DOCUMENT RESUME

ED 186 222 SE 030 434

AUTHOR Allen, Frank B.; And Others
TITLE Matematica Para La Escuela Secundaria, Primer Curso de Algebra (Parte 2), Comentario. Traduccion Preliminar de la Edicion en Ingles Revisada. (Mathematics for High School, First Course in Algebra, Part 2, Teacher's Commentary. Preliminary Translation of the Revised English Edition).
INSTITUTION Stanford Univ., Calif. School Mathematics Study Group.
SPONS AGENCY National Science Foundation, Washington, D.C.
PUB DATE 64
NOTE 358p.; For related documents in Spanish, see SE 030 431-433.
LANGUAGE Spanish

EDRS PRICE MF01/PC15 Plus Postage.
DESCRIPTORS *Algebra; *Bilingual Education; Instructional Materials; *Mathematics Curriculum; *Mathematics Instruction; Number Concepts; *Secondary Education; *Secondary School Mathematics; Teaching Guides
IDENTIFIERS Polynomials; *School Mathematics Study Group

ABSTRACT

This is the teacher's commentary for part two of a three-part SMSG algebra text for high school students. The principal objective of the text is to help the student develop an understanding and appreciation of some of the algebraic structure as a basis for the techniques of algebra. Chapter topics include addition and multiplication of real numbers, factors, exponents, radicals, and polynomials and rational expressions. (RH)

GRUPO DE ESTUDIO DE LA MATEMATICA ESCOLAR

MATEMATICA PARA LA ESCUELA SECUNDARIA

PRIMER CURSO DE ALGEBRA (Parte 2)

Comentario

(Traducción preliminar de la edición en inglés, revisada)

SMSG

MATEMATICA PARA AL ESCUELA SECUNDARIA

Primer Curso de Algebra (Parte 2)

Comentario

(Traducción preliminar de la edición en inglés revisada)

Texto preparado bajo la supervisión del personal para las muestras de libros de texto, del Grupo de Estudio de la Matemática Escolar:

Frank B. Allen, Escuela Secundaria del Pueblo de Lyons

Edwin C. Douglas, Escuela Taft

Donal E. Richmond, Colegio Williams

Charles E. Rickart, Universidad de Yale

Henry Swain, Escuela Secundaria del Pueblo de New Trier

Robert J. Walker, Universidad de Cornell

El apoyo financiero para el Grupo de Estudio de la Matemática Escolar provino de la Fundación Nacional de Ciencias.

A continuación se da la lista de nombres de todos los que participaron en alguna o algunas sesiones de redacción y en las cuales los siguientes textos del SMSG fueron preparados: Primer Curso de Algebra, Geometría, Matemáticas Intermedias, Funciones Elementales e Introducción al Algebra de las Matrices.

H.W. Alexander, Colegio Earlham
F.B. Allen, Escuela Secundaria Lyons Township, La Grande, Illinois
Alexander Beck, Escuela Secundaria Olney, Filadelfia, Pensilvania
E.F. Beckenbach, Universidad de California en Los Angeles
E.G. Begle, Grupo de Estudio de la Matemática Escolar, Universidad de Yale
Paul Berg, Universidad de Stanford
Emil Berger, Escuela Secundaria Monroe, St. Paul Minnesota
Arthur Bernhart, Universidad de Oklahoma
R.H. Bing, Universidad de Wisconsin
A.L. Blakers, Universidad del Oeste de Australia
A.A. Blank, Universidad de Nueva York
Shirley Boselly, Escuela Secundaria Franklin, Seattle, Washington
K.E. Brown, Departamento de Salubridad, Educación y Asistencia Pública, Washington, D.C.
J.M. Calloway, Colegio Carleton
Hope Chipman, Escuela Secundaria de la Universidad de Ann Arbor, Michigan
R.R. Christian, Universidad de British Columbia
R.J. Clark, Escuela de St. Paul, Concord, Nueva Hampshire
P.H. Daus, Universidad de California en Los Angeles
R.B. Davis, Universidad de Siracusa
Charles DePrima, Instituto Tecnológico de California
Mary Dolciani, Colegio Hunter
Edwin C. Douglas, Escuela The Taft, Watertown, Connecticut
Floyd Downs, Escuela Secundaria del Este, Denver, Colorado
E.A. Dudley, Escuela Secundaria de North Haven, North Haven, Conn.
Lincoln Durst, Instituto The Rice
Florence Elder, Escuela Secundaria de West Hempstead, West Hempstead, Nueva York
W.E. Ferguson, Escuela Secundaria Newton, Newtonville, Massachusetts
N.J. Fine, Universidad de Pensilvania
Joyce D. Fontaine, Escuela Secundaria de North Haven, North Haven, Conn.
F.L. Friedman, Instituto Tecnológico de Massachusetts
Esther Gassett, Escuela Secundaria de Claremore, Claremore, Oklahoma
R.K. Getoor, Universidad de Washington
V.H. Haag, Colegio Franklin y Marshall
R.R. Hartman, Escuela Edina-Morningside de Ultimo Ciclo Secundario, Edina, Minnesota
M.H. Heins, Universidad de Illinois
Edwin Hewitt, Universidad de Washington
Martha Hildebrandt, Escuela Secundaria Proviso Township, Maywood, Illinois
R.C. Jurgensen, Academia Militar de Culver, Culver, Indiana
Joseph Lehner, Universidad del Estado de Michigan
Marguerite Lehr, Colegio Bryn Mawr
Kenneth Leisenring, Universidad de Michigan
Howard Levi, Universidad de Columbia
Eunice Lewis, Escuela Secundaria de Laboratorio de la Universidad de Oklahoma
M.A. Linton, Escuela William Penn Charter, Filadelfia, Pensilvania
A.E. Livingston, Universidad de Washington
L.H. Loomis, Universidad de Harvard
R.V. Lynch, Academia Phillips Exeter, Exeter, Nueva Hampshire
W.K. McNabb, Escuela Hockaday, Dallas, Texas
K.G. Michaels, Escuela Secundaria de North Haven, North Haven, Conn.
E.E. Moise, Universidad de Michigan

E.P. Northrop, Universidad de Chicago
O.J. Peterson, Colegio para Maestros del Estado de Kansas, Emporia, Kansas
B.J. Pettis, Universidad de Carolina del Norte
R.S. Pieters, Academia Phillips, Andover, Massachusetts
H.O. Pollak, Laboratorios Bell Telephone
Walter Prenowits, Colegio Brooklyn
G.B. Price, Universidad de Kansas
A.L. Putnam, Universidad de Chicago
Persis O. Redgrave, Academia Libre de Norwich, Norwich, Connecticut
Mina Rees, Colegio Hunter
D.E. Richmond, Colegio Williams
C.E. Rickart, Universidad de Yale
Harry Ruderman, Escuela Secundaria del Colegio Hunter, Ciudad de Nueva York
J.T. Schwartz, Universidad de Nueva York
O.E. Stanaitis, Colegio St. Olaf
Robert Starkey, Escuelas Secundarias Cubberly, Palo Alto, California
Phillip Stucky, Escuela Secundaria Roosevelt, Seattle, Washington
Henry Swain, Escuela Secundaria New Trier, Township, Winnetka, Ill.
Henry Syer, Escuela de Kent, Kent, Connecticut
G.B. Thomas, Instituto Tecnológico de Massachusetts
A.W. Tucker, Universidad de Princeton
H.E. Vaughan, Universidad de Illinois
John Wagner, Universidad de Texas
R.J. Walker, Universidad de Cornell
A.D. Wallace, Universidad de Tulane
E.L. Walters, Escuela William Penn de Ultimo Ciclo Secundario, York, Pensilvania
Warren White, Escuela Secundaria del Norte, Sheboygan, Wisconsin
D.V. Widder, Universidad de Harvard
William Wooton, Colegio Pierce de Primer Ciclo Universitario, Woodland Hills, California
J.H. Zant, Universidad del Estado de Oklahoma

Proyecto de Traducción al Español

Comisión Consultiva

Edward G. Begle, Universidad de Stanford

Howard F. Fehr, Universidad de Columbia

Mariano García, Universidad de Puerto Rico

Max Kramer, San Jose State College

TABLA DE MATERIAS

Capítulo

Capítulo 10

FACTORES Y EXPONENTES

Las ideas importantes en el curso de este capítulo son las de factores y factorización, y a esas ideas les debemos dar un cimiento matemático firme. El tratamiento tradicional de ellas ha propendido a ser un manejo de símbolos con la técnica como su objetivo principal. Nuestro propósito es hacer del <u>entendimiento</u> el objetivo principal. Sin <u>entendimiento</u> es forzosa una gran dosis de confusión. Por ejemplo, si un estudiante preguntara por qué π no es un factor de 6 (puesto que $\pi \times \frac{6}{\pi} = 6$, y $\frac{6}{\pi}$ es un número perfectamente aceptable), o si preguntara por qué $x^2 + 1$ no es un factor de x $\left(\text{puesto que } \frac{x}{x^2+1} \cdot (x^2+1) = x\right)$, no podría encontrar una respuesta dentro del marco de lo que habitualmente se enseña. "No sea tonto, usted puede ver que los cocientes indicados no son enteros!", es probablemente una respuesta tan satisfactoria como otra cualquiera.

En este capítulo, nos interesamos por las <u>estructuras</u> algebraicas que <u>sirven de base</u> a nuestras ideas corrientes sobre la factorización. Principalmente nos ocuparemos del conjunto de todos los enteros positivos, que es, según recordamos, cerrado respecto de la suma y de la multiplicación. En realidad, es posible pensar en los enteros positivos como "engendrados" aditivamente por "1", que permite mediante la suma "obtener" cualquier entero positivo. Esta idea tan sencilla para los enteros, será de considerable ayuda cuando estudiemos los polinomios. La idea fundamental es la definición de un factor propio. Se dice que un entero es factorizable si tiene un factor <u>propio</u>, y es <u>primo</u> si carece de factor propio.

Es muy importante tener presente que estos conceptos de factores y factorización dependen del conjunto sobre el cual efectuamos la factorización. Sobre el conjunto de los enteros positivos, 4 es un factor de 12. Si permitiéramos todos los enteros, -4 y 4 serían ambos factores de 12. Si factorizamos sobre el conjunto de los números racionales, entonces $\frac{2}{3}$ es un factor de 12 también. Si factorizamos sobre los números reales, cualquier número es un factor de 12, y la idea parece ya no tener sentido. Cuando hablamos de factorizar un entero positivo, queremos significar siempre sobre el conjunto de los enteros positivos, a menos que se especifique otro conjunto, puesto que la información sobre los factores de los enteros que nos interesa en este capítulo puede obtenerse de los enteros positivos.

Los teoremas que demostramos acerca de los factores se expondrán de tal modo que se podrán generalizar inmediatamente a polinomios, porque es en este dominio donde los necesitamos otra vez.

Los alumnos que han estudiado el curso del SMSG para séptimo grado, tendrán una buena base para abordar las ideas de factores, números primos y mínimo común múltiplo. Es posible que necesiten invertir menos tiempo sobre estos temas que otros estudiantes.

10-1. Factores y divisibilidad

La base del cuento del agricultor con once vacas es que el número 12 tiene una propiedad que el 11 no tiene, a saber: 12 tiene otros factores además de uno y él mismo. Concretamente, 12 puede ser dividido exactamente por 2, 4 y 6. Once no puede ser dividido exactamente por estos números. El extraño pudo coger de nuevo su vaca porque $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{11}{12}$.

El hecho de que cualquier entero positivo tiene a sí mismo y al 1 como factores se deduce de la propiedad del 1: $a \cdot 1 = a$. Pero algunos enteros positivos tienen otros factores, además del 1 y ellos mismos. A esta clase de factor la llamamos un factor propio. Obsérvese la semejanza de la relación factor-factor propio a la relación subconjunto-subconjunto propio. "Propio" es una palabra usada por la gente para indicar los casos realmente interesantes de un concepto particular. Considérese, por el momento, lo que queremos decir con "fracción propia".

Después de la definición de factor propio, surge la pregunta: ¿Se desprende de esta definición que m tampoco puede ser igual a 1 ni a n? Si m es un factor propio de n, queremos decir que hay un entero positivo q ($q \neq 1$, $q \neq n$) tal que $mq = n$. Entonces otro nombre para q es $\frac{n}{m}$. Si $m = 1$, entonces $q = \frac{n}{m} = \frac{n}{1} = n$. Esto es una contradicción. Si $m = n$, entonces $q = \frac{n}{m} = \frac{n}{n} = 1$. Esto es también una contradicción.

Los problemas 1-15 del Conjunto de problemas 10-1a se han propuesto para reforzar la idea de que si m es un factor de n, entonces $\frac{n}{m}$ es un factor de n. Los estudiantes pueden tomar algunas decisiones sobre la base de las reglas de divisibilidad; por ejemplo, 5 no es un factor de 24, puesto que cualquier número divisible por 5 tiene el nombre de un numeral que termine en 5 ó en 0. En los problemas del 16 al 35, deseamos que el estudiante recuerde lo aprendido sobre la divisibilidad de números para poder reconocer los factores propios de un número. Estos problemas conducen a la consideración de las reglas de divisibilidad basadas en el numeral que representa el número.

Respuestas al Conjunto de problemas 10-1a; páginas 247-248:

1. Sí. $2 \times 12 = 24$
2. Sí. $3 \times 8 = 24$
3. No. No hay un entero q tal que $5 \cdot q = 24$.
4. Sí. $6 \times 4 = 24$
5. No. No hay un entero q tal que $9 \cdot q = 24$.
6. No. No hay un entero q tal que $13 \cdot q = 24$.
7. Sí. $12 \times 2 = 24$
8. Sí. $24 \times 1 = 24$
9. Sí. $13 \times 7 = 91$
10. Sí. $30 \times 17 = 510$
11. Sí. $12 \times 17 = 204$
12. Sí. $10 \times 10,000 = 100,000$
13. Sí. $3 \times 3367 = 10,101$
14. Sí. $6 \times 3367 = 20,202$
15. Sí. $12 \times 3367 = 40,404$

Los estudiantes deberán observar que las respuestas a los problemas 14 y 15 se deducen directamente del problema 13. La forma de las respuestas puede sugerir la manera en que la propiedad asociativa facilita el trabajo:

$$a \cdot b = ab$$
$$(2a)b = 2ab$$
$$(4a)b = 4ab$$

16. 85: 5; $5 \times 17 = 85$
17. 51: 3; $3 \times 17 = 51$
18. 52: 2; $2 \times 26 = 52$. 4; $4 \times 13 = 52$
19. 29: no factorizable
20. 93: 3; $3 \times 31 = 93$
21. 92: 2; $2 \times 46 = 92$. 4; $4 \times 23 = 92$
22. 37: no factorizable
23. 94: 2; $2 \times 47 = 94$
24. 55: 5; $5 \times 11 = 55$
25. 61: no factorizable
26. 23: no factorizable
27. 123: 3; $3 \times 41 = 123$
28. 57: 3; $3 \times 19 = 57$
29. 65: 5; $5 \times 13 = 65$
30. 122: 2; $2 \times 61 = 122$
31. 68: 2; $2 \times 34 = 68$. 4; $4 \times 17 = 68$
32. 95: 5; $5 \times 19 = 95$
33. 129: 3; $3 \times 43 = 129$
34. 141: 3; $3 \times 47 = 141$
35. 101: no factorizable

Esperamos que los estudiantes sepan las reglas de divisibilidad por 2, 5 y 10, pero el maestro debe convencerse de que efectivamente todos los estudiantes las saben. La discusión siguiente tiene como fin dar información a los maestros. Esperamos que el maestro no se limite a fijar las reglas, sino que ayude al estudiante a descubrir por sí mismo todo lo que sea posible.

Cualquier entero puede representarse en la forma $10t + u$, donde t es un entero no negativo, y u es un entero del conjunto $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$. Por ejemplo,

$$36 = 3(10) + 6$$

$$178 = 17(10) + 8$$

$$156237 = 15623(10) + 7.$$

La ventaja de esta forma es que podemos aprender las reglas de divisibilidad que pueden basarse en el último dígito del numeral. Por ejemplo, $178 = 17(10) + 8$. Dos es un factor de 10, y, por lo tanto, un factor de cualquier múltiplo de 10, incluyendo 17(10). Con otras palabras, el 17 no importa mucho, puesto que 2 es un factor de 10. De este modo, que sea o no 178 divisible por 2 depende solamente del último dígito, 8. Como 2 es un factor de 8, 2 es un factor de 178.

