma de esos pequeños errores es un error discernible.

7. Muestra que $n^2 - 2n + 2 = n$ si $n = 1$. ¿Será cierta la ecuación cuando $n = 2$? ¿Y si $n = 3$? ¿Será siempre cierta?

8. a. Si 3^2, 5^2 y 7^2 se dividen por cuatro, ¿cuál es el resto en cada caso?

b. ¿Cuántos enteros impares tendrías que cuadrar y dividir por 4 para garantizar que las divisiones den siempre el mismo resto?

9.

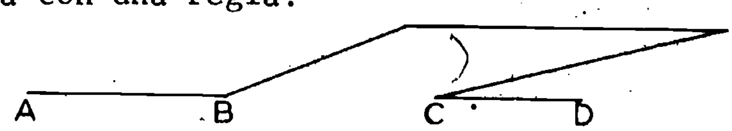


Número de puntos unidos	2	3	4	5	6
Número de regiones que se forman	2	4	8	16	?

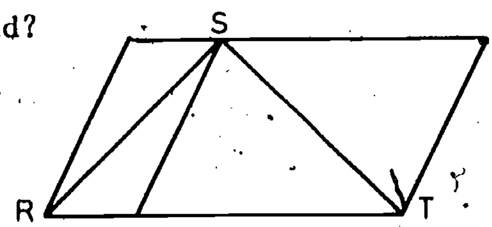
En lugar del signo de interrogación, pon el número que creas correcto. Verifica tu respuesta a base de un dibujo en el cual seis puntos de una circunferencia se unen de todas las maneras posibles.

10. Las siguientes ilusiones ópticas muestran que no siempre puedes juzgar por las apariencias. Como dice la gente: "las apariencias engañan".

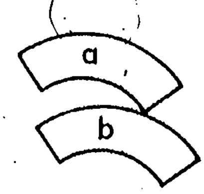
a. ¿Será CD una continuación de AB?
Comprueba tu respuesta con una regla.



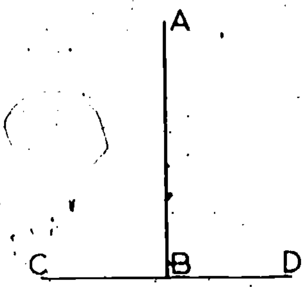
b. ¿Son RS y ST iguales en longitud?
Compara las longitudes usando tu regla o compás.



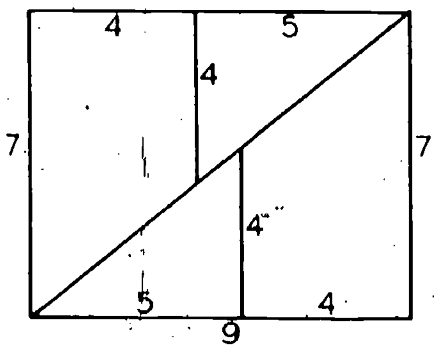
c. ¿Qué figura tiene la mayor área?



d. ¿Cuál es más larga, AB o CD? Comprueba usando tu regla.



*11. Usa una regla para comprobar la exactitud de las medidas de la figura. Muestra que si estas medidas son correctas, la suma de las áreas de las cuatro partes del rectángulo es mayor que el área del rectángulo. ¡Extraño!, ¿no te parece?



*12. Un viaje de 60 millas se hará a una velocidad media de 60 millas por hora. Si las primeras 30 millas se recorren a 30 millas por hora, ¿a qué velocidad deberán recorrerse las otras 30 millas?

Observación sobre el problema 1. Casi todo el mundo escoge un lazo cerca del doble de lo que debiera ser. Podrás obtener muchos mejores resultados con el método siguiente: la longitud de una circunferencia es igual a π veces el diámetro, y π es aproximadamente igual a 3. Por lo tanto, el diámetro es como un tercio de la longitud de la circunferencia. Si tienes, pongamos, 21 pulgadas de cintura, esto quiere decir que el ancho del lazo deberá ser de unas 7 pulgadas. Esto parecerá increíblemente pequeño, mas si has pensado matemáticamente, tendrás el valor de tus convicciones.

Este es uno de muchísimos casos en los que es preferible tratar el problema en una forma matemática, por cruda que sea, que dar palos a ciegas.

1-2. Un desarrollo lógico sistemático de la geometría

Si te detienes a pensar, te darás cuenta que ya posees muchos conocimientos geométricos. Por ejemplo, sabes cómo hallar el área de un rectángulo, y la de un triángulo rectángulo, y hasta quizás la de un triángulo cualquiera, y también conoces la relación pitagórica para los triángulos rectángulos. Algunas de tus nociones son tan simples y tan obvias que nunca se te hubiera ocurrido escribirlas y menos considerar si son o no ciertas. La siguiente es una de ellas:

Dos rectas no se pueden cortar en más de un punto.

Pero otras, como la relación pitagórica, no son obvias en absoluto, mas sí sorprendentes. Nos gustaría organizar nuestro conocimiento de la geometría, de manera que los enunciados más complicados pudieran deducirse de los más sencillos. Esto nos sugiere la posibilidad de hacer una lista de lo que sabemos de geometría, empezando por los enunciados más fáciles y sencillos, y seguir luego con los más difíciles. Podríamos tratar de ordenarlos para que cada enunciado en la lista se pueda derivar de los anteriores mediante razonamiento lógico.

La verdad es que seguiremos un programa muy parecido. Enunciaremos definiciones, tan clara y exactamente como podamos; y derivaremos los principios de la geometría mediante demostraciones lógicas. Llamaremos <u>teoremas</u> a los enunciados que demostremos. (<u>La demostración de teoremas no es un deporte de espectadores</u>, <u>como</u>

tampoco lo es la aritmética: la mejor manera de aprenderla es haciéndola. Por lo tanto, en este curso, tendrás muchas oportunidades para demostrar muchos teoremas tú mismo.)

Aunque demostraremos casi todas las afirmaciones que hagamos sobre la geometría, habrá algunas excepciones. Los enunciados más sencillos y más fundamentales se ofrecerán sin demostración. A éstos los llamaremos postulados, y serán la base sobre la cual se construirá. De la misma manera, usaremos los términos más sencillos y más fundamentales de la geometría sin definirlos; a éstos los llamaremos términos no definidos. Basaremos en ellos las definiciones de otros términos que vamos a usar.

A primera vista, parecería mejor definir todos los términos que empleemos, y demostrar toda afirmación que hagamos. Pensándolo un poco nos damos cuenta que ello es imposible.

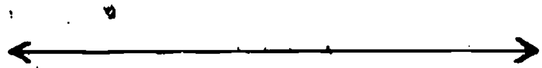
Considera primero la cuestión de los postulados. La mayoría de las veces, cuando probamos un teorema, lo hacemos señalando que se deduce lógicamente de otros ya demostrados. Pero es claro que no siempre se pueden hacer las demostraciones de esa manera. En particular, no es posible demostrar así el primer teorema, porque en este caso no hay otros demostrados previamente. Pero tenemos que empezar en algún punto. Esto significa que habremos de aceptar algunas afirmaciones sin demostrarlas. Estas son los postulados.

El propósito al enunciar los postulados es aclarar justamente dónde es que empezamos y qué clase de objetos matemáticos estudiamos. Después nos será posible construir un cuerpo de doctrina sólido y organizado referente a esos objetos.

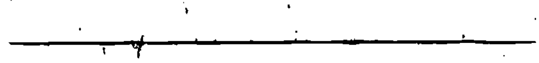
Del mismo modo que empezamos con afirmaciones no demostradas, también empezamos con términos no definidos. La mayor parte del tiempo, al ofrecer una definición de un nuevo término geométrico, lo definimos mediante otros términos geométricos ya definidos. Pero es claro que las definiciones no pueden siempre funcionar de esa manera. En particular, la primera definición no puede enunciarse así porque en este caso no hay términos geométricos definidos con anterioridad. Pero tenemos que empezar en algún momento. Esto significa que introducimos algunos términos geométricos sin definirlos, y luego los usamos en nuestras primeras definiciones. Usaremos los más sencillos y fundamentales sin tratar de definirlos. Tres de estos términos no definidos serán punto, recta y plano.

Los postulados, desde luego, no se fabrican a capricho. (Si así fuera, no tendría la geometría interés o importancia alguna.) Los postulados describen propiedades fundamentales del espacio. De la misma manera, los términos no definidos, punto, recta, plano, son ideas basadas en objetos físicos. Para representar un punto con alguna fidelidad, haces una marca en el papel con la punta de un lápiz. Para conseguir una mayor aproximación a la idea matemática de punto, deberás primero afilar el lápiz. El dibujo es todavía aproximado, desde luego: una marquita en el papel tiene alguna área, o de otro modo no se podría ver. Si piensas en marcas hechas por lápices cada vez más afilados, tendrás una buena idea de lo que pretendemos al usar el término no definido, punto.

Cuando usamos la palabra recta, tenemos en mente la idea de una línea recta. Una recta, sin embargo, se supone que se extiende indefinidamente en ambas direcciones. Indicaremos esto en el dibujo, generalmente, marcando flechas en los extremos de las porciones de rectas que dibujemos, así:



Usaremos la palabra segmento para una figura que se parezca a ésta:



Un cordel fino bien estirado es una buena realización aproximada de un segmento. Si el cordel es un hilo finísimo bien estirado, tendremos una mejor aproximación. Y así sucesivamente.

Piensa en una superficie perfectamente lisa que se extiende indefinidamente en todas las direcciones, y tendrás una buena idea de un plano.

Deberás recordar que ninguna de las oraciones anteriores es una definición. Son meramente explicaciones de las ideas que la gente se imaginaba cuando se enunciaron los postulados. Al elaborar demostraciones, la información ofrecida en los postulados será la que tendremos en la mente acerca de los puntos, las rectas, y los planos.

Dijimos que los teoremas se demostrarán mediante el razonamiento lógico. No hemos explicado aún qué es el razonamiento lógico y la verdad es que no sabemos cómo explicar esto por adelantado. Según sigas el curso, comprenderás cada vez más la idea de lo que es, porque verás cómo se usa y mejor todavía porque lo emplearás tú mismo. Esta es la manera como todos los matemáticos han aprendido a saber lo que es y lo que no es una demostración.

Al comienzo del próximo capítulo, daremos una breve explicación de la idea de conjunto y repasaremos brevemente los fundamentos del álgebra de los números reales. Durante el curso usaremos conjuntos y álgebra, y basaremos mayormente en ellos el estudio que hagamos de la geometría. No constituirán parte integrante de nuestro sistema de postulados y teoremas, sino que pensaremos en ellos como cosas con las que estamos trabajando. Suponemos que contamos con ellos desde el principio; algunos de nuestros postulados comprenderán números reales; y también emplearemos el álgebra elemental en algunas demostraciones. De hecho, la geometría y el álgebra están estrechamente relacionadas y será más fácil aprender las dos si señalamos sus relaciones lo antes posible.

Conjunto de problemas 1-2

1. Un alumno, al que interesaba conocer el significado de la palabra "dimensión", la buscó en un diccionario. Este diccionario no daba definiciones como las que tenemos en geometría sino que ofrecía sinónimos de las palabras. El alumno hizo el siguiente esquema:

dimensión - medida - extensión - tamaño o longitud - dimensión más larga
o
tamaño - dimensión o medida

   a. Señala en el esquema una lista circular de tres palabras cada una de las cuales tiene a la siguiente como sinónimo. (En una lista circular, se supone que el primer término sigue al último.)

   b. Haz una lista circular que contenga cuatro palabras con esa propiedad.

*2. Prepara un esquema semejante al del problema 1, empezando con cualquier palabra de tu diccionario.

3. Juan convenció a su mamá de que él no había ensuciado con lodo la alfombra de la sala, señalando que la lluvia empezó a las 5:00 y que él había estado estudiando en su cuarto desde las 4:30. Dijo que una persona no puede hacer algo donde no está. Lo que él demostraba (que no arrastró lodo en sus zapatos) puede considerarse como un teorema y la afirmación de que una persona no puede hacer algo en un sitio si no ha estado allí se puede considerar como un postulado. Busca otro ejemplo de

un argumento así de convincente y señala qué corresponde al teorema, qué a la demostración y qué a los postulados.

4. Juanita: ¿Qué es un arquitecto?

La mamá: ¿Un arquitecto? Un arquitecto es un hombre que proyecta edificios.

Juanita: ¿Qué es "proyecta"?

La mamá: Pues--planea.

Juanita: ¿Como nosotros planeamos una jira?

La mamá: Sí, más o menos así.

Juanita: ¿Qué son edificios?

La mamá: Ah, Juanita, tú sabes -- casas, iglesias, escuelas.

Juanita: Sí, ya veo.

Considera la conversación anterior. ¿Cuáles eran los términos no definidos en lo que concierne a Juanita?

5. Los Ramírez tienen tres niños. Pepe se gradúa ahora de secundaria. Catalina está en séptimo grado e Isabel tiene cuatro años. En la mesa surgió la siguiente conversación:

Pepe: Hoy aprendimos una palabra graciosa en la clase de geometría -- paralelepípedo.

Catalina: ¿Qué es eso?

Pepe: Bueno, es un sólido. Tú sabes lo que quiere decir sólido -- que ocupa espacio. Y está limitado por planos. Tú sabes lo que es un plano, ¿no?

Isabel: ¿Como un vidrio de ventana?

Pepe: Se dice cristal de ventana, pero está bien la idea. Un paralelepípedo es un cuerpo limitado por paralelogramos. Una caja de dulces es uno, pero muy particular porque las seis caras son rectángulos. Si tuvieras una caja de dulces y pudieras inclinarla por una esquina, tendrías un paralelepípedo. ¿Ves la idea?

En la conversación anterior, ¿qué términos no definidos usó Pepe en su descripción?

6. ¿Qué te parece estar mal en las siguientes definiciones defectuosas?

   a. Un cuadrado es algo que no es redondo.

   b. Un triángulo rectángulo es un triángulo cada uno de cuyos ángulos mide 90°.

   c. Un triángulo equilátero es cuando un triángulo tiene tres lados del mismo largo.

   d. El perímetro de un rectángulo es donde encuentres la suma de los largos de los lados del rectángulo.

   e. La longitud de una circunferencia se encuentra multiplicando el diámetro por π .

*7. Indica si los siguientes enunciados son ciertos o falsos:

   a. Es posible definir cada término geométrico usando términos geométricos más sencillos.

   b. El razonamiento geométrico preciso nos conduce a verdades geométricas que no se pueden deducir de la medición.

   c. Los teoremas se demuestran solamente a base de definiciones y teoremas no definidos.

   d. Si estás dispuesto a escribir todos los pasos, cada teorema se puede deducir de postulados sin recurrir a otros teoremas.

Capítulo 2

CONJUNTOS, NUMEROS REALES Y RECTAS

2-1. Conjuntos

Puede que nunca hayas oído la palabra conjunto usada en las matemáticas, pero la idea es muy conocida. Tu familia es un conjunto de personas que consiste en ti, tus padres y tus hermanos y hermanas (si algunos). Estas personas son los miembros del conjunto. Tu clase de geometría es un conjunto de estudiantes; sus miembros son tú y tus compañeros de clase. Un equipo atlético escolar es un conjunto de estudiantes. Se dice que un miembro de un conjunto pertenece al conjunto. Por ejemplo, tú perteneces a tu familia y a tu clase de geometría, y así sucesivamente. Con frecuencia, llamamos a los miembros de un conjunto sus elementos; las dos palabras, miembros y elementos, significan exactamente lo mismo. Decimos que un conjunto contiene cada uno de sus elementos. Por ejemplo, ambas tu familia y tu clase de geometría te contienen. Si un conjunto contiene todos los elementos de otro conjunto, decimos entonces que el primer conjunto contiene al segundo, y también decimos que el segundo es un subconjunto del primero. Por ejemplo, el cuerpo estudiantil de tu escuela contiene tu clase de geometría, y tu clase de geometría es un subconjunto del cuerpo estudiantil. Decimos que el subconjunto está contenido en el conjunto que lo contiene. Por ejemplo, el conjunto de todos los violinistas está contenido en el conjunto de todos los músicos.

A lo largo de este libro, consideraremos que las rectas y los planos son conjuntos de puntos. De hecho, todas las figuras geométricas de que hablaremos son conjuntos de puntos. (Si te parece, puedes considerar esa afirmación como un postulado.)

Cuando decimos que dos conjuntos son iguales, o cuando escribimos la igualdad $A = B$ entre dos conjuntos A y B, entendemos meramente que los dos conjuntos tienen exactamente los mismos elementos. Por ejemplo, sea A el conjunto de todos los enteros entre $\frac{1}{2}$ y $5\frac{1}{2}$, y sea B el conjunto de todos los enteros entre $\frac{1}{3}$ y $5\frac{1}{3}$. Entonces $A = B$, porque cada uno de los conjuntos A y B tiene precisamente los elementos 1, 2, 3, 4 y 5. También, ocurre con frecuencia que el mismo conjunto se puede describir de dos maneras diferentes; si las descripciones parecen diferentes, esto no significa necesariamente que los conjuntos son diferentes.

Dos conjuntos se <u>intersecan</u> si hay uno o más elementos que pertenecen a ambos. Por ejemplo, tu familia y tu clase de geometría deben intersecarse, porque tú mismo perteneces a los dos. Pero dos clases diferentes que se reúnen a la misma hora no se intersecan. La <u>intersección</u> de dos conjuntos es el conjunto de todos los objetos que pertenecen a los dos conjuntos. Por ejemplo, la intersección del conjunto de todos los hombres y el conjunto de todos los músicos es el conjunto de todos los músicos hombres.

Pasando a temas matemáticos, vemos que el conjunto de todos los números impares es el conjunto cuyos miembros son

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots$$

y así sucesivamente. El conjunto de todos los múltiplos de 3 es el conjunto cuyos miembros son

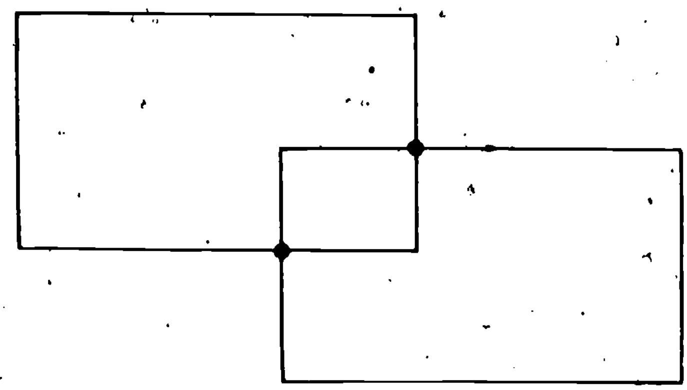
$$3, 6, 9, 12, 15, \ldots$$

y así sucesivamente. La intersección de estos dos conjuntos es

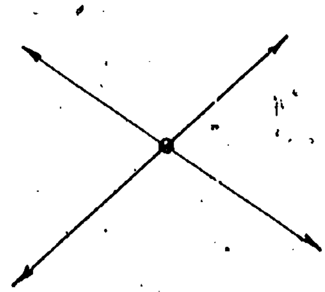
$$3, 9, 15, 21, \ldots$$

y así sucesivamente; sus miembros son los impares que sean múltiplos de 3.

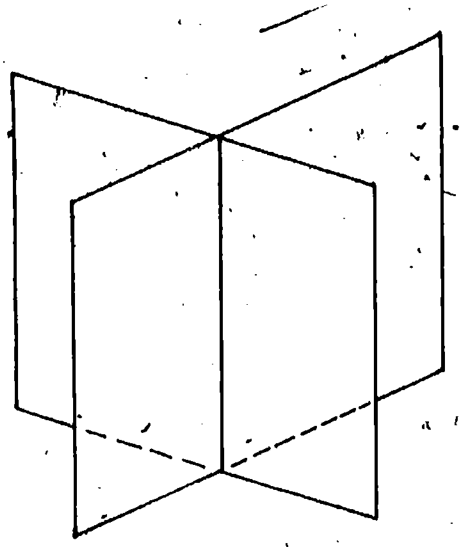
En la figura de abajo, cada uno de los rectángulos es un conjunto de puntos, y su intersección contiene exactamente dos puntos.



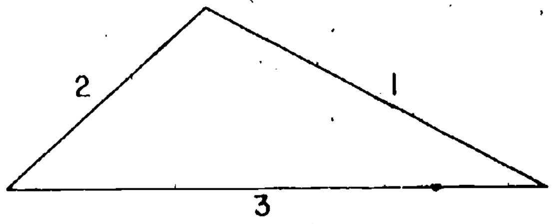
De manera semejante, cada una de las regiones rectangulares es un conjunto de puntos, y su intersección es la pequeña región rectangular en el medio de la figura. En la figura siguiente, cada una de las rectas es un conjunto de puntos, y su intersección consiste en un solo punto:



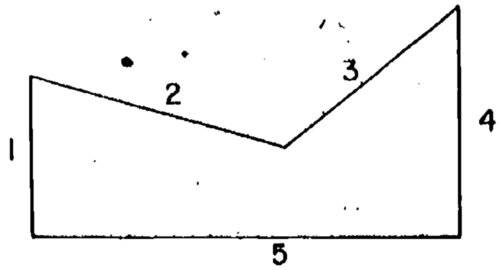
Más abajo aparecen dos conjuntos de puntos, cada uno de los cuales es una superficie rectangular lisa. La intersección de estos dos conjuntos de puntos es una parte de una línea recta.



La reunión de dos conjuntos es el conjunto de todos los objetos pertenecientes a uno de los conjuntos o a los dos. Por ejemplo, la reunión del conjunto de todos los hombres y el conjunto de todas las mujeres es el conjunto de todos los adultos. La intersección, o la reunión, de tres o más conjuntos se define en forma semejante. Así, un triángulo es la reunión de tres conjuntos cada uno de los cuales es un subconjunto de una recta.



La figura de abajo es la reunión de cinco conjuntos cada uno de los cuales es un subconjunto de una recta.



En algunas situaciones, es conveniente emplear la idea del <u>conjunto</u> <u>nulo</u> o <u>vacío</u>. El conjunto nulo es el conjunto que no tiene miembro alguno. Esta noción te puede parecer algo extraña al principio, pero realmente es muy parecida a la idea del número 0. Por ejemplo, las siguientes tres afirmaciones dicen todas lo mismo:

(1) No hay solteros casados en el mundo.

(2) El número de solteros casados en el mundo es cero.

(3) El conjunto de todos los solteros casados en el mundo es el conjunto nulo.

Una vez que introducimos el conjunto nulo, podemos hablar de la intersección de dos conjuntos cualesquiera, recordando que la intersección puede resultar ser el conjunto nulo.

Por ejemplo, la intersección del conjunto de todos los números impares y el conjunto de todos los números pares es el conjunto nulo.

<u>Una</u> <u>advertencia</u>: Al comparar las definiciones de las palabras <u>intersecar</u> e <u>intersección</u>, verás que estos dos términos no están relacionados en la forma simple en que pudiera creerse. Cuando hablamos de la <u>intersección</u> de dos conjuntos, admitimos la posibilidad de que ésta sea nula. Pero si decimos que dos conjuntos se <u>intersecan</u>, esto siempre significará que tienen un elemento en común.

<u>Otra</u> <u>advertencia</u>: Las afirmaciones (2) y (3) anteriores significan lo mismo. Esto no quiere decir que un conjunto que contiene solamente el número 0 es un conjunto nulo. Por ejemplo, la ecuación $x + 3 = 3$ tiene cero como su única raíz, y, por lo tanto, el conjunto de las raíces no es nulo; el conjunto de las raíces tiene exactamente un elemento, a saber, el número 0. Por otra parte, el conjunto de todas las raíces de la ecuación

$x + 3 = x + 4$ sí es el conjunto nulo, porque la ecuación $x + 3 = x + 4$ no tiene raíz alguna.

Conjunto de problemas 2-1

1. Sea A el conjunto $\{3, 5, 6, 9, 11, 12\}$, (es decir, el conjunto cuyos elementos son 3, 5, 6, 9, 11, 12) y B el conjunto $\{4, 5, 7, 9, 10, 11\}$.

   ¿Cuál es la intersección de los conjuntos A y B? ¿Cuál es la reunión de A y B?

2. Considera los siguientes conjuntos:

   S_1 es el conjunto de todos los alumnos de tu escuela.

   S_2 es el conjunto de todos los varones en el alumnado de tu escuela.

   S_3 es el conjunto de todas las niñas en el alumnado de tu escuela.

   S_4 es el conjunto de todos los miembros de la facultad de tu escuela.

   S_5 es el conjunto cuyo único miembro eres tú, un alumno de tu escuela.

   a. ¿Qué pares de conjuntos se intersecan?

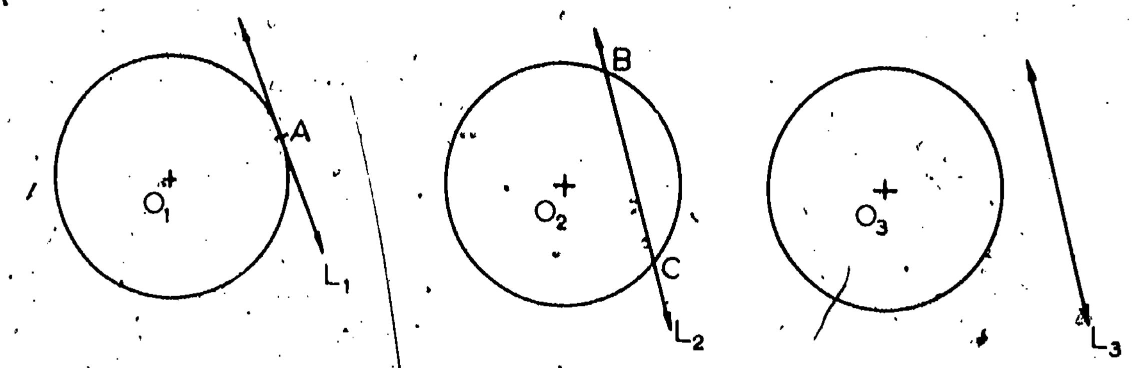
   b. ¿Qué conjunto es la reunión de S_2 y S_3?

   c. ¿Qué conjunto es la reunión de S_1 y S_5?

   d. Describe la reunión de S_1 y S_4.

   e. ¿Cuáles de los conjuntos son subconjuntos de S_1?

3. En las siguientes figuras, considera la recta y la circunferencia como dos conjuntos de puntos. En cada caso, ¿cuál es su intersección?



Caso I.   Caso II.   Caso III.

4. Considera un conjunto de tres niños {A, B, C}. A cualquier conjunto de niños seleccionados de esos tres lo llamaremos un comité.

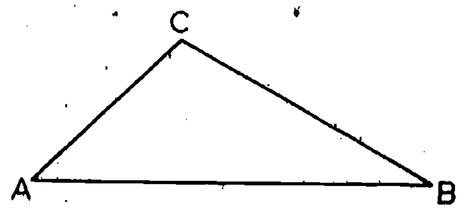
   a. ¿Cuántos comités diferentes de dos miembros se pueden formar con los tres niños?

   b. Muestra que dos cualesquiera de los comités de (a) se intersecan. ¿Qué quiere decir la palabra "intersecarse"?

5. Considera el conjunto de todos los enteros positivos pares y el conjunto de todos los enteros positivos impares. Describe el conjunto que es la reunión de estos dos conjuntos.

6. Describe la intersección de los dos conjuntos del problema 5.

7. En la figura siguiente, ¿cuál es la intersección del triángulo ABC y el segmento BC? ¿Cuál es su reunión?



8. Sea A el conjunto de los pares de números (m, n) que satisfacen la ecuación $4m + n = 9$.

   Sea B el conjunto de los pares de números (m, n) que satisfacen la ecuación $2m + n = 5$.

   Halla la intersección de los conjuntos A y B.

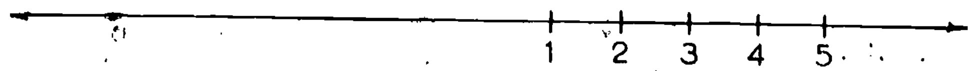
9. Sea A el conjunto de pares (x, y) para los que $x + y = 7$.
   Sea B el conjunto de pares (x, y) para los que $x - y = 1$.
   ¿Cuál es la intersección de A y B?
10. Sea A el conjunto de pares (x, y) para los que $x + y = 3$.
    Sea B el conjunto de pares (x, y) para los que $2x + 2y = 7$.
    ¿Cuál es la intersección de A y B?
11. Considera el conjunto de todos los enteros positivos divisibles por 2.
    Considera el conjunto de todos los enteros positivos divisibles por 3.
    a. Describe la intersección de estos dos conjuntos. Da sus primeros cuatro miembros.
    b. Escribe una expresión algebraica para la intersección.
    c. Describe la reunión de los dos conjuntos. Da sus primeros ocho miembros.
12. a. ¿Cuántas rectas pueden dibujarse pasando por 2 puntos?
    b. Si tres puntos no están en línea recta, ¿cuántas rectas se pueden dibujar que pasen por pares de esos puntos?
    c. Si se nos dan cuatro puntos, y cada tres de ellos no están alineados, ¿cuántas rectas se pueden dibujar que contengan conjuntos de dos de los puntos? Contesta la misma pregunta para el caso en que nos den cinco puntos.
    *d. Contesta la pregunta anterior si se nos dan n puntos.

2-2. Los números reales

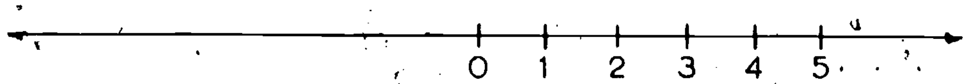
Los primeros números de que oíste hablar fueron los "números para contar" o "números naturales",

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

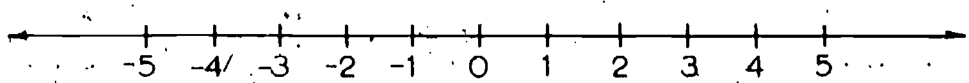
y así sucesivamente. (Los conocías antes de aprender a leer o escribir. Y el hombre primitivo aprendió a contar mucho antes de la invención de la escritura.) Los números naturales nunca acaban, porque empezando con cualquiera de ellos, siempre podemos añadirle 1 para que nos dé otro. Podemos imaginarnos estos números como dispuestos en una recta, y que empiezan en algún punto continuando hacia la derecha, en esta forma:



A la izquierda del 1 colocaríamos el número 0, así:

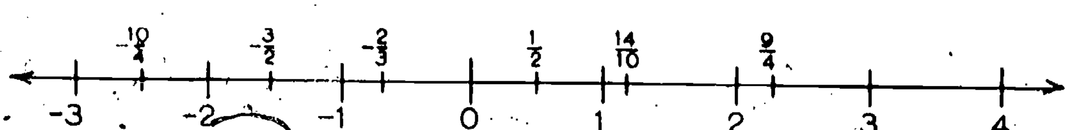


Y el próximo paso es colocar los enteros negativos, de esta manera:



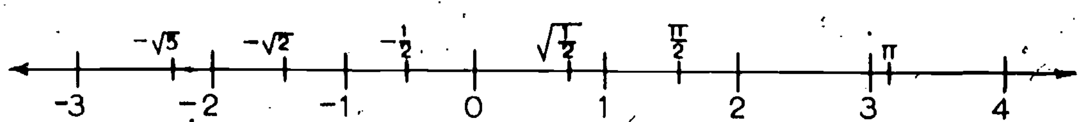
Los números que hasta ahora tenemos se llaman los <u>enteros</u> (positivos, negativos y cero). Los números naturales son los enteros positivos y con frecuencia así los llamaremos.

Desde luego que hay muchos puntos de la recta a los que no les hemos asignado números hasta ahora. Nuestro próximo paso es colocar las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{3}$, etc. Estos nuevos números que deseamos colocar incluyen todos los que se pueden expresar como el cociente $\frac{p}{q}$ de dos enteros cualesquiera (siempre y cuando q no sea igual a cero). Podemos indicar unos pocos de éstos como muestras:



Los números que tenemos hasta ahora se llaman los <u>números racionales</u>. (Este nombre no intenta señalarlos como que tienen mejor salud mental que otros números menos afortunados. Meramente se refiere a que son <u>razones</u> de números enteros.)

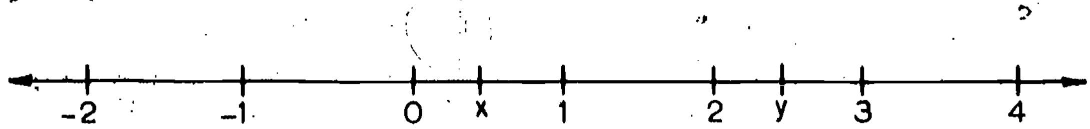
Los números racionales constituyen un conjunto inmenso. Entre dos cualesquiera de ellos hay un tercero; entre dos números enteros cualesquiera hay una infinidad de ellos. Sin embargo, es bien sabido que los números racionales todavía no nos llenan totalmente la recta numérica. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ no es racional; no se puede expresar como la razón de dos enteros, pero, sin embargo, corresponde a un punto de la recta. (Para una demostración consulta el Apéndice III.) Lo mismo ocurre con $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$, y también con números tan "peculiares" como π. Estos números no racionales se llaman <u>irracionales</u>. Si colocamos todos estos números, de manera que a cada punto de la recta se le haya asignado un número, entonces tendremos los <u>números reales</u>. Indicamos algunos ejemplos, así:



Deberás fijarte en que estos números aparezcan en la escala donde corresponden. (Por ejemplo, $\sqrt{2}$ es aproximadamente 1.41. ¿Cómo obtendrías $\sqrt{\frac{1}{2}}$?)

Los números reales serán parte de los fundamentos de casi todo lo que vamos a hacer en geometría. Y nos convendrá que, de ahora en adelante, pensemos en los números reales como dispuestos en una recta.

Un número x es menor que un número y si x está a la izquierda de y.



Esto se abrevia escribiendo $x < y$. Notarás que todo número negativo cae a la izquierda de cualquier número positivo. Por lo tanto, todo número negativo es menor que cualquier número positivo. Por ejemplo,

$$-1{,}000{,}000 < 1,$$

aunque el número $-1,000,000$ puede en cierta forma parecer "más grande".

Llamamos desigualdades a expresiones del tipo $x < y$. Cualquier desigualdad se puede escribir al revés. Por ejemplo,

$$1 > -1,000,000$$

y, en general, $y > x$ significará que $x < y$.

La expresión

$$x \leq y$$

quiere decir que x es menor que o igual a y. Por ejemplo, $3 \leq 5$ porque $3 < 5$, y $5 \leq 5$ puesto que $5 = 5$.

En tus estudios de álgebra ya has aprendido mucho acerca de cómo se comportan los números reales respecto de la suma y de la multiplicación. Todo el álgebra que sabes se puede derivar de unos pocos enunciados triviales en apariencia. Estos son los postulados para la suma y la multiplicación de números reales. Encontrarás una lista de ellos en el Apéndice II. Puede ser que no hayas basado tus estudios de álgebra en esos postulados y no vamos a iniciar ahora ese proceso. En este curso, emplearemos simplemente los métodos del álgebra elemental, sin discutirlos.

Sin embargo, deberemos ser un poco más cuidadosos con respecto a las desigualdades y las raíces cuadradas. La relación $<$ define una ordenación para los números reales. Las propiedades fundamentales de esta relación de ordenación son las siguientes:

0-1. (Unicidad de la ordenación) Para toda x, y, una y solamente una de las siguientes condiciones es cierta: $x < y$, $x = y$, $x > y$.

0-2. (Transitividad de la ordenación) Si $x < y$, $y < z$, entonces $x < z$.

0-3. (Suma de desigualdades) Si $x < y$, entonces para toda z, $x + z < y + z$.

0-4. (Multiplicación de desigualdades) Si $x < y$, $z > 0$, entonces $xz < yz$.

Los enunciados 0-2 y 0-3 tienen una consecuencia importante que merece mención por separado:

0-5. Si $a < b$, $x < y$, entonces $a + x < b + y$.

Esto es cierto por la siguiente razón: Por el 0-3, sabemos que

$$a + x < b + x$$

y también que

$$b + x < b + y.$$

(Es decir, el sentido de una desigualdad se conserva si añadimos el mismo número a cada uno de sus miembros.) Por el 0-2, al combinar estas dos desigualdades, obtenemos

$$a + x < b + y,$$

que es el resultado deseado.

Finalmente, vamos a necesitar la siguiente propiedad de los números reales:

R-1. (Existencia de raíces cuadradas.) Todo número positivo tiene exactamente una raíz cuadrada positiva.

Hay un punto un tanto engañoso en relación con las raíces cuadradas. Cuando decimos, en palabras, que x es una raíz cuadrada de a, esto meramente significa que $x^2 = a$. Por ejemplo, 3 es una raíz cuadrada de 9, y -3 es una raíz cuadrada de 9. Pero cuando escribimos, en símbolos, que $x = \sqrt{a}$, entendemos que x es la raíz cuadrada positiva de a. Así, las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, según se indica:

<u>Cierta</u>: -3 es una raíz cuadrada de 9.

<u>Falsa</u>: $-3 = \sqrt{9}$.

<u>Cierta</u>: $\sqrt{9} = 3$.

<u>Falsa</u>: $\sqrt{9} = \pm 3$.

El porqué de este convenio estará claro, una vez se te ocurra. Si $\sqrt{a}$ pudiera significar lo mismo la raíz positiva que la negativa, no tendríamos entonces una manera de escribir la raíz cuadrada positiva de 7. (El colocar un signo "más" antes de la expresión $\sqrt{7}$ no nos conduce a nada porque un signo "más" nunca altera el valor de una expresión. Si $\sqrt{7}$ fuera negativa, entonces $+\sqrt{7}$ también sería negativa.)

Conjunto de problemas 2-2

1. Indica si cada uno de los siguientes es cierto o falso:
   a. La escala de los números reales no tiene extremos.
   b. Hay un punto en la escala de los números reales que representa exactamente a $\sqrt{2}$.
   c. El punto que corresponde a $\frac{6}{7}$ en la escala de los números reales está entre los puntos correspondientes a $\frac{5}{6}$ y $\frac{7}{8}$.
   d. Los números negativos son números reales.
2. Escribe los siguientes usando palabras:
   a. $AB < CD$
   b. $x > y$
   c. $XY \geq YZ$
   d. $n \leq 3$
   e. $0 < 1 < 2$
   f. $5 \geq x \geq -5$
   g. $x > 0$
3. Escribe como una desigualdad:
   a. k es un número positivo.
   b. r es un número negativo.
   c. t es un número no positivo.
   d. s es un número no negativo.
   e. g tiene un valor entre 2 y 3.
   f. w tiene un valor entre 2 y 3, ambos inclusive.
   g. w tiene un valor entre a y b.
4. ¿Para cuáles de los siguientes será cierto que $\sqrt{x^2} = x$?
   a. $x = 5$
   b. $x = -5$
   c. $x = 0$
   d. $x = 7$
   e. $x = -1$
   f. $x > 0$
   g. $x < 0$
   h. $\frac{1}{x} > 0$

5. ¿Cómo dispondrás, de izquierda a derecha, sobre una escala numérica en la que los números positivos están a la derecha del 0, los puntos correspondientes a los siguientes conjuntos de números?

a. 3.1, 3.05, 3.009

b. -2.5, -3, -1.5

c. $\frac{5}{3}$, $\cancel{1\frac{3}{5}}$, $1\frac{5}{8}$

d. $\frac{5}{3}$, $1\frac{3}{5}$, $-1\frac{5}{8}$

*6. Si r y s son números reales, distintos de cero, y $r > s$, indica si los siguientes serán siempre ciertos (C), a veces ciertos (A), o nunca ciertos (N):

a. $s < r$

b. $r - s > 0$

c. $r - 2 < s - 2$

d. $\frac{r}{s} > 1$

e. $r^2 > s^2$

*7. Usa las instrucciones del problema anterior en los siguientes:

a. $\frac{1}{r} > \frac{1}{s}$

b. $\frac{1}{2}s < \frac{1}{2}r$

c. $|r| > |s|$

d. $r^3 > s^3$

e. $1 - r < 1 - s$

El valor absoluto

La idea del valor absoluto de un número se comprende fácilmente a base de unos pocos ejemplos:

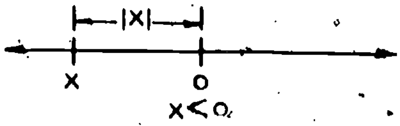
(1) El valor absoluto de 5 es 5.

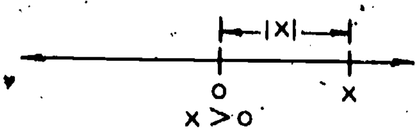
(2) El valor absoluto de -5 es 5.

(3) El valor absoluto de π es π.

(4) El valor absoluto de $-\pi$ es π, etc.

Gráficamente, el valor absoluto de x es nada más que la distancia en la recta numérica entre 0 y x, no importa si x está a la izquierda o a la derecha de 0. El valor absoluto de x se escribe como $|x|$.





Las dos posibilidades para x aparecen indicadas en las figuras. En cada uno de los dos casos, $|x|$ es la distancia entre 0 y x.

Si un número en particular se escribe aritméticamente, es fácil ver cómo debiéramos escribir su valor absoluto. La razón es que en aritmética los números positivos se escriben como 1, 2, 3, 4, etc. Una manera de escribir números negativos es colocar signos "menos" antes de los números positivos. Esto nos da -1, -2, -3, -4, etc. Por lo tanto, en aritmética, si queremos escribir el valor absoluto de un número negativo, omitiremos el signo "menos", así,

$|-1| = 1$ $\quad |-2| = 2,$ $\quad$ etc.

Nos gustaría ofrecer una definición algebraica para $|x|$ que sea igualmente válida para valores positivos y negativos de x. En el álgebra, desde luego, la letra x puede representar un número negativo. Al tratar problemas de álgebra, probablemente escribiste $x = -2$ casi tantas veces como $x = 2$. Si x es negativo, entonces no será posible escribir el correspondiente número positivo a base de omitir el signo "menos" toda vez que no hay tal signo "menos" que omitir. Mediante un sencillo artificio, sin embargo, resolveremos nuestra dificultad. Si x es negativo, entonces el número positivo que le corresponde es $-x$. Veamos algunos ejemplos:

$x = -1$, $-x = -(-1) = 1$; esto es, si $x = -1$, entonces $-x = 1$.
$x = -2$, $-x = -(-2) = 2$; esto es, si $x = -2$, entonces $-x = 2$.
$x = -5$, $-x = -(-5) = 5$; esto es, si $x = -5$, entonces $-x = 5$.

En cada uno de estos casos, x es negativo y -x es el número positivo correspondiente. Y de hecho, esto es lo que siempre ocurre. Como ya sabíamos que $|x| = x$, cuando x es positivo o cero, vemos ahora que el valor absoluto se puede describir mediante las siguientes dos afirmaciones:

(1) Si x es positivo o cero, entonces $|x| = x$.

(2) Si x es negativo, entonces $|x| = -x$.

Si todavía esto te presenta dudas, trata de sustituir varios números por x. Para cualquier número que escojas, una de las condiciones será satisfecha y te dará la contestación correcta para el valor absoluto del número.

Conjunto de problemas 2-3

1. Indica cuáles de los siguientes son siempre ciertos:

   a. $|-3| = 3$

   b. $|3| = -3$

   c. $|2 - 7| = |7 - 2|$

   d. $|0 - 5| = |5 - 0|$

   e. $|n| = n$

*2. Indica cuáles de los siguientes son siempre ciertos:

   a. $|-n| = n$

   b. $|n^2| = n^2$

   c. $|y - x|^2 = y^2 - 2xy + x^2$

   d. $|a - 2| = |2 - a|$

   e. $|d| + 1 = |d + 1|$

3. Completa los siguientes enunciados:

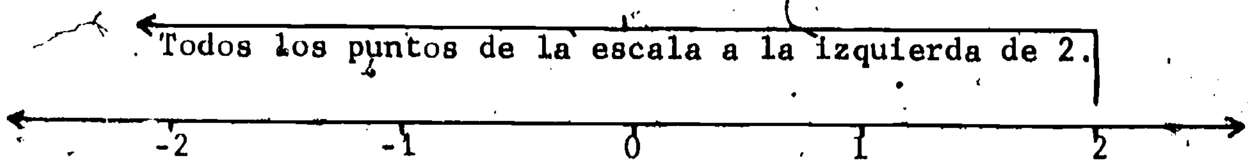
   a. Si $0 < r$, entonces $|r| =$ _____.

   b. Si $0 > r$, entonces $|r| =$ _____.

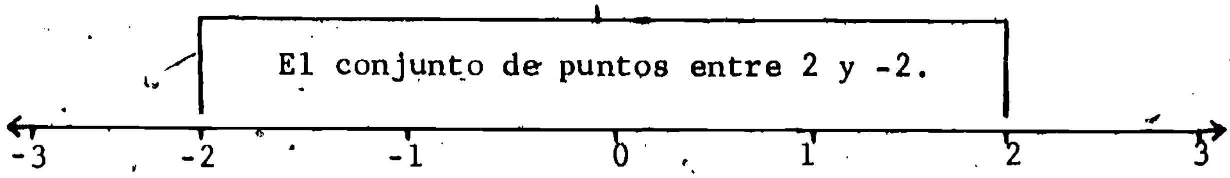
   c. Si $0 = r$, entonces $|r| =$ _____.

4. Los siguientes tres ejemplos ofrecen una interpretación geométrica de enunciados algebraicos:

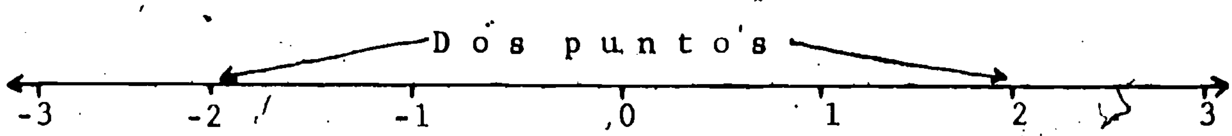
$x < 2.$



$|x| < 2.$



$|x| = 2$



Continúa trabajando, como en los ejemplos anteriores, los ejercicios siguientes:

a. $x < 0$

b. $x = 1$

c. $x > 1$

d. $x \leq 1$

e. $|x| = 1$

f. $|x| \leq 1$

g. $|x| > 1$

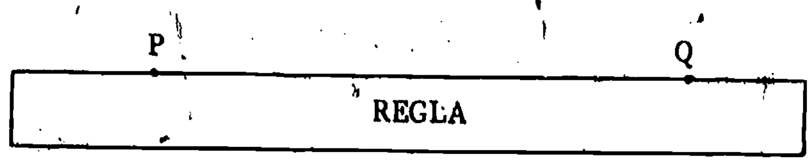
h. $|x| \geq 0$

5. a. ¿En qué se diferencia el conjunto de puntos representado por $x \geq 0$ del representado por $x > 0$?

b. ¿En qué se diferencia el conjunto de puntos representado por $0 \leq x \leq 1$ del representado por $0 < x < 1$?

2-4. Medida de la distancia

El primer paso al medir la distancia entre dos puntos P y Q es colocar un borde de una regla sobre ellos, así:



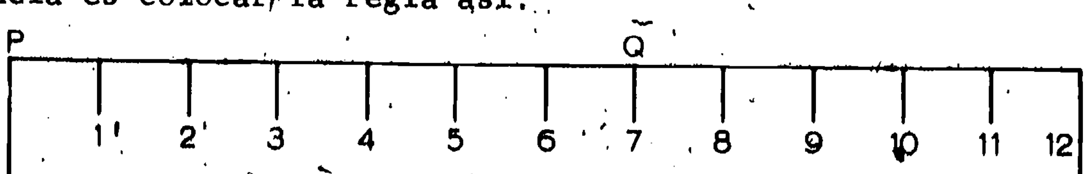
Desde luego que deseamos usar una regla recta, ya que no podemos esperar obtener resultados consistentes si nuestras reglas son curvas o irregulares. Una regla recta tiene la propiedad de que, no importa cómo se coloque su borde sobre P y Q, la recta dibujada a lo largo de ese borde es siempre la misma. Dicho de otro modo, esta recta queda totalmente determinada por los dos puntos dados. Expresamos esta propiedad fundamental de las rectas como nuestro primer postulado geométrico:

> Postulado 1. Dados dos puntos diferentes cualesquiera, habrá exactamente una recta que los contenga.

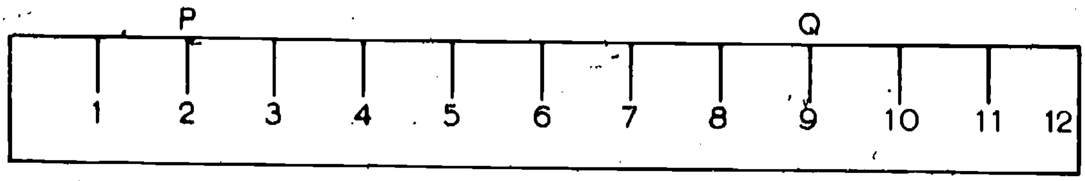
Nos referiremos a este postulado, abreviándolo, diciendo que cada dos puntos determinan una recta. Esta es una forma corta de enunciar el Postulado 1.

Usemos la notación $\overleftrightarrow{PQ}$ para designar la recta determinada por los puntos P y Q. (La doble flecha recordará cómo dibujamos originalmente una recta.) Claro que siempre podemos abreviar escogiendo otra letra y llamando a la recta L, o W, o cualquier otra cosa.

Consideramos ahora las marcas que hay en la regla y la verdadera distancia entre P y Q. La manera más fácil de medir la distancia es colocar la regla así:

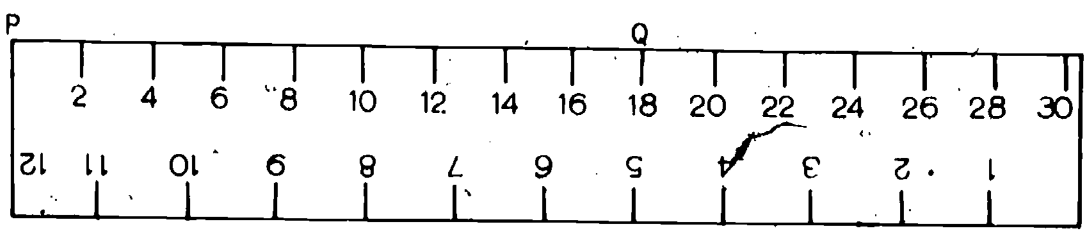


Esto da 7 unidades como medida. Desde luego que no hay necesidad de colocar un extremo de la regla en P. Podíamos haber hecho esto otro:



En este caso, la distancia entre P y Q, medida en unidades de la escala, es 9 - 2 = 7, igual que antes.

Muchas de las reglas que se usan hoy día tienen dos escalas: un lado está marcado en pulgadas y el otro en centímetros.. Usando la escala de centímetros, podríamos medir así la distancia entre P y Q:



lo que nos daría una distancia de aproximadamente 18 cm. (el símbolo cm. significa centímetros).

Un pie es igual a 12" y una yarda a 36", según sabemos. Un metro es igual a cien centímetros (usamos m. como abreviatura de metros). Un milímetro es una décima parte de un centímetro (ó $\frac{1}{1000}$ de un metro) y los milímetros se indican con el símbolo mm. Podemos, pues, medir la distancia entre P y Q al menos de seis maneras: 18 cm., 180 mm., 0.18 m., 7 pulgadas, $\frac{7}{12}$ pies, $\frac{7}{36}$ yardas. Es decir, el número obtenido como medida de la distancia dependerá de la <u>unidad de medida</u>. Podemos tomar la que queramos siempre y cuando seamos consistentes e indiquemos cuál fue la unidad escogida.

Conjunto de problemas 2-4

1. ¿Qué fracciones (o enteros) necesitamos para completar la siguiente tabla?

   a. 2 pulgs. = ___ pies = ___ yds.

   b. ___ pulgs. = $4\frac{1}{2}$ pies = ___ yds.

   c. ___ pulgs. = ___ pies = ___ yds.

2. ¿Qué números faltan para completar la tabla siguiente?

   a. 500 mm. = ___ cm. = ___ m.

   b. ___ mm. = 32.5 cm. = ___ m.

   c. ___ mm. = ___ cm. = 7.32 m.

3. a. Supongamos que decides usar el ancho de una hoja de papel de $8\frac{1}{2}''$ por 11" como unidad de longitud. Expresa el largo y el ancho de la hoja en términos de esta unidad.

   b. Repite el ejercicio tomando ahora el largo de la hoja como tu nueva unidad.

4. Si las longitudes de los lados de un triángulo son de 3 pies, 4 pies y 5 pies, el triángulo será rectángulo porque $3^2 + 4^2 = 5^2$.
   Comprueba que la relación pitagórica se satisface igualmente cuando expresamos esas medidas en pulgadas.

5. Si la longitud de cada lado de un cuadrado es de 4 pies, su perímetro será de 16 pies y su área de 16 pies cuadrados. Fíjate en que el valor numérico del perímetro es igual al valor numérico del área.

   a. Muestra que esos dos valores numéricos dejarían de ser iguales si expresáramos en pulgadas la longitud del lado.

   b. Comprueba lo mismo si la longitud se mide en yardas.

*6. Generaliza el problema 4. Dados los números a, b y c como las medidas de los lados de un triángulo, en cierta unidad, y también que $a^2 + b^2 = c^2$, demuestra que la relación pitagórica es válida también si la unidad de medida se multiplica por n.

(Sugerencia: Las longitudes de los lados serían entonces $\frac{a}{n}$, $\frac{b}{n}$ y $\frac{c}{n}$. Si encuentras que pensar en a, b y c resulta muy abstracto, trabaja primero a base de 3, 4 y 5.)

*7. Generaliza el problema 5. Demuestra que si los valores numéricos del perímetro y del área de un cuadrado son iguales cuando se utiliza una unidad de medida en particular, no serán iguales para ninguna otra unidad. (Sugerencia: Toma el número s como la longitud del lado del cuadrado, expresada en alguna unidad, e iguala las fórmulas para área y perímetro.)

2-5. Elección de una unidad de distancia

Hemos notado que la elección de una unidad de distancia es meramente una cuestión de conveniencia. Desde el punto de vista de la lógica, para medir distancias, una unidad es tan buena como otra. Escojamos, pues, una unidad y acordemos hablar en términos de esa unidad en todos nuestros teoremas. (No importa qué unidad se te ocurra. Si prefieres pulgadas, pies, yardas, centímetros, o hasta leguas, estás en libertad de considerar que son ésas las unidades que emplearemos. Todos nuestros teoremas serán ciertos para cualquier unidad.)

Así, para cualquier par de puntos, P, Q, habrá un número que es la medida de la distancia entre P y Q expresada en términos de nuestra unidad. Como tales números serán usados muchas veces en nuestro trabajo, sería muy incómodo tener que estar continuamente repitiendo la frase "medida de la distancia entre P y Q expresada en términos de nuestra unidad". Por lo tanto, acortaremos esa frase para que se lea "distancia entre P y Q", confiando en que, si alguna vez fuera necesario, podrías suplir el resto de la oración.

Ahora es posible describir esta situación en la forma precisa siguiente:

Postulado 2. (Postulado de la distancia.) A cada par de puntos diferentes corresponde un número positivo único.

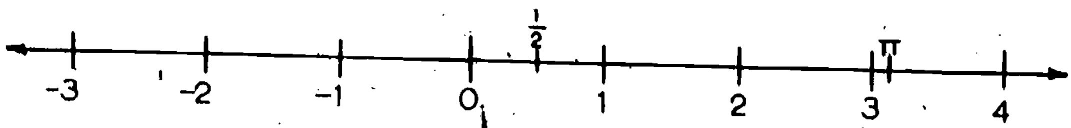
Definición: La distancia entre dos puntos es el número positivo obtenido mediante el postulado de la distancia. Si los puntos son P y Q, indicamos entonces la distancia por PQ.

Convendrá a veces considerar la posibilidad de que P = Q, esto es, de que P y Q sean el mismo punto; en este caso, es claro que la distancia será igual a cero. Fíjate en que definimos distancia simplemente con relación a un par de puntos, y que no depende del orden en que se mencionen los puntos. Así, PQ es siempre igual a QP.

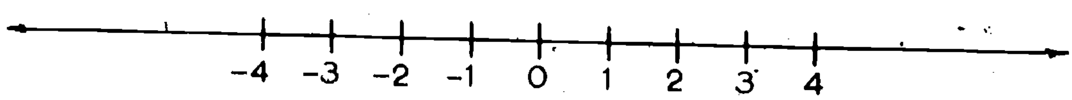
En algunos de los ejercicios asignados en el texto se utilizan varias unidades de distancia, como pies, millas, metros, etc. Según señalamos anteriormente, nuestros teoremas serán aplicables a cualquiera de estas unidades siempre que consistentemente utilices sólo una unidad en la discusión de un teorema cualquiera. Puedes, si te place, emplear pulgadas en un teorema y pies en otro, pero no ambas unidades en el mismo teorema.

2-6. Una regla infinita

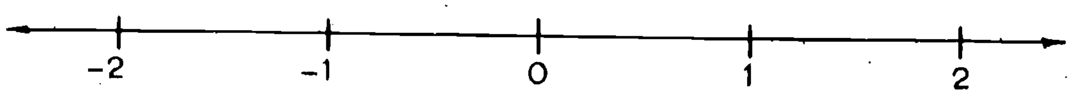
Al comenzar el capítulo, marcamos una escala numérica sobre una recta en esta forma:



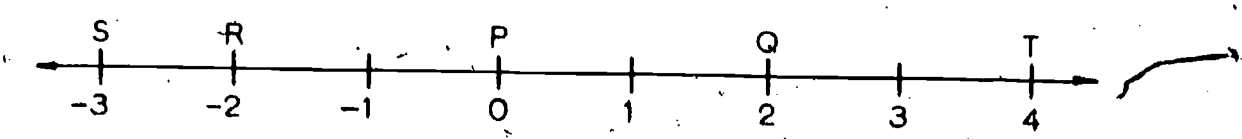
Pudimos, desde luego, haber comprimido la escala así:



o estirarla, de esta manera:



Pero convengamos que, de ahora en adelante, toda escala numérica que marquemos en una recta se escogerá de manera que el punto marcado x esté a una distancia $|x|$ del punto marcado con 0. Por ejemplo, considera los puntos P, Q, R, S y T, señalados con los números 0, 2, -2, -3, y 4 en la figura siguiente:



Entonces PQ = 2, PR = 2, PS = 3 y PT = 4.

Si nos fijamos en varios pares de puntos en la escala numérica, parece razonable hallar la distancia entre dos puntos tomando la diferencia de sus correspondientes números. Por ejemplo:

$$PQ = 2, \quad y\ 2 = 2 - 0;$$
$$QT = 2, \quad y\ 2 = 4 - 2;$$
$$SQ = 5, \quad y\ 5 = 2 - (-3);$$
$$RT = 6, \quad y\ 6 = 4 - (-2).$$

Observa, sin embargo, que si tomamos los puntos al revés, y efectuamos las restas en el sentido opuesto, lograremos siempre la respuesta errónea: en vez de conseguir la distancia (que es siempre positiva), obtendremos el número negativo correspondiente. Esta dificultad, sin embargo, se vence fácilmente. Todo lo que tenemos que hacer es tomar el <u>valor absoluto</u> de la diferencia de los números. Si hacemos esto, entonces todas nuestras respuestas positivas correctas seguirán siendo correctas y todas nuestras respuestas negativas erróneas se convierten en correctas.

<u>Vemos, pues, que la distancia entre dos puntos es el valor absoluto de la diferencia de los números correspondientes</u>.

Todo esto parece muy razonable. Pero la verdad es que no lo hemos demostrado a base de los únicos postulados escritos hasta ahora. (Y la verdad es que <u>no se puede</u> demostrar a base del postulado de la distancia.) Resumiremos, pues, lo anteriormente dicho, en forma de un nuevo postulado, a saber:

> <u>Postulado 3</u>. (Postulado de la regla.) Podemos establecer una correspondencia entre los puntos de una recta y los números reales de manera que
>
> (1) A cada punto de la recta corresponde exactamente un número real,
>
> (2) A cada número real corresponde exactamente un punto de la recta, y
>
> (3) La distancia entre dos puntos es el valor absoluto de la diferencia de los números correspondientes.

Llamamos a éste el postulado de la regla, porque de hecho nos proporciona una regla infinita, con una escala numérica, mediante la cual nos es posible medir distancias en cualquier recta.

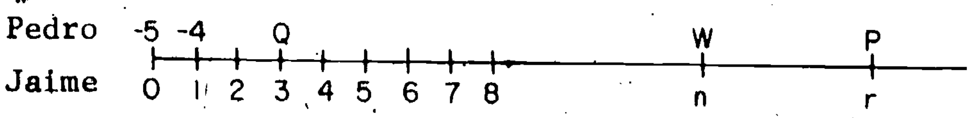
<u>Definiciones</u>: Una correspondencia del tipo de la descrita en el postulado 3 se llama un <u>sistema de coordenadas</u> para la recta. El número correspondiente a cualquier punto se llama la <u>coordenada</u> del punto.

<u>Conjunto de problemas 2-6</u>

1. Simplifica:
   a. $|3 - 6|$
   b. $|6 - 3|$
   c. $|-2 - 1|$
   d. $|-4 - (-2)|$
   e. $|a - (-a)|$
   f. $|a| - |-a|$

2. Usando el tipo de sistema de coordenadas discutido en el texto, halla la distancia entre los pares de puntos que tienen las siguientes coordenadas:
   a. 0 y 12
   b. 12 y 0
   c. 0 y -12
   d. -12 y 0
   e. $-3\frac{1}{2}$ y -5
   f. -5.1 y 5.1
   g. $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$
   h. x_1 y x_2
   i. $2a$ y $-2a$
   j. $r - s$ y $r + s$

3.



La numeración inferior en esta escala fue idea de Jaime. Pedro empezó la numeración superior pero se cansó.
   a. Copia la escala y escribe el resto de la numeración de Pedro.
   b. Muestra cómo hallar la distancia de P a Q, usando primero la escala de Jaime y después la de Pedro.
   c. Haz lo mismo para la distancia de W a P.

4. Supongamos que al medir la distancia entre dos puntos P y Q, pensaste en colocar el cero de la escala numérica en P y leer un valor positivo en Q. Sin embargo, lo que hiciste fue colocar la escala numérica de manera que P estuviera en $\frac{1}{4}$ y Q a la derecha de P. ¿Cómo será posible todavía medir la distancia PQ?

*5. Considera un sistema de coordenadas de una recta. Suponte que se le añade 2 a la coordenada de cada punto y que se asigna esta nueva suma al punto.

a. ¿Corresponderá cada punto a un número y cada número a un punto?

b. Si dos puntos de la recta tenían coordenadas p y q en el sistema de coordenadas original, ¿qué números les corresponden en la nueva numeración?

c. Muestra que la fórmula
| (Número asignado a un punto) - (Número asignado a otro punto) | da la distancia entre los dos puntos.

d. ¿Satisface la nueva correspondencia entre puntos y números a cada una de las tres condiciones del postulado 3? (Si así es, podemos llamarla un sistema de coordenadas.)

*6. Supongamos que se establece un sistema de coordenadas en una recta, de manera que cada punto P corresponde a un número real n. Si cambiamos cada n por -n, entonces el punto P corresponderá a un número -n. Muestra que esta correspondencia es también un sistema de coordenadas para la recta. (SUGERENCIA: Es obvio que cada punto tendrá un número asociado a él y cada número un punto. Deberás mostrar además que el valor absoluto de la diferencia de los números asignados a los dos puntos no se alterará al cambiar la numeración.)

7. En un cierto condado los pueblos Alfa, Beta y Gama están en línea recta, aunque no necesariamente en el orden dado. Hay 16 millas de Alfa a Beta y 25 de Beta a Gama.

a. ¿Será posible decir qué pueblo está entre los otros dos? ¿Qué pueblo no está entre los otros dos?

b. Puede haber dos valores diferentes para la distancia de Alfa a Gama. Usa un dibujo para determinar cuáles son éstos.

c. Si sabes además que la distancia de Alfa a Gama es 9 millas, ¿qué pueblo estará entonces entre los otros dos?

d. Si la distancia entre Alfa y Beta fuera r millas; la distancia de Alfa a Gama s millas, y la distancia de Beta a Gama $r + s$ millas, ¿qué pueblo estaría entre los otros dos?

8. A, B, C son tres puntos alineados. A y B están a 10" de distancia y C está a 15" de B. ¿Habrá una sola manera de disponer estos puntos? Explícalo.

9. Se asignan tres sistemas distintos de coordenadas a la misma recta. A tres puntos fijos A, B, C, de la recta les corresponden los valores siguientes:

   Con el primer sistema, la coordenada de A es -6 y la de B es -2.

   Con el segundo, las coordenadas de A y C son 4 y -3, respectivamente.

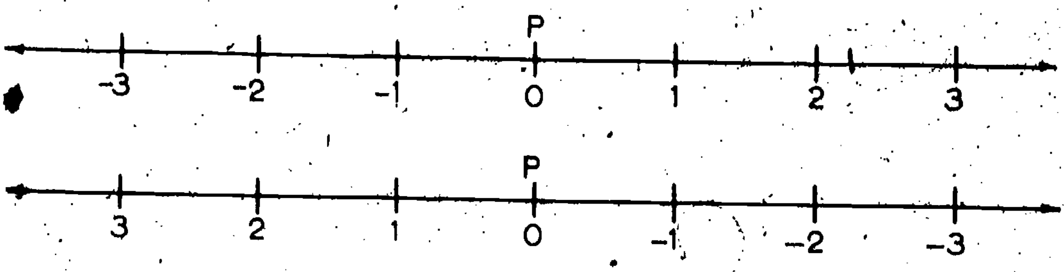
   Con el tercero, las coordenadas respectivas de C y B son 7 y 4.

   ¿Qué punto está entre los otros dos?

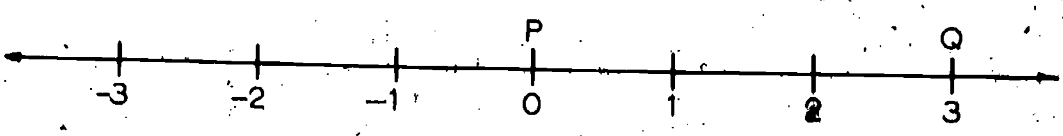
   Evalúa $AB + BC + AC$.

2-7. El postulado de colocación de la regla; interposición, segmentos y semirrectas

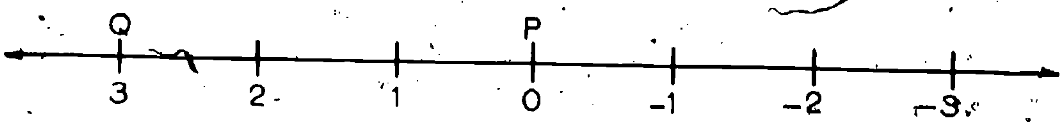
El postulado de la regla (el postulado 3) nos dice que podemos, sobre cualquier recta, fijar un sistema de coordenadas marcando una escala numérica. Esta se puede construir de muchas maneras diferentes. Por ejemplo, dado el punto P de la recta, podemos empezar colocando el cero en P. Y podemos también marcar la escala en cualquiera de las dos direcciones, así:



Esto quiere decir que, dado ~~otro~~ punto Q de la recta, siempre podemos escoger el sistema de coordenadas de manera que le corresponda un número positivo, de esta manera:



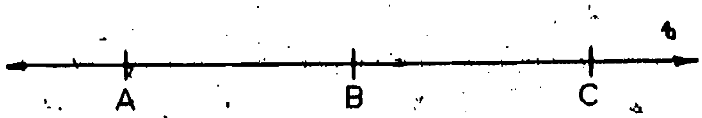
o de esta otra:



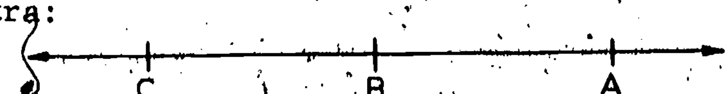
Para referencia futura, enunciemos esto en forma de un postulado.

> <u>Postulado 4</u>. (El postulado de colocación de la regla.) Dados dos puntos P y Q de una recta, se puede escoger el sistema de coordenadas de manera tal que la coordenada de P sea cero y la coordenada de Q sea positiva.

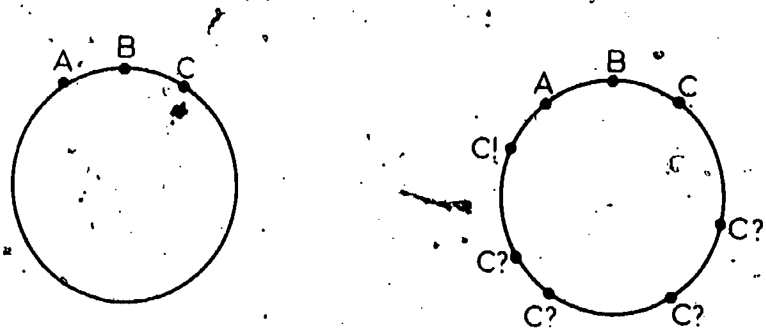
Todos sabemos lo que se entiende al decir que un punto B está entre dos puntos A y C. Pues que A, B y C están en la misma recta, y que están colocados de esta manera:



o de esta otra:



Sin embargo, si vamos a utilizar la interposición (propiedad de estar "entre") como una relación matemática, mejor valdría ofrecer una definición matemática que diga exactamente lo que queremos decir, porque no podemos depender de cómo nos sintamos al querer interpretar algo. Para juzgar esta necesidad, veamos lo que ocurre, en una situación semejante, con una circunferencia. En la figura de la izquierda, parece razonable afirmar que B está entre A y C.



Pero C puede moverse alrededor de la circunferencia ocupando muchas posiciones sin necesidad de pasar por A ó B, hasta quedar justamente a la izquierda de A, como se ve en la figura de la derecha. En la posición final, indicada por el signo de admiración, parece como que A está entre B y C. Por su aspecto, las circunferencias nos confunden. Dados tres puntos cualesquiera en una circunferencia, es bastante razonable considerar que cada uno de ellos está entre los otros dos.

La interposición en una recta nada tiene de confusa. Es fácil afirmar exactamente qué significa el que un punto de una recta está entre otros dos. Podemos hacerlo de la siguiente manera:

<u>Definición</u>: B está <u>entre</u> A y C si (1) A, B, y C son puntos distintos de la misma recta y (2) AB + BC = AC.

Es fácil comprobar que esta definición expresa realmente lo que el sentido común nos dice acerca de la idea de interposición ("estar entre"). Sin embargo, convendría quizás explicar en qué forma se usa generalmente el idioma en las definiciones matemáticas.

En la definición de interposición hay dos afirmaciones unidas por la palabra <u>si</u>. Lo que queremos decir es que las afirmaciones que aparecen antes y después de la palabra <u>si</u> son completamente equivalentes. Siempre que en algún teorema o problema, sean válidas o puedan demostrarse las condiciones (1) y (2), entonces podemos concluir que B está entre A y C. Y siempre que hallemos que B está entre A y C, podremos concluir que ambas, (1) y (2), son válidas. Esto no es un uso estrictamente lógico de la palabra <u>si</u>, y en particular la palabra <u>si</u> nunca se emplea en esta forma en los postulados, teoremas, o problemas. Sin embargo, en las definiciones sí es corriente tal uso.

El siguiente teorema describe la interposición en términos de coordenadas en una recta.

<u>Teorema</u> <u>2-1</u>. Sean A, B, C tres puntos en una recta, con coordenadas x, y, z. Si

$$x < y < z,$$

entonces B está entre A y C.

<u>Demostración</u>: Toda vez que $x < y < z$, sabemos que los números $y - x$, $z - y$, $z - x$ son todos positivos. Por lo tanto, por la definición del valor absoluto,

$$|y - x| = y - x,$$
$$|z - y| = z - y,$$
$$|z - x| = z - x.$$

Así, por el postulado de la regla,

$$AB = y - x,$$
$$BC = z - y,$$
$$AC = z - x.$$

Luego

$$
\begin{aligned}
AB + BC &= (y - x) + (z - y) \\
&= -x + z \\
&= z - x \\
&= AC.
\end{aligned}
$$

En conclusión: por la definición de la interposición, B está entre A y C, que es lo que se quería demostrar.

Conjunto de problemas 2-7a

1. a. Marcamos una escala numérica sobre una recta y -3 cae en R y 4 en S. Si aplicamos el postulado de colocación de la regla, y tenemos el 0 en R y un número positivo en S, ¿cuál sería ese número?
   b. La misma pregunta si -4 cae en R y -10 en S.
   c. La misma pregunta si 8 cae en R y -2 en S.
   d. La misma pregunta si $-4\frac{1}{2}$ cae en R y 4 en S.
   e. La misma pregunta si 5.2 cae en R y 6.1 en S.
   f. La misma pregunta si x_1 cae en R y x_2 en S.
2. Explica brevemente cómo el postulado de colocación de la regla simplifica el procedimiento del postulado de la regla para calcular la distancia entre dos puntos.
3. Supongamos que R, S y T están alineados (son puntos de la misma recta). ¿Qué se podrá afirmar respecto a las longitudes RS, ST y RT si S está entre R y T? (Repasa la definición de "estar entre".)
4. 

AC y BC son ambas iguales a 8.
La coordenada de C es 4. La coordenada de B es mayor que la de C. ¿Cuáles son las coordenadas de A y B?
5. Si a, b, c son coordenadas de puntos alineados, y si $|a - c| + |c - b| = |a - b|$, ¿cuál es la coordenada del punto que está entre los otros dos? Debes estar dispuesto a explicar

el porqué de tu respuesta.

6. Si x_1, x_2, x_3 son coordenadas de puntos en una recta de tal modo que $x_3 > x_1$ y también $x_2 < x_1$, ¿qué punto está entre los otros dos? ¿Qué teorema se utilizaría para demostrar tu contestación?

7. Considera un sistema de coordenadas en el cual se le asigna el número 0 al punto A, el número positivo r a B, el número $\frac{1}{3}r$ a E y el número $\frac{2}{3}r$ a F. Demuestra que:

   a. $AE = EF = FB$

   b. E está entre A y F.

*8. Demuestra: Si A, B, C son tres puntos en una recta con coordenadas x, y, z, respectivamente, y si $x > y > z$, entonces B estará entre A y C.

Teorema 2-2. Para cada tres puntos cualesquiera de la misma recta, uno de ellos estará entre los otros dos.

Demostración: Sean los puntos A, B y C. Por el postulado de la regla, habrá un sistema de coordenadas para la recta. Sean x, y, z las coordenadas de A, B, C. Tenemos seis posibilidades:

(1) $x < y < z$,

(2) $x < z < y$,

(3) $y < x < z$,

(4) $y < z < x$,

(5) $z < x < y$,

(6) $z < y < x$.

En cada uno de esos casos, el teorema 2-1 implica la veracidad del teorema 2-2. En los casos (1) y (6), B está entre A y C; en los casos (2) y (4), C está entre A y B; en los casos (3) y (5), A está entre B y C.

Teorema 2-3. De cada tres puntos diferentes de la misma recta, solamente uno estará entre los otros dos.

Otro enunciado del teorema. Si A, B, C, son tres puntos diferentes de la misma recta, y si B está entre A y C, entonces A no está entre B y C, ni tampoco C está entre A y B.

(Ocurre con frecuencia que es más fácil leer, y referirse a un teorema si está expresado en palabras. Pero para demostrar teoremas, necesitamos generalmente emplear una notación dándole nombres a los objetos de que vamos a hablar. Por esta razón, daremos con frecuencia nuevos enunciados de los teoremas como acabamos de hacer con el teorema 2-3. El nuevo enunciado en cierto sentido nos adelanta la demostración.)

Demostración: Si B está entre A y C, entonces

$$AB + BC = AC.$$

Si A está entre B y C, entonces

$$BA + AC = BC.$$

Necesitamos demostrar que estas dos ecuaciones no pueden ambas ser ciertas al mismo tiempo.

Si la primera ecuación es cierta, entonces

$$AC - BC = AB.$$

Si la segunda ecuación es cierta, entonces

$$AC - BC = -BA = -AB.$$

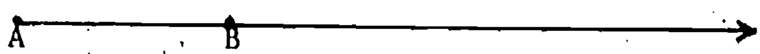
Pero sabemos que AB es positivo y -AB es negativo. En consecuencia, estas ecuaciones no pueden ambas ser ciertas, porque el número AC - BC no puede ser a la vez positivo y negativo.
En forma completamente semejante, podemos demostrar que C no está entre A y B.

Definiciones. Para dos puntos cualesquiera A y B, el segmento $\overline{AB}$ es el conjunto de los puntos A y B más todos los puntos que están entre A y B. Los puntos A y B se llaman los extremos de $\overline{AB}$.

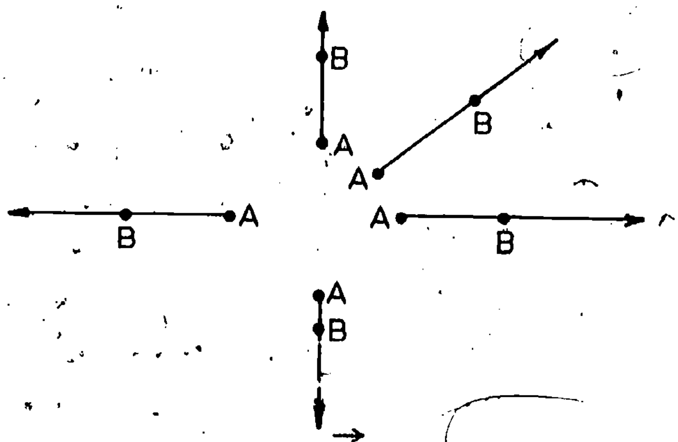
Notarás que hay una gran diferencia entre el segmento $\overline{AB}$ y la distancia AB. El segmento es una figura geométrica, esto es, un conjunto de puntos. La distancia es un número que nos dice cuán lejos está A de B.

<u>Definición</u>. La distancia AB se llama la <u>longitud</u> del segmento $\overline{AB}$.

Un rayo, o semirrecta, es una figura como ésta:



La flecha a la derecha sirve para indicar que el rayo incluye <u>todos</u> los puntos de la recta a la derecha del punto A, y también el punto A. El rayo se representa por $\overrightarrow{AB}$. Notarás que cuando escribimos $\overrightarrow{AB}$, entendemos simplemente el rayo que empieza en A, pasa por B, y sigue indefinidamente en la misma dirección. El rayo puede presentarse de cualquiera de las formas siguientes:

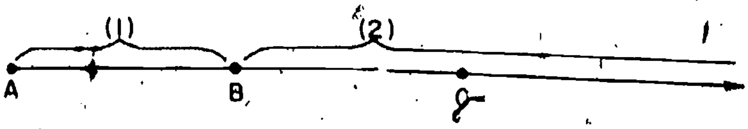


Esto es, la flecha del símbolo $\overrightarrow{AB}$ siempre irá en la dirección de A a B cualquiera que sea la dirección que apunte el rayo en el espacio.

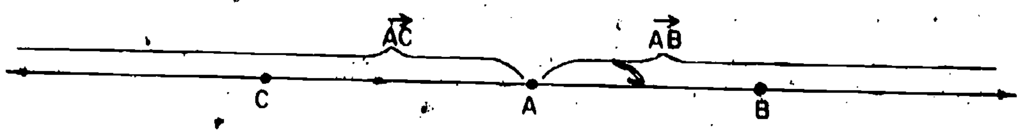
Habiendo explicado intuitivamente lo que nos interesaba, procederemos a ofrecer una definición precisa.

<u>Definiciones</u>. Sean A y B puntos de una recta L. El <u>rayo</u> $\overrightarrow{AB}$ es el conjunto de puntos que es la reunión de (1) el segmento $\overline{AB}$ y (2) el conjunto de todos los puntos C para los que es cierto que B está entre A y C. El punto A se llama el <u>extremo</u> o el origen de $\overrightarrow{AB}$.

Estas dos partes del rayo se indican a continuación:

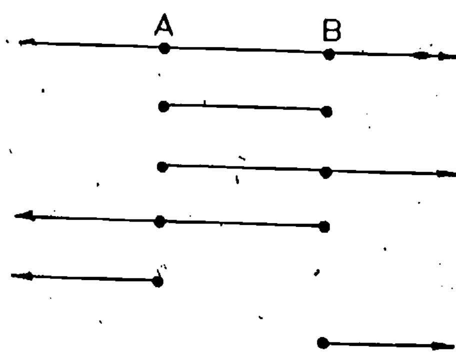


Si A está entre B y C sobre L, entonces los dos rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ "irán en direcciones opuestas", así:



<u>Definición</u>. Si A está entre B y C, entonces $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ se llaman <u>rayos opuestos</u>. Notarás que un par de puntos A, B determina seis figuras geométricas:

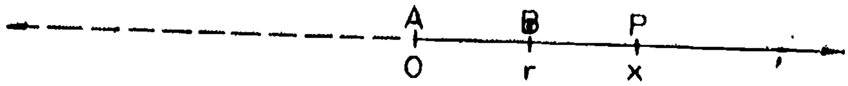
La recta $\overleftrightarrow{AB}$,
El segmento $\overline{AB}$,
El rayo $\overrightarrow{AB}$,
El rayo $\overrightarrow{BA}$,
El rayo opuesto a $\overrightarrow{AB}$,
El rayo opuesto a $\overrightarrow{BA}$.



El postulado de colocación de la regla tiene todavía otras tres consecuencias útiles y sencillas.

<u>Teorema 2-4</u>. (El teorema de la localización de puntos.) Sea $\overrightarrow{AB}$ un rayo, y sea x un número positivo. Entonces existe exactamente un punto P en $\overrightarrow{AB}$ tal que AP = x.

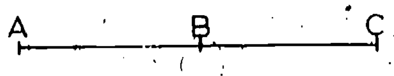
<u>Demostración</u>: Por el postulado de colocación de la regla, podemos escoger un sistema de coordenadas en la recta $\overleftrightarrow{AB}$ de manera que la coordenada de A sea igual a 0 y la coordenada de B sea un número positivo r:



(En la figura, las letras encima de la recta representan puntos, y las letras debajo de la recta representan los números correspondientes.)

Sea P el punto cuya coordenada es x. Entonces P pertenece a $\overrightarrow{AB}$ y $AP = |x - 0| = |x| = x$, porque x es positivo. Como solamente un punto del rayo tiene coordenada igual a x, sólo un punto del rayo estará a una distancia x de A.

<u>Definición</u>. Un punto B se llama <u>punto medio</u> de un segmento $\overline{AC}$ si B está entre A y C, y AB = BC.



<u>Teorema 2-5</u>. Todo segmento tiene exactamente un punto medio.

<u>Demostración</u>: Nos interesa obtener un punto B, sobre el segmento $\overline{AC}$, tal que AB = BC. Sabemos, por la definición de segmento, que B está entre A y C. Por lo tanto, AB + BC = AC. De estas dos ecuaciones deducimos que 2AB = AC, o $AB = \frac{1}{2}AC$. Toda vez que B está en el segmento $\overline{AC}$, tendrá que estar también en el rayo $\overrightarrow{AC}$, y el teorema 2-4 nos dice que hay exactamente un punto tal B.

<u>Definición</u>. Decimos que el punto medio de un segmento <u>biseca</u> al segmento. Con mayor generalidad, decimos que cualquier figura cuya intersección con el segmento sea el punto medio del segmento <u>biseca</u> al segmento.

<u>Conjunto de problemas 2-7b</u>

1. Si tres puntos están en una recta, ¿cuántos de ellos no están entre los otros dos?
2. ¿De qué definición o teorema es un caso particular cada uno de los siguientes? Si tres puntos alineados R, S, T, tienen respectivamente las coordenadas 4, 5, 8:
   a. S está entre R y T, porque $4 < 5$ y $5 < 8$.
   b. R no puede estar entre S y T, ya que S está entre R y T.
   c. S está entre R y T, porque RS + ST = RT.

3. Describe, en lenguaje matemático, qué puntos están incluidos en:

   a. $\overline{XY}$ b. $\overrightarrow{XY}$

*4. Muestra cómo la restricción "entre A y C" de la definición del punto medio de $\overline{AC}$ resulta innecesaria, demostrando el siguiente teorema:

   Si B es un punto en la recta $\overleftrightarrow{AC}$ tal que $AB = BC$, entonces B está entre A y C. (Sugerencia: Muestra que A no puede estar entre B y C ni tampoco C entre A y B. Utiliza el álgebra para mostrarlo. Completa la demostración usando el teorema 2-2.)

*5. Suponte que P es un punto en la recta M y que r es un número positivo. ¿Cuál de los teoremas anteriores nos dice que hay exactamente dos puntos en M cuya distancia a P es r, el número dado?

*6. Demuestra que si B está entre A y C, entonces $AC > AB$.

7. a. Copia el siguiente párrafo. Para cada par de letras, busca el símbolo apropiado, si lo hay, que sea necesario para completar el sentido:

   XZ contiene los puntos Y, R, pero XZ no contiene ni al punto Y ni a R. R está en XZ pero Y no lo está. YZ + ZR = YR.

   b. Haz un dibujo en que ilustres la posición relativa de los cuatro puntos.

Problemas de repaso

1. Considera los siguientes conjuntos:

   S_1 es el conjunto de todos los varones del décimo grado.

   S_2 es el conjunto de todas las niñas del décimo grado.

   S_3 es el conjunto de todos los estudiantes de geometría del décimo grado.

S_4 es el conjunto de todos los alumnos de la escuela superior.

S_5 es el conjunto de todos los alumnos del décimo grado.

a. ¿Cuál es la intersección de S_1 y S_5?

b. ¿Cuál es la reunión de S_3 y S_4?

c. ¿Cuál es la intersección de S_3 y S_4?

d. ¿Cuál es la reunión de S_1 y S_2?

e. ¿Cuál es la intersección de S_1 y S_2?

2. a. ¿Cuántos cuadrados tiene un número positivo dado?

   b. ¿Cuántas raíces cuadradas?

   c. ¿Será alguna vez negativo el valor de $\sqrt{3}$?

3. a. Dibuja una recta y localiza en ella los siguientes puntos. (La coordenada de cada punto aparece en paréntesis.) Usa cualquier unidad de medida que te plazca, pero una vez escogida, sigue empleando la misma unidad en todo el ejercicio:

   P (2), Q (-1), R (0), S (-3), T (4).

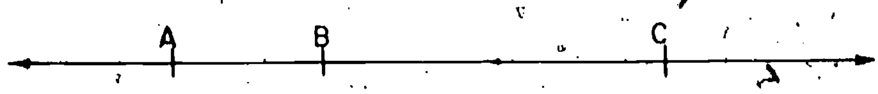
   b. Halla PQ, RT, TR, PT, QS.

4. a. Si $a > b$, entonces $a - b$ es ________.

   b. Si $0 < k$ y $k^2 < 4$, entonces k es ________.

   c. Si $a < b$, entonces $a - b$ es ________.

5.



   a. Escribe una ecuación que describa las posiciones relativas de estos tres puntos.

   b. ¿En qué condiciones será B el punto medio de $\overline{AC}$?

6. Cuatro puntos A, B, C, D están colocados a lo largo de una recta de manera que $AC > AB$ y $BD < BC$. Dibuja la recta con los cuatro puntos en su sitio. ¿Habrá más de un orden posible? Explícalo.

7. Los pares de mayúsculas del siguiente párrafo representan o bien números, o rectas, o segmentos, o rayos. Indica cuál es cada uno, colocando sobre cada par el símbolo, si lo hay, que falte.

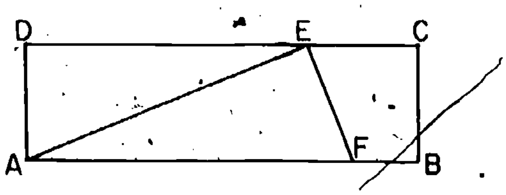
"AB + BC = AC. DB contiene a los puntos A y C, pero DB no contiene ni al punto A ni a C. A pertenece a DB pero C no". Haz un dibujo que ilustre tu respuesta.

8. A es el conjunto de todos los enteros x e y cuya suma es 13. B es el conjunto de todos los enteros cuya diferencia es 5. ¿Cuál es la intersección de A y B?

9. Juan dijo: "Mi casa está en la Calle Oeste a mitad de camino entre la de Guillermo y la de Pepe". Pedro dijo: "¡Así está la mía!" ¿Qué puedes concluir con relación a Juan y Pedro?

10. N hombres se sientan en un banco recto. ¿De cuántos se puede decir, "El se sienta entre dos personas"?

11. Contesta las preguntas (a) hasta la (e), utilizando la siguiente figura:



a. Describe la intersección del triángulo AEF y el rectángulo ABCD.

b. Describe la intersección del segmento $\overline{EF}$ y el rectangulo ABCD.

c. Describe la reunión de los segmentos $\overline{AF}$, $\overline{EF}$, y $\overline{AE}$.

d. Describe la intersección de los segmentos $\overline{AE}$ y $\overline{BC}$.

e. Describe la reunión del triángulo AEF y el segmento $\overline{AE}$.

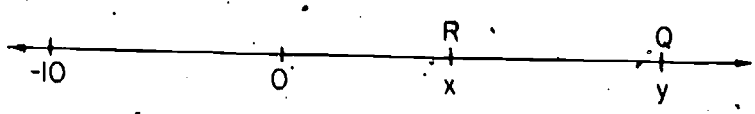
12. Dado un grupo de cinco hombres (los señores Alvarez, Benítez, Chávez, Díaz y Enríquez). a. Del grupo, ¿cuántos comités diferentes de 4 miembros se pueden formar? b. ¿Y de dos miembros? c. ¿Y de tres?

13. Dado que A, B, C están alineados y que AB = 3 y BC = 10, ¿podrá ser AC = 6? Haz un dibujo para explicar tu respuesta.

14. Indica cuáles de los siguientes enunciados son ciertos y cuáles son falsos. Para aquellos que sean falsos, da una contestación correcta.

a. $|-13+7| = 20$
b. $|-8-9| = 17$
c. $|5a-6a| = |a|$
d. $|9+2| = 11$
e. $|-4| - |-11| = -7$
f. $|(3a-6) - (a-7)| = |2a+1|$
g. $|7| - |9| = -2$
h. $|-11| - |-4| = -7$

15.



Mirando esta escala numérica, Juan dijo: "La longitud de $\overline{RQ}$ es $|y-x|$". Samuel insistió en que y-x nada más era también correcto para dar la longitud de $\overline{RQ}$. ¿Estás de acuerdo con Samuel? Explícalo.

16. La primera numeración de los puntos de la recta de abajo representa un sistema de coordenadas. De acuerdo con los postulados 2 y 3, ¿cuáles de las otras numeraciones no son sistemas de coordenadas?

	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
a.	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
b.	0	1	2	3	4	5	4	3	2	1	0
c.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
d.	-11	-12	-13	-14	-15	-16	-17	-18	-19	-20	-21
e.	-3	2	1	0	-1	2	3	4	5	6	7

*17. Considera los puntos de una recta cuyas coordenadas se describen así:

a. $x < 3$
b. $x = 1$
c. $x > 2$
d. $x \leq 1$

e. $x = -3$

f. $|x| \leq 3$

g. $|x| > 2$

h. $|x| \geq 0$

¿Cuáles de los conjuntos anteriores representan rayos?

¿Cuáles representan puntos?; ¿rectas?; ¿segmentos?

Capítulo 3

RECTAS, PLANOS Y SEPARACION

3-1. Rectas y planos en el espacio

En el capítulo anterior, hablábamos sólo acerca de rectas y de la medida de la distancia. Procederemos ahora al estudio de los planos y del espacio. Recordemos que nuestros términos fundamentales no definidos son punto, recta y plano. Toda recta es un conjunto de puntos y todo plano es un conjunto de puntos.

Definición: El conjunto de todos los puntos se llama espacio.

En esta sección explicaremos algunos de los términos que vamos a emplear al hablar acerca de puntos, rectas y planos, y enunciaremos algunos principios fundamentales referentes a ellos. La mayor parte de estos principios fundamentales se enunciarán como postulados; otros como teoremas tan sencillos que sería razonable aceptarlos sin demostración y llamarlos postulados, pero no haremos eso. El primero de los teoremas se demostrará en esta sección y los demás se demostrarán, a base de los postulados, en un capítulo posterior. En el presente, sin embargo, no nos preocuparemos mucho por este asunto, en un sentido u otro; vamos a dedicarnos simplemente a tratar de presentar estos principios fundamentales directamente tales como son.

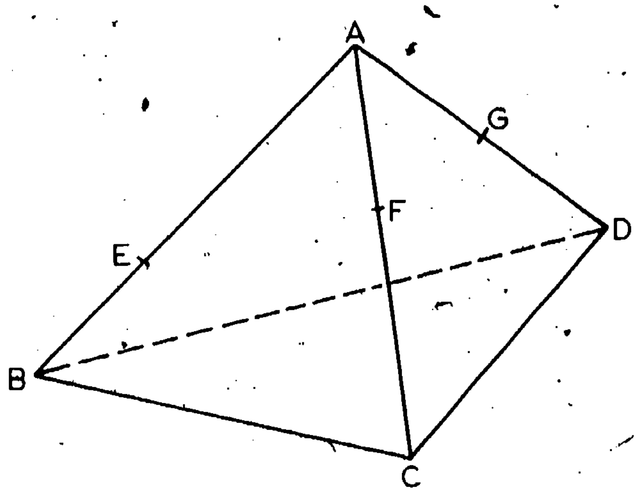
Conjunto de problemas 3-1a

1. Haz dos marcas en un pedazo de papel, o en la pizarra, para representar los puntos A y B. ¿Cuántas líneas rectas puedes dibujar que pasen por A y B? ¿Qué ocurre si consideras "línea" en un sentido general que no sea el de "recta"?
2. Coge un trozo duro de cartón o tu libro. ¿Podrás mantenerlo en una posición fija si lo colocas sobre las puntas de dos lápices? ¿Cuál es el número mínimo de lápices necesario para sostenerlo en esa forma?

3. Piensa que la cubierta de tu libro es parte de un plano. ¿Cuántos puntos serán necesarios para determinar ese plano?
4. ¿Cuántos extremos tiene una recta? ¿Cuántos extremos tiene un segmento?

Definición: Los puntos de un conjunto están alineados si hay una recta que los contenga a todos.

Definición: Los puntos de un conjunto serán coplanarios (estarán en un plano) si hay un plano que los contenga a todos.



Por ejemplo, en este dibujo de una pirámide triangular, los puntos A, E y B están alineados y también lo están A, F y C, pero no lo están A, B y C. Los puntos A, B, C y E están en un plano y también están en un plano A, C, D, F y G, pero, en cambio, A, B, C y D no lo están.

Una de las propiedades que nos interesa tengan los conjuntos de puntos llamados rectas, planos y espacio es que contengan muchos puntos. Igualmente, un plano deberá en alguna forma ser "más grande" que una recta y el espacio deberá ser "más grande" que cualquier plano. El postulado de la regla garantiza que haya muchos puntos en una recta; en cuanto a los planos y el espacio, el siguiente postulado nos ofrece las propiedades que deseamos:

> Postulado 5. (a) Todo plano contiene por lo menos tres puntos que no están alineados.
>
> (b) El espacio contiene por lo menos cuatro puntos que no están en un plano.

Por conveniencia, ya que pronto nos referiremos a él, reproducimos el postulado 1.

> Postulado 1. Dados dos puntos diferentes cualesquiera, habrá exactamente una recta que los contenga.

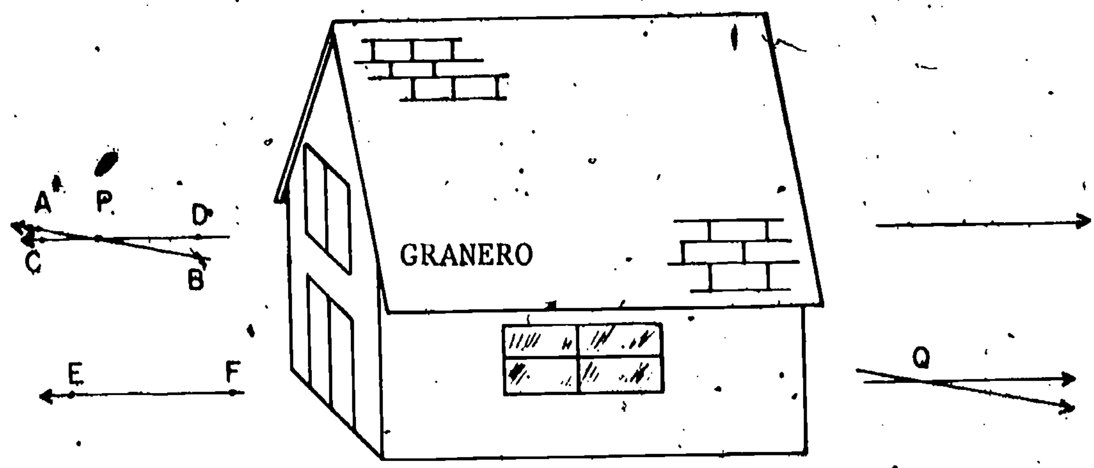
Teorema 3-1. Dos rectas diferentes se intersecan a lo sumo en un punto.

La demostración del teorema se deduce del postulado 1. Es imposible que dos rectas diferentes se corten en dos puntos diferentes P y Q, porque por el postulado 1 hay solamente una recta que contiene a P y a Q.

Conjunto de problemas 3-1b

1. Datos: 1. L_1 y L_2 son rectas diferentes.
   2. El punto P está en L_1 y L_2.
   3. El punto Q está en L_1 y L_2.

   ¿Qué podemos decir de cierto acerca de P y Q?
2. ¿Cuántas rectas pueden contener un punto dado? ¿Dos puntos dados? ¿Tres puntos dados cualesquiera?
3. El diagrama presenta tres rectas diferentes $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$, y $\overleftrightarrow{EF}$, que están parcialmente ocultas por un granero. Si $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ se intersecan a la izquierda del granero, ¿qué postulado dice que no pueden también intersecarse a la derecha del granero?



4. Dibuja un diagrama para ilustrar cada parte de este ejercicio y justifica tus contestaciones en términos del postulado 1.

   a. ¿Cuántas rectas se pueden trazar pasando por los mismos dos puntos fijos?

   b. ¿Cuántas rectas se pueden trazar por tres puntos, tomados de dos en dos?

5. a. ¿Cuántas rectas se pueden trazar que pasen por cuatro puntos en un plano, tomados de dos en dos, si no hay tres de los puntos que estén alineados? (Sugerencia: Denota los puntos por A, B, C, D.)

   b. ¿Cuántas rectas habría si los puntos A, B y C estuvieran alineados?

   c. Dibuja un diagrama para (a) y (b).

*6. "Un punto está en una recta" y "una recta contiene a un punto" son dos maneras de decir la misma cosa.

   a. Las definiciones de estar alineados y ser coplanarios están enunciadas en la segunda forma. Enuncia estas definiciones de nuevo utilizando la primera forma.

   b. La primera parte del postulado 5 está enunciada utilizando la segunda forma. Enuncia de nuevo esta parte del postulado utilizando la primera forma.

*7. Al igual que en el problema 6, el postulado 1 está redactado en una de las dos formas. ¿Cuál? Enuncia de nuevo el postulado 1 en la otra forma.

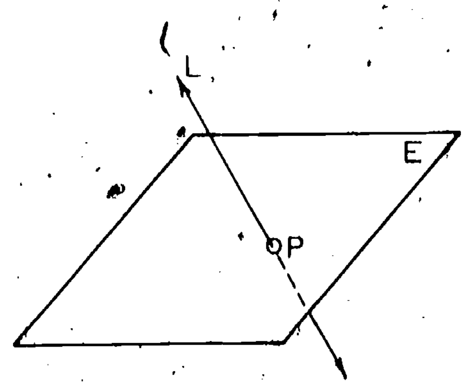
Según el postulado 5, un plano contiene por lo menos tres puntos. ¿Tendrá algunos más? No podemos, a base de los postulados con que contamos, asegurar que sí los tiene, y por eso presentamos el

<u>Postulado 6</u>: Si dos puntos están en un plano, entonces la recta que los contiene está en el mismo plano.

Este postulado dice en esencia que un plano es llano, esto es, que si contiene parte de una recta contiene toda la recta.

<u>Teorema 3-2</u>. Si una recta interseca a un plano que no la contiene, entonces la intersección será un solo punto.

Esto se deduce del postulado 6 de la misma manera que el teorema 3-1 se deduce del postulado 1.

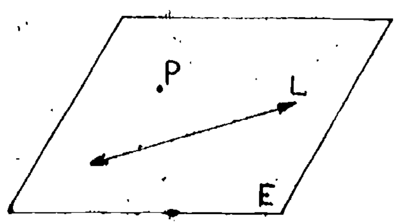


La figura nos muestra la recta L, que corta a un plano E en un punto P. Vas a ver muchos dibujos como éste, de figuras en el espacio, y aprenderás a dibujarlas tú mismo. Deberás examinarlas cuidadosamente para ver cómo se comportan. Un plano E se indica generalmente dibujando un rectángulo en E. Visto en perspectiva, el rectángulo se nos presenta parecido a un paralelogramo. La recta L corta al plano E en P. Parte de L está punteada. Esta es la parte que "no puedes ver", porque te lo impide la porción rectangular de E (supuesta opaca). (El apéndice V explica cómo dibujar figuras tridimensionales.)

Hemos visto que dos puntos determinan una recta. El siguiente postulado especifica una manera análoga de determinar un plano.

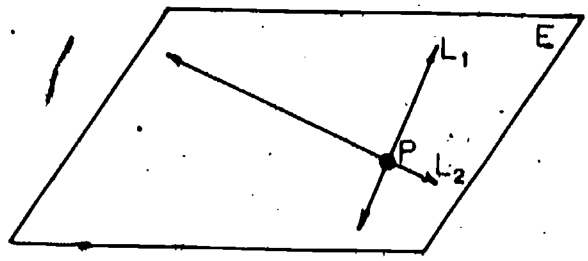
> Postulado 7. Tres puntos cualesquiera están por lo menos en un plano, y tres puntos cualesquiera no alineados están exactamente en un plano. Más brevemente, tres puntos cualesquiera son coplanarios y tres puntos cualesquiera no alineados determinan un plano.

Teorema 3-3. Dada una recta y un punto fuera de ella, hay exactamente un plano que los contiene a ambos.



La figura nos muestra un plano E determinado por la recta L y el punto P.

Teorema 3-4. Dadas dos rectas que se cortan, hay exactamente un plano que las contiene.



La figura nos muestra las rectas L_1 y L_2, que se cortan en un punto P. E es el plano que contiene ambas rectas.

Finalmente, enunciamos otro postulado más:

> <u>Postulado</u> <u>8</u>. Si dos planos diferentes se cortan, su intersección es una recta.

<u>Conjunto de problemas 3-1c</u>

1. ¿Cuántos planos pueden contener un punto dado? ¿Dos puntos dados? ¿Tres?
2. En un piso liso, ¿por qué a veces cojeará una mesa de cuatro patas mientras una de tres patas está siempre firme?
3. Completa: Dos rectas diferentes pueden intersecarse en ____________, y dos planos diferentes pueden intersecarse en _____________.
4. ¿Podrán dos puntos no estar alineados? ¿Y tres puntos? ¿Y cuatro? ¿Y n puntos?
5. Redacta una definición cuidadosa de un conjunto de puntos no alineados.
6. Dados: 1. Los puntos A, B, C en el plano E.
   2. Los puntos A, B, C en el plano F.

   ¿Podrás concluir que el plano E es el mismo que el plano F? Explícalo.

7. Completa los siguientes enunciados a base del diagrama que se acompaña:

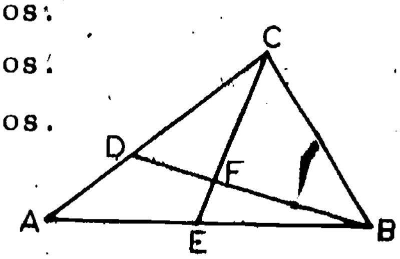
   a. Los puntos D, C, y ______ están alineados.

   b. Los puntos E, F, y ______ están alineados.

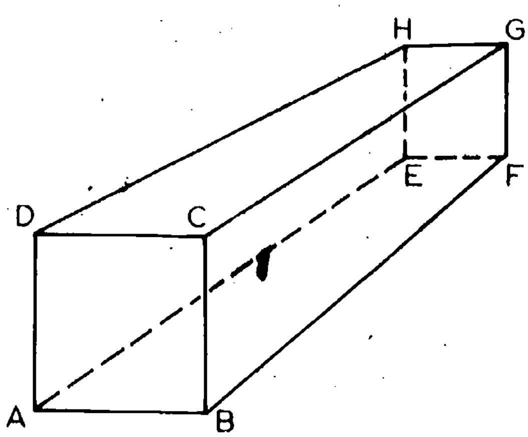
   c. Los puntos B, ______, y A están alineados.

   d. Los puntos A, B, C, D, E, F, son

   ______________________.



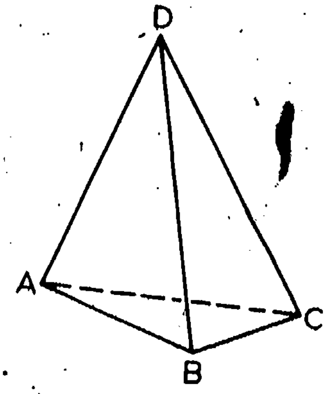
8. La siguiente figura representa un cuerpo rectangular. Fíjate en ella hasta que notes bien cómo se ve en un dibujo tridimensional. Después, cierra el libro y dibuja una figura como ésta para ti mismo. Practica hasta que estés satisfecho del resultado.



9. Después de terminar el ejercicio anterior, dibuja una figura que represente un cubo.

10. Dibuja un plano E, utilizando un paralelogramo para indicar el plano. Dibuja un segmento que esté en el plano E. Traza una recta que interseque al plano E pero no al segmento. Usa el punteado para representar la parte de la recta que "oculta" el plano.

11. La figura de la derecha es una pirámide triangular, o tetraedro. Tiene cuatro vértices: A, B, C, D, cada tres de los cuales no están alineados.



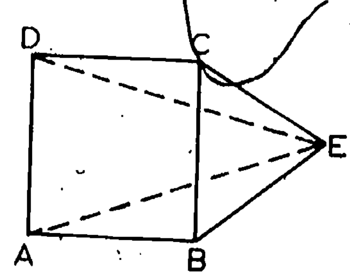
a. Da una definición para una arista de este tetraedro. Usa las ideas del texto como ayuda para dar la definición.

b. ¿Cuántas aristas tiene el tetraedro? Nómbralas.

c. ¿Hay algunos pares de aristas que no se intersequen?

d. Una cara es la superficie triangular determinada por tres vértices cualesquiera. Hay cuatro caras: ABC, ABD, ACD, BCD. ¿Hay algunos pares de caras que no se intersequen? Explícalo.

12. ¿Cuántos planos diferentes (determinados por ternas de los puntos indicados con letras) hay en la pirámide de la derecha? Haz una lista completa. (Debes obtener siete planos.)



3-2. Teoremas enunciados a base de hipótesis y conclusión

Casi todo teorema es una afirmación de que si una cierta cosa es verdadera, entonces otra cosa es también verdadera. Por ejemplo, el teorema 3-1 dice que si L_1 y L_2 son dos rectas diferentes, entonces L_1 interseca a L_2 a lo más en un punto. La parte si de un teorema se llama la hipótesis, o la información dada, y la parte entonces se llama la conclusión, o lo que hay que demostrar. Así, podemos escribir el teorema 3-1 de la siguiente manera:

Teorema 3-1. Hipótesis: L_1 y L_2 son dos rectas diferentes.
Conclusión: L_1 interseca a L_2 a lo más en un punto.

Los postulados, desde luego, son como teoremas, excepto que no van a ser demostrados. La mayor parte de ellos se pueden poner en la forma <u>si</u> ... <u>entonces</u>, igual que los teoremas. El postulado 1 puede enunciarse así:

Hipótesis: P y Q son dos puntos diferentes.

Conclusión: Hay exactamente una recta que contiene a P y Q.

Hay casos en los que esta forma de hipótesis-conclusión no parece natural o útil. Por ejemplo, la segunda parte del postulado 5, expresada en esta forma, nos parece chabacana:

Hipótesis: S es el espacio.

Conclusión: No todos los puntos de S están en un plano.

Tales casos, sin embargo, son muy raros.

No es necesario, desde luego, que todos los teoremas se enuncien en la forma hipótesis-conclusión. Debe estar claro, no importa en qué forma se enuncie el teorema, cuál de sus partes es la hipótesis y cuál la conclusión. Es muy importante, sin embargo, que podamos enunciar un teorema en esta forma cuando queramos, porque de lo contrario lo que ocurre probablemente es que no entenderemos exactamente lo que dice el teorema.

<u>Conjunto de problemas 3-2</u>

1. Indica qué parte de cada uno de los siguientes enunciados es la hipótesis y qué parte es la conclusión. Si fuese necesario, redáctalos primero en la forma si-entonces.
   a. Si Juan está enfermo, debe ir a ver un médico.
   b. Agrada conocer a una persona pelirroja.
   c. Cuatro puntos están alineados si están en una recta.
   d. Si hago bien mis asignaciones, obtendré una buena nota.
   e. Si un conjunto de puntos está en un plano, los puntos son coplanarios.
   f. Dos rectas que se intersecan determinan un plano.
2. Redacta las siguientes afirmaciones en la forma condicional (si-entonces):

a. Dos rectas diferentes tienen a lo sumo un punto en común.

b. Todo estudiante de geometría sabe cómo sumar enteros.

c. Cuando llueve, fluye.

d. Una recta y un punto fuera de la recta están contenidos exactamente en un plano.

e. Una acción deshonesta no es ética.

f. Dos rectas paralelas determinan un plano.

3. Empleando las palabras "si" y "entonces", escribe en forma condicional el postulado 1 y el teorema 3-1. Indica en cada caso la hipótesis y la conclusión.

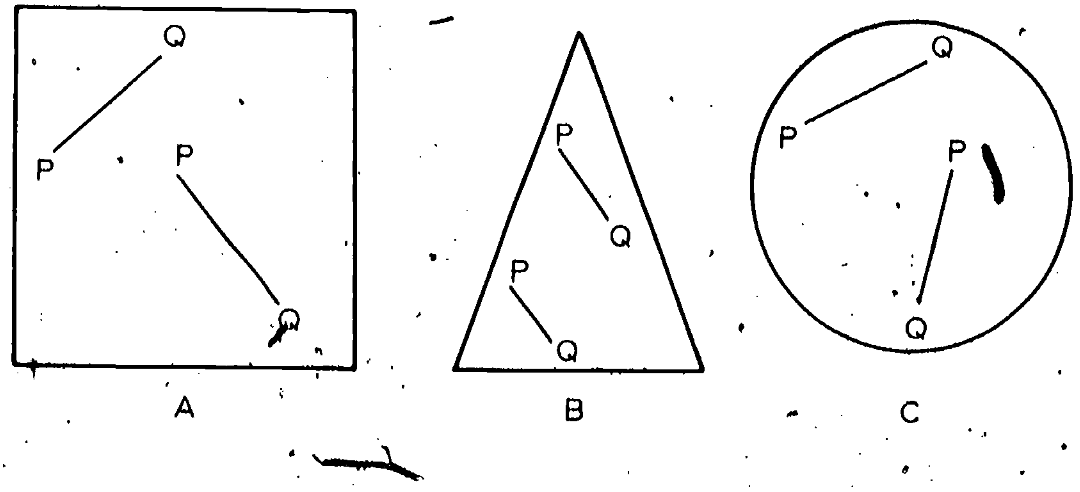
4. a. ¿Significa el siguiente enunciado lo mismo que el teorema 3-4? "Dos rectas siempre se intersecan en un punto, y hay exactamente un plano que las contiene". ¿Por qué sí o por qué no?

b. Redacta el teorema 3-4 en la forma de "hipótesis y conclusión".

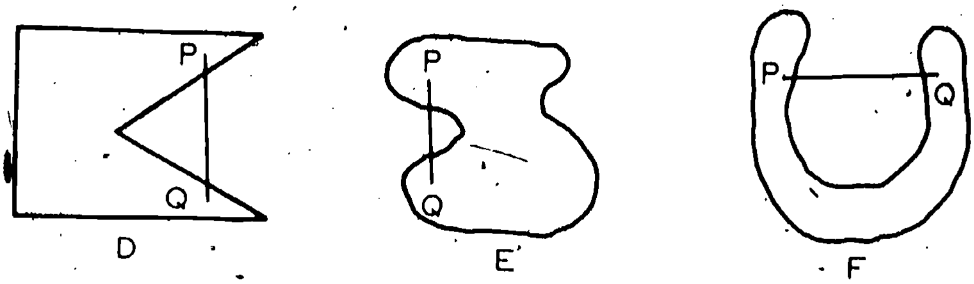
3-3. Conjuntos convexos

Definición: Un conjunto A se llama convexo si para cada dos puntos P y Q de A, todo el segmento $\overline{PQ}$ está en A.

Por ejemplo, los tres conjuntos abajo presentados son convexos.

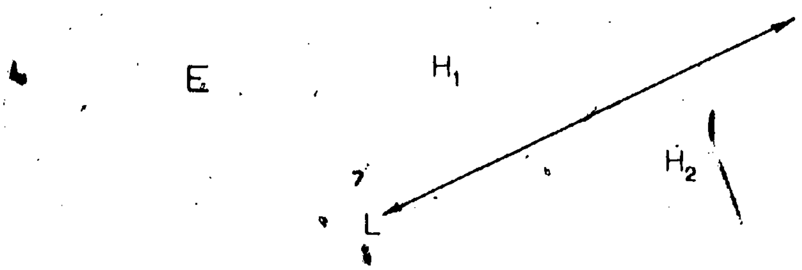


Aquí, cada uno de los conjuntos A, B y C consiste en una región del plano. Hemos hecho notar su convexidad dibujando unos pocos segmentos $\overline{PQ}$. Ninguno de los conjuntos D, E y F, de la figura siguiente, es convexo.



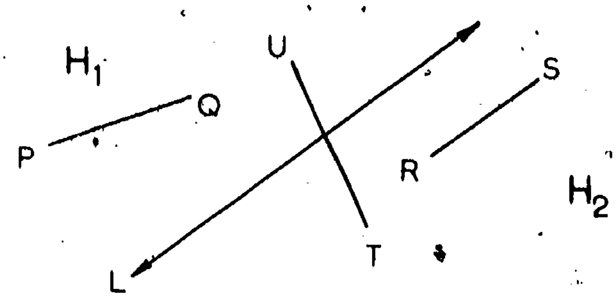
Hemos hecho notar aquí también, por qué no lo son, dibujando pares de puntos P, Q, para los que el segmento $\overline{PQ}$ no cae totalmente dentro del conjunto dado.

Un conjunto convexo puede ser muy extenso. Por ejemplo, dibuja una recta L en un plano E, y sean H_1 y H_2 los conjuntos que están a los dos lados de L, en esta forma:



Los dos conjuntos H_1 y H_2 se llaman semiplanos o lados de L, y la recta L se llama una arista de cada uno de ellos. (Notarás que L no está en ninguno de los dos semiplanos; L no está a un lado de sí misma.)

Si dos puntos P y Q están en el mismo semiplano, digamos en H_1, entonces el segmento $\overline{PQ}$ también está en H_1, y, por lo tanto, no interseca a L.



Así, pues, H_1 es convexo. De la misma manera, H_2 es convexo; esto se ilustra por medio de los puntos R y S en la figura.

Notamos, sin embargo, que si T y U son puntos que pertenecen a diferentes semiplanos, entonces el segmento $\overline{TU}$ interseca a L, porque tú no puedes pasar de un lado a otro de L sin cruzar la arista. Expresamos este principio diciendo que L separa a H_1 de H_2 en el plano, o que L separa al plano en dos semiplanos H_1 y H_2.

Todo lo dicho hasta ahora constituye una presentación aceptable de los principios, pero no está en muy buena forma matemática, porque se basa en un postulado que hasta ahora ni siquiera hemos enunciado. Presentaremos, pues, el postulado necesario y luego discutiremos las definiciones basadas en él.

<u>Postulado 9</u>. (El postulado de separación del plano.) Se da una recta y un plano que la contiene. Los puntos del plano que no están en la recta forman dos conjuntos tales que (1) cada uno de los conjuntos es convexo y (2) si P está en un conjunto y Q en el otro, entonces el segmento $\overline{PQ}$ corta a la recta.

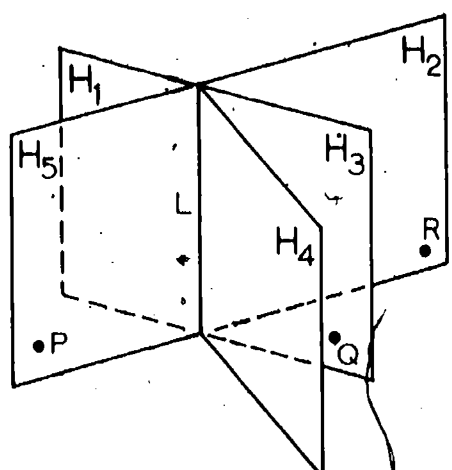
<u>Definiciones</u>: Dada una recta L y un plano E que la contiene, los dos conjuntos determinados por el postulado 9 se llamarán <u>semiplanos</u>, y L se dirá <u>arista</u> de cada uno de ellos. Decimos que L <u>separa</u> a E en los dos semiplanos. Si dos puntos P y Q de E están en el mismo semiplano, decimos que caen <u>al mismo lado</u> de L; si P está en uno de los semiplanos y Q en el otro, caerán <u>a lados opuestos</u> de L.

Vemos que el postulado de separación del plano dice dos cosas acerca de los dos semiplanos en que una recta separa a un plano:

(1) Si dos puntos caen en el mismo semiplano, entonces el segmento entre ellos cae en el mismo semiplano, y, por tanto, <u>nunca</u> corta a la recta.

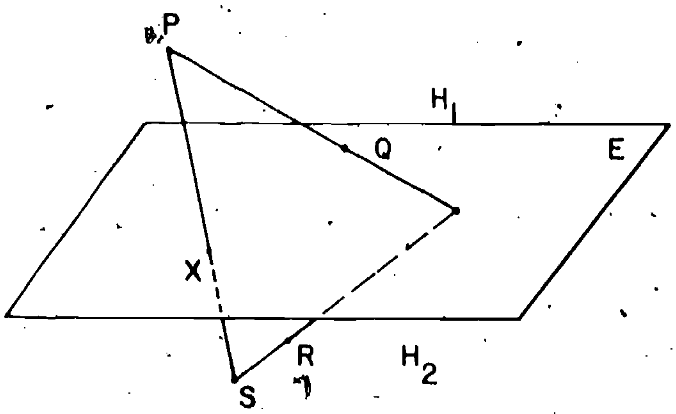
(2) Si dos puntos caen en semiplanos diferentes, entonces el segmento entre ellos <u>siempre</u> corta a la recta.

Si no limitamos nuestra atención al caso de un solo plano, podemos tener muchos semiplanos con la misma arista.



La figura ilustra cinco de los semiplanos que tienen a L como arista. (El número posible de ellos es tan grande como queramos.) Notarás que aunque los puntos P y Q caen en diferentes semiplanos, no podemos decir que estén en lados opuestos de L. Esto se puede decir solamente de puntos como P y R que están en un mismo plano con L.

Un plano separa al espacio, exactamente del mismo modo, en dos conjuntos convexos llamados semiespacios.



En la figura, H_1 es el semiespacio por encima de E, y H_2 es el semiespacio por debajo de E. P y Q están en H_1, y también lo está el segmento $\overline{PQ}$. P y S están en diferentes semiespacios, de manera que el segmento $\overline{PS}$ corta a E en el punto X. R y S están en el mismo semiespacio H_2, y también lo está el segmento $\overline{RS}$.

Esta situación se describe en el siguiente postulado:

> <u>Postulado</u> <u>10</u>. (Postulado de separación del espacio.) Los puntos del espacio que no están en un plano dado forman dos conjuntos tales que (1) cada uno de los conjuntos es convexo y (2) si P está en un conjunto y Q en el otro, entonces el segmento $\overline{PQ}$ corta al plano.

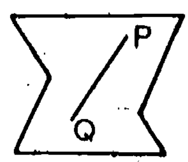
<u>Definiciones</u>: Los dos conjuntos determinados por el postulado 10 se llaman <u>semiespacios</u>, y el plano dado se llama <u>cara</u> de cada uno de ellos.

Notarás que mientras una recta es una arista de una infinidad de semiplanos, un plano es una cara de solamente dos semiespacios.

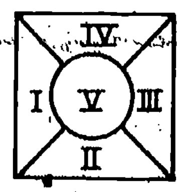
Conjunto de problemas 3-3

Al contestar las siguientes preguntas, y en las situaciones no comprendidas en la estructura axiomática ya dada, deberás atender a tu intuición basada en lo que sepas acerca de los planos y del espacio.

1. Prepárate para discutir oralmente las siguientes preguntas:
   a. ¿Es una recta un conjunto convexo? Explícalo.
   b. ¿Es convexo un conjunto que consiste solamente en dos puntos? ¿Por qué?
   c. ¿Es convexo un rayo?
   d. Si le quitamos un punto a una recta, ¿formarán los puntos restantes un conjunto convexo? ¿Por qué?
   e. ¿Es convexo el conjunto de puntos en la superficie de una bola? ¿Por qué?
   f. ¿Es convexo el espacio encerrado por una superficie esférica?
   g. ¿Separa un punto a un plano?; ¿y a un espacio?; ¿y a una recta?
   h. ¿Separa un rayo a un plano? Y una recta, ¿lo separa? ¿Y un segmento?
   i. ¿Pueden dos rectas en un plano separarlo en dos regiones?; ¿en tres?; ¿en cuatro?; ¿en cinco?
   j. ¿En cuántas partes separa un plano al espacio? ¿Cómo se llaman estas partes?
2. Todo punto de $\overline{PQ}$ está contenido en el conjunto ilustrado a la derecha. ¿Quiere eso decir que el conjunto es convexo? Explícalo.

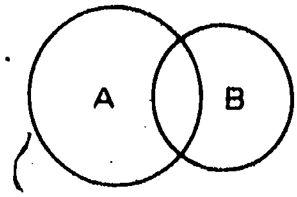


3. ¿Cuáles de las regiones indicadas por los numerales romanos son conjuntos convexos? Justifica tu elección.



4. ¿Es todo plano un conjunto convexo? Explícalo. ¿Qué postulado es indispensable en tu explicación?

5. Los interiores de las circunferencias A y B son cada uno un conjunto convexo.



   a. ¿Será su intersección un conjunto convexo? Explícalo.
   b. ¿Será su reunión un conjunto convexo? Explícalo.

6. Si le quitamos un punto a un plano, ¿será convexo el conjunto de los puntos restantes? ¿Por qué?

7. Si L es una recta en el plano E, ¿será convexo el conjunto de todos los puntos de E que están a un lado de L?

8. Dibuja un cuadrilátero (una figura con cuatro lados) plano cuyo interior sea convexo. Dibuja uno cuyo interior no sea convexo.

9. ¿Será convexo el conjunto que contiene todos los puntos de la superficie y todos los puntos interiores de una bola?

10. ¿Será convexo el conjunto de los puntos de una figura que tenga la forma de una rosquilla?

11. Tenemos dos semiplanos que están contenidos en un plano. Queremos saber si su reunión será todo el plano cuando
   a. los semiplanos tienen la misma arista. (Explícalo)
   b. la arista de un semiplano corta a la arista del otro semiplano exactamente en un punto. (Explícalo, usando un diagrama si fuese necesario.)

13. a. ¿En cuántas partes separa a una recta un punto de ella? ¿Qué nombre le pondrías a cada una de esas partes?
   b. Usando la terminología que desarrollaste en la parte (a); escribe un enunciado de separación de la recta análogo a los postulados 9 y 10.

13. ¿En qué difiere un rayo de una semirrecta?

14. ¿Podrán jamás tres rectas en un plano separarlo en tres regiones? ¿Y en cuatro? Explica si pueden separarlo en cinco, seis, o siete regiones.

15. ¿En cuántas partes separan al espacio dos planos que se cortan? ¿Y dos planos paralelos?

16. ¿Cuál es el número mayor de partes en que tres planos distintos pueden separar al espacio? ¿Y el menor?

*17. Redacta una explicación cuidadosa de por qué es cierto el siguiente enunciado: La intersección de dos conjuntos convexos cualesquiera, que tienen al menos dos puntos en común, es un conjunto convexo. (Sugerencia: Sean P y Q dos puntos cualesquiera de la intersección.)

*18. Dibuja cualquier cuerpo geométrico limitado por superficies planas tal que el conjunto de puntos del interior de la figura no sea convexo.

Problemas de repaso

1. Cada uno de tres planos corta a los otros. ¿Podrán cortarse en una recta? ¿Tendrán que necesariamente encontrarse los tres en una recta? Explícalo.

2. ¿Cuántos planos contendrán a tres puntos dados A, B y C si ninguna recta los contiene?

3. Escribe cada una de las siguientes afirmaciones en la forma "si-entonces":

   a. Las zebras con manchas de puntos son peligrosas.

   b. Los rectángulos cuyos lados tienen longitudes iguales son cuadrados.

   c. Habrá una fiesta si gana Oklahoma.

   d. Un plano queda determinado por dos rectas cualesquiera que se cortan.

   e. Los perros "cocker" son cariñosos.

4. Da la información que se pide acerca de los postulados del capítulo.

   ¿Qué propiedad de cada uno de los semiplanos se menciona en el postulado de separación del plano?

   ¿Tienen la misma propiedad los semiespacios del postulado de separación del espacio?

5. Comenta el siguiente enunciado:
   "El topo de la mesa es un plano".

6. Haz una lista de todas las situaciones que hemos estudiado en las que se determina un solo plano.

7. Un conjunto es convexo si, para cada par de puntos en él, todos los puntos del segmento que une los dos puntos están ____________
   ____.

8. Dado que el plano E separa al espacio en dos semiespacios R y S, y que el punto A está en R y el punto B está en S, ¿tendrá $\overline{AB}$ que intersecar a E?

9. L_1 corta al plano E en P pero no está en E. L_2 está en el plano E pero no contiene al punto P. ¿Será posible que L_1 y L_2 se corten? Explícalo.

10. a. Un conjunto de puntos está alineado si ____________
       ____.

    b. Un conjunto de puntos es coplanario si ____________
       ____.

    c. ¿Pueden estar alineados 5 puntos?

    d. ¿Tendrán que estar alineados 2 puntos?

    e. ¿Pueden estar alineados n puntos?

    f. ¿Tendrán necesariamente que ser coplanarios 5 puntos?

    g. ¿Pueden ser coplanarios n puntos?

11. Los puntos P y Q están en los dos planos E y F, planos que se cortan en la recta $\overleftrightarrow{AB}$. ¿Sería correcto afirmar que P y Q están en $\overleftrightarrow{AB}$? Explícalo.

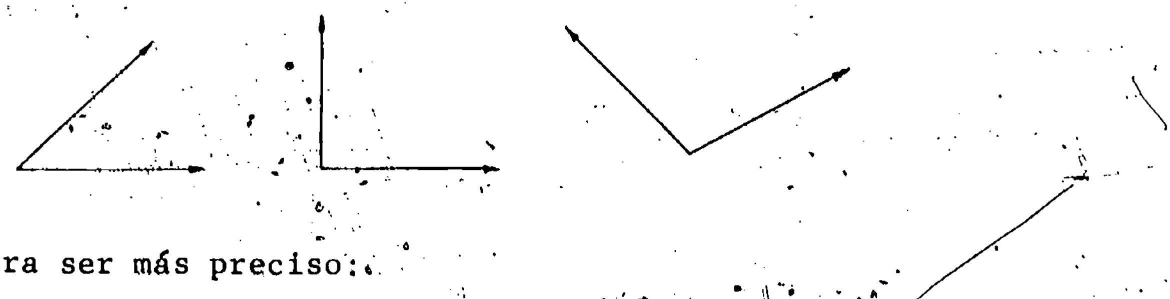
12. ¿Será convexa la reunión de un semiplano y un rayo que está en su arista?

Capítulo 4

ANGULOS Y TRIANGULOS

4-1. Definiciones fundamentales

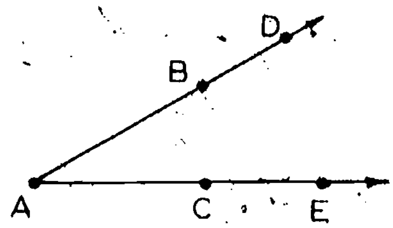
Un ángulo es una figura como una de éstas:



Para ser más preciso:

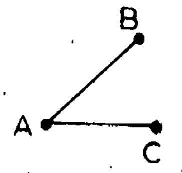
Definiciones. Un ángulo es la reunión de dos rayos que tienen el mismo origen o extremo, pero que no están en la misma recta. Los dos rayos se llaman los lados del ángulo, y su extremo común se llama el vértice.

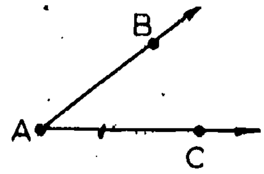
El ángulo que es la reunión de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ se indica con $\angle BAC$, o con $\angle CAB$, o sencillamente $\angle A$ si fuera claro a qué rayos se refiere. Notarás que $\angle BAC$ puede describirse también mediante A y dos puntos cualesquiera que estén en lados diferentes del ángulo.



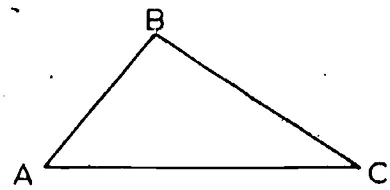
En la figura anterior, el $\angle DAE$ es el mismo que el $\angle BAC$, porque $\overrightarrow{AD}$ es el mismo $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AE}$ es el mismo $\overrightarrow{AC}$.

Notarás que un ángulo se extiende indefinidamente en dos direcciones, porque sus lados son rayos, y no segmentos. La figura siguiente, a la izquierda, determina un ángulo único, pero no es todo el ángulo; para conseguir todo el ángulo, tenemos que prolongar los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ hasta lograr los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, como en la figura de la derecha.



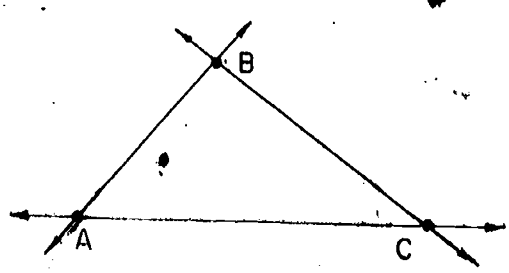


<u>Definiciones</u>. Si A, B y C son tres puntos cualesquiera no alineados, entonces la reunión de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se llama un <u>triángulo</u>,



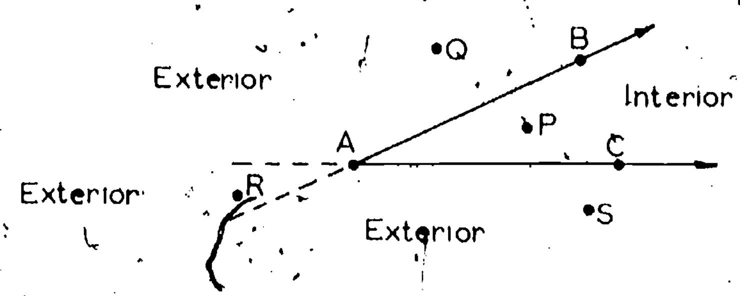
y se indica con $\triangle ABC$; los puntos A, B y C se llaman sus <u>vértices</u>, y los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se llaman sus <u>lados</u>. Todo triángulo determina tres ángulos; el $\triangle ABC$ determina los ángulos $\angle BAC$, $\angle ABC$ y $\angle ACB$, que llamamos los <u>ángulos del $\triangle ABC$</u>. Para abreviar, con frecuencia los llamaremos sencillamente $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$.

Notarás que mientras el $\triangle ABC$ <u>determina</u> estos tres ángulos, no los <u>contiene</u> en realidad. Lo mismo que una escuela no contiene sus graduados, así un triángulo no contiene sus propios ángulos, porque los lados de un triángulo son segmentos, y los lados de un ángulo son rayos. Para dibujar los ángulos de un triángulo, tendríamos que prolongar los lados del triángulo para conseguir rayos, en esta forma:



Generalmente, nada ganamos con esto porque sabemos claramente cuáles deben ser los ángulos de un triángulo.

El interior de un ángulo consiste en todos los puntos que están dentro del ángulo; y el exterior de un ángulo consiste en todos los puntos que están fuera, así:

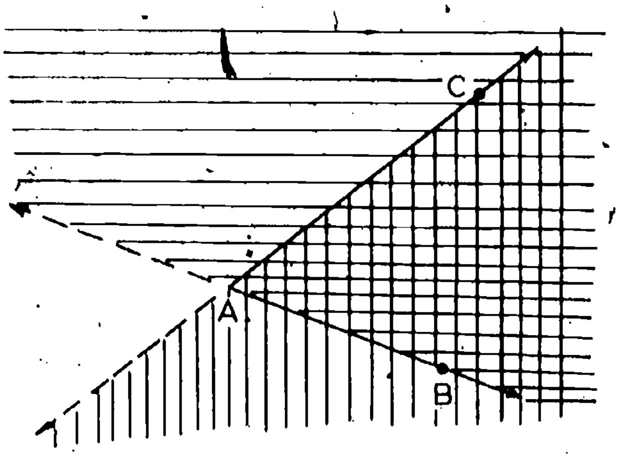


Podemos enunciar esto con mayor precisión como sigue:

<u>Definiciones</u>. Sea $\angle BAC$ un ángulo que está en el plano E. Un punto P de E estará en el <u>interior</u> del $\angle BAC$ si (1) P y B están del mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{AC}$ y también (2) P y C están del mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{AB}$. El <u>exterior</u> del $\angle BAC$ es el conjunto de todos los puntos de E que no están en el interior y que tampoco están en el ángulo mismo.

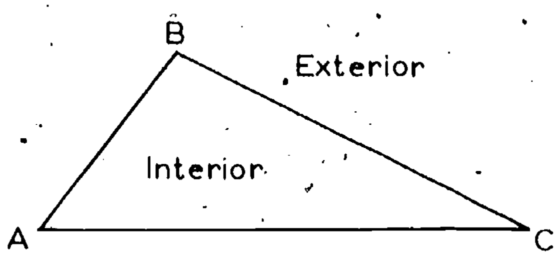
Debes examinar cuidadosamente lo dicho para asegurarte de que dice realmente lo que queremos que diga. En la figura, P está en el interior, porque P y B están del mismo lado de $\overleftrightarrow{AC}$ y también P y C están del mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$. Q está en el exterior, porque Q y C no están del mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$. R está en el exterior, porque R está del "lado indebido" de <u>ambas</u> rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$. S está en el exterior, porque está del "lado indebido" de $\overleftrightarrow{AC}$.

Notarás que definimos el interior de un ángulo como la intersección de dos semiplanos. Los semiplanos se ven así:



Aquí uno de los semiplanos está rayado horizontalmente, el otro tiene rayas verticales, y el interior del ∠BAC está rayado de ambas maneras.

El interior de un triángulo lo constituyen los puntos que están dentro del triángulo, así:



Más precisamente:

<u>Definiciones</u>. Un punto está en el <u>interior</u> de un triángulo si está en el interior de cada uno de los ángulos del triángulo. Un punto está en el <u>exterior</u> de un triángulo si está en el plano del triángulo, pero no es un punto del triángulo o de su interior.

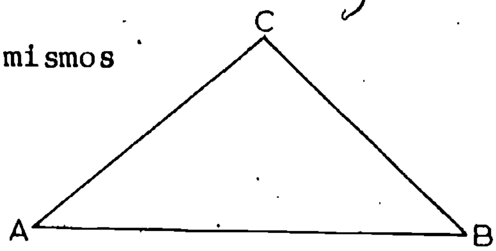
De nuevo, debes fijarte bien para estar seguro de que esto dice realmente lo que queremos que diga.

Conjunto de problemas 4-1

1. Completa esta definición de ángulo: Un ángulo es la __________ de dos __________ que tienen el mismo extremo, pero que no están en la misma __________.

2. Completa esta definición de triángulo: Un triángulo es la __________ de los tres __________ que unen dos a dos, tres puntos __________.

3. ¿Son los lados $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ del $\triangle ABC$ los mismos que los lados del $\angle A$? Explícalo.



4. ¿Es la reunión de dos de los ángulos de un triángulo lo mismo que el propio triángulo? ¿Por qué?

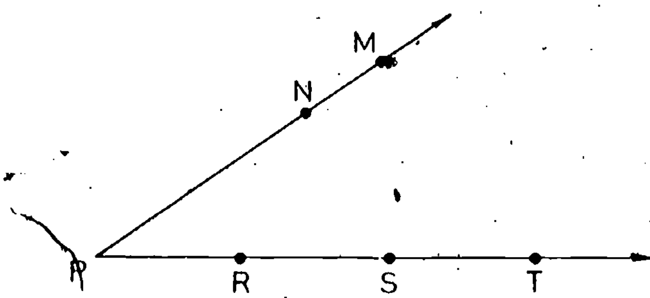
5. ¿En cuántas regiones separan al plano de un triángulo los ángulos del triángulo?

6. Completa:

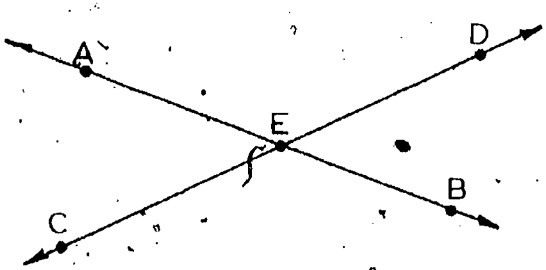
$\angle P = \angle NPS = \angle MPR$

$=$ __________ $=$ __________

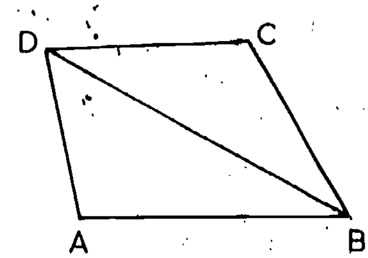
$=$ __________ $=$ __________.



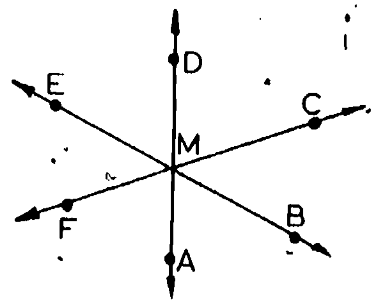
7. Nombra los ángulos de la figura.



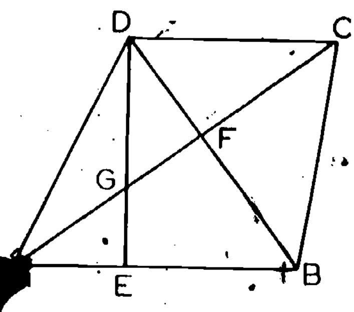
8. ¿Cuántos ángulos están determinados en la figura? Nómbralos. ¿Cuántos será posible nombrar utilizando solamente la letra del vértice?



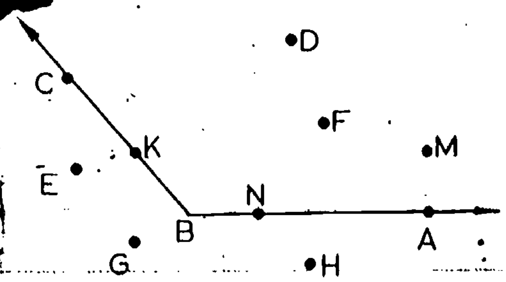
9. Nombra los ángulos de la figura. (Fíjate en que hay más de seis.)



10. Nombra todos los triángulos de la figura. (Fíjate en que hay más de ocho.)



11. a. ¿Qué puntos de la figura están en el interior del ∠CBA?
b. ¿Qué puntos están en el exterior del ∠B?



12. ¿Está el vértice de un ángulo en el interior del ángulo?; ¿en su exterior? Explícalo.

13. ¿Será el interior de un ángulo un conjunto convexo? ¿Y el exterior?

14. ¿Es un triángulo un conjunto convexo?

15. ¿Será el interior de un triángulo un conjunto convexo? ¿Y el exterior?

16. a. ¿Podrá un punto estar en el exterior de un triángulo, y también en el interior de un ángulo del triángulo? Ilustra tu respuesta.

    b. ¿Podrá un punto estar en el exterior de un triángulo, pero no en el interior de ninguno de los ángulos del triángulo? Ilustra tu respuesta.

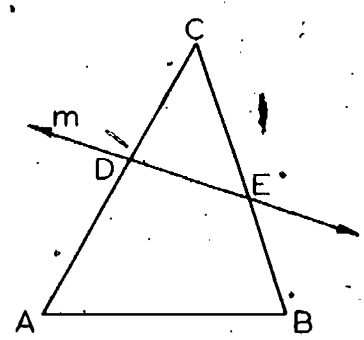
17. Se da el $\triangle ABC$ y un punto P. P está en el interior del $\angle BAC$ y también en el interior del $\angle ACB$. ¿Qué puedes decir acerca del punto P?

18. Se da el $\triangle ABC$ y un punto P. P y A están del mismo lado de $\overleftrightarrow{BC}$. P y B están del mismo lado de $\overleftrightarrow{AC}$.

    a. ¿Está P en el interior del $\angle ACB$?

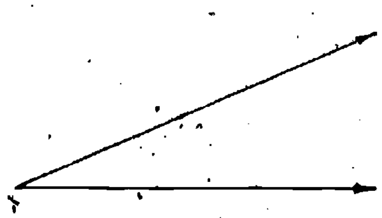
    b. ¿Está P en el interior del $\triangle ABC$?

19. Explica cuidadosamente por qué es cierto el siguiente enunciado: Si una recta m corta dos lados de un triángulo ABC en los puntos D y E, que no son vértices del triángulo, entonces la recta m no corta el tercer lado. (Sugerencia: Muestra que A y B están en el mismo semiplano.)



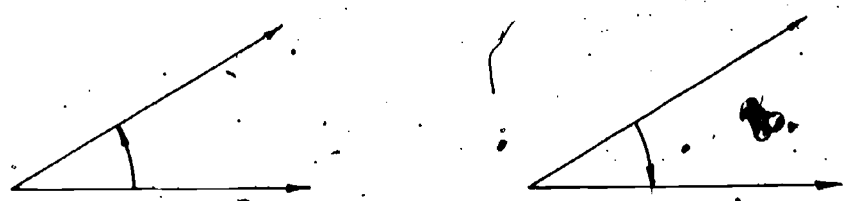
4-2. Observaciones acerca de los ángulos

Lo que hemos presentado en este capítulo es la forma más sencilla de la idea de lo que es un ángulo. De acuerdo con nuestra definición, un ángulo es sencillamente un conjunto que es la reunión de dos rayos no alineados, así:



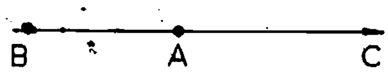
Los ángulos, tomados en este sentido, servirán para los fines de este curso. Más adelante, encontrarás en varias otras formas la idea de lo que es un ángulo. Explicaremos ahora brevemente estas otras formas sólo para que no te confundas en caso de que hayas oído hablar de ellas anteriormente.

(1) En primer lugar, a veces pensamos en un ángulo como obtenido mediante la rotación de un rayo desde una posición hasta otra. En tal caso, un rayo es el lado inicial, y el otro el lado terminal. Desde ese punto de vista, los dos ángulos dibujados a continuación serían diferentes, porque las rotaciones van en direcciones diferentes:



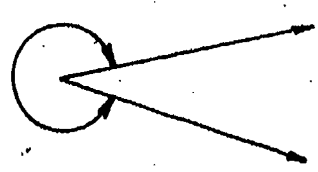
El primero se llama un ángulo positivo; la rotación es contraria a la de las agujas de un reloj. El segundo es un ángulo negativo; la rotación es como la del reloj.

(2) La gente habla a veces de ángulos llanos, como éste:



Aquí se considera que los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ forman un ángulo, a pesar de que A, B y C están alineados.

(3) Finalmente, a veces establecemos distinción entre un ángulo corriente y un ángulo cóncavo con los mismos rayos como lados. El arco con dos flechas de la figura intenta señalar un ángulo cóncavo:



Estas complicaciones, y varias más de la misma clase, no se emplearán en este libro, porque no harán falta. Por ejemplo, los ángulos de un triángulo jamás son cóncavos, y tampoco hay una manera razonable para decidir en qué dirección deberemos pensar que van. No será hasta que lleguemos a la trigonometría que estos ángulos extraños vendrán a ser necesarios e importantes.

4-3. Medida de ángulos

Los ángulos se miden generalmente en grados, utilizando un transportador. Colocando éste como en la figura A, con su arista sobre la del semiplano H, podemos leer un gran número de ángulos.

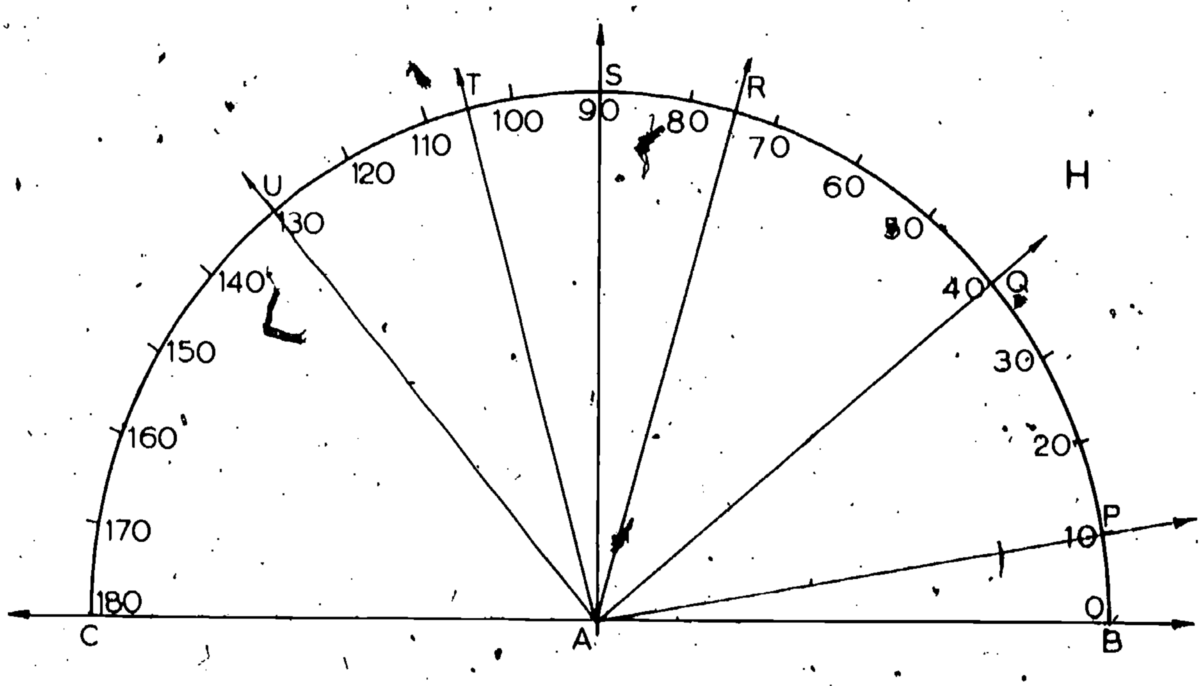


Figura A

El número de grados de un ángulo se llama su medida. Si hay r grados en el ángulo $\angle XAY$, entonces escribimos

$$m\angle XAY = r.$$

Por ejemplo, en la figura leeremos que

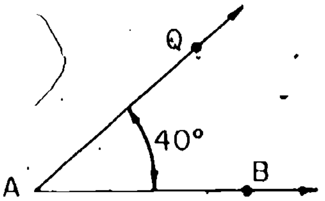
$$m \angle PAB = 10,$$
$$m \angle QAB = 40,$$
$$m \angle RAB = 75,$$
$$m \angle SAB = 90,$$
$$m \angle TAB = 105,$$

y así sucesivamente. Naturalmente que los rayos aquí dibujados forman muchos más ángulos que los anteriores. Por sustracción, podemos deducir que

$$m \angle QAP = 40 - 10 = 30,$$
$$m \angle SAR = 90 - 75 = 15,$$

y así sucesivamente.

Puesto que $m \angle QAB = 40$, decimos del $\angle QAB$ que es un ángulo de 40°, e indicamos su medida del modo indicado en la figura que sigue:



Pero no necesitamos usar el símbolo de grado al escribir $m \angle QAB = 40$, porque según explicamos al principio, $m \angle QAB$ significa el número de grados del ángulo.

Notarás que en la figura A no existe un ángulo $\angle CAB$, porque los rayos $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}$ están alineados. Pero notamos que el rayo $\overrightarrow{AC}$ correspon[de] al número 180 en la escala numérica del transportador, y que el rayo $\overrightarrow{AB}$ corresponde al número 0. Por lo tanto, podemos hallar $m \angle CAU$ escribiendo

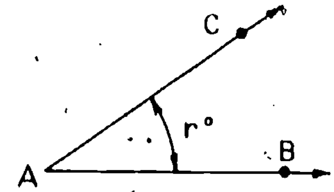
$$m \angle CAU = 180 - 130,$$
$$= 50.$$

De manera análoga,

$$m \angle CAQ = 180 - 40,$$
$$= 140.$$

Los siguientes postulados meramente resumen los principios que hemos venido explicando acerca de los transportadores. Ilustramos cada uno de ellos con una figura.

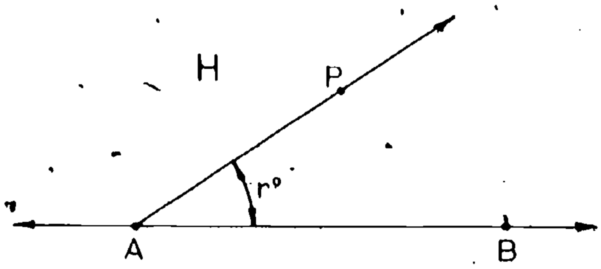
> Postulado 11. (El postulado de la medida de ángulos.) A cada ángulo $\angle BAC$ le corresponde un número real entre 0 y 180.



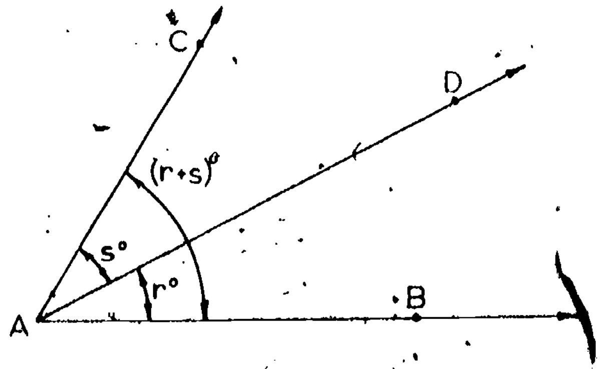
m∠BAC=r

<u>Definición</u>: El número especificado en el postulado 11 se llama la <u>medida del ángulo</u>, y se escribe m∠BAC.

> <u>Postulado 12</u>. (El postulado de la construcción del ángulo.) Sea $\overrightarrow{AB}$ un rayo de la arista del semiplano H. Para cada número r entre 0 y 180 hay exactamente un rayo $\overrightarrow{AP}$, con P en H, tal que m∠PAB = r.

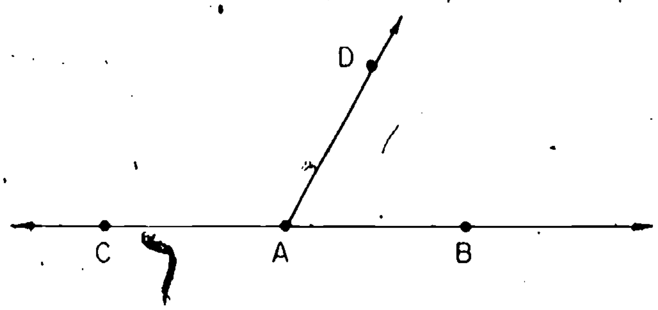


> <u>Postulado 13</u>. (El postulado de la adición de ángulos.) Si D es un punto en el interior del ∠BAC, entonces m∠BAC = m∠BAD + m∠DAC.



Fundándonos en esto fue como calculamos las medidas de ángulos por sustracción, con un transportador cuya arista caía sobre el rayo $\overrightarrow{AB}$. ($m\angle DAC = m\angle BAC - m\angle BAD$.)

Dos ángulos forman un par lineal si son como éstos:



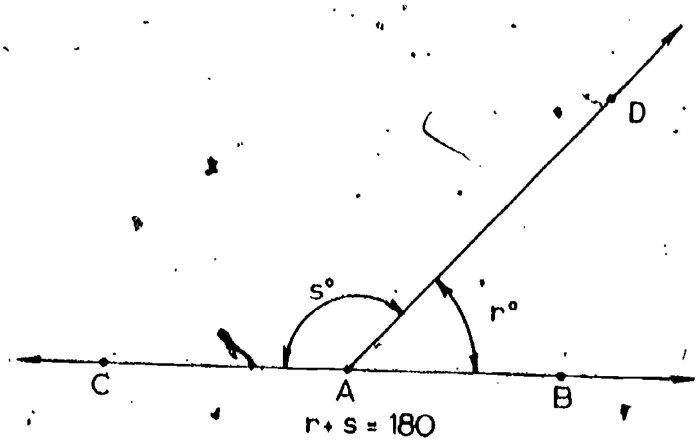
Esto es:

Definición: Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son rayos opuestos, y $\overrightarrow{AD}$ es otro rayo, entonces $\angle BAD$ y $\angle DAC$ forman un par lineal, o también se dice que son adyacentes.

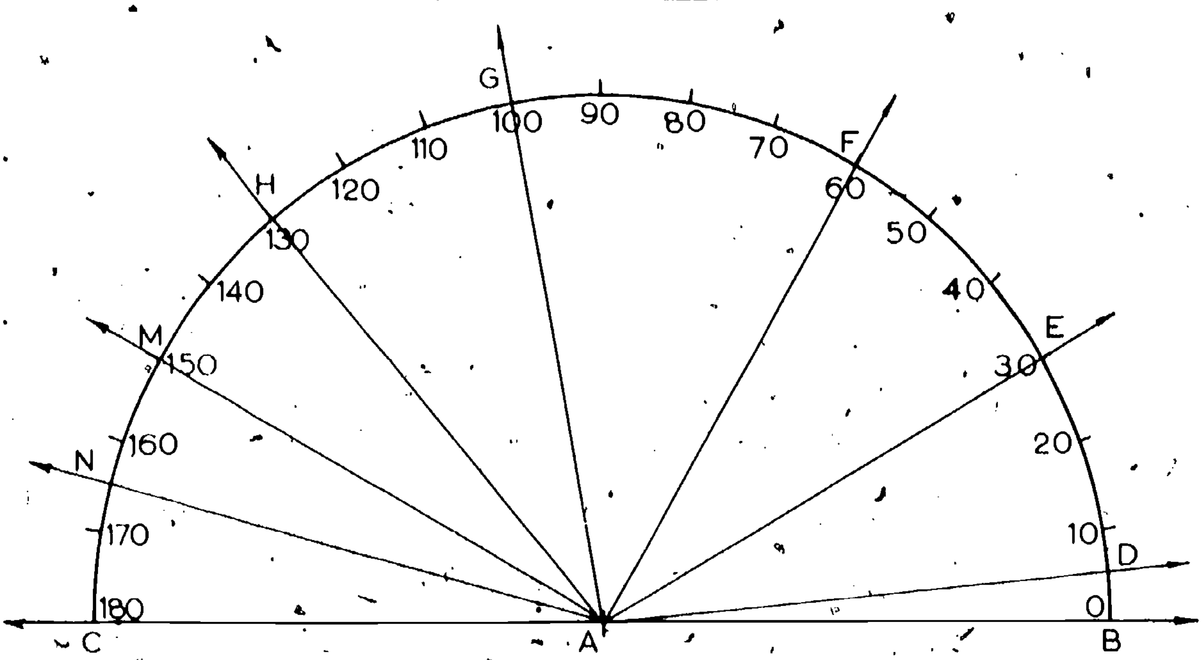
Definición: Si la suma de las medidas de dos ángulos es 180, entonces decimos que los ángulos son suplementarios, y que cada uno es el suplemento del otro.

De ahí el nombre del siguiente postulado:

> Postulado 14. (El postulado del suplemento.) Si dos ángulos forman un par lineal, entonces son suplementarios.



Conjunto de problemas 4-3

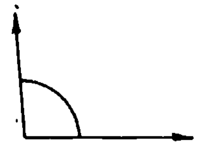


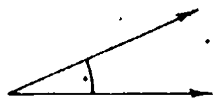
1. Utilizando la figura, halla el valor de cada uno de los siguientes:

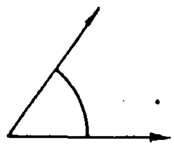
a. m ∠FAB	g. m ∠EAD
b. m ∠EAB	h. m ∠MAG + m ∠GAH
c. m ∠MAC	i. m ∠GAF + m ∠FAE
d. m ∠FAE	j. m ∠MAB - m ∠FAB
e. m ∠GAE	k. m ∠HAB - m ∠DAB
f. m ∠MAN	l. m ∠NAE - m ∠NAH

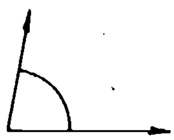
2. A medida que practiques, podrás ir aprendiendo a estimar con bastante precisión el tamaño de los ángulos sin necesidad de utilizar un transportador. No emplees un transportador para decidir cuáles de los ángulos de la figura tienen medidas acotadas como se indica a continuación:

Aparea los ángulos de la izquierda con las medidas de la derecha.

a.  m. $15 < x < 35$

b.  n. $70 < x < 90$

c.  p. $80 < x < 100$

d.  q. $45 < x < 60$

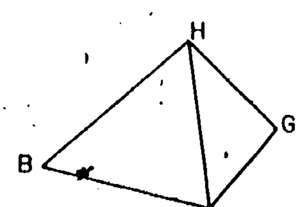
3. Empleando solamente una regla, y no un transportador, traza ángulos cuyas medidas sean aproximadamente 30, 150, 45, 60, 135, 90. Usa tu transportador después para comprobar las figuras.

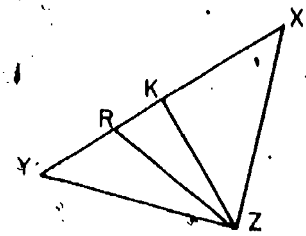
4. Toma, sobre la arista de un semiplano, un segmento $\overline{AB}$ de unas 3 pulgadas de largo. En A dibuja el rayo $\overrightarrow{AC}$ en el semiplano y que forme el $\angle BAC$ de 58°. En B dibuja el rayo $\overrightarrow{BD}$ en el mismo semiplano y que forme el $\angle ABD$ de 72°. Mide el ángulo restante del triángulo que formaste.

5. En la figura,

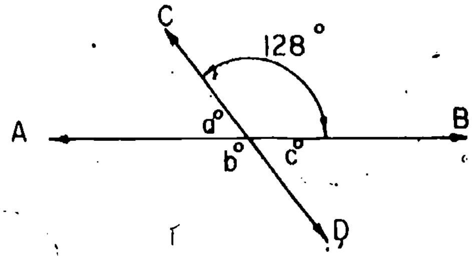
a. $m\angle BHF + m\angle GHF = m\angle$ ____?____

b. $m\angle GFH + m\angle BFH = m\angle$ ____?____





6. En la figura,
   a. m∠XZK + m∠KZR + m∠YZR = m∠ ___?___
   b. m∠XZR - m∠RZK = m∠ ___?___
   c. m∠XZY - m∠XZK = m∠ ___?___
   d. Si Y, R, K y X están alineados, entonces m∠YRZ + m∠ZRX = ___?___



7. En la figura, $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ se cortan formando cuatro ángulos. Usando la medida indicada, halla a, b y c.

8. Determina el suplemento de cada uno de los siguientes: 110°, 90°, 36°, 15.5°, n°, (180 - n)°, (90 - n)°.

9. Si uno de dos ángulos suplementarios tiene una medida que es 30 más que la medida del otro, ¿cuánto mide cada ángulo?

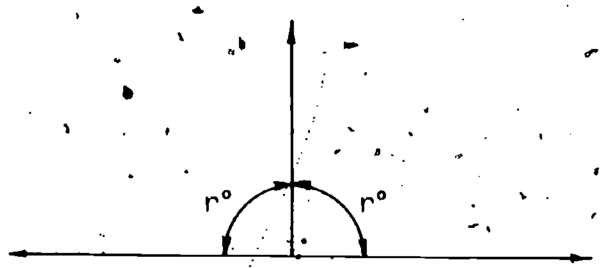
10. Si la medida de un ángulo es el doble de la medida de su suplemento, halla la medida del ángulo.

11. La medida de un ángulo es cuatro veces la de su suplemento. Halla la medida de cada ángulo.

12. a. Dado un rayo $\overrightarrow{AC}$ que está sobre la arista de un semiplano H, y un número r entre 0 y 180, ¿de cuántas maneras puedes trazar un rayo $\overrightarrow{AB}$ en H tal que m ∠BAC = r? ¿Por qué?
    b. Dado un rayo $\overrightarrow{AC}$ en un plano E, y un número r entre 0 y 180, ¿de cuántas maneras puedes trazar un rayo $\overrightarrow{AB}$ en E tal que m∠BAC = r? ¿Por qué?

4-4. <u>Perpendicularidad, ángulos rectos y congruencia de ángulos</u>

<u>Definiciones</u>: Si los dos ángulos de un par lineal tienen la misma medida, entonces cada uno de ellos es un <u>ángulo recto</u>.



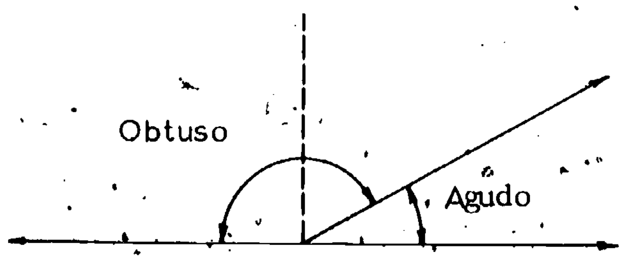
Toda vez que r + r = 180, por el postulado del suplemento, vemos que <u>un ángulo recto es un ángulo de 90°</u>. Esta se puede considerar como otra definición de un ángulo recto; es equivalente a nuestra primera definición.

Es fácil definir la perpendicularidad de cualquier combinación de rectas, rayos o segmentos, a base de ángulos rectos. Al aplicar las siguientes definiciones, recuerda que un rayo o un segmento determina una recta única que lo contiene.

<u>Definición</u>: Dos conjuntos que se intersecan, cada uno de los cuales es o bien una recta, o un rayo, o un segmento, son <u>perpendiculares</u> si las dos rectas que los contienen determinan un ángulo recto.

<u>Definición</u>: Si la suma de las medidas de dos ángulos es 90, entonces decimos que los ángulos son <u>complementarios</u>, y que cada uno es el <u>complemento</u> del otro. (Compara esta definición con la de <u>ángulos suplementarios</u> que aparece inmediatamente antes del postulado del suplemento.)

Un ángulo con medida menor que 90 se llama <u>agudo</u>, y un ángulo con medida mayor que 90 se llama <u>obtuso</u>.

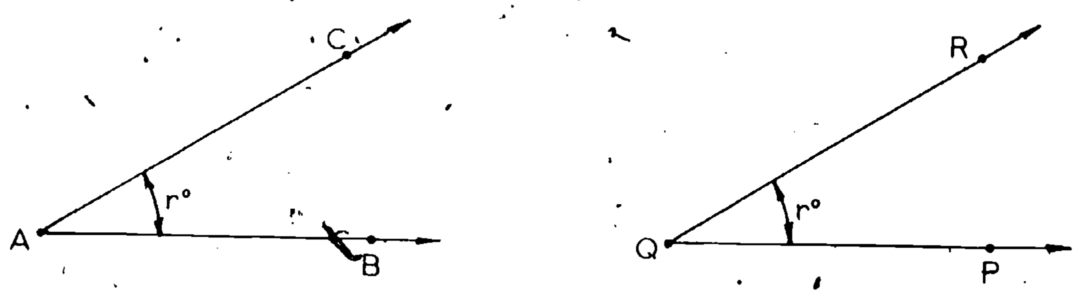


<u>Definición</u>: Los ángulos que tienen la misma medida se llaman <u>ángulos congruentes</u>.

Es decir, el $\angle BAC$ y el $\angle PQR$ serán congruentes si $m\angle BAC = m\angle PQR$. En este caso escribimos

$$\angle BAC \cong \angle PQR.$$

Notarás que la ecuación $m\angle BAC = m\angle PQR$ y la congruencia $\angle BAC \cong \angle PQR$ son totalmente equivalentes: podemos sustituir una por otra siempre que queramos.



Los siguientes teoremas son de fácil demostración una vez recordemos claramente el significado de las palabras empleadas:

<u>Teorema</u> <u>4-1</u>. Si dos ángulos son complementarios, entonces ambos son agudos.

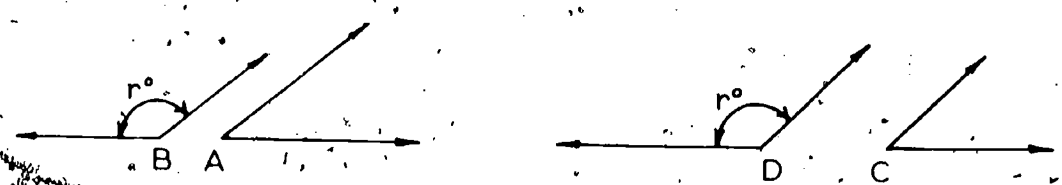
<u>Teorema</u> <u>4-2</u>. Todo ángulo es congruente consigo mismo.

<u>Teorema</u> <u>4-3</u>. Dos ángulos rectos cualesquiera son congruentes.

<u>Teorema</u> <u>4-4</u>. Si dos ángulos son a la vez congruentes y suplementarios, entonces cada uno de ellos es un ángulo recto. (Sugerencia: Sea r el número que es la medida de cada uno de los ángulos; el problema es, pues, hallar el valor de r.)

<u>Teorema</u> <u>4-5.</u> Los suplementos de ángulos congruentes son congruentes.

En otra forma: Si (1) $\angle B \cong \angle D$, (2) $\angle A$ y $\angle B$ son suplementarios, y (3) $\angle C$ y $\angle D$ son suplementarios, entonces (4) $\angle A \cong \angle C$.



Demostración. Al afirmar que $\angle B \cong \angle D$ entendemos que $m\angle B$ y $m\angle D$ son el mismo número r, tal como en la figura. Toda vez que $\angle A$ y $\angle B$ son suplementarios, sabemos que

$$m\angle A = 180 - m\angle B = 180 - r.$$

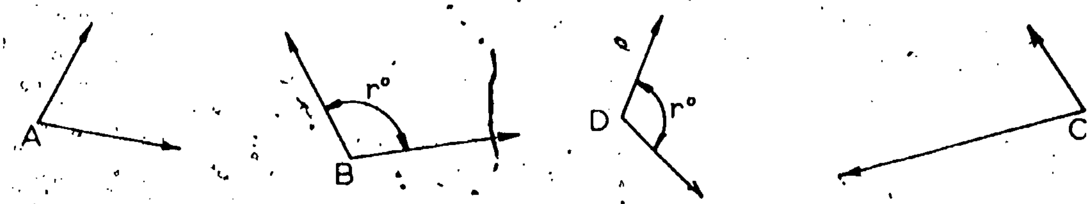
Por la misma razón,

$$m\angle C = 180 - m\angle D = 180 - r.$$

Por lo tanto, $m\angle A = m\angle C$, lo que significa que $\angle A \cong \angle C$.

No debes pensar, como es el caso en la figura, que los ángulos suplementarios tengan necesariamente que colocarse uno al lado del otro de manera que sea evidente que sus medidas suman 180.

La siguiente figura servirá también para ilustrar el teorema 4-5:

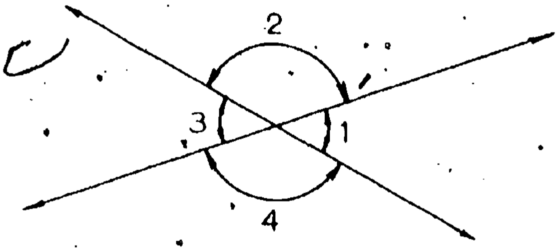


Al dibujar las figuras para ilustrar teoremas o problemas, debes darte cuenta de que la figura del libro no es la única correcta, y debes tratar de que tu figura sea diferente a la que da el libro.

Teorema 4-6. Los complementos de ángulos congruentes son congruentes.

La demostración de este teorema es casi la misma que la demostración anterior, y debes tratar de hacerla tú mismo.

Cuando dos rectas se cortan, forman cuatro ángulos, así:

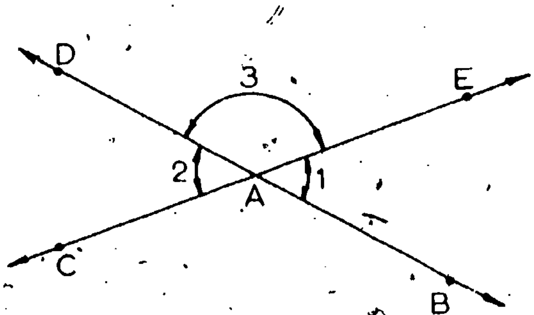


Los ángulos $\angle 1$ y $\angle 3$ se llaman opuestos por el vértice, y los ángulos $\angle 2$ y $\angle 4$ también se llaman opuestos por el vértice. Con mayor precisión:

Definición: Dos ángulos son opuestos por el vértice si sus lados forman dos pares de rayos opuestos.

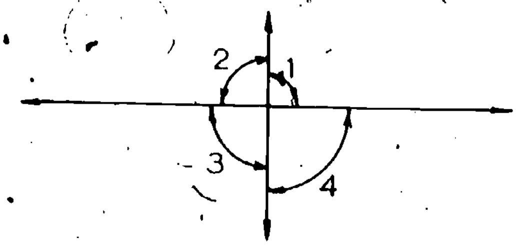
Parece como que estos pares de ángulos opuestos por el vértice debieran ser congruentes, y ése es siempre el caso:

Teorema 4-7. Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.



Demostración: Sabemos que $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AE}$ son rayos opuestos, y que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ son rayos opuestos, de manera que $\angle 1$ y $\angle 2$ son ángulos opuestos por el vértice. Entonces, $\angle 1$ y $\angle 3$ son suplementarios, y $\angle 2$ y $\angle 3$ son suplementarios. Como $\angle 3$ es congruente consigo mismo, esto significa que $\angle 1$ y $\angle 2$ tienen suplementos congruentes. Por el teorema 4-5, $\angle 1 \cong \angle 2$, que es lo que se quería demostrar.

Teorema 4-8. Si dos rectas que se cortan forman un ángulo recto, entonces forman cuatro ángulos rectos.



Debemos poder efectuar la demostración del teorema.

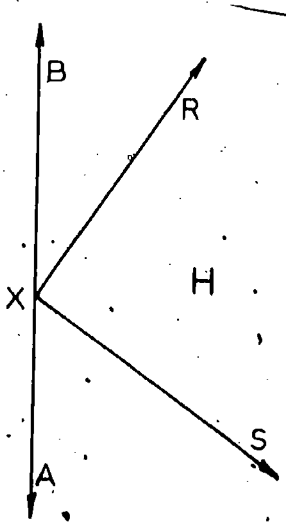
Conjunto de problemas 4-4

1. a. En un plano, y por un punto de una recta, ¿cuántas perpendiculares se pueden trazar a la recta?

   b. En el espacio, y por un punto de una recta, ¿cuántas perpendiculares se pueden trazar a la recta?

2. Si $\overrightarrow{OR}$ y $\overrightarrow{OS}$ son rayos opuestos y $\overrightarrow{ON}$ es un rayo tal que $m\angle RON = m\angle SON$, ¿qué puedes decir acerca de $\overleftrightarrow{ON}$ y $\overleftrightarrow{RS}$? Explícalo.

3. En el semiplano H, $\overrightarrow{XB}$ y $\overrightarrow{XA}$ son rayos opuestos, $m\angle RXB = 35$ y $m\angle RXS = 90$.



   a. Nombra un par de rayos perpendiculares, si es que hay alguno en la figura.

   b. Nombra un par de ángulos complementarios, si es que hay algunos en la figura.

   c. Nombra un par de ángulos opuestos por el vértice, si es que hay algunos en la figura.

   d. Nombra dos pares de ángulos suplementarios de la figura.

4. Para cada uno de los siguientes, determina la medida de un ángulo complementario:

a. 10° d. x°

b. 80° e. (90 - x)°

c. 44.5° f. (180 - x)°

5. a. Si dos ángulos con la misma medida son suplementarios, ¿cuál es la medida de cada uno?

   b. Si dos ángulos con la misma medida son complementarios, ¿cuál es la medida de cada uno?

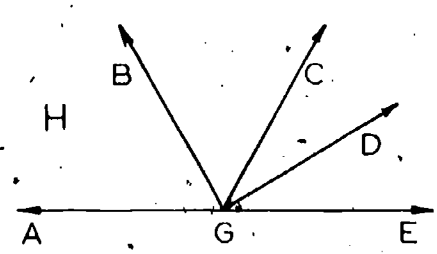
6. a. Si dos rectas se cortan, ¿cuántos pares de ángulos opuestos por el vértice se forman?

   b. Si la medida de uno de los ángulos en (a) es 70, ¿cuál es la medida de cada uno de los otros?

   c. Si todos los ángulos en (a) son congruentes, ¿cuál es la medida de cada uno?

7. Si uno de un par de ángulos opuestos por el vértice tiene medida r, escribe las fórmulas para las medidas de los otros tres ángulos que se forman.

8. En el semiplano H, $\overrightarrow{GE}$ y $\overrightarrow{GA}$ son rayos opuestos, $m\angle AGB = m\angle BGC$, y $m\angle CGD = m\angle DGE$. Halla $m\angle BGD$.



9. Demuestra el teorema 4-1.

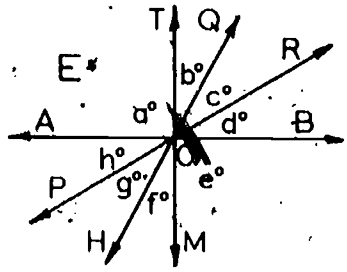
10. Demuestra el teorema 4-4.

11. En la figura del problema 8, $\overrightarrow{GB} \perp \overrightarrow{GD}$, y $\overrightarrow{GA}$ y $\overrightarrow{GE}$ son rayos opuestos.

    Demuestra que $\angle AGB$ y $\angle DGE$ son complementarios.

12. En el plano E, las rectas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{PR}$, $\overleftrightarrow{HQ}$, $\overleftrightarrow{MT}$ se cortan en O. $\overleftrightarrow{TM} \perp \overleftrightarrow{AB}$.

Demuestra que $b + g + d = a$.



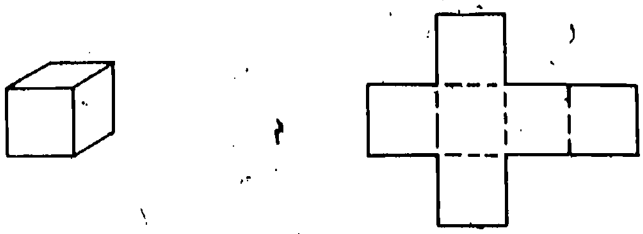
13. Si $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ son tres rayos diferentes en un plano, ninguno de ellos opuesto a otro, indica si las afirmaciones siguientes son ciertas o falsas y explica por qué:

a. $m\angle AOB + m\angle BOC = m\angle AOC$.

b. $m\angle AOB + m\angle BOC + m\angle AOC = 360$.

14. La medida de un ángulo es nueve veces la de su suplemento. ¿Cuál es la medida del ángulo?

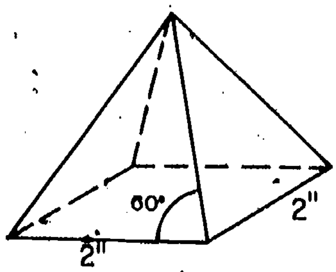
15. El desarrollo de una figura es un dibujo plano que se puede doblar una o más veces para formar la superficie de un cuerpo dado (la figura en cuestión). Abajo aparece un cubo y su desarrollo.



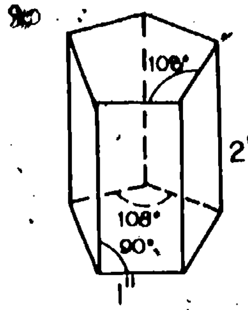
(las líneas de puntos indican dobleces)

Usa tu imaginación, tu regla y tu transportador para hacer un desarrollo de cada una de las figuras que aparecen abajo. Luego recorta tu dibujo, dóblalo por las líneas de puntos, y pega las aristas. Usa cartón o papel grueso para lograr una figura rígida.

a. Una pirámide cuya base es un cuadrado de lado 2" y cuyas otras caras son triángulos isósceles con ángulos de 60° en la base.



b.- Un prisma cuyas bases son pentágonos con lados de 1 pulgada y ángulos de 108°, y cuya altura es de 2 pulgadas.



Problemas de repaso

1. ¿Qué instrumento se usa para medir ángulos?
2. A todo ángulo corresponde un número real entre _____ y _____ que se llama la medida del ángulo.
3. Un ángulo con medida menor que 90 es __________.
4. Dos ángulos formados por la reunión de dos rayos opuestos y un tercer rayo, los tres con el mismo extremo, son un __________ de ángulos.
5. Si la suma de las medidas de dos ángulos es 90, entonces cada uno se llama un ______________ del otro.
6. Un ángulo que tiene una medida mayor que 90 se llama __________.
7. Angulos con la misma medida son ______________.
8. Si dos ángulos son a la vez congruentes y suplementarios, entonces cada uno de ellos es un __________.
9. Los suplementos de ángulos congruentes son ______________.
10. Si dos ángulos son complementarios, entonces cada uno de ellos es ________.
11. Un ángulo es la __________ de dos __________ que tienen un extremo común.
12. Si X, Y, Z son tres puntos _______, la reunión de los tres segmentos que determinan dos a dos es un ____________.
13. Un punto X estará en el interior del $\angle RST$ si los puntos R y __________ caen al mismo lado de $\overleftrightarrow{ST}$, y si los puntos

X y ______________ caen al mismo lado de ______________.

14. Si la suma de las medidas de dos ángulos es __________, éstos se llaman complementarios, y si la suma es __________ se llaman ______________.

15. Dos ángulos opuestos formados por dos rectas que se cortan se llaman ángulos ____________. Estos son siempre congruentes.

16. $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son rayos opuestos. Los puntos E, F y H están al mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$. Los puntos E y H están a lados opuestos de $\overleftrightarrow{BF}$. Los puntos A y H están al mismo lado de $\overleftrightarrow{BF}$. $\overleftrightarrow{BF} \perp \overleftrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BE} \perp \overrightarrow{BH}$. $m\angle FBE = 20$. Dibuja la figura y halla:

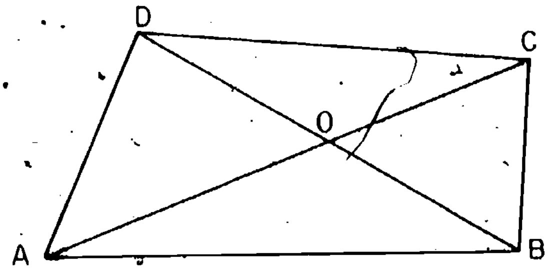
a. $m\angle EBA$ b. $m\angle FBH$ c. $m\angle EBC$

17. Datos:

$m\angle BCD = 90$
$m\angle BOC = 50$
$m\angle DCO = 25$
$m\angle DAO = 45$

Halla:

a. $m\angle DOC$
b. $m\angle BCO$
c. $m\angle DOA$
d. $m\angle AOB$



18. Si uno de dos ángulos suplementarios tiene una medida de 50 más que la medida del otro, ¿cuál es la medida de cada ángulo?

19. La medida de un ángulo es cinco veces la de su complemento. Halla la medida de cada ángulo.

20. ¿En qué condiciones serán congruentes los ángulos de un par lineal?

21. ¿Habrá un punto en el plano de un triángulo tal que no esté

ni en el exterior ni en el interior del triángulo, ni tampoco en el interior o el exterior de cualquiera de sus ángulos?

22. ¿Será la medida de un ángulo, sumada a la medida de un ángulo, la medida de un ángulo? Explícalo.

23. ¿Podría considerarse el interior de un triángulo como la intersección de tres semiplanos? Ilustra con una figura.

24. ¿Cuántos triángulos hay en esta figura?

25. ¿Es $m\angle BAC = m\angle BAE$?

26. ¿Es $\angle BAC = \angle BAE$?

27. ¿Es $\angle ABE$ suplementario a $\angle EBC$?

28. ¿Cuántos ángulos aparecen indicados en el dibujo?