Expresando con más generalidad el anterior razonamiento, podemos decir que, como 2 es un factor de 10, 2 es un factor de $10t$. Así, pues, 2 es un factor de $10t + u$, si y sólo si 2 es un factor de u, el último dígito. Obsérvese que cuando $u = 0$, hacemos uso de la propiedad de que 2 es un factor de 0.

De manera análoga, puesto que 5 y 10 son factores de $10t$, cada uno es un factor de $10t + u$, si y sólo si cada uno es un factor de u. Por otra parte, 3, 4, 7, 11 y 13 no son factores de $10t$ para cada t. De este modo, las reglas de divisibilidad por estos números no pueden basarse solamente en el último dígito del numeral.

Podemos extender este razonamiento a numerales escritos en cualquier otra base de numeración. Tomemos la notación duodecimal, por ejemplo. Todo número puede expresarse en la forma $12t + u$, donde t es un entero no negativo, y $0 \leq u \leq 11$. Cada uno de los números 2, 3, 4 y 6 es un factor de 12t; así, las reglas de divisibilidad para estos números están basadas en el último dígito del numeral. Esto es, cualquier número expresado como un numeral en base 12 es divisible por 2, 3, 4, 6 ó 12, si el último dígito es divisible por 2, 3, 4, 6 ó 12, respectivamente.

Volviendo a la notación en base 10, examinemos los últimos <u>dos</u> dígitos de un numeral cualquiera. En general, podríamos escribir cualquier número en la forma $(100)h + d$, donde h es un entero no negativo, y d es un entero tal que $0 \leq d \leq 99$. Cualquier número que es un factor de 100 será un factor de 100h. Por lo tanto, un número que es un factor de 100 será un factor de $(100)h + d$, si y sólo si es un factor de d, los dos últimos dígitos. Puesto que la factorización prima de 100 es $2^2 \cdot 5^2$, cualquier número formado a lo más de dos 2 y dos 5 será un factor de 100. Tales números son 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 y 100. Pero 2, 5, 10, 20, y 50 se ensayan más fácilmente por una aplicación sencilla o doble de las reglas del último dígito, lo cual nos deja 4 y 25. Así, pues, un número es divisible por 4 ó 25, si y sólo si el número denotado por los últimos dos dígitos en su notación decimal es divisible por 4 ó 25.

Otra prueba interesante está basada en la suma de los dígitos de un numeral. Si los dígitos de un numeral decimal de cuatro dígitos son a, b, c, d, el número es

$$\begin{aligned} 1000a + 100b + 10c + d &= 999a + a + 99b + b + 9c + c + d \\ &= (999a + 99b + 9c) + (a + b + c + d) \\ &= (111a + 11b + c)9 + (a + b + c + d) \end{aligned}$$

Un numeral decimal con cualquier número de dígitos puede tratarse de la misma manera.

Puesto que 3 es un factor de 9, 3 es un factor de (111a + 11b + c)9. En consecuencia, si 3 es un factor de (a + b + c + d), es un factor del número original (Teorema 10-5b). Además, si 3 <u>no</u> es un factor de (a + b + c + d), entonces 3 <u>no</u> es un factor del número original, como puede demostrarse suponiendo que 3 <u>es</u> un factor del número original y utilizando el teorema 10-5d para llegar a una contradicción.

Llegamos a la conclusión, pues, de que se puede probar la divisibilidad por 3, determinando si 3 es un factor de la suma de los dígitos del numeral decimal.

Observamos, incidentalmente, que hay una regla parecida para la divisibilidad por 9. Un número es divisible por 9, si y sólo si la suma de los dígitos de su numeral decimal es divisible por 9.

En secciones posteriores, al descomponer en factores primos los números, se obtienen los factores 2, 3, 5, 7, ...primos..., en ese orden. El estudiante deberá conocer, por lo tanto, las reglas de divisibilidad para 2, 3 y 5, por lo menos. Las reglas para 4, 9 y 25 son también de ayuda en otros casos. No hay una regla sencilla para la divisibilidad por 7.

<u>Respuestas al Conjunto de problemas 10-1b</u>; página 248-249:

1. Los numerales 28, 128, 228, 528, 3028 todos tienen 28 como último par de dígitos. Cuatro es un factor de 28 y de cada uno de los otros números. Ninguno de los números 6, 106, 306, 806 ó 2006 es divisible por cuatro. Ninguno de los números 18, 118 ó 5618 es divisible por cuatro, pero ambos 72 y 572 son divisibles por 4. La

regla es: Si el número representado por los últimos dos dígitos del numeral es divisible por 4, entonces el número es divisible por 4.

2. Los numerales 27, 207, 2007, 72, 702 y 270 son varios arreglos de los numerales 2, 0 y 7. Los números representados por ellos son todos divisibles por 3. La suma de 2 y 7 es divisible por 3.

Por otra parte, 16, 106, 601, 61 y 1006 no son divisibles por 3. Ni tampoco es la suma de 1 y 6 divisible por 3. Los números 36, 306, 351, 315 y 513 son divisibles por 3, e igualmente lo es la suma de 3 y 6. Obsérvese que los dígitos 1 y 5 reemplazan al dígito 6 para sugerir que lo importante es la suma de los dígitos. Los números 5129 y 32122 no son divisibles por 3.

La primera frase, (222 + 33 + 5) 9 es divisible por 3, puesto que 3 es un factor de 9. La segunda frase, (2 + 3 + 5 + 8), es la suma de los dígitos del número original. Si ambas frases son divisibles por 3, entonces su suma es divisible por 3. (Esto se muestra más tarde en el teorema 10-5b.) Este es el caso del número 2358.

Para cualquier número entero, la primera frase es siempre divisible por 3, puesto que siempre contiene un factor de 9. Así, la cuestión de la divisibilidad del número descansa en la divisibilidad de la segunda frase. De aquí que la regla pueda expresarse: Si la suma de los dígitos del número es divisible por 3, el número mismo es divisible por 3.

3. Un número divisible por 9 es divisible por 3, puesto que la presencia de un factor 9 en un número asegura el factor 3. Por otro lado, la presencia de un factor 3 no implica la de un factor 9. Un ejemplo de un número que es divisible por 3, pero no por 9, es 12.
4. Un número es divisible por seis, si a la vez es divisible por 2 y por 3. Un número es divisible por 2 y por 3, si el último dígito del numeral es par y la suma de los dígitos del numeral es divisible por 3. Ejemplo: 156816. La suma de los dígitos es 27. Veintisiete es divisible por 3. El último dígito, 6, es par. Por lo tanto, 6 es un factor de 156816.
5. (a) 3 es un factor de 101,001. Se utiliza la prueba de divisibilidad por 3.
   (b) 3 no es un factor de 37,199. Se utiliza la prueba de divisibilidad por 3.
   (c) 6 no es un factor de 151,821. Se utiliza la prueba de divisibilidad por 2.
   (d) 15 es un factor de 91,215. Se utilizan las pruebas de divisibilidad por 3 y por 5.
   (e) 12 es un factor de 187,326,648. Se utilizan las pruebas de divisibilidad por 3 y por 4.

10-2. Números primos

El objeto de la discusión que se desarrolla en la sección 10-2 es de largo alcance. Los estudiantes a menudo reciben la impresión de que $x^2 - 2$ no puede factorizarse, a pesar de que un par de sus factores es $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$. Tenemos, por tanto, que destacar el conjunto de números sobre el cual los números se factorizan. Si consideramos que $x^2 - 2$ es un polinomio cuyas variables tienen coeficientes enteros, entonces $x^2 - 2$ no puede factorizarse en polinomios de este mismo tipo. Pero si consideramos que las variables en los factores de $x^2 - 2$ tienen coeficientes reales, entonces $x^2 - 2$ puede factorizarse dentro del dominio de polinomios de este tipo. Por esta razón queremos explicar detalladamente qué clase de factores necesitamos, no solamente en este capítulo, sino en capítulos posteriores.

En este capítulo, deseamos que los factores de enteros positivos sean enteros positivos. Si admitimos los enteros negativos como factores, obtenemos los opuestos de los factores positivos. Esto añade poco a nuestro conocimiento de factores o sobre descomponibilidad.

Respuestas al Conjunto de problemas 10-2a; páginas 251-252:

1. La "respuesta" se da realmente en la página 251. El primer número tachado al considerar todos los números que admiten n como factor común es n^2. Tómese 5, por ejemplo. Los múltiplos de 5 son $2\cdot5$, $3\cdot5$, $4\cdot5$, $5\cdot5$, $6\cdot5$, ...

   Los múltiplos $2\cdot5$ y $4\cdot5$ ya están tachados, porque cada uno tiene a 2 como factor propio. El múltiplo $3\cdot5$ ya está tachado, porque tiene a 3 como factor propio. Así, el primer múltiplo de 5 a tachar es $5\cdot5$ ó 5^2.

   Para explicar por qué no hay números menores que o iguales a 100 a tachar cuando se consideran los múltiplos de 11, hágase una lista de los múltiplos de 11, así: $2\cdot11$, $3\cdot11$, $4\cdot11$, $5\cdot11$, $6\cdot11$, $7\cdot11$, $8\cdot11$, $9\cdot11$, $10\cdot11$, $11\cdot11$, ... Entonces repítase de nuevo el proceso de tachar para mostrar que el primer número a tachar tendría que ser $11\cdot11$.

En el próximo párrafo se da un razonamiento general por si hubiere algunos alumnos que deseen estudiarlo.

Vemos en la criba que el primer número tachado por ser un múltiplo del primo p, es p^2. Si un entero positivo menor que p^2 no es primo, debe tener un factor primo menor que p; de modo que, ya habrá sido tachado. Así, pues, por ejemplo, el primer número tachado por tener a 11 como factor sería 121; cualquier número menor que 121 que no es primo debe tener a 2, 3, 5 ó 7 como factor. Para ver esto, sea n un entero positivo menor que p^2, y que no sea primo, (esto es, con factores propios). En símbolos,

$$n < p^2$$

$$\underline{y} \quad ab = n,$$

donde ambos a <u>y</u> b son factores <u>propios</u> de n. Pero entonces

$$ab < p^2.$$

Si fuera cierto que <u>ambos</u>

$$a \geq p$$

$$\underline{y} \quad b \geq p,$$

entonces, $ab \geq p^2$, lo cual es una contradicción. Por tanto, al menos uno de los factores propios a <u>y</u> b de n debe ser <u>menor</u> que p. Pero entonces el menor de los factores primos de n es también menor que p, y deberá haber sido utilizado para tachar n en la criba.

Puesto que el conjunto de los enteros positivos es infinito, no podemos hallar todos los números primos mediante la criba de Eratóstenes. Es posible, sin embargo, determinar mediante este método, todos los números primos menores que un entero positivo dado. El número primo que sigue a 97 es 101.

Respuestas al Conjunto de problemas 10-2b; página 252:

1. El mayor de los números primos menores que 100 es 97.

   El mayor de los números primos menores que 200 es 199.

   El mayor de los números primos menores que 300 es 293.

2. El mayor de los factores propios primos de números menores que 100 es 47.

   El mayor de los factores propios primos de números menores que 200 es 97.

   El mayor de los factores propios primos de números menores que 300 es 149.

3. El número mayor que se necesita para tachar los números no primos menores que 200 es 13.

   El número mayor que se necesita para tachar los números no primos menores que 300 es 17.

10-3. Descomposición en factores primos

En esta sección, estudiamos la descomposición de enteros en factores primos. Es esencial que el estudiante aprenda a determinar los factores primos de un entero cualquiera, porque utilizamos esta idea para reducir fracciones, hallar el mínimo común denominador de fracciones, y simplificar radicales. La criba de Eratóstenes proporciona un buen método para obtener factores primos.

Se hace mención de números primos y de factorización única en Studies in Mathematics, Vol. III, páginas 4.3 - 4.5.

Espe.amos que el Conjunto de problemas 10-3a se trate en clase.

Respuestas al Conjunto de problemas 10-3a; página 253:

1. 84: 2, $\frac{84}{2} = 42$; 2, $\frac{42}{2} = 21$; 3, $\frac{21}{3} = 7$; 7 es primo.

   $84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$

   16: 2, $\frac{16}{2} = 8$; 2, $\frac{8}{2} = 4$; 2, $\frac{4}{2} = 2$.

   $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$

   37 es primo.

   $48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$

   $50 = 2 \times 5 \times 5$

   $18 = 2 \times 3 \times 3$

   $96 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$

   $99 = 3 \times 3 \times 11$

   $78 = 2 \times 3 \times 13$

   47 es primo.

   $12 = 2 \times 2 \times 3$

2. (a) 28 (c) 77 (e) 49
   (b) 30 (d) 54 (f) 36

Página 254. Los ejercicios 10-3b tiene como fin la práctica sobre las descomposiciones primas de enteros. Si el estudiante puede expresar éstas sin usar el método aquí desarrollado, tanto mejor. No hay ninguna razón particular para que deba empezar con el primo más pequeño y luego utilizar sucesivamente primos mayores, pero tal procedimiento es sistemático. Se deberán poner de manifiesto las ventajas del método, pero el maestro no deberá insistir en su uso. Si los estudiantes emplean exponentes para expresar sus respuestas, tanto mejor; pero si a los estudiantes no se les ocurren, el maestro deberá evitarlos por ahora. Las expresiones largas obtenidas justificarán el uso de exponentes en una sección ulterior.

Suponiendo que prácticamente todos los estudiantes aplicarán el procedimiento sistemático a la factorización prima, hay que cerciorarse de lo siguiente:

1. El estudiante deberá usar las reglas de divisibilidad por 2, 3 y 5 al menos.
2. El estudiante deberá saber cuándo puede detenerse.

   Ejemplo:

202	2	1+0+1	no es divisible por 3.
101	101	101	no es divisible por 5.
1		$\frac{101}{7} = 14\frac{3}{7}$.	

Después de tratar de dividir por 7, se ha terminado, puesto que 101 es menor que 121, siendo este último número el primer múltiplo de 11 que no está ya tachado.

Respuestas al Conjunto de problemas 10-3b; páginas 255-256:

1. El menor factor primo de 115 es 5, puesto que 115 no es par y $1 + 1 + 5$ no es divisible por 3.

   135: impar; $1 + 3 + 5 = 9$; 3 es el menor de los factores primos.

   321: impar; $3 + 2 + 1 = 6$; 3 es el menor de los factores primos.

   484: 2 es el menor de los factores primos, puesto que 2 es un factor de 4.

   539: impar; $5 + 3 + 9$ no es divisible por 3; el último dígito no es ni 5 ni 0;

   $$\frac{539}{7} = 77; \text{ por lo tanto, es divisible por } 7.$$

   143: 2, 3, 5, 7 fallan; 11 es un factor de 143.

2.

98	2
49	7
7	7
1	

$98 = 2\times7\times7$

432	2
216	2
108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

$432 = 2\times2\times2\times2\times3\times3\times3$

258	2	5 no es un factor, puesto que el dígito de las unidades no es ni 5 ni 0.
129	3	
43	43	No necesitamos tratar el 7, puesto que
1		$7^2 = 49$. 258 = 2×3×43.

625 = 5×5×5×5
180 = 2×2×3×3×5
1024 = 2×2×2×2×2×2×2×2×2×2
378 = 2×3×3×3×7
729 = 3×3×3×3×3×3

Evítese el uso de exponentes a menos que los estudiantes los pidan o los exijan. Utilizaremos el deseo de abreviar la escritura de factores como justificación para usar exponentes en una sección ulterior.

825 = 3×5×5×11
576 = 2×2×2×2×2×2×3×3
1098 = 2×3×3×61

Después de dividir por los 3, se rechaza el 5 por la regla de divisibilidad, y el 7 ensayando directamente. Entonces 61 es primo, porque 61 < 121, que es el primer número con el cual se ensaya el 11.