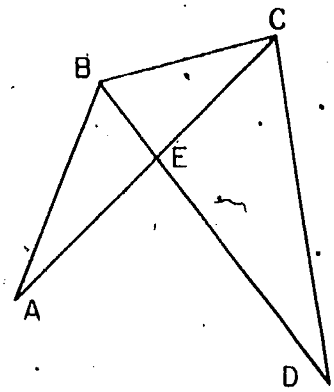
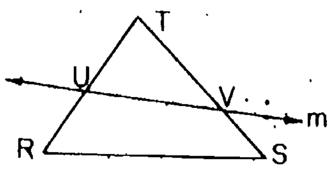


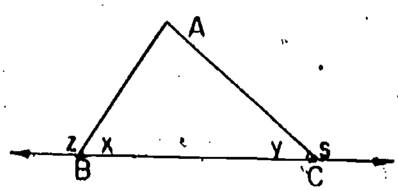
Figura de los problemas 24-28

29. Explica cuidadosamente por qué es cierto el siguiente enunciado:

Si una recta m corta a 2 lados de un triángulo ΔRST en los puntos U y V, que no son vértices del triángulo, entonces la recta m no corta al tercer lado.



30. Dado, en la figura: $\angle x \cong \angle y$. Demuestra que $\angle z \cong \angle s$.

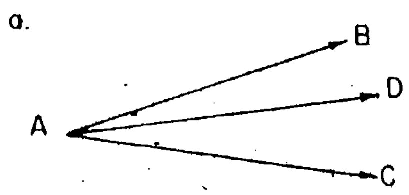


31. Si se sabe que $\angle a \cong \angle b$, que $\angle x$ es suplementario del $\angle a$, y que $\angle y$ es suplementario del $\angle b$, ¿en qué teorema o postulado te basarás para demostrar que $\angle x \cong \angle y$?

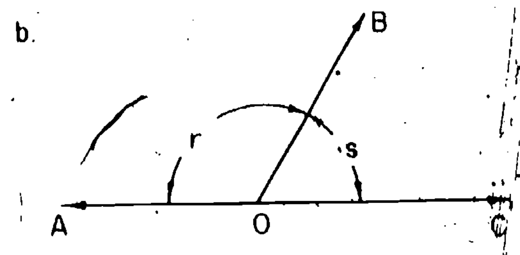
32. El postulado de la medida de ángulos impone una limitación a la medida de ángulos. ¿Cuál es esa limitación?

33. Di si es correcta esta otra redacción del postulado de la construcción del ángulo: Dado un rayo $\overrightarrow{XY}$ y un número k entre 0 y 180, hay exactamente un rayo $\overrightarrow{XP}$ tal que $m\angle PXY = k$. Explica tu respuesta.

34. Citándolo o enunciándolo con precisión, di qué postulado te parece el más apropiado como base de cada uno de los siguientes enunciados:



$m\angle DAC = m\angle BAC - m\angle BAD$



$r + s = 180$

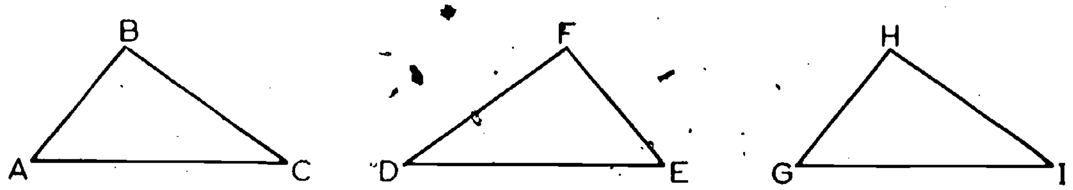
35. Di si será siempre cierta la siguiente afirmación: Si $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ se cortan en 0, entonces $\angle AOC \cong \angle BOD$.

Capítulo 5

CONGRUENCIAS

5-1. El concepto de congruencia

En el lenguaje corriente, diríamos que dos figuras geométricas son congruentes si tienen exactamente la misma forma y tamaño. Por ejemplo, en la figura de abajo, los tres triángulos son congruentes.



Una manera de describir la situación es decir que uno cualquiera de estos triángulos se puede colocar sobre cualquier otro de manera que coincida con él exactamente. Así, para ilustrar lo que entendemos al decir que dos triángulos son congruentes, debemos explicar qué puntos han de superponerse dos a dos. Por ejemplo, para mover el $\triangle ABC$ sobre el $\triangle DFE$, debemos colocar A sobre E, B sobre F, y C sobre D. Podemos escribir así los pares de vértices correspondientes:

$$A \longleftrightarrow E$$
$$B \longleftrightarrow F$$
$$C \longleftrightarrow D$$

Para describir la congruencia del primer triángulo y el tercero, debemos aparear los vértices así:

$$A \longleftrightarrow G$$
$$B \longleftrightarrow H,$$
$$C \longleftrightarrow I$$

¿Cómo aparearías los vértices para describir la congruencia del segundo triángulo con el tercero?

Un apareamiento como cualquiera de los descritos arriba se llama una correspondencia uno-a-uno, o correspondencia biunívoca, entre los vértices de los dos triángulos. Si el apareamiento funciona--es decir, si los triángulos coinciden al aparear los vértices de la manera descrita--entonces la correspondencia biunívoca se llama una congruencia entre los dos triángulos. Por ejemplo, las correspondencias que acabamos de presentar son congruencias. Por otra parte, si escribimos

$$A \longleftrightarrow F$$
$$B \longleftrightarrow D$$
$$C \longleftrightarrow E,$$

esto nos da una correspondencia biunívoca, pero no nos da una congruencia, porque los triángulos primero y segundo no se pueden hacer coincidir mediante este apareamiento particular.

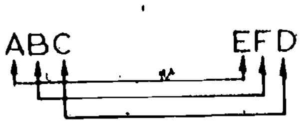
Todavía podemos escribir más brevemente estas correspondencias. Por ejemplo, la correspondencia

$$A \longleftrightarrow E$$
$$B \longleftrightarrow F$$
$$C \longleftrightarrow D,$$

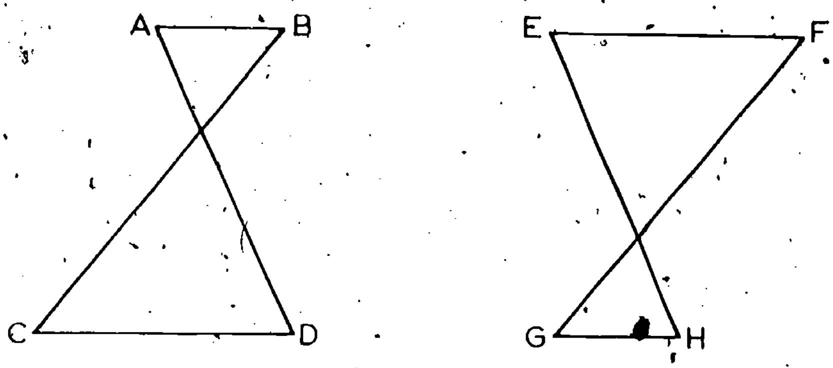
que ofrecimos como primer ejemplo, puede escribirse en una sola línea así:

$$ABC \longleftrightarrow EFD$$

Aquí debe sobrentenderse que la primera letra de la izquierda corresponde a la primera letra de la derecha, la segunda corresponde a la segunda, y la tercera a la tercera, así:



Tomemos otro ejemplo más.



Estas dos figuras tienen la misma forma y tamaño. Para mostrar cómo la una puede colocarse sobre la otra, debemos aparear los vértices así:

$$A \longleftrightarrow H$$
$$B \longleftrightarrow G$$
$$C \longleftrightarrow F$$
$$D \longleftrightarrow E$$

Estas dos figuras son congruentes, porque la correspondencia descrita es una congruencia, esto es, las figuras se pueden hacer coincidir si los vértices se aparean en la forma dada. Abreviadamente, esta congruencia se puede escribir en una sola línea así:

$$ABCD \longleftrightarrow HGFE$$

Notarás que no importa el orden en que escribimos las <u>parejas</u> de puntos. Pudimos haber escrito nuestra lista de parejas así:

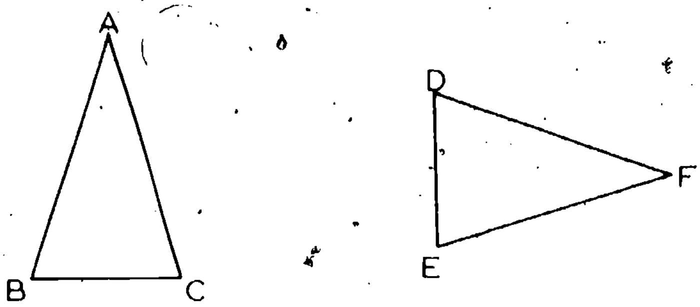
$$D \longleftrightarrow E$$
$$B \longleftrightarrow G$$
$$C \longleftrightarrow F$$
$$A \longleftrightarrow H$$

y pudimos también haber descrito nuestra correspondencia biunívoca en una sola línea así:

$$DBCA \longleftrightarrow EGFH$$

Todo lo que importa es saber qué punto se aparea con cuál otro.

Es posible que dos figuras sean congruentes de más de un modo.



Aquí la correspondencia

$$ABC \longleftrightarrow FDE$$

es una congruencia, y la correspondencia

$$ABC \longleftrightarrow FED$$

es una congruencia diferente entre las mismas dos figuras.

Obviamente, el $\triangle ABC$ coincide consigo mismo. Si convenimos en aparear cada vértice consigo mismo, tendremos la congruencia

$$ABC \longleftrightarrow ABC.$$

Esta se llama la congruencia <u>idéntica</u>. Hay, sin embargo, otra manera de aparear los vértices de este triángulo. Podemos emplear la correspondencia

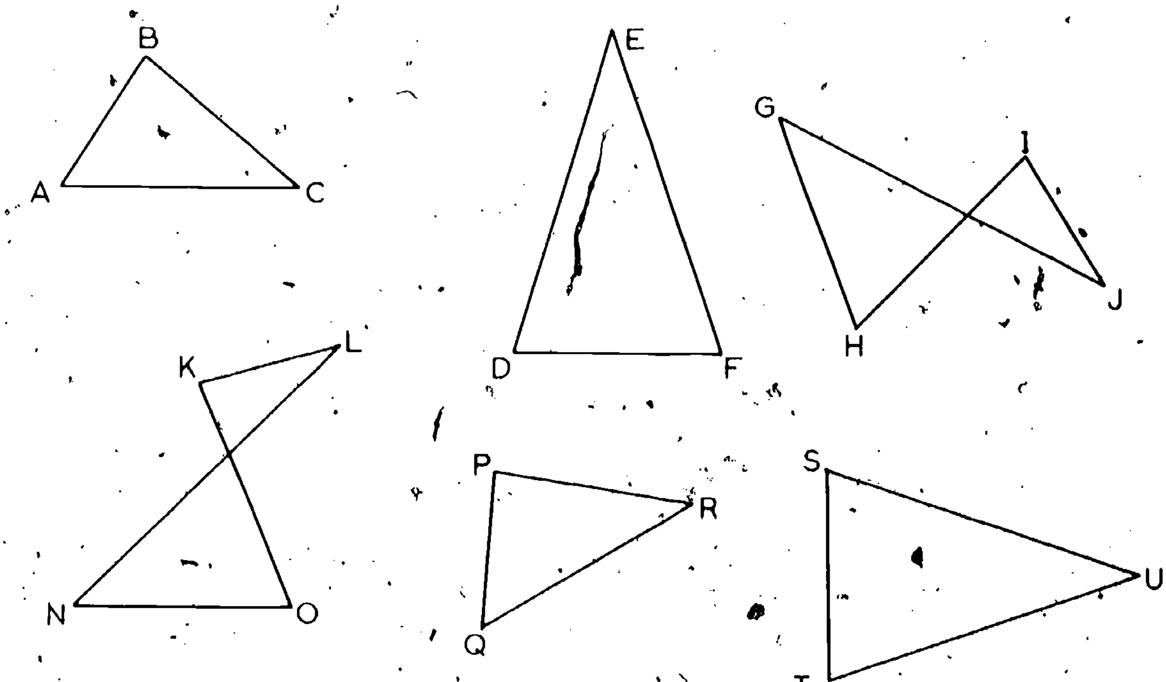
$$ABC \longleftrightarrow ACB.$$

Mediante esta correspondencia, la figura se hace coincidir con ella misma, pero se intercambian los vértices B y C. Esto no es posible en manera alguna para todos los triángulos; y funciona solamente cuando dos lados del triángulo por lo menos tienen la misma longitud.

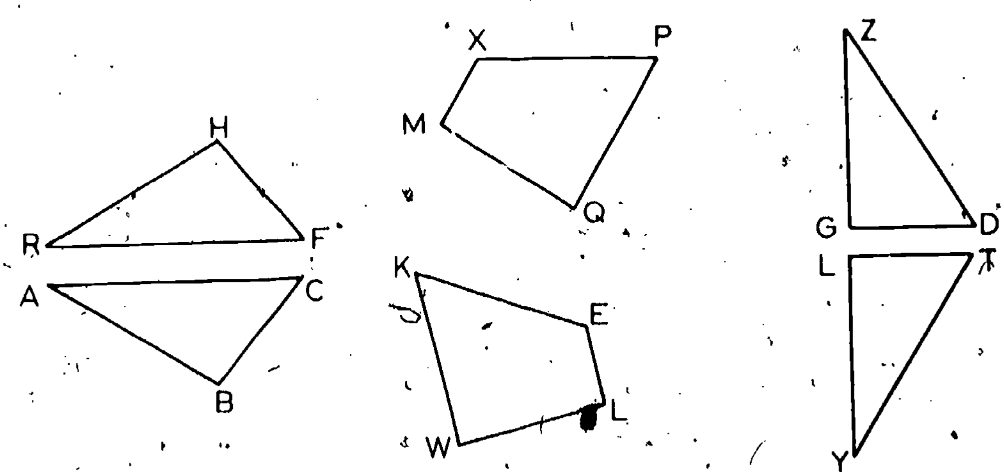
Conjunto de problemas 5-1

En los problemas de esta sección, no hay trucos en el modo de dibujar las figuras. Es decir, las correspondencias que <u>parecen</u> ser congruencias, al medir las figuras con cierto cuidado, se supone que son congruencias. En esta sección no estamos tratando de demostrar cosa alguna. Estamos meramente tratando de aprender de manera intuitiva lo que significa una congruencia.

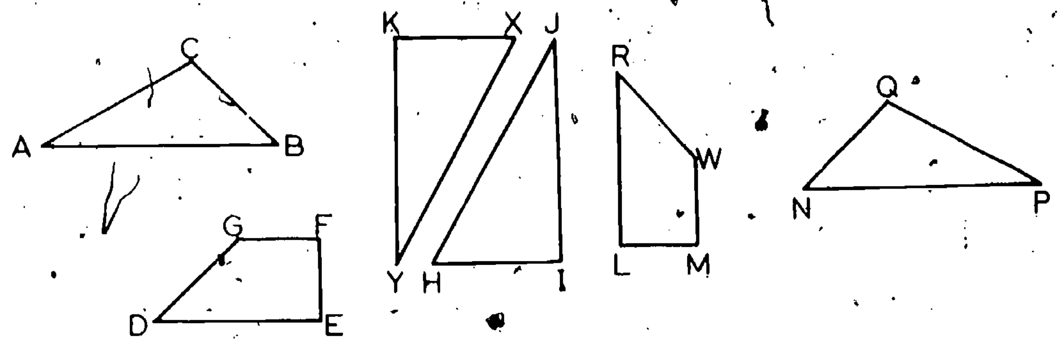
1. A continuación aparecen seis figuras. Escribe tantas congruencias como puedas determinar entre esas figuras. (No cuentes la congruencia idéntica entre una figura y ella misma, pero recuerda que hay una congruencia diferente de la idéntica entre un triángulo que tiene dos lados congruentes y él mismo.) Deberás encontrar seis congruencias en total. (Una congruencia es DEF ⟷ SUT.)



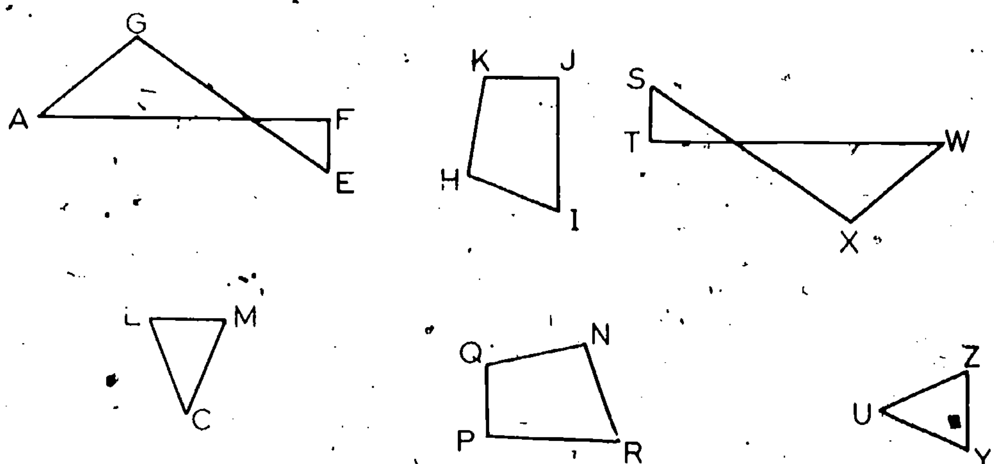
2. Contesta como en el problema 1:



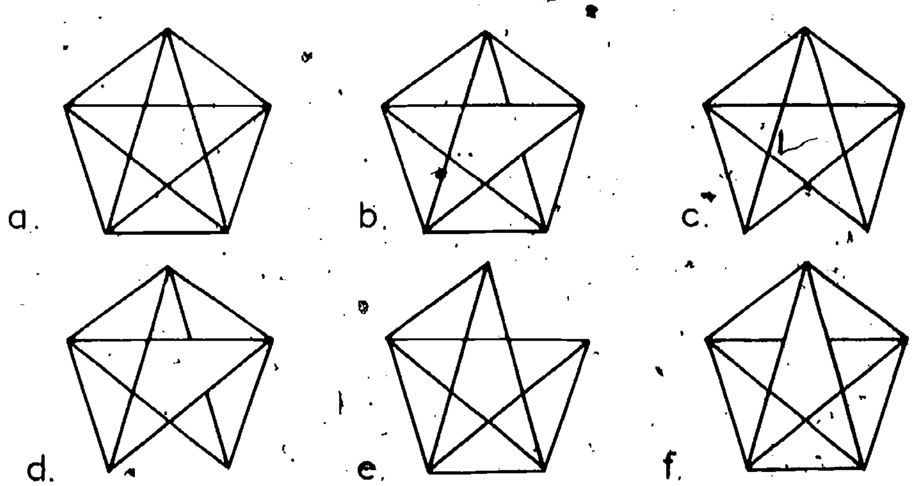
3. Contesta como en el problema 1:



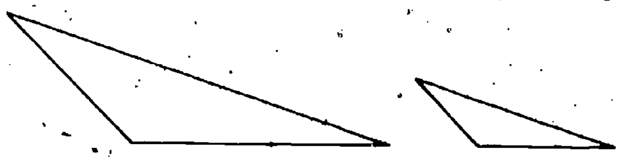
4. Contesta como en el problema 1:

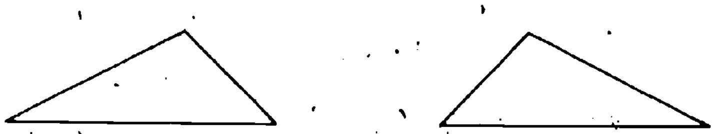


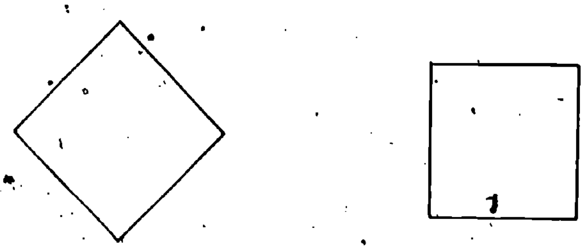
5. ¿Cuáles de estas figuras no tienen una con quien aparearse?



6. ¿Cuáles de los siguientes pares de figuras son congruentes?

a. 

b. 

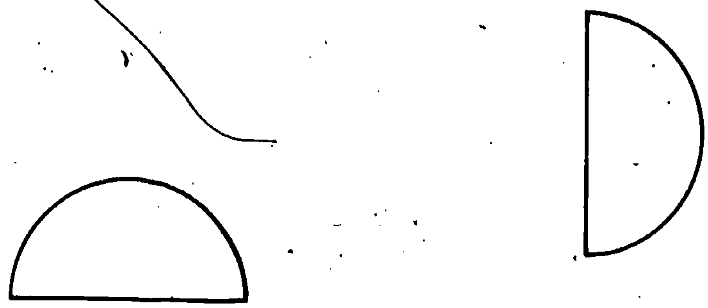
c. 

d. 

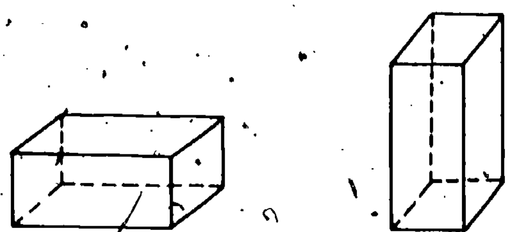
e. 

f.

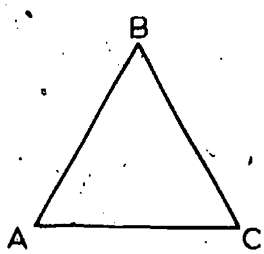
g:



h.

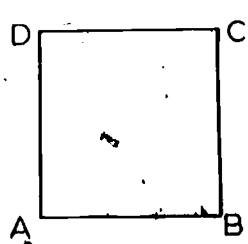


7. El triángulo ABC es equilátero; es decir, AB = AC = BC.



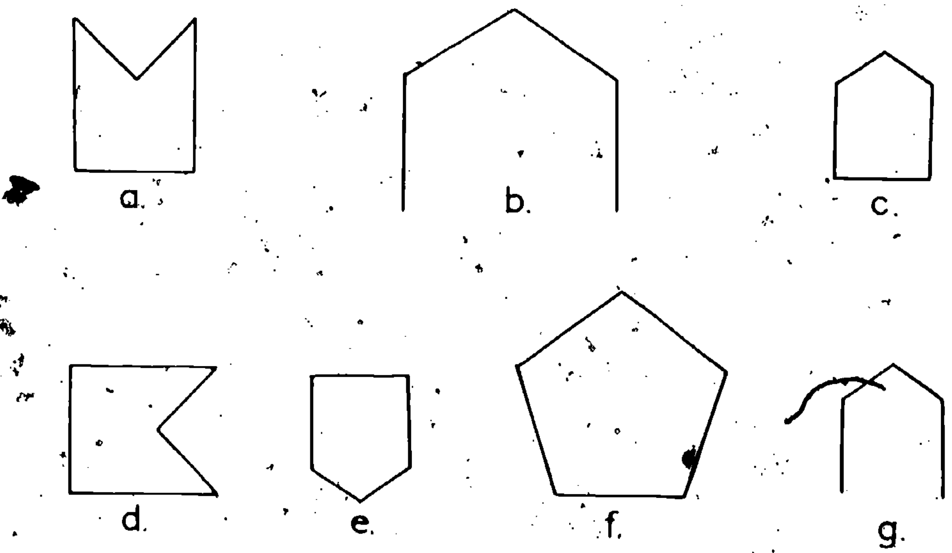
Para ese triángulo, escribe todas las congruencias posibles entre el triángulo y él mismo, empezando con la congruencia idéntica ABC $\longleftrightarrow$ ABC. (Deberás conseguir más de cuatro congruencias.)

8. Escribe todas las congruencias de un cuadrado consigo mismo.

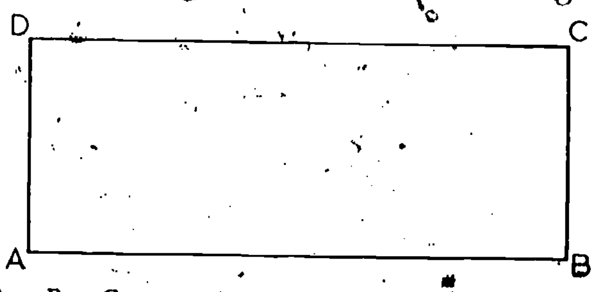


9. a. Si dos figuras son cada una de ellas congruente a una tercera, ¿serán congruentes entre sí?
   b. ¿Es una figura congruente consigo misma?
   c. ¿Puede un triángulo ser congruente a un cuadrado?
   d. ¿Son congruentes las caras superior e inferior de un cubo?
   e. ¿Son congruentes dos caras adyacentes de un cubo?
   f. ¿Son congruentes las caras superior e inferior de un bloque rectangular, tal como un ladrillo?
   g. ¿Son congruentes dos caras adyacentes de un ladrillo?

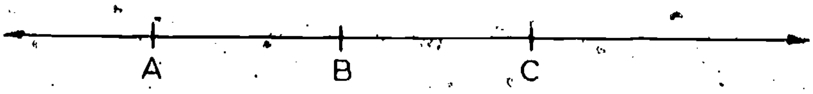
10. Selecciona los pares de figuras congruentes.



11. Escribe las cuatro congruencias de esta figura consigo misma.



12. Supónte que A, B, C son tres puntos de una recta, según la figura, y que AB = BC.

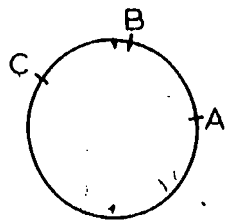


   a. Describe un movimiento de la recta que lleve A donde estaba B. En cuanto a B, ¿habrá ido necesariamente donde estaba C?
   b. Describe un movimiento de la recta que intercambie A y C.

13. ¿En qué condiciones podrán coincidir los siguientes pares de figuras moviendo una de ellas en el espacio sin alterar su forma y tamaño? (Se entiende que este movimiento se efectúa en forma abstracta, en la mente. Una figura se puede mover hasta otra de manera que un cuerpo se pueda superponer sobre otro de la misma forma y tamaño. Por ejemplo, un segmento se podrá mover para que coincida con otro si ambos tienen el mismo largo. Una bola se podrá mover para que coincida con otra si sus radios son de la misma longitud.)

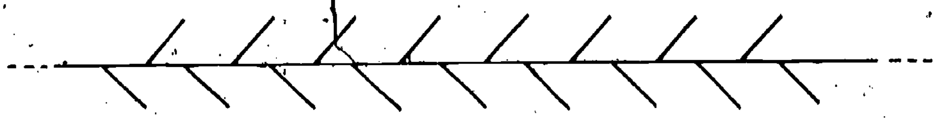
   a. Dos segmentos.
   b. Dos ángulos.
   c. Dos rayos.
   d. Dos circunferencias.
   e. Dos cubos.
   f. Dos puntos.
   g. Dos rectas.

14. Se da una circunferencia con tres puntos A, B, C, según aparecen en la figura, y con el arco de A a B del mismo largo que el arco de B a C.



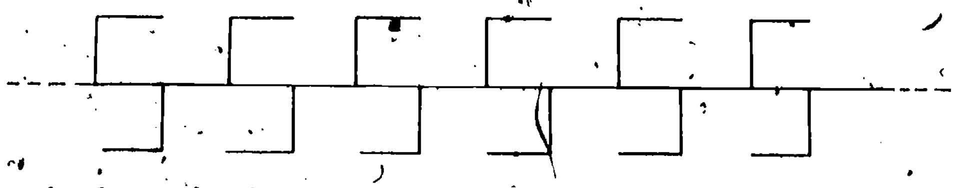
   a. Explica cómo puede moverse la circunferencia para que A vaya donde ahora está B y B donde está C.
   b. Explica cómo se puede mover la circunferencia dejando fijo a B, pero intercambiando A y C.

15. Suponte que el friso ornamental de la figura se extiende indefinidamente en ambas direcciones, a la manera de una recta.

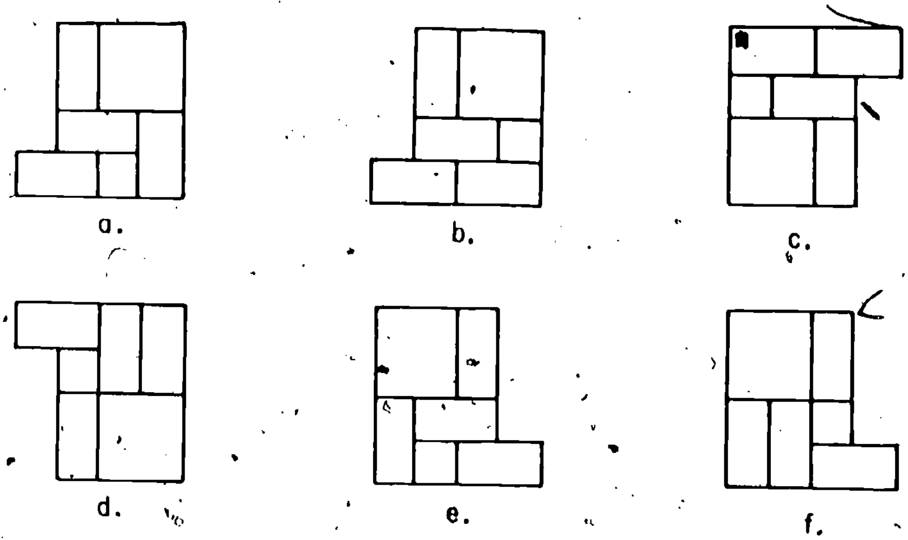


a. Describe dos tipos diferentes de movimientos que den congruencias del friso consigo mismo. ¿Cuántas de esas congruencias hay en total?

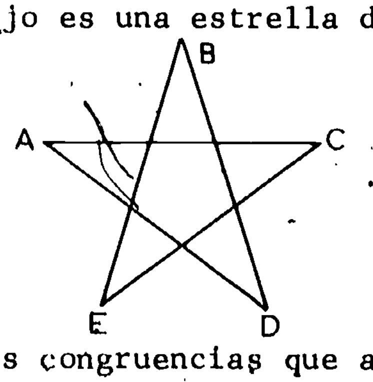
b. Haz lo mismo con este otro friso.



16. ¿Cuáles de las siguientes figuras pueden coincidir con otras? Para cada par de ellas, explica qué movimientos (darle vuelta en el espacio a una de las figuras, o deslizarla y girarla en el plano) son necesarios para que todas sus partes se ajusten perfectamente.



17. La figura de abajo es una estrella de cinco puntas.



Escribe todas las congruencias que admite la estrella consigo misma. Para ahorrar tiempo y papel, convengamos en que se ha descrito suficientemente bien una congruencia si decimos a dónde suponemos que va cada uno de los puntos A, B, C, D, E, de la estrella. Por ejemplo, una de las congruencias que buscamos es ABCDE $\longleftrightarrow$ BCDEA.

5-2. Congruencias de triángulos

En la sección anterior, explicamos la idea fundamental de lo que es una congruencia. Veamos ahora algunas definiciones matemáticas con objeto de que podamos hablar acerca de la congruencia con precisión, en términos de distancia y medida angular, en vez de tener que hablar en forma más burda de cosas que coinciden unas con otras.

En el caso de ángulos y segmentos, es fácil expresar exactamente lo que queremos decir:

Definiciones. Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida. Dos segmentos son congruentes si tienen la misma longitud. La primera definición simplemente repite la dada en la sección 4-4.

Al igual que el teorema 4-2 para ángulos, tenemos un teorema para segmentos:

Teorema 5-1. Todo segmento es congruente consigo mismo.

A veces nos referimos a estos dos teoremas como los teoremas de congruencia idéntica.

Al igual que se indicó la congruencia de $\angle A$ y $\angle B$ escribiendo $\angle A \cong \angle B$, también podemos escribir

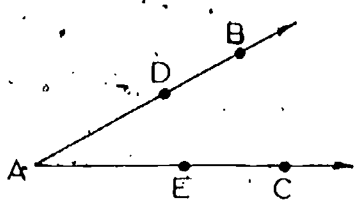
$$\overline{AB} \cong \overline{CD}$$

para indicar que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son congruentes. En la tabla siguiente, se pueden usar indistintamente, bien la ecuación de la izquierda o la congruencia de la derecha de cada línea:

1. $m\angle A = m\angle B$	1. $\angle A \cong \angle B$
2. $AB = CD$	2. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

Cada una de las ecuaciones de la izquierda es una ecuación entre números. La primera dice que $m\angle A$ y $m\angle B$ son exactamente el mismo número. La segunda dice que la distancia AB y la distancia CD son exactamente el mismo número.

Cada una de las congruencias de la derecha es una congruencia entre figuras geométricas. No escribiremos = entre dos figuras geométricas a menos que queramos decir que las figuras son exactamente una misma, y esas ocasiones serán muy raras. Un ejemplo tal sería:



Aquí es correcto decir que

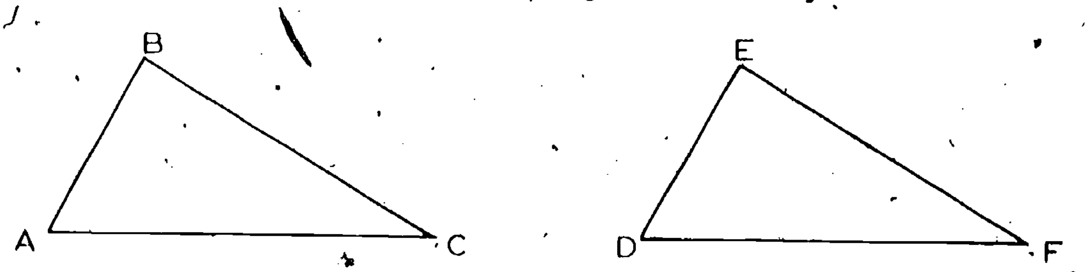
$$\angle BAC = \angle EAD,$$

porque $\angle BAC$ y $\angle EAD$ son, no solamente congruentes, sino que son exactamente el mismo ángulo. De manera análoga, $\overline{AB}$ y $\overline{BA}$ son siempre exactamente el mismo segmento, y por eso es correcto escribir $\overline{AB} = \overline{BA}$.

Considera ahora una correspondencia

$$ABC \longleftrightarrow DEF$$

entre los vértices de los dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$.



Esto automáticamente nos da una correspondencia entre los lados de los triángulos, a saber:

$$\overline{AB} \longleftrightarrow \overline{DE}$$

$$\overline{AC} \longleftrightarrow \overline{DF}$$

$$\overline{BC} \longleftrightarrow \overline{EF}$$

y nos da una correspondencia entre los ángulos de los dos triángulos, como sigue:

$$\angle A \longleftrightarrow \angle D$$

$$\angle B \longleftrightarrow \angle E$$

$$\angle C \longleftrightarrow \angle F$$

Podemos ahora enunciar la definición de una congruencia entre dos triángulos.

Definición. Sea $ABC \leftrightarrow DEF$ una correspondencia entre los vértices de dos triángulos. Si los pares de lados correspondientes son congruentes, y los pares de ángulos correspondientes son congruentes, entonces la correspondencia $ABC \leftrightarrow DEF$ es una <u>congruencia entre los triángulos</u>.

Deberás leer esa definición no menos de dos veces, con gran cuidado, para asegurarte de que dice lo que una definición de la idea de una congruencia entre triángulos debe decir.

Hay una taquigrafía para escribir congruencias de triángulos. Cuando escribimos

$$\angle A \cong \angle D,$$

esto significa que los dos ángulos, $\angle A$ y $\angle D$, son congruentes. (Es decir, $m\angle A = m\angle D$.) De modo análogo, cuando escribimos

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF,$$

esto significa que la correspondencia

$$ABC \leftrightarrow DEF$$

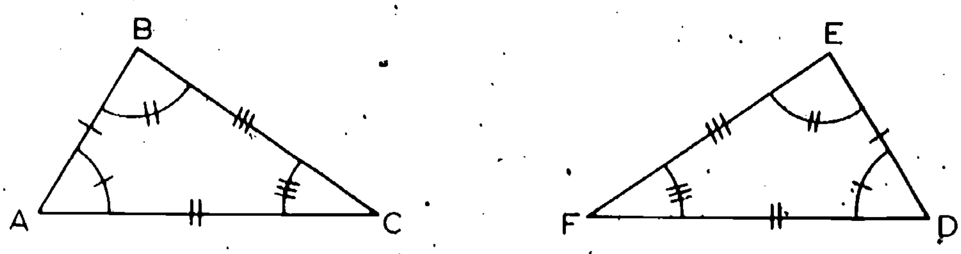
es una congruencia. Notarás que ésta es una taquigrafía muy eficiente: una simple expresión como $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ nos dice a la vez seis cosas; veamos,

$AB = DE$	$\overline{AB} \cong \overline{DE}$
$AC = DF$	$\overline{AC} \cong \overline{DF}$
$BC = EF$	$\overline{BC} \cong \overline{EF}$
$m\angle A = m\angle D$	$\angle A \cong \angle D$
$m\angle B = m\angle E$	$\angle B \cong \angle E$
$m\angle C = m\angle F$	$\angle C \cong \angle F$

En cada una de estas seis líneas, las ecuaciones de la izquierda significan lo mismo que las congruencias de la derecha y podemos escoger una u otra notación en cualquier momento, según nos convenga.

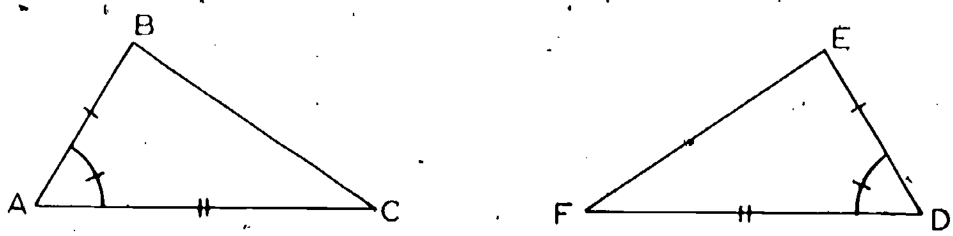
Generalmente escribiremos $AB = DE$, en vez de $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, por la sencilla razón de que es más fácil de escribir. Por la misma razón, corrientemente escribiremos $\angle A \cong \angle D$ en vez de $m\angle A = m\angle D$.

A veces conviene indicar gráficamente una congruencia marcando los lados y ángulos correspondientes de esta manera:



$\triangle ABC \cong \triangle DEF$

También podemos usar este método para indicar que ciertas partes correspondientes de dos figuras son congruentes, sepamos o no cómo son las otras partes.



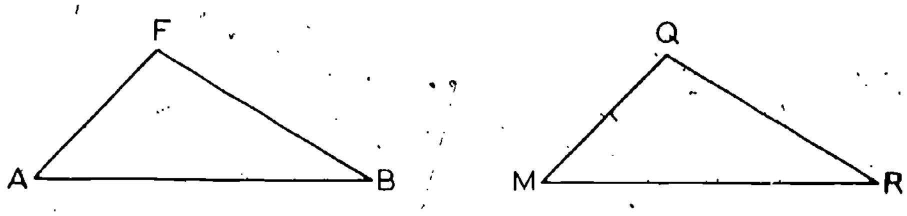
Las marcas en la figura indican que (1) $AB = DE$, (2) $AC = DF$ y (3) $m\angle A = m\angle D$.

Pregunta: ¿Sería correcto escribir $AB \cong DE$, o $\angle A = \angle D$? ¿Por qué sí o por qué no?

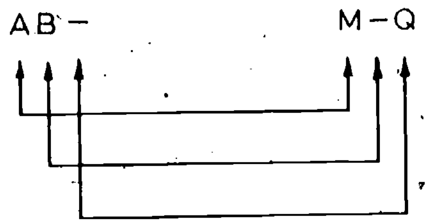
Parece claro en la anterior figura, que las congruencias señaladas bastan para garantizar que la correspondencia $ABC \longleftrightarrow DEF$ es una congruencia. O sea, si estos tres pares de partes correspondientes son congruentes, los triángulos también tendrán que ser congruentes. De hecho, esto es lo que dice el postulado básico de la congruencia, que se enunciará en la sección 5-3.

Conjunto de problemas 5-2

1.

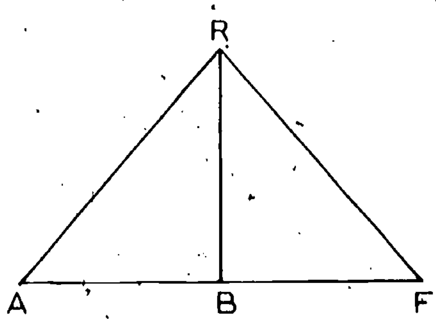


$\triangle ABF \cong \triangle MRQ$. Completa la siguiente lista diciendo cómo se deben llenar los espacios en blanco.



$\angle A \cong \angle M$. $\overline{AF} \cong$ ____.
$\angle B \cong$ ____. $\overline{AB} \cong$ ____.
$\angle F \cong$ ____. $\overline{FB} \cong$ ____.

2.



$\triangle ABR \cong \triangle FBR$. Haz una lista de los seis pares de partes correspondientes congruentes de estos dos triángulos.

3. $\triangle MRK \cong \triangle FHW$. Haz una lista de los seis pares de partes correspondientes congruentes de estos triángulos. (No es necesario contar con una figura, pero puedes hacer una si quieres.)

4. $\triangle RQF \cong \triangle ABX$. Escribe los seis pares de partes correspondientes congruentes de estos triángulos. No hagas uso de una figura.

5. $\triangle AZW \cong \triangle BZW$. Escribe los seis pares de partes correspondientes congruentes de estos triángulos.

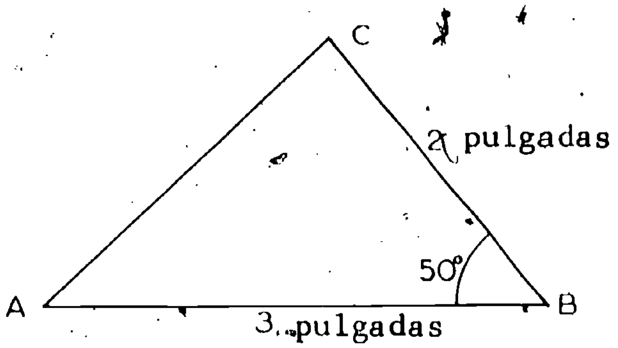
6. Tenemos ahora una lista de los seis pares de partes correspondientes de dos triángulos congruentes. Escribe, en los espacios en blanco de abajo, los dos triángulos que se adaptan a la información.

$\overline{AB} \cong \overline{MK}$	$\angle A \cong \angle M$
$\overline{BW} \cong \overline{KF}$	$\angle B \cong \angle K$
$\overline{AW} \cong \overline{MF}$	$\angle W \cong \angle F$

$\triangle$____ $\cong$ $\triangle$____

7. Si $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ y $\triangle DEF \cong \triangle XYZ$, ¿qué se puede decir respecto de la relación que hay entre el $\triangle ABC$ y el $\triangle DEF$? Enuncia un teorema que generalice esta situación.

8.



a. Utilizando regla y transportador, dibuja un triángulo ABC en el que AB tenga 3 pulgadas de largo, BC tenga 2 pulgadas de largo y el ángulo B sea de 50°. Compara tu triángulo con los de otros miembros de la clase.

b. Dibuja el $\triangle ABC$ en el cual AC tenga 3 pulgadas de largo, BC tenga 4 pulgadas de largo y el ángulo C tenga 70°. Compara triángulos.

c. Dibuja el $\triangle ABC$ que tenga AB de 3 pulgadas de largo, BC de 2 pulgadas de largo y el $\angle B$ del tamaño que te plazca. Compara triángulos.

d. Si estos tres ejercicios te dan una idea en relación con la congruencia entre dos triángulos, trata de enunciar o escribir esa idea para el caso general.

9. a. Se sabe que el $\triangle ABC$ y el $\triangle DEF$ no se cortan, y que X es un punto entre B y C. Indica cuál de los símbolos $=$, $\cong$ corresponde colocar en cada uno de los espacios en blanco para que las expresiones tengan sentido y sean posiblemente ciertas.

1. $\triangle ABC$ ___ $\triangle DEF$
2. $m\angle A$ ___ $m\angle D$
3. $\overline{AB}$ ___ $\overline{DE}$
4. BC ___ EF
5. $\angle B$ ___ $\angle C$
6. $\angle ABX$ ___ $\angle ABC$
7. $m\angle ABX$ ___ $m\angle EDF$

b. ¿Cuáles de los espacios en blanco se pudieron haber llenado con cualquiera de los signos $=$ o $\cong$?

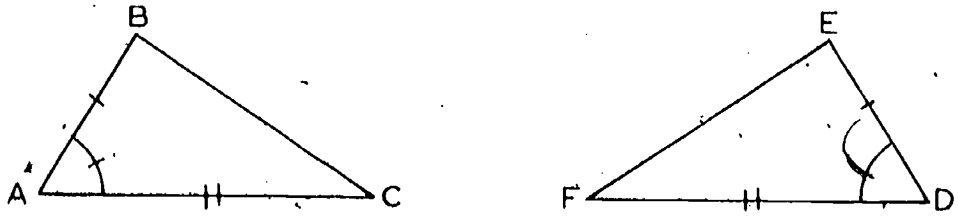
c. Si $\overline{AB}$ hubiera sido el mismo segmento que $\overline{DE}$, pero C fuera un punto diferente de F, ¿cuál de los blancos pudo haberse llenado con $=$ que de otra manera se debió haber llenado con $\cong$?

5-3. El postulado fundamental de la congruencia

Para llegar a conocer plenamente la congruencia de triángulos, necesitamos un nuevo postulado. Las abreviaturas en el título de este postulado, L.A.L., quieren decir lado-ángulo-lado.

> Postulado 15. (El postulado L.A.L.) Sea G una correspondencia entre dos triángulos (o la de un triángulo consigo mismo). Si dos lados y el ángulo comprendido del primer triángulo son congruentes a las partes correspondientes del segundo triángulo, entonces la correspondencia G es una congruencia.

Para ilustrarlo, repetimos una figura ya conocida.



El postulado significa que si

$$\overline{AB} \cong \overline{DE},$$

$$\overline{AC} \cong \overline{DF},$$

y

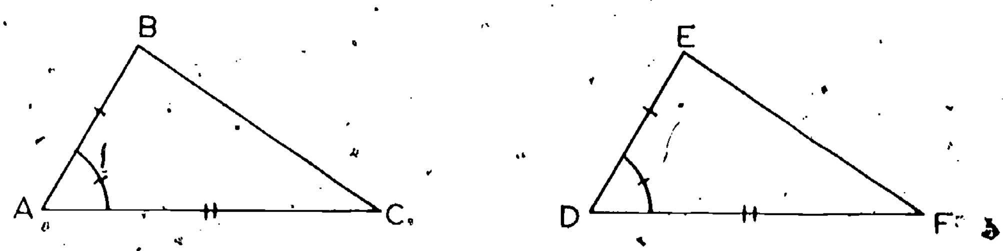
$$\angle A \cong \angle D,$$

según se indica en la figura, entonces

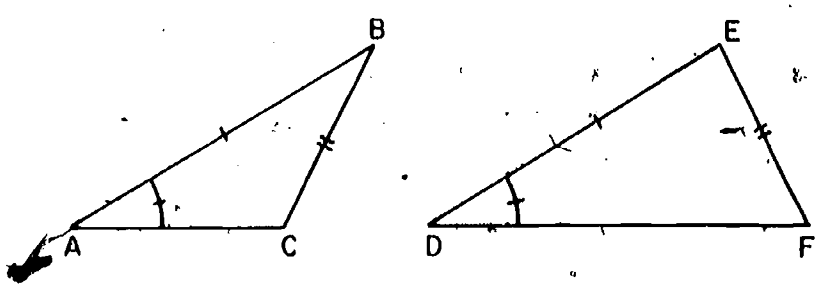
$$\triangle ABC \cong \triangle DEF;$$

esto es, la correspondencia $ABC \leftrightarrow DEF$ es una congruencia.

Es muy importante notar que en el postulado L.A.L., el ángulo dado es el ángulo comprendido entre los dos lados dados, así:



En estas condiciones, el postulado L.A.L. dice que la correspondencia $ABC \leftrightarrow DEF$ es una congruencia. Si supiéramos solamente que algún ángulo y algún par de lados del primer triángulo son congruentes a las partes correspondientes del segundo triángulo, entonces no llegaríamos necesariamente a la conclusión de que la correspondencia sea una congruencia. Por ejemplo, considera la figura:



En ella, $AB = DE$, $\angle A \cong \angle D$, $BC = EF$. Notarás que $\angle A$ y $\angle D$ no están comprendidos entre (o sea, no están formados por) los pares de lados congruentes. Esta correspondencia no es, en verdad, una congruencia, porque aparea $\overline{AC}$ con $\overline{DF}$, $\angle B$ con $\angle E$, y $\angle C$ con $\angle F$. Como éstas no son congruencias, no se satisface la definición de congruencia de triángulos.

5-4. Redacción de tus propias demostraciones

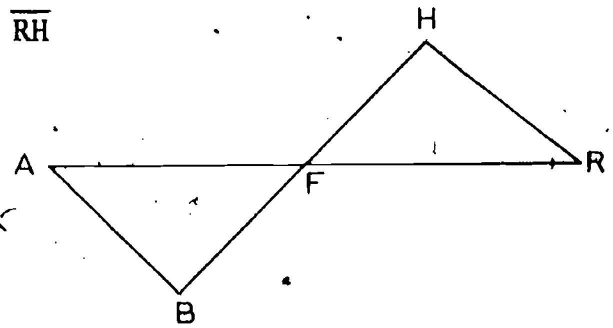
A estas alturas, ya cuentas con suficiente información fundamental para que puedas redactar verdaderas demostraciones geométricas por ti mismo. De ahora en adelante, el redactar tus propias demostraciones será una parte muy importante de tu trabajo, y lo más probable es que te agrade mucho más que leer las demostraciones que escribieron otros.

Veamos un par de ejemplos para indicarte qué se hace para encontrar una demostración y luego redactarla.

Ejemplo 1. Si dos segmentos se bisecan, los segmentos que unen los extremos de los segmentos dados son congruentes.

Dato: $\overline{AR}$ y $\overline{BH}$ se bisecan en F.

Demostrar: $\overline{AB} \cong \overline{RH}$



Al empezar a trabajar en un problema como éste, deberás primero dibujar una figura y ponerle letras, usando una mayúscula para cada vértice. Entonces, enuncia la hipótesis y la conclusión en términos de las letras de la figura.

Luego, se divide la página en dos columnas, como se ilustra más adelante, y se escriben sus encabezamientos, Afirmaciones y Razones.

Todo esto de nada nos va a servir a menos que se nos ocurra una demostración para redactarla.

Como nuestra finalidad es demostrar que dos segmentos son congruentes, debemos recordar lo que sabemos acerca de segmentos congruentes. Mirando hacia atrás, encontramos la definición de segmentos congruentes, la de triángulos congruentes y el postulado L.A.L. Estas son las armas de nuestro arsenal, referentes a segmentos congruentes, y en este momento la búsqueda es breve, porque nuestro arsenal es pequeño.

Para aplicar el postulado, tenemos que establecer una correspondencia entre dos triángulos, de manera que dos lados y el ángulo comprendido del primer triángulo sean congruentes a las partes correspondientes del segundo triángulo. Por la figura, parece que esta correspondencia debiera ser

$$AFB \longleftrightarrow RFH.$$

Dos de los pares de lados son congruentes, porque a base de la información dada y de la definición de bisecar, tenemos que

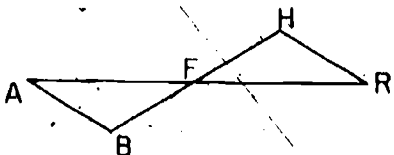
$$AF = RF \quad \text{y} \quad BF = HF.$$

¿Y qué hay de $\angle AFB$ y $\angle RFH$, los ángulos comprendidos? También necesitamos saber que son congruentes. Y lo son, porque son ángulos opuestos por el vértice. Por lo tanto, por el postulado L.A.L., nuestra correspondencia es una congruencia. Los lados $\overline{AB}$ y $\overline{RH}$ son lados correspondientes, y, por lo tanto, son congruentes. Esto es lo que queríamos demostrar.

Escrita ahora en la forma de doble columna, nuestra demostración se vería así:

Dato: $\overline{AR}$ y $\overline{BH}$ se bisecan en F.

Demostrar: $\overline{AB} \cong \overline{RH}$

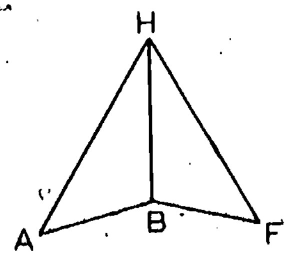


Afirmaciones	Razones
1. AF = RF	1. Definición de bisecar
2. BF = HF	2. Definición de bisecar
3. $\angle AFB \cong \angle RFH$	3. Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.
4. $\triangle AFG \cong \triangle RFH$	4. Postulado L.A.L.
5. $\overline{AB} \cong \overline{RH}$	5. Definición de congruencia de triángulos

Esto es meramente una muestra de cómo podrías presentar tu trabajo. Hay un límite en relación con la uniformidad que se pretende en la forma de lo que debe ser una demostración. Por ejemplo, en esta demostración hemos indicado congruencias de segmentos escribiendo AF = RF y BF = HF, etc. Pudimos igualmente haber escrito $\overline{AF} \cong \overline{RF}$, $\overline{BF} \cong \overline{HF}$, etc., porque en cada caso la congruencia de segmentos y la ecuación entre las distancias significan lo mismo.

Al redactar demostraciones hay solamente dos cosas verdaderamente importantes. La primera consiste en que escribas lo que en realidad quieras decir; la segunda en que lo que quieras decir sea una explicación lógica y completa de por qué es cierto el teorema.

Puesto que ya debes tener idea de cómo se procede, ofrecemos un segundo ejemplo, en forma incompleta. Tu problema será llenar los espacios en blanco de manera que logres una demostración.



Ejemplo 2.

Datos: $\overline{AH} \cong \overline{FH}$

$\overrightarrow{HB}$ biseca $\angle AHF$

Demostrar: $\angle A \cong \angle F$

Afirmaciones	Razones
1. $\overline{AH} \cong \overline{FH}$	1. Dato
2.	2. Definición de la bisectriz de un ángulo
3. $\overline{HB} \cong \overline{HB}$	3. Todo segmento es congruente consigo mismo.
4.	4.
5. $\angle A \cong \angle F$	5.

Un error frecuente al redactar demostraciones es que el alumno supone ser cierto precisamente aquello que está tratando de demostrar que lo es. Otro error corriente es ofrecer como una razón en su demostración un teorema que es en realidad una consecuencia del principio que está tratando de demostrar. Ese tipo de razonamiento constituye lo que llamamos un círculo vicioso y no tiene valor alguno como argumento lógico.

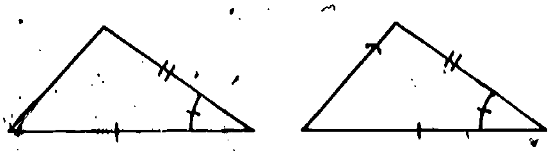
Un ejemplo particularmente desacertado de círculo vicioso es el que utiliza el teorema que se va a demostrar como una razón en una de las etapas de la "demostración".

Conjunto de problemas 5-4

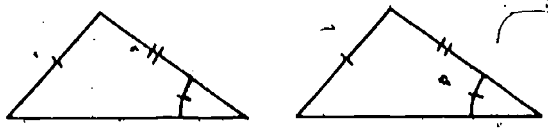
(Nota: En algunos de los siguientes problemas hacemos uso de un cuadrado. Un cuadrado ABCD es una figura plana que es la reunión de cuatro segmentos congruentes $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ tales que $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$, y $\angle DAB$ sean ángulos rectos. El cuadrado se discutirá en un capítulo posterior del texto.)

1. En cada par de triángulos, y si las marcas semejantes indican partes congruentes, ¿qué triángulos se puede demostrar que son congruentes en virtud del postulado L.A.L.?

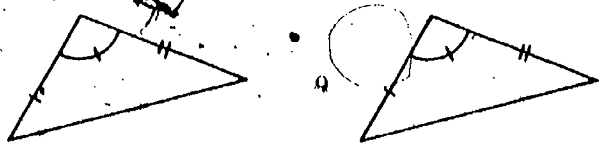
a.



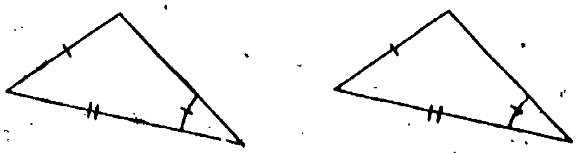
b.



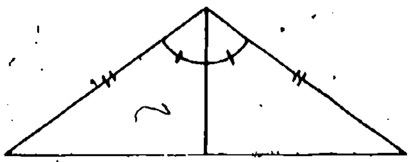
c.



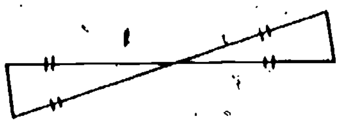
d.



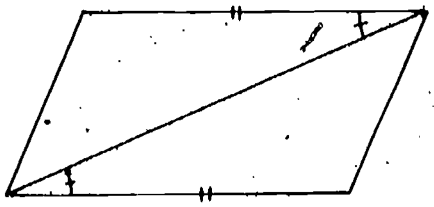
e.



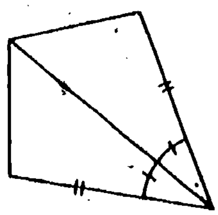
f.



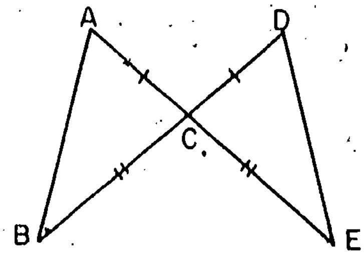
g.



h.

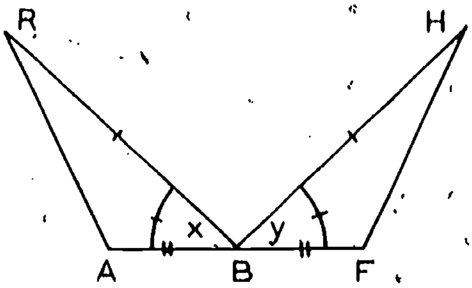


2. En la figura, sabemos que $\overline{AE}$ corta a $\overline{BD}$ en C, y que AC = DC y BC = EC. Prueba (es decir, demuestra) que $\angle B \cong \angle E$. Copia la siguiente demostración supliendo las razones que faltan.



Afirmaciones	Razones
1. AC = CD	1. Dato
2. BC = EC	2. ______________
3. $\angle ACB \cong \angle DCE$	3. Los ángulos __________ son congruentes.
4. $\triangle ACB \cong \triangle DCE$	4. ______________. (Notarás que la tercera afirmación se refiere a ángulos y esta cuarta afirmación a triángulos, así que la razón para este paso debe referirse a triángulos.)
5. $\angle B \cong \angle E$	5. Partes correspondientes de triángulos congruentes son ______________.

3. Suponte que en esta figura $\overline{RB} \cong \overline{HB}$, $\angle x \cong \angle y$ y B es el punto medio de $\overline{AF}$. Prueba que $\angle R \cong \angle H$.

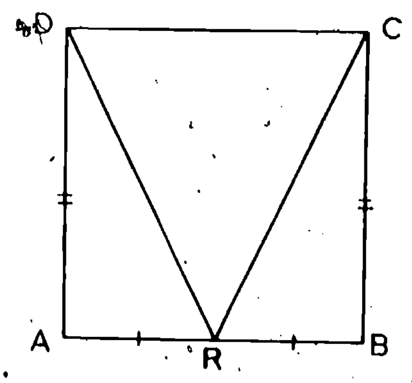


Copia y completa la demostración siguiente:

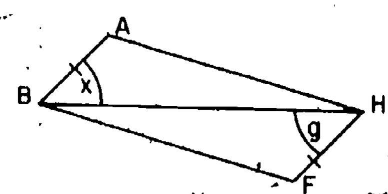
Afirmaciones	Razones
1. $\overline{RB} \cong \overline{HB}$	1. ________
2. $\angle x \cong \angle y$	2. Dato
3. ________ = ________	3. Por la definición de punto medio
4. ________	4. L.A.L.
5. ________	5. ________

4. a. Si ABCD es un cuadrado y R es el punto medio de $\overline{AB}$, demuestra que RC = RD. (Fíjate en la nota que precede el problema 1.)

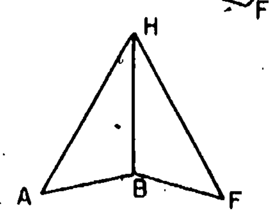
   b. ¿Qué pares de ángulos agudos congruentes aparecen en la figura? Prueba tu respuesta.



5. En esta figura, AB = FH y $m\angle x = m\angle g$. Muestra que $m\angle A = m\angle F$.

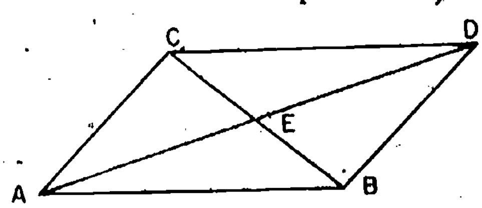


6. En esta figura, se nos da que $m\angle ABH = m\angle FBH$ y que AB = FB. Demuestra que AH = FH.

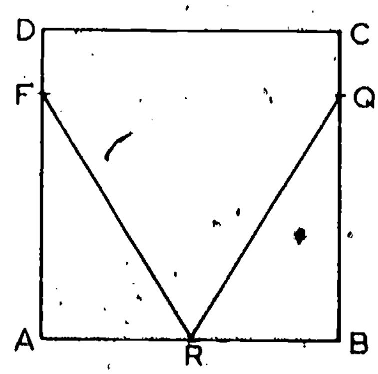


7. Demuestra que si los segmentos $\overline{AH}$, $\overline{RB}$ se bisecan en el punto F, entonces $\triangle FAB \cong \triangle FHR$.

8. Demuestra: Si los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ se bisecan, entonces AB = DC y AC = DB.

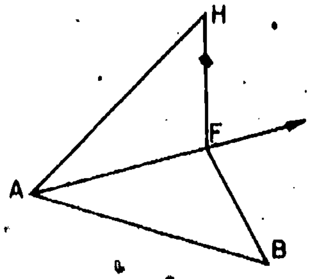


9. a. Datos: El cuadrado ABCD, R es el punto medio de $\overline{AB}$, F es un punto entre A y D, Q es un punto entre C y B, DF = CQ. Demuestra que RF = RQ.



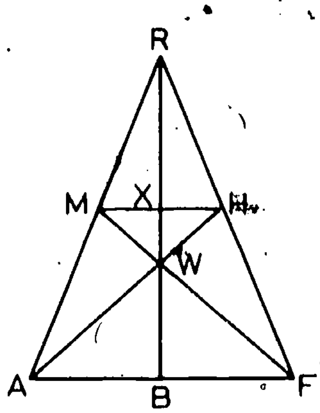
b. ¿Habrá otros puntos F', Q' en el cuadrado ABCD, pero no sobre $\overline{AD}$ o $\overline{BC}$, tales que RF' = RQ'? ¿Dónde estarán?

10. Supongamos en esta figura que AB = AH y que $\overrightarrow{AF}$ biseca $\angle$HAB. Demuestra que FH = FB.



5-5. Triángulos parcialmente superpuestos; uso de la figura en enunciados

Frecuentemente, necesitamos trabajar con triángulos que no aparecen completamente separados en las figuras, sino que en parte aparecen superpuestos (ocupan parcialmente una misma región del plano). Así ocurre con el $\triangle$AFM y el $\triangle$FAH en la figura.



La manera más fácil de evitar confusiones, y también el equivocarse, al tratar con tales casos, es escribir las congruencias en la forma acostumbrada, así:

$$\triangle AFM \cong \triangle FAH.$$

Comprueba que la correspondencia AFM $\longleftrightarrow$ FAH es realmente una congruencia, y luego, cuando quieras más tarde llegar a la conclusión de que dos lados (o dos ángulos) correspondientes son congruentes, haz referencia a que $\triangle AFM \cong \triangle FAH$.

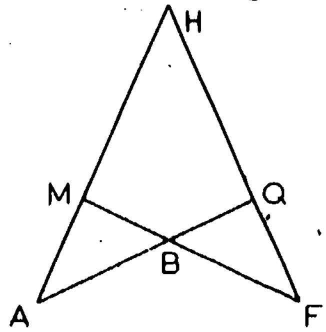
Desde luego, si no ves las congruencias entre los triángulos parcialmente superpuestos, nada tendrás que comprobar ni tampoco que aplicar más tarde. Como práctica, escribe todas las congruencias que puedas de triángulos que aparecen en la figura anterior, si sabemos que AR = FR y que M, H, B son los puntos medios de los lados respectivos.

Veamos un caso en que esta situación surge en la demostración de un teorema.

Datos: HA = HF

HM = HQ

Demostrar: FM = AQ



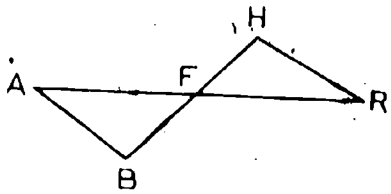
Una forma corriente de demostrar que dos segmentos son congruentes es mostrando que son lados correspondientes de triángulos congruentes. Si vamos a utilizar con éxito este método aquí, entonces lo primero que hay que hacer es indicar los triángulos que contienen $\overline{FM}$ y $\overline{AQ}$. Estos son $\triangle HMF$ y $\triangle HQA$, y vemos que estos triángulos coinciden parcialmente. El problema ahora es el demostrar que son congruentes. La demostración, en forma de doble columna, es como sigue:

Afirmaciones	Razones
1. HA = HF	1. Dato
2. $\angle H \cong \angle H$	2. Un ángulo es congruente a sí mismo.
3. HM = HQ	3. ¿Por qué?
4. $\triangle HMF \cong \triangle HQA$	4. ¿Por qué?
5. FM = AQ	5. ¿Por qué?

Una demostración estrictamente lógica no debe depender de una figura, sino ser consecuencia de los postulados, las definiciones, y los teoremas ya establecidos. Pero en la práctica los geómetras utilizan figuras por conveniencia, y fácilmente aceptan muchos principios observables sin enunciarlos una y otra vez, lo cual sería tedioso, a menos que un nuevo enunciado sea esencial para aclarar el problema en cuestión.

Para ilustrar, veamos un nuevo planteamiento del ejemplo 1 considerado previamente.

<u>Ejemplo 1</u>. Sean A, B, F, H y R cinco puntos no alineados en un plano. Si (1) F está entre A y R, (2) F está entre B y H, (3) AF = FR, y (4) BF = FH, entonces (5) AB = RH. Esto nos da toda la información que ofrecen abajo la figura de la izquierda y la notación de la derecha.



Dato: $\overline{AR}$ y $\overline{BH}$ se bisecan en F.

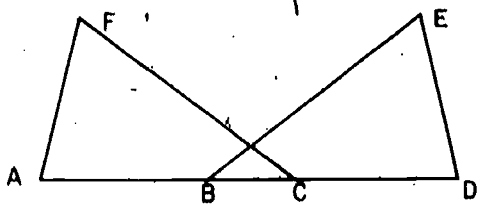
Demostrar: $\overline{AB} \cong \overline{RH}$

Notarás que (1) nos dice que $\overrightarrow{FA}$ y $\overrightarrow{FR}$ son rayos opuestos, y que (2) nos dice que $\overrightarrow{FB}$ y $\overrightarrow{FH}$ son rayos opuestos. Estas dos cosas, juntas, significan que el $\angle AFB$ y el $\angle RFH$ son opuestos por el vértice. (Véase la definición de ángulos opuestos por el vértice.) Este es el tipo de información que tomamos normalmente de una figura.

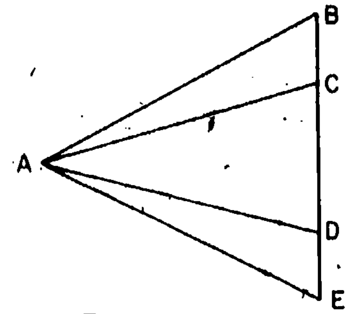
En este libro, al enunciar problemas, evitaremos repeticiones tediosas mediante referencias a una figura. <u>Puedes</u> basarte en la figura para obtener la alineación de puntos, el orden de los puntos en una recta, la localización de un punto en el interior o el exterior de un ángulo o en un cierto semiplano, y, en general, las posiciones relativas de puntos, rectas y planos. Lo que <u>no puedes</u> suponer sin más porque "se ve", es la congruencia de segmentos o ángulos, el que un punto ~~sea el~~ punto medio de un segmento, el que dos rectas sean perpendiculares, o el que dos ángulos sean complementarios.

Conjunto de problemas 5-5

1. Si, en esta figura, AC = DB, $\angle ACF \cong \angle DBE$ y FC = EB, demuestra que AF = DE.



2. En esta figura, BC = ED, AC = AD y $\angle ACE \cong \angle ADB$. Demuestra que $\triangle ACE \cong \triangle ADB$.



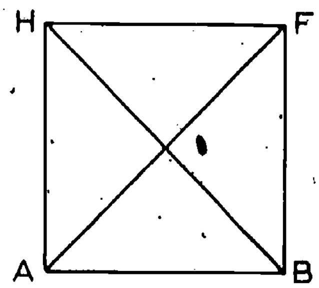
Demostración: (Llena los espacios en blanco.)

Afirmaciones	Razones
1. BC = ED	1. Dato
2. CD = DC	2. ______
3. BD = EC	3. Suma de las afirmaciones 1 y 2
4. AC = AD	4. ______
5. $\angle ACE \cong \angle ADB$	5. ______
6. ______	6. ______

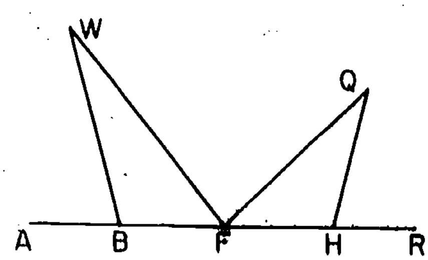
3. Demuestra que las diagonales de un cuadrado tienen longitudes iguales. (Véase la nota antes del problema 1 en el Conjunto de problemas 5-4.)

Dato: ABFH es un cuadrado.

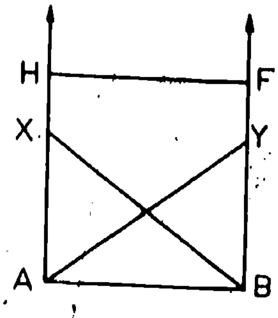
Demostrar: AF = BH



4. En esta figura, $\angle ABW \cong \angle RHQ$ y F es el punto medio de $\overline{BH}$. ¿Puedes demostrar que $\triangle WBF \cong \triangle QHF$? Explícalo.



5. a. Si ABFH es un cuadrado y $\overline{AX}$, $\overline{BY}$ son segmentos congruentes en los rayos $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{BF}$, respectivamente, muestra que $\overline{AY}$, $\overline{BX}$ son congruentes.



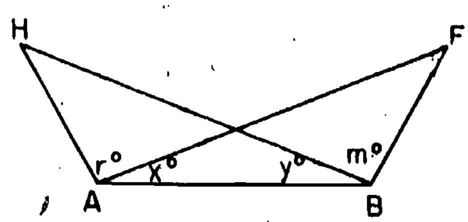
O de otro modo:

Dato: ABFH es un cuadrado.
X, Y son puntos de $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{BF}$, respectivamente.
$\overline{AX} \cong \overline{BY}$.

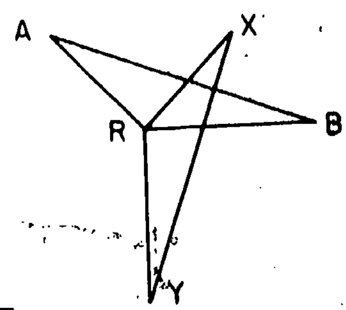
Demostrar: $\overline{AY} \cong \overline{BX}$

b. En la figura, X está entre A y H, también Y está entre B y F. ¿Cambiaría la demostración si H estuviera entre A y X, y F estuviera entre B y Y?

6. Suponte que sabemos que en esta figura AH = BF, r = m, x = y. Demuestra que HB = FA.



7. Si, en la figura, $\overline{AR} \perp \overline{RX}$, $\overline{BR} \perp \overline{RY}$, AR = RX y BR = RY, demuestra que AB = XY.

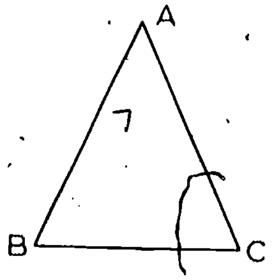


5-6. El teorema del triángulo isósceles y el teorema de la bisectriz del ángulo

Al final de la Sección 5-1 mencionamos el caso de cómo aparear los vértices de un triángulo $\triangle ABC$ que tiene por lo menos dos lados de igual longitud. Este es, de hecho, el caso con que vamos a trabajar en el primer teorema de congruencia que enunciamos formalmente:

Teorema 5-2. Si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces los ángulos opuestos a estos lados son congruentes.

O de otro modo: Sea ABC un triángulo. Si $AB = AC$, entonces $\angle B \cong \angle C$.



Demostración: Considera la correspondencia

$$ABC \longleftrightarrow ACB,$$

entre el $\triangle ABC$ y él mismo. En esta correspondencia, vemos que

$$\overline{AB} \longleftrightarrow \overline{AC}$$
$$\overline{AC} \longleftrightarrow \overline{AB}$$
$$\angle A \longleftrightarrow \angle A.$$

Así, dos lados y el ángulo comprendido del $\triangle ABC$ son congruentes a las partes correspondientes del $\triangle ACB$. Por el postulado L.A.L., esto significa que

$$\triangle ABC \cong \triangle ACB,$$

esto es, la correspondencia $ABC \longleftrightarrow ACB$ es una congruencia. Por la definición de una congruencia de triángulos, todos los pares de partes correspondientes son congruentes.

Por lo tanto,

$$\angle B \cong \angle C,$$

porque estos ángulos son partes correspondientes.

Veremos ahora cómo se puede presentar esa demostración en la forma de dos columnas. Se utiliza la misma figura.

Teorema 5-2. Si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces los ángulos opuestos a estos lados son congruentes.

Dato: $\triangle ABC$ con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.

Demostrar: $\angle B \cong \angle C$

Demostración:

Afirmaciones	Razones
1. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ $\overline{AC} \cong \overline{AB}$	1. Dato
2. $\angle A \cong \angle A$	2. Congruencia idéntica
3. $\triangle ABC \cong \triangle ACB$	3. Pasos 1 y 2 y el postulado L.A.L.
4. $\angle B \cong \angle C$	4. Definición de una congruencia de triángulos

Generalmente, enunciaremos los teoremas en palabras, como lo hicimos con el teorema 5-2, y luego los volveremos a enunciar, usando una notación que será la de la demostración.

Definiciones. Un triángulo con dos lados congruentes se llama isósceles. El otro lado es la base. Los dos ángulos asociados con la base son ángulos en la base.

En estos términos, podemos enunciar el teorema 5-2 de esta manera:

"Los ángulos en la base de un triángulo isósceles son congruentes".

Definiciones. Un triángulo cuyos tres lados son congruentes se llama equilátero. Un triángulo ninguno de cuyos pares de lados son congruentes se llama escaleno.

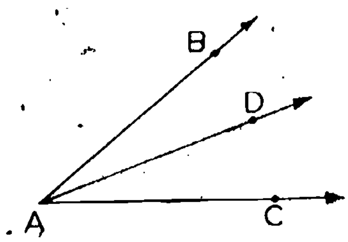
Definición. Un triángulo es equiángulo si sus tres ángulos son congruentes.

Utilizando la palabra equiángulo enunciaremos un teorema que se deduce fácilmente del teorema 5-2. Llamaremos a este teorema corolario 5-2-1. Un <u>corolario</u> es un teorema que se deduce fácilmente de otro teorema. Dejamos la demostración del corolario 5-2-1 a tu criterio.

<u>Corolario 5-2-1</u>. Todo triángulo equilátero es equiángulo.

Al tratar de demostrar teoremas, tendrás que hacer tus propias figuras. Es importante que las dibujes de manera que te recuerden lo que ya sabes, pero sin que sugieran más de lo que sabes. Por ejemplo, la figura en la demostración del teorema 5-2 se parece a un triángulo isósceles, y así es como debe ser, porque la hipótesis del teorema dice que el triángulo tiene dos lados congruentes. En la figura del postulado L.A.L., parece como que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, y así es como debe ser, porque esta es la situación planteada en el postulado. Pero no hubiera estado bien dibujar triángulos isósceles para ilustrar el postulado L.A.L., porque esto sugiere algo que el postulado no dice.

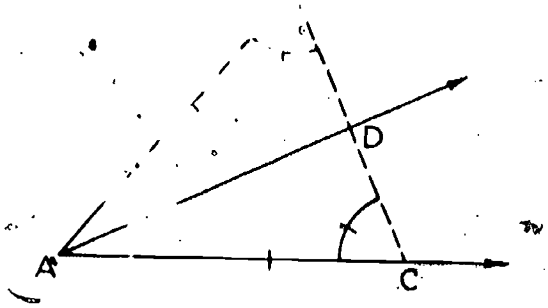
<u>Definición</u>: Un rayo $\overrightarrow{AD}$ <u>biseca</u> a, o es una <u>bisectriz</u> de, un ángulo $\angle BAC$ si D está en el interior del $\angle BAC$, y $\angle BAD \cong \angle DAC$.



Notarás que si $\overrightarrow{AD}$ biseca al $\angle BAC$, entonces $m\angle BAD = m\angle DAC = \frac{1}{2}m\angle BAC$.

<u>Teorema 5-3</u>. Todo ángulo tiene exactamente una bisectriz.

<u>Demostración</u>: Se da el $\angle A$. Por el teorema de la localización de puntos, podemos hallar B y C, puntos en los lados del $\angle A$, tales que (1) $AB = AC$.



Sea D el punto medio de $\overline{BC}$, tal que (2) $DB = DC$. Como $AB = AC$, sabemos por el teorema 5-2 que (3) $\angle B \cong \angle C$. (Esto se aplica también cuando el triángulo isósceles $\triangle ABC$ aparezca "apoyado sobre su lado") De (1), (2) y (3), y el postulado L.A.L. deducimos en consecuencia que

$$\triangle ABD \cong \triangle ACD.$$

Por lo tanto, $\angle BAD \cong \angle CAD$, y así $m\angle BAD = m\angle CAD$. Por la definición de bisectriz de un ángulo, esto significa que $\overrightarrow{AD}$ biseca al $\angle BAC$.

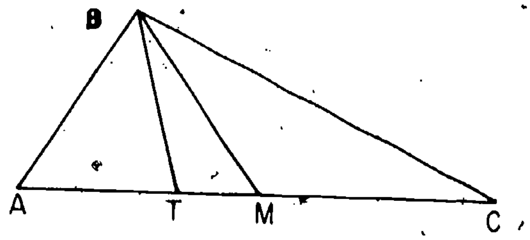
Para justificar nuestro uso de la palabra "exactamente" deberemos demostrar que $\overrightarrow{AD}$ es el <u>único</u> rayo que tiene esta propiedad. Supongamos que hay un rayo $\overrightarrow{AE}$ que es también una bisectriz del $\angle A$. Entonces $m\angle CAD = m\angle CAE$, ya que cada uno de éstos es igual a $\frac{1}{2}m\angle BAC$. Si aplicamos el postulado de la construcción del ángulo al semiplano que tiene $\overleftrightarrow{AC}$ como arista, sabemos que la relación $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD}$ tiene que ser cierta, es decir, que $\overrightarrow{AE}$ y $\overrightarrow{AD}$ representan un mismo rayo. Por lo tanto, hay solamente una bisectriz.

Las siguientes definiciones son útiles en la consideración de las propiedades de los triángulos.

<u>Definición</u>. Una <u>mediana de un triángulo</u> es un segmento cuyos extremos son un vértice del triángulo y el punto medio del lado opuesto.

<u>Definición</u>. Entendemos por <u>bisectriz de un ángulo de un triángulo</u> el segmento cuyos extremos son un vértice del triángulo y el punto del lado opuesto que cae en el rayo que biseca el ángulo del vértice dado.

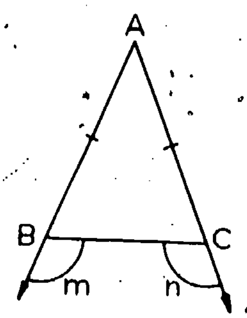
Notarás que todo triángulo tiene tres medianas y tres bisectrices de ángulo. La figura señala una mediana y una bisectriz de ángulo del $\triangle ABC$.



$\overline{BM}$ es la mediana desde B y $\overline{BT}$ es la bisectriz de ángulo desde B.

Conjunto de problemas 5-6

1. En la figura, AB = AC. Hemos iniciado la demostración de que $\angle m \cong \angle n$. Completa esta demostración y da las razones para cada uno de tus pasos.

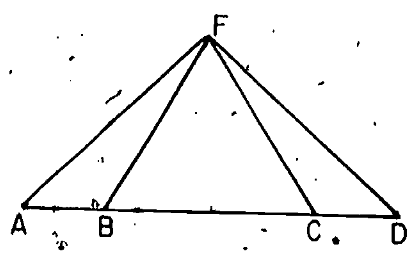


Demostración: Afirmaciones	Razones
1. $\angle ABC \cong \angle ACB$	1. ________
2. $\angle m$ es el suplemento de $\angle ABC$. $\angle n$ es el suplemento de $\angle ACB$.	2. ________
3. $\angle m \cong \angle n$	3. ________

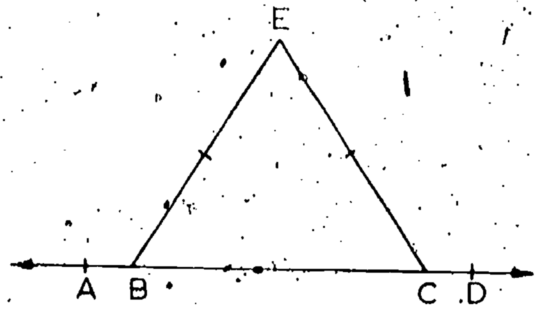
2. Dato: En la figura, FA = FD y AB = DC.

   Demuestra: $\triangle AFB \cong \triangle DFC$,

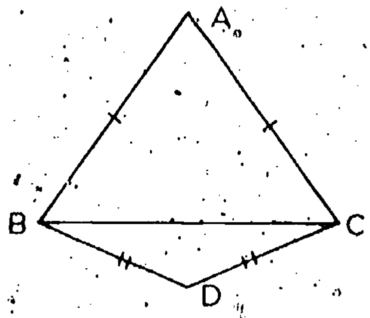
   $\triangle FBC \cong \triangle FCB$.



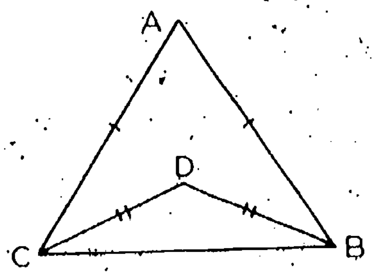
3. Si, en la figura, $\overline{EB} \cong \overline{EC}$, demuestra que $\angle EBA \cong \angle ECD$.



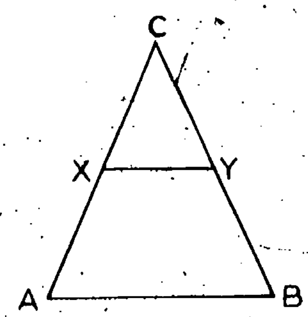
4. Si AB = AC y DB = DC en la figura plana, demuestra que $\angle ABD \cong \angle ACD$.



5. Si AC = AB y CD = BD en la figura plana, demuestra que $\angle ACD \cong \angle ABD$.



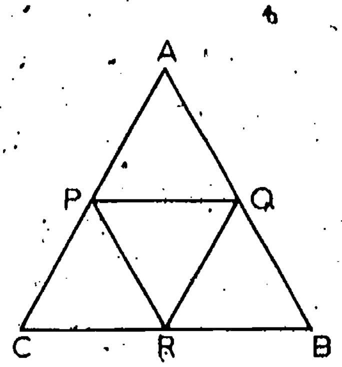
6. Redacta, en forma de frase en vez de en la forma de dos columnas, una demostración de lo siguiente:
Dato: X e Y son los puntos medios de los lados congruentes $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ del triángulo isósceles ABC.



Demuestra que $\angle CXY \cong \angle CYX$.

7. Demuestra el corolario 5-2-1. (Todo triángulo equilátero es equiángulo.)

8. Sea ABC un triángulo equilátero en el que Q, R y P son los puntos medios de los lados, según se puede ver en la figura. Demuestra que $\triangle PQR$ es equilátero.



9. Demuestra lo siguiente: Si la mediana $\overline{FQ}$ del $\triangle FAB$ es perpendicular al lado $\overline{AB}$, entonces el $\triangle FAB$ es isósceles.

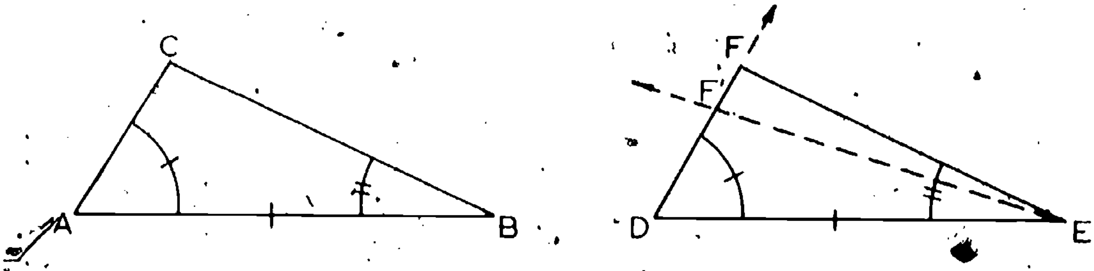
5-7. El teorema de ángulo-lado-ángulo

Teorema 5-4. (El teorema A.L.A.) Sea G una correspondencia entre dos triángulos (o entre un triángulo y él mismo). Si dos ángulos y el lado común del primer triángulo son congruentes a las partes correspondientes del segundo triángulo, entonces la correspondencia G es una congruencia.

O de otro modo: Sea $ABC \longleftrightarrow DEF$ una correspondencia entre dos triángulos. Si

$$\angle A \cong \angle D,$$
$$AB = DE,$$
$$\angle B \cong \angle E,$$

entonces $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



Demostración: Afirmaciones	Razones
1. Sobre el rayo DF hay un punto F' tal que DF' = AC.	1. El teorema de la localización de puntos
2. AB = DE y $m\angle A = m\angle D$	2. Dato
3. $\triangle ABC \cong \triangle DEF'$	3. Postulado L.A.L.
4. $\angle ABC \cong \angle DEF'$	4. Definición de una congruencia de triángulos
5. $\angle ABC \cong \angle DEF$	5. Dato
6. $\angle DEF' \cong \angle DEF$	6. Los pasos 4 y 5, y la definición de ángulos congruentes
7. $\overrightarrow{EF}$ y $\overrightarrow{EF'}$ son el mismo rayo.	7. El paso 6 y el postulado 1
8. F = F'	8. Dos rectas ($\overleftrightarrow{EF}$ y $\overleftrightarrow{DF}$) se intersecan a lo sumo en un punto.
9. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$	9. Afirmaciones 3 y 8

Dejamos al alumno las demostraciones del siguiente teorema y del corolario. Las demostraciones son análogas a las del teorema 5-2 y el corolario 5-2-1.

Teorema 5-5. Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, los lados opuestos a estos ángulos son congruentes.

Corolario 5-5-1. Un triángulo equiángulo es equilátero.

Conjunto de problemas 5-7

1. En algunas partes de este ejercicio no habrá suficiente información para permitirte demostrar que dos triángulos son congruentes aunque utilices todos los otros principios que ya conoces, como, por ejemplo, que "los ángulos opuestos por el vértice son congruentes". Si se puede demostrar que los dos triángulos son congruentes, indica por qué (A.L.A. o L.A.L.); si no hay información suficiente para demostrar que los triángulos son congruentes, indica qué otro par de partes congruentes te permitirán demostrar que lo son. Si hay dos posibilidades, señala ambas.

   a. Dado solamente que $\overline{AH} \cong \overline{AB}$.

   b. Dado solamente que $\angle c \cong \angle d$.

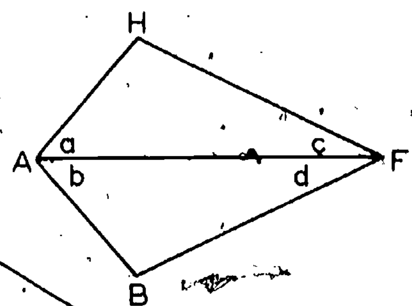
   c. Dado solamente que $\angle a \cong \angle b$ y $\angle c \cong \angle d$.

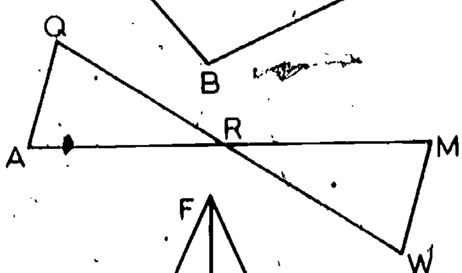
   d. Dado solamente que $\overline{AR} \cong \overline{MR}$.

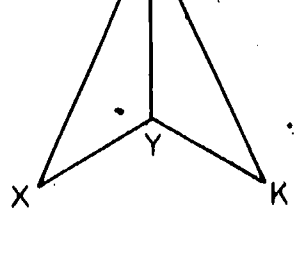
   e. Dado solamente que $\angle A \cong \angle M$.

   f. Dado solamente que $\angle XFY \cong \angle KFY$.

   g. Dado solamente que $\angle XYF \cong \angle KYF$.







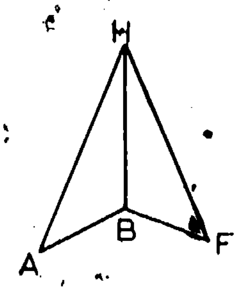
2. De acuerdo con las especificaciones de la izquierda, escribe aquella información que llenaría correctamente los espacios en blanco.

   a. Lado, ángulo, lado del $\triangle ABH$:
   $\overline{AH}$, ____, $\overline{HB}$.

   b. Angulo, lado, ángulo del $\triangle ABH$:
   ____, $\overline{HB}$, ____.

   c. Angulo, lado, ángulo del $\triangle BFH$:
   $\angle F$, ____, $\angle HBF$.

   d. Lado, ángulo, lado del $\triangle BFH$:
   $\overline{BF}$, ____, ____.



3. Sigue las instrucciones del problema 2.

   a. Angulo, lado, ángulo del $\triangle ABF$:
   ____, $\overline{BF}$, ____.

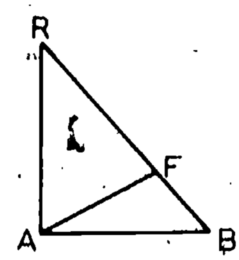
   b. Lado, ángulo, lado del $\triangle RAF$:
   ____, $\angle R$, ____.

   c. Lado, ángulo, lado del $\triangle RAB$:
   ____, $\angle B$, ____.

   d. Lado, ángulo, lado del $\triangle RAB$:
   $\overline{BR}$, ____, $\overline{RA}$.

   e. Angulo, lado, ángulo del $\triangle RAF$:
   $\angle R$, ____, $\angle RFA$.

   f. Angulo, lado, ángulo del $\triangle AFB$:
   $\angle FAB$, $\overline{AF}$, ____.

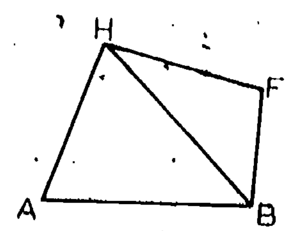


4. Sigue las instrucciones del problema 2.

   a. Lado, ángulo, lado del $\triangle HFB$:
   ____, $\angle HFB$, ____.

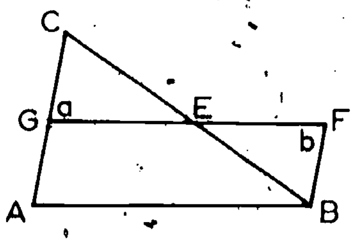
   b. Angulo, lado, ángulo del $\triangle ABH$:
   ____, $\overline{HB}$, ____.

   c. Lado, ángulo, lado del $\triangle HFB$:
   $\overline{HB}$, ____, $\overline{BF}$.



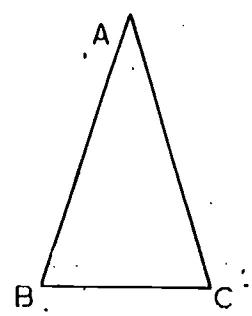
d. Angulo, lado, ángulo del $\triangle HFB$:
___, $\overline{BF}$, ___.

e. Lado, ángulo, lado del $\triangle ABH$:
$\overline{AH}$, ___, $\overline{AB}$.



5. Si, en la figura, $\overline{CB}$ biseca a $\overline{GF}$ y $\angle a \cong \angle b$, demuestra que $\overline{GF}$ biseca a $\overline{CB}$.

6. Demuestra el teorema 5-5. (Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, los lados opuestos a estos ángulos son congruentes.)
O de otro modo: Si $\angle B \cong \angle C$ en el $\triangle ABC$, entonces $AB = AC$.
Sugerencia: Usa la congruencia del triángulo consigo mismo.

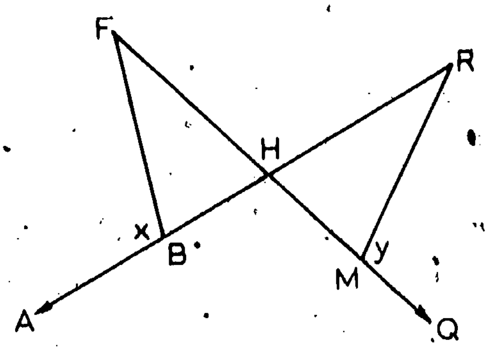


7. Demuestra el corolario 5-5-1. (Todo triángulo equiángulo es equilátero.) Emplea una demostración en forma de frase.

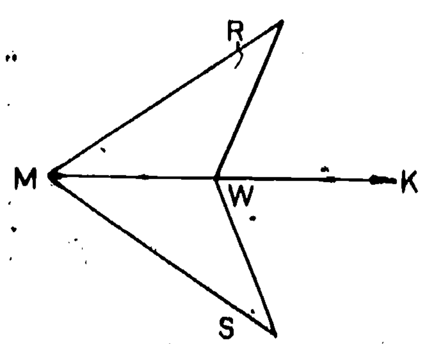
8. Si el $\triangle ABC$ es equilátero, demuestra que $\triangle ABC \cong \triangle CAB$.

9. Si la bisectriz del $\angle G$ en el $\triangle FGH$ es perpendicular al lado opuesto en K, entonces el triángulo FGH es isósceles.

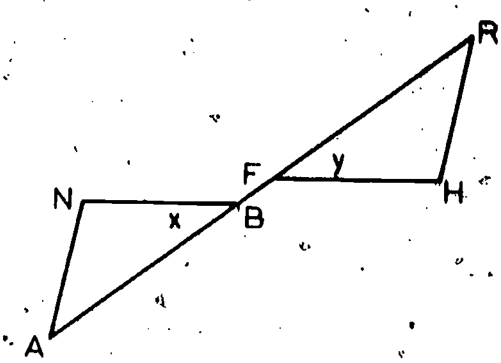
10. Dato: La figura en la que $\angle x \cong \angle y$, también $\overline{HB} \cong \overline{HM}$.
Demuestra que $\overline{HF} \cong \overline{HR}$.



11. En la figura, $\overrightarrow{MK}$ biseca al $\angle RMS$ y $\angle RWK \cong \angle SWK$. ¿Podrá demostrarse que $\angle R \cong \angle S$? Si es posible, demuéstralo.

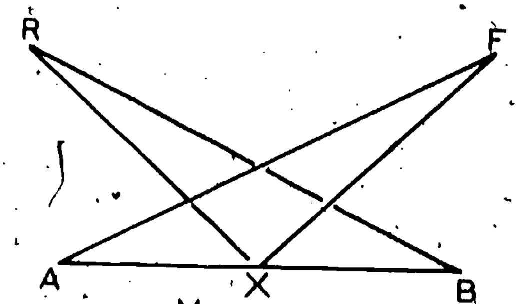


12. Demuestra que $\overline{AN} \cong \overline{RH}$, si $\overline{AF} \cong \overline{RB}$, $\angle A \cong \angle R$ y $\angle x \cong \angle y$ en la figura.

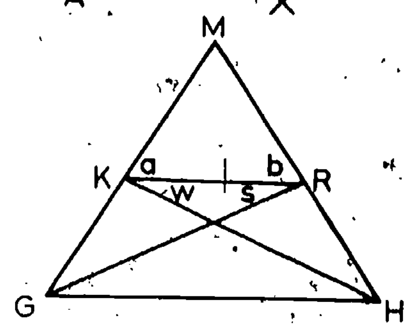


*13. a. Si, en la figura, X es el punto medio de $\overline{AB}$, $\angle A \cong \angle B$ y $\angle AXR \cong \angle BXF$, demuestra que $\overline{AF} \cong \overline{BR}$.

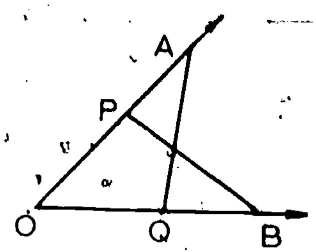
b. ¿Será necesario, como parte de la hipótesis, afirmar que la figura está en un plano?



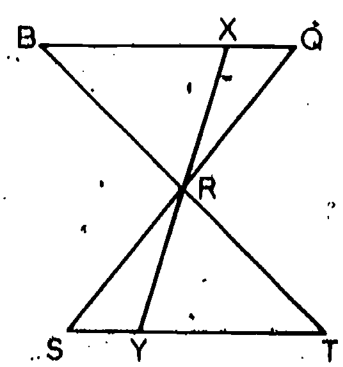
14. Datos: $\angle a \cong \angle b$ y $\angle w \cong \angle s$ en la figura.
Demuestra que $\overline{GR} \cong \overline{KH}$.



*15. ¿Será posible demostrar, a base de la información dada, lo siguiente?
Dato: El $\angle AOB$ que tiene $OA = OB$ y P, Q, puntos en los rayos $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ siendo $AQ = BP$.
Demuestra que $OP = OQ$.



*16. Demuestra que $RX = RY$, si sabemos que en la figura: $BQ = TS$, $m\angle B = m\angle T$ y $m\angle Q = m\angle S$.



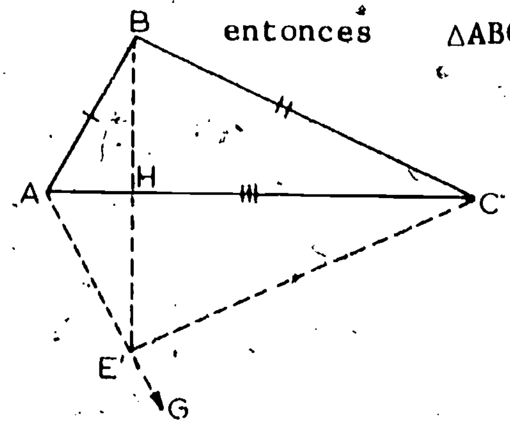
5-8. El teorema de los tres lados

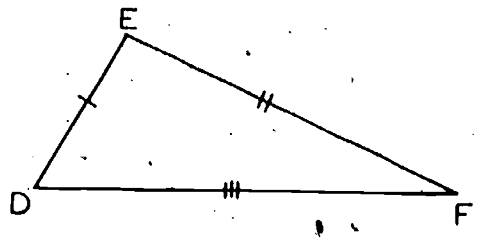
Teorema 5-6. (El teorema L.L.L.) Sea G una correspondencia entre dos triángulos (o entre un triángulo y él mismo). Si los tres pares de lados correspondientes son congruentes, entonces la correspondencia G es una congruencia.

O de otro modo: Sea $ABC \longleftrightarrow DEF$ una correspondencia entre dos triángulos. Si

$$AB = DE,$$
$$AC = DF,$$
$$BC = EF,$$

entonces $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.





Demostración:

Afirmaciones	Razones
1. Hay un rayo $\overrightarrow{AG}$ tal que $\angle CAG \cong \angle BDE$, y tal que B y G están de lados opuestos de $\overleftrightarrow{AC}$.	1. Postulado de la construcción del ángulo
2. Hay un punto E' sobre $\overrightarrow{AG}$ tal que $AE' = DE$.	2. El teorema de localización de puntos
3. $\triangle AE'G \cong \triangle DEF$	3. Postulado L.A.L.

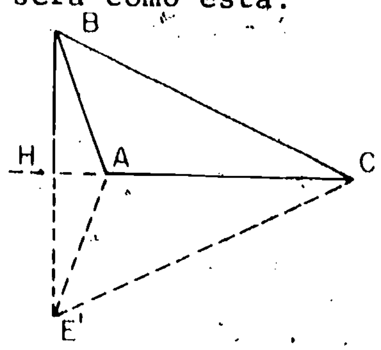
Lo que hemos hecho, hasta ahora, es reproducir el $\triangle DEF$ al lado y debajo del $\triangle ABC$, utilizando el postulado L.A.L.

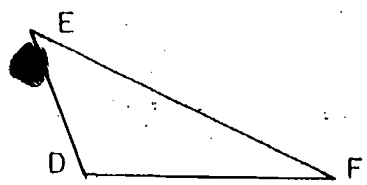
4. $AB = AE'$	4. $AB = DE$ por la hipótesis; y $DE = AE'$, por la afirmación 2
5. $BC = E'C$	5. $BC = EF$ por la hipótesis; y $EF = E'C$ por la afirmación 3
6. El segmento $\overline{BE'}$ corta a la recta $\overleftrightarrow{AC}$ en el pun[illegible].	6. Por la afirmación 1, B y E' están de lados opuestos de la recta $\overleftrightarrow{AC}$.

Completamos ahora la demostración para el caso en que H esté entre A y C, como en la figura. Luego examinaremos los otros casos posibles.

7. $\angle ABH \cong \angle AE'H$	7. Por la afirmación 4 y el teorema 5-2
8. $\angle CBH \cong \angle CE'H$	8. Por la afirmación 5 y el teorema 5-2
9. $m\angle ABH + m\angle CBH = m\angle ABC$	9. Por el postulado de adición de ángulos
10. $m\angle AE'H + m\angle CE'H = m\angle AE'C$	10. Por el postulado de adición de ángulos
11. $\angle ABC \cong \angle AE'C$	11. Por las afirmaciones 7, 8, 9, y 10
12. $\angle ABC \cong \angle DEF$	12. Por las afirmaciones 3 y 11
13. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$	13. Por la afirmación 12, la hipótesis y el postulado L.A.L.

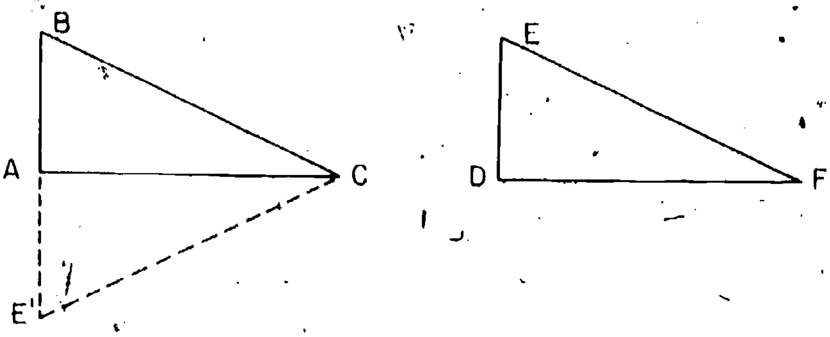
Esto completa la demostración para el caso en que H esté entre A y C. Recordaremos que H es el punto en el que la recta $\overleftrightarrow{BE'}$ corta a la recta $\overleftrightarrow{AC}$. Si H = A, entonces B, A y E' estarán alineados, y la figura será como ésta:





En este caso $\angle B \cong \angle E'$, porque los ángulos en la base de un triángulo isósceles son congruentes. Por lo tanto, $\angle B \cong \angle E$, porque $\angle E \cong \angle E'$. El postulado L.A.L. se aplica, igual que en el caso anterior, para demostrar que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Si A está entre H y C, entonces la figura será como ésta:



y demostraremos que $\angle ABC \cong \angle E$ restando las medidas de los ángulos, en vez de sumarlas. Es decir,

$$m\angle ABC = m\angle HBC - m\angle HBA$$

y

$$m\angle AE'C = m\angle HE'C - m\angle HE'A,$$

de modo que

$$\angle ABC \cong \angle AE'C \cong \angle DEF,$$

del mismo modo que en los casos anteriores. El resto de la demostración es exactamente igual que en el primer caso.

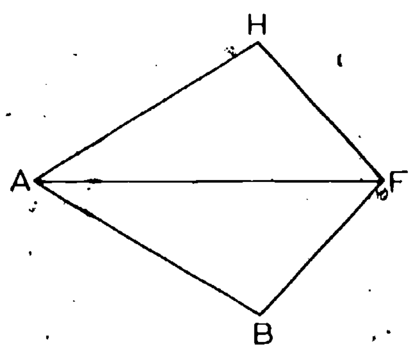
Los otros dos casos que nos quedan, H = C y C entre A y H, son análogos a los dos anteriores.

Conjunto de problemas 5-8

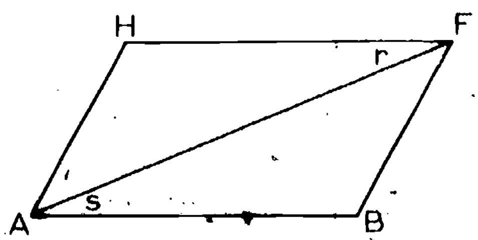
1. Dato: $\triangle ABF$ y $\triangle AHF$ que tienen

   $\overline{AH} \cong \overline{AB}$ y $\overline{HF} \cong \overline{BF}$.

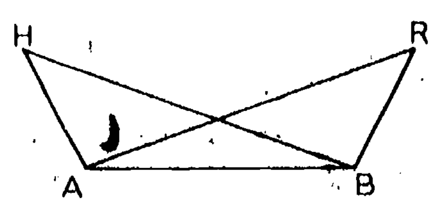
   Demuestra que $\angle HAF \cong \angle BAF$.



2. En la figura, $\overline{AB} \cong \overline{FH}$ y $\overline{AH} \cong \overline{FB}$.
   Demuestra que $\angle r \cong \angle s$.

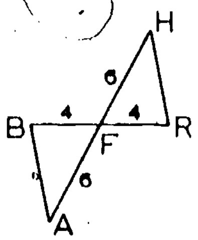


3. En la figura, $\overline{AH} \cong \overline{BR}$ y $\overline{BH} \cong \overline{AR}$.
   Demuestra que $\angle H \cong \angle R$.

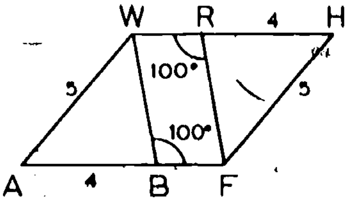


4. Considera los pares de triángulos que aparecen abajo. Si con la información ofrecida se puede demostrar que son congruentes, indica qué enunciado de congruencia aplicarías.

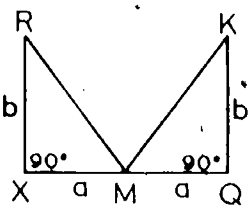
a.



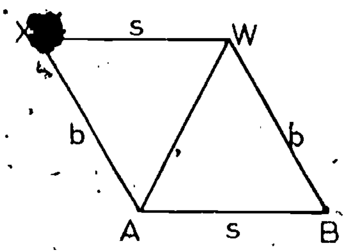
b.



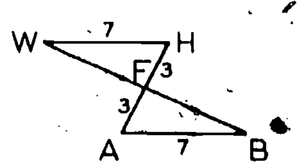
c.



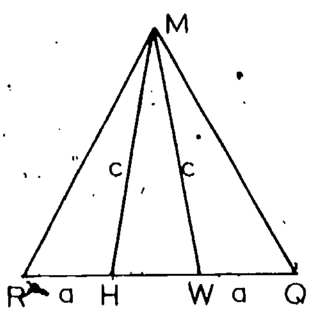
d.



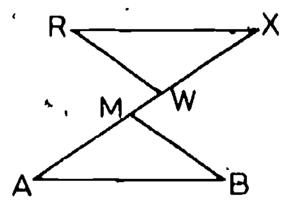
e.



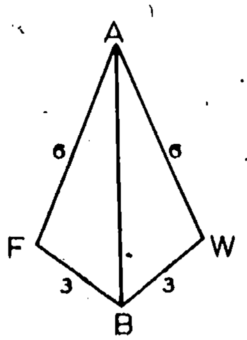
f. Considera el $\triangle RWM$ y el $\triangle QHM$.



g. $AW = XM$, $AB = XR$, $\angle A \cong \angle X$.

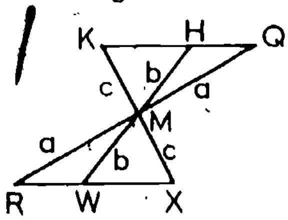


h.



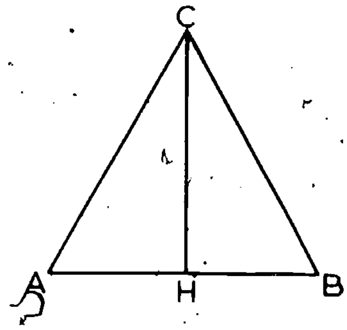
Considera: i. el $\triangle RMW$ y el $\triangle QMH$.

j. el $\triangle WMX$ y el $\triangle HMK$.



5. Un mayorista necesita telegrafiar a un fabricante para pedir algunas piezas que tienen forma de láminas triangulares de metal. Además del grueso, clase de metal, y número de piezas que desea, ¿cuál es la mínima información que debe dar para especificar el tamaño y forma de los triángulos? (Debes tener en mente que puede haber más de una posibilidad.)

6. Demuestra el siguiente teorema:
Si la bisectriz del ángulo opuesto a la base en un triángulo isósceles corta a la base, es perpendicular a la base.

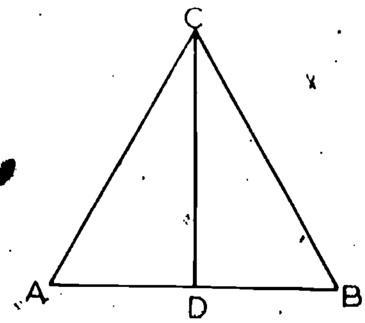


O de otro modo:
Datos: El $\triangle ABC$ en el que $AC = BC$ y H un punto sobre $\overline{AB}$ tal que

$$\angle ACH \cong \angle BCH.$$

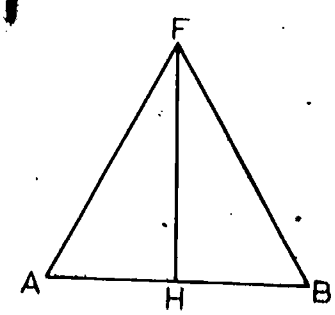
Demuestra que $\overline{CH} \perp \overline{AB}$.

7. Demuestra el teorema que dice que la mediana desde el vértice de un triángulo isósceles es la bisectriz del ángulo en el vértice.



8. Demuestra el teorema siguiente: La bisectriz del ángulo en el vértice de un triángulo isósceles es la mediatriz de la base.
O de otro modo:
Datos: El $\triangle ABF$ en el que $AF = BF$ y H un punto sobre $\overline{AB}$ tal que $\overline{FH}$ biseca $\angle AFB$.
Demuestra que $\overline{AH} \cong \overline{BH}$ y

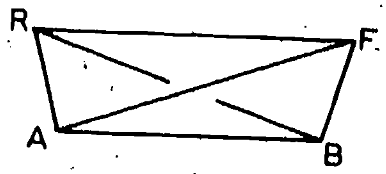
$$\overline{FH} \perp \overline{AB}.$$



9\. a. Datos: En la figura, $\overline{AF} \cong \overline{BR}$ y $\overline{AR} \cong \overline{BF}$.

Demuestra que $\angle ARF \cong \angle BFR$.

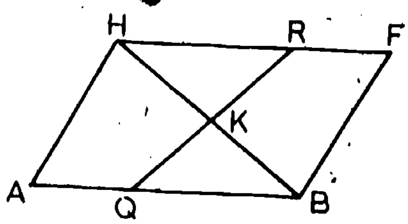
(Lo que falta del segmento $\overline{RB}$ se dejó así para que la figura no revele si $\overline{RB}$ corta a $\overline{AF}$ o no.)



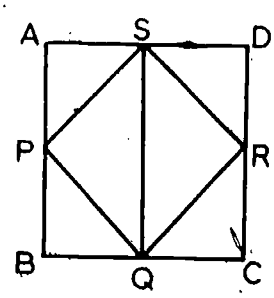
b. ¿Necesitarás, como parte de la hipótesis, que la figura esté en un plano?

10\. a. Datos: En la figura, $AH = FB$, $AB = FH$, y $\overline{RQ}$ biseca a $\overline{HB}$ en K. Demuestra que $QK = RK$.

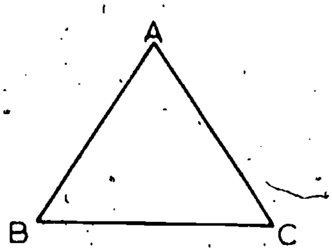
b. ¿Será necesariamente plana la figura?



11\. Dato: El cuadrado ABCD en el que P, Q, R, S son los puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, respectivamente. Demuestra que $\triangle PQS \cong \triangle RQS$.



12. Señala por qué la siguiente argumentación contiene un círculo vicioso, y por ello no es válida.



Teorema: Los ángulos en la base de un triángulo isósceles son congruentes.

Dato: El $\triangle ABC$ en el que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.

Demostrar: $\angle B \cong \angle C$

Demostración:

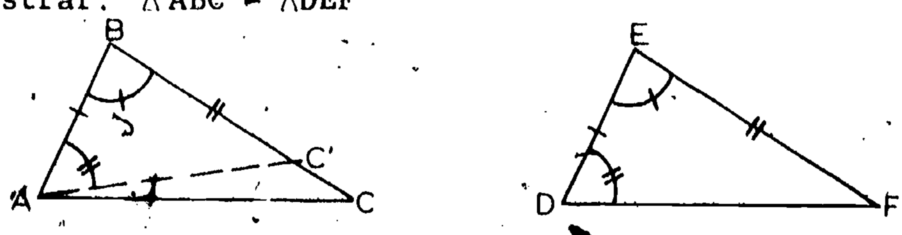
Afirmaciones	Razones
1. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$	1. Dato
2. $\overline{AC} \cong \overline{AB}$	2. Dato
3. $\overline{BC} \cong \overline{CB}$	3. Congruencia idéntica
4. $\triangle ABC \cong \triangle ACB$	4. L.L.L.
5. $\angle B \cong \angle C$	5. Definición de triángulos congruentes

*13. Señala por qué la siguiente argumentación contiene un círculo vicioso.

Teorema: Sea G una correspondencia entre dos triángulos (o entre un triángulo y él mismo). Si dos lados y el ángulo comprendido del primer triángulo son congruentes a las partes correspondientes del segundo triángulo, entonces la correspondencia G es una congruencia.

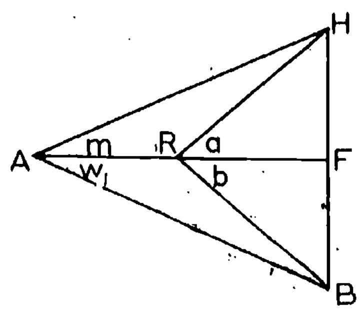
Datos: $ABC \longleftrightarrow DEF$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\angle ABC \cong \angle DEF$.

Demostrar: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

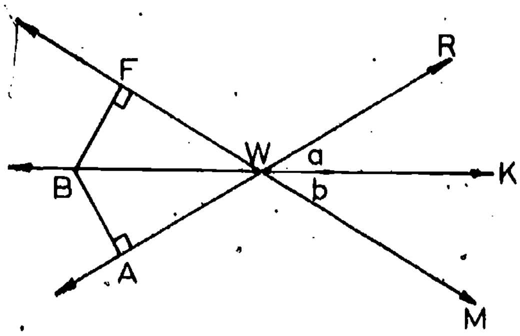


Demostración: Afirmaciones	Razones
1. Sea $\overrightarrow{AC'}$ el rayo del mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$ que $\overrightarrow{AC}$, tal que $\angle BAC' \cong \angle EDF$, y que corte a $\overleftrightarrow{BC}$ en C'.	1. Postulado de la construcción del ángulo
2. $\angle ABC' \cong \angle ABC$	2. C' está sobre el rayo $\overrightarrow{BC}$, por el paso 1
3. $\angle ABC \cong \angle DEF$	3. Dato
4. $\angle ABC' \cong \angle DEF$	4. Pasos 2 y 3
5. $\overline{AB} \cong \overline{DE}$	5. Dato
6. $\angle BAC' \cong \angle EDF$	6. Paso 1
7. $\triangle ABC' \cong \triangle DEF$	7. A.L.A.
8. $\overline{BC'} \cong \overline{EF}$	8. Partes correspondientes
9. $\overline{BC} \cong \overline{EF}$	9. Dato
10. $\overline{BC'} \cong \overline{BC}$	10. Pasos 8 y 9
11. C' = C	11. Paso 10 y la razón para el paso 2
12. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$	12. Pasos 7 y 11

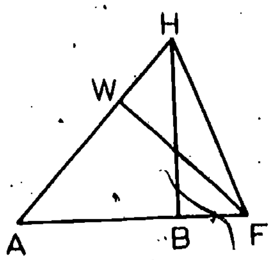
*14. Si, en la figura, $\angle a \cong \angle b$ y $\angle m \cong \angle w$, demuestra que $\overline{AF} \perp \overline{HB}$.



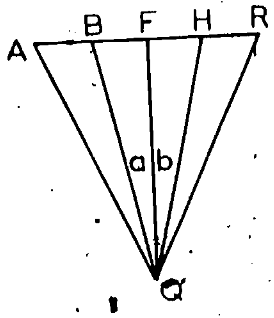
15. Si, en la figura, $\overline{BF} \perp \overleftrightarrow{FM}$ en F, $\overline{BA} \perp \overleftrightarrow{AR}$ en A, y $m\angle a = m\angle b$, ¿podrás demostrar que FB = AB? Si puedes, demuéstralo.



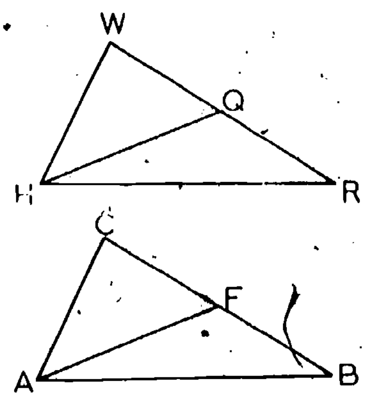
16. En el $\triangle HAF$, los puntos B y W están sobre los lados $\overline{AF}$ y $\overline{AH}$, respectivamente, y además $\overline{FW} \perp \overline{AH}$, $\overline{HB} \perp \overline{AF}$, y $AW = AB$.
Demuestra: $FW = HB$.



17. Si, en la figura, $\overline{FQ} \perp \overline{AR}$,
$\overline{FQ}$ biseca $\angle AQR$,
$\overline{BQ}$ biseca $\angle AQF$ y
$\overline{HQ}$ biseca $\angle FQR$, demuestra que
$\overline{BQ} \cong \overline{HQ}$.



*18. En los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle HRW$, $AB = HR$, $AC = HW$ y la mediana $\overline{AF} \cong$ la mediana $\overline{HQ}$.
Apoyándote en los teoremas que has estudiado hasta ahora, ¿puedes demostrar que $\triangle ABC \cong \triangle HRW$? Si puedes, demuéstralo.



*19. Usa el diagrama del problema 18 y suponte que ahora sabemos que $AB = HR$, $BC = RW$, y la mediana $\overline{AF} \cong$ la mediana $\overline{HQ}$. ¿Podrás demostrar que $\triangle ABC \cong \triangle HRW$? Si puedes, hazlo.

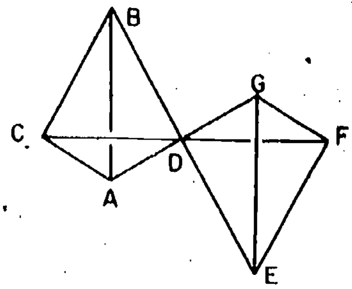
*20. Datos: Puntos A, R, S y C que están en la recta L.
R está entre A y S.
S está entre R y C.
B y D no están en L.
$AR = CS$
$AB = CD$
$BS = DR$

a. Demuestra que $\angle BSA \cong \angle DRC$.

b. ¿Tendrán que estar en un mismo plano los puntos A, R, S, C, B y D?

*21. En esta figura, D es el punto medio de $\overline{AG}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$.

Demuestra que $\triangle EFG \cong \triangle BCA$.



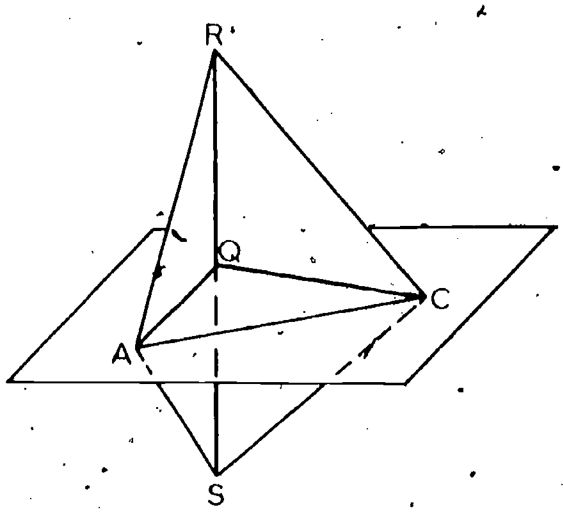
*22. ¿Será válida la demostración del problema 21 aun cuando los segmentos $\overline{BD}$, $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$ no estén en un mismo plano?

*23. Datos: En la figura, $\overline{AQ} \perp \overline{RS}$.

$\overline{RQ} \cong \overline{SQ}$

$\overline{RC} \cong \overline{SC}$

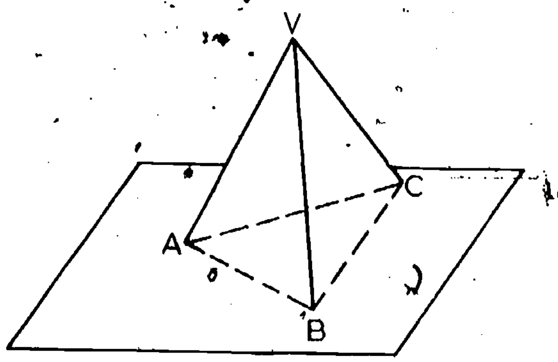
Demuestra que $\angle RCA \cong \angle SCA$.



24. Colocamos un trípode con sus tres patas VA, VB, VC iguales sobre un plano.

a. ¿Se puede decir algo acerca de las distancias AB, AC, BC? ¿Y acerca de los ángulos ($\angle VAB$, $\angle VAC$, $\angle VBA$, etc.)?

b. Contesta la pregunta (a) si se nos dice además que las patas del trípode forman ángulos iguales; es decir $\angle AVB \cong \angle BVC \cong \angle AVC$.



*25. a. Sean $\overline{AR}$ y $\overline{BQ}$ segmentos que se bisecan en M. Demuestra que AB = RQ y que AQ = RB.

b. Supongamos ahora que $\overline{CX}$ también es bisecado por M. ¿Cuántos pares de segmentos congruentes, como los de (a), puedes determinar?

c. Probablemente pensaste que $\overline{CX}$ estaba en el mismo plano que $\overline{AR}$ y $\overline{BQ}$. ¿Será esto necesario, o serán todavía ciertos tus resultados de (b) si $\overline{CX}$ se sale del plano de $\overline{AR}$ y $\overline{BQ}$? En este último caso, trata de imaginarte la figura y dibújala, o haz un modelo.

26. Sea $\triangle ABC$ un triángulo cualquiera, y D un punto <u>fuera</u> del plano de este triángulo. Al conjunto que consiste en la reunión de los seis segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$ lo llamaremos el esqueleto de un tetraedro. Cada uno de los seis segmentos se llama una arista del tetraedro, cada uno de los cuatro puntos A, B, C, D es un vértice, cada triángulo formado por tres vértices es una cara, cada ángulo de una cara es un ángulo en la cara. Ya consideramos caras y aristas de un tetraedro en el problema 11 del Conjunto de problemas 3-1c.

a. ¿Cuántas caras hay? ¿Cuántos ángulos en las caras?

b. Dos aristas de un tetraedro serán opuestas si no se intersecan. Serán adyacentes si se intersecan. Si cada par de aristas opuestas son congruentes, ¿serán congruentes dos caras cualesquiera? Si cada par de aristas adyacentes son congruentes, ¿qué clase de triángulos serán las caras?

c. Construye un esqueleto equilátero de un tetraedro o bien utilizando palillos de dientes que pegarás o mediante pajitas pasando un cordel por ellas para unirlas.

Problemas de repaso del Capítulo 5

1. Completa:

   Si los vértices de dos triángulos se corresponden de manera que cada par de ángulos correspondientes son ______________ y cada par de _____________ correspondientes son congruentes, entonces la correspondencia es una _______________ entre los triángulos.

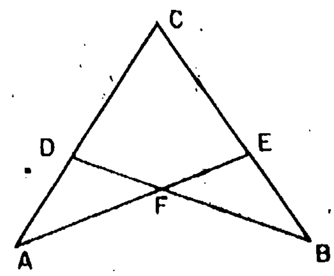
2. Considera el conjunto de abreviaturas A.L.A., L.L.A., L.A.L., L.L.L., A.A.A.

   a. ¿Qué subconjuntos son abreviaturas de postulados de este capítulo?

   b. ¿Qué subconjuntos son abreviaturas de teoremas demostrados en este capítulo?

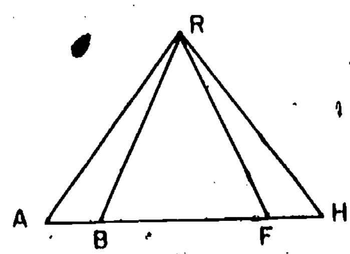
3. Si el $\triangle RST$ es isósceles y RT = ST, ¿qué correspondencias del triángulo consigo mismo son congruencias?

4. Dado que AF = BF y DF = EF, ¿cuál será la última razón en la demostración más directa de que $\triangle AFD \cong \triangle BFE$? ¿Y la de que $\triangle AEC \cong \triangle BDC$?



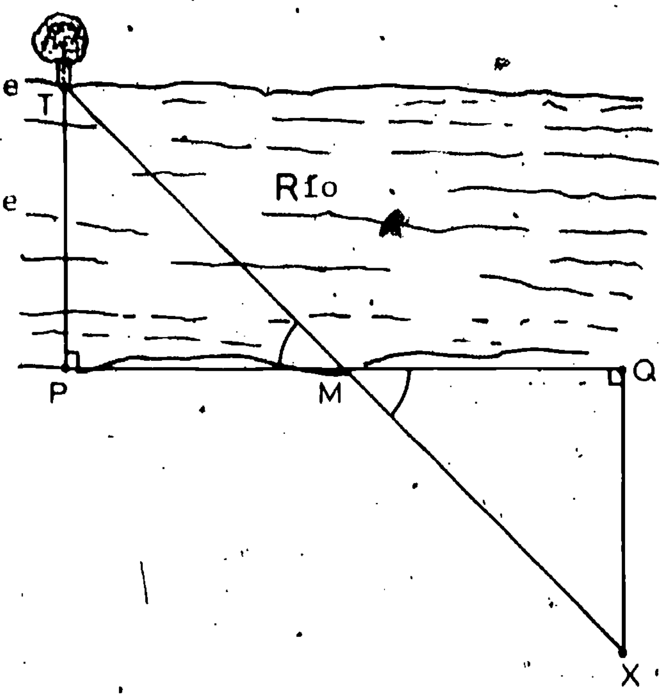
5. Datos: En la figura, AR = RH y AF = BH.

   Demuestra que RB = RF.

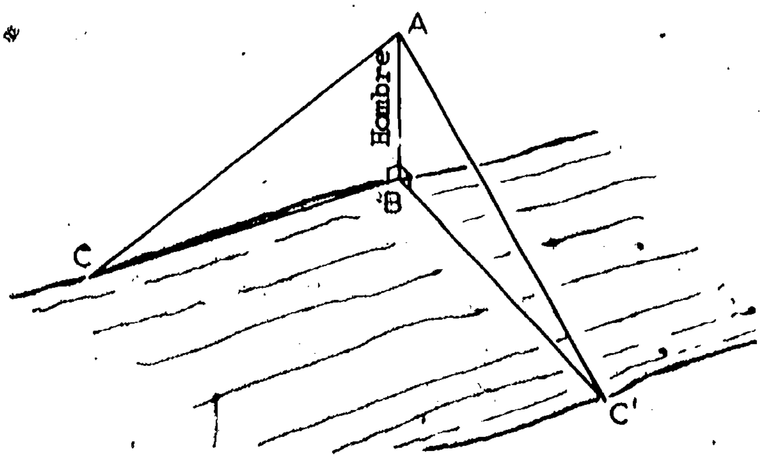


6. En la figura del problema 5, si RB = RF y AB = HF, demuestra que AR = HR.

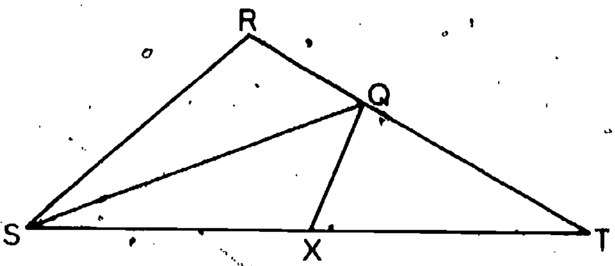
7. Una persona quiere hallar el ancho de un río y para ello se fija en un árbol T, que está en la otra orilla frente al punto P y tal que $\overline{PQ} \perp \overline{PT}$. Marcando M, el punto medio de $\overline{PQ}$, camina sobre la perpendicular a $\overline{PQ}$ en Q hasta que llega al punto X en que esta perpendicular se encuentra con la recta $\overleftrightarrow{TM}$. ¿Qué otro segmento de la figura tiene el mismo largo que $\overline{TP}$? ¿Cuál es el principal teorema utilizado al demostrar que $\triangle TPM \cong \triangle XQM$?



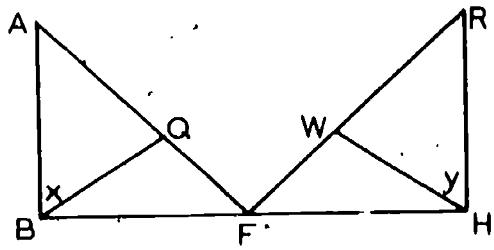
8. Las fuerzas de Napoleón, marchando sobre el terreno enemigo, llegaron a un río cuyo ancho ignoraban. Aunque los ingenieros venían detrás, el impetuoso comandante exigió a sus oficiales le dijeran el ancho del río. Un oficial joven se colocó en la orilla y bajó la visera de su gorra hasta que la visual llegaba a la orilla opuesta. Luego giró y miró de igual manera a lo largo de la orilla fijándose en qué punto de la orilla cortaba la nueva visual. Entonces anduvo hasta este punto contando sus pasos. ¿Será esta distancia la misma del ancho del río? ¿Qué par de triángulos eran congruentes? ¿Por qué?



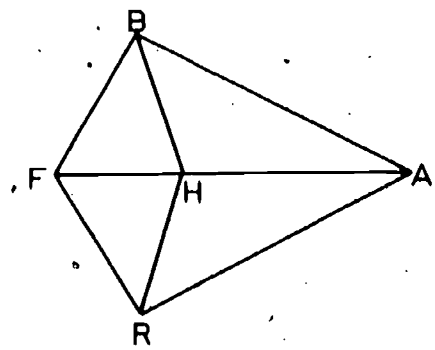
9. En el $\triangle RST$: El punto X está entre S y T, y $SX = SR$. El punto Q está entre R y T, y $\overline{SQ}$ biseca $\angle S$. Trazamos $\overline{QX}$. Halla un ángulo congruente al $\angle R$ y establece la congruencia.



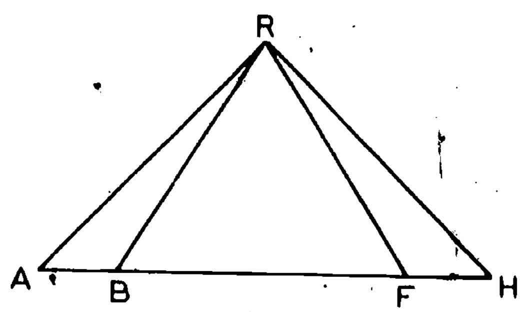
10. Dato: La figura en la que $\overline{AB} \perp \overline{BH}$, $\overline{RH} \perp \overline{BH}$, $\angle x \cong \angle y$, $QB = WH$ y F es el punto medio de $\overline{BH}$.
Demuestra que $\triangle BFQ \cong \triangle HFW$.



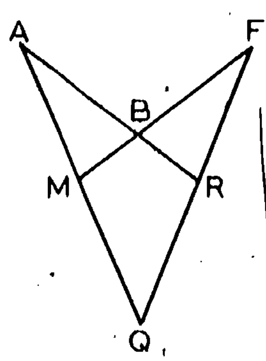
11. Datos: En la figura, $AB = AR$ y $\angle BAH \cong \angle RAH$.
Demuestra que $FB = FR$.



12. En esta figura sabemos que $AB = HF$ y $RB = RF$.
Demuestra que $\triangle AFR \cong \triangle HBR$.

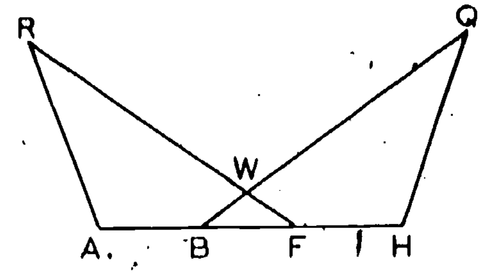


13. Datos: En la figura, $AB = FB$ y $MB = RB$.
Demuestra que $\triangle AQR \cong \triangle FQM$.

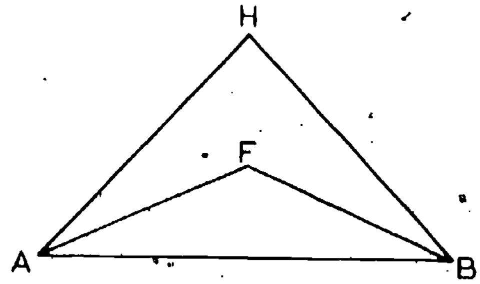


14. En esta figura sabemos que B y F trisecan* a $\overline{AH}$, $\angle A \cong \angle H$ y AR = HQ. Demuestra que BW = FW.

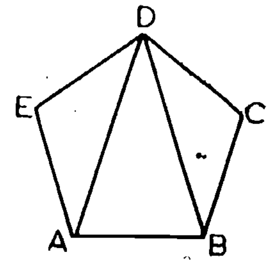
*Trisecar significa dividir en <u>tres</u> partes congruentes.



15. En esta figura sabemos que HA = HB, $\overrightarrow{AF}$ biseca $\angle HAB$ y $\overrightarrow{BF}$ biseca $\angle HBA$. Demuestra que AF = BF.

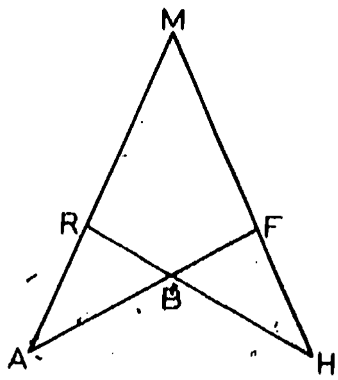


16. Un polígono ABCDE tiene cinco lados de igual longitud y cinco ángulos de igual medida. Demuestra que $\angle DAB \cong \angle DBA$.



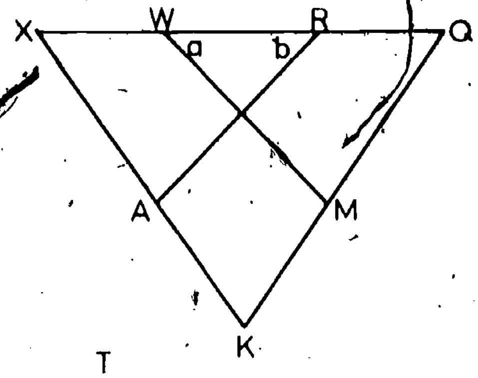
17. Demuestra: Si dos medianas de un triángulo son perpendiculares a sus lados respectivos, entonces el triángulo es equilátero.

18. En esta figura, $\overline{AB} \cong \overline{HB}$ y $\overline{RB} \cong \overline{FB}$. Demuestra que $\angle A \cong \angle H$ y $\overline{AM} \cong \overline{HM}$.

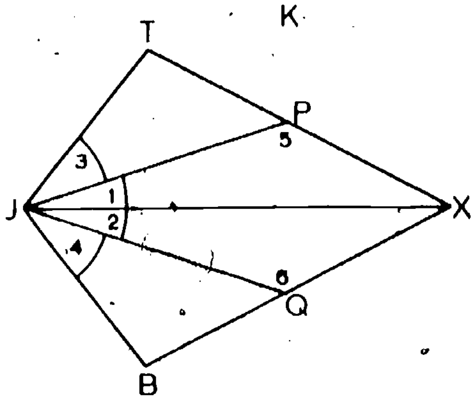


19. Demuestra que las bisectrices de un par de ángulos correspondientes de dos triángulos congruentes son congruentes.

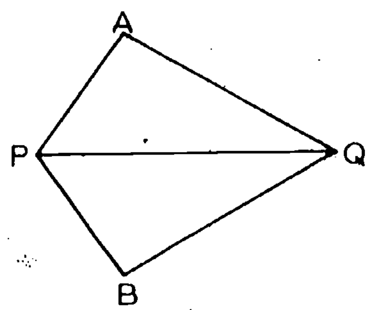
20. En esta figura sabemos que
$XW = QR$,
$\angle a \cong \angle b$,
$\angle X \cong \angle Q$.
Demuestra que $KA = KM$.



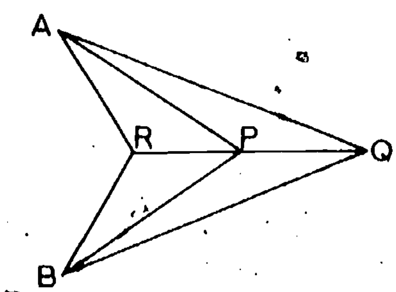
21. En esta figura sabemos que
$\angle 1 \cong \angle 2$, $\angle 3 \cong \angle 4$,
y $JT = JB$.
Demuestra que $\angle 5 \cong \angle 6$.



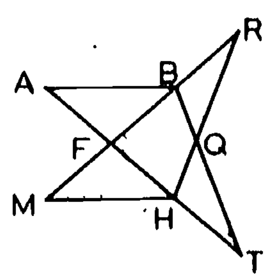
22. Si $PA = PB$ y $QA = QB$, entonces $\angle APQ \cong \angle BPQ$. ¿Valdrá la misma demostración esté o no A en el mismo plano que P, Q y B?



23. a. Demuestra: Si $PA = PB$, $QA = QB$, y R está sobre $\overleftrightarrow{PQ}$, según aparece en la figura, entonces $RA = RB$.
b. ¿Tendrán que ser coplanarios los cinco puntos? ¿Valdrá la misma demostración esté o no A en el mismo plano que B, R, P y Q?

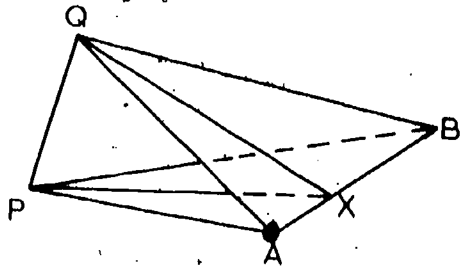


*24. En esta figura, los puntos F y H trisecan a $\overline{AT}$, y los puntos F y B trisecan a $\overline{MR}$. Si $AF = FB$, ¿será $\triangle ABT \cong \triangle MHR$? Demuestra tu respuesta.



25. Si $\overleftrightarrow{RS}$ es perpendicular a cada uno de los tres rayos diferentes, $\overrightarrow{RA}$, $\overrightarrow{RB}$, $\overrightarrow{RC}$ en R, y si RA = RB = RC, demuestra que SA = SB = SC. (Dibuja tú mismo la figura.)

*26. Hagamos que el $\triangle PAB$ y el $\triangle QAB$ estén en planos diferentes, pero con el lado común $\overline{AB}$. Sea $\triangle PAB \cong \triangle QAB$. Demuestra que si X es cualquier punto de $\overline{AB}$, entonces el $\triangle PQX$ es isósceles.



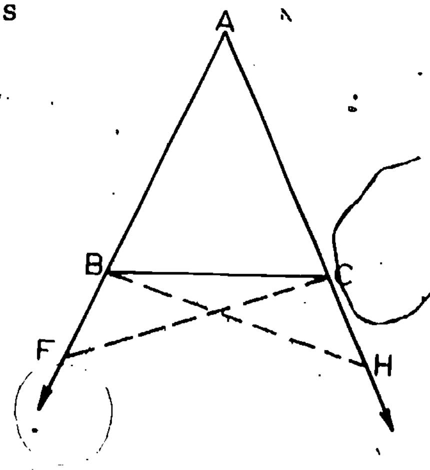
*27. Completa la demostración que dio Euclides del teorema de que los ángulos en la base de un triángulo isósceles son congruentes.

Dato: AB = AC

Demuestra que $\angle ACB \cong \angle ABC$.

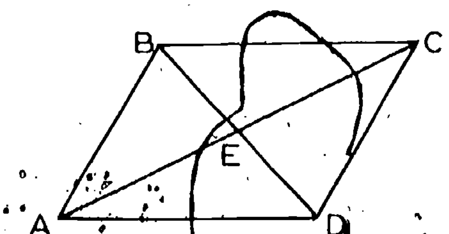
Construcción: Toma un punto F tal que B esté entre A y F, y un punto H tal que C esté entre A y H, de modo que AH = AF.

Traza $\overline{CF}$ y $\overline{BH}$.



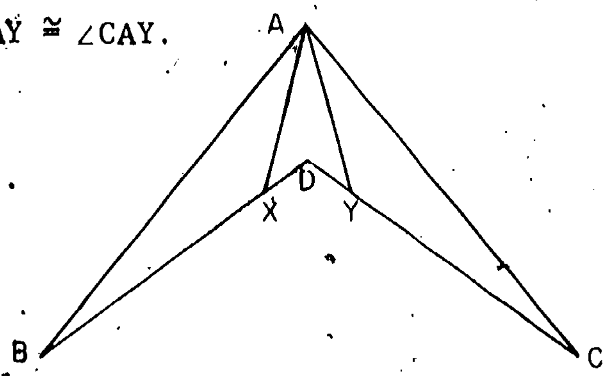
*28. Datos: La figura plana ABCD, AB = CD, AD = BC.

Demuestra que $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se bisecan.



*29. Dato: La figura ABCD en la que AB = AC, DB = DC, y $\angle BAX \cong \angle XAY \cong \angle CAY$.

Demuestra que AX = AY.



Capítulos 1 al 5

EJERCICIOS DE REPASO

Escribe los números del 1 al 80. Después de cada número, escribe un "+" o un "-" para indicar que consideras la afirmación correspondiente cierta o falsa. Cierta quiere decir "cierta siempre".

1. Dos rayos cualesquiera se cortan.
2. $\overline{AB}$ designa una recta.
3. Si $m\angle Q = 100$, entonces $\angle Q$ no tiene complemento.
4. Una recta y un punto fuera de ella determinan un plano.
5. Si un punto está en el interior de dos ángulos de un triángulo, está en el interior del triángulo.
6. Si una recta corta a un plano que no la contiene, entonces la intersección es un punto.
7. La reunión de dos semiplanos es todo el plano.
8. Un punto que pertenece al interior de un ángulo pertenece al ángulo.
9. Si $\overline{AB} = \overline{CD}$, entonces o $A = C$ o $A = D$.
10. La intersección de cada dos semiplanos es el interior de un ángulo.
11. El interior de todo triángulo es convexo.
12. Es posible que la reunión de dos conjuntos, ninguno de los cuales sea convexo, sea convexa.
13. Un rayo tiene dos extremos.
14. La experimentación es siempre la mejor manera de llegar a una conclusión válida.
15. Dados cuatro puntos diferentes, tales que cada tres de ellos no estén alineados, hay exactamente seis rectas diferentes determinadas por dichos puntos tomados dos a dos.
16. Si $m\angle RST = m\angle XYZ$, entonces $\angle RST \cong \angle XYZ$.
17. En la figura, la mejor manera de leer el ángulo formado por $\overrightarrow{DA}$ y $\overrightarrow{DC}$ es $\angle D$.

18. En este texto la relación "estar entre" no está definida en lo que se refiere a puntos de una recta.
19. Los vértices de un triángulo no están alineados.
20. La intersección de dos conjuntos es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a uno de ellos o a los dos.
21. Toda afirmación acerca de figuras geométricas, que no sea una definición, puede demostrarse.
22. Si $\triangle XYZ \cong \triangle CAB$, entonces $\angle A \cong \angle X$.
23. Es posible que dos rectas se corten de manera que tres de los ángulos que forman tengan medidas de 20, 70, y 20.
24. Todo lado de un ángulo es un rayo.
25. Todos los nombres usados en el texto en relación con la geometría están definidos en el texto.
26. El interior de un ángulo es un conjunto convexo.
27. Si $m\angle ABC = 37$ y $m\angle DEF = 63$, entonces $\angle ABC$ y $\angle DEF$ son complementarios.
28. Si A no está entre B y C, entonces C está entre A y B.
29. $|m|$ nunca es un número negativo.
30. Si el punto Q está en el exterior del $\angle ABC$, entonces Q y C están del mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$.
31. La distancia entre dos puntos es el valor absoluto de la suma de sus coordenadas.
32. El lado mayor de un triángulo cualquiera se llama su hipotenusa.
33. Si $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ en el punto P (que es diferente de los puntos A, B, C, D), entonces $m\angle APC + m\angle CPB + m\angle BPD + m\angle DPA = 360$.
34. Dada una recta, habrá un plano, y sólo uno, que la contenga.
35. Un número racional es la razón de dos enteros.
36. Dados dos puntos en una recta, se puede escoger un sistema de coordenadas tal que la coordenada de un punto sea cero y la coordenada del otro punto sea negativa.
37. Dos triángulos son congruentes si dos lados y un ángulo de uno son congruentes a dos lados y un ángulo del otro.

38. Un conjunto de puntos alineados es una recta.
39. $x \leq 2x$.
40. El valor absoluto de todo número real distinto de cero es positivo.
41. Si CD + CE = DE, entonces D está entre C y E.
42. Si en el $\triangle ABC$, $m\angle A = m\angle B = m\angle C$, entonces $AB = BC = AC$.
43. Si, en el plano Z, $\overrightarrow{PT} \perp$ a la recta L, $\overrightarrow{PQ} \perp$ a la recta L, y P está en L, entonces $\overleftrightarrow{PT} = \overleftrightarrow{PQ}$.
44. De las afirmaciones: (1) Si q es falso, entonces p es falso, y (2) p es cierto, podemos concluir que q es cierto.
45. El postulado de la regla nos dice que cualquier unidad puede reducirse a pulgadas.
46. Si R es un punto en el interior del $\angle XYZ$, entonces $m\angle XYR + m\angle ZYR = m\angle XYZ$.
47. Hay ciertos puntos en una escala numérica que no están en correspondencia con número alguno.
48. Toda recta es un conjunto de puntos alineados.
49. $|-n| = n$.
50. La distancia entre dos puntos es un número positivo.
51. Si sabemos que $m\angle AOB = 20$ y $m\angle BOC = 30$, podemos afirmar que $m\angle AOC = 50$.
52. Un punto en la arista de un semiplano pertenece a ese semiplano.
53. Una recta L en un plano E separa al plano en dos conjuntos convexos.
54. La mediana de un triángulo biseca al lado a que corresponde.
55. Si dos puntos están en el mismo semiplano, entonces la recta que determinan no corta a la arista de ese semiplano.
56. Si dos ángulos suplementarios son congruentes, cada uno es un ángulo recto.
57. El interior de un ángulo incluye el ángulo mismo.

58. Los ángulos opuestos por el vértice tienen medidas iguales.
59. Los lados de un ángulo son rayos cuya intersección es el vértice del ángulo.
60. Si el $\angle C$ es suplementario del $\angle A$, y si $m\angle A = 67$, entonces $m\angle C = 113$.
61. Si dos rectas se cortan, habrá exactamente dos puntos de cada una que estarán contenidos en la otra.
62. Si dos ángulos tienen medidas iguales, los ángulos deberán ser congruentes.
63. De las afirmaciones: (1) Si p es cierto, entonces q es cierto, y (2) p no es cierto, podemos concluir que q es falso.
64. Se ha demostrado, en los primeros cinco capítulos de este texto, que la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180.
65. Los lados de un triángulo son rectas.
66. El punto medio de un segmento lo separa en dos rayos.
67. Si dos rectas se cortan de manera que los ángulos opuestos por el vértice que se formen son suplementarios, entonces la medida de cada ángulo es 90.
68. Si $m\angle B = 93$, entonces el $\angle B$ es agudo.
69. Para todo número x, $|x| = x$.
70. La intersección de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$ es $\overline{AB}$.
71. En el $\triangle ABC$ todos los puntos de $\overline{BC}$ están en el interior del $\angle A$.
72. Si $\triangle ABC \cong \triangle BCA$, entonces el $\triangle ABC$ es equilátero.
73. Si $|x| = |y|$, entonces $x^2 = y^2$.
74. Los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle RFH$, que están en diferentes planos, son congruentes si $AB = RF$, $BC = FH$ y $AC = RH$.
75. $\triangle ABC \cong \triangle MQT$ si $AB = QM$, $BC = TQ$ y $\angle Q \cong \angle B$.
76. La mediana $\overline{AB}$ en el $\triangle ACE$ biseca al $\angle A$.
77. Si $x^2 = y^2$, entonces $|x| = |y|$.

78. Si tres puntos están sobre tres rectas diferentes, los puntos no están alineados.

79. No hay un $\triangle ABC$ en el que $\angle A = \angle B$.

80. Dos puntos que no están en un plano dado estarán en los semiespacios opuestos determinados por el plano si, y sólo si, el segmento que los une interseca al plano.

Capítulo 6

EXAMEN MAS PRECISO DE LA DEMOSTRACION

6-1. Cómo funciona un sistema deductivo

En el capítulo 1 tratamos de explicar en términos generales cómo iba a funcionar nuestro estudio de la geometría. Después de la experiencia que has logrado desde entonces, te resultará más fácil entender la explicación.

La idea de conjunto, los métodos del álgebra, y el proceso de razonamiento lógico, son cosas con las que hemos estado trabajando. La geometría propiamente es sobre lo que hemos estado trabajando. Empezamos con punto, recta y plano como términos no definidos, y hasta ahora hemos empleado quince postulados. A veces los nuevos términos se definieron a base de los postulados. (Por ejemplo, definimos la distancia PQ como el número positivo dado por el postulado de la distancia.) A veces las definiciones se han basado solamente en los términos no definidos. (Por ejemplo, un conjunto de puntos es de puntos alineados si todos sus puntos están en la misma recta.) Pero en todo momento construimos nuestras definiciones mediante términos que eran, de alguna manera, conocidos con anterioridad. A estas alturas hemos amontonado definiciones sobre definiciones con tal frecuencia que la lista es muy larga. Y esta circunstancia es una de las principales razones por la que, desde el principio, tenemos que mantener claros los procedimientos.

De la misma manera, todas las afirmaciones que hacemos acerca de la geometría se basan, en último término, en los postulados. A veces hemos demostrado teoremas directamente de los postulados, y otras veces hemos basado nuestras demostraciones sobre teoremas ya demostrados. Pero en cada caso, la cadena de razonamientos procede originariamente de los postulados.

A estas alturas quizás te parezca una buena idea releer la segunda mitad del capítulo 1. La verás ahora con mucha mayor clarida que cuando la viste por primera vez. Es más fácil mirar hacia atrás, y entender lo que has hecho, que entender por adelantado una explicación de lo que vas a hacer.

6-2. Demostración indirecta

Señalamos en el capítulo 1 que la mejor manera de aprender acerca del razonamiento lógico es practicándolo. Hay un tipo de demostración, sin embargo, que puede requerir estudio adicional. En el teorema 3-1 utilizamos lo que se conoce como demostración indirect El teorema y su demostración eran los siguientes:

Teorema 3-1. Dos rectas diferentes se cortan a lo más en un punt

Demostración: Es imposible que dos rectas diferentes se encuentr en dos puntos diferentes P y Q. Esto es imposible, porque según el postulado 1, hay solamente una recta que contiene a los dos puntos P y Q.

Probablemente esta es la primera vez en que has visto empleado este tipo de razonamiento en matemáticas, pero seguramente debes haberte tropezado con él muchas veces, en la conversación corriente. Las siguientes dos observaciones son ejemplos de demostraciones indirectas:

(1) "Tiene que estar lloviendo afuera. Si no estuviera lloviendo, entonces estas personas que entran por la puerta estarían secas, pero están empapadas".

(2) "Hoy no debe ser el día del juego de fútbol. Si el juego fuera hoy, entonces el estadio estaría lleno de gente, pero los únicos que estamos aquí somos tú y yo".

En cada uno de estos casos, el que habla desea demostrar que su primera premisa es cierta. Inicia su demostración suponiendo que lo que interesa demostrar es erróneo; y entonces observa que esto conduce a una conclusión que contradice un dato conocido. En el primer caso, se supone que no está lloviendo; esto lleva a la conclusión de que las personas que entran estarían secas, lo que contradice el dato conocido de que dichas personas están mojadas; y, por lo tanto, después de todo, está lloviendo. De modo parecido, en el segundo caso el supuesto de que el juego es hoy conduce a una contradicción con el dato sabido de que el estadio está vacío.

En la demostración del teorema 3-1, el supuesto es que algún par de rectas diferentes se encuentran en dos puntos. Por el postulado 1, esto lleva a la conclusión de que las rectas no son diferentes después de todo. Por lo tanto, el supuesto es erróneo, y esto significa que el teorema es correcto.

Conjunto de problemas 6-2a

1. Para fines de argumentación, acepta cada uno de los siguientes supuestos y ofrece después un final lógico para cada conclusión.
   a. Supuesto: Solamente los hombres son daltonianos.
      Conclusión: Mi madre ________________.
   b. Supuesto: Todos los hombres son zurdos.
      Conclusión: Mi hermano ________________.
   c. Supuesto: La única cosa que indigesta a Juanita es el chocolate caliente. Juanita está indigesta.
      Conclusión: Juanita ________________.
2. ¿Cuáles de los siguientes argumentos son indirectos?
   a. La temperatura afuera debe estar por encima de 32°F. Si la temperatura no estuviera por encima de 32°, entonces la nieve no se estaría derritiendo. Pero se está derritiendo. Por lo tanto, la temperatura debe estar por encima de 32°.

b. Aquella película debe ser muy divertida. Si no fuera muy divertida, poca gente iría a verla. Pero hay muchedumbres que van a verla. Por lo tanto, debe ser muy divertida.

c. El aire acondicionado de este edificio no debe estar funcionando bien. Si estuviera funcionando bien, entonces la temperatura no sería tan alta. Pero la temperatura es desagradablemente alta. Por lo tanto, el aire acondicionado no está funcionando bien.

3. La señora Alvarez compró un juego de cuchillos, tenedores y cucharas anunciado como hecho de acero inoxidable. Después de usarlo durante unos cuantos meses, notó que el juego empezaba a enmohecerse. Decidió, pues, que el juego no era de acero inoxidable y lo devolvió para reembolso.

En este ejemplo de demostración indirecta, señala (1) el enunciado que va a demostrarse, (2) la suposición, (3) la conclusión que resulta del supuesto, y (4) el dato que contradice a (3).

4. ¿Qué conclusión puedes deducir de las siguientes hipótesis en las que x, y, z representan enunciados diferentes?

Si x es cierto, entonces y es cierto.
Si y es cierto, entonces z es cierto.
x es cierto.

5. Suponte que tienes la siguiente información:

Si w es cierto, entonces v es cierto.
Si u es cierto, entonces w es cierto.
Si x es cierto, entonces u es cierto.
v no es cierto.

¿Qué conclusión puedes deducir? ¿Empleaste en algún momento el razonamiento indirecto?

6. ¿Qué conclusión se deduce de la siguiente información?

(1) A nadie se le permite ingresar en el club de natación a menos que sepa tocar el flautín.

(2) Ninguna tortuga puede tocar el flautín.

(3) A nadie se le permite usar calzones cortos rayados en la piscina del club a menos que sea miembro del club de natación.

(4) Yo siempre uso calzones cortos rayados en la piscina del club.

(Sugerencia: Este problema se hace más fácil si lo pasas a la forma si-entonces, como en varios de los problemas precedentes. Por ejemplo, sea A "alguien es un miembro del club de natación", sea B "alguien puede tocar el flautín", etc.)

7. Si A es verde, entonces B es rojo.
   Si A es azul, entonces B es negro.
   Si B es rojo, entonces Y es blanco.
   a. A es verde, por tanto B es ________ y Y es ________.
   b. B es negro. ¿Será posible deducir una conclusión relativa a A? Si lo es, indica cuál es la conclusión que se deduce.

8. Demuestra que la bisectriz de un ángulo cualquiera de un triángulo escaleno no puede ser perpendicular al lado opuesto.

Demostraremos ahora los otros teoremas del capítulo 3. Por conveniencia, volvemos a enunciar los postulados en que se basan estas demostraciones.

> <u>Postulado 1</u>. Dados dos puntos diferentes cualesquiera, habrá exactamente una recta que los contenga.

> <u>Postulado 5</u>. (a) Todo plano contiene por lo menos tres puntos que no están alineados.
> (b) El espacio contiene por lo menos cuatro puntos que no están en un plano.

Postulado 6. Si dos puntos están en un plano, entonces la recta que los contiene está en el mismo plano.

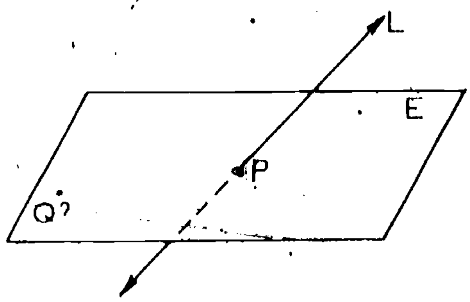
Postulado 7. Tres puntos cualesquiera están por lo menos en un plano, y tres puntos cualesquiera no alineados están exactamente en un plano. Más brevemente, tres puntos cualesquiera son coplanarios y tres puntos cualesquiera no alineados determinan un plano.

Teorema 3-2. Si una recta corta a un plano que no la contiene, entonces la intersección es un solo punto.

Demostración: Por hipótesis, tenemos una recta L y un plano E, y

(1) L corta a E por lo menos en un punto P, y

(2) E no contiene a L.



Vamos a dar una demostración indirecta del teorema, y, por lo tanto, empezamos suponiendo que la conclusión es falsa. Así, nuestro supuesto es que

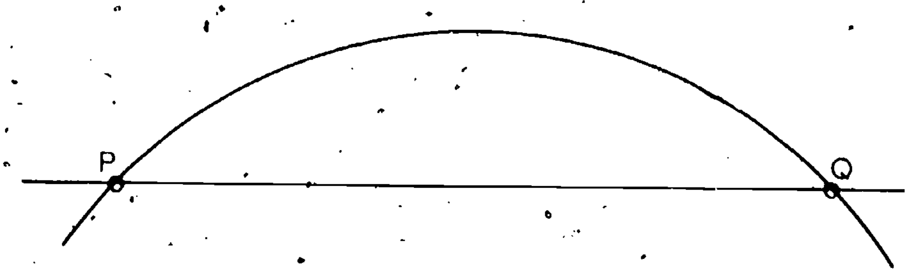
(3) L corta a E en algún otro punto Q.

Para dar una demostración indirecta, necesitamos mostrar que nuestra suposición contradice algo conocido. Y así es: Si P y Q están en E, por el postulado 6 sabemos que la recta que los contiene está en E. En consecuencia,

(4) L está en E.

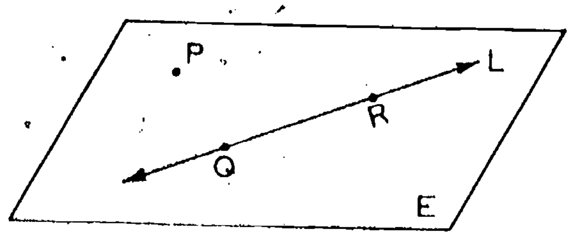
Esto contradice a (2). Por lo tanto, el supuesto (3) es imposible. Luego, el teorema 3-2 es cierto.

Notarás que las figuras usadas para ilustrar la demostración indirecta parecen extrañas. En la figura del teorema 3-2, hemos indicado un punto Q, meramente para acordarnos de la notación de la demostración. La demostración misma muestra que un tal punto Q no puede existir. De hecho, las figuras para la demostración indirecta siempre parecen ridículas, por una buena razón: son figuras de situaciones imposibles. Si hubiéramos dibujado una figura para el teorema 3-1, todavía se hubiera visto peor, quizás como ésta:



Este es un dibujo de una situación imposible en la que dos rectas diferentes se cortan en dos puntos diferentes.

Teorema 3-3. Dada una recta y un punto que no está en la recta, hay exactamente un plano que los contiene.



Demostración: Por la hipótesis, tenemos una recta L y un punto P que no está en L. Por el postulado de la regla sabemos que toda recta contiene infinitos puntos, y así L contiene dos puntos Q y R.

Por el postulado 7 existe un plano E que contiene a P, Q y R. Como por el postulado 6, E contiene a L, hemos mostrado que existe un plano E que contiene a L y a P.

Hasta ahora hemos demostrado en realidad solamente la mitad del teorema, ya que el teorema 3-3 dice que hay <u>exactamente un</u> tal plano. Falta demostrar que no existe ningún otro plano que contenga a L y a P. Esto lo haremos por demostración indirecta.

Supongamos que hay otro plano E' que contiene a L y a P. Como por el postulado 1, L es la única recta que contiene a Q y a R, sabemos que Q y R, lo mismo que P, están en E'. Esto contradice el postulado 7, que dice que tres puntos no alineados están exactamente en un plano. Como ya hemos establecido que E es un plano que contiene a P, Q y R, E' no puede existir, y E es el <u>único</u> plano que contiene a L y a P.

Las dos partes de la demostración del teorema 3-3 destacan la distinción que hay entre <u>existencia</u> y <u>unicidad</u>. La primera parte de la demostración muestra la <u>existencia</u> de un plano E que contiene a L y a P. Esto deja abierta la posibilidad de que haya más de un tal plano. La segunda parte de la demostración muestra la <u>unicidad</u> del plano. Cuando demostramos existencia, mostramos que hay <u>por lo menos un</u> objeto de una cierta clase. Cuando demostramos unicidad, probamos que hay <u>a lo sumo uno</u>. Si demostramos ambas, existencia y unicidad, esto significa que hay <u>exactamente uno</u>.

Por ejemplo, para las pulgas de un perro realengo, podemos generalmente demostrar existencia pero no unicidad. (Es muy afortunado el perro que tiene una sola pulga.) Para las hijas mayores de una señora dada, podemos obviamente demostrar unicidad, pero no necesariamente existencia; algunas señoras no tienen hija alguna. Para los puntos comunes a dos segmentos diferentes, no tenemos necesariamente existencia o unicidad; la intersección puede contener muchos puntos o exactamente un punto, o ninguno.

La frase "uno y sólo uno" se usa con frecuencia en vez de "exactamente uno", ya que subraya la doble naturaleza de la afirmación.

El siguiente teorema se divide en dos partes exactamente de la misma manera:

Teorema 3-4. Dadas dos rectas que se cortan, hay exactamente un plano que las contiene.

Por variar, daremos la demostración en forma de doble columna. Fíjate bien en las dos partes y en la forma como manejamos la demostración indirecta en la segunda parte.

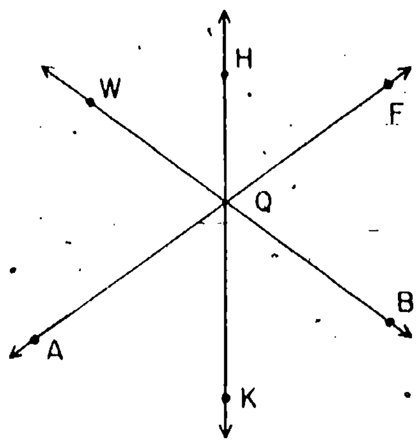
Demostración: Tenemos las rectas dadas L_1 y L_2, que se cortan en el punto P.

Afirmaciones	Razones
1. L_1 contiene un punto Q, diferente de P.	1. Por el postulado de la regla, toda recta contiene infinitos puntos.
2. Q no está en L_2.	2. Teorema 3-1
3. Hay exactamente un plano E, que contiene a L_2 y a Q.	3. Teorema 3-3
4. E contiene a L_1.	4. Por el postulado 6, ya que E contiene a P y a Q.
5. Supongamos que otro plano F también contiene a L_1 y a L_2.	
6. F contiene a Q.	6. Q está en L_1.
7. Cada uno de los planos E y F contiene a L_2 y a Q.	7. Pasos 3 y 4, y 5 y 6.
8. E es el único plano que contiene a L_1 y a L_2.	8. El paso 7 contradice el teorema 3-3.

Conjunto de problemas 6-2b

1. ¿Es un triángulo necesariamente una figura plana? Explícalo.

2.

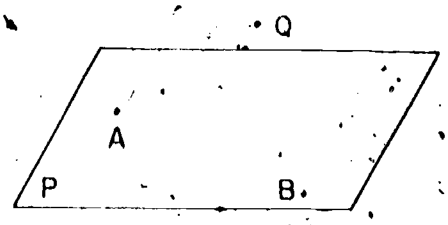


El teorema 3-4 dice, en efecto: "Dos rectas que se cortan determinan un plano". ¿Cuántos planos diferentes están determinados por pares de rectas que se cortan en esta figura? Suponte que las tres rectas no están todas en el mismo plano. Enumera los planos nombrando las dos rectas que se cortan y que los determinan.

3. ¿Cuántos planos diferentes están determinados por los pares que se pueden formar con cuatro rectas diferentes $\overleftrightarrow{AQ}$, $\overleftrightarrow{BQ}$, $\overleftrightarrow{CQ}$, $\overleftrightarrow{DQ}$, cada tres de las cuales no situadas en el mismo plano? Haz una lista de los planos nombrando cada uno mediante las dos rectas que se cortan y que lo determinan.

4. Si, en un plano Z, $\overrightarrow{PT}$ es perpendicular a la recta L y $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular a la recta L, ¿qué conclusión puedes deducir respecto a $\overleftrightarrow{PQ}$ y $\overleftrightarrow{PT}$?

5.



Como se indica en la figura, A y B están en el plano P. El punto Q está sobre el plano P. ¿Está la recta $\overleftrightarrow{AB}$ enteramente en P? Menciona un postulado o teorema para fundamentar tu conclusión. Hay un segundo plano implícito en la situación. Nómbralo usando los tres puntos que lo determinan. ¿Cuál es la intersección de estos dos planos? ¿En qué punto cortará $\overleftrightarrow{QB}$ al plano P?

6. Si A, B, C, D, son cuatro puntos no alineados, haz una lista de todos los planos determinados por subconjuntos de A, B, C,D.

6-3. Teoremas acerca de perpendiculares.

Algunos de los teoremas básicos sobre rectas perpendiculares son buenos ejemplos de existencia, unicidad y demostraciones indirectas.

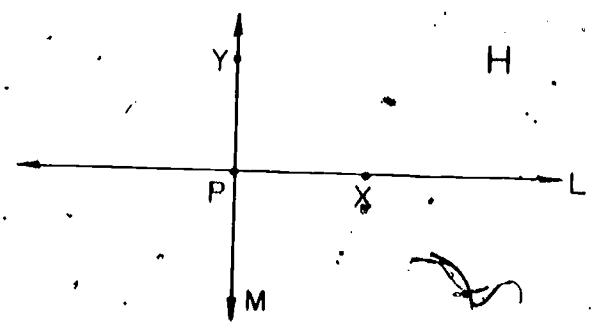
Teorema 6-1. En un plano dado, y por un punto dado de una recta dada en el plano, pasa una y solamente una recta perpendicular a la recta dada.

Dato: E es un plano, L una recta en E, y P un punto de L.

Demostrar: (1) Hay una recta M en E, tal que M contiene a P y $M \perp L$;

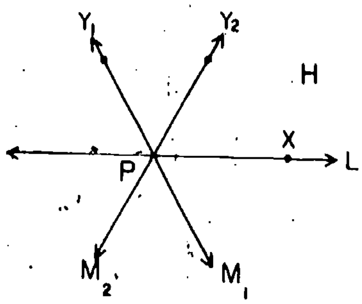
(2) Hay a lo sumo una recta en E que contiene a P y es perpendicular a L.

Demostración de (1):



Sea H uno de los dos semiplanos en E que tienen a L como una arista, y sea X un punto de L, distinto de P. Por el postulado de construcción del ángulo, hay un punto Y de H tal que $\angle XPY$ es un ángulo recto. Sea M la recta $\overleftrightarrow{PY}$. Entonces $M \perp L$. Así hemos demostrado que hay <u>por lo menos</u> una recta que satisface las condiciones del teorema.

<u>Demostración de (2)</u>: Necesitamos ahora demostrar que hay a lo sumo una tal recta. Supongamos que hay dos de ellas, M_1 y M_2. Sea X un punto de L, distinto de P.



Entonces las rectas M_1 y M_2 contienen los rayos $\overrightarrow{PY_1}$ y $\overrightarrow{PY_2}$ que están en el mismo semiplano H que tiene L como arista. Por la definición de rectas perpendiculares, uno de los ángulos determinados por L y M_1 es un ángulo recto, y por el teorema 4-8 los cuatro ángulos son ángulos rectos. Así, $m\angle XPY_1 = 90$. De modo parecido, $m\angle XPY_2 = 90$. Pero esto contradice el postulado de construcción del ángulo que dice que hay solamente un rayo $\overrightarrow{PY}$, con Y en H, tal que $m\angle XPY = 90$. Esta contradicción significa que nuestro supuesto de que hay dos perpendiculares M_1 y M_2 tiene qué ser falso, lo que demuestra la segunda parte del teorema.

La condición "en un plano dado" es una parte importante del enunciado de este teorema. Si esta condición se omitiera, la primera parte (la de existencia) del teorema todavía sería cierta, pero la segunda parte (la de unicidad) no lo sería. Esto se ve fácilmente pensando en la relación entre los rayos de una rueda y su eje. Así, el omitir esta condición nos daría un ejemplo de un teorema de existencia geométrica sin su correspondiente teorema de unicidad. La situación contraria, un teorema de unicidad sin su correspondiente teorema de existencia, ya ha sido considerada en este capítulo. ¿Podrás indicarla?

<u>Definición</u>. La <u>mediatriz</u> de un segmento, en un plano, es la recta en el plano que es perpendicular al segmento y contiene su punto medio.

Todo segmento tiene exactamente un punto medio, y por el punto medio hay exactamente una recta perpendicular en un plano dado. Así, para las mediatrices en un plano dado, tenemos ambas cosas: existencia y unicidad.

El siguiente teorema ofrece una caracterización de los puntos de una mediatriz:

<u>Teorema</u> <u>6-2</u>. La mediatriz de un segmento, en un plano, es el conjunto de todos los puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento.

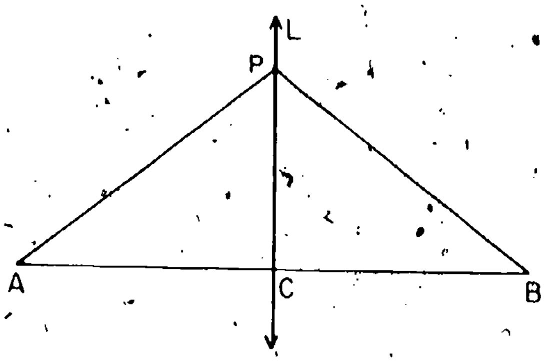
De otro modo: Sea L la mediatriz del segmento $\overline{AB}$, en un plano E, y sea C el punto medio de $\overline{AB}$. Luego,

(1) Si P está en L, entonces PA = PB, y

(2) Si P está en E, y PA = PB, entonces P está en L.

Nota que el nuevo planteamiento del teorema nos dice claramente que la demostración constará de dos partes. En la primera parte demostramos que todo punto de la mediatriz satisface a la caracterización, esto es, equidista de los extremos del segmento. Pero el teorema dice que la mediatriz es el conjunto de <u>todos</u> esos puntos. Para demostrar esto, pues, debemos mostrar también que <u>todo</u> punto tal, caracterizado por equidistar de los extremos del segmento, está en la mediatriz. Esto último es la segunda parte del nuevo planteamiento del teorema.

Demostración de (1): Dado un punto P de L, si P está en $\overleftrightarrow{AB}$, entonces $P = C$, y esto significa que $PA = PB$, por la definición de punto medio de un segmento. Si P no está en la recta $\overleftrightarrow{AB}$, entonces

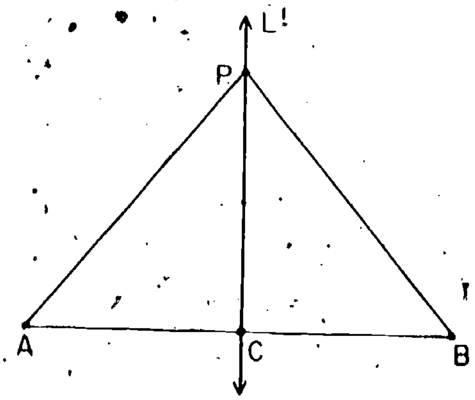


$PC = PC$ por ser una identidad, y $CA = CB$, $\angle PCA \cong \angle PCB$ por la hipótesis. Así, por el postulado L.A.L.,

$$\triangle PCA \cong \triangle PCB.$$

Por lo tanto, $PA = PB$, que era lo que se quería demostrar.

Demostración de (2): Se da que P está en el plano E y $PA = PB$. Si P está en $\overleftrightarrow{AB}$, entonces P es el punto medio C de $\overline{AB}$, y, por tanto, P está en L. Si P no está en $\overleftrightarrow{AB}$, sea L' la recta $\overleftrightarrow{PC}$.



Entonces $PC = PC$, $CA = CB$ y $PA = PB$. (¿Por qué?) Por el teorema L.L.L.,

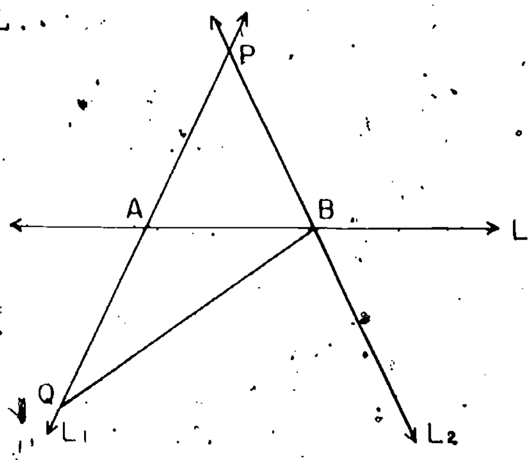
$$\triangle PCA \cong \triangle PCB.$$

Luego, $\angle PCA \cong \angle PCB$. Y, por definición, $L' \perp \overline{AB}$ y por consiguiente, L' es la mediatriz de $\overline{AB}$. Por lo tanto, por el teorema 6-1, $L' = L$, y P está en L, lo que se quería demostrar.

Demostramos ahora el análogo del teorema 6-1 para el caso en que el punto dado no esté en la recta dada. Como la demostración es mucho más complicada que la del teorema 6-1, enunciaremos y demostraremos las partes de existencia y unicidad como teoremas separados. Por ser más sencillo, empezamos con la unicidad.

__Teorema 6-3__. Desde un punto externo dado, hay a lo sumo una recta perpendicular a una recta dada.

__Demostración__: Al igual que la mayor parte de las demostraciones de unicidad, ésta es una demostración indirecta. Supongamos que L_1 y L_2 son rectas distintas que pasan por P, siendo cada una de ellas perpendicular a L.



Digamos que L_1 corte a L en A y L_2 corte a L en B. Como las rectas son distintas y ambas pasan por P, tenemos que necesariamente $A \neq B$ (teorema 3-1).

Sobre el rayo opuesto a $\overrightarrow{AP}$ tómemos $AQ = AP$ (teorema de localización de puntos). Entonces $AQ = AP$, $AB = AB$, $m\angle PAB = m\angle QAB = 90$, y así $\triangle QAB \cong \triangle PAB$ por el postulado L.A.L.

Se deduce que

$$m\angle QBA = m\angle PBA = 90,$$

y, por tanto, $\overleftrightarrow{BQ} \perp L$. Esto contradice el teorema 6-1, el cual nos dice que hay solamente una perpendicular a L en el punto B que esté en el plano que contiene a L y a L_1. Luego, nuestro supuesto de que pudiera haber dos perpendiculares a L pasando por P es falso.

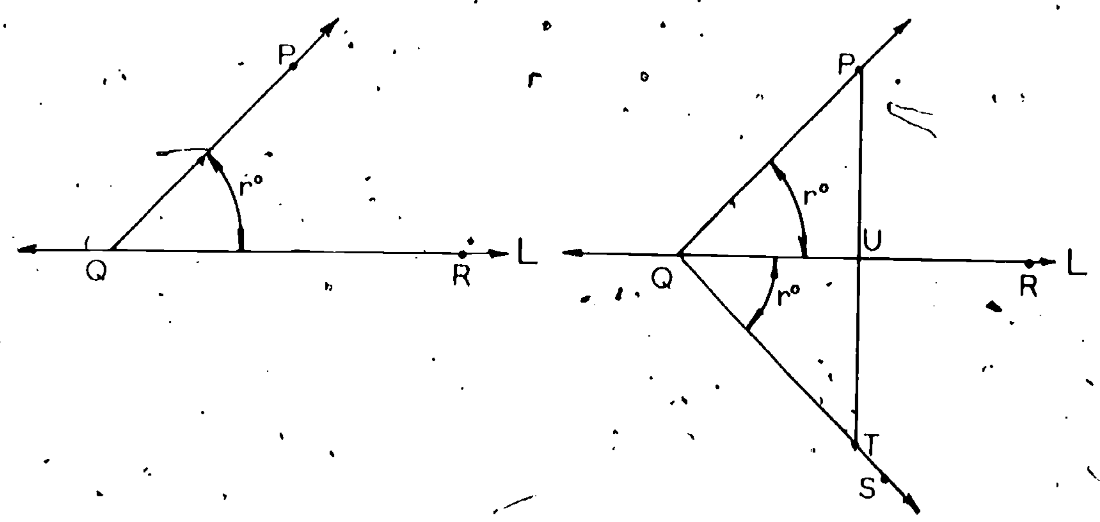
Corolario 6-3-1: A lo sumo un ángulo de un triángulo puede ser recto.

Porque si en el $\triangle ABC$, $\angle A$ y $\angle B$ fueran ambos rectos tendríamos dos perpendiculares desde C a $\overleftrightarrow{AB}$.

Definiciones. Un triángulo rectángulo es un triángulo uno de cuyos ángulos es recto. El lado opuesto al ángulo recto es la hipotenusa y los lados adyacentes al ángulo recto son los catetos.

Teorema 6-4. Desde un punto externo dado, hay por lo menos una recta perpendicular a una recta dada.

O de otro modo: Sea L una recta y P un punto fuera de L. Entonces hay una recta perpendicular a L y que contiene a P.



Primero explicaremos cómo se puede construir la perpendicular, haciendo el dibujo en una hoja de papel usando regla y transportador. Del método de construcción se verá claramente cómo se puede demostrar el teorema mediante los postulados.

Paso 1. Sean Q y R dos puntos cualesquiera de la recta L. Midamos el ángulo $\angle PQR$.

Paso 2. Usando el transportador, construyamos un ángulo $\angle RQS$, con la misma medida del $\angle PQR$, pero tomando S del lado de la recta L opuesto a P.

Paso 3. Midamos la distancia QP. Tomemos un punto T en $\overrightarrow{QS}$ tal que $QT = QP$.

Paso 4. Ahora dibujemos la recta $\overleftrightarrow{TP}$. Esta es la perpendicular que buscamos. Para saber la razón de ello, estudia la demostración que sigue. Primero, sin embargo, deberás ensayar esta construcción con tu regla y transportador, y tratar de ver tú mismo por qué obtenemos así la perpendicular deseada.