3375 = 3×3×3×5×5×5
3740 = 2×2×5×11×17
1311 = 3×19×23 (Puesto que 437 está cerca de $(20)^2$, debemos tratar todos los primos hasta 19 inclusive.)
5922 = 2×3×3×7×47
1008 = 2×2×2×2×3×3×7
5005 = 5×7×11×13
444 = 2×2×3×37
5159 = 7×11×67; 67 debe ser primo, puesto que hemos eliminado todos los factores primos menores que 11, y 67 < 121.
1455 = 3×5×97; 7 falla y 97 < 121.
2324 = 2×2×7×83; 7 falla y 83 < 121.

La demostración de este teorema de la "factorización única" sobrepasa el nivel de lo que los estudiantes pueden actualmente entender. Una ayuda para convencer al estudiante quizás fuera empezar con un número como 72, y descomponerlo en factores (de varias maneras: 24×3, 9×8, $2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 3$, 6×12, y entonces continuar la factorización de 24×3 y 9×8 y 6×12, hasta que sólo quedaran factores primos. Se obtendrán los mismos tres factores 2 y dos factores 3, no importa cómo se haga (no siempre en el mismo orden, desde luego, pero las propiedades asociativa y conmutativa nos permiten ponerlos en cualquier orden). El hecho es que 72 se "compone" de tres factores 2 y dos factores 3, y esta estructura persiste de cualquier modo que se empiece y proceda en la factorización de 72. Si se interesa, una demostración formal de la propiedad de factorización única de los enteros positivos se puede encontrar en el libro de Courant & Robbins, <u>What is Mathematics</u>, Oxford, 1941, página 23.

10-4. Suma y resta de fracciones

Queremos aplicar la factorización prima de enteros al problema de hallar el mínimo común múltiplo de los denominadores. No deseamos, sin embargo, adhesión ciega al método desarrollado, pero sí deseamos dar al estudiante una manera sistemática de abordar el problema. Por ejemplo, si al estudiante se le pidiera que sumara las fracciones $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$, el mínimo común denominador puede determinarse rápidamente por inspección, y el estudiante debe hacerlo en esta forma.

Pero si al estudiante se le pide que sume $\frac{1}{57} + \frac{1}{95}$, puede no ser fácil determinar por inspección el mínimo común denominador. Entonces, por descomposición en factores primos, se obtiene

$$57 = 3\cdot 19,$$
$$95 = 5\cdot 19,$$

y el mínimo común denominador es $5\cdot 3\cdot 19$.

Es una buena técnica, aquí y en ulteriores cuestiones sobre factorización, dejar las expresiones en forma factorizada tanto como sea posible, porque los factores indican la estructura de la expresión, la cual se olvida al no hacerlo así. En el ejemplo anterior, una vez que las fracciones tienen un denominador común, los numeradores, por supuesto, fueron multiplicados y combinados; pero, como se vió, fue ventajoso dejar el denominador en forma factorizada hasta el final. Entonces sabemos que no se puede simplificar la fracción a menos que el numerador tenga como factor a uno de los factores del denominador.

Respuestas al Conjunto de problemas 10-4; páginas 258-259:

1. (a) $\frac{2}{9} + \frac{1}{15} = \frac{2}{3\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} = \frac{2}{3\cdot 3}\cdot\frac{5}{5} + \frac{1}{3\cdot 5}\cdot\frac{3}{3} = \frac{13}{45}$

   (b) $\frac{3}{14} - \frac{4}{35} = \frac{3}{2\cdot 7} - \frac{4}{5\cdot 7} = \frac{3}{2\cdot 7}\cdot\frac{5}{5} - \frac{4}{5\cdot 7}\cdot\frac{2}{2} = \frac{7}{2\cdot 5\cdot 7} = \frac{1}{10}$

   (c) $-\frac{1}{12} + \frac{4}{26} = -\frac{1}{2\cdot 2\cdot 3} + \frac{4}{2\cdot 13} = -\frac{1}{2\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{13}{13} + \frac{4}{2\cdot 13}\cdot\frac{2\cdot 3}{2\cdot 3} = \frac{11}{156}$

   (d) $-\frac{5}{12} - \frac{7}{18} = -\frac{5}{2\cdot 2\cdot 3} - \frac{7}{2\cdot 3\cdot 3} = -\frac{5}{2\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{3}{3} - \frac{7}{2\cdot 3\cdot 3}\cdot\frac{2}{2} = -\frac{29}{36}$

   (e) $\frac{1}{85} + \frac{3}{51} = \frac{1}{5\cdot 17} + \frac{3}{3\cdot 17} = \frac{1}{5\cdot 17}\cdot\frac{3}{3} + \frac{3}{3\cdot 17}\cdot\frac{5}{5} = \frac{18}{3\cdot 5\cdot 17} = \frac{6}{85}$

   Nótese que después que se han sumado los numeradores, sólo se necesita comprobar 18, para la divisibilidad por 3, 5 y 17.

(f) $\frac{20}{57} - \frac{7}{95} = \frac{-20}{3\cdot 19} - \frac{7}{5\cdot 19} = \frac{-100 - 21}{3\cdot 5\cdot 19} = \frac{-121}{3\cdot 5\cdot 19} = -\frac{121}{285}$

Nótese que $121 = 11^2$ y 11 no es un factor del denominador, así que la fracción no puede ser reducida.

(g) $\frac{5}{21} - \frac{3}{91} = \frac{5}{3\cdot 7} - \frac{3}{7\cdot 13} = \frac{65 - 9}{3\cdot 7\cdot 13} = \frac{56}{3\cdot 7\cdot 13} = \frac{8}{39}$

La fracción $\frac{56}{3\cdot 7\cdot 13}$ puede ser reducida solamente si 3, 7 ó 13 son factores de 56.

(h) $\frac{3x}{8} + \frac{5x}{36} = \frac{3x}{2\cdot 2\cdot 2} + \frac{5x}{2\cdot 2\cdot 3\cdot 3} = \frac{27x + 10x}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3} = \frac{37x}{72}$

(i) $\frac{1}{6} + \frac{3}{20} - \frac{2}{45} = \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{3}{2\cdot 2\cdot 5} - \frac{2}{5\cdot 3\cdot 3} = \frac{30 + 27 - 8}{2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5} = \frac{49}{180}$

(j) $\frac{3k}{10} + \frac{2k}{28} - \frac{k}{56} = \frac{3k}{2\cdot 5} + \frac{2k}{2\cdot 2\cdot 7} - \frac{k}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 7}$

$= \frac{84k + 20k - 5k}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 5\cdot 7} = \frac{99k}{280}$. (99 no es divisible por 2, 5, ó 7.)

(k) $\frac{3a}{5} + \frac{7a}{75} - \frac{5a}{63} = \frac{3a}{5} + \frac{7a}{3\cdot 5\cdot 5} - \frac{5a}{3\cdot 3\cdot 7}$

$= \frac{945a + 147a - 125a}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7} = \frac{967a}{1575}$. (967 no es divisible por 3, 5, ó 7.)

(ℓ) $\frac{805x - 6}{840}$

2. (a) $\frac{8}{15} < \frac{13}{24}$, $\frac{8}{3\cdot 5} < \frac{13}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3}$, $\frac{64}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5} < \frac{65}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5}$. Cierto.

(b) $\frac{3}{16} < \frac{11}{64}$, $\frac{12}{64} < \frac{11}{64}$; Falso (no es necesario factorizar aquí).

(c) $\frac{14}{63} < \frac{6}{27}$, $\frac{14}{3\cdot 3\cdot 7} < \frac{6}{3\cdot 3\cdot 3}$, $\frac{2\cdot 7}{3\cdot 3\cdot 7} < \frac{2\cdot 3}{3\cdot 3\cdot 3}$, $\frac{2}{9} < \frac{2}{9}$. Falso.

3. (a) $\frac{1}{7}$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$

$\frac{1}{7} < \frac{1}{6}$, porque $7 > 6$ (Si $a > b$, y $a > 0$ y $b > 0$, entonces $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.)

(b) $\frac{4}{15} = \frac{4}{3\cdot 5} = \frac{36}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 5}$
$\frac{7}{27} = \frac{7}{3\cdot 3\cdot 3} = \frac{35}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 5}$ } así, $\frac{4}{15} > \frac{7}{27}$.

(c) $\frac{5}{12} > \frac{5}{13}$, porque $\frac{13}{5} > \frac{12}{5}$ (Si $a > b$, y $a > 0$, y $b > 0$, entonces $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$).

4. (a) $\frac{6}{27} > \frac{5}{27}$, $\frac{5}{27} > \frac{5}{28}$; así $\frac{6}{27} > \frac{5}{28}$. (Propiedad transitiva de la ordenación)

(b) $\frac{2}{3} = \frac{14}{3\cdot 7}$
$\frac{5}{7} = \frac{15}{3\cdot 7}$ } así, $\frac{2}{3} < \frac{5}{7}$.

(c) $\frac{6}{16} = \frac{2\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2} = \frac{3}{2\cdot 2\cdot 2}$,
$\frac{9}{24} = \frac{3\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 2\cdot 2} = \frac{3}{2\cdot 2\cdot 2}$.
Por tanto, $\frac{6}{16} = \frac{9}{24}$.

(d) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \cdot \frac{26}{2\cdot 13} = \frac{130}{12\cdot 13}$,
$\frac{11}{12} - \frac{1}{13} = \frac{143 - 12}{12\cdot 13} = \frac{131}{12\cdot 13}$,
En consecuencia, $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) < \left(\frac{11}{12} - \frac{1}{13}\right)$.

5. No hay enfoque algebraico. Lo que deseamos es un número que tenga el factor propio más grande posible. Por inspección, decidimos que $2 \times 47 = 94$ servirá, porque el mayor primo próximo es 53, y 2×53 es demasiado grande. Así, Juan y Roberto pudieron pedir $94 + 47 = 141$ centavos.

6. 97 más su mayor factor primo 97, es 194 centavos.

*7. $\frac{1}{3}\cdot 600 = 200$; por lo tanto, $200 + \frac{1}{12}$ de cualquier cantidad es mejor.

$$200 + \frac{1}{12}(700) \quad ? \quad \frac{1}{3}(700),$$
$$200 + \frac{700}{12} \quad ? \quad 200 + \frac{100}{3},$$
$$200 + \frac{700}{12} \quad > \quad 200 + \frac{400}{12},$$

Por consiguiente, $\$200 + \frac{1}{12}$ de las ventas es mejor.

$$200 + \frac{1000}{12} \quad ? \quad \frac{1000}{3},$$

$$200 + \frac{1000}{12} \quad ? \quad 200 + \frac{400}{3},$$

$$200 + \frac{1000}{12} < 200 + \frac{1600}{12},$$

En consecuencia, $\frac{1}{3}$ de las ventas es mejor.

Si sus ventas ascienden a s dólares, entonces

$$200 + \frac{1}{12}s = \frac{1}{3}s$$

$$2400 + s = 4s$$

$$2400 = 3s$$

$$800 = s$$

Sus ventas deben ser $800.

10-5. Algunas propiedades de los factores

En esta sección, se presenta otra aplicación de la descomposición de enteros en factores primos. Determínense dos factores de 72 con la propiedad de que su suma sea 22. Esto puede parecer al estudiante un simple juego, pero con ello tenemos un propósito serio. Este es el tipo de reflexión que se hace al factorizar el polinomio cuadrático $x^2 + 22x + 72$. No solamente será útil la descomposición de enteros en factores primos luego al factorizar polinomios, sino que también nos dará la pauta para desarrollar las propiedades de los polinomios. El estudiante verá que cualesquiera que sean las propiedades que descubra para los enteros, análogas propiedades para los polinomios se descubrirán en el Capítulo 12.

Hay dos teoremas en los cuales basamos un estudio sistemático de la divisibilidad de enteros. Estos teoremas son :

10-5c. Para enteros positivos a, b y c, si a es un factor de b, y a no es un factor de $(b+c)$, entonces a no es un factor de c.

10-5d. Para enteros positivos a, b y c, si a es un factor de b, y a es un factor de (b+c), entonces a es un factor de c.

El teorema 10-5a se introduce para dar al estudiante la idea de demostrar teoremas sobre factores. El teorema 10-5b es la generalización del teorema 10-5a, y se necesita en la demostración del teorema 10-5c. Las pruebas de los teoremas 10-5b y 10-5d se dejan como ejercicios, así que se encuentran en las Respuestas al Conjunto de problemas 10-5, ejercicios 7 y 8.

Apliquemos los teoremas 10-5c y 10-5d al problema de encontrar dos factores de 72 cuya suma sea 22. La factorización prima de 72 es 2×2×2×3×3. Si b y c representan factores de 72, observamos que b y c deben tener una factorización prima compuesta de factores 2 y factores 3. La pregunta es: "¿Deberán entrar todos los 2 en b, o deberán repartirse entre b y c?" El teorema 10-5d contesta esta pregunta. Dice: "Si 2 es un factor de b, y 2 es un factor de (b+c), entonces 2 es un factor de c". Aquí la clave es la suma, 22. Puesto que 2 es un factor de 22, los factores 2 deben repartirse. El teorema 10-5c nos dice que no siendo 3 un factor de 22, 3 no es un factor de c (ó b). Esto es, los factores 3 no están repartidos, y deben entrar todos en un factor. Por lo tanto, tenemos las siguientes posibilidades:

c	b
2 × 2	2 × 3 × 3
2 × 2 × 3 × 3	2

Pero 2 × 2 × 3 × 3 es ya mayor que 22; luego, esta posibilidad está eliminada. Si el problema tiene una solución, los factores requeridos deben ser 2×2 y $2 \times 3 \times 3$. Estos son los factores 4 y 18, y su suma es 22.

Algunos maestros encuentran útil el uso de un esquema tal como el siguiente para ayudar a los estudiantes a visualizar los factores que entran y los lugares que deben ocupar:

$$72 = 2\times2\times2\times3\times3$$

$$(\quad) + (\quad) = 22.$$

Los factores de 72 que tenemos a la vista deben distribuirse en los dos espacios vacíos para obtener un enunciado cierto. El tratar de poner todos los factores 3 en un espacio y repartir los factores 2 en los dos espacios ayuda a decidir la manera de hacer la distribución.

<u>Respuestas al Conjunto de problemas 10-5</u>; páginas 262-264:

1. $12 = 2\times2\times3$

   $(2\times3) + (2) = 8$. Los factores 2 se reparten, para una suma par, por el teorema 10-5d.

   Los números son 6 y 2.

   $\left.\begin{array}{l}(2\times2) + (3) = 7 \\ (2\times2\times3) + (1) = 13\end{array}\right\}$ Los factores 2 entran juntos, para una suma impar, por el teorema 10-5c.

   Los números son 4 y 3, ó 12 y 1.

2. $36 = 2\times2\times3\times3$

   $(3\times2\times2) + (3) = 15$

   Los factores 3 se reparten, en virtud de la divisibilidad por 3, por el teorema 10-5d.

   Los factores 2 entran juntos, en virtud de la no divisibilidad por 2, por el teorema 10-5c.

   Los números son 12 y 3.

$(2\times3\times3) + (2) = 20$

Los factores 2 se reparten, en virtud de la divisibilidad por 2, por el teorema 10-5d.

Los factores 3 entran juntos, en virtud de la no divisibilidad por 3, por el teorema 10-5c.

Los números son 18 y 2.

$(2\times2) + (3\times3) = 13$

Los factores 2 entran juntos, debido a la no divisibilidad por 2, por el teorema 10-5c.

Los factores 3 entran juntos, debido a la no divisibilidad por 3, por el teorema 10-5c.

Los números son 4 y 9.

3. $150 = 2\times3\times5\times5$

(a) Con un factor 2 es imposible obtener una suma par.

(b) $(5\times3) + (5\times2) = 25$

$(5\times3\times2) + (5) = 35$

Los números son 15 y 10, ó 30 y 5.

(c)
$(5\times5\times2\times3) + (1) = 151$
$(5\times5\times2) + (3) = 53$
$(5\times5\times3) + (2) = 77$
$(5\times5) + (3\times2) = 31$

Los números son 150 y 1, 50 y 3, 75 y 2, ó 25 y 6.

4. $18 = 2\times3\times3$

$(3\times2) + 3 = 9$

Los números son 6 y 3.

$(3\times3) + 2 = 11$

Los números son 9 y 2.