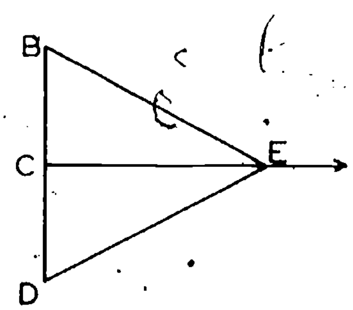
Dispongamos ahora la demostración en la forma de doble columna. Cada una de las primeras afirmaciones de la izquierda corresponde a uno de los pasos seguidos al trabajar con nuestros instrumentos de dibujo.

Afirmaciones	Razones
1. L contiene dos puntos Q y R.	1. Postulado de la regla
2. Hay un ángulo $\angle RQS$, congruente al $\angle RQP$, con S y P a lados diferentes de L.	2. Postulado de la construcción del ángulo
3. Hay un punto T del rayo $\overrightarrow{QS}$ tal que $QT = QP$.	3. Teorema de localización de puntos
4. T y P están a lados opuestos de L.	4. P y S están a lados opuestos de L, y S y T están al mismo lado de L.
5. $\overleftrightarrow{TP}$ corta a L en un punto U.	5. Definición de lados opuestos
6. $\triangle PQU \cong \triangle TQU$	6. Afirmaciones 2 y 3 y el postulado L.A.L.
7. $\angle QUP \cong \angle QUT$	7. Definición de congruencia entre triángulos
8. $\angle QUP$ es un ángulo recto.	8. Definición de ángulo recto
9. $\overleftrightarrow{PT} \perp L$	9. Definición de perpendicularidad

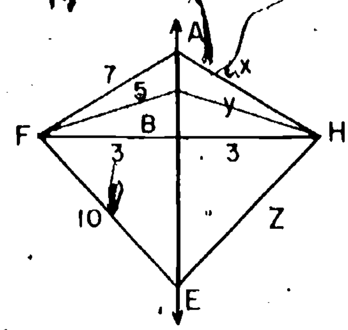
Esta demostración se parece algo a la demostración del teorema L.L.L. (teorema 5-6). Como el teorema anterior, tiene varios casos, uno sólo de los cuales (aquel en el que U y R están al mismo lado de Q) está totalmente tratado por la demostración que acabamos de presentar. Las modificaciones necesarias para los otros dos casos ($U = Q$ y Q está entre R y U) quedan como un ejercicio para el alumno.

Conjunto de problemas 6-3

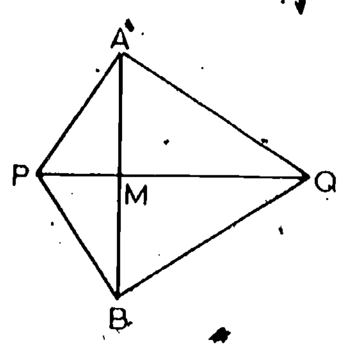
1. Si $BC = DC$ y $\overleftrightarrow{EC} \perp \overleftrightarrow{BD}$, demuestra sin utilizar triángulos congruentes que $EB = ED$.



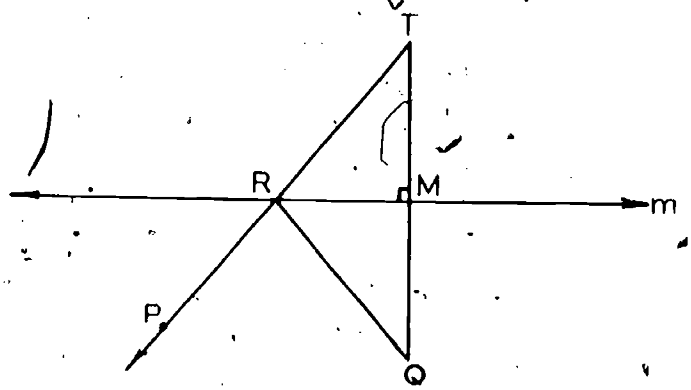
2. Si $\overleftrightarrow{AE} \perp \overline{FH}$ en B, como se ilustra en la figura, y los segmentos tienen las longitudes indicadas, halla x, y, z.



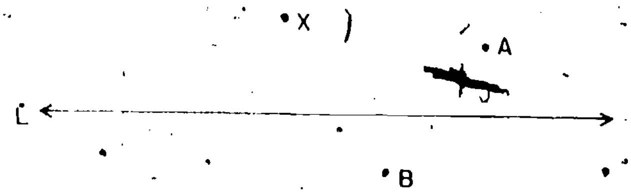
3. Datos: $PA = PB$, M es el punto medio de $\overline{AB}$, y Q está en la recta $\overleftrightarrow{PM}$, como se ilustra en la figura.
   Demuestra que $QA = QB$.
   (Haz la demostración en forma de párrafo.)



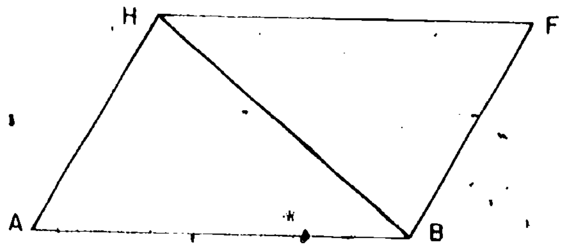
4. Datos: La recta m es la mediatriz del segmento $\overline{QT}$. P está del mismo lado de m que Q. R es la intersección de m y $\overleftrightarrow{PT}$. Demuestra que PT = PR + RQ.



5. Copia la figura. Siguiendo los pasos señalados en el texto, construye perpendiculares desde A, B y X a la recta L.



6. Copia la figura. Usando regla y transportador construye perpendiculares desde A y F a $\overline{HB}$.



7. ¿Muestra el teorema 6-4 la existencia de una sola perpendicular a una recta desde un punto fuera de ella? Si nos limitamos al plano, ¿muestra el teorema 6-1 la existencia de una sola perpendicular a una recta por un punto de ella?

*8. Se dan el triángulo isósceles ABC con AC = BC y las bisectrices $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$ de $\angle A$ y $\angle B$. $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$ se cortan en el punto F. Demuestra que $\overleftrightarrow{CF}$ es perpendicular a $\overline{AB}$. (No necesitas utilizar triángulos congruentes en la demostración.)

*9. Una diagonal de un cuadrilátero biseca a dos ángulos del cuadrilátero. Demuestra que biseca a la otra diagonal.

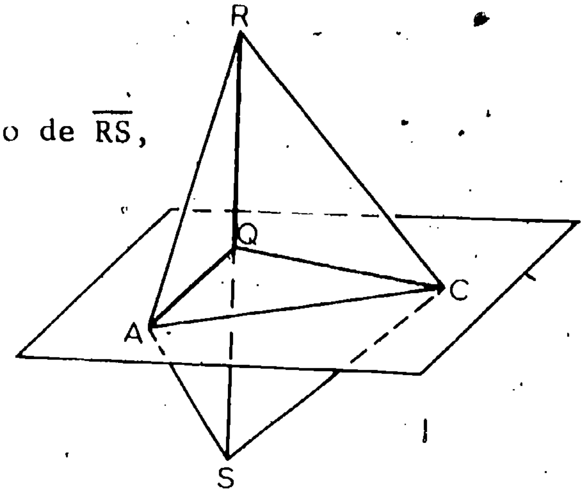
*10. En esta figura se da:

$RC = SC$,

Q es el punto medio de $\overline{RS}$,

$\angle RCA \cong \angle SCA$

Demuestra que $\overline{AQ} \perp \overline{RS}$.



6-4. Empleo de conjuntos auxiliares en las demostraciones

Probablemente habrás notado que al demostrar algunos teoremas recientes, tales como los teoremas 6-2 y 6-4, empleamos ciertos puntos, rayos y segmentos en la figura además de los especificados en el teorema. Posiblemente te preocupen dos preguntas:

1. ¿Cómo podemos justificar el empleo de tales conjuntos adicionales en las demostraciones a base de nuestros postulados?

2. ¿Cómo sabemos cuáles de estos conjuntos, si es que son necesarios, deberán emplearse en la demostración de un teorema?

Es fácil contestar a la primera pregunta. Al tratar con teoremas nos preocupan corrientemente varias relaciones entre ciertos puntos, rectas, planos y subconjuntos de éstos, y como medida práctica, en las demostraciones de teoremas tómamos ciertos planos o rectas y ciertos puntos en ellos. Frecuentemente no nos preocupamos de justificar este proceder. Por ejemplo, si se nos da una recta, podemos inmediatamente llamarla $\overleftrightarrow{PQ}$. Cuando se nos pida una razón, sin embargo, podemos referirnos al postulado de la regla, que dice que una recta contiene infinitos puntos, y, por lo tanto, los dos puntos

P y Q existen. En forma semejante, dados dos puntos A y B, podemos hablar acerca de $\overleftrightarrow{AB}$ con completa confianza, ya que representa una recta cuya existencia y unicidad garantiza el postulado 1. (V. sección 6-2.)

La preocupación y cuidado de justificar existencia y unicidad adquiere particular significación cuando empleamos en la demostración ciertos puntos, rectas, segmentos, y demás, que no aparecen en el teorema que se trata de demostrar. Ciertamente no podemos usar estos conjuntos en nuestras demostraciones si no existen en las condiciones de nuestra geometría, excepto, desde luego, en una demostración indirecta, en la que el propósito es demostrar que no pueden existir.

En la tabla que sigue enunciaremos los postulados y teoremas ya estudiados que pueden usarse, en forma apropiada, para introducir conjuntos auxiliares en las demostraciones.

Conjunto Geométrico	Existencia	Unicidad
1. Punto	Postulados 3 y 5	Teoremas 2-4, 3-1, 3-2
a. Punto medio	Teorema 2-5	Teorema 2-5
2. Recta	Postulados 1 y 8	Postulados 1 y 8
a. Perpendicular en un punto de una recta, en un plano	Teorema 6-1	Teorema 6-1
b. Mediatriz, en un plano	Teoremas 2-5 y 6-1	Teoremas 2-5 y 6-1
c. Perpendicular desde un punto fuera de la recta	Teorema 6-4	Teorema 6-3
3. Plano	Postulado 7 Teoremas 3-3 y 3-4	Postulado 7 Teoremas 3-3 y 3-4
4. Rayo según se usa en la medida de ángulos	Postulado 12	Postulado 12
a. Bisectriz de un ángulo	Teorema 5-3	Teorema 5-3
5. Segmento	Postulado 1 y definición de segmento	Postulado 1 y definición de segmento

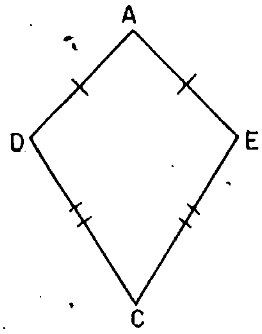
Puedes ver en esta tabla que ya sabes bastante acerca de la naturaleza de nuestros tres términos básicos no definidos.

La respuesta a la segunda pregunta presenta un problema muy diferente de la respuesta a la primera. Llegar a saber cuándo emplear conjuntos auxiliares en una demostración es sobre todo parte del proceso de aprendizaje para razonar lógicamente. Requiere mucha práctica. Tratemos un ejemplo para ver cómo funciona esto.

Ejemplo 1.

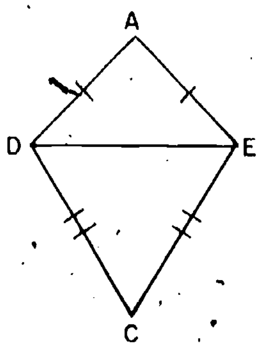
Dato: La figura plana con $AD = AE$ y $CD = CE$.

Demuestra que $\angle D \cong \angle E$.



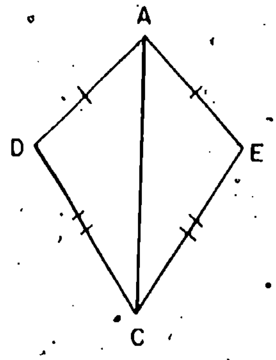
Puesto que todos nuestros postulados y teoremas relativos a la congruencia han versado sobre triángulos, parece razonable que nuestra figura deba contener algunos triángulos. Podemos conseguir esto fácilmente trazando $\overline{AC}$ o $\overline{DE}$.

Supongamos que empleamos $\overline{DE}$ de modo que nuestra figura tenga el aspecto siguiente:



Esto nos permite completar la demostración, ya que $m\angle ADE = m\angle AED$ y $m\angle CDE = m\angle CED$, nos da $m\angle ADC = m\angle AEC$ por el postulado de adición de ángulos.

Si hubiéramos trazado el segmento $\overline{AC}$ en vez de $\overline{DE}$, nuestra demostración, esta vez en forma de doble columna, sería algo como lo que va a continuación:



Demostración:

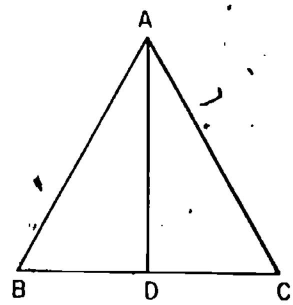
Afirmaciones	Razones
1. Dibujemos $\overline{AC}$.	1. Postulado 1 y definición de segmento
2. $AC = AC$	2. Identidad
3. $AD = AE$ y $CD = CE$	3. Dato
4. $\triangle ADC \cong \triangle AEC$.	4. Teorema L.L.L.
5. $\angle D \cong \angle E$	5. Definición de triángulos congruentes

Cada una de las soluciones al ejemplo 1 es correcta. Determinar cuál se escoge queda a tu gusto. Pero debemos señalar que en muchos problemas en los que hay opción, la decisión tomada determinará el grado de dificultad de la demostración. Conviene pensar en cómo será cada solución antes de redactar formalmente una de ellas.

Un aspecto importante del aprendizaje sobre lo que se puede emplear en una demostración se ilustra si eliminamos de la hipótesis del ejemplo 1 la condición de que la figura sea una figura plana. Si D no está en el plano de A, E y C, por lo menos una de las soluciones no es válida. ¿Habrá una que sea válida? Si la hay, ¿cuál es?

Una última advertencia antes que empieces a emplear conjuntos auxiliares en tus demostraciones. Al contestar la pregunta 1 tuvimos cuidado de decir que cada uno de los pasos debe justificarse; es decir, que todo punto, recta, plano, y demás, deberá tener existencia fundada en nuestros postulados. Los alumnos cometen a veces el error de no fijarse en esto. Por ejemplo, puedes pensar que es posible demostrar la afirmación "Todos los ángulos son congruentes" mediante el siguiente argumento:

Ejemplo 2.

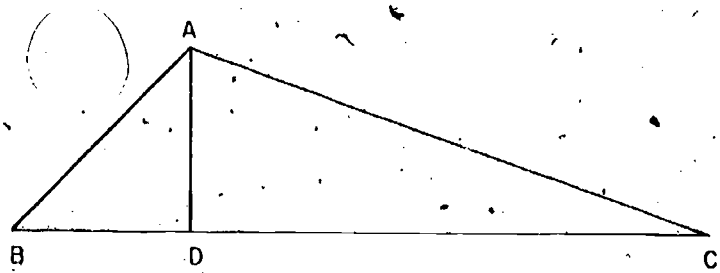


Dado cualquier $\triangle ABC$, demuestra que $\angle B \cong \angle C$.

Demostración: Tracemos $\overline{AD}$ en el $\triangle ABC$, bisecando el $\angle A$ y perpendicular a $\overline{BC}$.

Entonces $\angle BAD \cong \angle CAD$ por la definición de bisectriz de un ángulo, $AD = AD$ por ser una identidad, y $\angle BDA \cong \angle CDA$ por la definición de perpendicular y el dato de que todos los ángulos rectos son congruentes. Por lo tanto, $\triangle BAD \cong \triangle CAD$ por A.L.A., y así $\angle B \cong \angle C$.

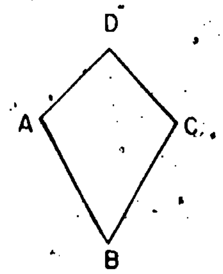
No cuesta mucho darse cuenta del serio error de esto que llamamos demostración. El segmento $\overline{AD}$, como bisectriz de un ángulo y perpendicular a la base, no existe de acuerdo con nuestros postulados. Más aún, la figura muestra que el $\triangle ABC$ aparenta ser isósceles y esto hace que $\overline{AD}$ aparezca como se presentó en la demostración. Si la figura fuese así,



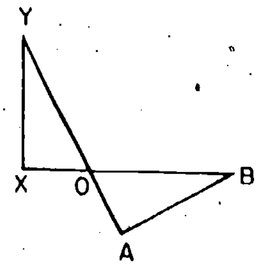
ciertamente que no pensarías en utilizar $\overline{AD}$ como lo hicimos. Esto nos lleva una vez más a decir que la figura es meramente una conveniencia para ayudarte a pensar durante tu razonamiento en conceptos lógicos y palabras escogidas con gran cuidado.

Conjunto de problemas 6-4

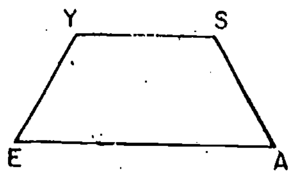
1. Datos: A, B, C y D están en un plano, $AD = CD$, $m\angle A = m\angle C$. Demuestra que $AB = CB$. ¿Será válida la demostración si A, B, C y D no están en un mismo plano?



2. Datos: $XY = AB$, $AY = XB$. Demuestra que $\triangle XOY \cong \triangle AOB$.

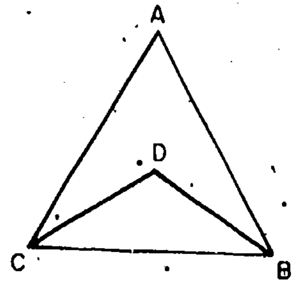


3. Datos: E, A, S, e Y están en un plano, $\angle E \cong \angle A$, $\overline{YE} \cong \overline{SA}$. Demuestra que $\angle Y \cong \angle S$.



4. Prepara una segunda solución al problema 3 empleando segmentos auxiliares diferentes de los que usaste en la solución original del problema.

5. Si $AC = AB$ y $CD = BD$ en la figura plana, demuestra que $\angle ACD \cong \angle ABD$. Prepara una demostración correcta para el caso en que la figura no sea plana.



6-5. Interposición y separación

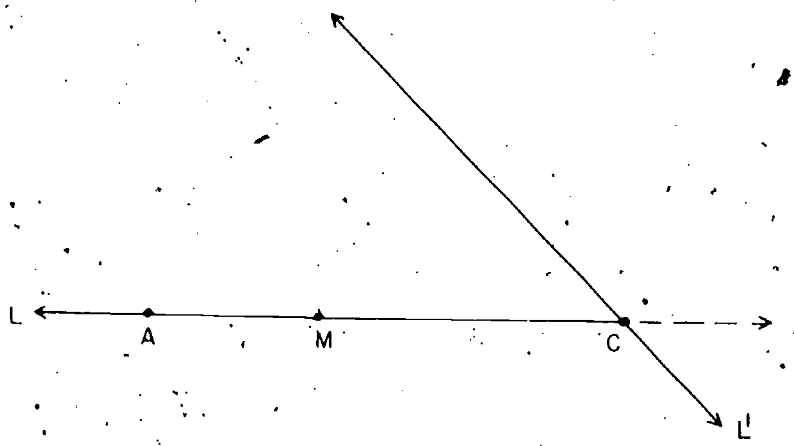
Los alumnos con facultades críticas habrán descubierto dos partes del capítulo 5 en las que las demostraciones dadas no están del todo completas. Estos defectos aparecen en los teoremas 5-3 y 5-6, y son muy parecidos en ambos, pues consisten en no demostrar por qué un cierto punto cae en el interior de un cierto ángulo. En el teorema 5-3 tenemos que saber si D está en el interior del $\angle BAC$ antes de poder concluir que $\overrightarrow{AD}$ biseca a este ángulo. Y en los pasos 9 y 10 del teorema 5-6 tenemos que saber que H está en el interior del $\angle ABC$ y del $\angle AE'C$ antes de poder aplicar el postulado de adición de ángulos.

En éstas partes no basta con observar que en la figura los puntos caen en los sitios apropiados. Recuerda primero que un dibujo es solamente una aproximación a la verdadera situación geométrica, y segundo también es sólo una figura entre infinitas posibles y el teorema debe ser demostrado para todos los casos.

Te preguntarás quizás por qué se presenta una demostración incompleta en un texto. La razón es que las demostraciones de las propiedades de separación tales como ésta son con frecuencia largas, complicadas y carentes de interés, y que añaden poco o nada a la idea esencial de la demostración. Si entiendes las demostraciones de estos teoremas según fueron presentadas, pero no notaste lo incompleto de estos pasos en particular, no debes preocuparte por tu competencia en geometría. Durante muchos siglos los estudiosos discutieron si pasos como éstos necesitaban alguna justificación.

Sin embargo, los matemáticos están de acuerdo hoy día en que aún tales pasos "obvios" requieren una demostración lógica, y por eso presentamos aquí dos teoremas y algunos problemas para llenar las lagunas en estas demostraciones y en otras posteriores.

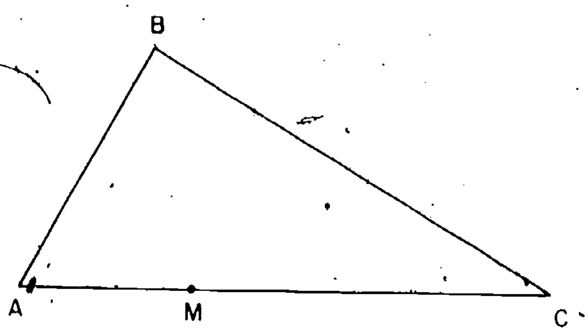
Teorema 6-5. Si M está sobre la recta L, entre A y C, entonces M y A están al mismo lado de otra recta cualquiera L' que contenga a C.



Demostración: La demostración será indirecta. Si M y A están a lados opuestos de L' (en el plano que contiene a L y L') entonces algún punto D de L' está en el segmento $\overline{AM}$. Por lo tanto, D está entre A y M, por la definición de un segmento. Pero D está en ambas L y L'. Por lo tanto, D = C. Luego, C está entre A y M. Esto es imposible, porque M está entre A y C. (V. el teorema 2-3.)

Podemos ahora demostrar un teorema que completa la demostración de los teoremas 5-3 y 5-6.

Teorema 6-6. Si M está entre A y C, y B es cualquier punto fuera de la recta $\overleftrightarrow{AC}$, entonces M está en el interior del $\angle ABC$.

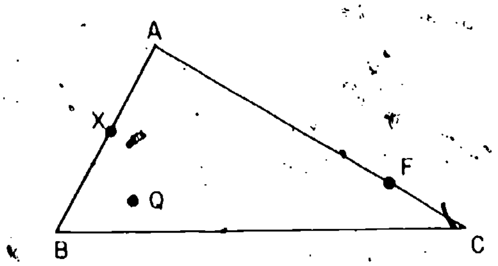


Demostración: Por el teorema anterior, sabemos que M y A están al mismo lado de $\overleftrightarrow{BC}$. Aplicando de nuevo el teorema anterior (intercambiando A y C) sabemos que M y C están al mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$. Por la definición del interior de un ángulo, estas dos afirmaciones nos dicen que M está en el interior del ∠ABC, que es lo que se quería demostrar.

Conjunto de problemas 6-5

Nota: En estos ejercicios no se deberá tomar información alguna de las figuras.

1.



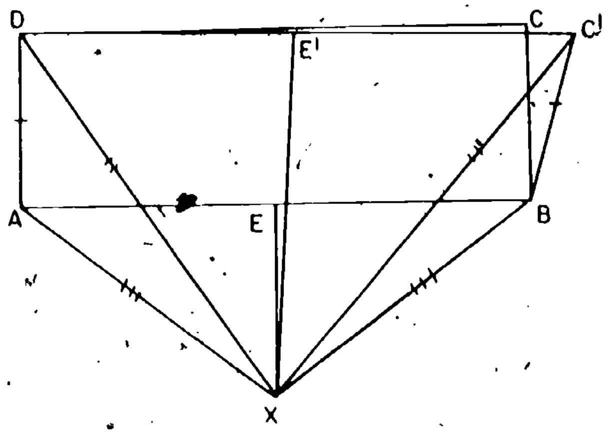
Se da el ΔABC con F entre A y C, X entre A y B, y Q en el interior del ΔABC. Completa las siguientes afirmaciones, y da razones para justificar tus respuestas.

a. F está en el interior del ∠ ______________.

b. X está en el interior del ∠ ______________.

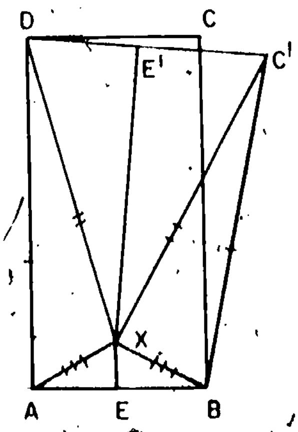
c. Q está en el interior del ∠ ______________, el ∠ ______________ y el ∠ __________.

2. El siguiente argumento defectuoso, "demostrando" que un ángulo obtuso es congruente a un ángulo recto, subraya la importancia de saber a qué lado de una recta cae un punto.



Supongamos que ABCD es un rectángulo, como en la figura, y que el lado $\overline{BC}$ se gira hacia afuera de modo que $BC' = BC$ y el $\angle ABC'$ es obtuso. Hagamos que la mediatriz de $\overline{AB}$ corte a la mediatriz de $\overline{DC'}$ en X. Si X está debajo de $\overleftrightarrow{AB}$ como aparece en la figura, tenemos que $\triangle AXD \cong \triangle BXC'$ por el teorema L.L.L., y, por tanto, $m\angle DAX = m\angle C'BX$. También, $\triangle EAX \cong \triangle EBX$, por L.L.L., y así $m\angle EAX = m\angle EBX$. Restando, se deduce que $m\angle DAE = m\angle C'BE$.

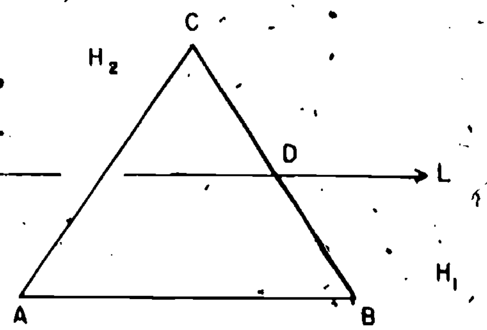
Si X cae por encima de $\overleftrightarrow{AB}$, como en la figura que sigue,



encontramos, exactamente igual que antes, que $m\angle DAX = m\angle C'BX$, $m\angle EAX = m\angle EBX$, y la igualdad deseada, $m\angle DAE = m\angle C'BE$, se obtiene mediante una suma.

¿Cuál es el error del argumento?

*3. Supongamos que ABC es un triángulo y D un punto entre B y C. Demuestra que si L es una recta en el plano del $\triangle ABC$ que corta a $\overline{BC}$ en D, entonces L corta o bien a $\overline{AC}$ o a $\overline{AB}$. (Sugerencia: Si L contiene a B, entonces L corta a $\overline{AB}$. Si L no contiene a B, entonces sean H_1, H_2 los dos semiplanos en que L separa al plano del $\triangle ABC$, siendo H_1 el que contiene a B. Como A puede estar en L, o en H_1 o en H_2, hay tres casos para consideración.)



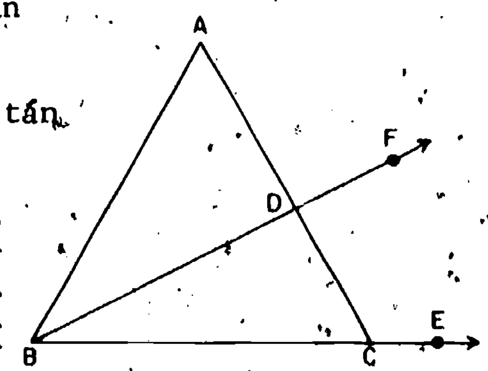
*4. Un teorema cuya verdad parece obvia es a menudo de difícil demostración. Un teorema de esa clase es el siguiente, que se supone cierto en la demostración del teorema 7-1 del próximo capítulo.

Supongamos que ABC es un triángulo, D un punto entre A y C, y E un punto en $\overrightarrow{BC}$ más allá de C. Entonces todo punto F de $\overrightarrow{BD}$ más allá de D está en el interior del $\angle ACE$.

Lo que debemos demostrar es que F está al mismo lado de $\overleftrightarrow{BC}$ que A, y que F está al mismo lado de $\overleftrightarrow{AC}$ que E.

a. ¿Cómo sabemos que A y D están al mismo lado de $\overleftrightarrow{BC}$? ¿Qué teorema implica que D y F están a ese mismo lado?

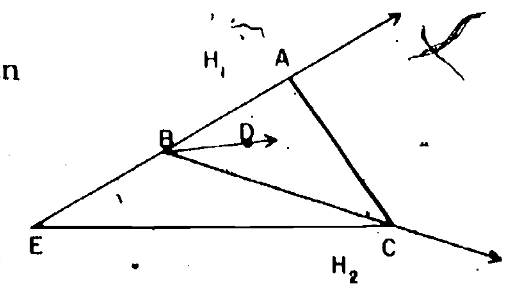
b. Demuestra que si H_1, H_2 son los dos semiplanos en que $\overleftrightarrow{AC}$ separa al plano de la figura y B está en H_1, entonces ambos E y F pertenecen a H_2. Esto demuestra que E y F están al mismo lado de $\overleftrightarrow{AC}$.



*5. Otro teorema cuya verdad se acepta frecuentemente sin demostración es el siguiente: Si D es un punto en el interior del $\angle ABC$, entonces $\overrightarrow{BD}$ corta a $\overline{AC}$.

Sugerimos más adelante una demostración en la que usamos el "artificio" de considerar el $\triangle EAC$, en el que E es un punto de $\overrightarrow{AB}$ más allá de B. Esto nos permite aplicar los resultados del problema 2. Las partes a y b que siguen se utilizan para demostrar que $\overleftrightarrow{BD}$ no corta a $\overline{EC}$.

a. Supongamos que H_1, H_2 son los dos semiplanos en que $\overleftrightarrow{BC}$ divide al plano del $\triangle EAC$ y que A está en H_1. ¿Por qué estará D en H_1? ¿Qué teorema implica que todo punto de $\overrightarrow{BD}$ que no sea B está en H_1? ¿Por qué está E en H_2?



¿Qué teorema implica que todo punto de $\overline{EC}$ que no sea C está en H_2? ¿Por qué $\overline{EC}$ no corta a $\overrightarrow{BD}$?

b. ¿Por qué $\overline{EC}$ no corta el rayo opuesto a $\overrightarrow{BD}$?

c. ¿Por qué corta $\overrightarrow{BD}$ a $\overline{AC}$?

d. ¿Por qué el rayo opuesto a $\overrightarrow{BD}$ no corta a $\overline{AC}$?

*6. El teorema siguiente puede utilizarse en vez de las partes a y b del problema 5 para demostrar que A y C caen a distintos lados de $\overleftrightarrow{BD}$:

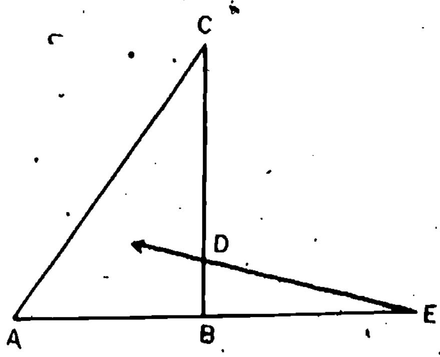
Teorema: Si el punto D está en el interior del $\angle ABC$, entonces A no está en el interior del $\angle DBC$ ni está C en el interior del $\angle ABD$.

Demuestra este teorema.

*7. Hay programas de geometría que utilizan otros sistemas de postulados distintos de los que hemos adoptado. Un postulado tomado de uno de esos sistemas es el siguiente:

Si A, B, C, D, E son puntos tales que A, B y C no están alineados y B está entre A y E mientras D está entre B y C, entonces hay un punto X tal que X está entre A y C mientras D está entre E y X.

Este enunciado se puede demostrar usando nuestro sistema de postulados.

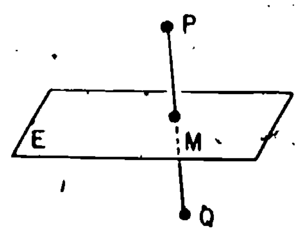


a. ¿Por qué están A, B, C, D, E en un plano?

b. Demuestra, usando el postulado de separación del plano, que $\overleftrightarrow{ED}$ corta a $\overline{AC}$ en un punto X entre A y C.

c. Podemos demostrar que D está entre E y X probando que E y X están a lados opuestos de alguna recta. ¿De qué recta?

8. Sean P y Q puntos a lados opuestos del plano E y M el punto de intersección de $\overline{PQ}$ con E. Indica cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas y cuáles falsas.



a. Si L es una recta en E perpendicular a $\overleftrightarrow{PQ}$, entonces P y Q estarán a distinto lado de L en el plano determinado por P y L.

b. Si L es una recta en E que pasa por M, entonces P y Q estarán a distinto lado de L en el plano determinado por P y L.

c. Si L es una recta en E, entonces P y Q estarán a distinto lado de L en el plano determinado por P y L.

d. P y Q estarán a distinto lado de todo plano que pase por M y no contenga a $\overleftrightarrow{PQ}$.

Capítulo 7

DESIGUALDADES GEOMETRICAS

7-1. Formulación de conjeturas plausibles.

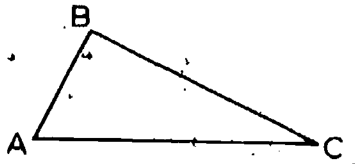
Hasta ahora, en nuestro estudio de la geometría del triángulo, hemos venido tratando solamente con condiciones en las cuales podemos decir que dos segmentos son de igual longitud, o que dos ángulos tienen igual medida. Procederemos ahora a estudiar condiciones en las cuales podemos decir que un segmento es más largo que otro (es decir, que tiene mayor longitud), o que un ángulo es mayor que otro (esto es, que tiene mayor medida).

A pesar de eso, no empezaremos demostrando teoremas. Nuestro primer paso será, en cambio, hacer algunas conjeturas plausibles acerca del tipo de afirmaciones que deben ser verdaderas. (No deberemos llamar teoremas a estos enunciados hasta que se demuestren).

Un ejemplo: Dado un triángulo con dos lados de longitudes desiguales, ¿qué podemos decir acerca de los ángulos opuestos a esos lados?

Notarás que este problema parece consecuencia natural del teorema 5-2 que dice que si dos lados de un triángulo tienen la misma longitud, entonces los ángulos opuestos a ellos tienen la misma medida.

Puedes examinar esta situación dibujando un triángulo que tenga dos lados de longitudes patentemente desiguales, como éste:



Aquí BC es mayor que AB y $m\angle A$ es mayor que $m\angle C$. Después de dibujar unos pocos triángulos más, te convencerás seguramente de que la siguiente afirmación debe ser verdadera:

Si dos lados de un triángulo tienen longitudes desiguales, entonces los ángulos opuestos a ellos tienen medidas desiguales, y el ángulo mayor es el opuesto al lado mayor.

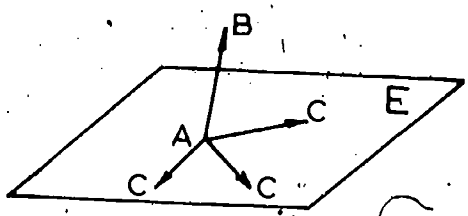
Ensayaremos ahora el mismo procedimiento con los problemas siguientes:

Conjunto de problemas 7-1

He aquí algunos ejercicios para que los ensayes.

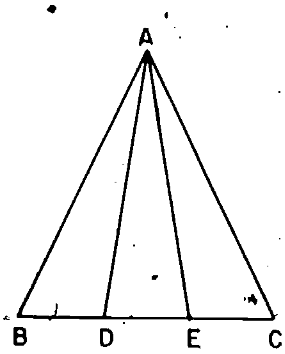
1. Considera triángulos con dos ángulos de medida desigual. Escribe un enunciado que te parezca cierto relativo a los lados opuestos a esos ángulos.
2. Considera varios triángulos ABC. ¿Cómo se compara la suma AB + BC con AC? ¿Y BC + AC con AB? ¿Y AB + AC con BC? Estas respuestas sugieren una conclusión general. Si crees que ésta conclusión es cierta para todos los triángulos, redáctala como una proposición.
3. Considera un cuadrilátero RSTQ. ¿Qué relación hay entre la suma RS + ST + TQ y RQ? Escribe una proposición sugerida por la respuesta.
4. Dibuja varios triángulos en los que la medida de un ángulo sea cada vez mayor, pero en los que los lados adyacentes mantienen su longitud original. ¿Qué puedes decir de la longitud del tercer lado?
5. Dibuja el $\triangle DEF$ y el $\triangle XYZ$ de manera que $DE = XY$, $FE = ZY$ y $m\angle DEF > m\angle XYZ$. Compara DF y XZ.
6. Examinando los triángulos $\triangle PDQ$ y $\triangle JUN$ en los que $m\angle PDQ = m\angle JUN$, $PD > JU$, y $QD = NU$, una persona irreflexiva podría llegar a la conclusión de que $PQ > JN$. Dibuja una figura que ilustre cómo esa conclusión no está justificada.

7. A es un punto en el plano E, $\overrightarrow{AB}$ es un rayo que no está en E, y $\overrightarrow{AC}$ es un rayo en E. Considerando posiciones diferentes de $\overrightarrow{AC}$, describe tan precisamente como puedas la posición de $\overrightarrow{AC}$ que haga el $\angle BAC$ tan pequeño como sea posible; tan grande como sea posible. No se espera que ofrezcas una demostración, pero se te pide que des la respuesta a base de tu conocimiento del espacio.



8. Mediante dibujos decide si será o no posible trisecar un ángulo utilizando el siguiente procedimiento:

   Sea el $\triangle ABC$ un triángulo isósceles con lados congruentes $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. Triseca el lado $\overline{BC}$ en los puntos D, E de manera que BD = DE = EC. ¿Será $\angle BAD \cong \angle DAE \cong \angle EAC$?



7-2. El álgebra de las desigualdades

Antes de considerar desigualdades geométricas, repasaremos algunos datos acerca de las desigualdades entre números reales. Notarás primero que $a < b$ y $b > a$ son meramente dos maneras diferentes de escribir lo mismo; usaremos la que nos parezca más conveniente, por ejemplo, $3 < 5$ ó $5 > 3$.

<u>Definiciones</u>. Un número real es <u>positivo</u> si es mayor que cero; es <u>negativo</u> si es menor que cero.

Volvemos a enunciar ahora los postulados de ordenación, dando ejemplos de su uso.

O-1. (Unicidad de la ordenación) Para todo x y todo y, una y sólo una de las siguientes relaciones será correcta: $x < y$, $x = y$, $x > y$

0-2. (Transitividad de la ordenación) Si $x < y$ y también $y < z$, entonces $x < z$.

Ejemplo 1. $3 < 5$ y $5 < 9$, por lo tanto, $3 < 9$.

Ejemplo 2. Si sabemos que $a < 3$ y $b > 3$, podemos concluir que $a < b$. Demostración: Si $a < 3$ y $3 < b$, entonces $a < b$.

Ejemplo 3. Todo número positivo es mayor que cualquier número negativo.

Datos: p es positivo, n es negativo.

Demostrar: $p > n$.

Demostración:

1. p es positivo.	1. Dato
2. $p > 0$	2. Definición de positivo
3. $0 < p$	3. Relación entre < y >
4. $n < 0$	4. Definición de negativo
5. $n < p$	5. Postulado 0-2
6. $p > n$	6. Relación entre < y >

0-3. (Adición a desigualdades) Si $x < y$, entonces, para toda z, $x + z < y + z$.

Ejemplo 4. Como $3 < 5$, se deduce que $3 + 2 < 5 + 2$, ó $5 < 7$; que $3 + (-3) < 5 + (-3)$, ó $0 < 2$; que $3 + (-8) < 5 + (-8)$, ó $-5 < -3$.

Ejemplo 5. Si $a < b$, entonces $-b < -a$.

Demostración: $a + (-a-b) < b + (-a-b)$, ó $-b < -a$.

Ejemplo 6. Si $a + b = c$ y b es positivo, entonces $a < c$.

Demostración:

1. b es positivo.	1. ¿Por qué?
2. $b > 0$	2. ¿Por qué?
3. $0 < b$	3. ¿Por qué?
4. $a < a + b$	4. ¿Por qué?
5. $a < c$	5. ¿Por qué?

Ejemplo 7. Si $a + b < c$, entonces $a < c - b$. Dejamos la demostración al alumno.

Ejemplo 8. Si $a < b$, entonces para toda c, $c - a > c - b$. Dejamos la demostración al alumno.

0-4. (Multiplicación por desigualdades) Si $x < y$, $z > 0$, entonces $xz < yz$.

Ejemplo 9. De la desigualdad $3 < 6$ podemos deducir que $3000 < 6000$; también, que $\frac{1}{18} \cdot 3 < \frac{1}{18} \cdot 6$, ó $\frac{1}{6} < \frac{1}{3}$.

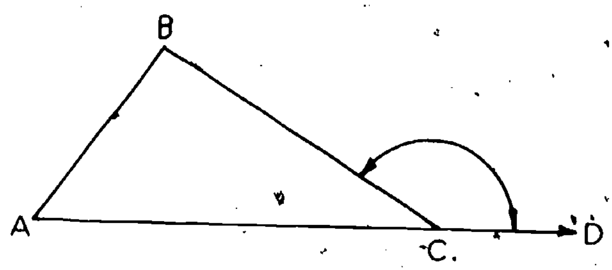
Ejemplo 10. Si $x < y$, $z < 0$, entonces $xz > yz$. Dejamos la demostración al alumno.

0-5. (Suma de desigualdades) Si $a < b$, $x < y$, entonces $a + x < b + y$.

Esto no es un postulado, sino un teorema; su demostración aparece en la sección 2-2. Sin embargo, es conveniente enunciarlo aquí, para futura referencia, junto con los postulados.

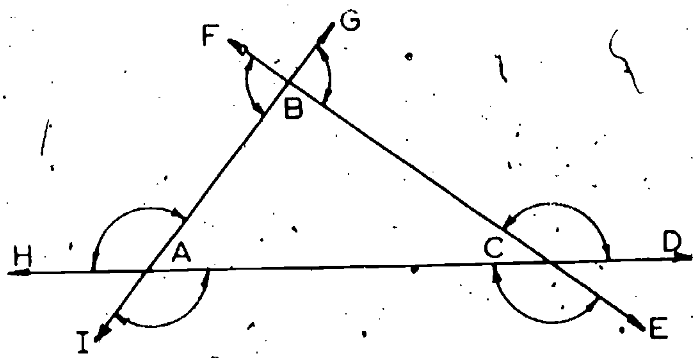
7-3. Teoremas fundamentales de la desigualdad

En la figura siguiente, el ángulo $\angle BCD$ se dice ser un ángulo externo del $\triangle ABC$. Con mayor precisión:



Definición: Si C está entre A y D, entonces el $\angle BCD$ es un ángulo externo del $\triangle ABC$.

Todo triángulo tiene seis ángulos externos, según se indica por las dobles flechas en la siguiente figura:



Estos seis ángulos forman tres pares de ángulos congruentes, porqué forman tres pares de ángulos opuestos por el vértice.

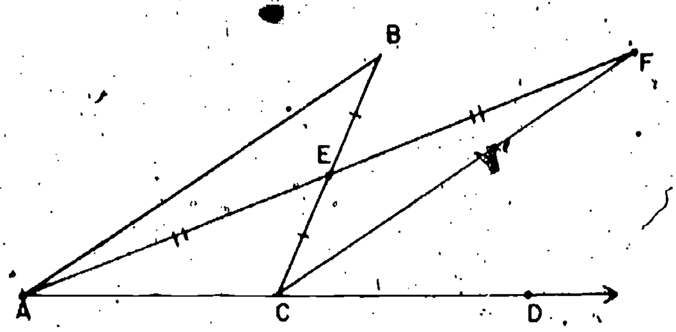
<u>Definición</u>: Los ángulos $\angle A$ y $\angle B$ del triángulo se llaman los <u>ángulos internos no contiguos</u> de los ángulos externos $\angle BCD$ y $\angle ACE$.

Análogamente, $\angle A$ y $\angle C$ del $\triangle ABC$ son los ángulos internos no contiguos de los ángulos externos $\angle ABF$ y $\angle CBG$.

<u>Teorema 7-1</u>. (El teorema del ángulo externo) Un ángulo externo de un triángulo es mayor que cualquiera de los ángulos internos no contiguos.

<u>O de otro modo</u>: Observa primero que los dos ángulos externos en el vértice C, figura de arriba, tienen medidas iguales (son ángulos opuestos por el vértice), y por eso, no importa cuál de ellos comparamos con $\angle A$ y $\angle B$. Resulta más fácil comparar $m\angle BCD$ con $m\angle B$ y $m\angle ACE$ con $m\angle A$. Como las demostraciones en ambos casos siguen exactamente el mismo patrón, necesitaremos demostrar solamente uno de ellos.

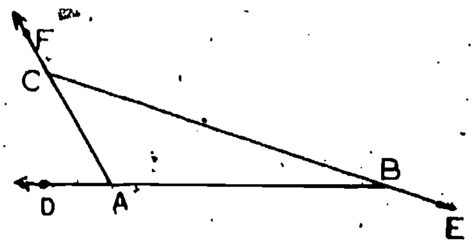
Sea $\triangle ABC$ un triángulo cualquiera. Si C está entre A y D, entonces $m\angle BCD > m\angle B$.



Demostración:

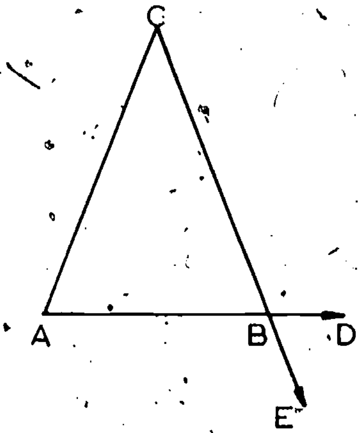
Afirmaciones	Razones
1. Sea E el punto medio de $\overline{BC}$.	1. Por el teorema 2-5, existe tal punto medio.
2. Sea F un punto del rayo opuesto a $\overrightarrow{EA}$, tal que EF = EA.	2. Por el teorema 2-4, existe tal punto.
3. $\angle BEA \cong \angle FEC$	3. Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.
4. $\triangle BEA \cong \triangle CEF$	4. Por las afirmaciones 1, 2, 3 y el postulado L.A.L.
5. $m\angle B = m\angle ECF$	5. Partes correspondientes de triángulos congruentes.
6. $m\angle BCD = m\angle ECF + m\angle FCD$	6. Postulado 13 (El postulado de la adición de ángulos)
7. $m\angle BCD = m\angle B + m\angle FCD$	7. Por las afirmaciones 5 y 6.
8. $m\angle BCD > m\angle B$	8. Por álgebra del paso 7 (Como $m\angle FCD$ es un número positivo, se aplica el ejemplo 6 de la sección 7-2.)

Conjunto de problemas 7-3a



1. a. ¿Cuáles son los ángulos internos no contiguos del ángulo externo ∠ABE de la figura?

   b. ¿De qué ángulo externo son ∠ABC y ∠BAC los internos no contiguos?

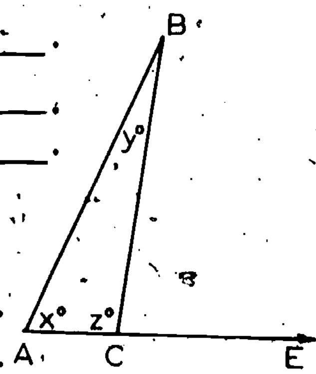


2. a. En la figura, ¿qué ángulos son ángulos externos del triángulo?

   b. ¿Cuál es la relación entre m∠DBC y m∠A? ¿Por qué?

   c. ¿Cuál es la relación entre m∠DBC y m∠C? ¿Por qué?

   d. ¿Cuál es la relación entre m∠DBC y m∠CBA? ¿Por qué?



3. Completa los siguientes enunciados, utilizando la figura:

   a. Si x = 40, y = 30, entonces m∠BCE > ______.

   b. Si x = 72, y = 73, entonces m∠BCE ______.

   c. Si y = 54, z = 68, entonces m∠BCE ______.

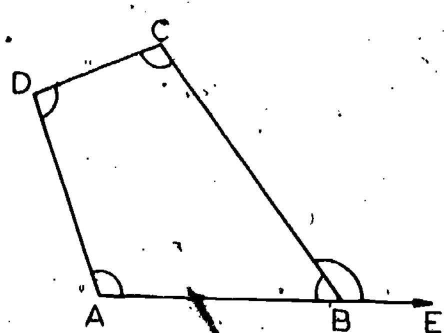
   d. Si m∠BCE = 112, entonces x ______.

   e. Si m∠BCE = 150, entonces z ______.

   f. Si x = 25, z = 90, entonces m∠BCE ______.

   g. Si x = 90, y = 90, entonces m∠BCE ______.

4. La figura de la derecha ilustra esta afirmación: Un ángulo externo de un cuadrilátero es mayor que cada uno de los ángulos internos no contiguos. ¿Es cierta la afirmación? Explícalo.



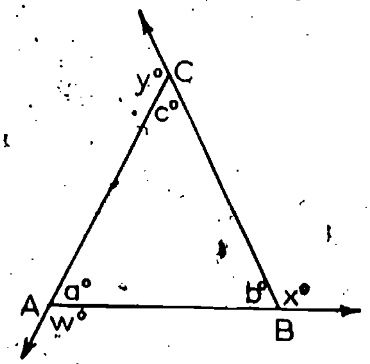
*5. Demuestra el siguiente teorema: La suma de las medidas de dos ángulos cualesquiera de un triángulo es menor de 180.

Dato: El $\triangle ABC$ con medidas de ángulos como en la figura.

Demostrar: $a + b < 180$

$b + c < 180$

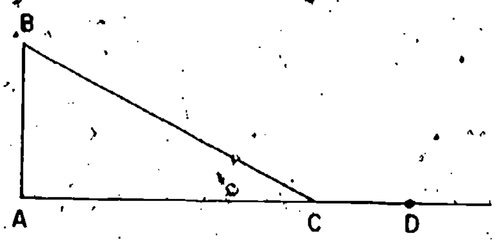
$a + c < 180$



*6. Demuestra el siguiente teorema: Los ángulos en la base de un triángulo isósceles son agudos. (Sugerencia: Fundamenta tu demostración en el enunciado del problema anterior.)

El teorema 7-1, aunque quizás no muy interesante por sí mismo, es de extrema utilidad para demostrar otros teoremas. (Un teorema de este tipo recibe a veces el nombre de <u>lema</u>.) Por ejemplo, el siguiente es un corolario útil:

<u>Corolario 7-1-1</u>. Si un triángulo tiene un ángulo recto, entonces los otros dos ángulos son agudos.



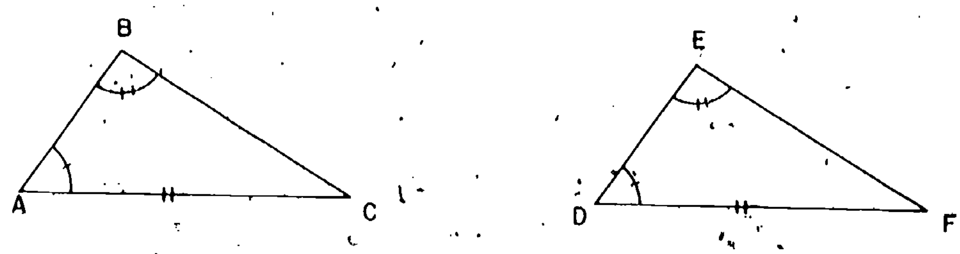
Demostración: Si $m\angle A = 90$, entonces $m\angle BCD > 90$, y, por lo tanto, $m\angle BCA < 90$. De manera análoga, podemos demostrar que $m\angle ABC < 90$.

Usaremos ahora el teorema 7-1 para demostrar dos teoremas más sobre congruencia.

<u>Teorema 7-2</u>. (El teorema L.A.A.) Sea G una correspondencia entre dos triángulos. Si dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos en un triángulo son congruentes con las partes correspondientes del segundo triángulo, entonces la correspondencia G es una congruencia.

O de otro modo: Sea $ABC \longleftrightarrow DEF$ una correspondencia entre dos triángulos. Si

$$\angle A \cong \angle D,$$
$$\angle B \cong \angle E,$$
y
$$\overline{AC} \cong \overline{DF},$$
entonces $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

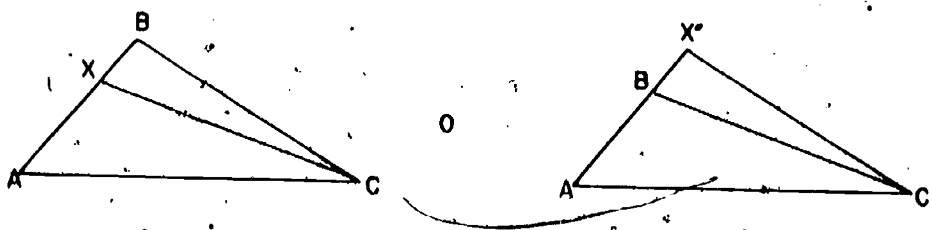


Demostración:

Afirmaciones	Razones
1. Sobre $\overrightarrow{AB}$ tomemos X de manera que $AX = DE$.	1. Teorema de localización de puntos
2. $\triangle AXC \cong \triangle DEF$	2. Postulado L.A.L.
3. $m\angle AXC = m\angle DEF$	3. Definición de congruencia
4. $m\angle AXC = m\angle ABC$	4. Por el paso 3 y la hipótesis dada

Supongamos ahora que X no es el mismo punto que B.

5. O bien X está entre A y B, o B está entre A y X.	5. Por el paso 1 y la definición de rayo



6. En ambos casos, uno de los ángulos $\angle AXC$ y $\angle ABC$ es un ángulo externo del $\triangle BXC$ y el otro es uno interno no contiguo.	6. Definición de ángulo externo y ángulo interno no contiguo
7. $m\angle AXC \neq m\angle ABC$	7. Por el paso 6 y el teorema 7-1
8. $X = B$	8. El paso 7 contradice el paso 4.
9. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$	9. Por los pasos 2 y 8

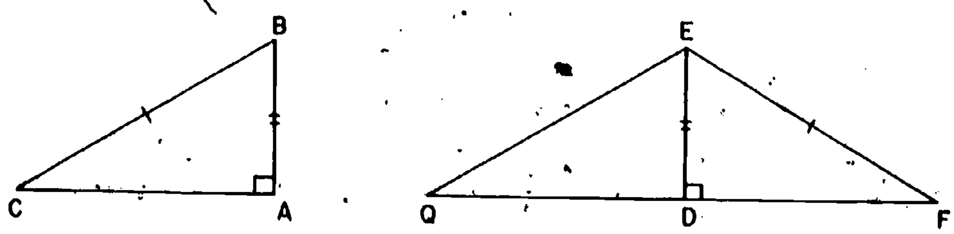
Aunque ya señalamos, al estudiar el postulado L.A.L., que no es posible en general demostrar un teorema L.L.A., hay un caso especial, a saber, el caso en que el ángulo es un ángulo recto, que se deduce del teorema 7-2.

<u>Teorema 7-3</u>. (El teorema de la hipotenusa y el cateto) Sea G una correspondencia entre dos triángulos rectángulos. Si la hipotenusa y un cateto de un triángulo son congruentes con las partes correspondientes del segundo triángulo, entonces la correspondencia G es una congruencia.

<u>O de otro modo</u>: En los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$, sea $m\angle A = m\angle D = 90$. Sea $ABC \longleftrightarrow DEF$ una correspondencia tal que

$$BC = EF, \text{ y } AB = DE.$$

Entonces $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



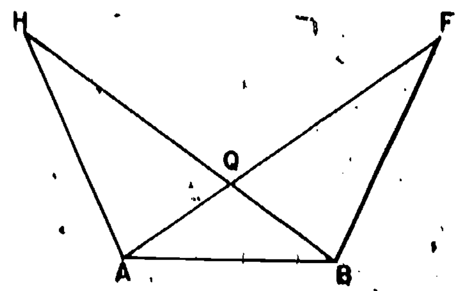
Demostración: Sobre el rayo opuesto a $\overrightarrow{DF}$, tomemos Q de manera que DQ = AC. Entonces $\triangle DEQ \cong \triangle ABC$, por el postulado L.A.L., y así, EQ = BC. El $\triangle EQF$ es, pues, un triángulo isósceles, y, por tanto, $\angle EQD \cong \angle EFD$. En los triángulos $\triangle DEQ$ y $\triangle DEF$ tenemos, pues,

$$\overline{EQ} \cong \overline{EF},\ \angle EQD \cong \angle EFD \ \text{ y } \angle EDQ \cong \angle EDF.$$

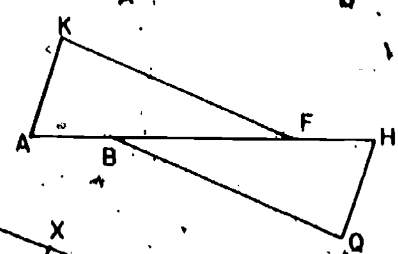
Luego, por el teorema L.A.A., $\triangle DEF \cong \triangle DEQ$. Como ya se estableció que $\triangle DEQ \cong \triangle ABC$, podemos concluir que $\triangle DEF \cong \triangle ABC$. Esto es lo que deseábamos.

Conjunto de problemas 7-3b

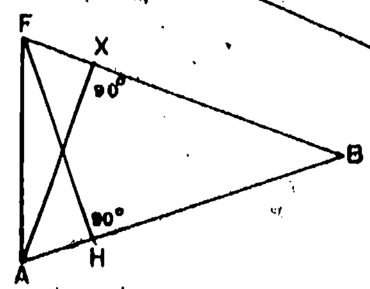
1. Si, en esta figura, AQ = BQ y $\angle H \cong \angle F$, demuestra que FB = HA.



2. Datos: $\overline{AK} \perp \overline{KF}$, $\overline{HQ} \perp \overline{QB}$, AB = HF, AK = HQ. Demuestra que KF = QB.



3. Si en la figura de la derecha AX = FH, demuestra que FB = AB.



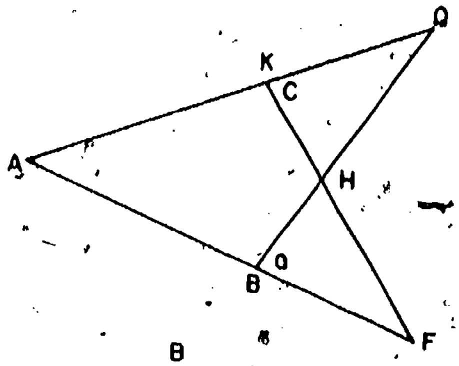
4. Si dos alturas de un triángulo son congruentes, el triángulo es isósceles.

5. En la figura de la derecha,

$$\angle c \cong \angle a,$$

$$AQ = AF.$$

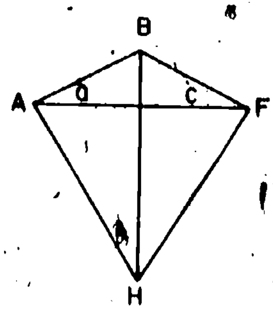
Demuestra que $QB = FK$.



6. En la figura de la derecha,

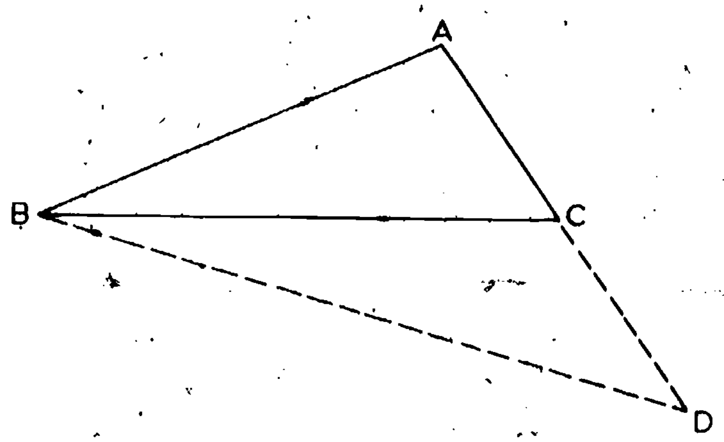
si $\angle a \cong \angle c$, $\overline{AB} \perp \overline{AH}$ y $\overline{FB} \perp \overline{FH}$,

demuestra que $AH = FH$.



Teorema 7-4. Si dos lados de un triángulo no son congruentes, entonces los ángulos opuestos a estos lados no son congruentes, y el ángulo mayor es el opuesto al lado mayor.

O de otro modo: Sea $\triangle ABC$ un triángulo cualquiera. Si $AB > AC$, entonces $m\angle C > m\angle B$.



Demostración: Sea D un punto de $\overrightarrow{AC}$, tal que $AD = AB$. (Por el teorema de la localización de puntos, hay un tal punto.) Como los ángulos en la base de un triángulo isósceles son congruentes, tenemos

(1) $$m\angle ABD = m\angle D.$$

Pero $AD > AC$, ya que $AD = AB$ y $AB > AC$, y, por lo tanto, C está entre A y D, por el teorema 2-1. Por el teorema 6-6, C está en el interior del $\triangle ABD$, y así,

(2) $$m\angle ABD = m\angle ABC + m\angle CBD$$

por el postulado de la adición de ángulos. Como $m\angle CBD > 0$, se deduce que

(3) $$m\angle ABD > m\angle ABC.$$

Por lo tanto,

(4) $m\angle D > m\angle ABC$, según (1) y (3).

Toda vez que $\angle ACB$ es un ángulo externo del $\triangle BCD$, tenemos que

(5) $$m\angle ACB > m\angle D.$$

Por (4) y (5),

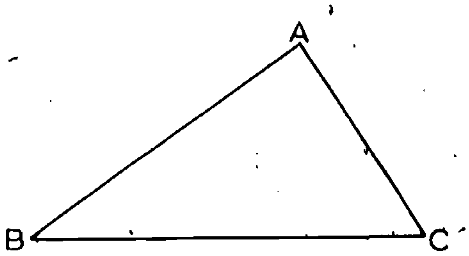
$$m\angle ACB > m\angle ABC,$$

esto es,

$$m\angle C > m\angle B,$$

lo que se quería demostrar.

Teorema 7-5. Si dos ángulos de un triángulo no son congruentes, entonces los lados opuestos a ellos no son congruentes, y el lado mayor es el opuesto al ángulo mayor.



O de otro modo: En cualquier triángulo $\triangle ABC$, si $m\angle C > m\angle B$, entonces $AB > AC$.

Demostración: Queremos demostrar que $AB > AC$. Como AB y AC son números, hay solamente tres posibilidades: (1) $AB = AC$, (2) $AB < AC$, y (3) $AB > AC$. El método a seguirse es mostrar que las dos primeras de estas "posibilidades" son efectivamente imposibles. La posibilidad restante es la (3), y esto significará que el teorema es cierto.

(1) Si $AB = AC$, entonces por el teorema 5-2, sabemos que $\angle B \cong \angle C$; y esto es falso. Por lo tanto, es imposible que $AB = AC$.

(2) Si $AB < AC$, entonces por el teorema 7-4 sabemos que $m\angle C < m\angle B$; y esto es falso. Por lo tanto, es imposible que $AB < AC$.

La única posibilidad restante es $AB > AC$; lo que se quería demostrar.

La demostración del teorema 7-5, tal como la hemos desarrollado, es meramente una manera conveniente de presentar una demostración indirecta. Se pudo haber redactado más formalmente así:

"Supongamos que el teorema 7-5 es falso. Entonces, o bien $AB = AC$ o $AB < AC$. Es imposible que $AB = AC$, porque . . . . Y es imposible que $AB < AC$, porque . . . . Por lo tanto, el teorema 7-5 no es falso".

Sin embargo, la demostración es quizás de más fácil lectura en la forma que ofrecimos primero. Emplearemos el mismo tipo de presentación otras veces. Esto es, haremos una lista de las posibilidades, en una situación dada, y mostraremos luego que todas menos una de estas "posibilidades" son efectivamente imposibles; la conclusión lógica será, pues, que esa posibilidad restante tiene que representar lo que en realidad ocurre.

Como dice Sherlock Holmes en <u>The Adventure of the Blanched Soldier</u>, "ese proceso se basa en el supuesto de que cuando hayas eliminado todo lo que no es posible, entonces lo restante, por improbable que parezca, debe ser la verdad".

Los teoremas 7-4 y 7-5 están relacionados de una manera particular; son teoremas <u>recíprocos</u>, uno del otro. Para obtener uno del otro, intercambiamos la hipótesis y la conclusión. Podemos ilustrar esta relación escribiendo de nuevo los teoremas, así:

<u>Teorema</u> <u>7-4</u>. Sea $\triangle ABC$ un triángulo cualquiera. Si $AB > AC$, entonces $m\angle C > m\angle B$.

<u>Teorema</u> <u>7-5</u>. Sea $\triangle ABC$ un triángulo cualquiera. Si $m\angle C > m\angle B$, entonces $AB > AC$.

Hemos visto muchos pares de teoremas que tienen esa relación. Por ejemplo, demostramos que si un triángulo es isósceles, los ángulos en su base son congruentes; y luego demostramos que si los ángulos en la base de un triángulo son congruentes, el triángulo es entonces isósceles. Cada uno de estos teoremas es el recíproco del otro. También vimos que todo triángulo equilátero es equiángulo, y después demostramos el recíproco, el cual dice que todo triángulo equiángulo es equilátero.

Es muy importante tener en mente que el recíproco de un teorema cierto no es necesariamente cierto. Por ejemplo, el teorema " los ángulos opuestos por el vértice son congruentes" es siempre cierto, pero el recíproco, "los ángulos congruentes son opuestos por el vértice" ciertamente no es verdadero en todos los casos. Si dos triángulos son congruentes, entonces tendrán la misma área, pero si dos triángulos tienen la misma área, no por ello podemos afirmar que sean congruentes. Si $x = -y$, entonces se deduce que $x^2 = y^2$, pero si $x^2 = y^2$, no podemos afirmar que $x = y$. (La otra posibilidad es que $x = -y$.) No hay duda que todo físico es un científico, pero no es cierto que todo científico sea un físico.

Si un teorema y su recíproco son ambos ciertos, se pueden combinar convenientemente en un solo enunciado usando la frase "si y solamente si". Así, al decir:

> "Dos ángulos de un triángulo son congruentes si, y solamente si, los lados opuestos son congruentes;

estamos incluyendo en una afirmación los dos teoremas sobre triángulos isósceles. La primera mitad de la doble afirmación:

> Dos ángulos de un triángulo son congruentes si los lados opuestos son congruentes;

es el teorema 5-2; y la segunda mitad:

> Dos ángulos de un triángulo son congruentes solamente si los lados opuestos son congruentes;

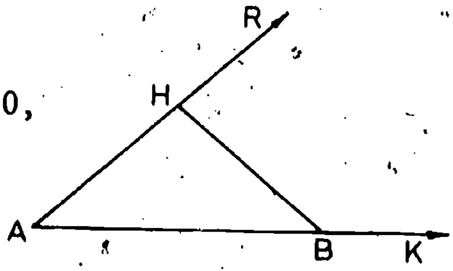
es otra forma de enunciar el teorema 5-5.

Conjunto de problemas 7-3c

1. En el ΔGHK, $GH = 5$, $HK = 14$, $KG = 11$. Nombra el ángulo mayor. Nombra el menor.

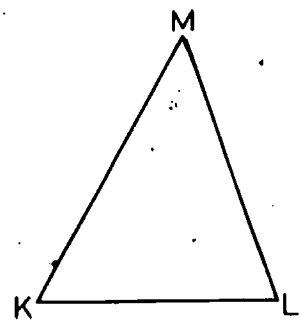
2. En el ΔABC, $m\angle A = 36$, $m\angle B = 74$ y $m\angle C = 70$. ¿Cuál es el lado más largo?; ¿cuál es el más corto?

3. Dada la figura de la derecha con $HA = HB$, $m\angle HBK = 140$, y $m\angle AHB = 100$, llena los siguientes blancos:



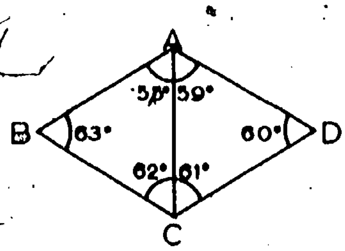
   a. $m\angle A =$ ________.
   b. $m\angle RHB =$ ________.
   c. ______ es el lado más largo del ΔABH.

4. Indica la conclusión a que se puede llegar acerca de la longitud de $\overline{ML}$ en el ΔKLM en cada uno de los siguientes supuestos:

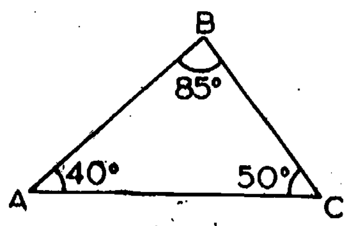


   a. $m\angle K > m\angle M$
   b. $m\angle K < m\angle L$
   c. $m\angle M > m\angle K > m\angle L$
   d. $m\angle M > m\angle L$
   e. $m\angle K > m\angle M$ y $m\angle K > m\angle L$
   f. $m\angle K \geq m\angle L$ y $m\angle M \leq m\angle L$

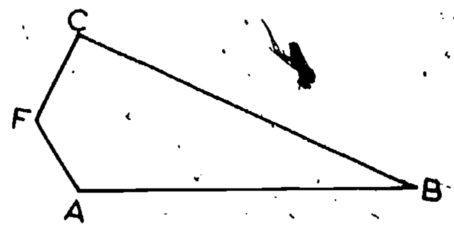
5. Si la figura estuviese dibujada correctamente, ¿qué segmento sería el más largo?



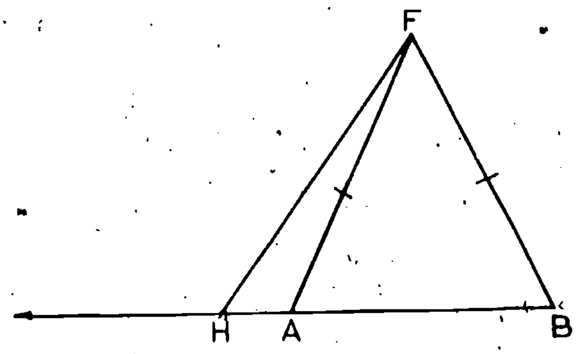
6. Nombra los lados de la figura en orden ascendente de longitud.



7. Si, en la figura, $\overline{AF}$ es el lado más corto y $\overline{CB}$ es el lado más largo, demuestra que $m\angle F > m\angle B$. (Sugerencia: Usa la diagonal $\overline{FB}$.)



*8. Si prolongamos la base de un triángulo isósceles, un segmento que una el vértice del triángulo con cualquier punto en esa prolongación es mayor que uno de los lados congruentes del triángulo.



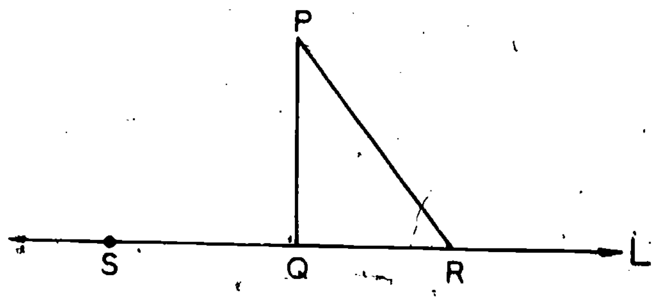
9. Escribe el recíproco de cada enunciado que sigue. Trata de decidir si cada uno de ellos, y también cada recíproco, es cierto o falso.
   a. Si un equipo tiene algún espíritu de lucha, podrá ganar algunos juegos.
   b. Si dos ángulos son rectos, serán congruentes.
   c. Dos ángulos congruentes cualesquiera son suplementarios.
   d. El interior de un ángulo es la intersección de dos semiplanos.
   e. Si Juan tiene escarlatina, está enfermo de cuidado.
   f. Si un hombre vive en Cleveland, Ohio, vive en Ohio.
   g. Si los tres ángulos de un triángulo son congruentes con los ángulos correspondientes de otro triángulo, los triángulos son congruentes.
   h. Si dos ángulos son complementarios, la suma de sus medidas es 90.

10. Cuando se le pidió que diera la recíproca de la proposición, "Si aguanto entre mis dedos un fósforo encendido por mucho tiempo, me quemaré", Juan contestó: "Me quemaré si aguanto entre mis dedos un fósforo encendido por mucho tiempo". ¿Dio en realidad la proposición recíproca? Explícalo.

11. a. ¿Será siempre cierto el recíproco de un enunciado cierto? ¿Qué partes del problema 9 justifican tu respuesta?

    b. ¿Podrá ser cierto el recíproco de un enunciado falso? ¿Qué partes del problema 9 justifican tu respuesta?

<u>Teorema 7-6</u>. El segmento más corto que va desde un punto a una recta es el segmento perpendicular a la recta.



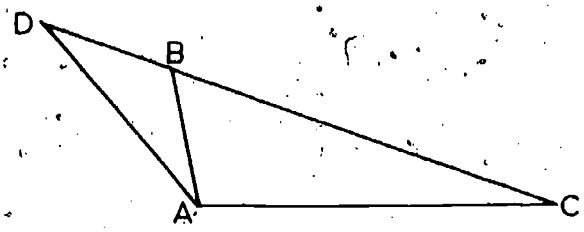
<u>O de otro modo</u>: Sea Q el pie de la perpendicular desde el punto P a la recta L, y sea R cualquier otro punto de L. Entonces $PQ < PR$.

Demostración: Sea S un punto de L, tal que Q esté entre S y R. Entonces $\angle PQS$ es un ángulo externo del $\triangle PQR$. Por lo tanto, $m\angle PQS > m\angle PRQ$. Pero $m\angle PQS = m\angle PQR = 90$, y así, $m\angle PQR > m\angle PRQ$. Del teorema 7-5 se deduce que $PQ < PR$. Esto es lo que se quería demostrar.

<u>Definición</u>. La <u>distancia entre una recta y un punto</u> fuera de ella, es la longitud del segmento perpendicular a la recta desde el punto dado. La distancia entre una recta y un punto en ella, se define como igual a cero.

<u>Teorema 7-7</u>. (La desigualdad del triángulo) La suma de las longitudes de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado.

<u>O de otro modo</u>: En cualquier $\triangle ABC$, tenemos $AB + BC > AC$.



Demostración: Sea D un punto del rayo opuesto a $\overrightarrow{BC}$ tal que $DB = AB$. Como B está entre C y D,

$$DC = DB + BC.$$

Entonces (1) $DC = AB + BC.$

También (2) $m\angle DAB < m\angle DAC$,

porque B está en el interior del $\angle DAC$.

Como el $\triangle DAB$ es isósceles, con $AB = DB$, sabemos, pues, que

$$(3) \quad m\angle ADB = m\angle DAB,$$

Por (2) y (3) tenemos

$$m\angle ADB < m\angle DAC.$$

Aplicando el teorema 7-5 al $\triangle ADC$, vemos que

$$(4) \quad DC > AC.$$

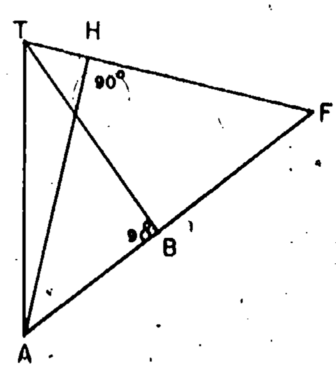
Por (1) y (4) se deduce, pues, que

$$AB + BC > AC,$$

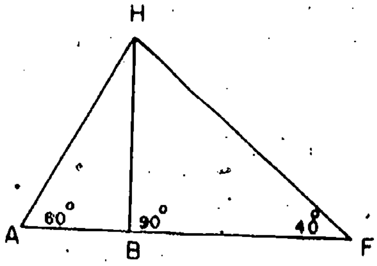
lo que queríamos demostrar.

<u>Conjunto de problemas 7-3d</u>

1. Aquí $AH <$ ____ y $AH <$ ____.
   $BT <$ ____ y $BT <$ ____. Enuncia el teorema correspondiente.



2. Si las medidas de los ángulos son las de la figura, coloca HA, HF y HB en el orden que van en la desigualdad:



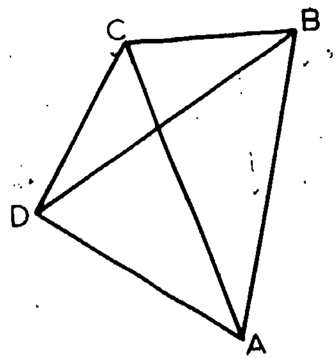
_____ < _____ < _____.

Cita los teoremas en que basas tu conclusión.

3. Suponte que quieres dibujar un triángulo que tenga un lado con longitud igual a 5 y un segundo lado con longitud 8. El tercer lado deberá tener longitud mayor que _____, y menor que _____.

4. Suponte que quieres dibujar un triángulo con un lado de longitud j y un segundo lado de longitud k. Se sabe que $j < k$. Indica, con la máxima eficiencia que te sea posible hacerlo, qué restricciones habrá en relación con la longitud, x, del tercer lado.

5. Demuestra que la suma de las longitudes de las diagonales de este cuadrilátero es menor que la suma de las longitudes de sus lados.

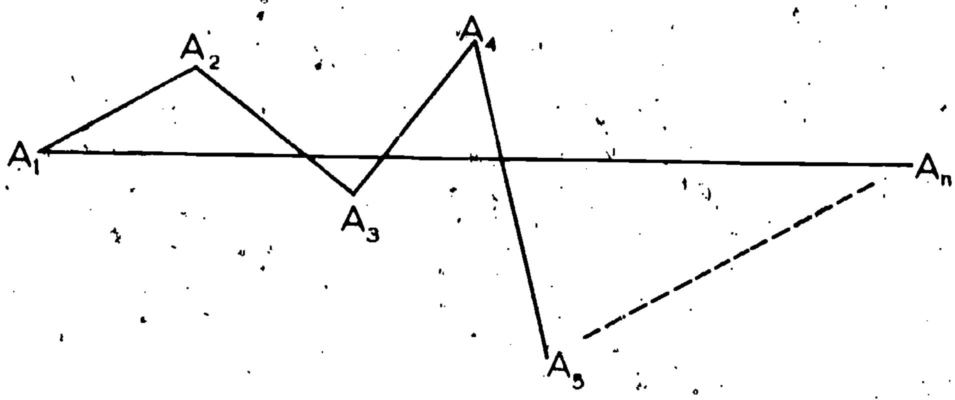


Dato: El cuadrilátero ABCD.

Demostrar: $DB + CA < AB + BC + CD + DA$.

*6. Sean A, B, C, puntos, no necesariamente distintos. Demuestra que $AB + BC \geq AC$ y que $AB + BC = AC$ si, y solamente si, B está en el segmento $\overline{AC}$.

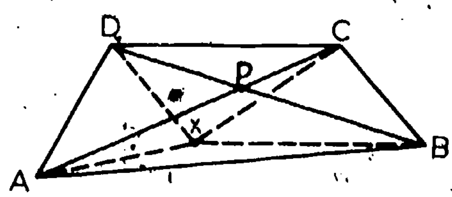
*7. Demuestra que el camino poligonal más corto de un punto a otro es el segmento que los une.



Datos: n puntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$

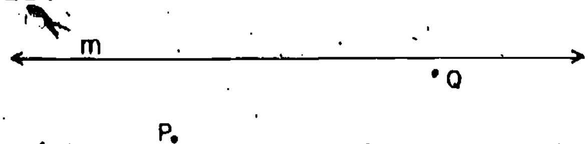
Demostrar: $A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n \geq A_1A_n$

*8. Se dan dos segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ que se cortan en P.



Demuestra que si X es cualquier punto distinto de P, en el plano de ABCD, entonces $XA + XB + XC + XD > PA + PB + PC + PD$. ¿Será cierto ese resultado si X no está en el plano de ABCD?

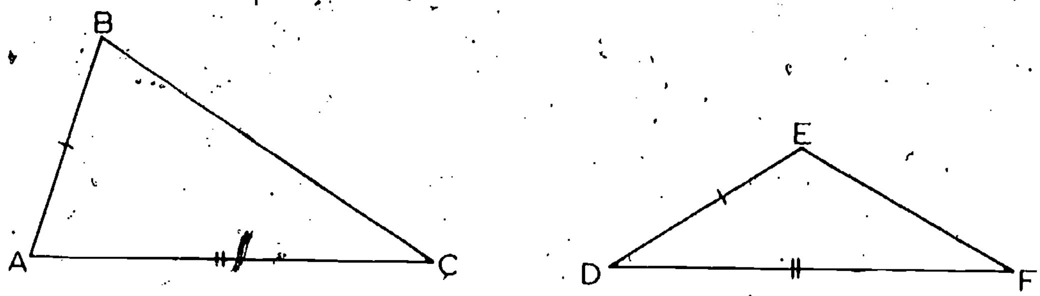
*9. Dada una recta m y dos puntos P, Q al mismo lado de m. Halla el punto R de m para el cual la distancia PR + RQ sea la más pequeña posible.



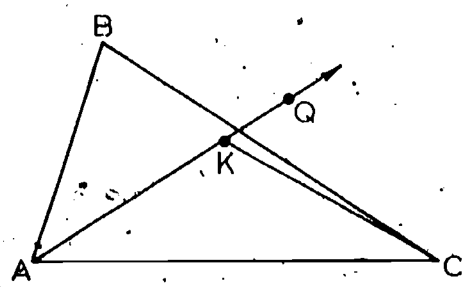
Demostraremos ahora un teorema algo parecido al teorema 7-5, excepto que trata de dos triángulos en vez de uno.

Teorema 7-8. Si dos lados de un triángulo son congruentes respectivamente con dos lados de un segundo triángulo, y el ángulo comprendido en el primer triángulo es mayor que el ángulo comprendido en el segundo, entonces el lado opuesto del primer triángulo es mayor que el lado opuesto del segundo.

<u>O de otro modo</u>: Sean $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ dos triángulos cualesquiera. Si $AB = DE$, $AC = DF$ y $m\angle A > m\angle D$, entonces $BC > EF$.

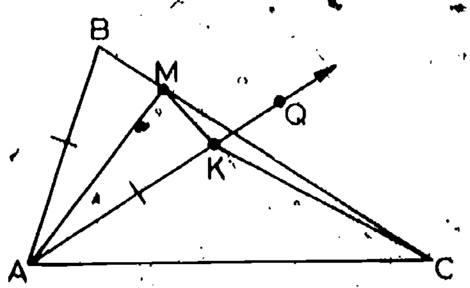


Demostración: Primer paso. Construimos el $\triangle AKC$, con K en el interior del $\angle BAC$, de manera que $\triangle AKC \cong \triangle DEF$, así:



Para ello, utilizamos el postulado de la construcción del ángulo, con el fin de conseguir un rayo $\overrightarrow{AQ}$, con Q al mismo lado de $\overleftrightarrow{AC}$ que B, tal que $\angle QAC \cong \angle D$. Sobre $\overrightarrow{AQ}$ tomamos un punto K tal que $AK = DE$. Por el postulado L.A.L., tenemos ahora que $\triangle AKC \cong \triangle DEF$. Esto es lo deseado.

Segundo paso. Ahora bisecamos el $\angle BAK$. Sea M el punto donde la bisectriz corta a $\overline{BC}$, así:



Las marcas en la figura indican que $AK = AB$, y esto es cierto, porque $AK = DE$ y $DE = AB$.

Ya casi hemos terminado. Por el postulado L.A.L., tenemos que $\Delta ABM \cong \Delta AKM$. Por lo tanto, $MB = MK$. Por el teorema 7-7, sabemos que

$$CK < CM + MK.$$

Luego,

$$CK < CM + MB,$$

porque $MB = MK$. Como $CK = EF$ y $CM + MB = BC$, obtenemos $EF < BC$. Esto es lo que deseábamos.

El recíproco de este teorema también es cierto.

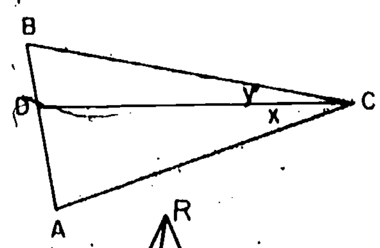
<u>Teorema</u> <u>7-9</u>. Si dos lados de un triángulo son congruentes respectivamente con dos lados de un segundo triángulo, y el tercer lado del primer triángulo es más largo que el tercer lado del segundo, entonces el ángulo comprendido en el primer triángulo es mayor que el ángulo comprendido en el segundo.

La demostración es análoga a la del teorema 7-5, haciendo uso del teorema 7-6 y del teorema L.L.L. para eliminar los dos casos indeseables. El alumno deberá completar los detalles.

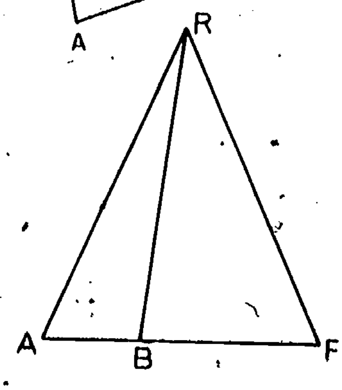
<u>Conjunto de problemas 7-3e</u>

1. Redacta la combinación de los teoremas 7-8 y 7-9 en la forma "si y solamente si".

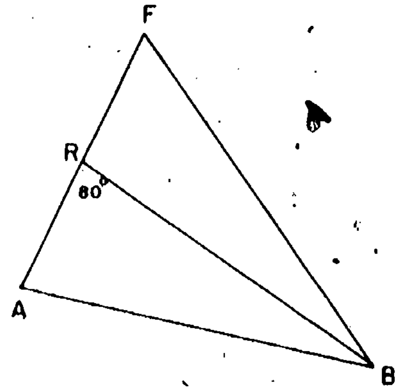
2. En la figura de la derecha, $AC = BC$ y $BD < AD$. Demuestra que $m\angle x > m\angle y$.



3. En el triángulo isósceles RAF, $RA = RF$ y B es un punto sobre $\overline{AF}$ tal que $m\angle ARB < m\angle BRF$. Demuestra que $AB < BF$.

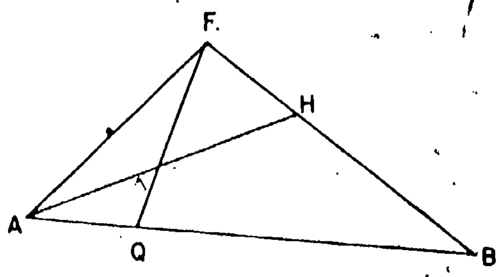


4. Dado el $\triangle ABF$ con la mediana $\overline{RB}$ y $m\angle ARB = 80$. Demuestra que $m\angle A > m\angle F$.



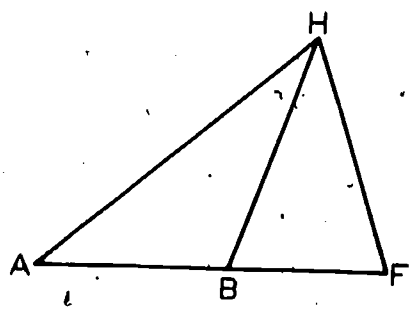
5. En el $\triangle ABC$, $BC > AC$ y Q es el punto medio de $\overline{AB}$. ¿Será $\angle CQA$ obtuso o agudo? Explícalo.

6. En la figura de la derecha, $FH = AQ$ y $AH > FQ$. Demuestra que $AB > FB$.

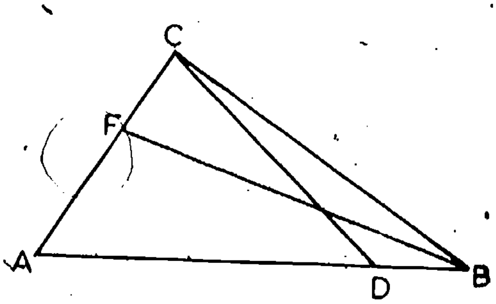


7. Un cuadrilátero no equilátero tiene dos pares de lados adyacentes congruentes. Demuestra que la medida del ángulo comprendido entre los lados menores es mayor que la medida del ángulo entre los lados mayores.

8. Demuestra el siguiente teorema: Si una mediana de un triángulo no es perpendicular al lado correspondiente, entonces las longitudes de los otros dos lados del triángulo son desiguales.

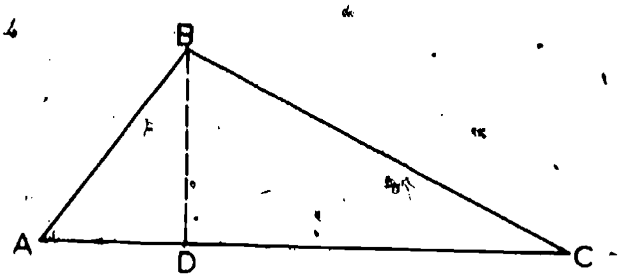


9. Datos: $AB > AC$ y $FC = DB$ en la figura. Demuestra que $FB > CD$.



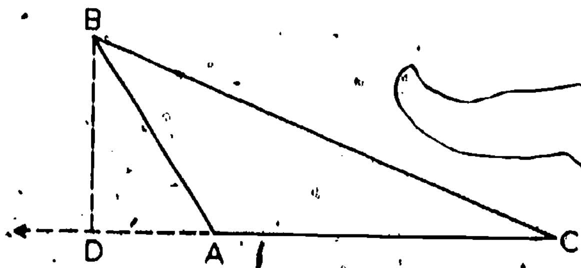
7-4. Alturas

Definición.- Una altura de un triángulo es el segmento perpendicular que une un vértice del triángulo a la recta que contiene el lado opuesto.

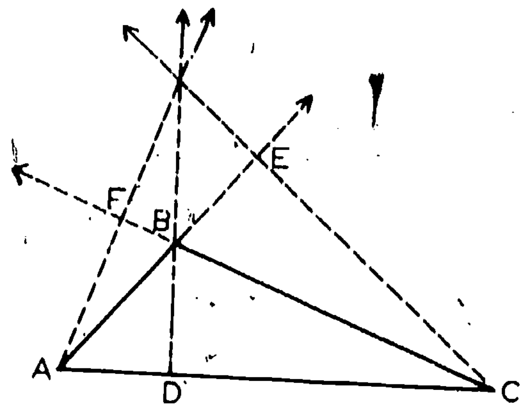


En la figura, llamamos a $\overline{BD}$ la altura desde B a $\overleftrightarrow{AC}$, o sencillamente la altura desde B. (Nota que decimos la altura desde B en vez de una altura desde B, porque el teorema 6-3 nos dice que sólo hay una.)

Notarás que el pie de la perpendicular no cae necesariamente en el lado $\overline{AC}$ del triángulo. La figura puede ser como ésta:



Notarás también que todo triángulo tiene tres alturas, una desde cada uno de los tres vértices, así:



Aquí, $\overline{AF}$ es la altura desde A, $\overline{BD}$ la altura desde B, y $\overline{CE}$ la altura desde C.

Acostumbramos usar la misma palabra "altura" para indicar otros dos conceptos diferentes, aunque relacionados.

(1) El número que es la longitud del segmento perpendicular se llama altura; así, podemos decir: "La altura desde B es 6", queriendo decir $BD = 6$.

(2) La recta que contiene el segmento perpendicular también se llama altura; una propiedad de la figura anterior se puede expresar diciendo que las tres alturas del triángulo se encuentran en un punto. (Esta propiedad es cierta para todos los triángulos y se demostrará en el capítulo 14.)

Este triple uso de la misma palabra pudiera causar confusión, pero generalmente no la causa, ya que casi siempre es fácil decir en cualquier caso particular cuál de los significados se está empleando.

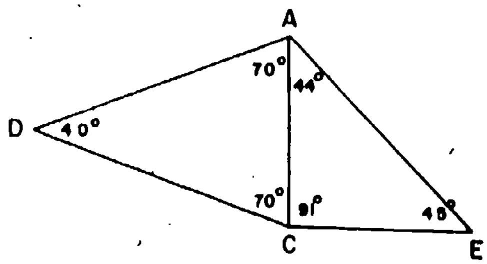
Conjunto de problemas 7-4

1. Define: a. Altura de un triángulo
   b. Mediana de un triángulo
2. Dibuja un triángulo obtusángulo (un triángulo que tiene un ángulo obtuso) y sus tres alturas.

3. En un triángulo equilátero dibujamos una mediana y una altura correspondiente al mismo lado. Compara la longitud de estos dos segmentos.
4. Demuestra que el perímetro de un triángulo es mayor que la suma de las tres alturas.
5. Demuestra el siguiente teorema: Las alturas de un triángulo equilátero son congruentes.

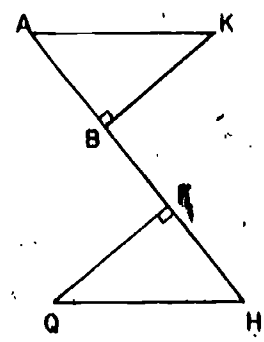
Problemas de repaso

1. Hay tres cables de retenida de igual longitud que se usan para sostener un arbolito recien plantado en un terreno llano. Si se atan los tres al árbol a la misma altura, ¿quedarán fijos al terreno a distancias iguales del pie del árbol? ¿Por qué?
2. Si esta figura estuviese dibujada con precisión, ¿qué segmento de ella sería el más corto? Explica tu razonamiento.



3. Demuestra el siguiente teorema:

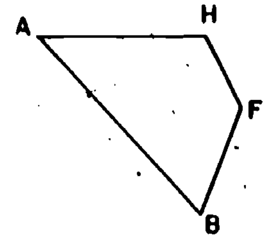
   Si desde un punto en una perpendicular a una recta trazamos dos segmentos oblicuos (no perpendiculares) a ella, aquel que contenga el punto más alejado del pie de la perpendicular será el mayor.
4. En esta figura plana, AK = HQ, AF = HB, $\overline{KB} \perp \overline{AH}$, $\overline{QF} \perp \overline{AH}$. Demuestra que $\angle Q \cong \angle K$. ¿Bisecará $\overline{KQ}$ a $\overline{BF}$?



5. En el $\triangle ABC$, $AC > AB$. Demuestra que cualquier segmento desde A a un punto en $\overline{BC}$ que esté entre B y C es más corto que $\overline{AC}$.
6. Los segmentos dibujados desde un punto en el interior de un triángulo a los tres vértices tienen longitudes r, s, t.

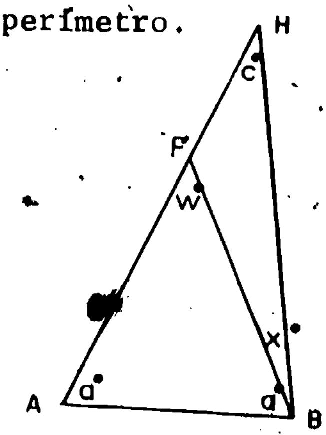
Demuestra que r + s + t es mayor que la mitad del perímetro del triángulo.

7. En esta figura plana, $\overline{FH}$ es el lado más corto y $\overline{AB}$ el más largo. Demuestra que $m\angle F > m\angle A$.



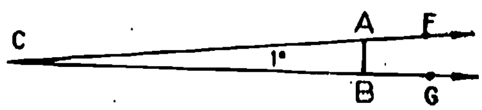
8. Demuestra el siguiente teorema: La longitud del lado más largo de un triángulo es menor que la mitad de su perímetro.

*9. Dado un triángulo isósceles $\triangle ABF$ con $FA = FB$, $AB < AF$, y H sobre $\overleftrightarrow{AF}$, de manera que F esté entre A y H. Demuestra que no hay dos lados del $\triangle ABH$ de igual longitud.



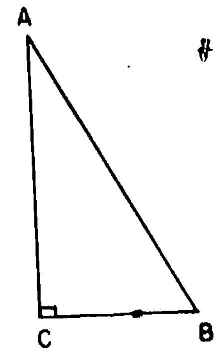
*10. Sobre la base de los supuestos que hemos aceptado, y los teoremas que hemos demostrado en este curso, no podemos hasta ahora demostrar que la suma de las medidas de los tres ángulos de un triángulo es 180 (algo que sabes bien desde hace algún tiempo). Pero, sí podemos fácilmente construir un triángulo y demostrar que la suma de las medidas de los ángulos de <u>este</u> triángulo es menos de 181.

Sea $\angle FCG$ un ángulo con medida 1. (Postulado de la construcción del ángulo.) Sobre $\overrightarrow{CF}$ y $\overrightarrow{CG}$ tomemos puntos A y B tales que CA = CB (Postulado de la localización de puntos). ¿Por qué es la suma de las medidas de los ángulos de este triángulo menos de 181?



*11. La suma de las medidas de los tres ángulos de un triángulo es menor de 270.

*12. En la figura de la derecha, $\angle C$ es un ángulo recto, $m\angle B = 2m\angle A$. Demuestra que $AB = 2CB$. (Sugerencia: Utiliza segmentos auxiliares.)



*13. Demuestra el teorema: La suma de las distancias desde un punto dentro de un triángulo a los extremos de un lado es menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados.

*14. Supongamos que $\overleftrightarrow{AC}$ corta a $\overleftrightarrow{BD}$ en un punto B entre A y C. Desde A y C trazamos perpendiculares a $\overleftrightarrow{BD}$ que la cortan en P y Q, respectivamente. Demuestra que P y Q no están al mismo lado de B.

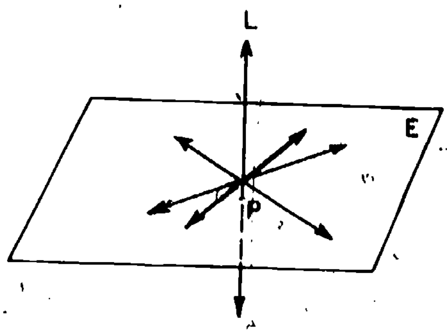
Capítulo 8

RECTAS Y PLANOS PERPENDICULARES EN EL ESPACIO

8-1. Definición fundamental

En este capítulo nos ocuparemos concretamente de propiedades de figuras que no están en un solo plano. Las propiedades fundamentales de esas figuras aparecen enunciadas en los postulados 5b, 6, 7, 8 y 10, y en los teoremas 3-2, 3-3 y 3-4. Te conviene repasarlos ahora.

Definición. Decimos que una recta y un plano son perpendiculares si se cortan y si, además, toda recta en el plano que pase por el punto de intersección es perpendicular a la recta dada.

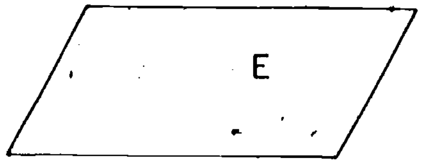


Si la recta L y el plano E son perpendiculares, escribimos $L \perp E$ o $E \perp L$.

En la figura hemos indicado tres rectas en E que pasan por P. Notarás que, en un dibujo en perspectiva, las rectas perpendiculares no tienen necesariamente que verse perpendiculares. Notarás también que si solamente exigimos que E contenga una recta que pase por P y sea perpendicular a L, esto poco significaría; puedes convencerte con facilidad que todo plano que pase por P contiene una recta que pasa por ése punto y es perpendicular a L.

Conjunto de problemas 8-1

1. La figura a la derecha representa el plano E.



   a. ¿Pertenecerán al plano E algunos puntos fuera del cuadrilátero que dibujamos?

   b. ¿Deberemos suponer que E contenga a todo punto fuera del cuadrilátero?

2. a. Dibuja un plano perpendicular a una recta vertical. (V. el apéndice V.).

   b. Dibuja un plano perpendicular a una recta horizontal.

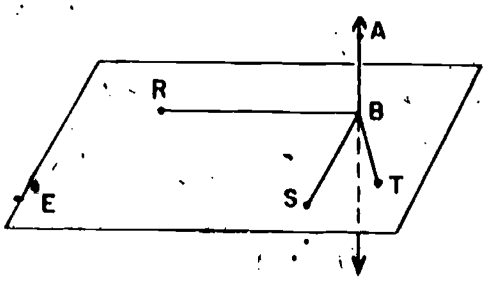
   c. ¿Representará cada uno de tus dibujos una recta perpendicular a un plano?

3. a. Repite el dibujo del problema 2b. Añádele tres rectas en el plano que pasen por el punto de intersección. ¿Qué relación hay entre cada una de las tres rectas y la recta original?

4. Vuelve a leer la definición de perpendicularidad entre una recta y un plano y decide si es cierta al aceptar esa definición, la siguiente afirmación:

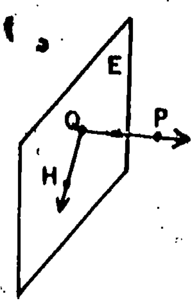
   "Si una recta es perpendicular a un plano, entonces es perpendicular a toda recta que esté en el plano y que pase por el punto de intersección".

5. Dado que B, R, S y T están en el plano E, y que $\overleftrightarrow{AB} \perp E$, indica cuáles de los siguientes ángulos deberán ser rectos:

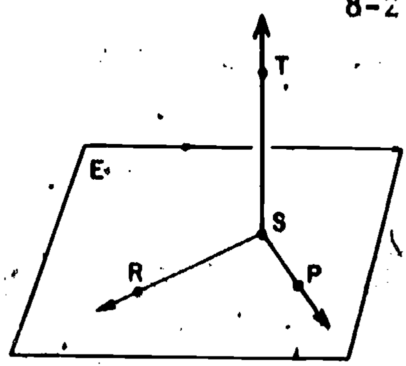


   $\angle ABR$, $\angle ABS$, $\angle RBT$, $\angle TBA$, $\angle SBR$.

6. Si el $\angle PQH$ es recto, y Q y H están en E, ¿deberemos inferir de la definición de perpendicularidad de recta y plano, que $\overleftrightarrow{PQ} \perp E$? ¿Por qué o por qué no?



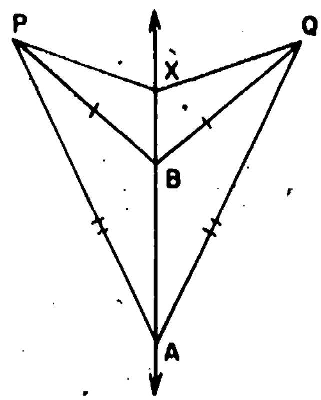
7. En la figura, el plano E contiene los puntos R, S y P, pero no el punto T.



   a. ¿Determinan un plano los puntos R, S y T?
   b. Si $\overrightarrow{SP}$ es perpendicular al plano de R, S y T, ¿qué ángulos de la figura deben ser rectos?

8. a. Si un punto está equidistante de otros dos puntos, ¿estarán los tres puntos en un plano?
   b. Si dos puntos están cada uno equidistante de otros dos puntos, ¿estarán los cuatro en un plano?

*9. a. Datos:



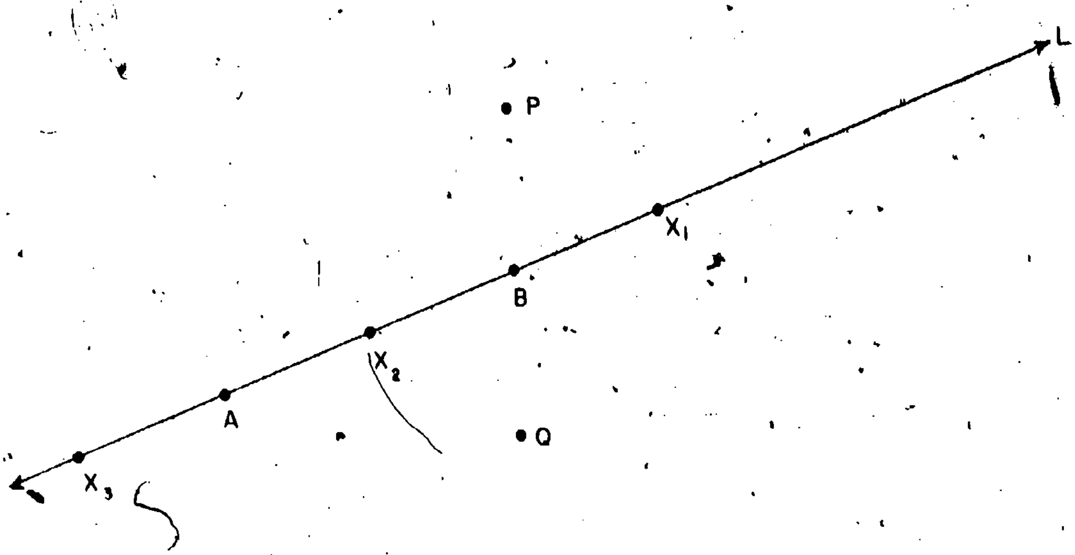
   Los puntos A, B y X están alineados, tal como se indica en la figura; B equidista de P y Q; y A también equidista de P y Q.
   Demuestra que X equidista de P y Q.
   b. ¿Exige la demostración anterior que Q esté en el plano de A, B, X y P?

10. Lee, más adelante en el libro, el teorema 8-1 y prepara un modelo del mismo usando palillos, alambres o pajitas.

8-2. <u>El teorema fundamental</u>

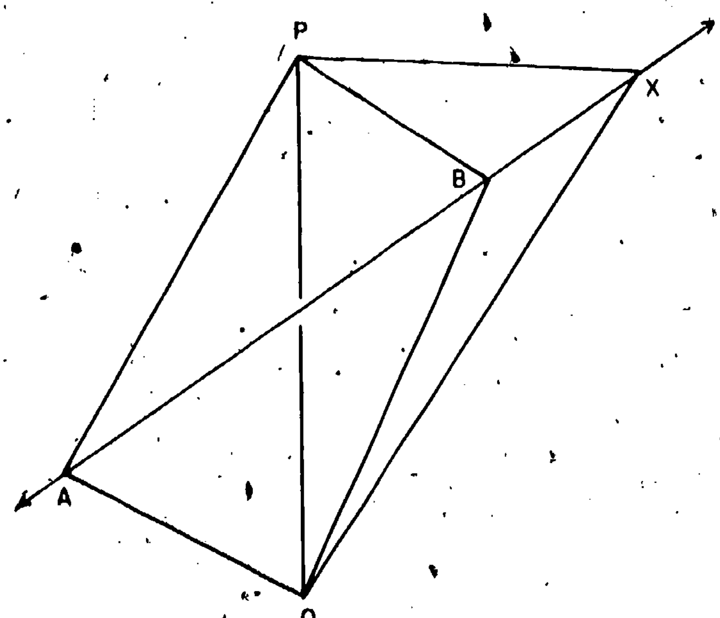
El teorema fundamental sobre perpendicularidad en el espacio dice que si un plano E contiene dos rectas, cada una de ellas perpendicular a una recta L en un mismo punto de L, entonces $L \perp E$. La demostración de esto resulta más fácil si primero demostramos dos teoremas preliminares (lemas).

<u>Teorema 8-1</u>. Si cada uno de dos puntos de una recta está equidistante de dos puntos dados, entonces todo punto de la recta está equidistante de los puntos dados.



De otro modo: Si P y Q son dos puntos y L es una recta tal que A, B son dos puntos de L, equidistante cada uno de ellos de P y Q, entonces todo punto X de L equidista de P y Q. (La figura anterior señala tres posiciones posibles de X. Desde luego, X puede igualmente caer en A o en B.)

Demostración: Consideraremos primero el caso en que X está al mismo lado de A que B. X puede caer en X_1, B o X_2, pero por conveniencia lo mostramos en la figura después de B, en X_1. En este caso $\angle PAB = \angle PAX$ y $\angle QAB = \angle QAX$. Trataremos este caso en tres etapas.

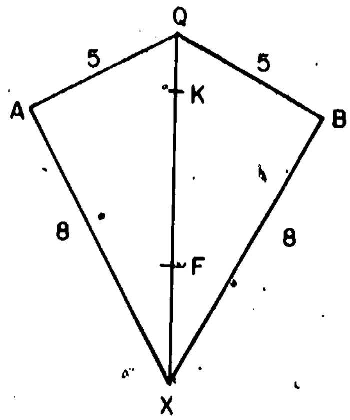


1. Como AP = AQ (dato), BP = BQ (dato), y AB = AB (identidad), $\triangle ABP \cong \triangle ABQ$ (L.L.L.). Por lo tanto, $\angle PAB \cong \angle QAB$.
2. $\angle PAX \cong \angle QAX$. Esto es así porque $\angle PAB \cong \angle QAB$, en virtud de lo anterior. (Estamos considerando el caso en que $\angle PAX = \angle PAB$ y $\angle QAX = \angle QAB$.)
3. Usando el segundo paso y la información de que AP = AQ (dato), y AX = AX (identidad), obtenemos que $\triangle PAX \cong \triangle QAX$ (L.A.L.). Por lo tanto, PX = QX.

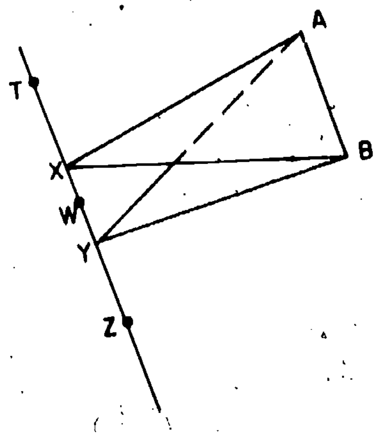
El caso en que X cae sobre el rayo opuesto a $\overrightarrow{AB}$ se demuestra de manera parecida.

<u>Conjunto de problemas 8-2a</u>

1. Un pedazo de papel AXBQ, representado a la derecha, se dobla a lo largo de $\overline{QX}$. Imaginemos que los puntos A y B están ambos al frente de la figura y $\overline{QX}$ al fondo. En estas condiciones, ¿estará un punto K de $\overline{QX}$ equidistante de A y B? Enuncia un teorema para apoyar tu respuesta. Si AF = 6, BF = _______.



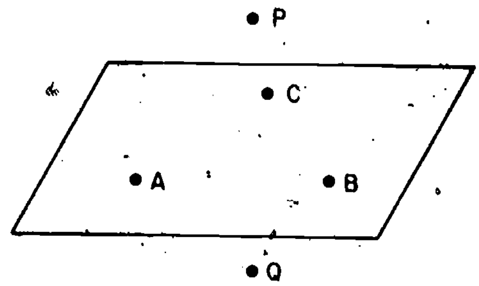
2. Imaginemos ahora el plano AXB que tapa parte del plano AYB. Se da que XA = XB y que YA = YB. Los puntos T, W y Z son otros tres puntos de $\overleftrightarrow{XY}$. ¿Será TA = TB?; ¿y WA = WB?; ¿ZA = ZB? Enuncia un teorema que fundamente tu conclusión.



<u>Teorema</u> <u>8-2</u>. Si cada uno de tres puntos no alineados de un plano equidista de dos puntos, entonces todo punto del plano equidista de estos dos puntos.

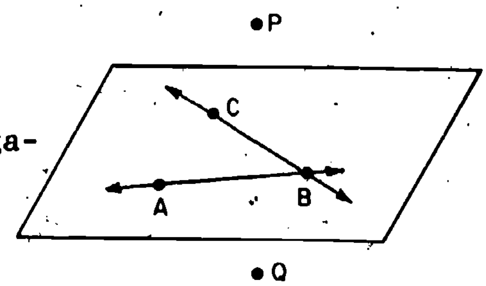
Datos: Tres puntos A, B y C no alineados, cada uno de ellos equidistante de P y Q.

Demostrar: Todo punto del plano determinado por A, B y C equidista de P y Q.

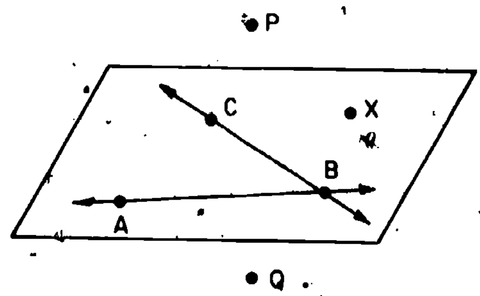


Demostración: La demostración se desarrolla en tres etapas.

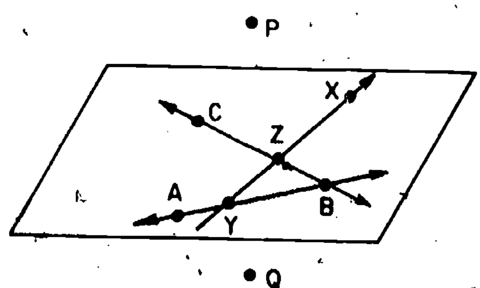
1. Como A y B se dan equidistantes cada uno de P y Q, <u>todo</u> punto de $\overleftrightarrow{AB}$ equidista de P y Q. Esto es así por el teorema 8-1. Análogamente, todo punto de $\overleftrightarrow{BC}$ equidista de P y Q.



2. Sea X cualquier otro punto del plano. Si X está en $\overleftrightarrow{AB}$ o en $\overleftrightarrow{CB}$, X equidista de P y Q, por el caso anterior. Si X está a un lado de $\overleftrightarrow{BC}$, escoge Y, otro punto de $\overleftrightarrow{AB}$ al otro lado de $\overleftrightarrow{CB}$. El postulado de separación del plano nos asegura que tal punto Y existe y que $\overleftrightarrow{XY}$ cortará a $\overleftrightarrow{CB}$ en algún punto Z.



3. Como Z está en $\overleftrightarrow{CB}$, equidista de P y Q, por el primer paso. Puesto que Y está en $\overleftrightarrow{AB}$, equidistará de P y Q, también por el primer paso. Por lo tanto, en virtud del teorema 8-1, todo punto de $\overleftrightarrow{YZ}$ equidistará de P y Q. X es uno de estos puntos.

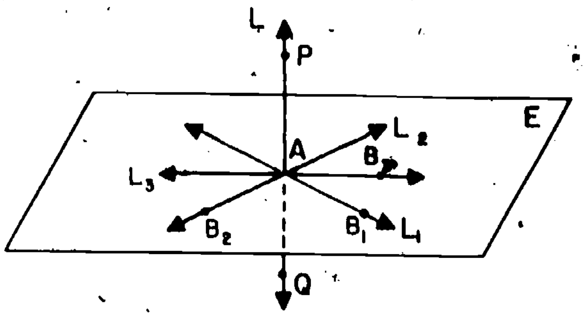


Como hemos demostrado que todo punto X del plano determinado por A, B y C equidista de P y Q, queda establecido el teorema 8-2.

Ahora estamos listos para demostrar el teorema fundamental.

Teorema 8-3. Si una recta es perpendicular a cada una de dos rectas que se cortan, en su punto de intersección, entonces es perpendicular al plano de esas rectas.

De otro modo: Sean L_1 y L_2 dos rectas en el plano E que se cortan en A, y sea L una recta que pasa por A, perpendicular a L_1 y L_2. Entonces cualquier recta L_3 en E que pasa por A es perpendicular a L.



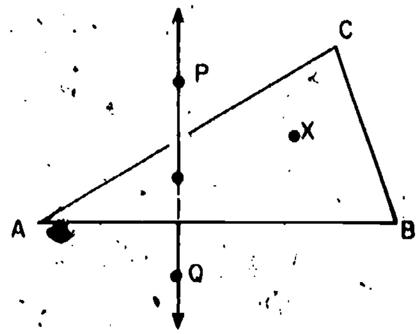
Demostración:

Afirmaciones	Razones
1. Sea P un punto de L, B_1 un punto de L_1, B_2 un punto de L_2 y B_3 un punto de L_3, ninguno de estos puntos coincidente con A.	1. Por el postulado de la regla, cada una de estas rectas tiene infinitos puntos.
2. Sea Q el punto en el rayo opuesto a $\overrightarrow{AP}$ tal que AQ = AP.	2. Teorema de localización de puntos
3. En el plano que contiene a L y L_1, L_1 es la mediatriz de $\overline{PQ}$.	3. Definición de mediatriz (sección 6-3)
4. B_1 equidista de P y Q.	4. Teorema 6-2
5. B_2 equidista de P y Q.	5. Análoga a las de 3 y 4
6. A equidista de P y Q.	6. Por el paso 2

7. B_3 equidista de P y Q.	7. Por los pasos 4, 5 y 6, y el teorema 8-2
8. En el plano que contiene a L y L_3, L_3 es la mediatriz de $\overline{PQ}$.	8. Teorema 6-2
9. $L \perp L_3$	9. Definición de mediatriz
10. $L \perp E$	10. Definición de perpendicularid de recta y plano, ya que L_3 es <u>cualquier</u> recta en E que pase por A

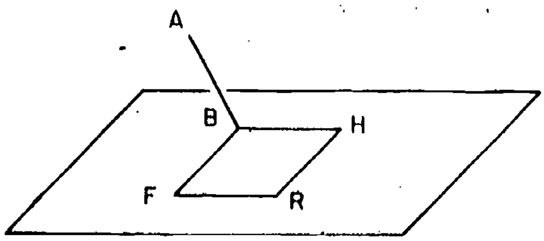
<u>Conjunto de problemas 8-2b</u>

1. Supongamos que cada uno de los puntos A, B, C es equidistante de P y Q. Explica, en términos de una definición o teorema, por qué todo punto X del plano ABC equidista de P y Q.



2. Explica la relación que hay entre L, la recta de intersección de dos paredes de tu salón de clase, y el plano del piso. ¿Cuántas rectas perpendiculares a L podemos trazar en el piso? ¿Será L perpendicular a toda recta que se pueda trazar en el piso?

3.

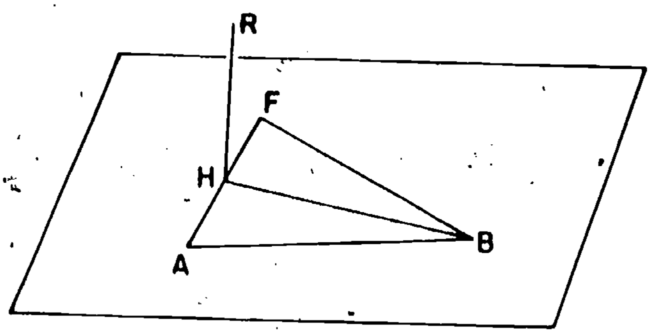


La figura FRHB es un cuadrado. $\overline{AB} \perp \overline{FB}$. A no está en el plano FRHB.

a. ¿Cuántos planos están determinados por los pares de segmentos en la figura? Nómbralos.

b. Por lo menos uno de los segmentos de la figura es perpendicular a uno de los planos mencionados en la pregunta anterior. ¿Cuál es el segmento? ¿Y el plano? Para un enfoque sistemático de tal problema, considera cada par de segmentos perpendiculares que veas en la figura. Después puedes observar si tienes una recta perpendicular a dos rectas que se cortan.

4.

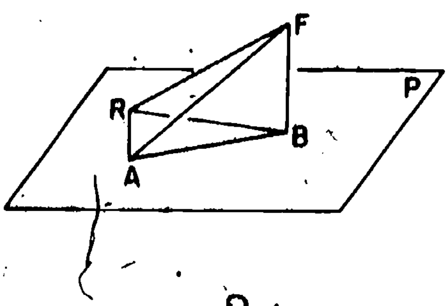


El $\triangle ABF$ es isósceles y B es su vértice, AH = FH, y $\overline{RH} \perp \overline{HB}$. R no está en el plano AFB.

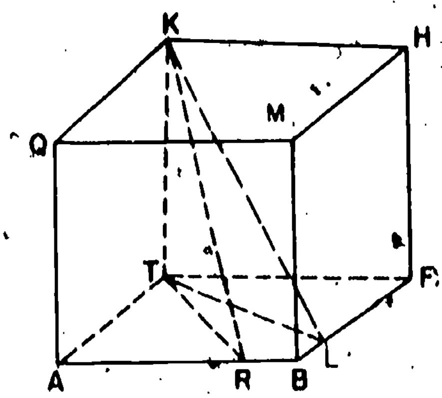
a. ¿Cuántos planos diferentes están determinados por los segmentos de la figura? Nómbralos.

b. ¿Hay un segmento que sea perpendicular a un plano? En tal caso, indica cuál es el segmento y cuál es el plano y demuestra tu respuesta.

5. En esta figura, $\overline{FB} \perp$ plano P, y en el $\triangle RAB$, que está en el plano P, BR = BA. Demuestra que $\triangle ABF \cong \triangle RBF$ y $\angle FAR \cong \angle FRA$.



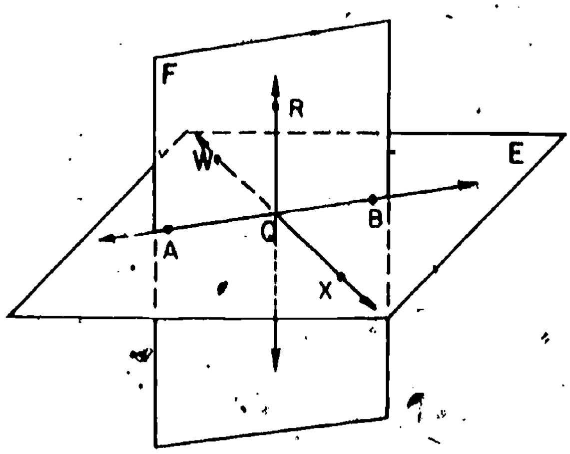
*6. Se da el cubo de la figura siguiente, con BR = BL. ¿Será KR = KL? Demuestra que tu contestación es correcta.



(Toda vez que no hemos dado todavía una definición precisa de un cubo, enunciamos ahora, para que las uses en tu demostración, las propiedades esenciales de las aristas de un cubo:

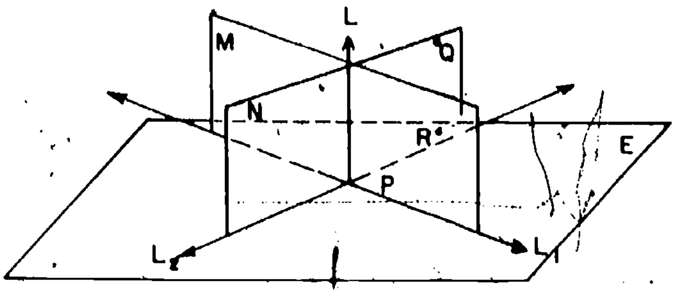
Las aristas de un cubo son doce segmentos congruentes, dispuestos según se indica en la figura, y tales que dos cualesquiera de ellos que se cortan son perpendiculares.)

7. En la figura que sigue, $\overleftrightarrow{WX}$ es una recta en el plano E. El plano F $\perp \overleftrightarrow{WX}$ en el punto Q. En el plano F, $\overleftrightarrow{RQ} \perp \overleftrightarrow{AB}$. $\overleftrightarrow{AB}$ es la intersección de E y F. Demuestra que $\overleftrightarrow{RQ} \perp$ E.



Por lo que sabemos hasta ahora, las condiciones especificadas en la definición de recta y plano perpendiculares pueden ser imposibles de lograr. Para estar seguros, necesitamos un teorema de existencia. El próximo teorema nos permite ver que no estamos hablando de cosas que no pueden existir al referirnos a perpendicularidad entre rectas y planos.

Teorema 8-4. Por un punto en una recta dada pasa un plano perpendicular a la recta.



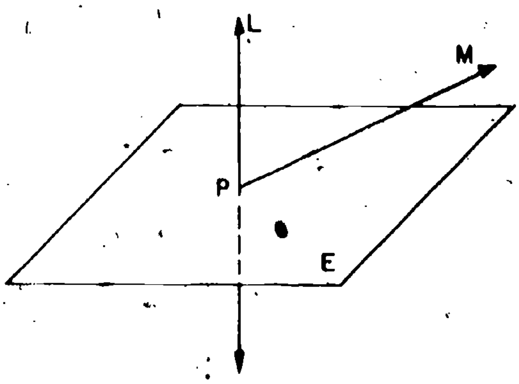
Demostración: Sea P un punto en la recta L. Demostraremos en seis etapas que hay un plano E que pasa por P y es perpendicular a L.

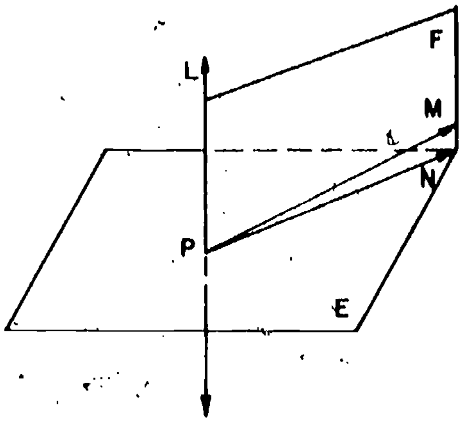
1. Sea R un punto que no está en L. La existencia de tal punto se deduce del postulado 5a.
2. Sea M el plano determinado por L y R. El teorema 3-3 nos dice que existe tal plano.
3. Sea Q un punto que no está en M. El postulado 5b nos asegura que existe tal punto.
4. Sea N el plano determinado por L y Q.
5. En el plano M hay una recta L_1 perpendicular a L en P (teorema 6-1), y en el plano N hay una recta L_2 perpendicular a L en P.
6. Por el teorema 8-3, el plano E determinado por L_1 y L_2 es perpendicular a L en P.

Si $E \perp L$ en P, entonces toda recta en E que pase por P es perpendicular a L, por definición. ¿Podría haber rectas que no estén en E, pero que sean perpendiculares a L en P? El teorema siguiente dice: "No".

Teorema 8-5. Si una recta y un plano son perpendiculares, entonces el plano contiene todas las rectas perpendiculares a la recta dada en su punto de intersección con el plano dado.

O de otro modo: Si la recta L es perpendicular al plano E en el punto P, y si M es una recta perpendicular a L en P, entonces M está en E.





Demostración: Afirmaciones	Razones
1. L y M determinan un plano F.	1. Teorema 3-4
2. Los planos F y E se cortan en una recta N.	2. Postulado 8
3. $N \perp L$	3. Definición de perpendicularidad de recta y plano
4. $M \perp L$	4. Dato
5. $M = N$ (Esto significa que M y N son la misma recta).	5. M y N están ambas en el plano F, por los pasos 1 y 2; son ambas $\perp L$, por los pasos 3 y 4; pero el teorema 6-1 dice que hay una sola perpendicular.
6. M está en E.	6. $M = N$, por el paso 5, y N está en E, por el paso 2.

Este teorema nos permite demostrar el teorema de unicidad que va con el teorema 8-4.

Teorema 8-6. Por un punto en una recta dada hay a lo más un plano perpendicular a la recta.

Demostración: Puesto que un plano perpendicular contiene todas las rectas perpendiculares que pasan por el punto, y como dos planos diferentes tienen solamente una recta común (teorema 3-4), no puede haber dos planos perpendiculares a la recta en el punto.

Lo mismo que en el plano, donde el teorema 6-2 de caracterización se deducía del teorema 6-1 de existencia y unicidad, ahora podemos demostrar un teorema de caracterización análogo para el espacio.

Teorema 8-7. El plano perpendicular que biseca a un segmento es el conjunto de todos los puntos equidistantes de los extremos del segmento. Notarás que este teorema, al igual que el teorema 6-2, tiene dos partes.

O de otro modo: Sea E el plano bisecante perpendicular, o plano mediatriz, de $\overline{AB}$. Sea C el punto medio de $\overline{AB}$. Luego

(1) Si P está en E, entonces PA = PB, y

(2) Si PA = PB, entonces P está en E.

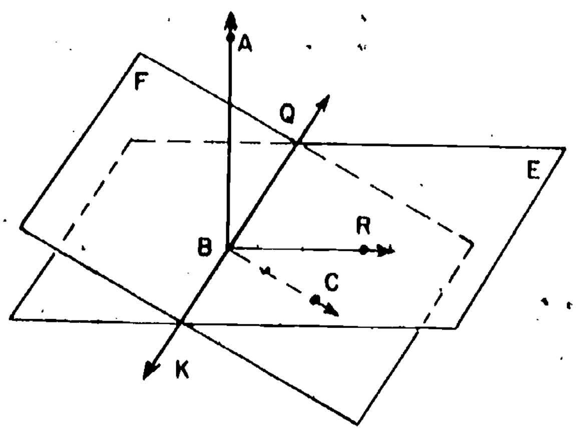
La demostración se deja al alumno.

Conjunto de problemas 8-2c

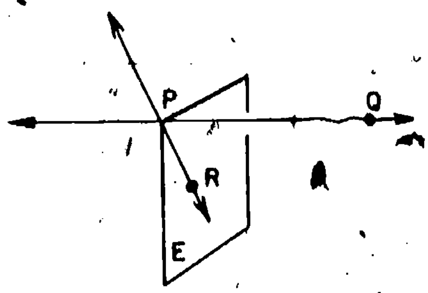
1. a. ¿Cuántas rectas que pasan por un punto de una recta dada son perpendiculares a esa recta?

   b. ¿Cuántos planos que pasan por un punto de una recta dada son perpendiculares a la recta?

2. Los planos E y F se cortan en $\overleftrightarrow{KQ}$, según aparece en la figura. $\overleftrightarrow{AB} \perp E$. $\overrightarrow{BR}$ está en el plano E. El plano ABR corta a F en $\overleftrightarrow{BC}$.
   ¿Es $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BR}$?
   ¿Es $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{KQ}$?
   ¿Es $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$?



3. Si $\overleftrightarrow{QP} \perp E$ en P y $\overleftrightarrow{QP} \perp \overleftrightarrow{PR}$, ¿cómo sabemos que $\overleftrightarrow{PR}$ está en E?



4. Suponiendo que

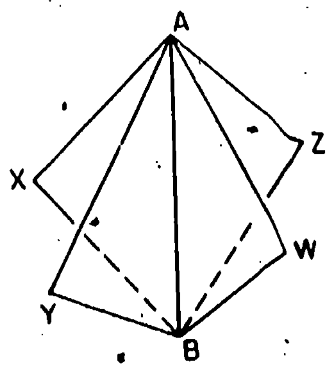
$AX = BX$,

$AY = BY$,

$AW = BW$,

$AZ = BZ$,

¿por qué están W, X, Y y Z en un mismo plano?



5. El plano E es el plano mediatriz de $\overline{AB}$, según muestra la figura.

a. $\overline{AW} \cong$ ________

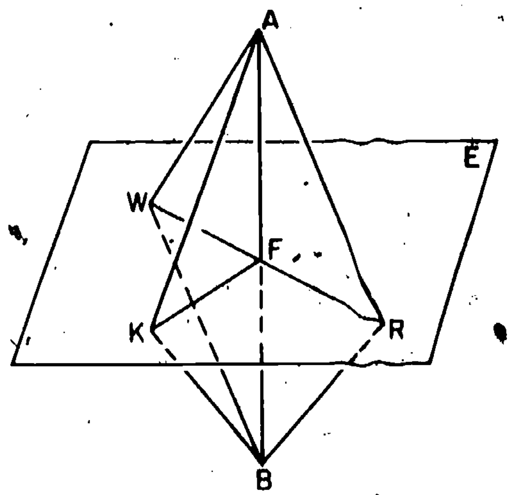
$\overline{AK} \cong$ ________

$\overline{AR} \cong$ ________

$m\angle AFW =$ ________

$\angle AKF \cong$ ________

b. ¿Será $FW = FK = FR$? Explícalo.

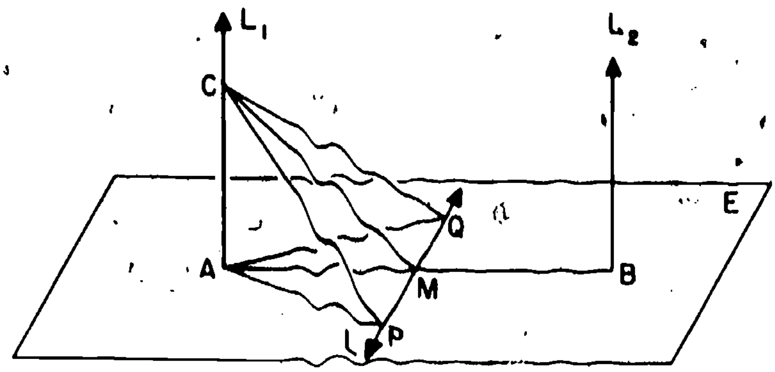


*6. Demuestra este teorema: Si L es una recta que corta al plano E en el punto M, hay al menos una recta L' en E tal que $L' \perp L$.

El próximo teorema es un lema útil para demostrar futuros teoremas.

<u>Teorema 8-8</u>. Dos rectas perpendiculares al mismo plano están en un mismo plano.

Demostración: Sean L_1 y L_2 rectas perpendiculares al plano E en los puntos A y B, respectivamente. Sea M el punto medio de $\overline{AB}$, sea L la recta en E que es mediatriz de $\overline{AB}$, y sean P y Q dos puntos en L tales que $PM = QM$. Sea C un punto en L_1 distinto de A.



1. Por el postulado L.A.L., $\Delta AMP \cong \Delta AMQ$, y, por tanto, $AP = AQ$.
2. Como $L_1 \perp E$, $\angle CAP$ y $\angle CAQ$ son rectos, y por el postulado L.A.L., $\Delta CAP \cong \Delta CAQ$, de manera que $CP = CQ$.
3. De $AP = AQ$ y $CP = CQ$ se deduce, por el teorema 8-7, que C y A están ambos en E', el plano mediatriz de $\overline{PQ}$. Por tanto, L_1 está en E'.
4. Exactamente de la misma manera demostramos que L_2 está en E'. Por lo tanto, L_1 y L_2 están en un mismo plano.

8-3. Teoremas de existencia y unicidad

Los siguientes teoremas abarcan todas las relaciones posibles entre un punto, una recta y un plano perpendicular. Los enunciamos aquí a fin de completar la exposición y para facilitar futuras referencias.

Teorema 8-9. Por un punto dado pasa un plano y solamente uno, perpendicular a una recta dada.

Teorema 8-10. Por un punto dado pasa una recta y solamente una, perpendicular a un plano dado.

La demostración de cada uno de estos teoremas presenta dos casos, dependiendo de si el punto dado está o no en la recta o plano dados, y cada caso tiene dos partes, una para demostrar la existencia y otra para demostrar la unicidad. Esto hace un total de ocho demostraciones. Los teoremas 8-4 y 8-6 son dos de estas ocho; las restantes seis, algunas de las cuales son difíciles y otras fáciles, aparecen en el apéndice VI.

El teorema 8-10 nos asegura la existencia de una perpendicular única desde un punto externo a un plano dado. Por lo tanto, está justificado el elegir la siguiente definición, análoga a la que siguió al teorema 7-6.

<u>Definición</u>. La <u>distancia</u> a un plano desde un punto fuera del mismo es la longitud del segmento perpendicular del punto al plano.

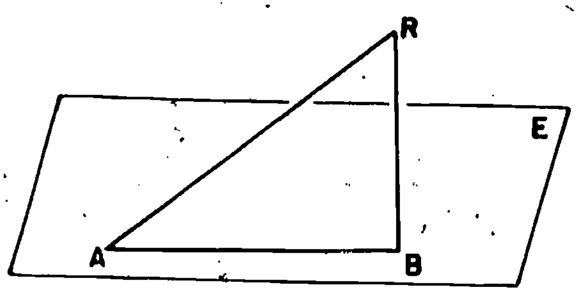
<u>Teorema</u> <u>8-11</u>. El segmento más corto a un plano desde un punto fuera del plano es el segmento perpendicular.

La demostración es análoga a la del teorema 7-6.

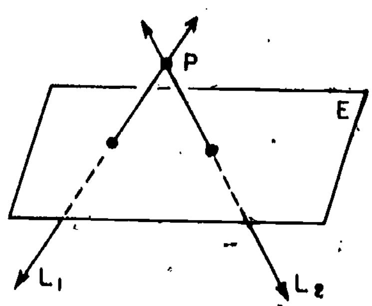
<u>Problemas</u> <u>de</u> <u>repaso</u>

1. Determina si cada una de las siguientes afirmaciones es cierta o falsa, haciendo un dibujo como ayuda si fuese necesario :
   a. La intersección de dos planos puede ser un segmento.
   b. Si una recta interseca a un plano en un solo punto, hay por lo menos dos rectas en el plano perpendiculares a ella.
   c. Para cuatro puntos cualesquiera, hay un plano que los contiene.
   d. Si tres rectas se intersecan dos a dos, pero no hay un punto común a las tres, las rectas están en un plano.
   e. Es posible que tres rectas se intersequen en un punto de manera que cada una de ellas sea perpendicular a las otras dos.
   f. Podemos trazar solamente una recta perpendicular a una recta dada en un punto dado.
   g. En un punto de un plano hay solamente una recta perpendicular al plano.
   h. El número máximo de regiones en que tres planos separan al espacio es ocho.

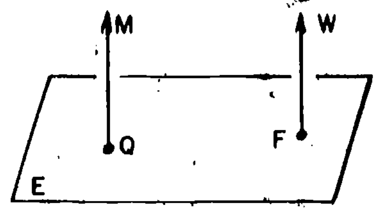
2. Desde un punto R fuera del plano E, $\overline{RB} \perp E$ y $\overline{RB}$ corta al plano en B. $\overline{RA}$ es cualquier otro segmento desde R que corta a E en A. Compara las longitudes de $\overline{AR}$ y $\overline{RB}$. Compara las medidas de $\angle A$ y $\angle B$.



3. Si los postes de gol en un extremo de un campo de fútbol son perpendiculares al terreno, entonces estarán en un plano sin necesidad de que los sujetemos por una abrazadera. ¿Qué teorema apoya esa conclusión? ¿Podrán los postes estar aún en un plano, aunque no sean perpendiculares al terreno? ¿Podrían no estar en un plano aun cuando estuvieran sujetos por una abrazadera?
4. Determina si habrá siempre:
   a. dos rectas perpendiculares a una recta dada en un punto dado de la recta.
   b. dos planos perpendiculares a una recta dada en un punto dado de la recta.
   c. dos rectas perpendiculares a un plano dado en un punto dado del plano.
   d. dos planos perpendiculares a una recta dada.
   e. dos rectas que se corten y sea cada una de ellas perpendicular a un plano dado.
5. Podemos demostrar que es falso el supuesto de que dos rectas L_1 y L_2 sean perpendiculares al plano E y además se corten en un punto P que no está en el plano E, probando que tal supuesto conduce a una contradicción con un teorema acerca de figuras en el

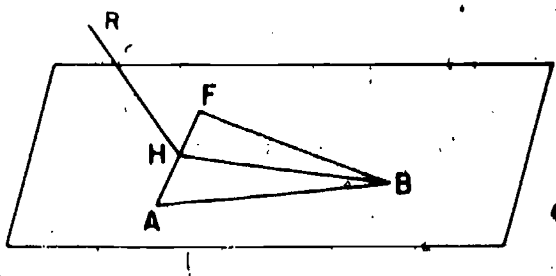


plano. ¿De qué teorema se trata?



6. Dado $\overleftrightarrow{MQ} \perp$ plano E, y $\overleftrightarrow{WF} \perp$ plano E. ¿Cuántos planos diferentes quedan determinados por $\overleftrightarrow{MQ}$, $\overleftrightarrow{MW}$, $\overleftrightarrow{WF}$ y $\overleftrightarrow{QF}$? Explícalo.

7.

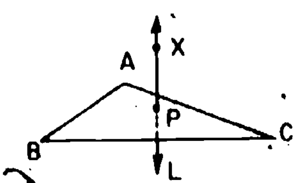


El $\triangle ABF$ es isósceles y tiene su vértice en B, HF = HA, y $\overline{RH} \perp \overline{AF}$. R no está en el plano AFB.

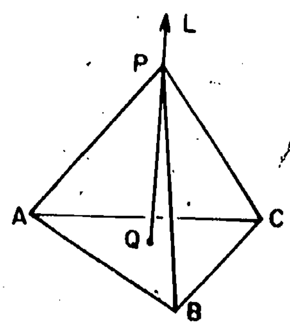
a. ¿Cuántos planos diferentes quedan determinados por los segmentos de la figura? Explícalo.

b. Localiza y describe una recta que sea perpendicular a un plano.

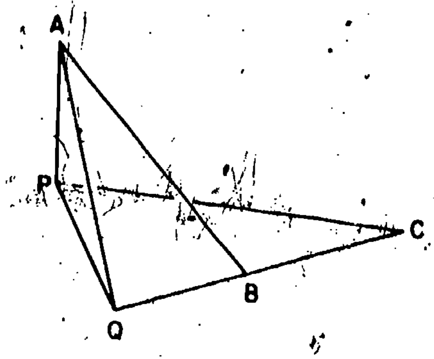
8. Datos: P está en el plano E que contiene a A, B, C; P equidista de A, B, C; la recta $L \perp E$ en P.
Demostrar: Todo punto X en L equidista de A, B, C.



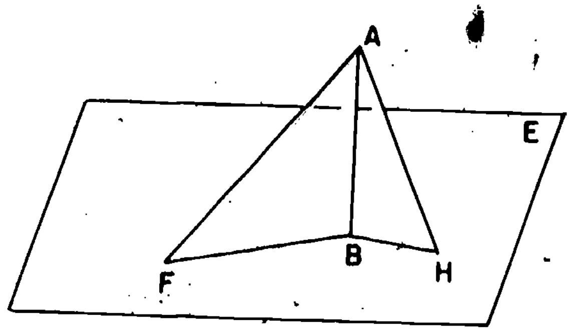
9. Datos: La recta $L \perp$ plano ABC en Q; el punto P de L equidista de A, B, C.
Demostrar: Todo punto de L equidista de A, B, C.
(Sugerencia: Considera cualquier punto $X \neq Q$ en L y muestra que $XA = XB = XC$.)



10. Datos: $\overline{AP} \perp \overline{PQ}$ y $\overline{AP} \perp \overline{PC}$; $\overline{PQ} \perp \overleftrightarrow{BC}$ en Q.
Demostrar: $\overline{AQ} \perp \overleftrightarrow{BC}$
(Sugerencia: Toma R sobre $\overleftrightarrow{QC}$ de módo que QB = QR. Traza $\overline{PB}$, $\overline{PR}$.)



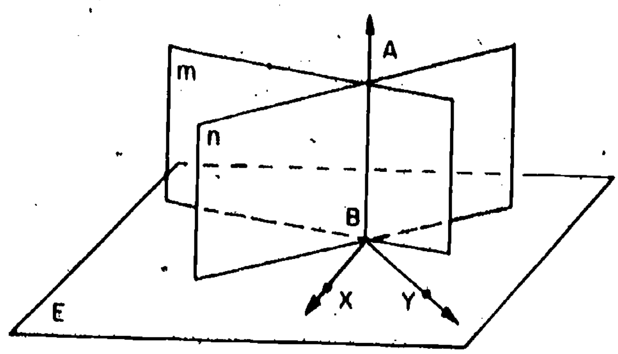
11. Demuestra el siguiente teorema: Si desde un punto A fuera de un plano se trazan una perpendicular $\overline{AB}$ y segmentos oblicuos (no perpendiculares) $\overline{AF}$ y $\overline{AH}$, que corten al plano a diferentes distancias de B, el segmento que corta al plano a la mayor distancia de B tiene la mayor longitud.



Datos: $\overline{AB} \perp$ plano E; F y H son puntos de E tales que BF > BH.
Demostrar: AF > AH

12. Demuestra que cada uno de los cuatro rayos $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AE}$ no puede ser perpendicular a los otros tres.

13. Datos: $\overleftrightarrow{XB}$ y $\overleftrightarrow{YB}$ son dos rectas en el plano E; m es un plano $\perp \overleftrightarrow{XB}$ en B; n es un plano $\perp \overleftrightarrow{YB}$ en B; $\overleftrightarrow{AB}$ es la intersección de m y n.
Demostrar: $\overleftrightarrow{AB} \perp E$



Capítulo 9

RECTAS PARALELAS EN UN PLANO

9-1. Condiciones que garantizan el paralelismo

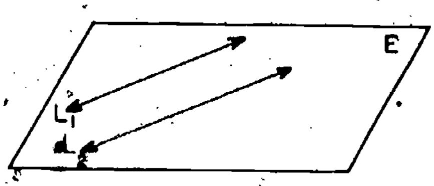
Hasta ahora en nuestra geometría nos hemos ocupado principalmente de lo que ocurre cuando rectas y planos se intersecan de ciertas maneras. Vamos ahora a ver qué sucede cuando no se intersecan. Veremos que es posible demostrar muchas más cosas interesantes.

Consideramos primero el caso de dos rectas. El teorema 3-3 nos da alguna información en seguida, ya que nos dice que si dos rectas se intersecan, están en un plano. Por lo tanto, dos rectas que no están en un plano no pueden intersecarse.

Definición: Dos rectas que no están en un plano se llaman alabeadas o rectas que se cruzan.

Podrás fácilmente encontrar ejemplos de rectas alabeadas en tu salón de clase.

Esto deja todavía sin respuesta el problema de si dos rectas que están en un plano tienen necesariamente que intersecarse. En el teorema 9-2 demostraremos la existencia de rectas en un plano que no se intersecan, y que son paralelas, como éstas:



Demos primero una definición más precisa.

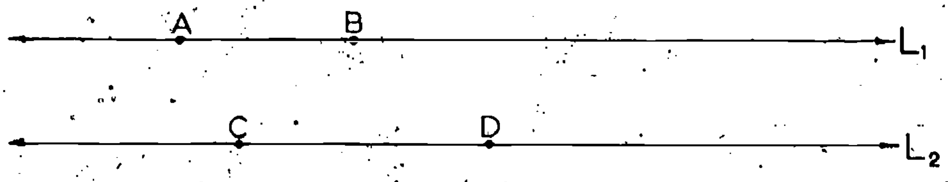
Definición: Dos rectas son paralelas si están en un mismo plano y no se intersecan.

Observa que para que dos rectas sean paralelas deben satisfacerse dos condiciones: no deberán intersecarse, y deberán estar ambas en el mismo plano.

<u>Teorema</u> <u>9-1</u>. Dos rectas paralelas están en exactamente un plano.

Demostración: Si L_1 y L_2 son rectas paralelas, por la definición anterior sabemos que hay un plano E que contiene a L_1 y L_2. Si P es cualquier punto de L_2, por el teorema 3-3 sabemos que hay solamente un plano que contiene a L_1 y P. Por lo tanto, E es el único plano que contiene a L_1 y L_2.

Usaremos la abreviatura $L_1 \parallel L_2$ para indicar que las rectas L_1 y L_2 son paralelas. Por conveniencia diremos que dos segmentos son paralelos si las rectas que los contienen son paralelas. De modo análogo diremos cuando nos referimos a una recta y un segmento, o una recta y un rayo, y así sucesivamente. Por ejemplo, supongamos que $L_1 \parallel L_2$ en la figura siguiente:



Entonces, podemos también escribir $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overrightarrow{AB} \parallel L_2$, $L_1 \parallel \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BA} \parallel \overline{CD}$, y así sucesivamente. Cada una de estas afirmaciones equivale a la afirmación de que $L_1 \parallel L_2$.

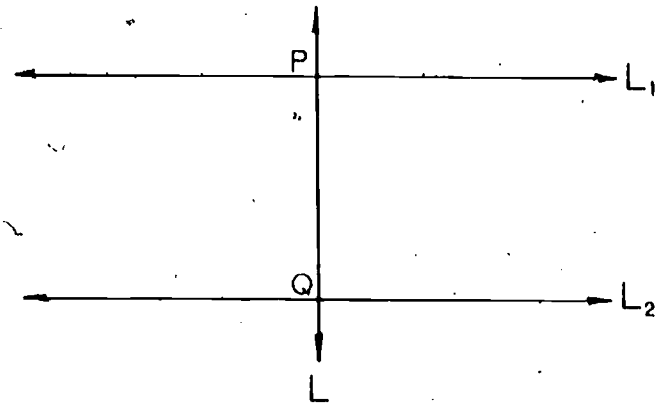
No parece fácil mediante la definición decidir si dos rectas que parecen ser paralelas realmente lo son. Toda recta se extiende indefinidamente en dos direcciones y para saber si dos rectas no se intersecan, tendríamos que ver las dos rectas en <u>toda</u> <u>su</u> <u>extensión</u>. Sin embargo, hay una condición sencilla que es suficiente para garantizar que dos rectas son paralelas. Es la siguiente:

<u>Teorema</u> <u>9-2</u>. Dos rectas en un plano son paralelas si ambas son perpendiculares a la misma recta.

Demostración: Supongamos que L_1 y L_2 son dos rectas en el plano E, cada una de ellas perpendicular a una recta L en los puntos P y Q. Hay entonces dos posibilidades:

(1) L_1 y L_2 se intersecan en un punto R.

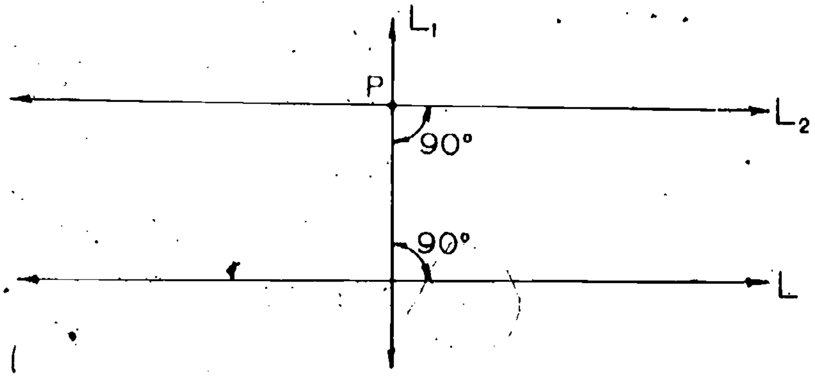
(2) L_1 y L_2 no se intersecan.



En el caso (1) tendríamos dos rectas, L_1 y L_2, cada una de ellas perpendicular a L y pasando por R. Esto es imposible según el teorema 6-1, si R está en L, y según el teorema 6-3, si R no está en L. Por lo tanto, el caso (2) es el único posible, y así, por definición, $L_1 \parallel L_2$.

El teorema 9-2 nos permite demostrar el siguiente teorema de existencia, que es muy importante.

<u>Teorema</u> <u>9-3</u>. Sea L una recta, y sea P un punto que no está en L. Entonces hay al menos una recta, que pasa por P y es paralela a L.



Demostración: Sea L_1 una recta que pasa por P, perpendicular a L. (Por el teorema 6-1, hay una recta tal.) Sea L_2 una recta que pasa por P, perpendicular a L_1 en el plano de L y P. Por el teorema 9-2, $L_2 \parallel L$.

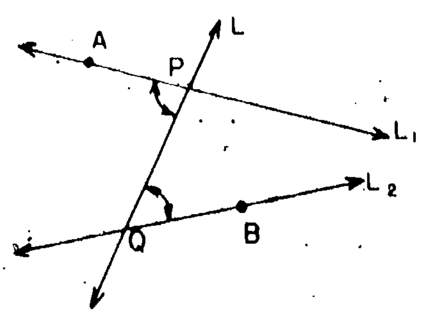
Parecería propio, a estas alturas, intentar demostrar que la paralela del teorema 9-3 es única; es decir, podríamos tratar de probar que en un plano, y por un punto dado que no esté en una recta dada, pasa solamente una paralela a la recta dada. Por muy extraño que parezca, *no podemos demostrar tal cosa a base de los postulados enunciados hasta ahora* y tenemos que aceptarla como un nuevo postulado. Examinaremos esto en mayor detalle en la sección 9-3. Mientras tanto, antes de empezar a trabajar sobre la base de este nuevo postulado, demostraremos algunos teoremas adicionales que, al igual que el teorema 9-2, nos dicen cuándo dos rectas son paralelas.

Daremos primero algunas definiciones.

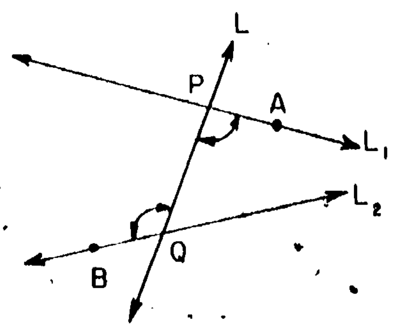
Definición: Una *secante* a dos rectas en un plano es una recta que las interseca en dos puntos diferentes.

Decimos que las dos rectas son "cortadas" por la secante.

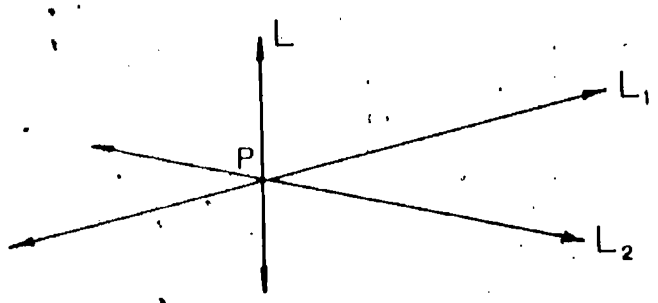
Definición: Sea L una secante a L_1 y L_2, que las corta en P y Q. Sea A un punto de L_1 y B un punto de L_2 tales que A y B están a lados opuestos de L. Entonces $\angle PQB$ y $\angle QPA$ son *ángulos alternos internos* formados por la secante a las dos rectas.



O



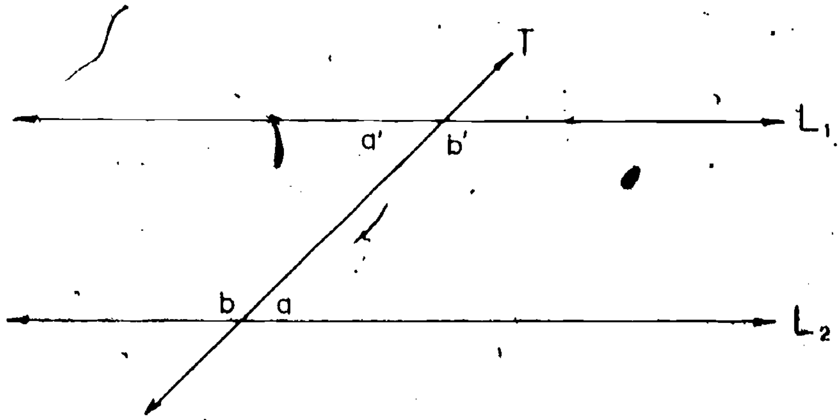
Notarás que en la definición de secante, las dos rectas mencionadas podrán ser o no ser paralelas; pero si se intersecan, entonces la secante no puede cortarlas en su punto común. No se permite, pues, una situación como la que muestra la figura siguiente:



Es decir, en esta figura L no es una secante a las rectas L_1 y L_2.

Notarás también que una perpendicular común a dos rectas en un plano, como la del teorema 9-2, es siempre una secante.

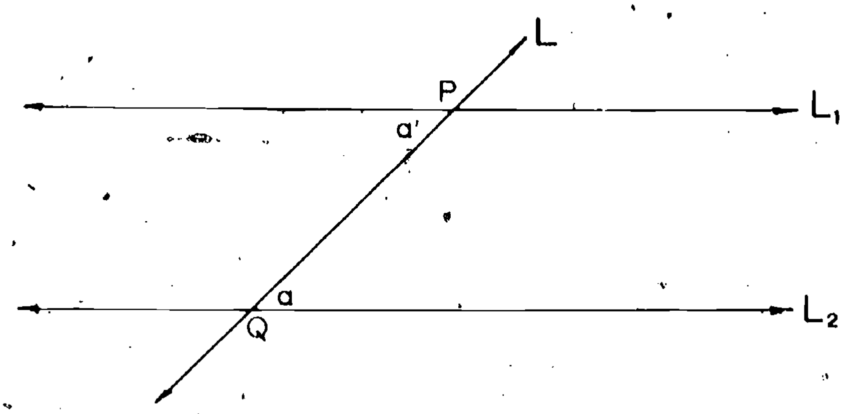
Teorema 9-4. Si dos rectas son cortadas por una secante, y si un par de ángulos alternos internos son congruentes, entonces el otro par de ángulos alternos internos son también congruentes.



Es decir, si $\angle a \cong \angle a'$, entonces $\angle b \cong \angle b'$. Y si $\angle b \cong \angle b'$, entonces $\angle a \cong \angle a'$. La demostración se deja al alumno.

El siguiente teorema es una generalización del teorema 9-2; esto es, incluye el teorema 9-2 como un caso especial:

Teorema 9-5. Si dos rectas son cortadas por una secante, y si un par de ángulos alternos internos son congruentes, entonces las rectas son paralelas.

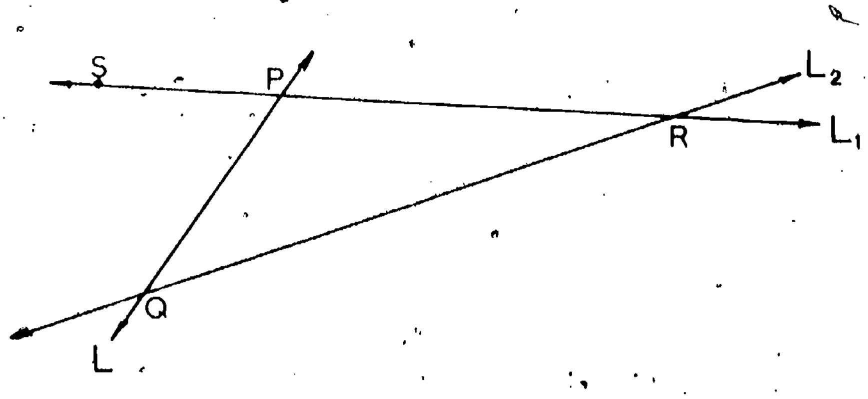


Demostración: Sea L una secante a L_1 y L_2, que las corta en P y Q. Supongamos que un par de ángulos alternos internos son congruentes. Tenemos, pues, dos posibilidades:

(1) L_1 y L_2 se intersecan en un punto R.

(2) $L_1 \parallel L_2$.

En el caso (1) la figura sería así:



Sea S un punto de L_1 situado a un lado de L distinto de aquel en que está R. Entonces $\angle SPQ$ es un ángulo externo del ΔPQR, y $\angle PQR$ es uno de los ángulos internos no contiguos. Por el teorema 7-1, esto quiere decir que

$$m\angle SPQ > m\angle PQR.$$

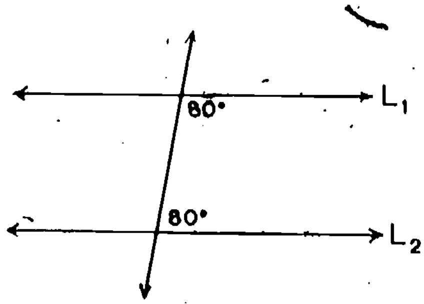
Pero sabemos por la hipótesis que <u>un</u> par de ángulos alternos internos son congruentes. Por el teorema anterior, <u>ambos</u> pares de ángulos alternos internos son congruentes. Luego,

$$m\angle SPQ = m\angle PQR.$$

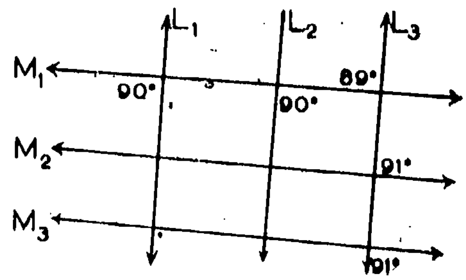
Como la afirmación (1) nos lleva a una contradicción de nuestra hipótesis, dicha afirmación es falsa. Por lo tanto, la afirmación (2) es cierta.

<u>Conjunto de problemas 9-1</u>

1. a. ¿Establece la definición de rectas paralelas que éstas deberán mantenerse una de otra a la misma distancia?
   b. Si dos rectas dadas no están en un plano, ¿podrán ser paralelas?
2. Dos rectas en un plano son paralelas si _______, o si _______, o si _______.
3. Si dos rectas en un plano son cortadas por una secante, ¿serán siempre congruentes los ángulos alternos internos?
4. En el espacio, si dos rectas son perpendiculares a una tercera, ¿serán paralelas las dos rectas?
5. a. Si los ángulos de 80° de la figura estuvieran bien dibujados, ¿sería L_1 paralela a L_2 por el teorema 9-5? Explícalo.
   b. ¿Cuántas medidas diferentes de ángulos habría en la figura? ¿Cuáles?



6. Si los ángulos de la figura fueran del tamaño indicado, ¿qué rectas serían paralelas?



7. Dada una recta L y un punto P fuera de L, explica cómo se podrían usar la regla y el transportador para dibujar una paralela a L por P.
8. Supongamos que se aceptan las siguientes dos definiciones:

   Una recta vertical es una que contiene el centro de la tierra.

   Una recta horizontal es una que sea perpendicular a alguna recta vertical.

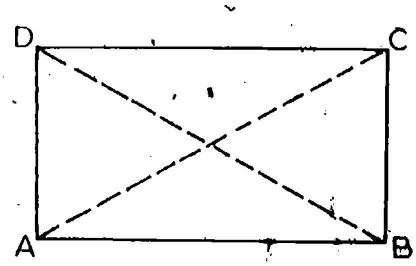
   a. ¿Podrían ser paralelas dos rectas horizontales?
   b. ¿Podrían ser paralelas dos rectas verticales?
   c. ¿Podrían ser perpendiculares dos rectas horizontales?
   d. ¿Podrían ser perpendiculares dos rectas verticales?
   e. ¿Sería también horizontal toda recta vertical?
   f. ¿Sería también vertical toda recta horizontal?
   g. ¿Podría una recta horizontal ser paralela a una recta vertical?
   h. ¿Sería horizontal toda recta?
9. ¿Será posible encontrar dos rectas en el espacio que ni se intersequen ni sean paralelas?
10. Datos: $m\angle DAB = m\angle CBA = 90$,

    y $AD = CB$.

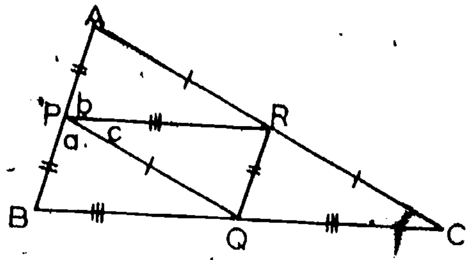
    Demostrar: $m\angle ADC = m\angle BCD$

    ¿Podrías también demostrar que

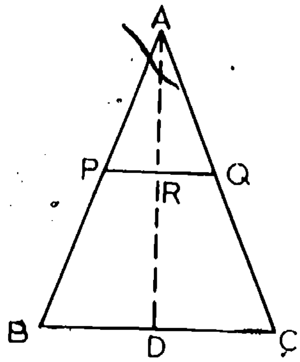
    $m\angle ADC = m\angle BCD = 90$?



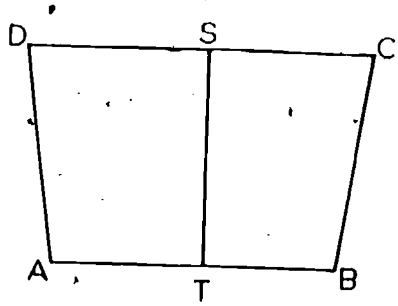
11. Se da la figura en la que
AR = RC = PQ,
AP = PB = RQ,
BQ = QC = PR.
Demostrar:
$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$.
(Sugerencia: Demuestra que
$m\angle a = m\angle A$, $m\angle b = m\angle B$,
$m\angle c = m\angle C$.)



12. Datos: AB = AC, AP = AQ.
Demostrar: $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{BC}$
(Sugerencia: Hagamos que la bisectriz del $\angle A$ corte a $\overline{PQ}$ en R y a $\overline{BC}$ en D.)

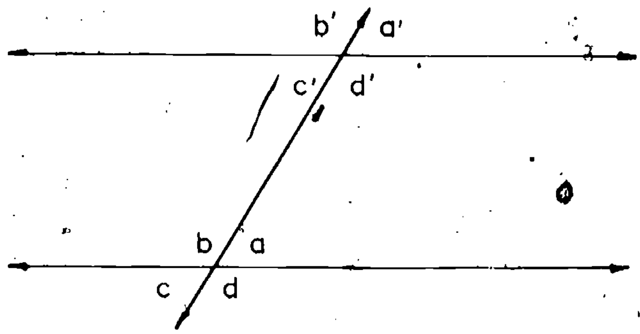


13. Datos: La figura de la derecha en la que
$\angle A \cong \angle B$,
AD = BC,
AT = TB,
SD = SC.
Demostrar:
$\overline{ST} \perp \overline{DC}$
$\overline{ST} \perp \overline{AB}$
$\overline{DC} \parallel \overline{AB}$



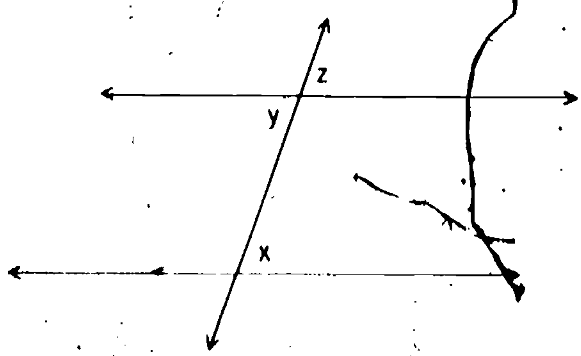
9-2. Angulos correspondientes

En la figura siguiente, los ángulos marcados a y a' se llaman ángulos correspondientes:



De modo análogo, b y b' son ángulos correspondientes; y también lo son los pares c, c' y d, d'.

Definición: Si dos rectas son cortadas por una secante, si $\angle x$, $\angle y$ son ángulos alternos internos, y si los ángulos $\angle y$, $\angle z$ son opuestos por el vértice, entonces $\angle x$, $\angle z$ son ángulos correspondientes o ángulos externos-internos.



Deberás demostrar el teorema siguiente:

Teorema 9-6. Si dos rectas son cortadas por una secante, y si un par de ángulos correspondientes son congruentes, entonces los otros tres pares de ángulos correspondientes tienen la misma propiedad.

La demostración es un poco más larga que la del teorema 9-4.

Teorema 9-7. Si dos rectas son cortadas por una secante, y si un par de ángulos correspondientes son congruentes, entonces las rectas son paralelas. La demostración se deja al alumno.

Parece como si los recíprocos de los teoremas 9-5 y 9-7 debieran ser ciertos. El recíproco del teorema 9-5 diría que si dos rectas paralelas son cortadas por una secante, entonces los ángulos alternos internos son congruentes. El recíproco del teorema 9-7 diría que si dos rectas paralelas son cortadas por una secante, entonces los ángulos correspondientes son congruentes. Estos teoremas, sin embargo, no se pueden demostrar a base de los postulados enunciados hasta ahora. Para demostrarlos necesitaremos utilizar el postulado de las paralelas que enunciaremos en la próxima sección.

El postulado de las paralelas es indispensable también para las demostraciones de muchos otros teoremas de nuestra geometría. Algunos de éstos ya los conoces por tu trabajo en otros grados. Por ejemplo, sabes desde hace algún tiempo que la suma de las medidas de los ángulos de cualquier triángulo es 180. Sin embargo, sin el postulado de las paralelas es imposible demostrar tan importante teorema. Prosigamos, pues, al postulado de las paralelas.

9-3. El postulado de las paralelas.

> Postulado 16. (El postulado de las paralelas) Por un punto externo dado hay a lo sumo una recta paralela a una recta dada.

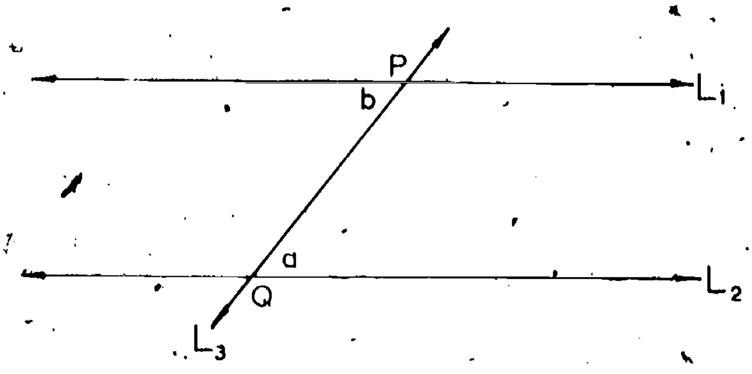
Notarás que no necesitamos decir en el postulado que hay al menos una tal paralela, pues eso ya lo sabemos por el teorema 9-3.

Parecería natural suponer que ya tenemos suficientes postulados para poder demostrar cualquier enunciado que sea "razonable"; y como el postulado de las paralelas es razonable, podríamos tratar de demostrarlo en vez de presentarlo como un postulado. De todas maneras, algunas personas muy inteligentes pensaron así acerca del postulado durante siglos y siglos. Ninguno de ellos, sin embargo, pudo encontrar una demostración. Finalmente, en el siglo pasado, se descubrió que tal demostración no es posible. La razón es que hay algunos sistemas matemáticos que son casi iguales, pero no exactamente, a la geometría que estamos estudiando. En estos sistemas matemáticos quedan satisfechos casi todos los postulados de la geometría corriente, pero no así el postulado de las paralelas. Estas "Geometrías No Euclídeas" pueden parecer extrañas y de hecho lo son. (Por ejemplo, en estas "geometrías" <u>no existe tal cosa como un cuadrado</u>.) No solamente sirven estas geometrías para desarrollar teorías matemáticas interesantes, sino que también tienen importantes aplicaciones a la física.

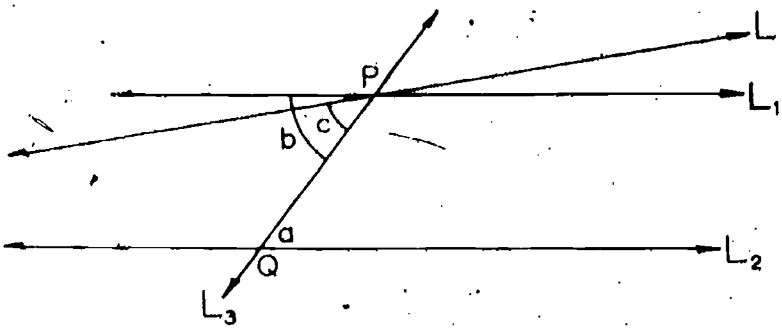
Ahora que tenemos el postulado de las paralelas, será posible demostrar numerosos teoremas importantes que no podríamos demostrar sin él. Empezamos con una demostración del recíproco del teorema 9-5.

<u>Teorema 9-8</u>. Si dos rectas paralelas son cortadas por una secante, entonces los ángulos alternos internos son congruentes.

Demostración: Sean dadas las rectas paralelas L_1 y L_2, y una secante L_3, que las corta en P y Q.



Supongamos que $\angle a$ y $\angle b$ no son congruentes. Sea L una recta que pasa por P y tal que los ángulos alternos internos $\angle c$ y $\angle a$, formados con la secante, sean congruentes.



(Por el postulado de construcción del ángulo, hay una recta tal.) Entonces $L \neq L_1$, porque $\angle b$ y $\angle c$ no son congruentes.

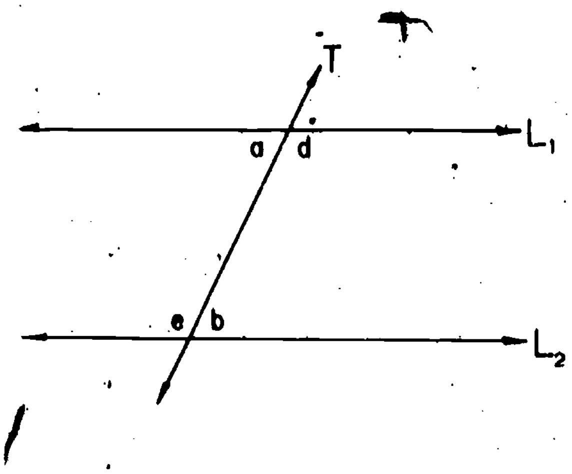
Veamos ahora lo que tenemos. Por la hipótesis, $L_1 \| L_2$. Y por el teorema 9-5, sabemos que $L \| L_2$. Así, pues, hay dos rectas que pasan por P, paralelas a L_2. Pero esto es imposible, porque contradice el postulado de las paralelas. Por ~~lo~~ tanto, $\angle a \cong \angle b$, lo que queríamos demostrar.

Las demostraciones de los siguientes teoremas son breves, y debes redactarlas tú mismo.

Teorema 9-9. Si dos rectas paralelas son cortadas por una secante, cada par de ángulos correspondientes son congruentes.

Teorema 9-10. Si dos rectas paralelas son cortadas por una secante, los ángulos internos a un mismo lado de la secante son suplementarios.

De otro modo: Sean $L_1 \| L_2$ y T una secante que corta a L_1 y L_2. Demuestra que el $\angle b$ es suplementario del $\angle d$ y el $\angle a$ es suplementario del $\angle e$.



Teorema 9-11. En un plano, dos rectas paralelas a la misma recta son paralelas entre sí.

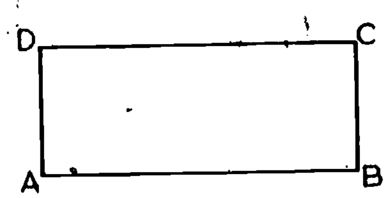
Teorema 9-12. En un plano, si una recta es perpendicular a una de dos rectas paralelas, es perpendicular a la otra.

Conjunto de problemas 9-3

1. Datos:

   $m\angle A = m\angle B = m\angle C = 90$

   Demuestra que $m\angle D = 90$.

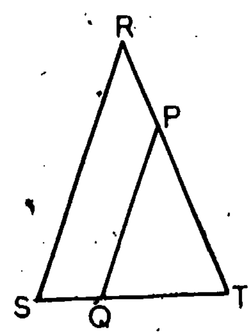


2. Demuestra que una recta paralela a la base de un triángulo isósceles y que interseque a los otros dos lados del triángulo forma otro triángulo isósceles.

3. Datos: En la figura,

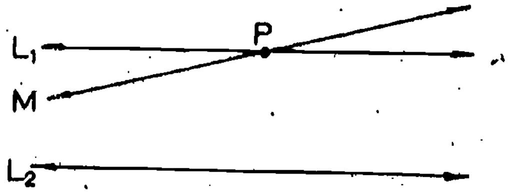
   $RT = RS$, $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{RS}$.

   Demuestra que $PQ = PT$.

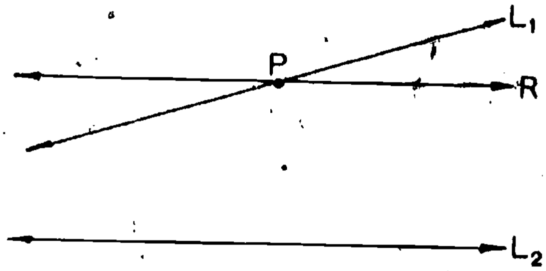


4. Repasa la demostración indirecta que se presenta en la demostración del teorema 9-8, y luego da una demostración indirecta de cada una de las siguientes afirmaciones, a base de presentar una contradicción del postulado de las paralelas:

a. En un plano, si L_1 y L_2 son dos rectas paralelas, y M es una tercera recta que corta a L_1 en P, entonces M también corta a L_2.



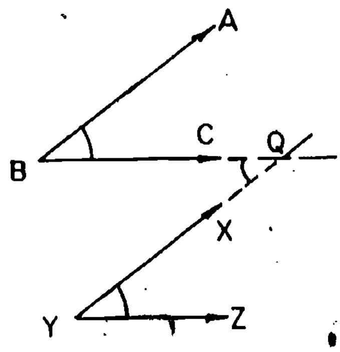
b. En un plano, si una recta R corta solamente a una de otras dos rectas L_1 y L_2, entonces L_1 y L_2 se intersecan.



Datos: R interseca a L_1 en P.
R no interseca a L_2.

Demuestra que L_1 interseca a L_2.

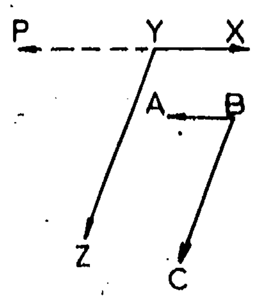
5. a. Demuestra que en un plano dos ángulos con sus lados respectivamente paralelos y de modo que ambos se extienden en la misma dirección (o ambos en direcciones opuestas), son congruentes.



Datos: $\overrightarrow{BA} \parallel \overrightarrow{YX}$,
$\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{YZ}$.

Demuestra que $\angle ABC \cong \angle XYZ$.

b. Demuestra que en un plano, dos ángulos con sus lados respectivamente paralelos, pero de modo que solamente un par de éstos se extienden en la misma dirección, son suplementarios.



Datos: $\overrightarrow{BA} \parallel \overrightarrow{YX}$,
$\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{YZ}$.

Demuestra que $m\angle ABC + m\angle XYZ = 180$.

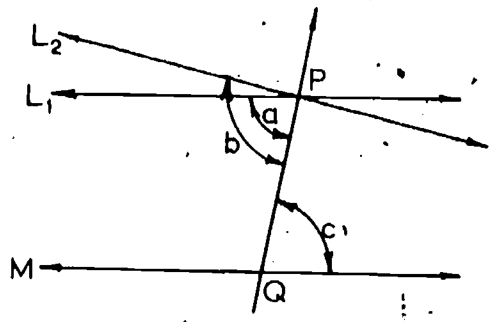
(Nota: Solamente ilustramos aquí algunos casos. Todos los demás pueden comprobarse con facilidad. La palabra "dirección" no está definida, pero debe sobrentenderse su sentido.)

6. Dibuja varios pares de ángulos ABC y DEF tales que $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{ED}$ y $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{EF}$. Enuncia un teorema que creas puede ser cierto respecto de las medidas de tales ángulos.

*7. Si el teorema 9-8 se aceptara como un postulado, entonces sería posible demostrar el postulado de las paralelas como un teorema. (Es decir, debe demostrarse que no puede haber una segunda paralela a una recta por un punto fuera de ella.)

Datos: L_1 y L_2 son dos rectas que contienen a P, y $L_1 \parallel M$.

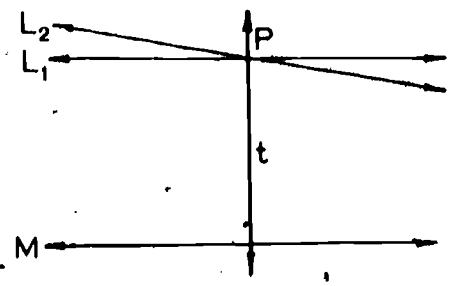
Demuestra que L_2 no es paralela a M.



*8. Demuestra que si el teorema 9-12 (Si una secante es perpendicular a una de dos rectas paralelas, es perpendicular a la otra) se aceptara como un postulado, el postulado de las paralelas podría demostrarse como un teorema.

Datos: $L_1 \parallel M$, L_1 y L_2 contienen a P. ($L_2 \neq L_1$)

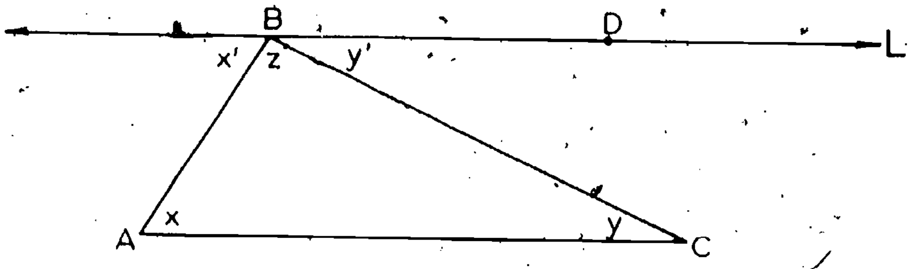
Demuestra que L_2 no es paralela a M.



9-4. Triángulos

Teorema 9-13. La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180.

Demostración: Dado el $\triangle ABC$, sea L la recta paralela a $\overline{AC}$ que pasa por B, y sean los $\angle x$, $\angle x'$, $\angle y$, $\angle y'$ y $\angle z$ tales como aparecen en la figura.



Sea D un punto de L al mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$ que C. Como $\overline{AC} \parallel \overleftrightarrow{BD}$, A está al mismo lado de $\overleftrightarrow{BD}$ que C. Por lo tanto, C está en el interior del $\angle ABD$ (definición del interior de un ángulo), y así, por el postulado de la adición de ángulos, tenemos

$$m\angle ABD = m\angle z + m\angle y'.$$

Por el postulado del suplemento,

$$m\angle x' + m\angle ABD = 180.$$

Por lo tanto,

$$m\angle x' + m\angle z + m\angle y' = 180.$$

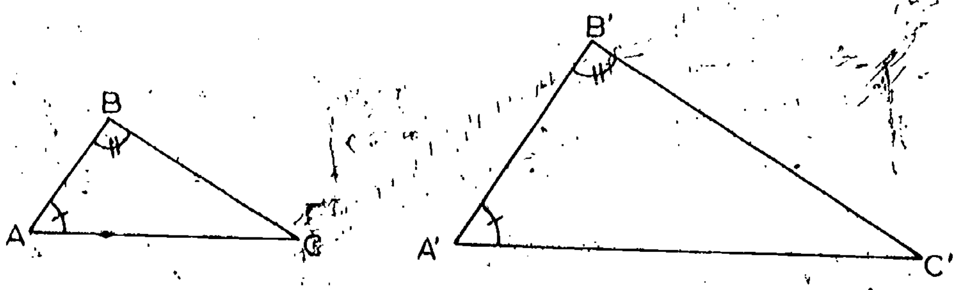
Pero sabemos por el teorema 9-8 que $m\angle x = m\angle x'$, y también $m\angle y = m\angle y'$, porque esos son ángulos alternos internos. Sustituyendo, obtenemos

$$m\angle x + m\angle z + m\angle y = 180,$$

lo que queríamos demostrar.