5. (a) $288 = 2\times2\times2\times2\times2\times3\times3$

$(3\times3\times2) + (2\times2\times2\times2) = 18 + 16 = 34$

(b) $972 = 2\times2\times3\times3\times3\times3\times3$

$(2\times2) + (3\times3\times3\times3\times3) = 4 + 243 = 247$

(c) $216 = 2\times2\times2\times3\times3\times3$

$(2\times2\times2\times3\times3\times3) + 1 = 216 + 1 = 217$

(d) $330 = 2\times3\times5\times11$

$(3\times5) + (2\times11) = 15 + 22 = 37$

(e) $500 = 2\times2\times5\times5\times5$

$(2\times5\times5\times5) + 2 = 252$

Como este es el único arreglo posible que da una suma par que no es un múltiplo de 5, y siendo $252 \neq 62$, el problema no tiene solución.

(f) $270 = 2\times3\times3\times3\times5$

$(3\times3) + (2\times3\times5) = 9 + 30 = 39$

6. Si el perímetro de un rectángulo es 68 pies, entonces la suma del largo y el ancho es 34 pies. El producto del largo por el ancho es 225 pies cuadrados. Así, pues, necesitamos dos factores de 225 cuya suma sea 34.

$225 = 3\times3\times5\times5$

$(3\times3) + (5\times5) = 9 + 25 = 34$

El largo del terreno es 25 pies; el ancho es 9 pies.

7. Si a, b y c son enteros positivos, a es un factor de b, y, a es un factor de c, entonces a es un factor de (b + c).

Demostración: $b + c = ap + aq$, donde p y q son enteros, por definición de factor.

$= a(p + q)$, por la propiedad distributiva.

Puesto que p + q es un entero, a es un factor de (b + c).

8. Para enteros positivos a, b y c, si a es un factor de b, y a es un factor de (b + c), entonces a es un factor de c.

Demostración: $a \cdot p = b + c$, donde p es un entero, pues a es un factor de (b + c),

y $a \cdot q = b$, donde q es un entero, porque a es un factor de b.

Por lo tanto, $a \cdot p = a \cdot q + c$

$ap + (-aq) = c$ Propiedad aditiva de la igualdad

$a(p + (-q)) = c$ Propiedad distributiva

Puesto que el conjunto de los enteros tiene ~~la~~ propiedad de clausura respecto de la suma,

$(p + (-q))$ es un entero.

Por lo tanto, a es un factor de c.

9. Por el teorema 10-5b, puesto que y es un factor de ambos 3y e y^2, es un factor de $3y + y^2$. También se pudo haber usado la propiedad distributiva para destacar y como factor.

10. Por el teorema 10-5d, si 3 es un factor de 6, y 3 es un factor de 6 + 4x, entonces 3 es un factor de 4x. 3 es un factor de 4x para cualquier valor de x que sea un múltiplo de 3.

11. Si x es el número de aceras de tiendas, y y es el número de aceras de casas, entonces 50x + 150y es el número de centavos ganados.

Puesto que 3 es un factor de 150y, y deseamos que 3 sea un factor de 50x + 150y, entonces 3 debe ser un factor de 50x, por el teorema 10-5b. Esto será cierto si x es un múltiplo de 3.

*11. $50x + 150y = 50(x + 3y)$

Puesto que 2 divide a 50 y 4 debe dividir a la expresión 50 (x + 3y), tenemos que escoger valores pares de

$x + 3y$. Si x es par, entonces $3y$ debe ser par, puesto que la suma de dos números pares es par. Esto es cierto cuando y es par. Si x es impar, entonces $3y$ debe ser impar, puesto que la suma de dos números impares es par. $3y$ es impar cuando y es impar. Por lo tanto, si los niños aceptan un número par de empleos de tiendas, tienen que aceptar un número par de empleos de casas. Si aceptan un número impar de empleos de tiendas, tienen que aceptar un número impar de empleos de casas.

12. Este conjunto de preguntas tiene la intención de dar más significación a los teoremas en el problema 13, guiando al estudiante en la consideración de algunos casos particulares. En la parte (h), aunque 3 <u>es</u> un factor de 135, este dato no "se deduce" de la información dada.

(a)	Sí	(e)	Sí
(b)	No	(f)	Sí
(c)	Sí	(g)	Sí
(d)	Sí	(h)	No

13. (a) Puesto que a es un factor de b, y b es un factor de c, existen enteros n y m tales que

$$an = b \quad \underline{y} \quad bm = c.$$

Multiplicando los miembros de la primera igualdad por m, tenemos

$$(an)m = bm,$$

y teniendo en cuenta la segunda igualdad, resulta

$$(an)m = c.$$

Por la propiedad asociativa de la multiplicación,

$$a(nm) = c.$$

De este modo, puesto que nm es un entero, por la propiedad de clausura, a es un factor de c.

(b) Puesto que a es un factor de b, y c es un factor de d, existen enteros n y m tales que

$$an = b \text{ y } cm = d.$$

Por tanto, $(an)(cm)$ y (bd) son nombres para el mismo producto:

$$(an)(cm) = bd$$

$$ac(nm) = bd, \text{ por las propiedades asociativa y conmutativa.}$$

Así, puesto que nm es un entero, ac es un factor de bd.

(c) es un caso especial de (b).

(d) Si a es un factor de b, existe un entero n tal que

$$an = b.$$

Entonces $(an)^2$ y b^2 son nombres para el mismo producto.

Esto es,

$$a^2n^2 = b^2.$$

De este modo, puesto que n^2 es un entero, por la propiedad de clausura, a^2 es un factor de b^2.

14. (a) Teorema (c) (d) Teorema (c)
(b) Teorema (a) (e) Teorema (c)
(c) Teorema (c) (f) Teorema (b)

10-6. Introducción de los exponentes

Si los estudiantes no han preguntado ya por una manera más corta de escribir $2\times2\times2\times2\times2\times3\times3$, introducimos ahora la notación exponencial. En la definición de

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ factores}},$$

téngase la precaución de decir, "a tomada como factor n veces," y no "a multiplicada por sí misma n veces". Considérese el significado de cada una de estas frases: Dos tomado como factor 3 veces significa $2 \cdot 2 \cdot 2$, o sea, 8. Dos multiplicado por sí mismo 3 veces significa

$2 \cdot 2 = 4$, 2 multiplicado por 2 una vez,
$4 \cdot 2 = 8$, multiplicado por 2 dos veces,
$8 \cdot 2 = 16$, multiplicado por 2 tres veces, o sea, 2^4.

Evidentemente, decir "multiplicado por sí mismo" puede producir confusión.

Respuestas al Conjunto de problemas 10-6a; página 266:

1. 25 pulgadas cuadradas.
   Las palabras "cuadrado" y "cubo" se originaron con el uso de estas operaciones para obtener respectivamente las áreas de cuadrados y los volúmenes de cubos.

2. $64 = 2^6$; $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$; $80 = 2^4 \cdot 5$; $48 = 2^4 \cdot 3$; $128 = 2^7$; $81 = 3^4$; $49 = 7^2$; 41 es primo; $32 = 2^5$; $15 = 3 \cdot 5$; $27 = 3^3$; 29 es primo; $56 = 2^3 \cdot 7$; $96 = 2^5 \cdot 3$; $243 = 3^5$; $432 = 2^4 \cdot 3^3$; $512 = 2^9$; $576 = 2^6 \cdot 3^2$; $625 = 5^4$; $768 = 2^8 \cdot 3$; $686 = 2 \cdot 7^3$.

3. n debe ser un entero positivo; a puede ser cualquier número real.

*4. Hemos utilizado este ejemplo antes, con notación diferente, en el Capítulo 3, para mostrar una operación no conmutativa. No es cierto, en general, que $a^b = b^a$. Después que los estudiantes se hayan dado cuenta de esto, sería divertido pedirles que busquen dos enteros positivos desiguales, a y b, para los cuales es efectivamente cierta la última ecuación. En efecto, sólo hay un tal par, a = 2 y b = 4, pero la demostración de esto trasciende el presente curso.

La operación sería asociativa si $(a^b)^c$ fuera igual a $a^{(b^c)}$. Esto, de nuevo, no es cierto en general, como lo demostrará un ejemplo.

La única propiedad que se mantiene válida para exponentes es que la exponenciación es distributiva respecto de la multiplicación; esto es, que $(ab)^c = a^c \cdot b^c$. No vamos a preocuparnos de esta terminología, particularmente en vista de que nunca hemos tenido cuidado en llamar a la ley distributiva habitual, ley distributiva de la multiplicación respecto de la suma. Una dificultad que tienen los estudiantes con exponentes es que a menudo suponen una ley ficticia que distribuye la exponenciación respecto de la suma; no es cierto que $(a + b)^c = a^c + b^c$. Ni tampoco es cierto que $a^b a^c = a^{bc}$.

El resultado general

$$a^m a^n = a^{m + n}$$

puede considerarse como una consecuencia directa de la definición de exponentes. Puesto que decidimos abreviar

$$a \cdot a \cdot a \cdots a \text{ (p factores)}$$

con a^p, podemos insertar paréntesis arbitrariamente (por la propiedad asociativa de la multiplicación) para escribir

$$\overbrace{(a \cdot a \cdots a)}^{\text{m factores}} \quad \overbrace{(a \cdot a \cdots a)}^{\text{n factores}}, \text{ p factores.}$$

Luego, $p = m + n$, y abreviamos esto con

$$a^m a^n = a^p = a^{m+n}.$$

<u>Respuestas al Conjunto de problemas 10-6b; páginas 267-268:</u>

1. (a) m^{14}
   (b) x^{12}
   (c) $2x^3$
   (d) $4x^4$
   (e) 2^4x^4
   (f) 3^7a^4
   (g) 2^9a^{10}
   (h) x^{2a+a}
   (i) 3^6
   (j) $3^4 \cdot 2^3$
   (k) $2^7 \cdot 3^5 \cdot 5^3$
   (ℓ) 2^{4a+a}
   (m) $3^3a^3b^5$
   (n) $9k^2m^2t^2$
2. $8 + 27 = 35$

   $5^3 = 125$ Falso
3. $(2^3 \cdot 3^3) = (2 \cdot 3)^3 = 6^3$ Cierto
4. 2 divide a 6^3, 2 divide a 2^3, por tanto, 2 debe dividir a 3^3, por el teorema 10-5c. Falso
5. Falso $2^3 \cdot 3^3 = 6^3$
6. Falso $2^3 \cdot 3^3 = 6^3$
7. $2^3 + 2^3 = 2^3(1 + 1)$ Propiedad distributiva

   $= 2^3 \cdot 2$

   $= 2^4$

   Falso
8. Cierto; por la propiedad distributiva, $2^3 + 2^3 = 2^3(1 + 1) = 2^4$.
9. $3^3 + 3^3 = 3^3(1 + 1)$ Propiedad distributiva

   $= 3^3 \cdot 2$

   Falso
10. Cierto; por la propiedad distributiva, $3^3 + 3^3 + 3^3 = 3^3(1 + 1 + 1) = 3^4$.

11. Falso; $4^3 + 4^3 + 4^3 = 4^3(1 + 1 + 1) = 4^3 \cdot 3$.

12. Cierto; por la propiedad distributiva, $4^3 + 4^3 + 4^3 + 4^3 = 4^3(1 + 1 + 1 + 1) = 4^4$.

Los problemas 7-12 ilustran un resultado general concerniente a las potencias de enteros, a saber, $a \cdot a^{n-1} = a^n$. Los estudiantes posiblemente podrán descubrir esto por sí mismos cuando noten que $4^3 + 4^3 + 4^3 + 4^3 = 4 \cdot 4^3$.

13. (a) $2^3(2^2 + 2) = 2^4(2 + 1) = 2^4 \cdot 3$

(b) $x^2(2x^3 + x^2) = 2x^5 + x^4$

(c) $2x^3(2x^2 - 4x^3) = 4x^5 - 8x^6$

(d) $-3a^4(3^2a^3 - 3^3a^2) = -3^3a^7 + 3^4a^6$

(e) $(a^2 + 2a^3)(a - a^2) = (a^2 + 2a^3)a + (a^2 + 2a^3)(-a^2)$

$= a^3 + 2a^4 - a^4 - 2a^5$

$= a^3 + a^4 - 2a^5$

10-7. Otras propiedades de los exponentes

Necesitamos demostrar la posibilidad de generalizar las reglas para simplificar fracciones que contienen potencias, pero no es preciso hacer hincapié en ellas. Se debe estimular al estudiante a pensar sobre la base de la definición. Por ejemplo:

$$\frac{xy^3}{x^2y^2}$$

El estudiante debería razonar: "Hay un factor x en el numerador y dos en el denominador; esto es lo mismo que un solo factor x en el denominador, porque $\frac{x}{x} = 1$. Hay tres factores y en el numerador y dos en el denominador; esto es lo mismo que un factor y en el numerador, puesto que $\frac{y^2}{y^2} = 1$. Evítese el uso de la palabra "cancelar", pero no se trate como una "palabra impropia", si procede de un estudiante. Simplemente exíjase del estudiante que explique su uso de tal palabra mediante la propiedad, $\frac{a}{a} = 1$, $(a \neq 0)$.

Respuestas al Conjunto de problemas 10-7a; páginas 270-271:

1. (a) 2 (e) $2^4 = 16$
   (b) $\frac{1}{2}$ (f) $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
   (c) 1 (g) $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
   (d) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$ (h) $\frac{2}{3^2} = \frac{2}{9}$
2. (a) a^2 (b) $\frac{1}{m^3}$ (c) 1 (d) $\frac{1}{b^8}$
3. (a) $\frac{x^4}{4}$ (b) $3b^2$ (c) 1 (d) $\frac{4}{a}$
4. (a) $\frac{1}{a^2c^3}$ (b) $a^6b^6c^5$ (c) $a^2b^3c + a^4b^3c^4$
5. (a) $\frac{1}{5x}$ (b) $\frac{5+x}{25x^2}$ (c) $5x$
6. (a) $\frac{9b^2}{2a^3}$ (b) $6b$ (c) $\frac{36a}{7b^6}$
7. (a) $\frac{6}{x^4y^3}$ (b) $\frac{6y^3}{17x^4a^6}$ (c) $\frac{9x^2y^3}{4a^6b^6}$
8. Falso. $\frac{9}{4} \neq \frac{3}{2}$
9. Falso. $\frac{216}{27} \neq 2$
10. Cierto. $\frac{81}{16} = \frac{81}{16}$
11. Cierto. $\frac{4^3 \cdot 3^3}{3^3 \cdot 4^3} = 1$
12. Cierto. $\frac{(2 \cdot 3)^3}{3^3} = \frac{2^3 \cdot 3^3}{3^3} = 2^3$

13. El recíproco de cero no es un número.

Páginas 271-272. Necesitamos exponentes negativos más adelante para escribir numerales en forma habitual. Estudiando la parte izquierda de la tabla y llenando la parte derecha mediante aplicación formal de "$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$", creemos que los estudiantes pueden contestar preguntas acerca de a^0, a^{-1}, y a^{-2}. Debe entenderse que 2^0 y 2^{-2} no tienen significado hasta ahora; pero, si definimos 2^0 como nombre del mismo número 1, y si definimos 2^{-2} como nombre del mismo número $\frac{1}{2^2}$, entonces 2^0 y 2^{-2} obtienen sentido en términos de símbolos anteriormente definidos. Así, si definimos $a^0 = 1$, y $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, para $a \neq 0$ y n entero positivo, entonces la única regla necesaria para la división es "$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$". Si los estudiantes encuentran que nuestras razones no son convincentes para definir los exponentes negativos y cero en la forma que lo hicimos, pídaseles que completen la tabla siguiente:

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
2^n					2	4	8	16

Respuestas al Conjunto de problemas 10-7b; páginas 274-275:

1. (a) 3^2 (h) 10^3

 (b) $\frac{1}{3^3}$ (i) [illegible]

 (c) [illegible] (j) $\frac{b}{a^3}$

 (d) b^2 (k) $\frac{9y^3}{2x^3}$

 (e) $\frac{1}{b}$ (ℓ) $\frac{3}{m^5}$

 (f) $\frac{1}{10}$ (m) $\frac{1}{3t^2}$

 (g) $\frac{1}{10}$

2. (a) -1 (f) $\frac{1}{8y^4}$

 (b) 10^7 (g) $\frac{3^4}{2^6}$

 (c) $.0007$ (h) 1

 (d) $\frac{-4}{a^3b}$ (i) $\frac{y^5}{2x^4}$

 (e) $\frac{1}{2y^4}$

3. (a) 93 millones de millas

 (b) 9.3 diez millones de millas

 (c) 9.3×10^7 es otro nombre para 93,000,000.