De aquí obtenemos varios corolarios importantes:

Corolario 9-13-1. Sea dada una correspondencia entre dos triángulos. Si dos pares de ángulos correspondientes son congruentes, entonces el tercer par de ángulos correspondientes son también congruentes.



El corolario dice que si $\angle A \cong \angle A'$ y $\angle B \cong \angle B'$, entonces $\angle C \cong \angle C'$. Como sugiere la figura, el corolario se aplica en los casos en que la correspondencia dada no es una congruencia, y también en los casos en que $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

<u>Corolario 9-13-2</u>. Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.

<u>Corolario 9-13-3</u>. En todo triángulo, la medida de un ángulo externo es la suma de las medidas de los dos ángulos internos no contiguos.

<u>Conjunto de problemas 9-4</u>

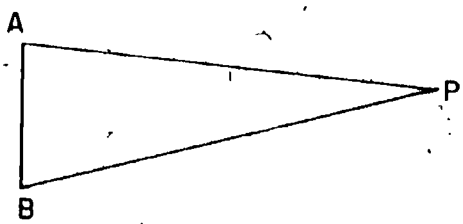
1. Halla la medida del tercer ángulo, si las medidas de los otros dos ángulos de un triángulo son las siguientes:

   a. 37 y 58 d. r y s

   b. 149 y 30 e. $45 + a$ y $45 - a$

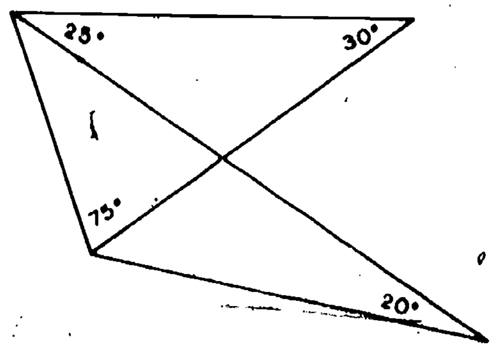
   c. n y n f. 90 y $\frac{1}{2}k$

2. Para hallar la distancia de un punto A a un punto lejano P, un agrimensor puede medir una pequeña distancia AB y también medir el $\angle A$ y el $\angle B$. De esta información puede calcular la medida del $\angle P$ y luego, mediante fórmulas adecuadas, calcular AP. Si $m\angle A = 87.5$ y $m\angle B = 88.3$, calcula $m\angle P$.

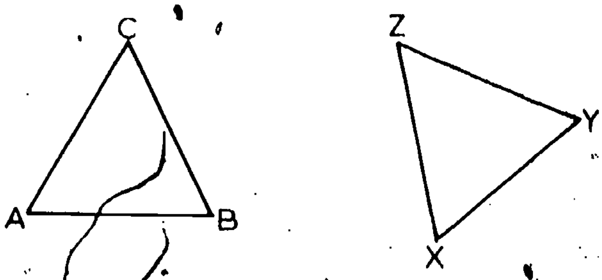


3. ¿Por qué es indispensable el postulado de las paralelas para demostrar el teorema 9-13?

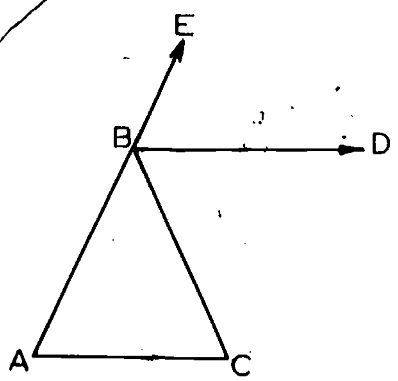
4. Dibuja una figura como la de la derecha y complétala indicando el valor de cada uno de sus ángulos.



5. Dado que $\angle A \cong \angle X$ y $\angle B \cong \angle Y$, ¿será posible afirmar lo siguiente?
   a. $\angle C \cong \angle Z$
   b. $\overline{AB} \cong \overline{XY}$

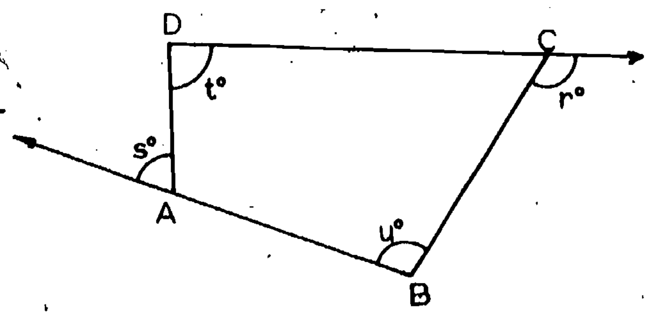


6. Datos: $\overrightarrow{BD}$ biseca al $\angle EBC$, y $\overleftrightarrow{BD} \parallel \overleftrightarrow{AC}$.
   Demuestra que $AB = BC$.

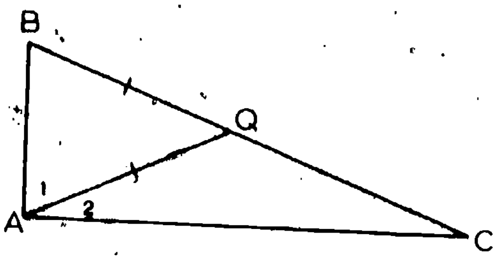


7. Demuestra que la bisectriz de un ángulo externo en el vértice de un triángulo isósceles es paralela a la base.

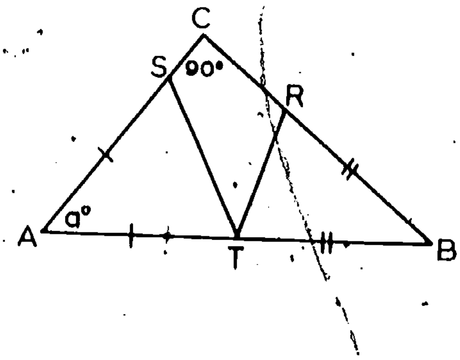
8. Dato: La figura de la derecha.
   Demuestra que $s + r = t + u$.
   (Sugerencia: Traza $\overline{DB}$.)



*9. Datos: En la figura, $\angle BAC$ es un ángulo recto, y $QB = QA$. Demuestra que $QB = QC$.

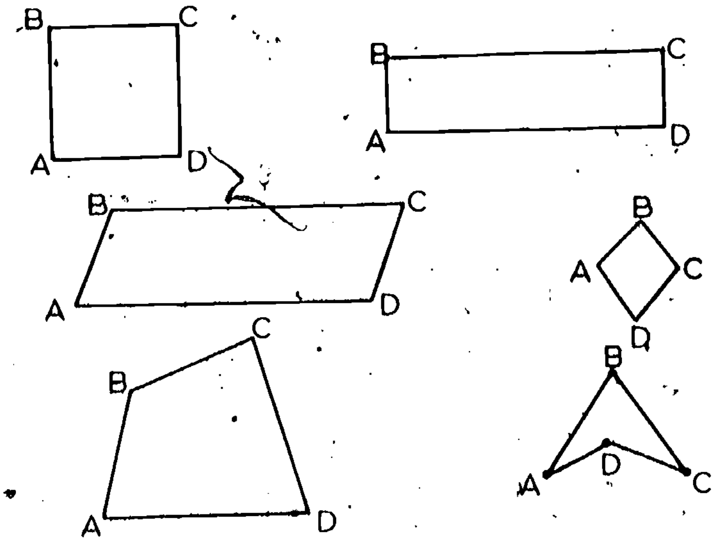


*10. Datos: En el $\triangle ABC$, $\angle C$ es un ángulo recto, $AS = AT$ y $BR = BT$. Demuestra que $m\angle STR = 45$. (Sugerencia: Supón que $m\angle A = a$. Luego halla fórmulas para las medidas de los otros ángulos de la figura, cada uno, en términos de a.)



9-5. Cuadriláteros en el plano

Un cuadrilátero es una figura plana de cuatro lados, como son las siguientes:

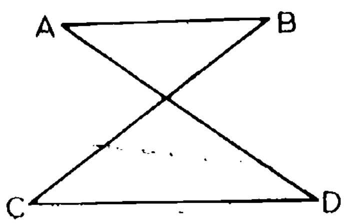


Las dos últimas figuras ilustran lo que podríamos llamar el caso más general, en el que no hay dos lados congruentes, ni dos lados paralelos, ni dos ángulos congruentes.

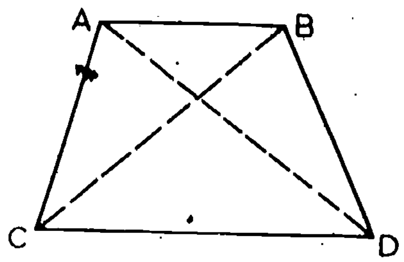
Podemos enunciar con mayor precisión la definición de un cuadrilátero en la siguiente forma:

Definición: Sean A, B, C y D cuatro puntos en el mismo plano, tales que tres cualesquiera de ellos no estén alineados y tales que los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ se intersequen solamente en sus extremos. Entonces, la reunión de estos cuatro segmentos es un cuadrilátero.

Para abreviar, llamaremos ABCD a esta figura. Notarás que en cada uno de los ejemplos anteriores, con excepción del último, el cuadrilátero más su interior constituyen un conjunto convexo, en el sentido en que se definió en el capítulo 3. Esto no es así para la figura inferior de la derecha, pero esta figura, según nuestra definición, es también un cuadrilátero. Observa, sin embargo, que figuras como la siguiente no son cuadriláteros de acuerdo con nuestra definición:

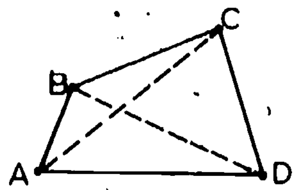


Aquí la figura no es un cuadrilátero, porque los segmentos $\overline{BC}$ y $\overline{DA}$ se intersecan en un punto que no es un extremo de ninguno de ellos. Observa también, sin embargo, que es posible construir un cuadrilátero que tenga esos mismos cuatro puntos como vértices, así:



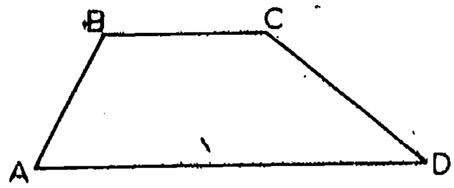
En este caso ABDC es un cuadrilátero.

<u>Definiciones</u>: <u>Lados opuestos</u> de un cuadrilátero son dos lados que no se intersecan. Dos de sus <u>ángulos</u> son <u>opuestos</u> si no tienen un lado común. Dos lados son <u>consecutivos</u> si tienen un vértice común. De manera análoga, llamamos <u>consecutivos</u> a dos ángulos si tienen un lado común. Una <u>diagonal</u> es un segmento que une dos vértices no consecutivos.

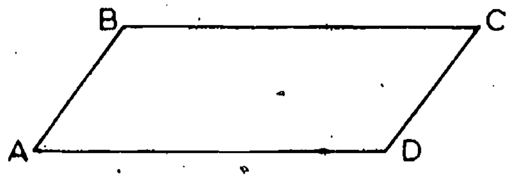


En un cuadrilátero ABCD, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son lados opuestos, como lo son $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$. $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$ o $\overline{AD}$ y $\overline{AB}$ son lados consecutivos. $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son las diagonales de ABCD. ¿Qué ángulos son opuestos? ¿Cuáles son consecutivos?

<u>Definición</u>: Un <u>trapecio</u> es un cuadrilátero en el que dos, y solamente dos lados opuestos son paralelos.



<u>Definición</u>: Un <u>paralelogramo</u> es un cuadrilátero en el que ambos pares de lados opuestos son paralelos.



No deberás tener mucha dificultad en demostrar los teoremas fundamentales relativos a trapecios y paralelogramos.

<u>Teorema</u> <u>9-14</u>. Cada diagonal separa a un paralelogramo en dos triángulos congruentes. Es decir, si ABCD es un paralelogramo, entonces $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ y $\triangle ABD \cong \triangle BCD$.

<u>Teorema</u> <u>9-15</u>. En un paralelogramo, dos lados opuestos cualesquiera son congruentes.

<u>Corolario</u> <u>9-15-1</u>. Si $L_1 \parallel L_2$ y si P y Q son dos puntos cualesquiera en L_1, entonces las distancias de P y Q a L_2 son iguales.

Esta propiedad de las rectas paralelas se abrevia a veces diciendo que "las rectas paralelas equidistan en toda su extensión".

<u>Definición</u>: La <u>distancia entre dos rectas paralelas</u> es la distancia de cualquier punto de una de ellas a la otra.

<u>Teorema</u> <u>9-16</u>. En un paralelogramo, dos ángulos opuestos cualesquiera son congruentes.

<u>Teorema</u> <u>9-17</u>. En un paralelogramo, dos ángulos consecutivos cualesquiera son suplementarios.

<u>Teorema</u> <u>9-18</u>. Las diagonales de un paralelogramo se bisecan.

En los teoremas 9-14 al 9-18 nos ocupamos de varias propiedades de un paralelogramo; es decir, si sabemos que un cuadrilátero es un paralelogramo podemos enunciar ciertas propiedades acerca de él. En los tres teoremas siguientes nos referimos a la relación recíproca; es decir, si conocemos ciertas propiedades de un cuadrilátero, podremos afirmar que es un paralelogramo.

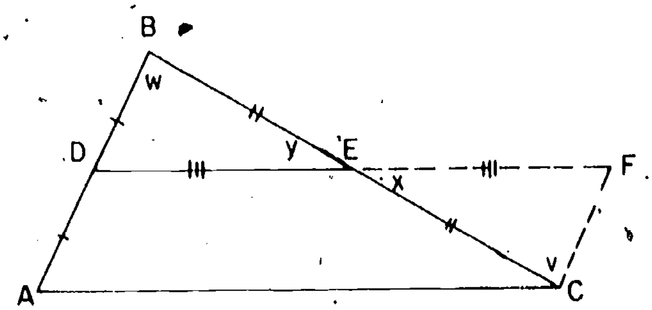
Teorema 9-19. Dado un cuadrilátero en el que ambos pares de lados opuestos son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

Teorema 9-20. Si dos lados de un cuadrilátero son paralelos y congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

Teorema 9-21. Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

El siguiente teorema enuncia dos propiedades útiles. Damos la demostración completa del teorema.

Teorema 9-22. El segmento entre los dos puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene la mitad de su longitud.



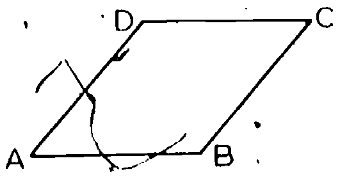
De otro modo: Dado el $\triangle ABC$, sean D y E los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. Entonces $DE \parallel AC$, y $DE = \frac{1}{2}AC$.

Demostración: Usando el teorema de la localización de puntos, sea F el punto del rayo opuesto a $\overrightarrow{ED}$ tal que $EF = DE$. Ofrecemos el resto de la demostración en dos columnas. La notación para ángulos es la de la figura.

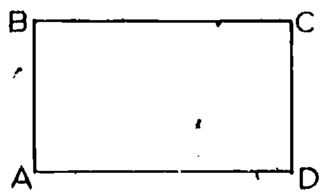
Afirmaciones	Razones
1. EF = ED	1. Se escogió F para que esto fuera cierto.
2. EB = EC	2. E es el punto medio de $\overline{BC}$.
3. $\angle x \cong \angle y$	3. Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.
4. $\Delta EFC \cong \Delta EDB$	4. Postulado del L.A.L.
5. $\angle v \cong \angle w$	5. Partes correspondientes de triángulos congruentes
6. $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CF}$	6. Teorema 9-5
7. AD = FC	7. AD = DB, por hipótesis, y DB = FC, por la afirmación 4
8. ADFC es un paralelogramo	8. Teorema 9-20
9. $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$	9. Definición de un paralelogramo
10. $DE = \frac{1}{2}AC$	10. $DE = \frac{1}{2}DF$, por la afirmación 1, y DF = AC, por el teorema 9-15

9-6. Rombo, rectángulo y cuadrado

Definiciones: Un rombo es un paralelogramo cuyos lados todos son congruentes.



Un rectángulo es un paralelogramo cuyos ángulos todos son rectos.



Finalmente, un cuadrado es un rectángulo cuyos lados todos son congruentes.

Como anteriormente, dejamos al alumno las demostraciones de los siguientes teoremas:

Teorema 9-23. Si un paralelogramo tiene un ángulo recto, entonces tiene cuatro ángulos rectos, y el paralelogramo es un rectángulo.

Teorema 9-24. En un rombo, las diagonales son perpendiculares entre sí.

Teorema 9-25. Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan y son perpendiculares, entonces el cuadrilátero es un rombo.

Conjunto de problemas 9-6

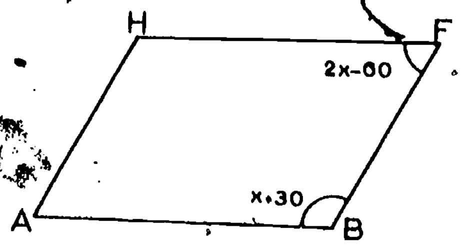
1. ¿Para cuáles de los cuadriláteros--rectángulo, cuadrado, rombo, paralelogramo--se podría demostrar cada una de las siguientes propiedades?
   a. Ambos pares de ángulos opuestos son congruentes.
   b. Ambos pares de lados opuestos son congruentes.
   c. Cada diagonal biseca dos ángulos.
   d. Las diagonales se bisecan.
   e. Las diagonales son perpendiculares.
   f. Cada par de ángulos consecutivos son suplementarios.
   g. Cada par de lados consecutivos son congruentes.
   h. La figura es un paralelogramo.
   i. Cada par de ángulos consecutivos son congruentes.
   j. Las diagonales son congruentes.
2. Si las medidas de los ángulos son las que aparecen en el paralelogramo ABFH de la figura, ¿cuál es la medida de cada ángulo?

$m\angle A =$ ______

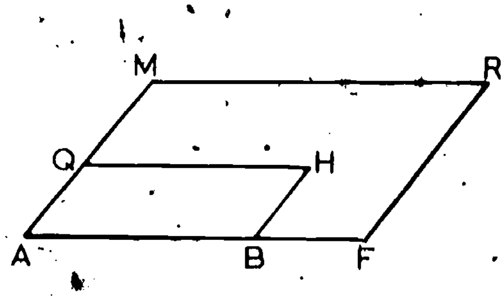
$m\angle B =$ ______

$m\angle F =$ ______

$m\angle H =$ ______

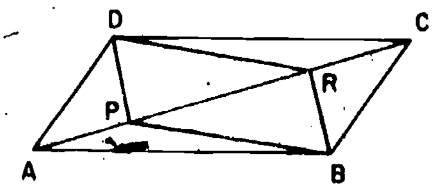


3. En esta figura, ABHQ y AFRM son paralelogramos. ¿Cuál es la relación del $\angle M$ al $\angle H$? ¿Y la del $\angle R$ al $\angle H$? Justifica tu respuesta.

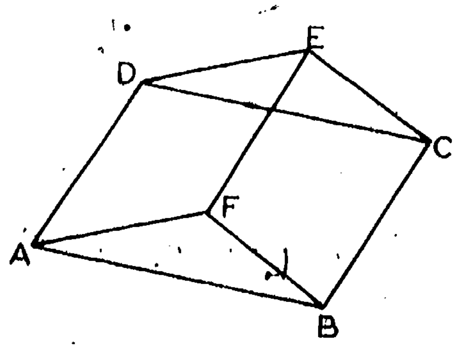


4. ¿Sería suficiente la información acerca de un cuadrilátero que se da más adelante para demostrar que es un paralelogramo?; ¿o un rectángulo?; ¿o un rombo?; ¿o un cuadrado? Considera cada pregunta por separado.
   a. Sus dos pares de lados opuestos son paralelos.
   b. Sus dos pares de lados opuestos son congruentes.
   c. Tres de sus ángulos son rectos.
   d. Sus diagonales se bisecan.
   e. Sus diagonales son congruentes.
   f. Sus diagonales son perpendiculares y congruentes.
   g. Sus diagonales son cada una la mediatriz de la otra.
   h. Es equilátero.
   i. Es equiángulo.
   j. Es equilátero y equiángulo.
   k. Sus dos pares de ángulos opuestos son congruentes.
   l. Cada par de ángulos consecutivos son suplementarios.

5. Datos: ABCD es un paralelogramo con diagonal $\overline{AC}$, y también $AP = RC$. Demuestra que DPBR es un paralelogramo.

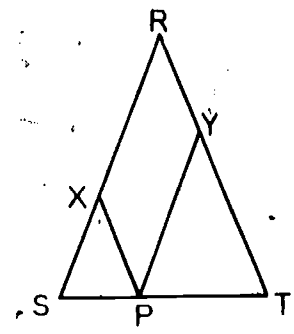


6. Datos: Los paralelogramos AFED y FBCE, según aparecen en la figura plana de la derecha.
   Demuestra que ABCD es un paralelogramo.



7. Si por un punto en la base de un triángulo isósceles trazamos rectas paralelas a los lados iguales, se forma un paralelogramo cuyo perímetro es igual a la suma de las longitudes de los lados iguales.

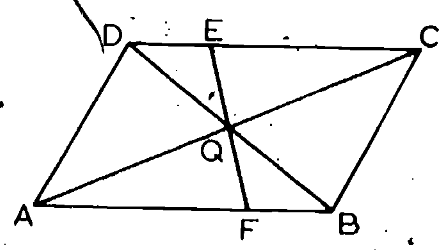
Datos: En la figura,
$\overline{RS} \cong \overline{RT}$, $\overline{PX} \parallel \overline{RT}$,
$\overline{PY} \parallel \overline{RX}$.



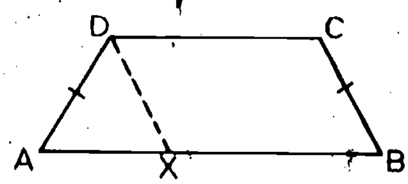
Demuestra que: a. PXRY es un paralelogramo.

b. $PX + XR + RY + YP = RS + RT$.

8. En la figura, si ABCD es un paralelogramo con diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ que se intersecan en Q, y trazamos $\overline{EF}$, pasando por Q, demuestra que $\overline{EF}$ está bisecado en Q.



9. Se da el trapecio isósceles ABCD en el que $AD = CB$ y $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$.
Demuestra que $\angle A \cong \angle B$.



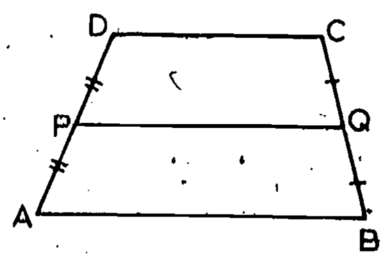
10. La mediana de un trapecio es el segmento que une los puntos medios de sus lados no paralelos.

a. Demuestra el siguiente teorema: La mediana de un trapecio es paralela a las bases e igual en longitud a la semisuma de las longitudes de las bases.

Datos: El trapecio ABCD con $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$, P el punto medio de $\overline{AD}$, y Q el punto medio de $\overline{BC}$.

Demuestra que $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$, y que $PQ = \frac{1}{2}(AB + CD)$.

(Sugerencia: Traza $\overleftrightarrow{DQ}$ intersecando a $\overleftrightarrow{AB}$ en K.)

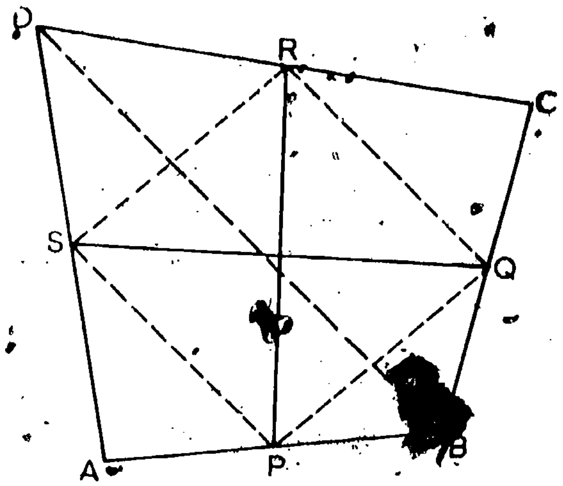


b. Si $AB = 9$ pulgadas y $DC = 7$ pulgadas, entonces $PQ =$ ______.

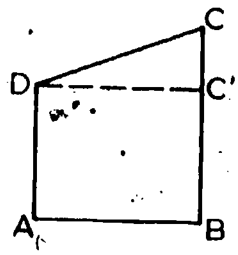
c. Si $DC = 3\frac{1}{2}$ y $AB = 7$, entonces $PQ =$ ______.

11. Un cuadrilátero convexo con vértices marcados consecutivamente ABCD se llama una <u>chiringa</u> (un volantín) si $AB = BC$ y $CD = DA$. Dibuja algunas chiringas. Enuncia tantos teoremas acerca de una chiringa como puedas y demuestra al menos uno de ellos.

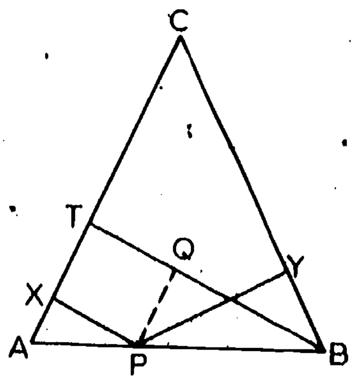
12. Dato: El cuadrilátero ABCD en el que P, Q, R, S son los puntos medios de los lados. Demuestra que RSPQ es un paralelogramo, y que $\overline{PR}$ y $\overline{SQ}$ se bisecan. (Sugerencia: Traza $\overline{RQ}$, $\overline{RS}$, $\overline{SP}$, $\overline{DB}$ y $\overline{PQ}$.)



13. Datos: En la figura, $AD < BC$, $\overline{DA} \perp \overline{AB}$, y $\overline{CB} \perp \overline{AB}$. Demuestra que $m\angle C < m\angle D$.

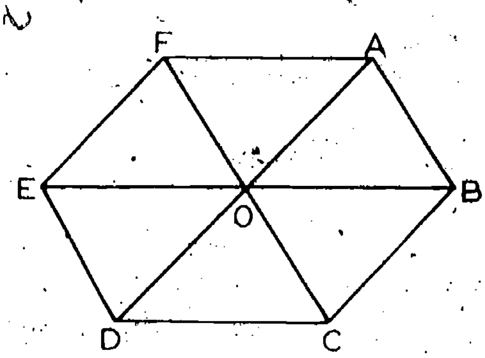


*14. Demuestra que la suma de las longitudes de las perpendiculares trazadas desde un punto cualquiera en la base de un triángulo isósceles a los otros lados es igual a la longitud de la altura correspondiente a cualquiera de estos lados. (Sugerencia: Traza $\overline{PQ} \perp \overline{BT}$. Entonces la figura nos sugiere que $\overline{PX}$ y $\overline{QT}$ son congruentes, y que $\overline{PY}$ y $\overline{BQ}$ son congruentes.)



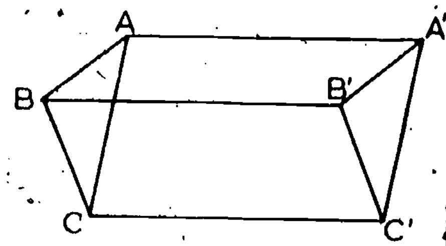
*15. Demuestra que la suma de las longitudes de las perpendiculares trazadas desde cualquier punto en el interior de un triángulo equilátero a los tres lados es igual a la longitud de una altura. (Sugerencia: Traza un segmento, desde el punto interior perpendicular a la altura elegida.)

16. Se da un hexágono, como en la figura, con $\overline{AB} \parallel \overline{OC}$, $\overline{BC} \parallel \overline{OD}$, $\overline{CD} \parallel \overline{OE}$, $\overline{DE} \parallel \overline{OF}$, $\overline{EF} \parallel \overline{OA}$.
Demuestra que $\overline{FA} \parallel \overline{CD}$.

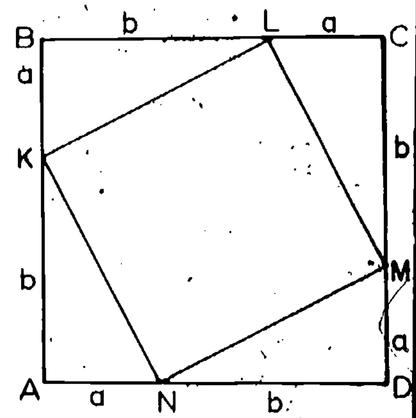


17. a. Dado que $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, son paralelos y que $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$, como en la figura, demuestra que $\overline{AC} \parallel \overline{A'C'}$.

b. ¿Será la figura necesariamente plana? Si no lo es, ¿será siempre válida tu demostración?



18. Se da un cuadrado ABCD, y los puntos K, L, M, N, que dividen los lados como en la figura, de modo que a y b son las longitudes de los segmentos cortados por ellos.
Demuestra que KLMN es un cuadrado.

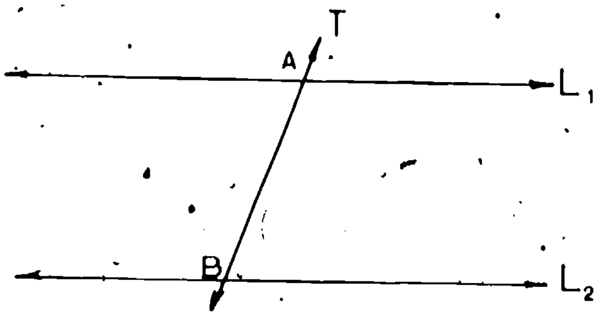


*19. Demuestra que si ABCD es un paralelogramo, entonces D está en el interior del $\angle ABC$.

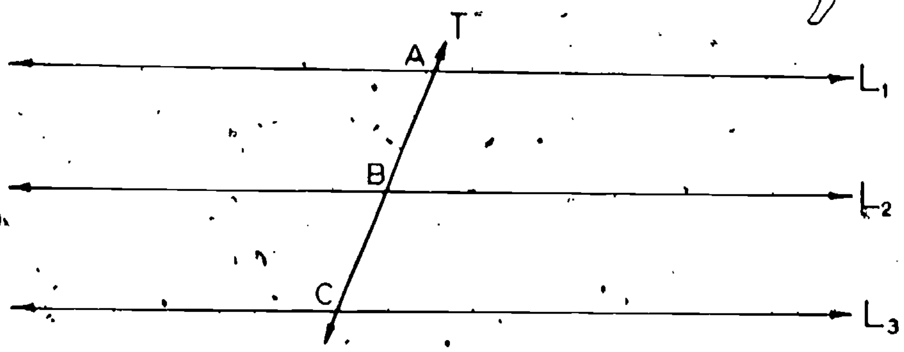
*20. Demuestra que las diagonales de un paralelogramo se intersecan.

9-7. Secantes a muchas rectas paralelas

Definiciones: Si una secante corta a dos rectas L_1, L_2 en los puntos A y B, entonces decimos que L_1 y L_2 recortan o marcan el segmento $\overline{AB}$ en la secante.



Supongamos que tenemos tres rectas dadas L_1, L_2, L_3 y una secante que las corta en los puntos A, B y C. Si AB = BC, entonces decimos que las tres rectas recortan segmentos congruentes en la secante.



Demostraremos lo siguiente:

Teorema 9-26. Si tres rectas paralelas recortan segmentos congruentes en una secante, entonces recortan segmentos congruentes en cualquier otra secante.

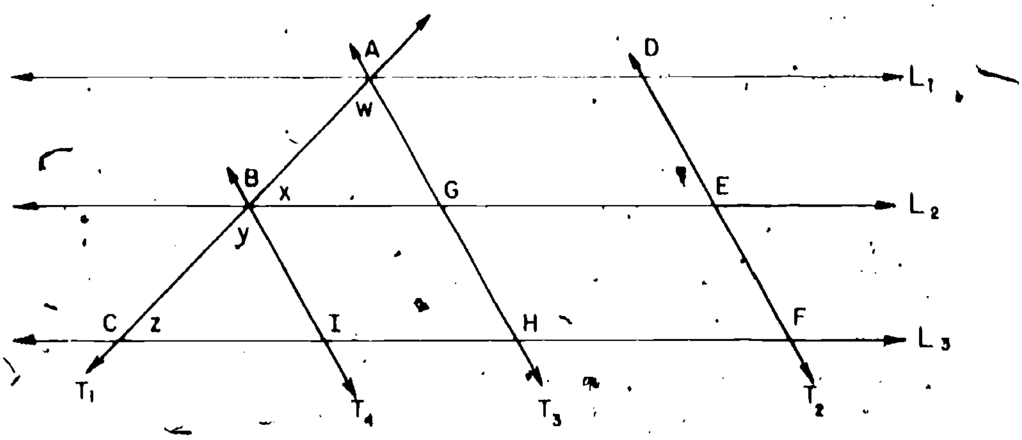
Demostración: Sean L_1, L_2 y L_3 rectas paralelas, cortadas por una secante T_1 en los puntos A, B y C. Sea T_2 otra secante, que corta a estas rectas en D, E y F. Sabemos que

$$AB = BC,$$

y necesitamos demostrar que

$$DE \cong EF.$$

Demostraremos primero el teorema en el caso en que T_1 y T_2 <u>no</u> son paralelas, y $A \neq D$, como en la figura:



Sea T_3 la recta que pasa por A, paralela a T_2, y que corta a L_2 y L_3 en G y H; y sea T_4 la recta que pasa por B, paralela a T_2, y que corta a L_3 en I. Sean $\angle x$, $\angle y$, $\angle w$, $\angle z$ los que indica la figura.

Afirmaciones	Razones
1. $\angle x \cong \angle z$	1. Por el teorema 9-9
2. $AB = BC$	2. Hipótesis
3. $T_3 \parallel T_4$	3. Por el teorema 9-11
4. $\angle w \cong \angle y$	4. Por el teorema 9-9
5. $\triangle ABG \cong \triangle BCI$	5. A.L.A.
6. $AG = BI$	6. Definición de triángulos congruentes
7. AGED y BIFE son paralelogramos	7. Definición de paralelogramos
8. $AG = DE$ y $BI = EF$	8. Los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes.
9. $DE = EF$	9. Pasos 6 y 8

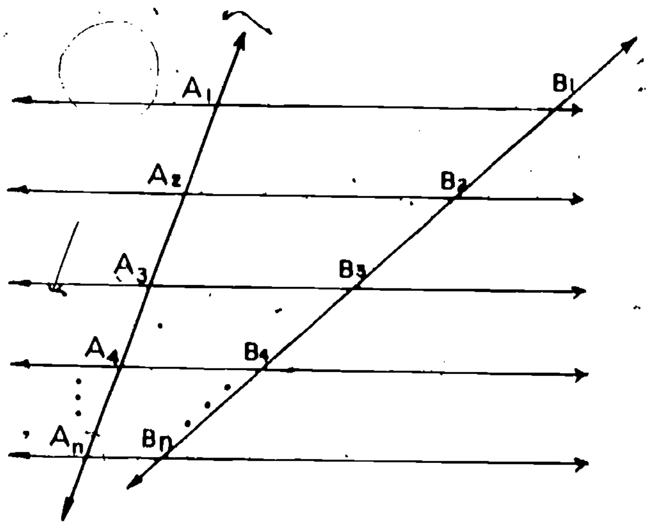
Esto demuestra el teorema para el caso en que las dos secantes no son paralelas y cortan a L_1 en dos puntos diferentes. Los otros casos son fáciles.

(1) Si las dos secantes son paralelas, como T_2 y T_3 en la figura, entonces el teorema es cierto, porque los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes. (Así, si $AG = GH$, se deduce que $DE = EF$.)

(2) Si las dos secantes se intersecan en A, como T_1 y T_3 en la figura, entonces el teorema es cierto; de hecho, ya hemos demostrado que si $AB = BC$, entonces $AG = GH$.

El siguiente corolario es una generalización del teorema 9-26.

Corolario 9-26-1. Si tres o más rectas paralelas recortan segmentos congruentes en una secante, entonces recortan segmentos congruentes en cualquier otra secante.



Esto es, dado que

$$A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \ldots,$$

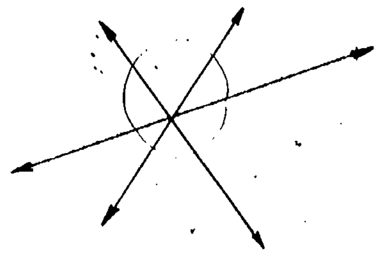
se deduce que

$$B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = \ldots,$$

y así sucesivamente. Esto se demuestra mediante repetidas aplicaciones del teorema que acabamos de demostrar.

Definición: Dos o más conjuntos son concurrentes, si hay un punto que pertenece a todos los conjuntos.

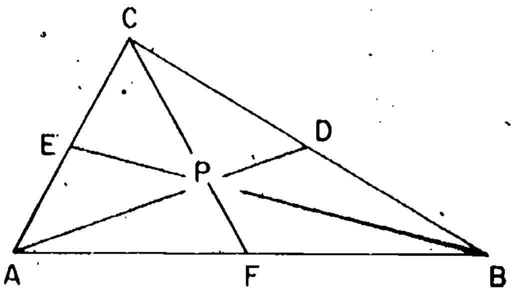
En particular, tres o más rectas son concurrentes, si todas pasan por un punto.



El teorema siguiente es una aplicación interesante del corolario 9-26-1.

Teorema 9-27. Las medianas de un triángulo son concurrentes en un punto que está a dos tercios de la distancia de cualquier vértice al punto medio del lado opuesto.

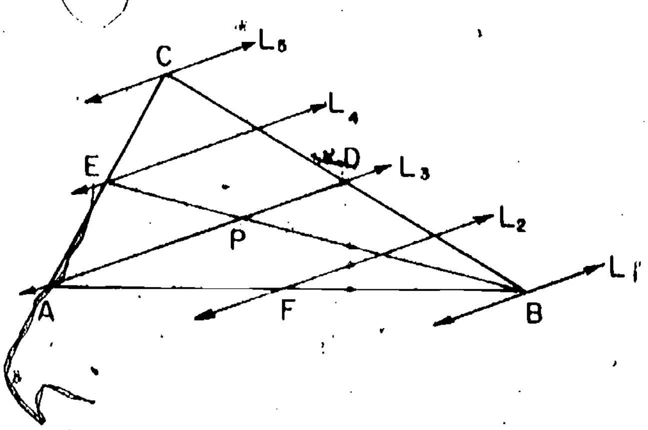
Datos: En el $\triangle ABC$, D, E, y F son los puntos medios de $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$, respectivamente.



Demostrar: Hay un punto P que está en $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$; y $AP = \frac{2}{3}AD$, $BP = \frac{2}{3}BE$, $CP = \frac{2}{3}CF$.

Bosquejo de la demostración:

(1)

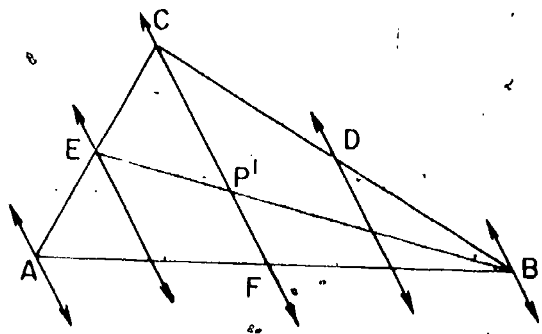


Sean L_1, L_2, L_3, L_4 y L_5, con $L_3 = \overleftrightarrow{AD}$, cinco rectas paralelas que dividen a $\overline{CB}$ en cuatro segmentos congruentes. Entonces

(a) L_3, L_4, L_5 dividen a $\overline{AC}$ en dos segmentos congruentes, y, por lo tanto, E está en L_4.

(b) L_1, L_2, L_3, L_4 dividen a $\overline{BE}$ en tres segmentos congruentes, y por eso, si P es el punto de intersección de $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$, entonces $BP = \frac{2}{3}BE$.

(2)



De la misma manera, con rectas paralelas a $\overleftrightarrow{CF}$, encontramos que si P' es la intersección de $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$, entonces $BP' = \frac{2}{3}BE$.

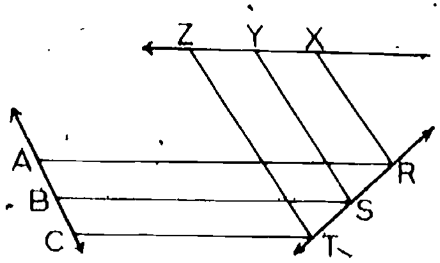
(3) De (1) y (2), y del teorema 2-4, obtenemos que P' = P, y, por lo tanto, las tres medianas son concurrentes.

(4) Como sabemos ahora que $\overline{CF}$ pasa por P, podemos fácilmente deducir que $CP = \frac{2}{3}CF$, de la figura de (1), y en forma análoga, de la figura de (2), que $AP = \frac{2}{3}AD$.

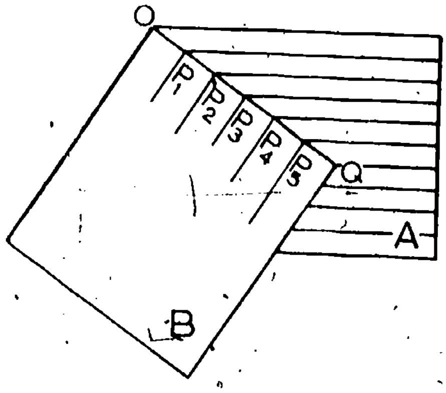
Definición: El centroide de un triángulo es el punto de concurso de las medianas.

Conjunto de problemas 9-7

1. Datos: AB = BC,
$\overline{AR} \parallel \overline{BS} \parallel \overline{CT}$,
$\overline{RX} \parallel \overline{SY} \parallel \overline{TZ}$.
   a. Demuestra que ZY = YX.
   b. ¿Tendrán $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{TR}$ y $\overleftrightarrow{ZX}$ que estar en un plano para que puedas llevar a cabo la demostración?



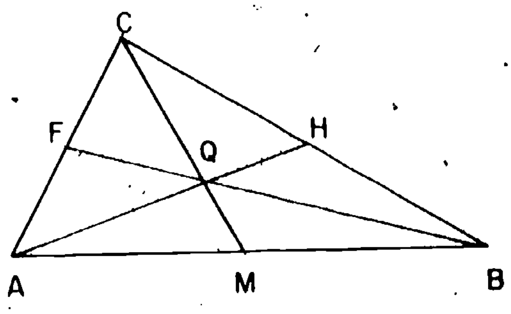
2. El procedimiento ilustrado a la derecha puede seguirse para rayar una hoja de papel, B, en columnas de igual ancho. Si A es una hoja corriente de papel rayado y B es una segunda hoja colocada sobre ella en la forma indicada, explica por qué $OP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_4 = P_4P_5 = P_5Q$.



3. Divide un segmento dado $\overline{AB}$ en cinco partes congruentes mediante el siguiente procedimiento:
   (1) Traza el rayo $\overrightarrow{AR}$ (no alineado con $\overline{AB}$).
   (2) Usa tu regla para marcar segmentos congruentes $\overline{AN_1}$, $\overline{N_1N_2}$, $\overline{N_2N_3}$, $\overline{N_3N_4}$ y $\overline{N_4N_5}$ de cualquier longitud conveniente.
   (3) Traza $\overline{N_5B}$.
   (4) Mide el $\angle AN_5B$ y, con tu transportador, dibuja ángulos correspondientes congruentes al $\angle AN_5B$ con vértices en N_4, N_3, N_2 y N_1.

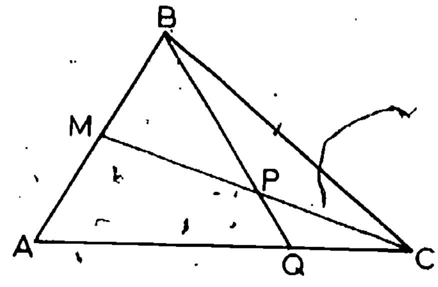
   Explica por qué $\overline{AB}$ está dividido en partes congruentes.

4. Las medianas del $\triangle ABC$ se encuentran en Q, según se ve en la figura. Si $BF = 18$, $AQ = 10$, $CM = 9$, entonces $BQ =$ _____, $QH =$ _____, $CQ =$ _____.

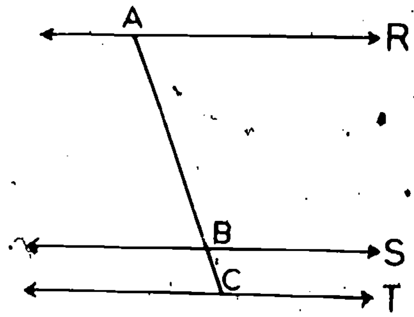


5. En el triángulo equilátero $\triangle ABC$, si una mediana tiene 15 pulgadas de longitud, ¿cuál es la distancia del centroide a A? ¿Y al punto medio de $\overline{AB}$? ¿Y al lado $\overline{AC}$?

*6. Datos: $\overline{CM}$ biseca a $\overline{AB}$ en M.
$\overline{BQ}$ biseca a $\overline{CM}$ en P.
Demuestra que Q es un punto de trisección de $\overline{AC}$; es decir, $AQ = 2QC$.
(Sugerencia: Sobre el rayo opuesto a $\overrightarrow{CB}$ toma el punto E de manera que $CE = CB$, y muestra que $\overline{BQ}$ está contenido en una mediana del $\triangle ABE$.)

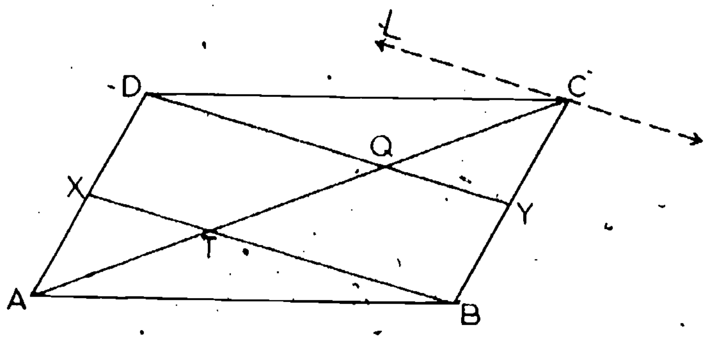


*7. En cada uno de los siguientes casos, ¿cuál es el menor número de segmentos congruentes en que $\overline{AC}$ puede ser dividido por algún conjunto de paralelas <u>con igual separación una de otra</u> y que incluya las paralelas $\overleftrightarrow{AR}$, $\overleftrightarrow{BS}$ y $\overleftrightarrow{CT}$?



a. $AB = 2$ y $BC = 1$
b. $AB = 1\frac{1}{3}$ y $BC = 1$
c. $AB = 21$ y $BC = 6$
d. $AB = 1.414$ y $BC = 1$
e. $AB = \sqrt{2}$ y $BC = 1$

*8. Demuestra que las rectas que pasan por vértices opuestos de un paralelogramo y por los puntos medios de los lados opuestos trisecan a una diagonal.
(Sugerencia: Por un extremo de la diagonal, traza una paralela a una de las rectas.)
Datos: ABCD es un paralelogramo,
X, Y son puntos medios.
Demuestra que $AT = TQ = QC$.



Problemas de repaso

1. Indica si cada una de las siguientes afirmaciones es cierta en TODOS los casos, cierta en ALGUNOS casos y falsa en otros, o cierta en NINGUN caso, marcando la pregunta con la letra T, A o N:

   a. Segmentos rectilíneos en el mismo plano que no tengan punto común alguno son paralelos.
   b. Si dos lados de un cuadrilátero ABCD son paralelos, entonces ABCD es un trapecio.
   c. Dos ángulos en un plano que tienen sus lados respectivamente perpendiculares son congruentes.
   d. Si dos rectas paralelas son cortadas por una secante, entonces un par de ángulos alternos externos son congruentes.
   e. Si dos rectas son cortadas por una secante, entonces los rayos que bisecan a un par de ángulos alternos internos son paralelos.
   f. En un plano, si una recta es paralela a una de dos rectas paralelas, es paralela a la otra.
   g. En un plano, dos rectas o son paralelas o se intersecan.
   h. En un paralelogramo, los ángulos opuestos son suplementarios.
   i. Las diagonales de un rombo se bisecan.
   j. Todos los ángulos externos de un triángulo son agudos.

k. Un cuadrilátero que tiene dos ángulos opuestos rectos es un rectángulo.
l. Las diagonales de un rombo son congruentes.
m. Si un cuadrilátero es equilátero, entonces todos sus ángulos son congruentes.
n. Si dos lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes y los otros dos lados son paralelos, el cuadrilátero es un paralelogramo.
o. Las diagonales de un rombo bisecan a los ángulos del rombo.
p. Si las diagonales de un paralelogramo son perpendiculares, el paralelogramo es un cuadrado.
q. Si una mediana de un lado de un triángulo no es una altura, los otros dos lados tienen longitudes desiguales.
r. Cualquiera de las diagonales de un paralelogramo forma dos triángulos congruentes con los lados.
s. Si una diagonal de un cuadrilátero lo divide en dos triángulos congruentes, el cuadrilátero es un paralelogramo.
t. Si dos rectas son cortadas por una secante, los ángulos alternos internos son congruentes.
u. Los cuatro lados de un rectángulo son congruentes.
v. Los cuatro ángulos de un rombo son congruentes.
w. Un cuadrado es un rombo.
x. Un cuadrado es un rectángulo.

2. Determina si la siguiente información acerca de un cuadrilátero bastaría para demostrar que es un paralelogramo; o un cuadrado; o un rombo; o un rectángulo. Considera cada parte de la información por separado.

a. Sus diagonales se bisecan.
b. Sus diagonales son congruentes.
c. Es equilátero.
d. Es equilátero y equiángulo.
e. Una diagonal biseca a dos ángulos.
f. Cada dos lados opuestos son congruentes.
g. Hay dos lados consecutivos que son congruentes y perpendiculares
h. Las diagonales son perpendiculares.

i. Cada dos ángulos opuestos son congruentes.

j. Cada diagonal biseca a dos ángulos.

k. Cada dos ángulos consecutivos son suplementarios.

l. Cada dos lados consecutivos son congruentes.

3. ∠A y ∠B tienen sus lados respectivamente paralelos.

a. Si solamente un par de lados correspondientes se extienden en la misma dirección, los ángulos son ________.

b. Si los lados correspondientes se extienden en direcciones opuestas, entonces los ángulos son ________.

En los problemas 4, 5 y 6 siguientes, escoge la palabra o frase que hace cierta la afirmación.

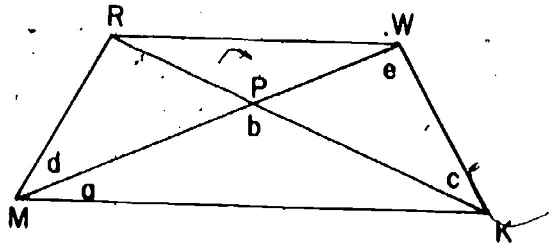
4. Las bisectrices de los ángulos opuestos de un paralelogramo no equilátero (a) coinciden, (b) son perpendiculares, (c) se intersecan pero no son perpendiculares, (d) son paralelas.

5. La figura formada al unir los puntos medios consecutivos de los lados de un rombo es (a) un rombo, (b) un rectángulo, (c) un cuadrado, (d) ninguna de las alternativas anteriores.

*6. La figura formada al unir los puntos medios consecutivos de los lados del cuadrilátero ABCD es un cuadrado (a) si, y solamente si, las diagonales de ABCD son congruentes y perpendiculares, (b) si, y solamente si, las diagonales de ABCD son congruentes, (c) si, y solamente si, ABCD es un cuadrado, (d) si, y solamente si, las diagonales de ABCD son perpendiculares.

7. En la columna que sigue a la izquierda se especifican ciertas condiciones. En la columna de la derecha, se dejan para que completes algunas conclusiones deducibles.

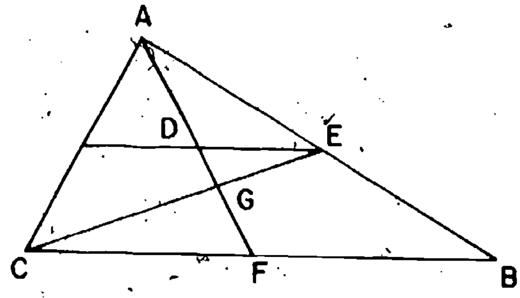
Dato: $\overline{MW}$ y $\overline{KR}$ son diagonales de MKWR.



Condiciones	Conclusiones
a. MKWR es un paralelógramo, $m\angle a = 30$ y $m\angle WKM = 110$.	$m\angle d =$ _____ y $m\angle RWK =$ _____.
b. MKWR es un rectángulo y $m\angle a = 30$.	$m\angle d =$ _____ y $m\angle b =$ _____.
c. MKWR es un rombo, $m\angle a = 30$ y $MK = 6$.	$m\angle b =$ _____ y $RK =$ _____.

8. Datos: En la figura, $AE = EB$, $GF = 8$, $CF = FB$, $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{CB}$.

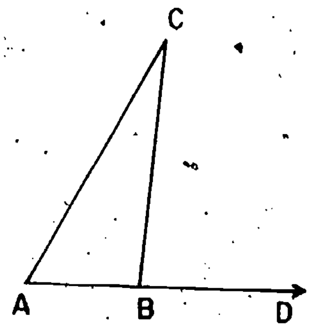
Halla DG.



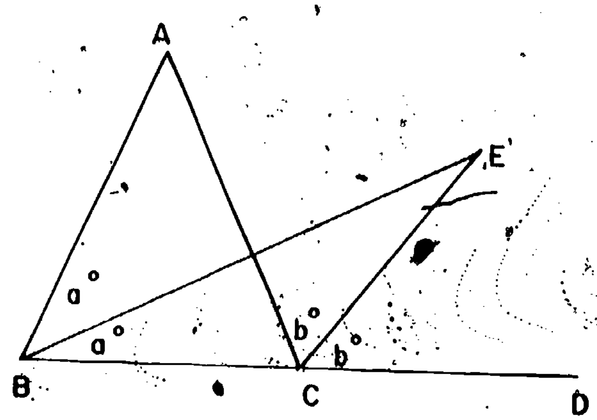
9. Si el perímetro (suma de las longitudes de los lados) de un triángulo es 18 pulgadas, ¿cuál es el perímetro del triángulo formado al unir los puntos medios de los lados del primer triángulo?

10. a. Si $m\angle A = 30$ y $m\angle C = 25$, ¿cuál es la medida del $\angle CBD$?

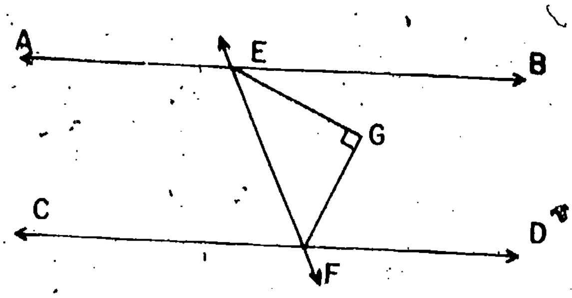
b. Si $m\angle A = a$ y $m\angle C = \frac{a}{2}$, ¿cuánto es $m\angle CBD$?; ¿y $m\angle ABC$?



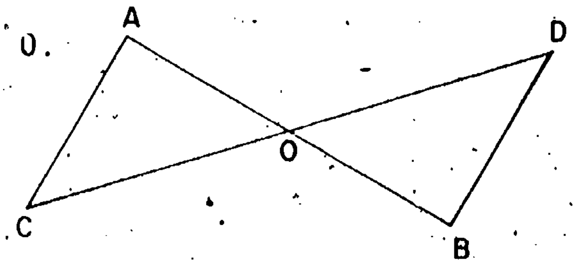
11. Demuestra que la medida del $\angle E$, formado por la bisectriz del $\angle ABC$ y la bisectriz del ángulo externo $\angle ACD$ del $\triangle ABC$, es igual a $\frac{1}{2} m\angle A$.



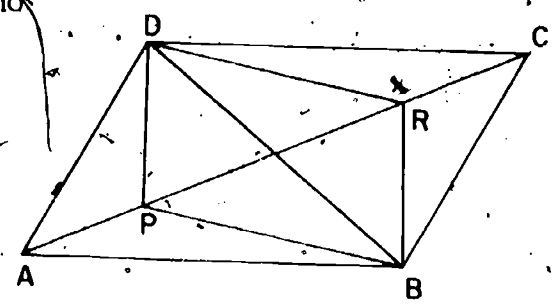
12. En la figura, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EG}$ biseca al $\angle BEF$, $m\angle G = 90$. Si la medida del $\angle GEF = 25$, ¿cuál es la medida del $\angle GFD$?



13. Dato: $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se bisecan en O. Demuestra que $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$.



14. Datos: ABCD es un paralelogramo con diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{DB}$, $AP = RC = \frac{1}{2}AC$. Demuestra que DPBR es un paralelogramo.



15. Demuestra que es cierto o falso lo siguiente:

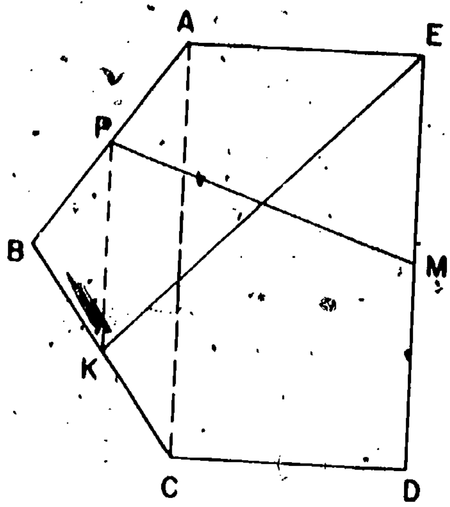
Si un cuadrilátero tiene un par de lados paralelos y un par de lados congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

*16. En el $\triangle ABC$, la mediana $\overline{AM}$ es congruente a $\overline{MC}$. Demuestra que el $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo.

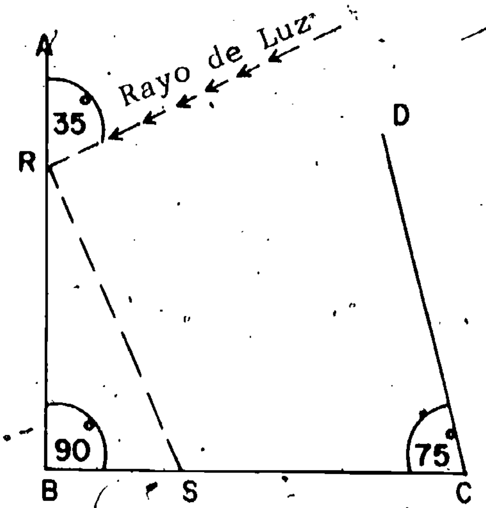
17. Demuestra que si las bisectrices de dos ángulos consecutivos de un paralelogramo se intersecan, son perpendiculares entre sí.

*18. Datos: ABCDE es un pentágono según aparece en la figura, $\overleftrightarrow{AE} \parallel \overleftrightarrow{CD}$, $AE = CD$, P es el punto medio de $\overline{AB}$, K es el punto medio de $\overline{BC}$, $EM = \frac{1}{2}ED$.

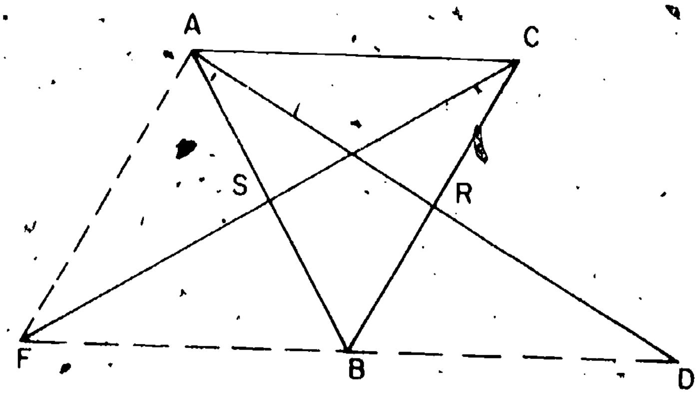
Demuestra que $\overline{KE}$ biseca a $\overline{PM}$.



19. Cuando un rayo de luz se refleja sobre una superficie lisa, el ángulo entre el rayo incidente y la superficie es congruente al ángulo entre el rayo reflejado y la superficie. En la figura siguiente, $m\angle ABC = 90$, $m\angle BCD = 75$, y el rayo de luz forma un ángulo de 35° con $\overline{AB}$. Copia la figura y completa la trayectoria del rayo de luz cuando se refleja sobre $\overline{AB}$, sobre $\overline{BC}$, sobre $\overline{DC}$ y de nuevo sobre $\overline{AB}$. ¿Según qué ángulo se refleja sobre $\overline{AB}$ el rayo de luz la segunda vez?



20. Se da el triángulo ABC en el que $\overline{AR}$ y $\overline{CS}$ son medianas. Si prolongamos $\overline{AR}$ su propia longitud hasta D, y si prolongamos $\overline{CS}$ su propia longitud hasta F, demuestra que F, B y D, señalados en la figura, están alineados.



Capítulo 10

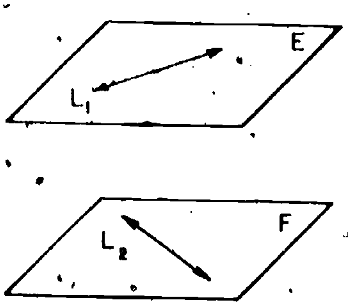
PARALELAS EN EL ESPACIO

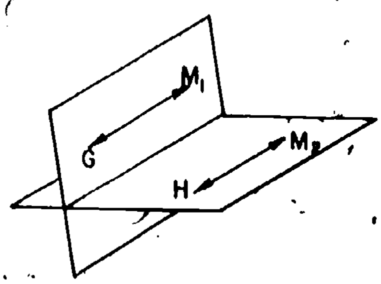
10-1. Planos paralelos

<u>Definición</u>: Dos planos, o un plano y una recta, son <u>paralelos</u> si no se intersecan.

Si los planos E_1 y E_2 son paralelos escribimos $E_1 \parallel E_2$; si la recta L y el plano E son paralelos escribimos $L \parallel E$ o $E \parallel L$. Como veremos pronto, las paralelas en el espacio se comportan de manera algo parecida a las rectas paralelas en un plano. Para estudiarlas no necesitamos nuevos postulados.

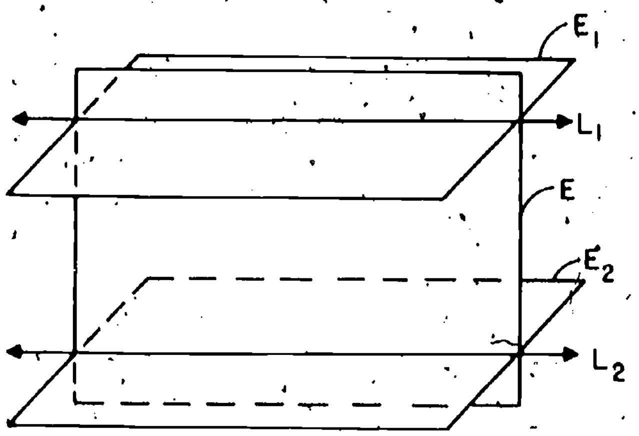
Sin embargo, a pesar de las semejanzas, es necesario, al estudiar teoremas y sus demostraciones en este capítulo, distinguir cuidadosamente entre <u>rectas</u> paralelas y <u>planos</u> paralelos. Dos planos paralelos, como E y F de la primera de las figuras siguientes, contienen rectas tales como L_1 y L_2, que <u>no</u> son paralelas. Y la segunda figura presenta las rectas paralelas M_1 y M_2 que están en los planos <u>que se cortan</u>, G y H.





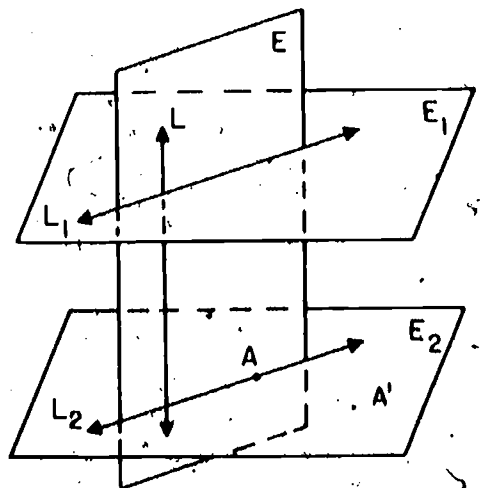
El teorema siguiente describe una situación corriente en la que planos paralelos y rectas paralelas aparecen en la misma figura.

Teorema 10-1. Si un plano corta a dos planos paralelos, entonces la intersección consiste en dos rectas paralelas.



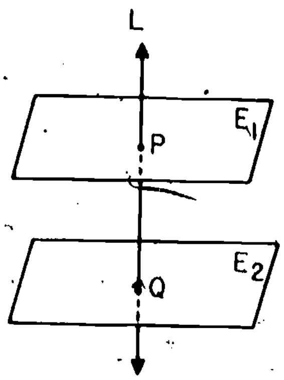
Demostración: Sea dado un plano E, que corta a dos planos paralelos E_1 y E_2. Por el postulado 8, las intersecciones son las rectas L_1 y L_2. Estas rectas están en el mismo plano E; y no tienen punto común alguno porque E_1 y E_2 no tienen ningún punto común. Por lo tanto, son paralelas, por la definición de rectas paralelas.

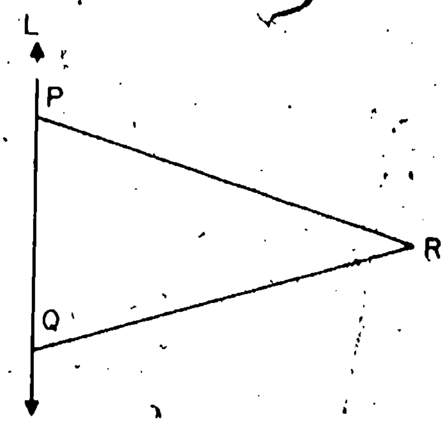
Teorema 10-2. Si una recta es perpendicular a uno de dos planos paralelos, es perpendicular al otro.



Demostración: Sean los planos E_1 y E_2 paralelos, y sea la recta L perpendicular a E_1. En E_2 tomemos un punto A, que no esté en L, y sea E el plano determinado por L y A. Por el teorema precedente, la intersección de E con E_1 y E_2 consiste en las rectas paralelas L_1 y L_2. $L \perp L_1$, porque $L \perp E_1$, y así, por el teorema 9-12 (repásalo), $L \perp L_2$. Ahora tomamos un punto A' en E_2, pero no en L_2, y repetimos el proceso. Así conseguimos dos rectas en E_2, cada una perpendicular a L, y, por tanto, $L \perp E_2$, por el teorema 8-3.

Teorema 10-3. Dos planos perpendiculares a la misma recta son paralelos.





Demostración: La figura de la izquierda muestra lo que ocurre cuando $E_1 \perp L$ en P y $E_2 \perp L$ en Q. Queremos demostrar que $E_1 \parallel E_2$. Si E_1 y E_2 no son paralelos, se cortan. Sea R un punto común. Consideremos las rectas $\overleftrightarrow{PR}$ y $\overleftrightarrow{QR}$. Entonces $L \perp \overleftrightarrow{PR}$ y $L \perp \overleftrightarrow{QR}$, porque L es perpendicular a toda recta en E_1 que pasa por P y a toda recta en E_2 que pasa por Q. Esto nos da dos perpendiculares a una recta desde un punto externo a ella, lo que es imposible, por el teorema 6-3.

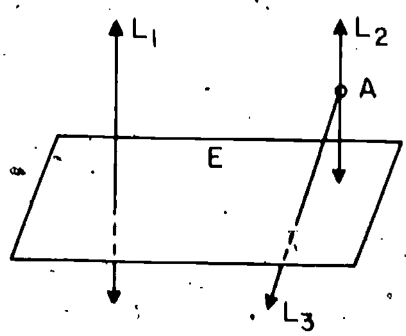
Corolario 10-3-1. Si dos planos son paralelos a un tercer plano, son paralelos entre sí.

Demostración: Sea $E_1 \parallel E_3$ y $E_2 \parallel E_3$. Sea L una recta perpendicular a E_3. Por el teorema 10-2, $L \perp E_1$ y $L \perp E_2$. Así, E_1 y E_2 son perpendiculares a L, y $E_1 \parallel E_2$, por el teorema 10-3.

Teorema 10-4. Dos rectas perpendiculares al mismo plano son paralelas.

Demostración: Por el teorema 8-8 dos rectas tales están en un mismo plano. Como son perpendiculares al plano dado, digamos en los puntos A y B, son perpendiculares a $\overleftrightarrow{AB}$. Por lo tanto, por el teorema 9-2 son paralelas.

Corolario 10-4-1. Un plano perpendicular a una de dos rectas paralelas es perpendicular a la otra.

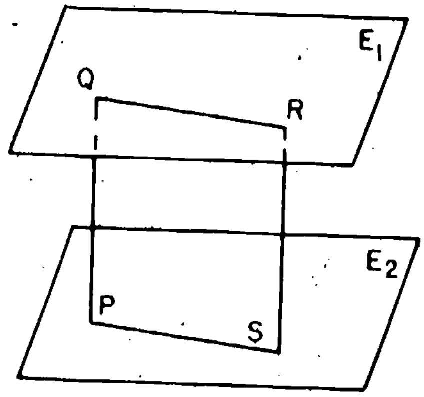


Demostración: Sea $L_1 \parallel L_2$ y $L_1 \perp E$. Sea L_3 una recta perpendicular a E y que pasa por cualquier punto A de L_2. L_3 existe por el teorema 8-10. Entonces, por el teorema 10-4, $L_1 \parallel L_3$. Por lo tanto, por el postulado de las paralelas, $L_3 = L_2$, y así $L_2 \perp E$.

Corolario 10-4-2. Si dos rectas son paralelas a una tercera, son paralelas entre sí.

Demostración: Sea $L_1 \parallel L_2$ y $L_1 \parallel L_3$. Sea E un plano perpendicular a L_1. Por el corolario anterior, $E \perp L_2$ y $E \perp L_3$, y, por lo tanto, en virtud del teorema anterior, $L_2 \parallel L_3$.

Teorema 10-5. Dos planos paralelos son equidistantes en toda su extensión. Es decir, todos los segmentos perpendiculares a los dos planos y con sus extremos en los planos tienen la misma longitud.



Demostración: Sean $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$ segmentos perpendiculares entre los planos paralelos E_1 y E_2. Por el teorema 10-2, cada uno de los segmentos es perpendicular a cada uno de los planos. Por el teorema 10-4, $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{RS}$; y esto significa, en particular, que $\overleftrightarrow{PQ}$ y $\overleftrightarrow{RS}$ están en el mismo plano E_3. Por el teorema 10-1, $\overleftrightarrow{QR} \parallel \overleftrightarrow{PS}$. Por lo tanto, PQRS es un paralelogramo. Los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes. Por lo tanto, PQ = RS. Esto es lo que se quería demostrar. (Obviamente PQRS es un rectángulo, pero esto no tiene por qué mencionarse en la demostración.)

Conjunto de problemas 10-1

1. Haz un pequeño dibujo que ilustre la hipótesis de cada una de las siguientes afirmaciones, y debajo de cada dibujo indica si la afirmación es cierta o falsa.
   a. Si una recta es perpendicular a uno de dos planos paralelos, es perpendicular al otro.
   b. Dos rectas paralelas al mismo plano pueden ser perpendiculares entre sí.
   c. Dos planos perpendiculares a la misma recta pueden cortarse.
   d. Si un plano interseca a dos planos que se cortan, las rectas de intersección pueden ser paralelas.

e. Si dos planos son ambos perpendiculares a cada una de dos rectas paralelas, los segmentos de las dos rectas comprendidos entre los planos son congruentes.

f. Si dos planos, perpendiculares a la misma recta, son cortados por un tercer plano, las rectas de intersección son paralelas.

g. Si una recta está en un plano, una perpendicular a la recta es perpendicular al plano.

h. Si una recta está en un plano, una perpendicular al plano en algún punto de la recta es perpendicular a la recta.

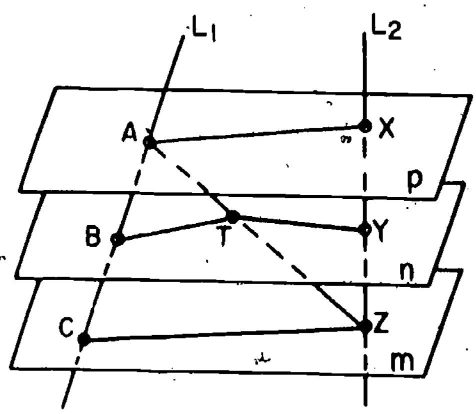
i. Si dos rectas son paralelas, todo plano que contiene solamente a una de ellas es paralelo a la otra.

j. Si dos rectas son paralelas, toda recta que corta a una de ellas corta a la otra.

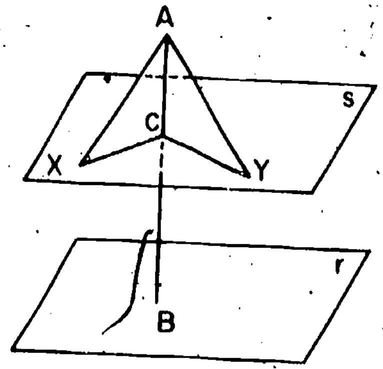
k. Si dos planos son paralelos, cualquier recta en uno de ellos es paralela al otro.

l. Si dos planos son paralelos, cualquier recta en uno de ellos es paralela a cualquier recta en el otro.

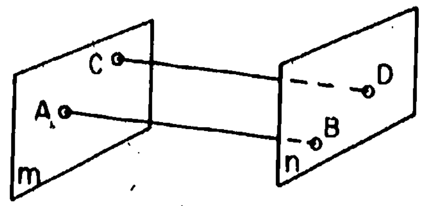
2. Dadas las rectas L_1 y L_2 que cortan a los planos paralelos m, n y p en los puntos A, B, C y X, Y, Z, siendo B el punto medio de $\overline{AC}$. Demuestra que XY = YZ.



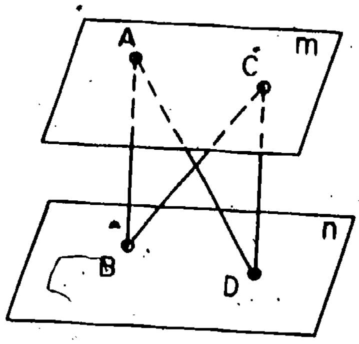
3. Datos: El plano $s \parallel$ plano r, $\overline{AB} \perp r$, $CX = CY$ en el plano s. Demuestra que $AX = AY$.



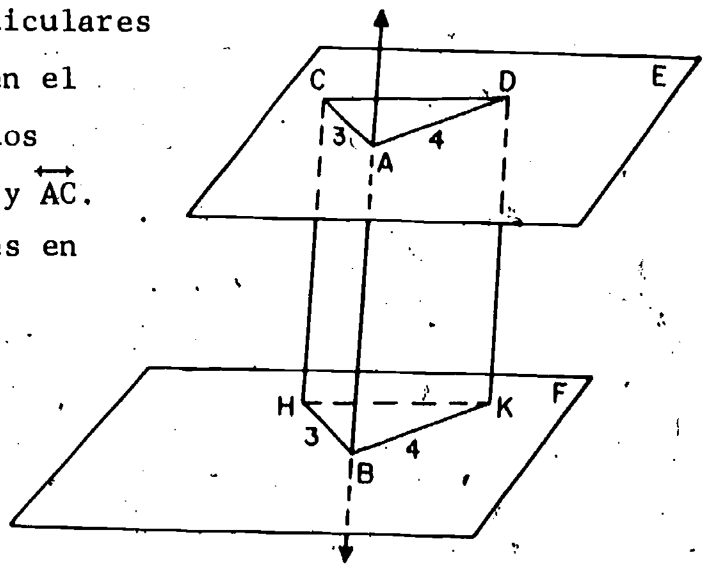
4. Datos: A, C en m; B, D en n, $m \perp \overline{AB}$, $n \perp \overline{AB}$, $m \perp \overline{CD}$. Demuestra que $n \perp \overline{CD}$.



5. Datos: En la figura, $m \parallel n$, $\overline{AB} \perp n$, $\overline{CD} \perp n$. Demuestra que $AD = CB$.

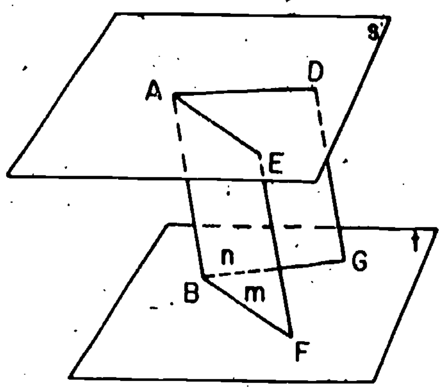


*6. Los planos E y F son perpendiculares a $\overleftrightarrow{AB}$. Las rectas $\overleftrightarrow{BK}$ y $\overleftrightarrow{BH}$, en el plano F, determinan con $\overleftrightarrow{AB}$ dos planos que cortan a E en $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{AC}$. Se indican algunas longitudes en la figura.



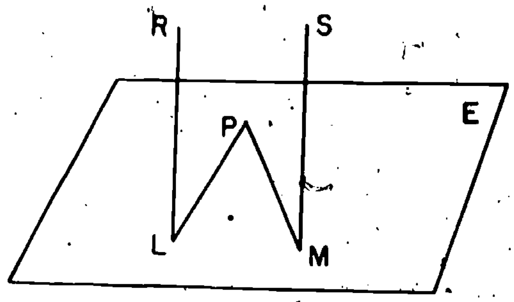
¿Son paralelogramos BKDA y BACH? ¿Podrás describirlos en mayor detalle? ¿Es $\triangle BHK \cong \triangle CAD$? ¿Puedes dar la longitud de $\overline{CD}$?

*7. En la figura, los semiplanos n y m tienen una arista común $\overleftrightarrow{AB}$ y cortan a los planos paralelos s y t en las rectas $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{BG}$, y $\overleftrightarrow{BF}$, según se muestra en la misma figura. Demuestra que $\angle DAE \cong \angle GBF$.



*8. Muestra cómo determinar un plano que contenga a una de dos rectas alabeadas y sea paralelo a la otra. Demuestra la validez de tu construcción.

*9. Datos: $\overline{PL}$ y $\overline{PM}$ están en el plano E, $\overline{RL} \perp \overline{LP}$, $\overline{SM} \perp \overline{MP}$, $\overline{RL} \parallel \overline{SM}$. Demuestra que $\overline{RL} \perp E$, $\overline{SM} \perp E$. (Sugerencia: En P, dibuja $\overline{QP} \parallel \overline{RL}$.)

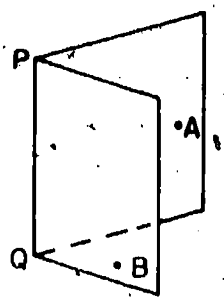


10-2. Angulos diedros, planos perpendiculares

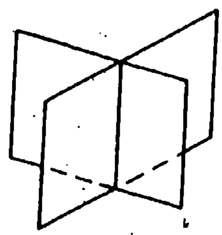
Hemos considerado la perpendicularidad entre dos rectas, y entre una recta y un plano. Todavía no hemos definido la perpendicularidad entre dos planos. Esto se puede hacer de varias maneras, y escogemos la que tiene más estrecha analogía con la definición de rectas perpendiculares.

Definiciones: Un ángulo diedro es la reunión de una recta y dos semiplanos no coplanarios que tienen la recta como arista común. (Compara con la definición de ángulo en el capítulo 4.) La recta se llama la arista del ángulo diedro. La reunión de la arista y cualquiera de los semiplanos se llama una cara, o lado, del ángulo diedro.

Si $\overleftrightarrow{PQ}$ es la arista, y A y B puntos en caras diferentes, indicamos el ángulo diedro por $\angle$A-PQ-B.

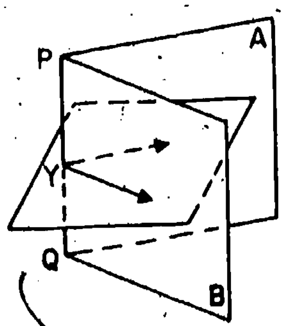


De modo análogo a lo explicado en las páginas 94 y 95, vemos que dos planos que se cortan determinan cuatro ángulos diedros.



Palabras tales como <u>opuestos por la arista</u>, <u>interior</u>, <u>exterior</u>, etc. se pueden aplicar a los ángulos diedros. Las definiciones de estos términos quedan como ejercicio para el alumno.

Para definir ángulos diedros rectos, sin embargo, necesitamos hablar acerca de la <u>medida</u> de un ángulo diedro. Pudiera uno pensar en la necesidad de introducir cuatro nuevos postulados, análogos a los de la sección 4-3. Sin embargo, esto no es necesario, porque podemos relacionar cada ángulo diedro con un ángulo corriente, así:



<u>Definición</u>: Por cualquier punto de la arista del ángulo diedro trazamos un plano perpendicular a la arista, que corta a cada una de las caras en un rayo. El ángulo formado por estos rayos se llama ángulo <u>rectilíneo</u> correspondiente al diedro, o ángulo plano del diedro.

Los lados del ángulo rectilíneo son perpendiculares a la arista del ángulo diedro, de modo que, otra manera de definir el ángulo rectilíneo sería como el ángulo formado por dos rayos, uno en cada cara del ángulo diedro, y perpendiculares a su arista en el mismo punto.

Es natural ahora que usemos la medida del ángulo rectilíneo como una medida del diedro, pero antes de hacerlo así deberemos demostrar que dos ángulos rectilíneos cualesquiera de un diedro tienen la misma medida.

<u>Teorema</u> <u>10-6</u>. Dos ángulos rectilíneos cualesquiera de un ángulo diedro dado son congruentes.

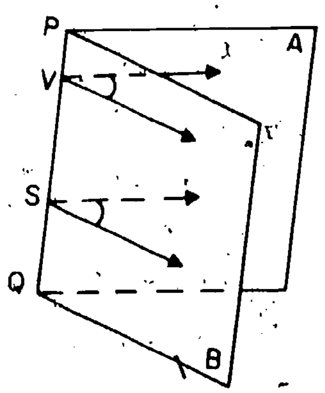


Figura A

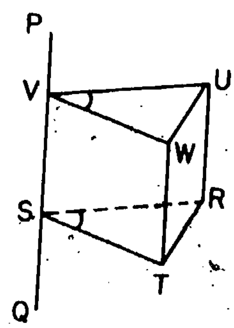


Figura B

Demostración: Sean V y S los vértices de dos ángulos rectilíneos del diedro $\angle$A-PQ-B. (Figura A) Sobre los lados del $\angle$V, tomemos puntos U y W, distintos de V. Sobre los lados del $\angle$S, tomemos puntos R y T tales que SR = VU, ST = VW. (Figura B) $\overline{VU}$ y $\overline{SR}$ están en un mismo plano y son perpendiculares a $\overline{PQ}$; por consiguiente, son paralelos por el teorema 9-2. Ahora, por el teorema 9-20 (repásalo), VURS es un paralelogramo y UR = VS y $\overline{UR} \parallel \overline{VS}$. Análogamente, WT = VS y $\overline{WT} \parallel \overline{VS}$. Por tanto, UR = WT y $\overline{UR} \parallel \overline{WT}$, esto último se deduce del corolario 10-4-2. Así, pues, URTW es un paralelogramo y UW = RT. Según el teorema L.L.L., ΔUVW $\cong$ ΔRST, y entonces m$\angle$UVW = m$\angle$RST.

Podemos, pues, proponer las siguientes definiciones:

Definiciones: La medida de un ángulo diedro es el número real que es la medida de cualquiera de sus ángulos rectilíneos. Un ángulo diedro se llama ángulo diedro recto si sus ángulos rectilíneos son rectos. Dos planos son perpendiculares si determinan diedros rectos.

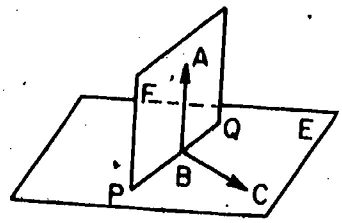
Las siguientes son algunas consecuencias inmediatas de estas definiciones. Dejamos las demostraciones como ejercicios.

Corolario 10-6-1. Si una recta es perpendicular a un plano, entonces cualquier plano que contenga esta recta es perpendicular al plano dado.

Datos: $\overleftrightarrow{AB} \perp E$, F contiene a $\overleftrightarrow{AB}$.

Demuestra que $F \perp E$.

(Sugerencia: En E, dibujemos $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{PQ}$.)

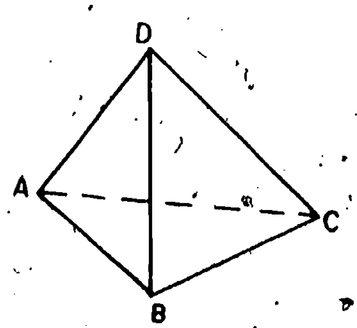


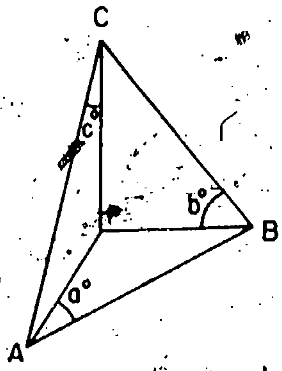
Corolario 10-6-2. Si dos planos son perpendiculares, entonces cualquier recta en uno de ellos perpendicular a su recta de intersección, es perpendicular al otro plano.

(Sugerencia: En la figura anterior, dado $F \perp E$ y $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{PQ}$; demuestra que $\overleftrightarrow{AB} \perp E$. Toma $\overleftrightarrow{BC}$ como antes.)

Conjunto de problemas 10-2

1. Nombra seis ángulos diedros en la figura tridimensional de la derecha.





2. Cada uno de los segmentos $\overline{AP}$, $\overline{BP}$ y $\overline{CP}$ es perpendicular a los otros dos. a = b = c = 45. ¿Cuál es la medida del ∠C-PA-B?; ¿y del ∠CAB?

3. Haz un pequeño dibujo que ilustre la hipótesis de cada una de las siguientes afirmaciones, e indica luego si cada una es cierta (1) o falsa (0):
   a. Si un plano y una recta que no está en él son ambos perpendiculares a la misma recta, son paralelos entre sí.
   b. Si un plano y una recta que no está en él son ambos paralelos a la misma recta, son paralelos entre sí.
   c. Si los planos paralelos E y F son cortados por el plano Q, las rectas de intersección son perpendiculares.
   d. Si dos planos son paralelos a la misma recta, son paralelos entre sí.
   e. Dos rectas paralelas al mismo plano son paralelas entre sí.
   f. Los segmentos de rectas paralelas comprendidos entre dos planos paralelos son congruentes.
   g. Si los planos E y F son perpendiculares a $\overleftrightarrow{AB}$, entonces se cortan en la recta $\overleftrightarrow{HQ}$.
   h. Dos planos perpendiculares al mismo plano son paralelos.
   i. Dos rectas perpendiculares a la misma recta en el mismo punto son perpendiculares entre sí.
   j. Un plano perpendicular a uno de dos planos que se cortan necesariamente corta al otro.
   k. Si cada uno de dos planos que se cortan es perpendicular a un tercer plano, la recta en que se cortan es perpendicular al tercer plano.

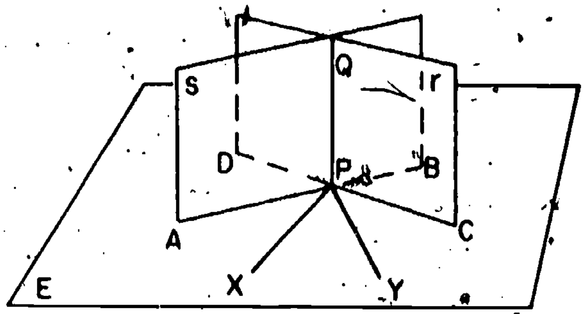
4. Demuestra que si cada uno de dos planos que se cortan es perpendicular a un tercer plano, su intersección es perpendicular

al tercer plano.

Datos: Los planos r y s se cortan en $\overline{PQ}$ (P se toma, por conveniencia, en el plano E), $r \perp E$ y $s \perp E$.

Demuestra que $\overline{QP} \perp E$.

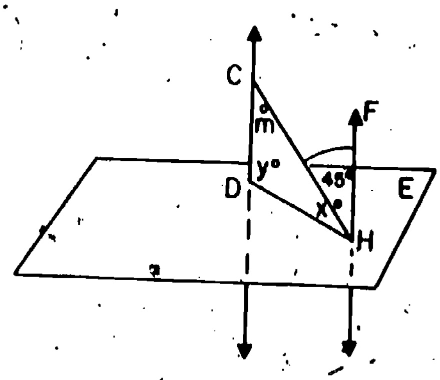
(Sugerencia: En el plano E, dibuja $\overline{XP} \perp \overline{DC}$ y también $\overline{YP} \perp \overline{AB}$, y aplica el corolario 10-6-2.)



5. $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{FH}$ son perpendiculares al plano E. Otra información aparece en la figura.

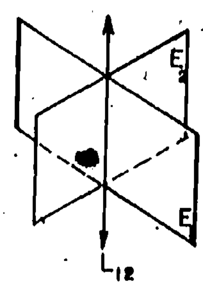
x = ___?___; m = ___?___; y = ___?___.

¿Qué dos segmentos tienen la misma longitud?

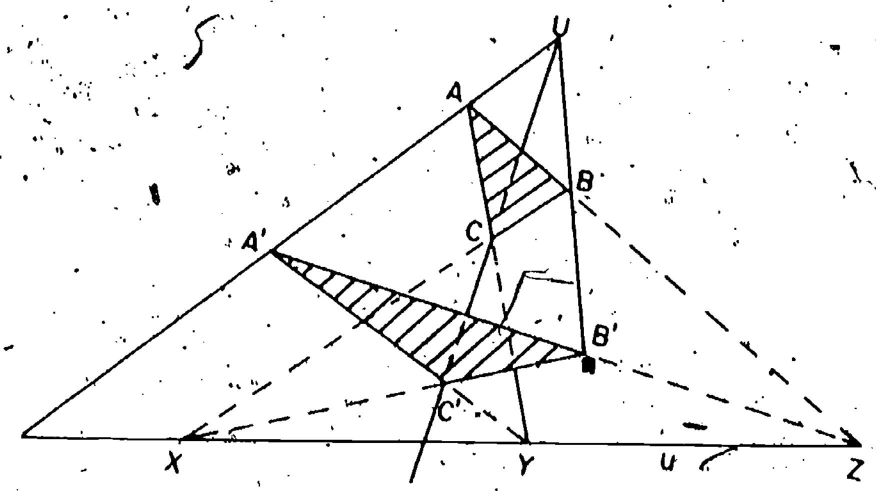


*6. Demuestra el siguiente teorema: Si tres planos E_1, E_2 y E_3 se cortan dos a dos y determinan tres rectas L_{12}, L_{13}, y L_{23}, entonces o las tres rectas son concurrentes o cada par de dichas rectas son paralelas.

(Sugerencia: La figura muestra E_1 y E_2 que se encuentran en L_{12}. Si $E_3 \parallel L_{12}$, ¿serán concurrentes o paralelas las tres rectas L_{12}, L_{13} y L_{23}? Presenta una demostración. Si E_3 corta a L_{12} en algún punto P, ¿serán las tres rectas concurrentes o paralelas? Presenta una demostración.)



*7. Teorema de Desargues. Si dos triángulos que están en planos no paralelos son tales que las rectas que unen los vértices correspondientes son concurrentes en un punto, entonces si las rectas-lados correspondientes se cortan, sus puntos de intersección están alineados.



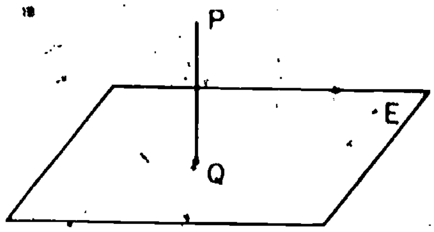
De otro modo: Dados los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ en planos no paralelos, de manera que $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ y $\overleftrightarrow{CC'}$ se cortan en U, sea X el punto de intersección de las rectas $\overleftrightarrow{CB}$ y $\overleftrightarrow{C'B'}$, Y el punto de intersección de $\overleftrightarrow{CA}$ y $\overleftrightarrow{C'A'}$, y Z el de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{A'B'}$. Demuestra que los puntos X, Y, Z están en una recta.

10-3. Proyecciones

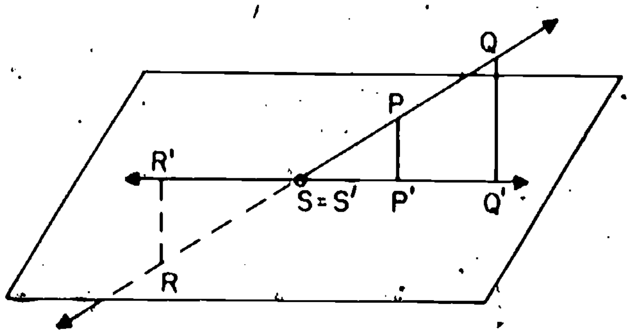
Indudablemente que has visto un proyector que proyecta cada punto de una diapositiva en una pantalla. Cada figura en la diapositiva se proyecta como una figura ampliada en la pantalla. En esta sección notarás ciertas diferencias y ciertas semejanzas entre este tipo conocido de proyección y la clase de proyección geométrica que presentaremos.

Definición: La proyección de un punto sobre un plano es el pie de la perpendicular que va del punto al plano. (Por el teorema 8-10, esta perpendicular existe y es única.)

En la figura, Q es la proyección de P sobre E.

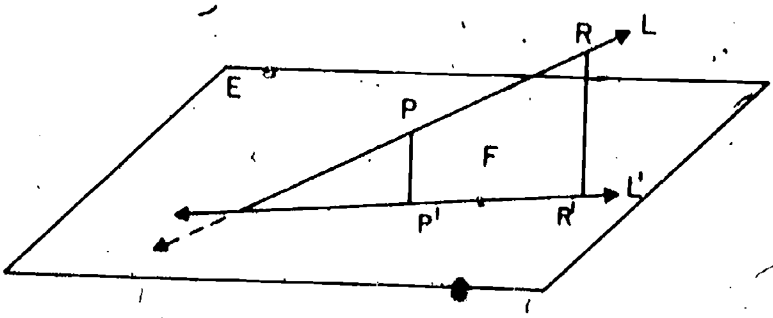


Definición: La proyección de una recta sobre un plano es el conjunto de puntos que son proyecciones sobre el plano de los puntos de la recta.



En la figura, P' es la proyección de P, Q' es la proyección de Q, y así sucesivamente. Tal parece que la proyección de una recta es una recta; y, de hecho, esto es siempre cierto, excepto cuando la recta y el plano son perpendiculares.

Teorema 10-7. La proyección de una recta sobre un plano es una recta, a menos que la recta y el plano sean perpendiculares.



Demostración: Sea L una recta no perpendicular al plano E.

Caso 1. L está en E. Entonces todo punto de L está en E y es su propia proyección. (Es decir, una recta que pasa por un punto P, y es perpendicular a E, corta a E en P.) Así, la proyección de L es justamente L misma, y, por tanto, es ciertamente una recta.

Caso 2. L no está en E. Sea P un punto de L que no está en E, sea P' la proyección de P sobre E, y sea F el plano determinado por las rectas L y $\overleftrightarrow{PP'}$ que se cortan. F y E tienen el punto común P', y, por tanto, se intersecan en una recta que llamaremos L': (Postulado 8) Queremos demostrar que L' es la proyección de L.

Para hacer esto, debemos mostrar dos cosas:

(1) Si R es un punto de L, entonces su proyección es un punto de L'. Esto nos demuestra que la proyección de L está en L', pero no nos asegura que la proyección de L es la <u>totalidad</u> de L'. Para mostrar esto, deberemos probar que

(2) Si S' es cualquier punto de L', habrá un punto S de L cuya proyección es S'.

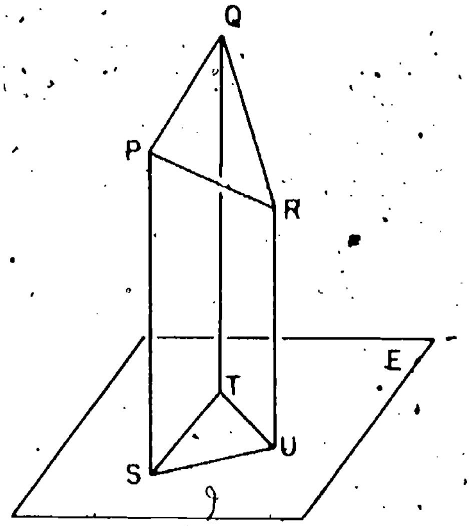
Podemos demostrar estas dos partes del caso 2 como sigue:

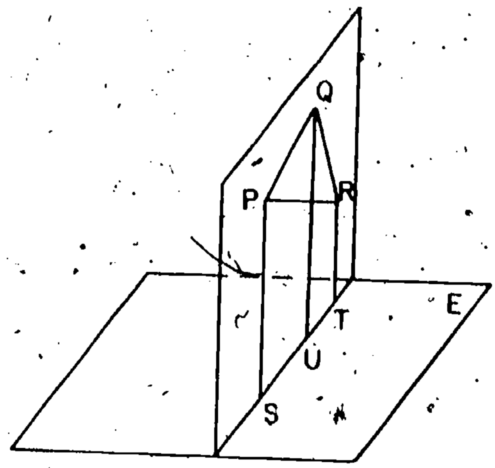
Demostración de (1): Si R = P, entonces R' = P', y así, R' está en L'. Por tanto, supongamos que R es diferente de P. Entonces $\overleftrightarrow{PP'}$ y $\overleftrightarrow{RR'}$ están en un mismo plano, por el teorema 8-8. Como F es el único plano que contiene a P, R y P' (Postulado 7), R' está en F. Ahora, R' está también en E. Por lo tanto, R' está en L', ya que L', siendo la intersección de E y F, contiene a <u>todos</u> los puntos comunes a E y F.

Demostración de (2): Si S' es cualquier punto de L', entonces la recta M que pasa por S' y es perpendicular a E está en un plano con $\overleftrightarrow{PP'}$ (o coincide con $\overleftrightarrow{PP'}$ si S' = P'), y por eso, está en F. Por lo tanto, M corta a L (¿por qué?) en algún punto S. S' es la proyección de S. Esto completa la demostración del teorema 10-7.

Si una recta es perpendicular a un plano, su proyección sobre el plano es un solo punto.

La idea de proyección puede definirse con mayor generalidad, para cualquier conjunto de puntos. Si A es un conjunto de puntos, entonces la proyección de A sobre el plano E es sencillamente el conjunto de todas las proyecciones de puntos de A. Por ejemplo, la proyección de un triángulo es generalmente un triángulo, aunque en algunos casos excepcionales puede ser un segmento.





A la izquierda, la proyección del $\triangle PQR$ es el $\triangle STU$. A la derecha, el plano que contiene al $\triangle PQR$ es perpendicular a E, de manera que la proyección del $\triangle PQR$ es sencillamente el segmento $\overline{ST}$.

<u>Conjunto de problemas 10-3</u>

1. Usando la clase de proyección explicada en la sección 10-3, contesta las siguientes preguntas:
   a. ¿Será siempre un punto la proyección de un punto?
   b. ¿Será siempre un segmento la proyección de un segmento?
   c. ¿Podrá ser un rayo la proyección de un ángulo? ¿Podrá ser una recta?; ¿un ángulo?
   d. ¿Podrá ser un ángulo obtuso la proyección de un ángulo agudo?
   e. ¿Es siempre un ángulo recto la proyección de un ángulo recto?

f. ¿Podrá ser la longitud de la proyección de un segmento mayor que la longitud del segmento?

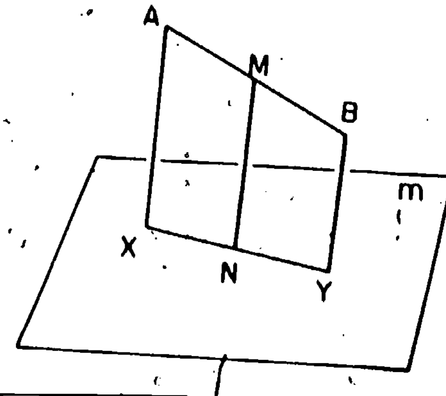
2. a. Si dos segmentos son congruentes, ¿serán congruentes sus proyecciones?

   b. Si dos rectas se cortan, ¿podrán sus proyecciones ser dos rectas paralelas?

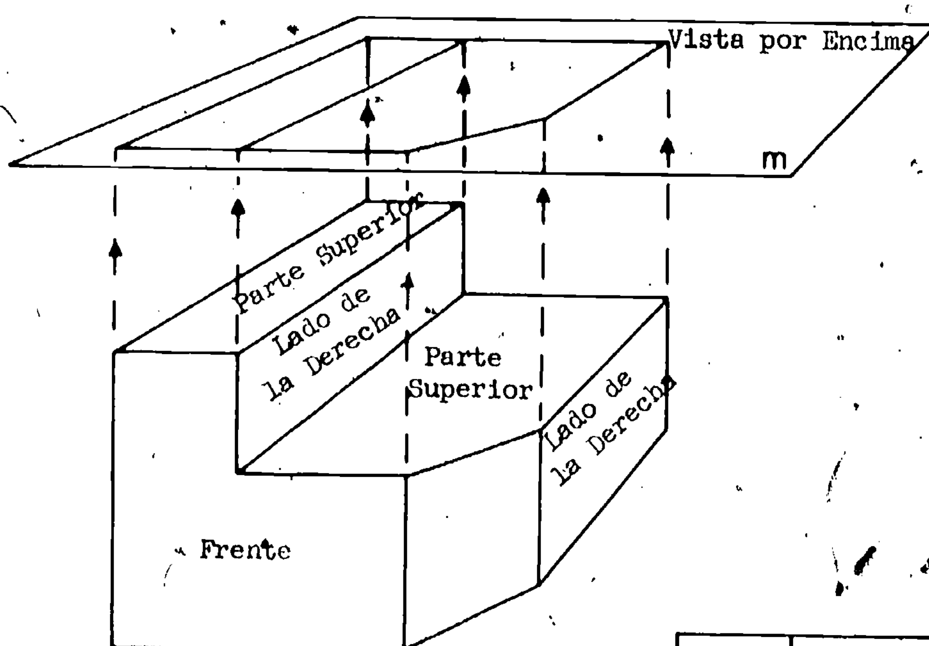
   c. Si dos rectas no se cortan, ¿podrán sus proyecciones ser dos rectas que se cortan?

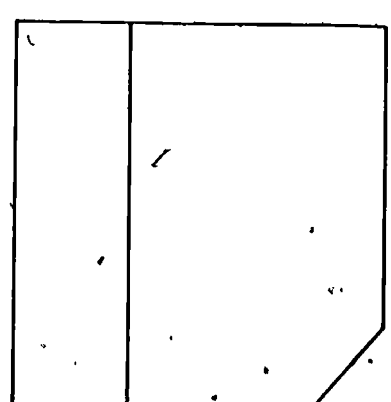
   d. Si dos segmentos son paralelos y congruentes, ¿serán congruentes sus proyecciones?

3. Dada la figura de la derecha en la que $\overline{AB}$ no está en el plano m, $\overline{XY}$ es la proyección de $\overline{AB}$ sobre el plano m, M es el punto medio de $\overline{AB}$, y N es la proyección de M, demuestra que N es el punto medio de $\overline{XY}$.



4.





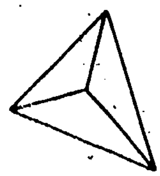
Vista por Encima

En el dibujo ingenieril la vista por encima o "planta" de un cuerpo geométrico puede considerarse como la proyección de los varios segmentos del cuerpo sobre un plano horizontal m, tal como se ve en perspectiva a la izquierda. La vista por encima tal como se dibujaría en la práctica aparece a la derecha. (No tratamos de indicar aquí las dimensiones de los segmentos.)

a. Dibuja una vista de frente del cuerpo ilustrado en la página anterior; es decir, dibuja el resultado de proyectar los segmentos del cuerpo sobre un plano paralelo a la cara del frente.

b. Dibuja la vista de perfil de la derecha del cuerpo.

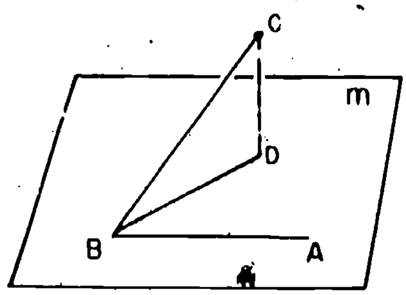
5. La proyección de un tetraedro (pirámide triangular) sobre el plano de su base puede parecerse a la figura de la derecha. ¿En qué otra forma podría verse?



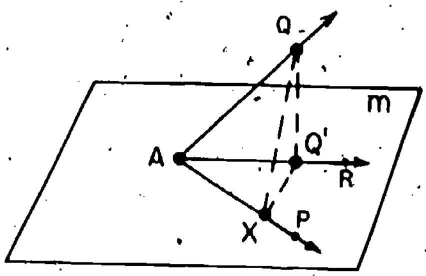
6. Datos: $\overline{BD}$ es la proyección de $\overline{BC}$ sobre el plano m, $\overline{AB}$ está en el plano m, y el $\angle ABC$ es un ángulo recto.

Demuestra que $\angle ABD$ es un ángulo recto.

(Sugerencia: Sea $\overline{BE}$ perpendicular al plano m.)



*7. Datos: $\overrightarrow{AQ}$ tiene la proyección $\overrightarrow{AR}$ sobre el plano m. $\overrightarrow{AP}$ es cualquier otro rayo desde A en el plano m. (Nota: El $\angle QAR$ se llama el ángulo de $\overrightarrow{AQ}$ con el plano m.)

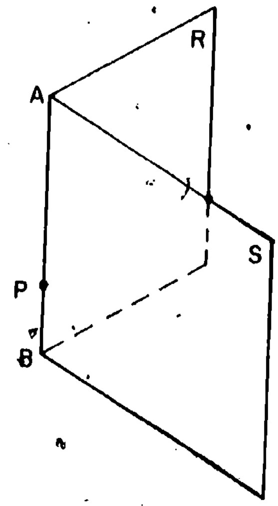


Demuestra que $m\angle QAR < m\angle QAP$.
(Sugerencia: Sea Q' la proyección de Q sobre m. Sobre $\overline{AP}$ tomemos X de manera que AX = AQ'. Dibuja $\overline{QQ'}$, $\overline{Q'X}$ y $\overline{QX}$.)

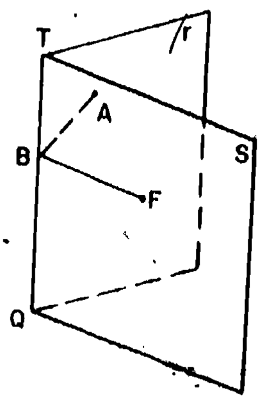
*8. Si la diagonal de un cubo es perpendicular a un plano dado, dibuj la proyección sobre el plano de todas las aristas del cubo. (No se requiere una demostración.)

Problemas de repaso

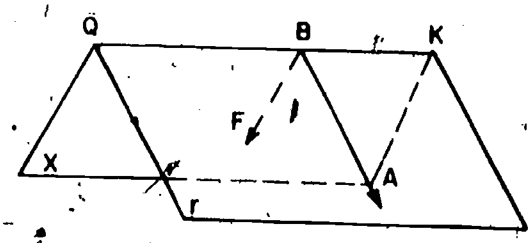
1. Supongamos que el ángulo $\angle R\text{-}AB\text{-}S$ es un diedro agudo en el que P es un punto de su arista. ¿Podemos tomar en las dos caras los rayos $\overrightarrow{PX}$ y $\overrightarrow{PY}$ de manera que:
   a. sea agudo el $\angle XPY$?
   b. sea obtuso el $\angle XPY$?
   c. sea recto el $\angle XPY$?



2. Los planos r y s se cortan en $\overleftrightarrow{TQ}$. B es un punto entre T y Q. $\overline{AB}$ está en r. $m\angle TBA = 40$. $\overline{FB}$ está en s. $m\angle FBQ = \cancel{90}$. ¿Es el $\angle ABF$ un ángulo rectilíneo del diedro $\angle TQ$? ¿Podrás determinar $m\angle ABF$? Si puedes, enuncia un teorema que justifique tu conclusión.



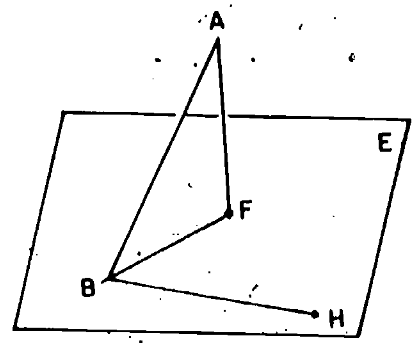
3. Los planos x y r se cortan en $\overleftrightarrow{QK}$. B es un punto entre K y Q. $\overrightarrow{BA}$ está en r. $\overrightarrow{BF}$ está en x. $m\angle ABK = 90$. $m\angle QBF = 90$. ¿Es el $\angle FBA$ un ángulo rectilíneo del diedro $\angle QK$? Si contestas que sí, enuncia un teorema o definición que apoye tu respuesta. Si $m\angle ABF = 80$, ¿será $r \perp x$? Si $r \perp x$, ¿cuánto es $m\angle ABF$?



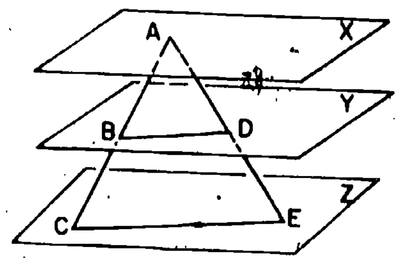
4. Indica si cada una de las siguientes afirmaciones es cierta en todos los casos (T), cierta en algunos casos y falsa en otros (A), o cierta en ningún caso (N):
   a. Dos rectas paralelas al mismo plano son perpendiculares entre sí.
   b. Si un plano interseca a cada uno de dos planos que se cortan, las rectas de intersección son paralelas.
   c. Si una recta está en un plano, una perpendicular a la recta es perpendicular al plano.
   d. Si dos planos son paralelos, cualquier recta en uno de ellos es paralela al otro.
   e. Si dos planos son paralelos a la misma recta, son paralelos entre sí.
   f. Dos rectas perpendiculares a la misma recta en el mismo punto son perpendiculares entre sí.
   g. Si cada uno de dos planos que se cortan es perpendicular a un tercer plano, su recta de intersección es perpendicular al tercer plano.
   h. La proyección de un segmento es un segmento.
   i. La proyección de un ángulo recto es un ángulo recto.
   j. Segmentos congruentes tienen proyecciones congruentes.
   k. Dos rectas son paralelas si ambas son perpendiculares a la misma recta.
   l. Si un plano es perpendicular a cada una de dos rectas, las dos rectas están en un mismo plano.
   m. Si un plano corta a otros dos planos en rectas paralelas, entonces los dos planos son paralelos.

n. Si un plano corta las caras de un ángulo diedro, la intersección se llama un ángulo rectilíneo correspondiente al ángulo diedro.

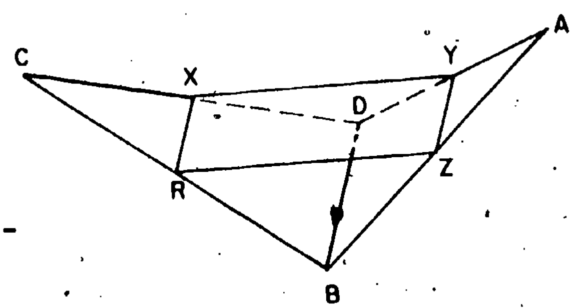
5. Datos: F es la proyección del punto A sobre el plano E. $\overline{BH}$ está en el plano E. El $\angle FBH$ és un ángulo recto.
Demuestra que el $\angle ABH$ es un ángulo recto.



6. Datos: Los planos X, Y y Z son paralelos según se ve en la figura, estando $\overline{CE}$ en Z y A en X, $\overline{AC}$ corta a Y en B, y $\overline{AE}$ corta a Y en D, AB = BC, AC = CE.
Demuestra que BD = BA.



7. Datos: R, Z, Y, X son los puntos medios, respectivamente, de los lados $\overline{CB}$, $\overline{BA}$, $\overline{AD}$, $\overline{DC}$ del cuadrilátero no plano CBAD.
Demuestra que RZYX es un paralelogramo.

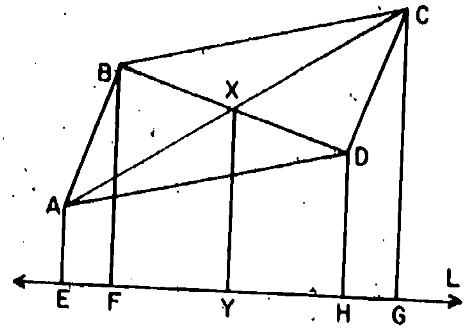


*8. En la siguiente afirmación incompleta, es posible llenar los espacios provistos en líneas sólidas con "la recta" o "el plano" y los espacios en líneas de trazos con $\parallel$ o $\perp$ de ocho maneras que hagan cierta la oración completa. Da cinco de esas maneras.

Si __________ A es ------ a __________ C, y __________ B es ------ a C, entonces A y B son ------.

*9. Datos: ABCD es un paralelogramo, L está en el plano de ABCD, y cada uno de $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{XY}$, $\overline{DH}$ y $\overline{CG}$ es perpendicular a L.

Demuestra que AE + CG = BF + DH.



Apéndice I

UNA TAQUIGRAFICA CONVENIENTE

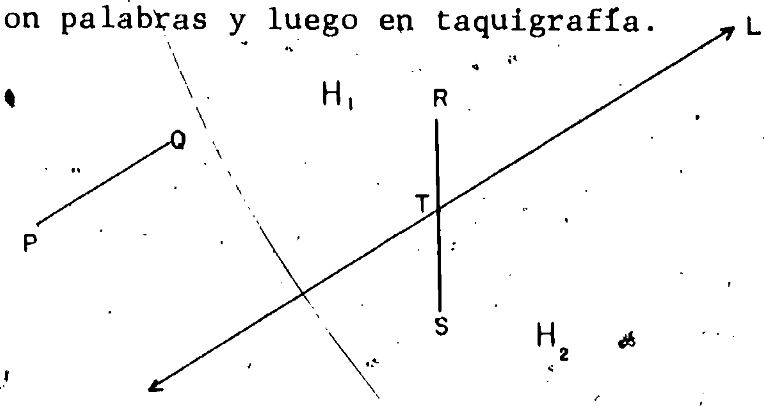
Hubo un tiempo en que era necesario escribir con palabras toda el álgebra. Con palabras podrías enunciar un problema algebraico así:

"Si cuadras un cierto número, y después agregas cinco veces el número y luego restas seis, el resultado es cero. ¿Qué números podrían ser elegidos como número original?"

Este problema se puede escribir en la siguiente forma abreviada: "Halla las raíces de la ecuación $x^2 + 5x - 6 = 0$".

La notación algebraica es una taquigrafía muy conveniente. Para hablar de conjuntos se inventó una taquigrafía análoga. Una vez que te acostumbres a ella, economizarás mucho tiempo y espacio, y si tu maestro no se opone, podrías utilizarla en tu trabajo escrito.

Empecemos con un diagrama y escribamos varias cosas acerca de él, primero con palabras y luego en taquigrafía.



Aquí vemos una recta L, que separa el plano E en dos semiplanos H_1 y H_2. Ahora digamos de dos maneras algunas cosas.

Con palabras	En taquigrafía
1. El segmento $\overline{PQ}$ está en H_1.	1. $\overline{PQ} \subset H_1$
2. La intersección de $\overline{RS}$ y L es T.	2. $\overline{RS} \cap L = T$

La expresión abreviada $\overline{PQ} \subset H_1$ se lee de la misma manera que su correspondiente expresión a la izquierda. En general, cuando escribimos $A \subset B$ queremos decir que el conjunto A está contenido en el conjunto B.

Una expresión del tipo $A \cap B$ denota la intersección de los conjuntos A y B. Observa que los conjuntos $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$ no se intersecan. Si convenimos en escribir para el conjunto vacío el símbolo $\emptyset$, entonces podemos expresar esta condición así:

$$\overline{PQ} \cap \overline{RS} = \emptyset.$$

Análogamente,

$$\overline{PQ} \cap L = \emptyset$$

y también

$$\overline{PQ} \cap H_2 = \emptyset.$$

Desde luego, $\overline{PQ}$ es un conjunto que está contenido en H_1. Pero el punto P es un <u>miembro</u> de H_1. En taquigrafía lo escribimos así:

$$P \in H_1.$$

Esto se lee, "P pertenece a H_1".

La reunión de dos conjuntos A y B se escribe $A \cup B$. Esto se lee, "A reunido con B", o mejor "reunión de A y B". Análogamente, para la reunión de tres conjuntos escribimos $A \cup B \cup C$. Por ejemplo, en la figura anterior, el plano E es la reunión de H_1, H_2 y L. Por lo tanto, podemos escribir

$$E = H_1 \cup H_2 \cup L.$$

Observa que en este caso (y siempre), una fórmula que contiene el signo "=" significa que lo que está a la izquierda del signo es lo mismo que lo que está a la derecha. El signo "=" es sencillamente una abreviatura de la palabra "es", como en la expresión $2 + 2 = 4$, que dice que dos más dos es cuatro.

Conjunto de problemas I

Considera los conjuntos A, B, C, etc., definidos de la siguiente manera:

A es el conjunto de todos los médicos.

B es el conjunto de todos los abogados.

C es el conjunto de todas las personas altas.

D es el conjunto de todas las personas que tocan el violín.

E es el conjunto de todas las personas que ganan mucho dinero.

F es el conjunto de todos los baloncelistas.

Escribe en forma abreviada los siguientes enunciados:

1. Todos los baloncelistas son altos.
2. Ningún médico es un abogado.
3. Ningún violinista gana mucho dinero, a menos que sea alto.
4. Ningún baloncelista es un violinista.
5. Todo aquel que sea un médico y además un abogado puede también tocar el violín.
6. Todo baloncelista que pueda tocar el violín gana mucho dinero.
7. El hombre X es un violinista alto.
8. El hombre Y es un próspero abogado.
9. El hombre Z es un baloncelista alto.

Apéndice II

POSTULADOS DE LA ADICION Y DE LA MULTIPLICACION

Los métodos para manejar los números reales mediante las operaciones de sumar y multiplicar, y las operaciones asociadas de restar y dividir están determinados por los once postulados que aparecen más adelante. En estos postulados y en las demostraciones de los teoremas que siguen se sobrentenderá que todas las letras representan números reales.

A-1. (Clausura respecto de la adición) $x + y$ es siempre un número real.

A-2. (Ley asociativa de la adición) $x + (y + z) = (x + y) + z$

A-3. (Ley conmutativa de la adición) $x + y = y + x$

A-4. (Existencia del 0) Existe un número único 0 tal que $x + 0 = x$ para todo x.

A-5. (Existencia de los negativos) Para cada x existe un número único $-x$ tal que $x + (-x) = 0$.

M-1. (Clausura respecto de la multiplicación) xy es siempre un número real.

M-2. (Ley asociativa de la multiplicación) $x(yz) = (xy)z$

M-3. (Ley conmutativa de la multiplicación) $xy = yx$

M-4. (Existencia del 1) Existe un número único 1 tal que $x \cdot 1 = x$ para todo x.

M-5. (Existencia de los recíprocos) Para cada número x, distinto de 0, existe un número único $\frac{1}{x}$ tal que $x \cdot \frac{1}{x} = 1$.

D. (Ley distributiva) $x(y + z) = xy + xz$

Los siguientes teoremas fundamentales ilustrarán cómo se utilizan estos postulados en casos sencillos:

Teorema II-1. Si $b = -a$, entonces $-b = a$.

Demostración: Por A-5, $b = -a$ significa lo mismo que $a + b = 0$. Por A-3, esto es lo mismo que $b + a = 0$. Por A-5, esto es lo mismo que $a = -b$.

Otra manera de enunciar este teorema es: $-(-a) = a$.

Teorema II-2. Para cualquier a, $a \cdot 0 = 0$.

Demostración:

$$\begin{aligned} a &= a\cdot 1 && \text{(M-4)}\\ &= a(1 + 0) && \text{(A-4)}\\ &= a\cdot 1 + a\cdot 0 && \text{(D)}\\ &= a + a\cdot 0 && \text{(M-4)} \end{aligned}$$

Luego por A-4, $a \cdot 0 = 0$.

Teorema II-3. $a(-b) = -(ab)$

Demostración:

$$\begin{aligned} ab + a(-b) &= a[b + (-b)] && \text{(D)}\\ &= a\cdot 0 && \text{(A-5)}\\ &= 0 && \text{(Teorema II-2)} \end{aligned}$$

Luego, por A-4, $a(-b) = -(ab)$.

Como un caso especial de este teorema, tenemos $a(-1) = -a$.

Definición. $x - y$ significará $x + (-y)$. Observa que, con esta definición, $a - a = 0$.

Teorema II-4. Si $a + b = c$, entonces $a = c - b$.

Demostración: Si $a + b = c$, entonces

$$\begin{aligned} (a + b) + (-b) &= c + (-b)\\ (a + b) + (-b) &= a + [b + (-b)] && \text{(A-2)}\\ &= a + 0 && \text{(A-5)}\\ &= a && \text{(A-4)} \end{aligned}$$

Por consiguiente, $a = c + (-b) = c - b$ por definición.

Teorema II-5. Si $ab = 0$, entonces o bien $a = 0$ ó $b = 0$.

Demostración: Para demostrar el teorema, bastará mostrar que si $a \neq 0$ entonces $b = 0$. Supongamos, pues, que $a \neq 0$. Entonces, por M-5, $\frac{1}{a}$ existe. Por lo tanto,

$$\frac{1}{a}(ab) = \frac{1}{a}\cdot 0 = 0 \qquad \text{(Teorema A-II-2)}$$

también,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a}(ab) &= (\frac{1}{a}\cdot a)\, b && \text{(M-2)}\\ &= 1\cdot b && \text{(M-5)}\\ &= b\cdot 1 && \text{(M-3)}\\ &= b && \text{(M-4)} \end{aligned}$$

Por consiguiente, $b = 0$.

Teorema II-6. (Ley de cancelación) Si $ab = ac$ y $a \neq 0$, entonces $b = c$.

Demostración: Si $ab = ac$, entonces $ab - ac = 0$. Por el teorema A-II-3, esto es lo mismo que $ab + a(-c) = 0$, ó, por D, es lo mismo que $a(b - c) = 0$. Puesto que $a \neq 0$, aplicando el teorema II-5, tenemos que $b - c = 0$. Por lo tanto, $b = c$.

Estos son solamente algunos ejemplos del uso de los postulados en las demostraciones de teoremas algebraicos fundamentales. Generalmente, en nuestro trabajo algebraico no utilizamos los postulados directamente, sino que utilizamos propiedades tales como las enunciadas en los teoremas II-4 y II-6.

Conjunto de problemas II

1. Demuestra cada uno de los siguientes teoremas:
   a. $(-a)(-b) = ab$
   b. $a(b-c) = ab - ac$
   c. Si $a - b = c$, entonces $a = b + c$.
   d. $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ (Sugerencia: Como primer paso, aplica D, considerando $(a + b)$ como un solo número.)
2. Dadas las definiciones:
   $x^2 = x \cdot x$,
   $2 = 1 + 1$,
   demuestra que
   $$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$
3. Demuestra que $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.
4. Definición:
   Demuestra cada uno de los siguientes:
   a. $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$
   b. $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
   c. $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$
   d. $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$.
   e. $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$
   f. $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$.
   g. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

Apéndice III

NUMEROS RACIONALES E IRRACIONALES

III-1. Cómo demostrar que un número es racional

Por definición, un número es racional si se puede expresar como la razón de dos enteros. Por lo tanto, si queremos demostrar que un número x es racional, tendremos que determinar dos enteros p y q tales que $\frac{p}{q} = x$. He aquí algunos ejemplos:

(1) El número $x = \frac{1}{2} + \frac{3}{7}$ es racional, porque

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{7} = \frac{7 + 6}{14} = \frac{13}{14}.$$

Por tanto, $x = \frac{p}{q}$ donde $p = 13$ y $q = 14$.

(2) El número $x = 1.23$ es racional, porque

$$1.23 = \frac{123}{100},$$

que es la razón de los dos enteros, 123 y 100.

(3) Si el número x es racional, entonces $2x$ también será racional. (Es decir, el duplo de un número racional es siempre racional.) Puesto que si

$$x = \frac{p}{q}$$

siendo p y q enteros, entonces será

$$2x = \frac{2p}{q},$$

donde el numerador $2p$ y el denominador q son ambos enteros.

(4) Si el número x es racional, entonces el número $x + \frac{2}{3}$ también será racional. Puesto que si

$$x = \frac{p}{q},$$

entonces

$$x + \frac{2}{3} = \frac{p}{q} + \frac{2}{3} = \frac{3p + 2q}{3q}$$

donde el numerador y el denominador son ambos enteros.

(5) Si x es un número racional, entonces $x^2 + x$ también será un número racional. Puesto que si

$$x = \frac{p}{q},$$

entonces

$$x^2 + x = \frac{p^2}{q^2} + \frac{p}{q} = \frac{p^2 + pq}{q^2},$$

donde el numerador y el denominador son enteros.

Conjunto de problemas III-1

1. Muestra que 0.2351 es un número racional.
2. Muestra que $\frac{2}{3} + \frac{5}{7}$ es racional.
3. Muestra que si x es un número racional, entonces $x - 5$ también será racional.
4. Muestra que si x es racional, entonces $2x - 7$ también será raciona
5. Muestra que $\frac{1}{3} + \frac{1}{17}$ es racional.
6. Muestra que la suma de dos números racionales cualesquiera es un número racional.
7. Muestra que $(\frac{17}{19})(\frac{23}{47})$ es racional.
8. Muestra que el producto de dos números racionales cualesquiera es un número racional.
9. Muestra que $\frac{3}{17} + \frac{23}{7}$ es racional.
10. Muestra que el cociente de dos números racionales cualesquiera es un número racional, siempre y cuando el divisor sea distinto de cero.
11. Dado que $\sqrt{2}$ es irracional, muestra que $\frac{\sqrt{2}}{2}$ también es irracional. (Sugerencia: Ahora que sabes algo acerca de las demostraciones indirectas, este problema te será más sencillo.)
12. Dado que π es irracional, muestra que $\frac{\pi}{5}$ también es irracional.

13. Muestra que el recíproco de todo número racional distinto de cero es racional.

14. Muestra que el recíproco de todo número irracional distinto de cero es irracional.

15. ¿Es cierto que la suma de un número racional y un número irracional es siempre irracional? ¿Por qué lo es o por qué no lo es?

16. ¿Es cierto que la suma de dos números irracionales es siempre irracional? ¿Por qué lo es o por qué no lo es?

17. ¿Qué podrías decir acerca del producto de un número racional y un número irracional?

III-2. Algunos ejemplos de números irracionales

En la sección anterior, demostramos que en ciertas condiciones un número será racional. En algunos problemas, demostraste que <u>partiendo de un número irracional</u> podemos obtener más números irracionales de varias maneras. Sin embargo, hemos dejado una pregunta muy importante sin contestar. ¿Habrá algún número irracional? Contestaremos a esta pregunta mostrando que un número particular, a saber, $\sqrt{2}$, no se puede expresar como la razón de dos enteros.

Para demostrarlo, primero necesitamos enunciar algunas propiedades de los cuadrados de enteros impares y enteros pares. Todo entero es o bien par o impar. Si n es par, entonces n es el duplo de algún entero k, y podemos escribir,

$$n = 2k.$$

Si n es impar, entonces al dividir por 2 obtenemos un cociente k y un resto 1, de manera que

$$\frac{n}{2} = k + \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, podemos escribir

$$n = 2k + 1.$$

Estas son las fórmulas típicas para números pares y números impares, respectivamente. Por ejemplo,

$$6 = 2 \cdot 3 \qquad n = 6, k = 3$$
$$7 = 2 \cdot 3 + 1 \qquad n = 7, k = 3$$
$$8 = 2 \cdot 4 \qquad n = 8, k = 4$$
$$9 = 2 \cdot 4 + 1 \qquad n = 9, k = 4,$$

y así sucesivamente. Es fácil demostrar el siguiente teorema:

Teorema III-1. El cuadrado de todo número impar es impar.

Demostración: Si n es impar, entonces podemos escribir

$$n = 2k + 1,$$

donde k es un entero. Cuadrando ambos miembros, obtenemos

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k)^2 + 2 \cdot 2k + 1 \\ &= 4k^2 + 4k + 1. \end{aligned}$$

El miembro derecho tiene que ser impar, debido a que está escrito en la forma

$$2(2k^2 + 2k) + 1;$$

es decir, es el duplo de un entero, más 1. Por lo tanto, n^2 es impar, que es lo que teníamos que demostrar.

Utilizando el teorema III-1, podemos obtener inmediatamente otro teorema:

Teorema III-2. Si n^2 es par, entonces n es par.

Demostración: Si n fuera impar, entonces n^2 sería impar, lo cual es falso. Por tanto, n es par.

Observa que ésta es una demostración indirecta.

Ahora estamos preparados para empezar la demostración del siguiente teorema:

Teorema III-3. $\sqrt{2}$ es irracional.

Demostración: La demostración será indirecta. Empezamos suponiendo que $\sqrt{2}$ es racional. Demostraremos que esto nos conduce a una contradicción.

Paso 1. Suponiendo que $\sqrt{2}$ es racional, se deduce que $\sqrt{2}$ puede ser expresado como

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

donde la fracción $\frac{p}{q}$ está reducida a su expresión mínima.

Esto es así porque si se puede expresar $\sqrt{2}$ como una fracción, entonces podemos reducir esa fracción a su expresión mínima dividiendo el numerador y el denominador por cualquier factor común que tengan.

Por consiguiente, tenemos

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

reducida a su expresión mínima. De ahí obtenemos

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

que a su vez nos da

$$p^2 = 2q^2 .$$

Paso 2. p^2 es par, debido a que p^2 es el duplo de un entero.

Paso 3. p es par, por el teorema III-2.

Por tanto, decimos que $p = 2k$. Sustituyendo en la fórmula al final del paso 1, obtenemos

$$(2k)^2 = 2q^2,$$

lo cual significa que

$$4k^2 = 2q^2 .$$

Por tanto,

$$q^2 = 2k^2 .$$

Paso 4. q^2 es par, debido a que q^2 es el duplo de un entero.

Paso 5. q es par, por el teorema III-2.

Empezamos suponiendo que $\sqrt{2}$ era racional. Partiendo de esta suposición obtuvimos $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, reducida a su expresión mínima. Luego demostramos que p y q eran ambos pares. Por lo tanto, $\frac{p}{q}$ no estaba reducida a su expresión mínima. Esta contradicción indica que nuestra suposición inicial tiene que ser falsa, es decir, $\sqrt{2}$ no es racional.

Conjunto de problemas III-2

Los problemas que siguen son más difíciles que la mayoría de los problemas del texto.

1. Adapta la demostración de que $\sqrt{2}$ es irracional, para obtener una demostración de que $\sqrt{3}$ es irracional. (Sugerencia: Empieza con el hecho de que todo entero puede escribirse en una de las siguientes formas:

$$n = 3k$$

$$n = 3k + 1$$

$$n = 3k + 2,$$

y luego demuestra un teorema correspondiente al teorema III-2.)

2. Obviamente, nadie puede demostrar que $\sqrt{4}$ es irracional, porque $\sqrt{4} = 2$. Si tratas de "demostrarlo" mediante una adaptación de la demostración para $\sqrt{2}$, ¿en qué paso fallará esta demostración?

3. Muestra que $\sqrt[3]{2}$ es irracional.

En realidad, la raíz cuadrada de un entero es otro entero o un número irracional. Sin embargo, la demostración de esta propiedad requiere más técnica matemática de la que disponemos. Problemas como éste se resuelven en una rama de la matemática llamada Teoría de los Números.

Apéndice IV

CUADRADOS Y RAICES CUADRADAS

Todos sabemos qué significa cuadrar un número: se multiplica el número por sí mismo. Sin embargo, las propiedades de las raíces cuadradas son un tanto artificiosas y el lenguaje que se emplea para hablar de ellas se presta a confusión. Aquí trataremos de enunciar las propiedades y señalar los escollos que se puedan presentar.

Decir que x es una raíz cuadrada de a significa que

$$x^2 = a.$$

Por ejemplo,

2 es una raíz cuadrada de 4,
3 es una raíz cuadrada de 9,
-2 es una raíz cuadrada de 4,
-3 es una raíz cuadrada de 9;

y así sucesivamente. Quizás te preguntes por qué no abreviamos estos enunciados utilizando el signo radical. La razón es (como veremos más adelante) que el signo radical significa algo un poco diferente.

La siguiente es una propiedad fundamental del sistema de los números reales:

> Todo número positivo tiene exactamente una raíz cuadrada positiva.

Por ejemplo, $2^2 = 4$, y ningún número positivo excepto el 2 es una raíz de la ecuación $x^2 = 4$; $4^2 = 16$, y ningún número positivo excepto el 4 es una raíz de la ecuación $x^2 = 16$; y así sucesivamente.

Desde luego, si x es una raíz cuadrada de a, entonces $-x$ también lo es, debido a que $(-x)^2 = x^2$. Por lo tanto, todo número positivo tiene exactamente dos raíces cuadradas, una positiva y la otra negativa. El significado del signo radical se define así:

Si <u>a</u> es positivo, entonces $\sqrt{a}$ denota la raíz cuadrada <u>positiva</u> de <u>a</u>.

Además, por definición, $\sqrt{0} = 0$.

Por ejemplo,

$$\sqrt{4} = 2,$$

$$\sqrt{9} = 3,$$

$$\sqrt{16} = 4,$$

y así sucesivamente. Para indicar la otra raíz cuadrada, es decir, la raíz negativa, sencillamente ponemos un signo negativo antes del signo radical. Por ejemplo:

4 tiene dos raíces cuadradas, 2 <u>y</u> -2.

3 tiene dos raíces cuadradas, $\sqrt{3}$ <u>y</u> $-\sqrt{3}$.

7 tiene dos raíces cuadradas, $\sqrt{7}$ <u>y</u> $-\sqrt{7}$.

Los dos enunciados siguientes se parecen, pero, en realidad, son diferentes:

(1) x es una raíz cuadrada de a.

(2) $x = \sqrt{a}$.

El primer enunciado significa sencillamente que $x^2 = a$. El segundo significa no sólo que $x^2 = a$, sino que también $x \geq 0$. Por lo tanto, el segundo enunciado no es simplemente una forma abreviada del primero.

Investiguemos ahora la expresión $\sqrt{x^2}$, donde x es distinto de cero. Hay dos posibilidades:

I. Si $x > 0$, entonces x es la raíz cuadrada positiva de x^2, y podemos escribir

$$\sqrt{x^2} = x.$$

II. Si $x < 0$, entonces x es la raíz cuadrada <u>negativa</u> de x^2 y será -x la raíz cuadrada positiva de x^2. Por consiguiente, para $x < 0$, tenemos

$$\sqrt{x^2} = -x.$$

La ecuación $\sqrt{x^2} = x$ es tan sencilla que casi parece ser una ley natural. Sin embargo, en realidad, la ecuación no siempre es válida: es válida cuando $x \geq 0$, y no lo es cuando $x < 0$.

Uniendo los casos I y II, vemos que, sin excepción, para todo x tenemos

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Para ver esto, debemos cotejarlo con la definición de $|x|$, en la sección 2-3.

Conjunto de problemas IV

¿Cuáles de los siguientes enunciados son ciertos? ¿Por qué lo son o por qué no lo son?

1. $\sqrt{9} = 3$
2. $\sqrt{9} = -3$
3. $\sqrt{2} = \pm 1.414$ (Aproximadamente)
4. $\sqrt{2} = 1.414$ (Aproximadamente)
5. $\sqrt{25} = \pm 5$
6. $\sqrt{25} = 5$

¿Para qué valores de la variable (si los hay) son válidas las siguientes ecuaciones? ¿Por qué?

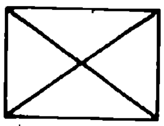
7. $\sqrt{(x-1)^2} = x - 1$
8. $\sqrt{(x-1)^2} = 1 - x$
9. $\sqrt{(x-1)^2} = |x - 1|$
10. $\sqrt{(x-1)^2} = -|x - 1|$
11. $\sqrt{(x+3)^4} = (x+3)^2$
12. $\sqrt{(x+3)^4} = -(x+3)^2$
13. $\sqrt{(x+3)^4} = |(x+3)^2|$
14. $\sqrt{(x+3)^4} = -|(x+3)^2|$

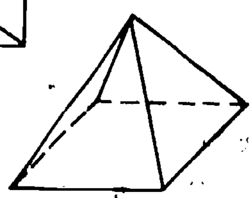
Apéndice V

COMO DIBUJAR FIGURAS EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

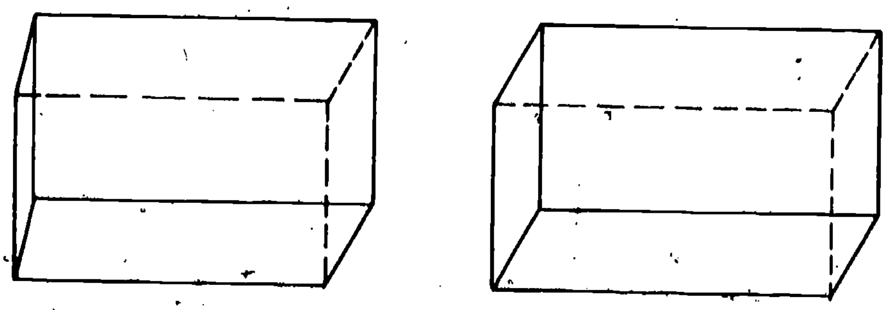
V-1. Dibujos sencillos

Un curso de dibujo mecánico tiene relación con la representación precisa de objetos físicos vistos desde diferentes lugares del espacio. En la geometría, sólo utilizamos dibujos como ayuda en nuestro razonamiento matemático. En este caso, no hay una manera correcta única de hacer dibujos, pero hay algunas técnicas que por su utilidad se han generalizado. Por ejemplo, el primer dibujo a la derecha es una representación técnicamente correcta de una pirámide ordinaria, pues se puede argumentar que se está viendo la pirámide desde arriba. Pero a veces, dibujos hechos cuidadosamente no son tan útiles como un esquema tosco hecho a mano. El primer dibujo no sugiere tres dimensiones, el segundo sí.





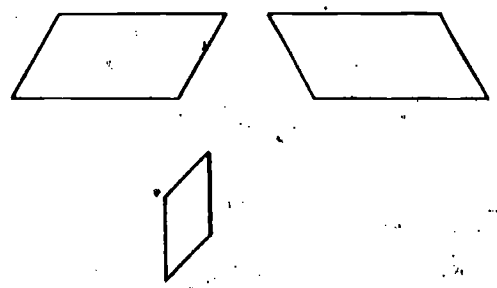
La primera parte de esta exposición ofrece algunas sugerencias para obtener métodos simples de dibujar figuras tridimensionales. La segunda parte introduce la técnica más elaborada de dibujar con perspectiva. La diferencia entre los dos puntos de vista viene sugerida por estos dos dibujos de una caja rectangular.



En el primer dibujo se representa la base mediante un paralelogramo fácil de dibujar. En el segundo dibujo, la arista anterior de la base es paralela a la arista posterior, pero esta última se dibujó más corta con la intención de que así daría la impresión de estar "más lejana".

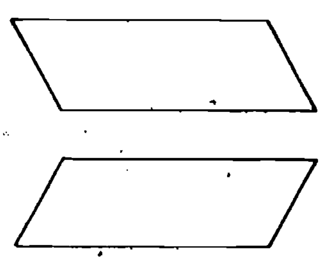
No importa cómo se dibuje una caja rectangular, hay que sacrificar algunas cosas. Todos los ángulos de un rectángulo sólido son rectos, pero al medir con un transportador los ángulos de los dibujos anteriores se ve que dos terceras partes de ellos no miden noventa grados. Estamos dispuestos a no dibujar ángulos rectos como ángulos rectos a fin de hacer la figura como un todo más sugestiva.

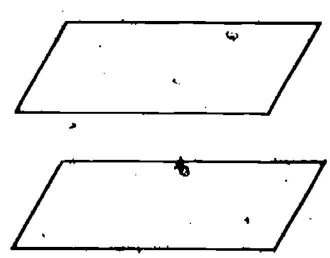
Ya sabes que un plano se representa generalmente mediante un paralelogramo.



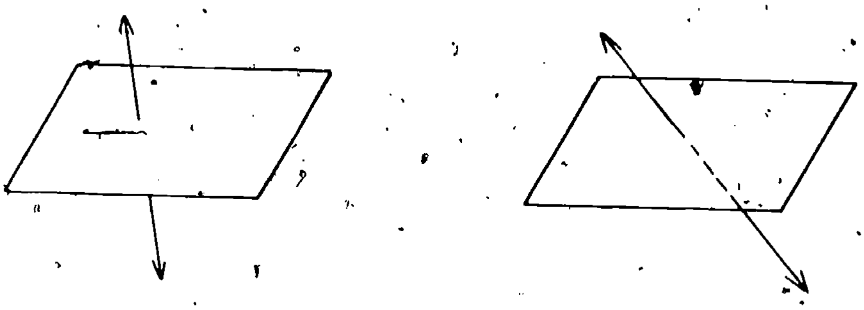
Parece razonable dibujar un plano horizontal de cualquiera de las maneras mostradas y dibujar un plano vertical así:

Sin embargo, si queremos indicar dos planos paralelos, no logramos un buen efecto si dibujamos dos planos "horizontales" cualesquiera. Observa que con el dibujo de la derecha se logra un mejor efecto que con el de la izquierda. Tal vez prefieras aún otro tipo de dibujo.

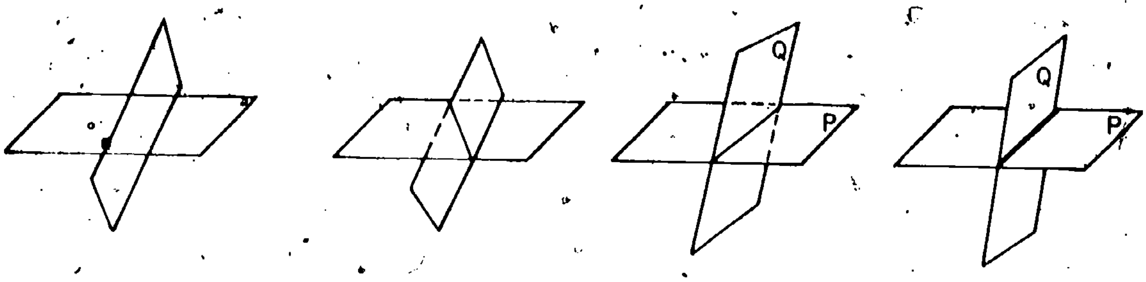




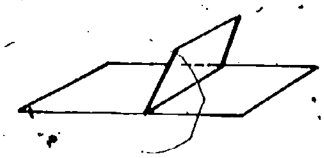
Se utilizan varios artificios para indicar que una parte de una figura pasa por detrás de otra. Algunas veces una parte oculta se puede simplemente omitir, otras veces se indica por medio de rectas de trazos o punteadas. Así, pues, una recta atravesando un plano se puede dibujar de cualquiera de ~~estas~~ dos maneras:



Cada uno de los siguientes dibujos representa dos planos que se intersecan:

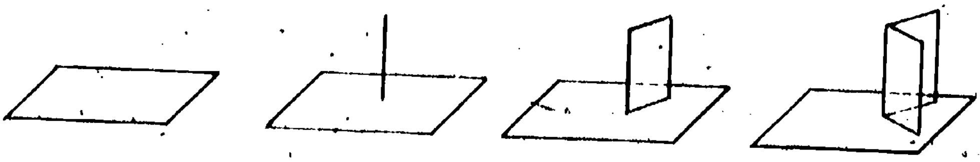


El segundo es mejor que el primero, porque se muestra la recta de intersección y las partes ocultas están representadas mediante rectas de trazos. Los dibujos tercero y cuarto son aún mejores, porque mediante el empleo de rectas paralelas, la recta de intersección se ve ligada tanto al plano P como al plano Q. A la derecha aparece un dibujo que tiene la ventaja de la sencillez y la desventaja de sugerir un plano y un semiplano. En cualquier caso una

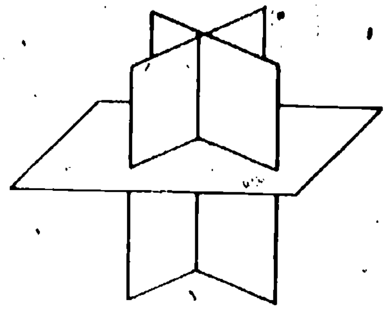


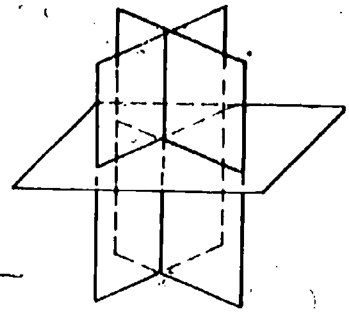
recta de intersección es una parte de gran importancia en una figura.

Suponte que deseamos dibujar dos planos que se intersecan, cada uno de los cuales es perpendicular a un tercer plano. A continuación se muestra etapa por etapa un procedimiento apropiado para lograr tal efecto.

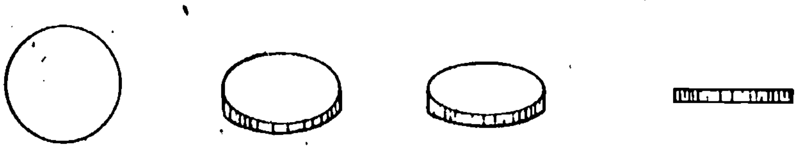


Observa cómo se han construido los últimos dos planos partiendo de la recta de intersección. Un dibujo completo que muestre todas las rectas ocultas es demasiado complicado para hacerse con agrado. De las figuras que aparecen a continuación, la de la izquierda es mucho más sugestiva.



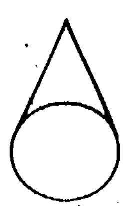


Una moneda de diez centavos, vista desde diferentes ángulos, aparece así:



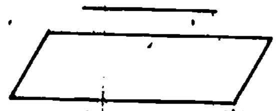
Ni la primera ni la última son una buena representación tridimensional de un disco. Cualquiera de las otras es satisfactoria. Para representar la base de un cono quizás es mejor utilizar el más estrecho de los óvalos dibujados.

Ciertamente, nadie puede esperar que interpretemos la figura siguiente como la representación de un cono:

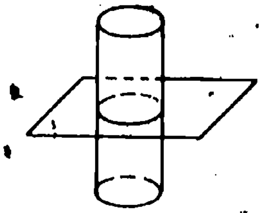


A continuación aparecen otros dibujos, cada uno con una descripción verbal.

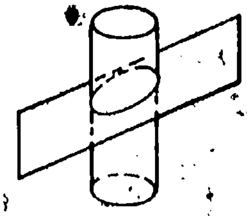
Una recta paralela a un plano.



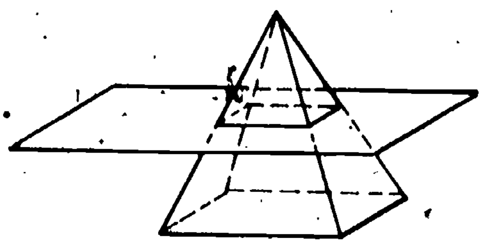
Un cilindro cortado por un plano paralelo a su base.



Un cilindro cortado por un plano no paralelo a su base.



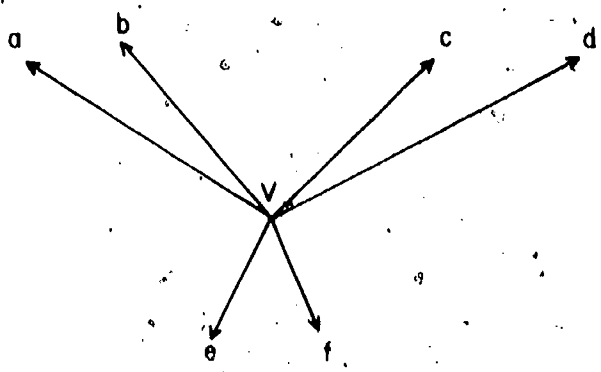
Una pirámide cortada por un plano paralelo a su base.

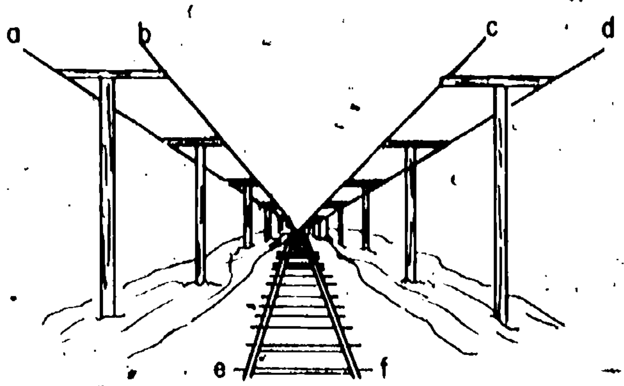


Es importante recordar que un dibujo no es un fin en sí, sino que es simplemente una ayuda para entender la situación geométrica. Debemos escoger la figura que sirva mejor para este propósito; la elección de una persona puede diferir de la de otra.

V-2. Perspectiva

Los rayos a, b, c, d, e, f, en la figura siguiente de la izquierda sugieren rectas coplanarias que se intersecan en V; los rayos correspondientes en la figura de la derecha sugieren rectas paralelas en una figura tridimensional. Al mirar esta última figura, piensa en una vía ferroviaria y en postes telefónicos.





La figura de la derecha sugiere ciertos principios que son útiles para hacer dibujos en perspectiva.

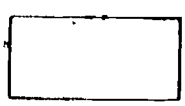
1) Un conjunto de rectas paralelas que se alejan del observador se representa mediante rayos concurrentes; como, por ejemplo, los rayos a, b, c, d, e, f. El punto, en el dibujo, en donde los rayos se encuentran se llama el "punto de desvanecimiento".

2) Los segmentos congruentes se dibujan más pequeños cuando están más lejos del observador. (Busca ejemplos en el dibujo.)

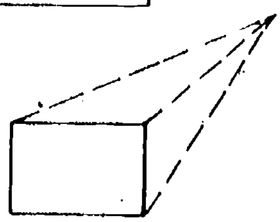
3) Rectas paralelas que son perpendiculares a la línea de visión del observador se representan en el dibujo mediante rectas paralelas. (Busca ejemplos en el dibujo.)

No se necesita mucha habilidad artística para utilizar estos tres principios.

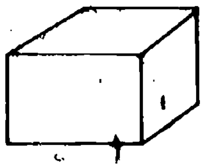
Los pasos a seguir al hacer un esquema de un sólido rectangular se muestran a continuación.



Dibuja la cara anterior como un rectángulo.

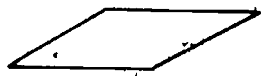


Elige un punto de desvanecimien[to] y dibuja segmentos desde ese punto a los vértices. Omite lo[s] segmentos ocultos.

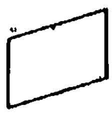


Dibuja aristas paralelas a las de la cara anterior. Finalmente, borra las rectas de perspectiva.

Con esta técnica se puede representar un solo plano horizontal cómo la cara superior del sólido anterior.



Un solo plano vertical puede ser representado mediante la cara anterior o la cara de la derecha del cuerpo.



Después de esta breve exposición de dos puntos de vista para hacer dibujos tridimensionales, de nuevo debemos darnos cuenta de que no hay una manera correcta única de representar ideas geométricas. Sin embargo, cuanto más "real" queramos que aparezca nuestra figura, más atención debemos prestar a la perspectiva. Un gran artista como lo fue Leonardo da Vinci prestó gran atención a la perspectiva. Muchos de nosotros encontramos esto ya hecho cuando utilizamos cámaras fotográficas corrientes.

Si estás interesado en una exposición más detallada, lee algunos libros acerca de dibujos o busca en una enciclopedia el vocablo "perspectiva".

Apéndice VI

DEMOSTRACIONES DE TEOREMAS ACERCA DE PERPENDICULARIDAD

En la sección 8-3 se enunciaron dos teoremas, los cuales incluyen todos los casos de existencia y unicidad relacionados con la perpendicularidad de una recta y un plano. Como se indicó en aquella ocasión, hay que probar ocho casos distintos para lograr establecer las demostraciones de estos dos teoremas. A continuación presentaremos estos casos y demostraremos los que aún no han sido probados.

Primero enunciaremos de nuevo los dos teoremas.

Teorema 8-9. Por un punto dado pasa un plano perpendicular a una recta dada, y sólo uno.

Teorema 8-10. Por un punto dado pasa una recta perpendicular a un plano dado, y sólo una.

Ahora consideraremos las ocho demostraciones en un orden sistemático. Si lees los teoremas cuidadosamente, notarás que hay muy pocas diferencias en sus enunciados verbales; así, la ausencia o presencia del vocablo "no", la sustitución de "a lo más" por "al menos", o el intercambio de los vocablos "recta" y "plano".

Teorema VI-1. Por un punto dado de una recta dada, pasa por lo menos un plano perpendicular a esa recta.

Este es el teorema 8-4, que ya se demostró en el texto.

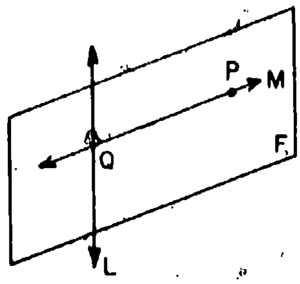
Teorema VI-2. Por un punto dado de una recta dada, pasa a lo más un plano perpendicular a esa recta.

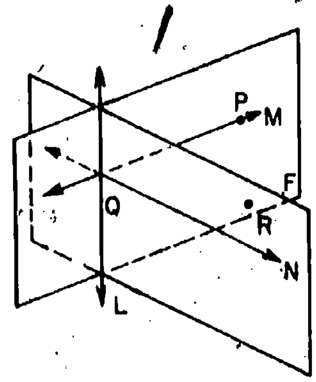
Este es el teorema 8-6, el cual ya se demostró.

Teorema VI-3. Por un punto dado exterior a una recta dada, pasa por lo menos un plano perpendicular a la recta.

Dato: La recta L y el punto P exterior a L.

Demostrar: Por el punto P pasa un plano E, siendo E ⊥ L.





Demostración:

(1) Por el punto P pasa una recta M perpendicular a L (teorema 6-4). Sea Q el punto de intersección de las rectas M y L contenidas en el plano F (teorema 3-4).

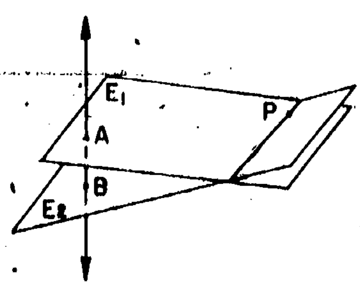
(2) Hay un punto R (figura 2) exterior a F (postulado 5b). Sea G el plano que contiene a L y a R (teorema 3-3).

(3) En G hay una recta N perpendicular a L en el punto Q (teorema 6-1).

(4) Sea E el plano que contiene a M y a N. Entonces, E ⊥ L por el teorema 8-3.

<u>Teorema</u> <u>VI-4</u>. Por un punto dado exterior a una recta dada, pasa a lo más un plano perpendicular a dicha recta.

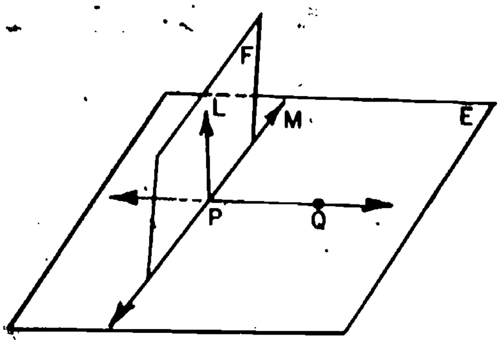
Demostración: Suponte que hay dos planos E_1 y E_2, cada uno perpendicular a la recta L y en cada uno contenido el punto P. Si E_1 y E_2 intersecan a L en el mismo punto Q, tendremos dos planos perpendiculares a L en el punto Q, y esto contradice el teorema VI-2.



Por otra parte, si E_1 y E_2 intersecan a L en dos puntos distintos A y B, entonces $\overleftrightarrow{PA}$ y $\overleftrightarrow{PB}$ son dos rectas distintas pasando por P y perpendiculares a L, lo que contradice el teorema 6-4. En cualquier caso obtenemos una contradicción, y, por tanto, no es posible que haya dos planos pasando por P y perpendiculares a L.

Esto completa la demostración del teorema 8-9. Los cuatro teoremas siguientes, los cuales se leen como los anteriores, con los vocablos "recta" y "plano" intercambiados, servirán para demostrar el teorema 8-10.

Teorema VI-5. Por un punto dado de un plano dado, pasa por lo menos una recta perpendicular al plano.



Demostración: Sea P un punto del plano E. Por el postulado 5a, hay otro punto Q en E. Sea el plano F perpendicular a $\overleftrightarrow{PQ}$ en el punto P (teorema VI-1).

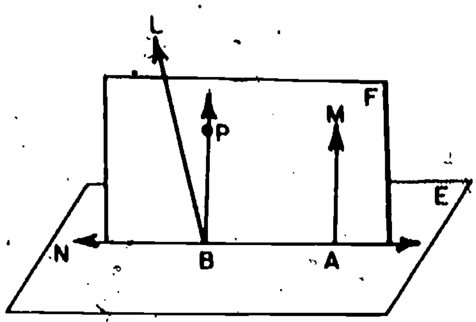
Puesto que F interseca a E (en el punto P), su intersección es una recta M, por el postulado 8. Sea L una recta de F, perpendicular a M (teorema 6-1).

Como $F \perp \overleftrightarrow{PQ}$, y L está en F y contiene a P, de la definición de una recta perpendicular a un plano, tenemos que $L \perp \overleftrightarrow{PQ}$. Como ya teníamos que $L \perp M$, del teorema 8-3 se deduce que $L \perp E$.

Teorema VI-6. Por un punto dado de un plano dado, pasa a lo más una recta perpendicular al plano.

Demostración: Suponte que L_1 y L_2 son rectas diferentes, cada una de ellas perpendicular al plano E en el punto P. Las rectas L_1 y L_2 determinan un plano F (teorema 3-4) que interseca a E en una recta L. Entonces tenemos en F dos perpendiculares a L en el mismo punto P, lo que contradice el teorema 6-1.

<u>Teorema VI-7</u>. Por un punto dado exterior a un plano dado, pasa por lo menos una recta perpendicular al plano.



Demostración: Sea P un punto exterior al plano E. Sea A cualquier punto de E, y sea M una recta que pasa por A perpendicular a E (teorema VI-5).

Si M contiene a P, será la perpendicular requerida.

Si M no contiene a P, sea F el plano que contiene a M y a P (teorema 3-3), y N la recta de intersección de F y E. En F, sea B el pie de la perpendicular desde P hasta N (teorema 6-4).

Sea la recta L perpendicular a E en el punto B (teorema VI-5). Por el teorema 8-8, L y M son coplanarias, y, por lo tanto, L está contenida en F puesto que M y B determinan F.

En F, $L \perp N$, ya que $L \perp E$ y N está contenida en E. Puesto que, por el teorema 6-1, hay una sola recta en F perpendicular a N en el punto B, L y $\overleftrightarrow{BP}$ tienen que coincidir. Es decir, L contiene a P, y, por tanto, es la perpendicular requerida.

<u>Teorema VI-8</u>. Por un punto dado exterior a un plano dado, pasa a lo más una recta perpendicular al plano.

La demostración resulta ser palabra por palabra idéntica a la del teorema VI-6, excepto por la sustitución de "en el punto P" por "desde el punto P" y de "teorema 6-1" por "teorema 6-3".

EL SIGNIFICADO Y USO DE LOS SIMBOLOS

General

= A = B puede leerse como "A igual a B", "A es igual a B", "A igual B" (como en "Sea A = B"), y posiblemente de otras maneras a fin de que se ajuste a la estructura del enunciado en el cual aparece el símbolo. Sin embargo, no debemos emplear el símbolo = en casos como "A y B son ="; el uso adecuado del símbolo es <u>entre dos expresiones</u>. Si dos expresiones están conectadas por el símbolo =, se sobrentenderá que dichas expresiones representan la misma entidad matemática, en nuestro caso ésta será o un número real o un conjunto de puntos.

$\neq$ "No es igual a". A $\neq$ B significa que A y B <u>no</u> representan la misma entidad. Las mismas variaciones y advertencias que se hicieron acerca del uso de = se aplican en el caso del uso de $\neq$.

Algebraico

+, ·, -, ÷ Estos símbolos algebraicos familiares para las operaciones con números reales no necesitan comentarios. Los postulados fundamentales acerca de ellos aparecen en el Apéndice II.

<, >, ≤, ≥ Así como =, estos símbolos pueden leerse de varias maneras en los enunciados. Por ejemplo, $A < B$ puede representar lo que está subrayado en las siguientes frases: "Si <u>A es menor que B</u>", "Sea <u>A menor que B</u>", "<u>A es menor que B</u> implica", etc. Lo mismo puede decirse para los otros tres símbolos, que se leen "mayor que", "menor que o igual a" y "mayor que o igual a". Estas desigualdades se aplican sólo a los números reales. Sus propiedades se mencionaron brevemente en la sección 2-2 y con más detalles en la sección 7-2.

a

$\sqrt{A}$, $\lvert A \rvert$	"Raíz cuadrada de A", y "valor absoluto de A". Estos símbolos se estudiaron en las secciones 2-2 y 2-3 y en el Apéndice IV.

<u>Geométrico</u>

Conjuntos de puntos	Una sola letra puede representar cualquier conjunto de puntos que esté bien definido. De modo que podemos hablar del punto P, la recta m, un semiplano H, una circunferencia C, un ángulo x, un segmento b, etc.
$\overleftrightarrow{AB}$	La recta que contiene los dos puntos A y B (pág. 32).
$\overline{AB}$	El segmento de recta cuyos extremos son A y B (pág. 47).
$\overrightarrow{AB}$	La semirrecta cuyo extremo es A y que contiene el punto B (pág. 48).
$\angle ABC$	El ángulo cuyo vértice es el punto B y cuyos lados son las semirrectas $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ (pág. 77).
$\triangle ABC$	El triángulo cuyos vértices son A, B y C (pág. 78).
$\angle A\text{-}BC\text{-}D$	El ángulo diedro cuya arista es $\overleftrightarrow{BC}$ y cuyos lados contienen los puntos A y D (pág. 302).

<u>Números reales</u>

AB	El número positivo que es la distancia entre los dos puntos A y B, y también la longitud del segmento de recta $\overline{AB}$ (pág. 36).
$m\angle ABC$	El número real entre 0 y 180 que es la medida angular del $\angle ABC$ (pág. 87).

Relaciones

$\cong$ Congruencia. $A \cong B$ se lee "A es congruente a B", pero deben tenerse en cuenta las mismas posibles variaciones y restricciones que en el caso de $A = B$. En el texto, A y B pueden ser dos segmentos (pág. 114), dos ángulos (pág. 114), o dos triángulos (pág. 116), no necesariamente distintos.

$\perp$ Perpendicular. $A \perp B$ se lee "A es perpendicular a B", y en este caso pueden añadirse los mismos comentarios que en el caso de $\cong$. A y B pueden ser o bien dos rectas (pág. 92), dos planos (pág. 305), o una recta y un plano (pág. 231).

$\|$ Paralelo. $A \| B$ se lee "A es paralelo a B", siendo válidos en este caso los mismos comentarios que para $\cong$. A y B pueden ser o bien dos rectas (pág. 251), dos planos (pág. 295), o una recta y un plano (pág. 295).

Lista de Postulados

Postulado 1. (pág. 32) Dados dos puntos diferentes cualesquiera, habrá exactamente una recta que los contenga.

Postulado 2. (pág. 36) (Postulado de la distancia.) A cada par de puntos diferentes corresponde un número positivo único.

Postulado 3. (pág. 38) (Postulado de la regla.) Podemos establecer una correspondencia entre los puntos de una recta y los números reales de manera que

(1) A cada punto de la recta corresponde exactamente un número real,

(2) A cada número real corresponde exactamente un punto de la recta, y

(3) La distancia entre dos puntos es el valor absoluto de la diferencia de los números correspondientes.

Postulado 4. (pág. 42) (El postulado de colocación de la regla.) Dados dos puntos P y Q de una recta, se puede escoger el sistema de coordenadas de manera tal que la coordenada de P sea cero y la coordenada de Q sea positiva.

Postulado 5. (pág. 59)

(a) Todo plano contiene por lo menos tres puntos que no están alineados.

(b) El espacio contiene por lo menos cuatro puntos que no están en un plano.

Postulado 6. (pág. 61) Si dos puntos están en un plano, entonces la recta que los contiene está en el mismo plano.

Postulado 7. (pág. 62) Tres puntos cualesquiera están por lo menos en un plano, y tres puntos cualesquiera no alineados están exactamente en un plano. Más brevemente, tres puntos cualesquiera son coplanarios y tres puntos cualesquiera no alineados determinan un plano.

Postulado 8. (pág. 63) Si dos planos diferentes se cortan, su intersección es una recta.

Postulado 9. (pág. 69) (El postulado de separación del plano.)

Se da una recta y un plano que la contiene. Los puntos del plano que no están en la recta forman dos conjuntos tales que (1) cada uno de los conjuntos es convexo, y (2) si P está en un conjunto y Q en el otro, entonces el segmento $\overline{PQ}$ corta a la recta.

<u>Postulado</u> <u>10</u>. (pág. 71) (Postulado de separación del espacio.) Los puntos del espacio que no están en un plano dado forman dos conjuntos tales que (1) cada uno de los conjuntos es convexo, y (2) si P está en un conjunto y Q en el otro, entonces el segmento $\overline{PQ}$ corta al plano.

<u>Postulado</u> <u>11</u>. (pág. 86) (El postulado de la medida de ángulos.) A cada ángulo $\angle BAC$ le corresponde un número real entre 0 y 180.

<u>Postulado</u> <u>12</u>. (pág. 87) (El postulado de la construcción del ángulo.) Sea $\overrightarrow{AB}$ un rayo de la arista del semiplano H. Para cada número r entre 0 y 180 hay exactamente un rayo $\overrightarrow{AP}$, con P en H, tal que $m\angle PAB = r$.

<u>Postulado</u> <u>13</u>. (pág. 87) (El postulado de la adición de ángulos.) Si D es un punto en el interior del $\angle BAC$, entonces $m\angle BAC = m\angle BAD + m\angle DAC$.

<u>Postulado</u> <u>14</u>. (pág. 88) (El postulado del suplemento.) Si dos ángulos forman un par lineal, entonces son suplementarios.

<u>Postulado</u> <u>15</u>. (pág. 120) (El postulado L.A.L.) Sea G una correspondencia entre dos triángulos (o la de un triángulo consigo mismo). Si dos lados y el ángulo comprendido del primer triángulo son congruentes a las partes correspondientes del segundo triángulo, entonces la correspondencia G es una congruencia.

<u>Postulado</u> <u>16</u>. (pág. 261) (El postulado de las paralelas.) Por un punto externo dado hay a lo sumo una recta paralela a una recta dada.

Lista de Teoremas y Corolarios

Teorema 2-1. (pág. 44) Sean A, B, C tres puntos en una recta, con coordenadas x, y, z. Si $x < y < z$, entonces B está entre A y C.

Teorema 2-2. (pág. 46) Para cada tres puntos cualesquiera de la misma recta, uno de ellos estará entre los otros dos.

Teorema 2-3. (pág. 47) De cada tres puntos diferentes de la misma recta, solamente uno estará entre los otros dos.

Teorema 2-4. (pág. 49) (El teorema de la localización de puntos.) Sea $\overrightarrow{AB}$ un rayo, y sea x un número positivo. Entonces existe exactamente un punto P en $\overrightarrow{AB}$ tal que $AP = x$.

Teorema 2-5. (pág. 50) Todo segmento tiene exactamente un punto medio.

Teorema 3-1. (pág. 59) Dos rectas diferentes se intersecan a lo sumo en un punto.

Teorema 3-2. (pág. 61) Si una recta interseca a un plano que no la contiene, entonces la intersección será un solo punto.

Teorema 3-3. (pág. 62) Dada una recta y un punto fuera de ella, hay exactamente un plano que los contiene a ambos.

Teorema 3-4. (pág. 62) Dadas dos rectas que se cortan, hay exactamente un plano que las contiene.

Teorema 4-1. (pág. 93) Si dos ángulos son complementarios, entonces ambos son agudos.

Teorema 4-2. (pág. 93) Todo ángulo es congruente consigo mismo.

Teorema 4-3. (pág. 93) Dos ángulos rectos cualesquiera son congruentes.

Teorema 4-4. (pág. 93) Si dos ángulos son a la vez congruentes y suplementarios, entonces cada uno de ellos es un ángulo recto.

Teorema 4-5. (pág. 93) Los suplementos de ángulos congruentes son congruentes.

Teorema 4-6. (pág. 94) Los complementos de ángulos congruentes son congruentes.

Teorema 4-7. (pág. 95) Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

Teorema 4-8. (pág. 95) Si dos rectas que se cortan forman un ángulo recto, entonces forman cuatro ángulos rectos.

Teorema 5-1. (pág. 114) Todo segmento es congruente consigo mismo.

Teorema 5-2. (pág. 134) Si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces los ángulos opuestos a estos lados son congruentes.

Corolario 5-2-1. (pág. 136) Todo triángulo equilátero es equiángulo.

Teorema 5-3. (pág. 136) Todo ángulo tiene exáctamente una bisectriz.

Teorema 5-4. (pág. 140) (El teorema A.L.A.) Sea G una correspondencia entre dos triángulos (o entre un triángulo y él mismo). Si dos ángulos y el lado común del primer triángulo son congruentes a las partes correspondientes del segundo triángulo, entonces la correspondencia G es una congruencia.

Teorema 5-5. (pág. 141) Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, los lados opuestos a estos ángulos son congruentes.

Corolario 5-5-1. (pág. 141) Un triángulo equiángulo es equilátero.

Teorema 5-6. (pág. 145) (El teorema L.L.L.) Sea G una correspondencia entre dos triángulos (o entre un triángulo y él mismo). Si los tres pares de lados correspondientes son congruentes, entonces la correspondencia G es una congruencia.

Teorema 6-1. (pág. 179) En un plano dado, y por un punto dado de una recta dada en el plano, pasa una y solamente una recta perpendicular a la recta dada.

Teorema 6-2. (pág. 181) La mediatriz de un segmento, en un plano es el conjunto de todos los puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento.

Teorema 6-3. (pág. 183) Desde un punto externo dado, hay a lo sumo una recta perpendicular a una recta dada.

Corolario 6-3-1. (pág. 184) A lo sumo un ángulo de un triángulo puede ser recto.

Teorema 6-4. (pág. 184) Desde un punto externo dado, hay por lo menos una recta perpendicular a una recta dada.

Teorema 6-5. (pág. 195) Si M está sobre la recta L, entre A y C, entonces M y A están al mismo lado de otra recta cualquiera L' que contenga a C.

Teorema 6-6. (pág. 195) Si M está entre A y C, y B es cualquier punto fuera de la recta $\overleftrightarrow{AC}$, entonces M está en el interior de $\angle ABC$.

Teorema 7-1. (pág. 206) (El teorema del ángulo externo.) Un ángulo externo de un triángulo es mayor que cualquiera de los ángulos internos no contiguos.

Corolario 7-1-1. (pág. 209) Si un triángulo tiene un ángulo recto, entonces los otros dos ángulos son agudos.

Teorema 7-2. (pág. 209) (El teorema L.A.A.) Sea G una correspondencia entre dos triángulos. Si dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos en un triángulo son congruentes con las partes correspondientes del segundo triángulo, entonces la correspondencia G es una congruencia.

Teorema 7-3. (pág. 211) (El teorema de la hipotenusa y el cateto.) Sea G una correspondencia entre dos triángulos rectángulos. Si la hipotenusa y un cateto de un triángulo son congruentes con las partes correspondientes del segundo triángulo, entonces la correspondencia G es una congruencia.

Teorema 7-4. (pág. 213) Si dos lados de un triángulo no son congruentes, entonces los ángulos opuestos a estos lados no son congruentes, y el ángulo mayor es el opuesto al lado mayor.

Teorema 7-5. (pág. 214) Si dos ángulos de un triángulo no son congruentes, entonces los lados opuestos a ellos no son congruentes, y el lado mayor es el opuesto al ángulo mayor.

Teorema 7-6. (pág. 219) El segmento más corto que va desde un punto a una recta es el segmento perpendicular a la recta.

Teorema 7-7. (pág. 219) (La desigualdad del triángulo.) La suma de las longitudes de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado.

Teorema 7-8. (pág. 222) Si dos lados de un triángulo son congruentes respectivamente con dos lados de un segundo triángulo, y el ángulo comprendido en el primer triángulo es mayor que el ángulo comprendido en el segundo, entonces el lado opuesto del primer triángulo es mayor que el lado opuesto del segundo.

Teorema 7-9. (pág. 224) Si dos lados de un triángulo son congruentes respectivamente con dos lados de un segundo triángulo, y el tercer lado del primer triángulo es más largo que el tercer lado del segundo, entonces el ángulo comprendido en el primer triángulo es mayor que el ángulo comprendido en el segundo.

Teorema 8-1. (pág. 233) Si cada uno de dos puntos de una recta está equidistante de dos puntos dados, entonces todo punto de la recta está equidistante de los puntos dados.

Teorema 8-2. (pág. 236) Si cada uno de tres puntos no alineados de un plano equidista de dos puntos, entonces todo punto del plano equidista de estos dos puntos.

Teorema 8-3. (pág. 237) Si una recta es perpendicular a cada una de dos rectas que se cortan, en su punto de intersección, entonces es perpendicular al plano de esas rectas.

Teorema 8-4. (pág. 241) Por un punto en una recta dada pasa un plano perpendicular a la recta.

Teorema 8-5. (pág. 242) Si una recta y un plano son perpendiculares, entonces el plano contiene todas las rectas perpendiculares a la recta dada en su punto de intersección con el plano dado.

Teorema 8-6. (pág. 243) Por un punto en una recta dada hay a lo más un plano perpendicular a la recta.

Teorema 8-7. (pág. 243) El plano perpendicular que biseca a un segmento es el conjunto de todos los puntos equidistantes de los extremos del segmento.

Teorema 8-8. (pág. 244) Dos rectas perpendiculares al mismo plano están en un mismo plano.

Teorema 8-9. (pág. 245) Por un punto dado pasa un plano y solamente uno, perpendicular a una recta dada.

Teorema 8-10. (pág. 245) Por un punto dado pasa una recta y solamente una, perpendicular a un plano dado.

Teorema 8-11. (pág. 246) El segmento más corto a un plano desde un punto fuera del plano es el segmento perpendicular.

Teorema 9-1. (pág. 252) Dos rectas paralelas están en exactamente un plano.

Teorema 9-2. (pág. 252) Dos rectas en un plano son paralelas si ambas son perpendiculares a la misma recta.

Teorema 9-3. (pág. 253) Sea L una recta, y sea P un punto que no está en L. Entonces hay al menos una recta, que pasa por P y es paralela a L.

Teorema 9-4. (pág. 255) Si dos rectas son cortadas por una secante, y si un par de ángulos alternos internos son congruentes, entonces el otro par de ángulos alternos internos son también congruentes.

Teorema 9-5. (pág. 256) Si dos rectas son cortadas por una secante, y si un par de ángulos alternos internos son congruentes, entonces las rectas son paralelas.

Teorema 9-6. (pág. 261) Si dos rectas son cortadas por una secante, y si un par de ángulos correspondientes son congruentes, entonces los otros tres pares de ángulos correspondientes tienen la misma propiedad.

Teorema 9-7. (pág. 261) Si dos rectas son cortadas por una secante, y si un par de ángulos correspondientes son congruentes, entonces las rectas son paralelas.

Teorema 9-8. (pág. 262) Si dos rectas paralelas son cortadas por una secante, entonces los ángulos alternos internos son congruentes.

Teorema 9-9. (pág. 263) Si dos rectas paralelas son cortadas por una secante, cada par de ángulos correspondientes son congruentes.

k

Teorema 9-10. (pág. 263) Si dos rectas paralelas son cortadas por una secante, los ángulos internos a un mismo lado de la secante son suplementarios.

Teorema 9-11. (pág. 264) En un plano, dos rectas paralelas a la misma recta son paralelas entre sí.

Teorema 9-12. (pág. 264) En un plano, si una recta es perpendicular a una de dos rectas paralelas, es perpendicular a la otra.

Teorema 9-13. (pág. 266) La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180.

Corolario 9-13-1. (pág. 267) Sea dada una correspondencia entre dos triángulos. Si dos pares de ángulos correspondientes son congruentes, entonces el tercer par de ángulos correspondientes son también congruentes.

Corolario 9-13-2. (pág. 268) Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.

Corolario 9-13-3. (pág. 268) En todo triángulo, la medida de un ángulo externo es la suma de las medidas de los dos ángulos internos no contiguos.

Teorema 9-14. (pág. 273) Cada diagonal separa a un paralelogramo en dos triángulos congruentes.

Teorema 9-15. (pág. 273) En un paralelogramo, dos lados opuestos cualesquiera son congruentes.

Corolario 9-15-1. (pág. 273) Si $L_1 \parallel L_2$ y si P y Q son dos puntos cualesquiera en L_1, entonces las distancias de P y Q a L_2 son iguales.

Teorema 9-16. (pág. 273) En un paralelogramo, dos ángulos opuestos cualesquiera son congruentes.

Teorema 9-17. (pág. 273) En un paralelogramo, dos ángulos consecutivos cualesquiera son suplementarios.

Teorema 9-18. (pág. 273) Las diagonales de un paralelogramo se bisecan.

Teorema 9-19. (pág. 274) Dado un cuadrilátero en el que ambos pares de lados opuestos son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

Teorema 9-20. (pág. 274) Si dos lados de un cuadrilátero son paralelos y congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

Teorema 9-21. (pág. 274) Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

Teorema 9-22. (pág. 274) El segmento entre los dos puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene la mitad de su longitud.

Teorema 9-23. (pág. 276) Si un paralelogramo tiene un ángulo recto, entonces tiene cuatro ángulos rectos, y el paralelogramo es un rectángulo.

Teorema 9-24. (pág. 276) En un rombo, las diagonales son perpendiculares entre sí.

Teorema 9-25. (pág. 276) Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan y son perpendiculares, entonces el cuadrilátero es un rombo.

Teorema 9-26. (pág. 281) Si tres rectas paralelas recortan segmentos congruentes en una secante, entonces recortan segmentos congruentes en cualquier otra secante.

Corolario 9-26-1. (pág. 283) Si tres o más rectas paralelas recortan segmentos congruentes en una secante, entonces recortan segmentos congruentes en cualquier otra secante.

Teorema 9-27. (pág. 284) Las medianas de un triángulo son concurrentes en un punto que está a dos tercios de la distancia de cualquier vértice al punto medio del lado opuesto.

Teorema 10-1. (pág. 296) Si un plano corta a dos planos parálelos, entonces la intersección consiste en dos rectas paralelas.

Teorema 10-2. (pág. 296) Si una recta es perpendicular a uno de dos planos paralelos, es perpendicular al otro.

Teorema 10-3. (pág. 297) Dos planos perpendiculares a la misma recta son paralelos.

Corolario 10-3-1. (pág. 297) Si dos planos son paralelos a un tercer plano, son paralelos entre sí.

Teorema 10-4. (pág. 298) Dos rectas perpendiculares al mismo plano son paralelas.

Corolario 10-4-1. (pág. 298) Un plano perpendicular a una de dos rectas paralelas es perpendicular a la otra.

Corolario 10-4-2. (pág. 298) Si dos rectas son paralelas a una tercera, son paralelas entre sí.

Teorema 10-5. (pág. 299) Dos planos paralelos son equidistantes en toda su extensión.

Teorema 10-6. (pág. 304) Dos ángulos rectilíneos cualesquiera de un ángulo diedro dado son congruentes.

Corolario 10-6-1. (pág. 305) Si una recta es perpendicular a un plano, entónces cualquier plano que contenga esta recta es perpendicular al plano dado.

Corolario 10-6-2. (pág. 305) Si dos planos son perpendiculares, entonces cualquier recta en uno de ellos perpendicular a su recta de intersección, es perpendicular al otro plano.

Teorema 10-7. (pág. 309) La proyección de una recta sobre un plano es una recta, a menos que la recta y el plano sean perpendiculares.

Indice de Definiciones

Para los términos geométricos definidos con precisión, la referencia dada en este Indice corresponde a la definición formal. La referencia correspondiente a los demás términos alude a una definición informal o a la discusión más destacada sobre ellos.