4. (a) $10^6 + 1$

 (b) $9a^3 + 3a$

 (c) $a^3 + 9$

 (d) $a^2 + 2 + \frac{1}{a^2}$ ó $\frac{a^4 + 2a^2 + 1}{a^2}$

 (e) $a^2 - \frac{1}{a^2}$ ó $\frac{a^4 - 1}{a^2}$

5. (a) 6 (c) −8 (e) 4 (g) 9

(b) −2 (d) 14 (f) −3 (h) −2

El problema 5 enseña algo que puede ser útil al estudiante cuando llegue a la sección 11-5 sobre raíces cuadradas.

6. Si, n es un entero positivo, y $a \neq 0$, entonces $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$.

Demostración:

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Definición

$a^n \cdot a^{-n} = a^n \cdot \frac{1}{a^n}$. Propiedad multiplicativa de la igualdad

$a^n \cdot a^{-n} = 1$ Definición de recíproco

Así, a^n es el inverso multiplicativo de a^{-n}.

*7. Hemos demostrado que:

(a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, donde m, n son enteros positivos, y

(b) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ donde m, n son enteros positivos.

Para dar significado a a^{m-n} cuando $m < n$, hemos <u>definido</u>

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ donde } n \text{ es un entero positivo.}$$

Para dar significado a a^{m-n} cuando $m = n$, hemos <u>definido</u>

$$a^0 = 1.$$

Para demostrar que $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ para <u>todos</u> los enteros p y q, consideramos los siguientes casos:

(1) p y q ambos positivos

(2) o bien p o q positivo y el otro negativo

(3) p y q ambos negativos

(4) o bien p o q cero y el otro distinto de cero (ambos cero es trivial)

Demostración del caso (1): La misma que (a).

Demostración del caso (2):

Supóngase que $p > 0$ y $q < 0$.

Si $q < 0$, entonces $-q > 0$.

Considérese $a^p \cdot a^q$

$$a^p \cdot a^q = a^p \cdot a^{-(-q)} \quad , \quad a = -(-a)$$
$$= a^p \cdot \frac{1}{a^{(-q)}} \quad , \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$
$$= \frac{a^p}{a^{-q}} \quad , \quad \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$
$$= a^{p-(-q)} \quad , \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$
$$= a^{p+q} \quad , \quad a - b = a + (-b)$$

Demostración del caso (3):

Si $p < 0$ y $q < 0$, entonces $-p > 0$ y $-q > 0$.

Considérese $a^p \cdot a^q$.

$$a^p \cdot a^q = \frac{1}{a^{-p}} \cdot \frac{1}{a^{-q}} \quad , \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$
$$= \frac{1}{a^{-(p+q)}} \quad , \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$= a^{p+q} \quad , \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Demostración del caso (4):

Supóngase que $p \neq 0$ y $q = 0$.

Considérese $a^p \cdot a^q$.

$$a^p \cdot a^q = a^p \cdot a^0 \quad , \quad q = 0$$
$$= a^p \cdot 1 \quad , \quad a^0 = 1$$
$$= a^p \quad , \quad a \cdot 1 = a$$
$$= a^{p+0} \quad , \quad a + 0 = a$$
$$= a^{p+q} \quad , \quad q = 0$$

Una vez establecido que $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ para todos los enteros p y q, podemos considerar la división como una multiplicación, así:

$$\frac{a^p}{a^q} = a^p \cdot a^{-q}, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ y } a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

Página 276.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 \text{ significa } \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \frac{a^3}{b^3};$$

así, pues, $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}$.

$$(a^2b^3)^3 = (a^2b^3)(a^2b^3)(a^2b^3) = (a^2 \cdot a^2 \cdot a^2)(b^3 \cdot b^3 \cdot b^3)$$

$$= (a^{2+2+2})(b^{3+3+3});$$

por tanto, $(a^2b^3)^3 = a^6b^9$.

El resultado general,

$$(ab)^n = a^nb^n$$

es cierto, porque $(ab)(ab) \ldots (ab)$ puede ser escrito en la forma

$$(a \cdot a \ldots a) \quad (b \cdot b \ldots b)$$

por las propiedades asociativa y conmutativa de la multiplicación.

Respuestas al Conjunto de problemas 10-7c; páginas 276-279:

1. (a) $9a^6$ (b) $3a^6$ (c) $27a^6$ (d) $3a^9$
2. (a) $\frac{x}{3y^2}$ (b) $\frac{5x}{3y^2}$ (c) $\frac{1}{3y^2}$
3. (a) a (b) $-a$ (c) a^2 (d) $-3a^3$

Nótese la diferencia de significado entre $(-3)^2$ y -3^2.

3. El primero significa $(-3)(-3)$, o sea, 9. El segundo es el opuesto de 3^2, es decir, -9.

4. (a) y^2 (b) 1 (c) 16

5. (a) $-\frac{1}{z^{15}}$ (b) $\frac{1}{z^{15}}$ (c) z^{15}

6. (a) $\frac{7a^2}{20}$ (b) 1 (c) $-\frac{74a^9}{21}$

7. (a) x^a (b) x^{3a} (c) x^{6a}

8. (a) $\frac{15}{2a^2}$ (b) xy

9. (a) Sí. $\frac{4}{9} = \frac{4}{9}$

(b) No. $\frac{2}{3} \neq \frac{4}{9}$

(c) Sí. $\frac{5^2a^2}{7^2b^2} = \frac{5^2a^2}{7^2b^2}$

(d) No. $\frac{5}{7} \neq \frac{5^2}{7^2}$

(e) Sí, por el teorema 10-5b.

(f) Sí, por el teorema 10-5b.

(g) Sí, por el teorema 10-5b.

10. (a) Supóngase que 3 es el número.

$$(2(3))^2 = 36$$

$$2(3)^2 = 18 \quad \text{No son lo mismo.}$$

(b) Si x es el número,

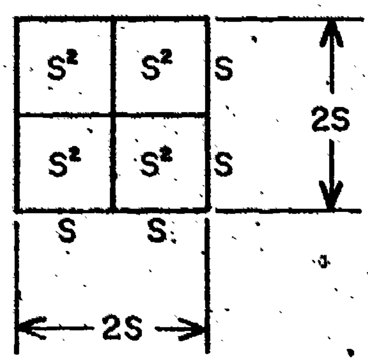
$$(2x)^2 = 4x^2$$

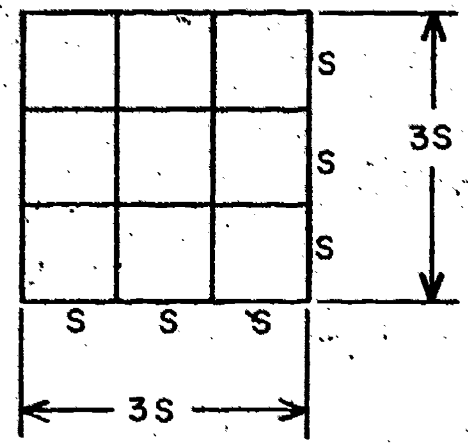
$$2(x)^2 = 2x^2 \quad \text{No son lo mismo.}$$

11. (a) El área de un cuadrado de lado s es s^2.
El área de un cuadrado de lado $2s$ es $(2s)^2 = 4s^2$.
El área del mayor cuadrado es cuatro veces el área del más pequeño.

(b) s^2 y $(3s)^2$
El cuadrado mayor tiene nueve veces el área del cuadrado menor.

(c)





12. (a) $\frac{47}{24a}$ (d) $\frac{bc + ac + ab}{abc}$

(b) $\frac{11 + x}{6x^2}$ (e) $\frac{55b^2 + 91ab - 245a^2}{175a^2b^2}$

(c) $\frac{5x - 6ay - 15a^2z}{30a^3}$

13. Demostrar: Si a^2 es impar, entonces a es impar.

Demostración: Supóngase que a es par. Entonces $a = 2q$, donde q es algún entero positivo. Luego, $a^2 = 4q^2$, y a^2 es par. Pero esto es contrario a la hipótesis; por tanto, a no es par. En consecuencia, a es impar.

14. Demostrar: Si a^2 es par, entonces a es par.

Demostración: Supóngase que a es impar. Entonces $a = 2n + 1$, para algún entero positivo n. En consecuencia, $a^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$. Por lo tanto, a^2 es impar, contrario a la hipótesis. Luego, a no es impar, es decir, a es par.

15. Hay que procurar que el estudiante reduzca las fracciones a su expresión mínima antes de sustituir valores numéricos.

(a) $(-2)(2)^2(-2)^2(3)^2 = -288$

(b) $\left((-2)(2)(-2)(3)\right)^2 = 576$

(c) $\dfrac{-4a^4d}{6b^2a^3} = \dfrac{-2ad}{3b^2} = \dfrac{(-2)(2)(-3)}{3(-2)^2} = 1$

(d) $\dfrac{-3a^2}{b^2c^2} = \dfrac{-3(2)^2}{(-2)^2(3)^2} = -\dfrac{1}{3}$

(e) $\dfrac{(2)^3 + (-2)^3}{(2)^3(-2)^3} = \dfrac{8-8}{-2^6} = \dfrac{0}{-2^6} = 0$

(f) $\dfrac{(2 - 2 + 3)^2}{2^2 + (-2)^2 + (3)^2} = \dfrac{9}{17}$

16. (a) $(x^2 + 1)(x^3 + x^2 + 1) = x^2(x^3 + x^2 + 1) + 1\ (x^3 + x^2 + 1)$
$= x^5 + x^4 + x^2 + x^3 + x^2 + 1$
$= x^5 + x^4 + x^3 + 2x^2 + 1$

(b) $(2a^3 - b^2)(3a^2 - 2b^2) = 2a^3(3a^2 - 2b^2) - b^2(3a^2 - 2b^2)$
$= 6a^5 - 4a^3b^2 - 3a^2b^2 + 2b^4$

(c) $(2x - 3y)(2x - 3y) = 2x(2x - 3y) - 3y(2x - 3y)$
$= 4x^2 - 6xy - 6xy + 9y^2$
$= 4x^2 - 12xy + 9y^2$

(d) $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2$
$= a(a + b)^2 + b(a + b)^2$
$= a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2)$
$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$
$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

En este y los restantes capítulos, no incluimos un resumen en el texto. Con la experiencia que el estudiante ha adquirido ya, puede hacerlo por sí mismo, lo cual es mucho más provechoso para él.

Respuestas a los Problemas de repaso

1. (a) $\frac{5}{26}$ (d) $\frac{m - 18}{36}$

   (b) $\frac{1}{12}$ (e) $\frac{29a}{132}$

   (c) $-\frac{2}{15}$ (f) $\frac{3a^2 - 5a + 8}{12a^2}$

2. (a) $\frac{17}{10}$ (b) $\frac{7a}{9}$ (c) $\frac{3x^2}{5}$ (d) $\frac{1}{7}$

3. 130 es divisible por 2.

   131 no es divisible por 2, 3, 5, 7, ni 11; por tanto, 131 es primo.

4. Si x es el entero, entonces

   $$4x = 10 + 2(x + 1).$$

   El entero es 6.

5. (a) La solución de la ecuación es 93, pero 93 es divisible por 3, de modo que el conjunto de validez es el conjunto vacío.

   (b) {139}

   (c) Si hay un primo x para el cual

   $$3x^2 < 121,$$

   entonces $x^2 < 41$, donde x^2 es un entero.

   Por tanto, $x < 7$, donde x es un entero.

   Los primos menores que 7 son 2, 3 y 5.

   El miembro de la izquierda es $3(2)^2 = 12$ donde x es 2.

   El miembro de la izquierda es $3(3)^2 = 27$ donde x es 3.

   El miembro de la izquierda es $3(5)^2 = 75$ donde x es 5.

   Por lo tanto, el conjunto de validez es {2, 3, 5}.

(d) Si hay un primo x tal que

$|x - 10| < 3$,

entonces $7 < x < 13$ es un enunciado equivalente.

Por consiguiente, el conjunto de validez es $\{11\}$.

6. (a) $6a^3$ (c) 1 (e) $27a^3$

(b) $\frac{y}{4x}$ (d) 2 (f) $10\frac{m}{12} + \frac{n}{3}$

7. (a) $a^3 + a^2$ (e) $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$

(b) $x^3y^2 + xy^5$ (f) $x + x^2$

(c) $6x^3 + 3x^2$ (g) $2 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b}$

(d) $mn^2 - m^2n$ (h) $x^3y^3 + xy^2 + 2x^2y^2 + 2y$

8. (a) Cualquiera de las dos cosas (g) Par

(b) Cualquiera de las dos cosas (h) Impar

(c) Par (i) Impar, puesto que 2 divide a 2^{10}, pero no divide a 3^{10}.

(d) Impar

(e) Par (j) Par, puesto que 2 divide a ambos 2^{10} y 6^{10}.

(f) Impar

9. (a), (c), (e), (f), (g), (h) y (k) son no negativos.

10. Si x es la longitud del lado del cuadrado menor, entonces $x + 1$ es la longitud del lado del cuadrado mayor, y $(x + 1)^2 - x^2 = 27$.

La longitud del lado del cuadrado menor es 13 unidades.

11. Si x es el número de monedas de cinco centavos, $41 - x$ es el número de monedas de diez centavos, y

$5x + 10(41 - x) = 335$.

De modo que Guillermo tiene 15 monedas de cinco centavos. La información sobre su ahorro durante 27 días y el tener más monedas de diez centavos que de cinco centavos es innecesaria.

12. Si Samuel puede recorrer d millas subiendo las colinas, recorrerá también d millas al regresar, y se tendrá

$$\frac{d}{8} + \frac{d}{12} = 5.$$

La distancia es 24 millas.

Capítulo 10

Sugerencias para exámenes

1. Determina la factorización prima de 129, 315, 401, 3375 y 5922.
2. ¿Cuál es el próximo número primo después de 103?
3. ¿Por qué es el producto de dos números primos cualesquiera, cada uno de ellos mayor que 2, siempre un número impar?
4. Si 5 es un factor de A y 15 es un factor de B, nombra un factor de A + B.
5. Si $3^{10} + x = 123456$ es un enunciado cierto, explica por qué 3 es un factor de x.
6. Si $2^{10} + x = 85631$ es un enunciado cierto, explica por qué 2 no es un factor de x.
7. Halla dos números cuyo producto es 108 y cuya suma es divisible por 3, pero no por 2.

8. Halla dos factores de p cuya suma es s, en cada uno de los siguientes casos:

	p	s
(a)	96	20
(b)	36	13
(c)	72	27
(d)	80	18
(e)	352	38
(f)	1800	85

9. ¿Cuáles de los siguientes son ciertos? Explica por qué o por qué no.

(a) $2^3 \cdot 3^3 = 6^3$

(b) $2^3 \cdot 3^2 = 6^5$

(c) $2^3 + 2^3 = 2^4$

(d) $(2^3 \cdot 2)^2 = 2^7$

(e) $2^0 + 2^0 = 2$

(f) $2^{-1} \cdot 2 = 2$

(g) $(2^2)^{-2} = 1$

(h) $2^3 + 2^2 = 2^5$

10. Simplifica (explicando las restricciones en los dominios de las variables).

(a) $\frac{16 \cdot 3^2 x^2 y}{2^3 \cdot 27 x y^3}$

(b) $\frac{2x^3 y}{4xy}$

(c) $\frac{(2x)^3 y}{4xy}$

(d) $\frac{4}{3u} + \frac{2}{5uv} + \frac{1}{v^2}$

(e) $(x^2 + y)^2$

(f) $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1}$

11. Los cuadrados de dos enteros sucesivos difieren en 11. ¿Cuáles son los enteros?

Capítulo 11

RADICALES

Después de preparado el camino por medio de la factorización de enteros y el estudio de los exponentes, procedemos al estudio de los radicales. Aprenderemos la manera de sumarlos y multiplicarlos, así como la manera de simplificarlos después de decidir lo que significa "simplificación" para los radicales.

El método para hallar las raíces cuadradas aproximadas será el de iteración, consistente en partir de un valor inicial determinado del modo habitual, para irlo mejorando sucesivamente. Es posible demostrar, aunque no lo hacemos en el texto, que este método converge, en el sentido de que cada nueva aproximación es mejor que la anterior, y es posible también calcular el error de cada aproximación.

Una de las consecuencias importantes de nuestro trabajo sobre la factorización de enteros es que nos es posible demostrar que $\sqrt{2}$ es irracional. Hemos supuesto desde el principio que $\sqrt{2}$ <u>es</u> un número real, en efecto, que $\sqrt[n]{a}$ es un número real para cualquier entero positivo n y cualquier número real no negativo a. Nuestra lista de propiedades fundamentales en el Capítulo 8 no contiene una propiedad que se necesitaría para probar que $\sqrt{2}$ es un número real. En este curso, suponemos que $\sqrt{2}$ es un número real y luego demostramos que no es racional.

Para una demostración de la existencia de $\sqrt{2}$ y de la unicidad de $\sqrt[n]{a}$, consúltese <u>Studies in Mathematics</u>, Vol. III, páginas 5.7-5.12.

Los alumnos que han seguido el curso de octavo grado del SMSG habrán tenido ocasión de estudiar algo acerca de números racionales e irracionales, y de ver una demostración de que $\sqrt{2}$

es irracional. Habrán trabajado también con la notación corriente o científica.

11-1. Raíces

Poca confusión producen los símbolos $\sqrt{9}$, $\sqrt{-9}$, y $-\sqrt{9}$; pero tan pronto como una variable aparece bajo el signo de una raíz cuadrada, debemos tener cuidado. Las dificultades provienen del hecho de que el símbolo de raíz cuadrada siempre indica la raíz cuadrada positiva, y que el radicando debe ser no negativo. Considérese a $\sqrt{a^2}$. Si a es positivo o negativo, a^2, el radicando, es positivo. Así, $\sqrt{a^2} = a$ es cierto si a es positivo, pero falso si a es negativo. La ecuación válida es

$$\sqrt{a^2} = |a| .$$

He aquí algunos ejemplos:

$$\sqrt{9x^2} = 3|x|$$

$$\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$$

$$\sqrt{(a + b)^2} = |a + b|$$

Supongamos que tenemos un radical tal como $\sqrt{16a}$. En esta expresión, a debe ser no negativo, porque la definición de una raíz así lo requiere. Si a fuera negativo, tendríamos lo que en un curso posterior se define como número imaginario. Algunos ejemplos son:

$\sqrt{9x^3} = \sqrt{9x^2 \cdot x} = 3|x| \sqrt{x}$, pero como x debe ser no negativo, esto es equivalente a $3x \sqrt{x}$.

$$\sqrt{(x - 1)^3} = |x - 1| \sqrt{x - 1} = (x - 1) \sqrt{x - 1}, \quad x \geq 1 .$$

Página 283. Si $x = 17$, entonces $x^2 = 289$.

Si $x = .3$, entonces $x^2 = .09$.

Si $x = -2wa^2$, entonces $x^2 = 4w^2a^4$.

El conjunto de validez de $x^2 = 49$ es $\{7, -7\}$.

El conjunto de validez de $x^2 = .09$ es $\{.3, -.3\}$.

El conjunto de validez de $x^2 = -4$ es $\emptyset$.

Nótese que el conjunto de validez del enunciado "$x^2 = n$, $n \geq 0$" es $\{\sqrt{n}, -\sqrt{n}\}$, donde el símbolo "$\sqrt{n}$" indica la raíz cuadrada positiva, y "$-\sqrt{n}$" la raíz cuadrada negativa. No se debe permitir que el estudiante confunda $\sqrt{n}$ con el enunciado: "Halla los números que al elevarse al cuadrado, dan n."

Respuestas al Conjunto de problemas 11-1a; páginas 284-285:

1. (a) 2 (e) $\frac{7}{3}$
   (b) -11 (f) .9
   (c) $|-3| = 3$ (g) 3
   (d) 1.5 (h) -1

2. (a) Sí (b) No. $\sqrt{(-3)^2}$ es positivo, -3 es negativo.

3. (a) Sí (b) Sí

4. Si $0 < a < b$, entonces exactamente uno de estos es cierto: $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, $\sqrt{a} < \sqrt{b}$, por la propiedad de comparación. Si $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, entonces $a = b$, contrario a la hipótesis. Si $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, entonces $a > b$, contrario a la hipótesis. Así, pues, la única posibilidad restante es $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

5. No. $\sqrt{x^2}$ es no negativo; de modo que $\sqrt{x^2} + 2 > 1$ para <u>todos</u> los valores de x.

6. $\sqrt{(2x - 1)^2} = |2x - 1|$

   (a) $x < \frac{1}{2}$, $2x < 1$, $2x - 1 < 0$, $|2x - 1| = -(2x - 1) = 1-2x$

   (b) $x > \frac{1}{2}$, $2x > 1$, $2x - 1 > 0$, $|2x - 1| = 2x - 1$

   (c) $x = \frac{1}{2}$, $2x - 1 = 0$, $|2x - 1| = 0$

*7. La dificultad en la "demostración" se puede explicar mejor insertando otro paso:

$$(a - b)^2 = (b - a)^2$$

$$\sqrt{(a - b)^2} = \sqrt{(b - a)^2}$$

$$|a - b| = |b - a|,$$

porque $\sqrt{x^2} = |x|$.

Si $a - b < 0$, entonces $b - a > 0$.

$$a - b = -(b - a)$$

$$a - b = a - b$$

Si $a - b < 0$, entonces $b - a > 0$.

$$-(a - b) = b - a$$

$$-a + b = b - a$$

$$b - a = b - a$$

<u>Página 285</u>. Si $x = 2$, entonces $x^3 = 8$.

Si $x = -.3$, entonces $x^3 = -.027$.

Si $x = \pm 2$, entonces $x^4 = 16$.

El conjunto de validez de $x^3 = 8$ es $\{2\}$.

El conjunto de validez de $x^3 = -0.027$ es $\{-.3\}$.

El conjunto de validez de $x^4 = 16$ es $\{2, -2\}$.

Ayúdese a los estudiantes a comprender la manera de determinar una raíz cúbica cuando el número contiene el mismo factor tres veces, la manera de determinar una raíz cuarta si el número contiene el mismo factor cuatro veces, etc.

Cerciórese el maestro de que los estudiantes vean por qué, en el problema 4,

$$\sqrt[3]{x^3} = x, \text{ pero } \sqrt{x^2} = |x|.$$

No se debe dedicar mucho tiempo a raíces de órdenes más altos, puesto que no disponemos de los exponentes fraccionarios para facilitar nuestro trabajo. Lo que se trata en el resto de este capítulo es más importante.

Respuestas al Conjunto de problemas 11-1b; página 286:

1. (a) 3 (b) 3 (c) 3
2. (a) 2 (b) 10 (c) 9
3. (a) x (b) $|x|$ (c) $-|x|$
4. (a) -5 (b) $-2y$ (c) $2y$
5. (a) -13 (b) $|-13| = 13$ (c) 13^2
6. (a) $.2$ (b) $\frac{3}{10}$ (c) $.6$
7. (a) $-\frac{5}{2}$ (b) $\frac{4}{b}$ (c) $\left|\frac{a}{b^3}\right|$
8. (a) $4c^2$ (b) $x - 3y$ (c) 3
9. $\sqrt[4]{16} = \sqrt{4}$, $\sqrt[4]{10,000} = \sqrt{100}$, $\sqrt[4]{x^2} = \sqrt{x}$

*10. Una raíz cuarta de un número a, es un número que utilizado como factor 4 veces, da el número a. De igual manera, una raíz enésima de a, donde n es positivo, es un número que utilizado como factor n veces, da el número a. Los números negativos tienen raíces enésimas reales para valores impares de n.

Ejemplo: $\sqrt[3]{-27} = -3$

11-2. Radicales

La demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ presentada en esta sección es interesante, cuando nos damos cuenta de que tenemos ahora una propiedad matemática muy importante que se puede demostrar en este momento, justamente sobre la base de principios desarrollados en el curso.

Supongamos que hay enteros positivos a y b tales que

$\frac{a}{b} = \sqrt{2}$, donde $b \neq 0$, y a y b no tienen factores comunes.

Entonces $(\frac{a}{b})^2 = 2$. Definición: Si $x = \sqrt{a}$, entonces $x^2 = a$.

$\frac{a^2}{b^2} = 2$, puesto que $(\frac{a}{b})^2 = \frac{a^2}{b^2}$.

$a^2 = 2b^2$, multiplicando ambos miembros por b^2.

a^2 es par. (a^2 y $2b^2$ son nombres para el mismo número, pero $2b^2$ muestra claramente un factor 2.)

a es par, por el teorema del ejercicio 14, Conjunto de problemas 10-7c.

$a = 2c$ Si a es par, entonces hay un entero positivo c tal que a es dos veces c.

$4c^2 = 2b^2$, reemplazando a por 2c en la ecuación $a^2 = 2b^2$;

$2c^2 = b^2$, dividiendo ambos miembros por 2,

b^2 es par. Puesto que $2c^2$ tiene un factor 2, b^2 nombra el mismo número.

b es par.

Ahora 2 es un factor de ambos, a y b, lo que contradice nuestra suposición original de que a y b no tenían factores comunes. Por tanto, $\frac{a}{b} \neq \sqrt{2}$ es cierto para todo par de enteros a y b, $b \neq 0$.

Teorema 11-2. $\sqrt{2}$ no es un número racional. Al número $\sqrt{2}$ le llamamos un número irracional. El conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales reunidos forman el conjunto de los números reales.

El método mas sencillo de ver que la raíz cuadrada de cualquier entero positivo que no es un cuadrado perfecto, es efectivamente irracional, es un poco diferente del seguido para $\sqrt{2}$.

La argumentación procede como sigue:

Sea $\sqrt{n}$ el número de que se trata. Si n tiene algunos factores propios que son cuadrados perfectos, efectuamos con ellos la operación de extraer la raíz cuadrada (aprenderemos esta técnica, y las razones que la justifican, en la lección próxima). Lo que queda entonces dentro del radical es un producto de distintos factores primos, cada uno de los cuales aparece una sola vez. Por ejemplo, si estuviéramos tratando con $\sqrt{45}$, lo escribiríamos primero como $3\sqrt{5}$, y si podemos demostrar que $\sqrt{5}$ es irracional, entonces $\sqrt{45}$ ciertamente también lo es.

Así, tenemos un nuevo entero, digamos m, dentro del radical, y m es el producto de factores primos cada uno de los cuales aparece solamente una vez. Supóngase que $\sqrt{m}$ fuera racional, digamos $\sqrt{m} = \frac{a}{b}$. Cuadrando ambos miembros y luego multiplicando por b^2, obtenemos $a^2 = mb^2$. Ahora "contemos" los factores primos. b^2 es un cuadrado perfecto, y, por lo tanto, en su factorización prima aparece cada factor primo un número <u>par</u> de veces. Pero entonces, en mb^2 los factores primos de m aparecerán un número <u>impar</u> de veces, puesto que m contiene cada factor primo <u>una sola vez</u> en su propia factorización. Así, mb^2 no puede ser igual a un cuadrado perfecto como es a^2; sin embargo, se ha supuesto así. Esto es una contradicción, y por consiguiente, la raíz cuadrada de cualquier entero positivo que no sea un cuadrado perfecto es irracional.

Ahora, no obstante, se presenta una dificultad. Esta demostración es más fácil que la que hemos dado en el texto para la irracionalidad de $\sqrt{2}$. No solamente es más fácil, sino que es aplicable a muchos más casos. ¿Por qué tuvimos entonces que argumentar a base de pares e impares para demostrar la irracionalidad de $\sqrt{2}$?

La respuesta puede no significar gran cosa para la mayoría de los estudiantes, pero es de mucha importancia para los matemáticos, y debemos saber cuál es. Ahora bien, nunca hemos demostrado el teorema de la factorización prima única. Dimos ejemplos, mostramos su plausibilidad, no titubeamos en usarlo, pero no lo hemos demostrado nunca. De modo que, cualquier demostración que dependa de la factorización prima no es rigurosamente una demostración, sino sólo un argumento persuasivo, por decirlo así, de que el resultado es cierto. Una demostración, como una cadena, es sólo tan fuerte como lo sea el más débil de sus eslabones. La demostración en el texto de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ no utilizó la factorización prima, y por ello, en un cierto sentido es una demostración mejor que la que acabamos de presentar para la irracionalidad de las raíces cuadradas de números no cuadrados.

¿Qué deseamos que los estudiantes conozcan y usen? La factorización prima es importante, la hemos utilizado a través de este capítulo, y la continuaremos usando. Deseamos que el estudiante la utilice en problemas acerca del mínimo común múltiplo, en problemas de factorización, o en cualquier otra cuestión que desee. El propósito de esta discusión ha sido prevenir al maestro en el caso de que el estudiante se encuentre con esta otra demostración de la irracionalidad de las raíces cuadradas. Muchos de los resultados obtenidos en este curso no han sido realmente demostrados. El propósito de incluir algunas demostraciones no es en absoluto hacer un curso riguroso, sino sólo enseñar al estudiante algo sobre la naturaleza del razonamiento deductivo, y permitirle así ver en una forma directa que ciertos datos acerca de los números reales son consecuencias de otros. Solamente los estudiantes de nivel universitario postgraduado deben ser obligados a seguir un curso riguroso sobre el sistema de los números reales.

Respuestas al Conjunto de problemas 11-2; páginas 289-290:

1. En el primer ejercicio, todo lo que esperamos que el estudiante diga es: Como el cuadrado de 1 es 1, 1 es muy pequeño para ser la raíz cuadrada deseada; por otra parte, como el cuadrado de 2 es 4, 2 es un número muy grande para ser dicha raíz cuadrada. Pero como no hay enteros entre 1 y 2, $\sqrt{2}$ no puede ser un entero.

2. Mostraremos la manera de hallar un cuadrado perfecto entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$. Si tomamos fracciones iguales a $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ que tengan el mismo denominador, podemos comparar los números más fácilmente. Así, consideramos $\frac{2}{6}$ y $\frac{3}{6}$. Puesto que un número racional que sea un cuadrado perfecto tendría la forma $\frac{a^2}{b^2}$, nos inclinamos a considerar $\frac{12}{36}$ y $\frac{18}{36}$. Ahora es fácil hallar un cuadrado perfecto, $\frac{16}{36}$. Otros cuadrados perfectos se pueden hallar en forma análoga.

3. Supóngase que $\frac{1}{2}\sqrt{2} = r$, donde r es un número racional. Entonces $\sqrt{2} = 2r$ es un enunciado equivalente. El número $2r$ es racional, puesto que el conjunto de los números racionales es cerrado respecto de la multiplicación. Como por el teorema 11-2, $\sqrt{2}$ es un número irracional, $\sqrt{2}$ y $2r$ no pueden ser nombres del mismo número. Así, $\sqrt{2} = 2r$ es una contradicción, y nuestra suposición de que r es un número racional es falsa.

4. Supóngase que $\sqrt{2} + 3 = r$, donde r es un número racional. Entonces $\sqrt{2} = r + (-3)$ es un enunciado equivalente. Puesto que el conjunto de los números racionales es cerrado respecto de la suma, $r + (-3)$ es racional. Pero $\sqrt{2}$ es irracional, por tanto, $\sqrt{2} = r + (-3)$ es una contradicción. De

este modo, la suposición de que $\sqrt{2} + 3$ es racional es falsa.

*5. Supóngase que $\sqrt{5} = \frac{p}{q}$, donde p y q son enteros, $q \neq 0$, y p y q no tienen factores comunes.

Entonces $5 = \frac{p^2}{q^2}$, cuadrando ambos miembros.

$5q^2 = p^2$, por la propiedad multiplicativa de la igualdad.

Como q es un entero, q^2 es un entero.

Además, $5p^2$ y p^2 son nombres del mismo número, de modo que 5 es un factor de p^2.

Por lo tanto, 5 es un factor de p, y $p = 5n$, donde n es un entero.

Luego, $5q^2 = (5n)^2$

$q^2 = 5n^2$

Esto demuestra que 5 divide a q^2, y, por tanto, 5 divide a q. El enunciado de que 5 divide a p y 5 divide a q es una contradicción a la suposición de que p y q no tienen factores comunes.

Respuestas al Conjunto de problemas 11-3a; páginas 290-291:

1. (a) $\sqrt{30}$ (b) $\sqrt{14}$ (c) 3
2. (a) $\sqrt{66}$ (b) $2\sqrt{10}$ (c) 6
3. (a) $\sqrt{2x}$; x es no negativo.
   (b) $\sqrt{3yz}$; y, z son no negativos
   (c) $|x|\sqrt{3}$; x es cualquier número real
4. (a) 0 (b) 40 (c) y^2, donde y es no negativo
5. $(\sqrt{a})^2 \neq a$ para todo número real a. El número $\sqrt{a}$ está definido solamente para valores no negativos de a. Así, $(\sqrt{a})^2 = a$ es cierto para todo número no negativo a.

6. Si $\sqrt[3]{a}\ \sqrt[3]{b}$ es $\sqrt[3]{ab}$, debemos demostrar que $(\sqrt[3]{a}\ \sqrt[3]{b})^3$ es ab.

Demostración: $(\sqrt[3]{a}\ \sqrt[3]{b})^3 = (\sqrt[3]{a})^3\ (\sqrt[3]{b})^3$. $(ab)^n = a^n b^n$

$= ab$. Definición de la raíz cúbica

Así, $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}\ \sqrt[3]{b}$

7. (a) $\sqrt{6} + 4$

(b) $x + \sqrt{x}$, donde x es no negativo

(c) $(\sqrt{a} + 1)^2 = (\sqrt{a} + 1)\sqrt{a} + (\sqrt{a} + 1)\,1$

$= a + \sqrt{a} + \sqrt{a} + 1$

$= a + 2\sqrt{a} + 1$, donde a es no negativo

(d) -1

(e) $5 + 2\sqrt{6}$

(f) $11 + \sqrt{2}$

Respuestas al Conjunto de problemas 11-3b; páginas 293-294:

1.	(a) $2\sqrt{5}$	(b) $5\sqrt{2}$	(c) $5\sqrt{10}$	(d) $4\sqrt{5}$
2.	(a) $2\sqrt{3}$	(b) $\sqrt{30}$	(c) 4	(d) $8\sqrt{3}$
3.	(a) $14\sqrt{7}$	(b) $6\sqrt{13}$	(c) $5\sqrt{13}$	(d) 44
4.	(a) $5\sqrt{6}$	(b) 10	(c) $9\sqrt{6}$	
5.	(a) $36\sqrt{7}$	(b) $2\sqrt{77}$	(c) $114\sqrt{6}$	
6.	(a) 5	(b) 12	(c) 7	
7.	(a) $2\sqrt[3]{2}$	(b) $5\sqrt[3]{2}$	(c) $\sqrt[3]{35}$	(d) 6

8. (a) $2\sqrt{14}$, $-2\sqrt{14}$ (b) $9\sqrt{2}$, $-9\sqrt{2}$ (c) $2\sqrt[3]{7}$, ningún número negativo.

9. (a) $2\sqrt{6}\,|x|$ (b) $2x\sqrt{6x}$ para todos los números x no negativos.

(c) $2x^2\sqrt{6x}$ para todos los números x no negativos.

10. (a) $4a^2\sqrt{2}$ (b) $2a\sqrt[3]{4a}$ para todos los números a no negativos.

(c) $2|a|\sqrt[4]{2}$

11. (a) $\sqrt{47x}$, x es un número no negativo.

(b) $25|x|$

(c) $x^3\sqrt{5x}$, x es un número no negativo.

12. (a) $|x|\sqrt{x^2+1}$

(b) $|x^3|$

(c) $x^2+|x|$

13. (a) $(2\sqrt{3x})(5\sqrt{6x})$, se define solamente para números x no negativos.

$(2\sqrt{3x})(5\sqrt{6x}) = 10\sqrt{18x^2}$, x no negativo

$= 30x\sqrt{2}$, x no negativo

(b) $(3\sqrt{x^2y})(\sqrt{ay^2})$ se define solamente para valores no negativos de a y de y.

$(3\sqrt{x^2y})(\sqrt{ay^2}) = (3|x|\sqrt{y})(y\sqrt{a})$, a y y son no negativos

$= 3|x|y\sqrt{ay}$, a y y son números no negativos

(c) $1000\sqrt{3x}$, x es un número no negativo.

14. (a) 4 (b) $2\sqrt[3]{2}$ (c) 2 (d) $\sqrt[5]{16}$

15. (a) $3\sqrt[3]{a^2}$ (b) $-3b$ (c) $-3c\sqrt[3]{c}$ (d) $2\sqrt[6]{2}$

16. (a) $2x^2 = 32$

$x^2 = 16$

es equivalente a

$x = 4$ ó $x = -4$.

El conjunto de validez es $\{4, -4\}$.

(b) $\{4\sqrt{3}, -4\sqrt{3}\}$

(c) $\{4, -2\}$

17. (a) $12\sqrt{3} - 6$ (b) $32 - 4\sqrt{2}$ (c) $-2 - 2\sqrt{6}$

Respuestas al Conjunto de problemas 11-4a; página 295:

1. (a) $\frac{4}{5}$ (b) $\frac{1}{5}\sqrt{3}$ (c) $\frac{2}{5}\sqrt{3}$

2. (a) $\frac{1}{3}|x|$ (b) $\frac{7}{|a|}$ y $a \neq 0$ (c) $\frac{|w|}{|y|}\sqrt{3}$ y $y \neq 0$

3. (a) $\frac{|x|}{5}$ (b) $\frac{2}{3|y|}$ y $y \neq 0$ (c) $\frac{1}{3|a|}\sqrt{2}$ y $a \neq 0$

4. (a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{a}{3}$ y $a > 0$

   (c) $\sqrt{\frac{y}{x}}$ y $x > 0$ y $y \geq 0$

5. (a) $\frac{1}{7}\sqrt{6}$ (b) $\frac{m}{22}\sqrt{3}$ y $m \geq 0$ (c) $\frac{1}{a}$ y $a > 0$

6. (a) $\frac{1}{5}\sqrt{15}$ (b) $\frac{\sqrt{10}}{6}$ (c) $\frac{|a|\sqrt{3x}}{5x}$ y $x > 0$

7. (a) $\frac{7}{5}$ (b) $\frac{7}{6}\sqrt{7}$ (c) $\frac{5}{6}\sqrt{5}$

8. Para demostrar que $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ para $a \geq 0$ y $b > 0$, debemos probar que $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ es una raíz cuadrada de $\frac{a}{b}$. Esto será cierto si $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2$ es $\frac{a}{b}$, por la definición de la raíz cuadrada.

   Demostración: $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2}$ $\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$

   $= \frac{a}{b}$ Definición de la raíz cuadrada

   $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ puesto que un número positivo tiene exactamente una raíz cuadrada positiva.

Respuestas al Conjunto de problemas 11-4b; página 29

1. (a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{6}\sqrt{3}$ (d) $\frac{1}{9}\sqrt{3}$

2. (a) $\frac{3}{10}\sqrt{2}$ (b) $\frac{1}{6}\sqrt{10}$ (c) $\frac{1}{2}\sqrt{7}$ (d) $\frac{1}{21}\sqrt{21}$

3. (a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ (c) $\sqrt{10}$ (d) $\frac{1}{4}\sqrt{3}$

4. (a) $\frac{1}{5}\sqrt{15b}$, $b \geq 0$ (b) $\frac{1}{7b}\sqrt{14ab}$, $a \geq 0$, $b > 0$

(c) $\frac{|x|}{3}\sqrt{2}$ (d) $\frac{1}{x^2}\sqrt{5x}$, $x > 0$

5. (a) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$ (b) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{3}$ (c) $\frac{1}{a}\sqrt[3]{4a}$, $a \neq 0$

(d) $\frac{1}{2a}\sqrt[3]{10a^2}$, $a \neq 0$

6. (a) $\frac{1}{5}\sqrt{2}$ (b) $\frac{a^3}{15}\sqrt{5}$, $a \geq 0$ (c) $3\sqrt{5}$

7. (a) $\frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{6}$ (b) 3 (c) 1

8. (a) $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x > 0$ (b) $\frac{b}{\sqrt{b} + b}$, $b > 0$

(c) $\frac{1}{2\sqrt{7}}$

9. (a) $5 + 2\sqrt{6}$ (b) $x + 2\sqrt{x} + 1$, $x \geq 0$

(c) $a + \frac{1}{a} + 2$, $a > 0$ ó $\frac{a^2 + 2a + 1}{a}$

<u>Respuestas al Conjunto de problemas 11-4c; páginas 298-299:</u>

1. (a) $3\sqrt{2}$ (b) $3\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$ (c) $19\sqrt{3}$
2. (a) $3\sqrt{2}$ (b) $\frac{14}{15}\sqrt{5}$ (c) $\sqrt{7} + 7\sqrt{3}$
3. (a) $\sqrt{34} + 2 - 2\sqrt{5}$ (b) $2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{6}}{12}$
4. (a) $\sqrt[3]{6} + \sqrt{6}$ (b) $3\sqrt[3]{6}$ (c) $17\sqrt[4]{2}$
5. (a) $5\sqrt{a}$ (b) $a\sqrt{3a} + 2a\sqrt{a}$ (c) 0
6. (a) $\{\sqrt{5}, -\sqrt{5}\}$ (b) $\{25\}$ (c) $\{5, -5\}$

11-5. Raíces cuadradas

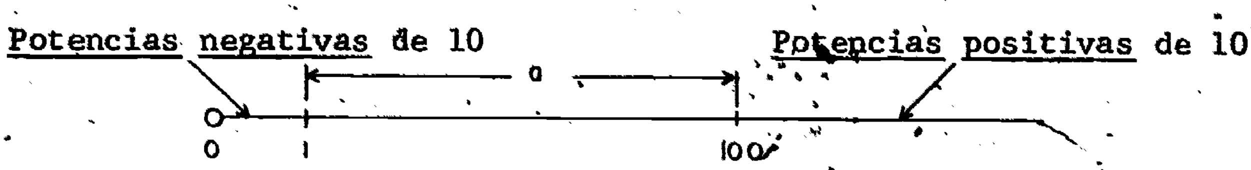
Existe controversia sobre cuál es mejor, el algoritmo de la raíz cuadrada o el método de iteración para aproximar raíces cuadradas. Abogamos por el último en virtud de las razones siguientes:

1. El método de iteración es muy significativo. Está basado en la definición de la raíz cuadrada: Si $x^2 = n$, entonces x es la raíz cuadrada de n. Así el estudiante debe hallar un número que al ser elevado al cuadrado, dé n.
2. El estudiante se percatará mejor de que busca una aproximación de $\sqrt{n}$ que cuando utiliza el algoritmo. En efecto, se le puede enseñar a estimar la magnitud del error.
3. El estudiante va sucesivamente estimando sus resultados; de manera que no es probable que cometa un error grande sin darse cuenta de ello.
4. La segunda aproximación puede hacerse mentalmente muy a menudo, siempre con muy poca aritmética. En muchos casos eso es todo lo que se necesita.
5. Una división fácil con un divisor de dos cifras produce un resultado en que el error está en la cuarta cifra. Esto es suficiente la mayor parte de las veces.
6. El método puede ser justificado algebraicamente, aunque la justificación no se da en el texto del estudiante.
7. Se puede deducir una fórmula para el error de cualquier aproximación.
8. El método es ideal para el cálculo con máquinas.
9. Si la primera aproximación se obtiene con la regla de cálculo, es probable que la segunda aproximación sea correcta hasta 7 u 8 cifras.

10. El método es autocorregible. Esto es, si se comete un error, todavía dará las cifras correctas a condición de que el error no ocurra en la última aproximación.

Una de las dificultades que tienen los estudiantes es la colocación correcta del punto decimal. Tratamos este problema introduciendo la forma tipo. Expresamos cada número en la forma $a \times 10^{2p}$, donde $0 < a < 100$, y p es un entero ($2p$ es, por lo tanto, un entero par). La raíz cuadrada de $a \times 10^{2p}$ es $\sqrt{a} \times 10^{p}$. De este modo, consideramos siempre una aproximación a un número mayor que cero y menor que cien. Aparte de la localización del punto decimal, la forma tipo tiene otra ventaja. Tablas de raíces cuadradas de números desde 1 hasta 100 están a menudo disponibles en el salón de clase. La idea de la forma tipo permite poner todos los números al alcance de la tabla. Es posible que se desee enseñar las aproximaciones de la raíz cuadrada tomándolas de las tablas si éstas están a mano.

La idea de la forma tipo puede ser representada gráficamente en la recta de los números positivos. Los números entre 1 y 100 están



ya en la forma deseada, o se les puede añadir un 10^{0}. Los números mayores que 100 están a la derecha del intervalo considerado y se expresarán con una potencia positiva de 10. Los números positivos menores que 1 están a la izquierda del intervalo considerado y se expresarán con una potencia negativa de 10. El valor absoluto del exponente es igual al número de lugares que se mueva el punto decimal.

Página 302. Ejemplos:

(a) Puesto que $16 < 19 < 25$, resulta que $4 < \sqrt{19} < 5$.

(b) $7 < \sqrt{54} < 8$

(c) $2 < \sqrt{5} < 3$

(d) $9 < \sqrt{96} < 10$

(e) $3 < \sqrt{11.6} < 4$

(f) $8 < \sqrt{79.42} < 9$

(g) $1 < \sqrt{1.38} < 2$

(h) $2 < \sqrt{7} < 3$

(i) $5 < \sqrt{30.2} < 6$

Respuestas al Conjunto de problemas 11-5a; página 303:

1.	(a) 5	(b) 8	(c) 4	(d) 7	(e) 3
2.	(a) 90	(b) .9	(c) .009	(d) 9	
3.	(a) 30	(b) 300	(c) .3	(d) 9	
4.	(a) 50000	(b) .0002			
5.	(a) 4×10^{-17}	(b) 9×10^{8}			

Página 303. El método de iteración es muy fácil de explicar. Supóngase que consideramos un número a, $0 < a < 100$, y buscamos una aproximación de $\sqrt{a}$. Por estimación elegimos un dígito, x; entonces dividimos a por x y hallamos la media aritmética de x y $\frac{a}{x}$. La media es una segunda aproximación de $\sqrt{a}$. Por ejemplo, determínese una aproximación de $\sqrt{43}$. $6^2 = 36$ y $7^2 = 49$. 43 está más cerca de 49, de modo que el dígito que conviene más como estimación es 7. Entonces $\frac{43}{7}$ es 6.14, y la media aritmética es $\frac{1}{2}(7 + 6.14)$, que es igual a 6.57. Muy a menudo la segunda aproximación puede hacerse mentalmente. Por ejemplo, hállese 30. Si el entero más cercano es 6, entonces $\frac{30}{6}$ es 5 y la me-

dia aritmética de 6 y 5 es 5.50. De este modo, pedimos al estudiante que se fije en dos ideas. Primero, poner numerales en la forma $a \times 10^{2p}$, $1 < a < 100$, y p un entero, y efectuar estimaciones sobre el entero más cercano a la raíz cuadrada de a. La estimación del entero más próximo dará siempre un dígito, excepto por valores de a muy próximos a, pero menores que 100. (Por ejemplo, la aproximación del entero más próximo a $\sqrt{97}$ es 10.) La segunda idea es la de dividir a por el entero elegido y calcular la media aritmética de estos dos números. Entonces, para mejorar la aproximación, dividimos y calculamos la media de nuevo, con lo cual se obtienen aproximadamente doble número de cifras correctas.

Cuando "dividimos y calculamos la media" para obtener una segunda aproximación, una pregunta razonable es la siguiente: "¿Cuán buenas son las aproximaciones que vamos obteniendo?" Ciertamente 5 es una buena estimación de la raíz cuadrada de 26, porque 5^2 es 25 y 25 está muy próximo a 26. Si calculamos la media de 5 y $\frac{26}{5}$, obtenemos 5.100; una tabla de raíces cuadradas da para $\sqrt{26}$ el valor 5.099020. Nuestra media sobrepasa este número solamente en 0.001. Si dividimos y calculamos la media de nuevo, obtenemos $\frac{1}{2}(5.1 + \frac{26}{5.1}) = 5.0990196$. De este modo, si buscamos una aproximación para la raíz cuadrada de un número cuya raíz cuadrada sea próxima a un entero, esperamos y obtenemos buenos resultados. No obstante, ¿qué sucede si queremos una aproximación de la raíz cuadrada de 30? Puesto que $5^2 = 25$ y $6^2 = 36$, ni 5 ni 6 es una estimación muy próxima. Para responder a esta pregunta, hemos preparado una tabla en la cual escogimos a propósito los <u>peores</u> casos de raíces irracionales (la media geométrica o próxima a ella) para los cuales el entero más próximo es la primera estimación. La tercera estimación se calculó redondeando la segunda a dos cifras, dividiendo y calculando la media. De este modo las divisiones son bastante fáciles.

Un examen de la tabla demuestra que la segunda aproximación tiene un error en la tercera cifra y la tercera aproximación tiene un error en la cuarta cifra. En un caso solamente, sin embargo, la tercera aproximación tiene un error de más de 0.001. En el caso de $\sqrt{2}$, el error es un poco menos de 0.003. Recuérdese que estos son los casos peores que se podían escoger.

	Primera Estimación	Segunda Estimación (Primera media Aritmética)	Tercera Estimación (Segunda media Aritmética)	Valores dados por Tablas
$\sqrt{2}$	1	1.50	1.41667	1.414214
$\sqrt{6}$	2	2.50	2.45000	2.449490
$\sqrt{13}$	4	3.64	3.60555	3.605551
$\sqrt{21}$	5	4.60	4.58261	4.582576
$\sqrt{30}$	5	5.50	5.47727	5.477226
$\sqrt{43}$	7.	6.57	6.55757	6.557439
$\sqrt{57}$	8	7.56	7.55000	7.549834
$\sqrt{73}$	9	8.56	8.54418	8.544004
$\sqrt{91}$	10	9.50	9.53947	9.539392

Fundándonos en las observaciones hechas en los casos peores, hemos establecido nuestro procedimiento como sigue:

Para hallar la raíz cuadrada aproximada de un número:

1. Póngase el número en la forma tipo, $M \times 10^{2p}$, donde $1 < M < 100$, y p es un entero.
2. Puesto que $\sqrt{M \times 10^{2p}} = \sqrt{M} \times 10^{p}$, hállese la raíz cuadrada de M.
3. Como primera aproximación de $\sqrt{M}$, tómese el entero más próximo, x_1.

4. La media aritmética de x_1 y $\frac{M}{x_1}$ será la segunda aproximación, x_2, efectuando la división $\frac{M}{x_1}$ hasta tres cifras y calculando la media con tres cifras.
5. La media de x_2 y $\frac{M}{x_2}$ será la tercera aproximación, x_3. Redondéese x_2 a dos cifras antes de dividir, en $\frac{M}{x_2}$, efectúese la división hasta cuatro cifras y tómese la media con cuatro cifras. Esta estimación excederá a M por un error en general menor que 0.002.
6. Si fuera necesaria más exactitud, redondéese x_3 a tres cifras. Divídase y tómese la media con seis cifras. En general, si se está seguro de y cifras en el divisor, se puede estar seguro de 2y cifras en la media. Para mayor precisión, se deberá considerar el error en cada etapa. Esto se explica en la siguiente discusión.

El procedimiento indicado para aproximar una raíz cuadrada irracional parece dar resultado. Parece dar números racionales que están cada vez más próximos a la raíz cuadrada irracional. El estudiante puede preguntar: ¿Puede probarse esto? Razonemos como sigue:

Si x_1 es una aproximación positiva de $\sqrt{n}$ tal que $x_1 > \sqrt{n}$, entonces

$$x_1^2 > n,$$

y

$$x_1 > \frac{n}{x_1}.$$

Entonces, sumando x_1 a ambos miembros,

$$2x_1 > x_1 + \frac{n}{x_1}$$

y

$$x_1 > \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{n}{x_1}\right).$$

Puesto que la segunda aproximación es $x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + \frac{n}{x_1})$, queda demostrado que la segunda aproximación es siempre menor que la primera.

Llamemos a la diferencia entre una aproximación y $\sqrt{n}$ el error e de la aproximación. Entonces los errores en las dos primeras aproximaciones son

$$e_1 = x_1 - \sqrt{n}$$

y

$$e_2 = x_2 - \sqrt{n} .$$

Por tanto,

$$e_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{n}{x_1}\right) - \sqrt{n} .$$

Efectuando las operaciones indicadas, resulta

$$e_2 = \frac{x_1^2 - 2\sqrt{n}\ x_1 + n}{2x_1}$$

Pero el numerador a la derecha es un cuadrado perfecto:

$$e_2 = \frac{(x_1 - \sqrt{n})^2}{2x_1} .$$

Ahora observemos lo siguiente:

(1) El error e_2 de la segunda aproximación es positivo, porque el cuadrado de cualquier número distinto de cero es positivo. Por lo tanto, x_2 es mayor que $\sqrt{n}$. Entonces $\sqrt{n} < x_2 < x_1$, y queda demostrado que x_2 está más próximo a $\sqrt{n}$ que x_1.

(2) El mismo procedimiento nos daría el error de cualquier aproximación x en términos de la aproximación precedente z,

$$\text{error de } x = \frac{(z - \sqrt{n})^2}{2z} ,$$

y este error es siempre positivo. Entonces x <u>está más próximo a</u> $\sqrt{n}$ <u>que</u> z, <u>y</u> $x > \sqrt{n}$. Podemos reemplazar $\sqrt{n}$ por x y obtener la fórmula aproximada para el error:

$$\text{error de } x \approx \frac{(z - x)^2}{2z},$$

donde z es la aproximación precedente.

Para aproximar $\sqrt{29}$, encontramos que $x_1 = 5$, $x_2 = 5.4$, <u>y</u> $x_3 = 5.385$; por lo tanto, el error en x_3 es

$$e_3 \approx \frac{(x_2 - x_3)^2}{2x_2},$$

$$e_3 \approx \frac{(5.4 - 5.385)^2}{2(5.4)}$$

$$e_3 \approx \frac{(.015)^2}{10.8} \approx 0.00002.$$

Esto significa que x_3 excede a $\sqrt{29}$ en alrededor de 0.00002, lo cual demuestra que pudimos haber calculado x_3 con más cifras. Si calculamos x_3 con seis cifras, tenemos

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(5.4 + \frac{29}{5.4}\right) = \frac{1}{2}(5.4 + 5.37037) = 5.38518.$$

Esto es demasiado grande por alrededor de 0.00002; restando el error tenemos

$$\sqrt{29} \approx 5.38516.$$

Si se tiene en cuenta el error de cada aproximación, se puede obtener un número grande de cifras exactas muy rápidamente. Calculemos $\sqrt{31200}$ como un ejemplo. Puesto que $\sqrt{31200} = \sqrt{3.12} \times 10^2$, necesitamos calcular $\sqrt{3.12}$.

Aproximación Corregida de z	$\frac{3.12}{z}$	$x = \frac{1}{2}\left(\frac{3.12}{z} + z\right)$	Error Aproximado de x
2	1.56	1.78	$\frac{(.22)^2}{2(2)} = .01$
$1.78 - .01 = 1.77$	1.762711	1.766355	$\frac{(0.004)^2}{3.6} = .000004$

$$\sqrt{31200} \approx 17.66355 - .000004 = 17.66351.$$

Se podrá preguntar hasta dónde debe efectuarse la división $\frac{3.12}{1.77}$. El error de x viene dado por

$$e_3 \approx \frac{(z - x)^2}{2z}$$

$$z - x = z - \frac{1}{2}\left(\frac{n}{z} + z\right)$$

$$= z - \frac{n}{2z} - \frac{z}{2}$$

$$= \frac{z}{2} - \frac{n}{2z}$$

$$z - x = \frac{1}{2}\left(z - \frac{n}{z}\right).$$

En este ejemplo, $z = 1.77$ y $\frac{n}{z} = \frac{3.12}{1.77} = 1.762\ldots$ Cuando la división $\frac{n}{z}$ se lleva lo suficientemente lejos para que sus cifras empiecen a diferir de las cifras de z, podemos hallar $z - x$. En este caso,

$$z - x = \frac{1}{2}\left(z - \frac{n}{z}\right) = \frac{1}{2}(1.77 - 1.762) = .004.$$

Ahora podemos determinar e_3 aproximadamente;

$$e_3 \approx \frac{(.004)^2}{2(1.8)} = .000004.$$

De este modo sabemos que si continuamos la división $\frac{n}{z}$ hasta seis lugares decimales y hallamos la media, el error ocurrirá en el sexto lugar.

Respuestas al Conjunto de problemas 11-5b; páginas 306-308:

1. (a) $\sqrt{796} = \sqrt{7.96} \times 10^1$ $\quad p = 3 \quad q = \frac{7.96}{3}$

$$\frac{p+q}{2} = \frac{1}{2}(3 + \frac{7.96}{3})$$

$$\frac{p+q}{2} \approx 2.82$$

$$\sqrt{796} \approx 28.2$$

(b) $\sqrt{73}$ $\quad p = 9 \quad q = \frac{73}{9}$

$$\frac{p+q}{2} = \frac{1}{2}(9 + \frac{73}{9})$$

$$\frac{p+q}{2} \approx 8.56$$

$$\sqrt{73} \approx 8.56$$

(c) 2.97

(d) 554

(e) 0.0763

(f) 3170

2. (a) $\sqrt{0.00470} = \sqrt{47} \times 10^{-2}$

p	$q = \frac{47}{p}$	$\frac{p+q}{2}$
7	6.71	6.86
6.9	6.812	6.856

$$\sqrt{0.00470} \approx 0.06856$$

(b) $\sqrt{0.273} = \sqrt{27.3} \times 10^{-1}$

p	$q = \frac{27.3}{p}$	$\frac{p+q}{2}$
5	5.46	5.23
5.2	5.250	5.225

$$\sqrt{0.273} \approx .5225$$

(c) 72.66

(d) 1.772

(e) 265.1

(f) 708.5

Nota: La cifra de las milésimas pudo ser 2 ó 3. Puesto que la media aritmética es, después de la primera aproximación, siempre alta, es mejor "redondear por defecto".

3. (a) $\sqrt{0.0072} = \sqrt{72} \times \sqrt{10^{-4}}$

$\approx 8.485 \times 10^{-2}$

$\approx .08485$

(b) $\sqrt{720000} \approx 848.5$

(c) $\sqrt{.72} \approx .8485$

(d) $\sqrt{0.08} \approx .2828$

(e) $\sqrt{800} \approx 28.28$

(f) $\sqrt{8,000,000} \approx 2828$

Es posible que se desee hacer más que esto mediante tablas de raíces cuadradas. Sin embargo, no incluimos una tabla de raíces cuadradas en el texto, porque algunos maestros prefieren no usar ninguna en este momento.

4. (a) $x^2 = 0.0124$

$x = \sqrt{0.0124}$ ó $x = -\sqrt{0.0124}$

El conjunto de validez es $\{\sqrt{0.0124}, -\sqrt{0.0124}\}$.

$\sqrt{0.0124} \approx 0.112$

De modo que, aproximaciones para los elementos del conjunto de validez son 0.112 y -0.112.

(b) 22.9 y -22.9

5. 361 pies

6. 12 pies, con la aproximación de un pie.

7. 8.45 centímetros

Respuestas a los Problemas de repaso: páginas 308-312:

1. (a) $2\sqrt{3}$ (d) $\frac{4}{3}\sqrt{3}$ (g) $-\sqrt{2}$

(b) $\frac{1}{6}$ (e) $3|x|\sqrt{2}$ (h) $a^3b^3c^2$

(c) $2\sqrt{2a}$, $a \geq 0$ (f) 12 (i) $2 + 2\sqrt{3}$

2. (a) $\sqrt{3}$

(b) 10

(c) $2|a + b|$

(d) $3^a \cdot 2^b$, a y b son enteros

(e) $\frac{1}{4}\sqrt{2}$

(f) $2 - 2\sqrt{3}$

(g) $3\sqrt[3]{2}$

(h) $-4x\sqrt{2xy}$, x e y son ambos no negativos

(i) $\frac{1}{2}\sqrt{6} + 1$

3. (a) $2|a|\sqrt{3}$

(b) $\frac{\sqrt{6} + 2}{2}$

(c) 1

(d) $\frac{2|m|\sqrt{q}}{q} + 7|m|q\sqrt{2q}$, $q > 0$

(e) $\frac{1}{6}\sqrt{30}$

(f) $\frac{\sqrt[3]{4x^2}}{10x}$, $x \neq 0$

(g) $3p^2\sqrt[3]{2}$, $p \geq 0$

(h) $\frac{1}{2a}\sqrt[3]{2a^2} - 2a\sqrt[3]{2a^2} = \sqrt[3]{2a^2}\left(\frac{1 - 4a^2}{2a}\right)$ donde $a \neq 0$

(i) $2\sqrt{a^2 + b^2}$

4. (a) {4}. Obsérvese que $\sqrt{x} = 2$ no es un enunciado, si $x < 0$. Si se cuadran ambos miembros de $\sqrt{x} = 2$, se obtiene el enunciado equivalente $x = 4$, pero cuadrar ambos miembros de una ecuación, no da siempre un enunciado equivalente. Esto se estudiará en el Capítulo 13.

(b) {64}

(c) $\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

(d) Todos los m tales que $-4 \leq m \leq 4$.

(e) $\{8\}$

(f) $2|x| + \sqrt{x^2} = 3$

es equivalente a

$$\begin{aligned} 2|x| + |x| &= 3 \\ 3|x| &= 3 \\ |x| &= 1 \end{aligned}$$

que es equivalente a

$(x = 1 \quad y \quad x \geq 0)$ ó $(-x = 1 \quad y \quad x < 0)$

Por lo tanto, el conjunto de validez es $\{1, -1\}$.

5. (a) $\frac{1}{x} + \frac{2}{3x} = \frac{1}{3}$ para $x = 5$

(b) $x + \sqrt{2} > \sqrt{2}$ para $x > 0$

(c) Si $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$,

entonces
$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (a + b)^2 \\ a^2 + b^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ 0 &= 2ab \end{aligned}$$

Pero $a > 0$ y $b > 0$, de modo que $2ab > 0$.
Así, $2ab = 0$ y $2ab > 0$ es una contradicción.

Si $\sqrt{a^2 + b^2} > a + b$,

entonces

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &> (a + b)^2 \\ a^2 + b^2 &> a^2 + 2ab + b^2 \\ 0 &> 2ab \end{aligned}$$

Pero $2ab < 0$ y $2ab > 0$ es una contradicción.
Por lo tanto, $\sqrt{a^2 + b^2} < a + b$
Obsérvese que no se le pidió al estudiante que probara la relación, pero incluimos la demostración en caso de que insista en conocerla.

(d) $\sqrt[4]{3^2} = \sqrt{3}$

(e) $(\sqrt{m} + \sqrt{n})(\sqrt{m} - \sqrt{n}) = (m - n)$ para $m > 0$ y $n > 0$.

(f) $|x| + 5\sqrt[3]{125} > (-x^3)$. Obsérvese que el miembro de la izquierda es positivo y el miembro de la derecha es negativo.

(g) $\sqrt{\frac{3^2 \cdot 5^2}{256}} < 7\sqrt{\frac{1}{8}}$

6. $\sqrt{390} \approx 19.7$

7. $\sqrt{3900} \approx 62.45$

8. (a) 3^5 (b) 6^2 (c) $3^2 \cdot 2^3$ (d) 3^4 (e) 3^5 (f) $3^2 + 2^2$

9. (a) $10^0 = 1$ (b) 10^1 (c) $10^n + 2$ (d) 10^4 (e) 10^{-5} (f) 10^{6n}

10. (a) $\frac{4}{5}$ (b) $3b^2$ (c) $\frac{m^3}{2q^3}$ (d) $\frac{7}{5}$ (e) $\frac{x+1}{x-1}$ (f) $\frac{3}{2x}$

11. (a) Todos los x tales que $x < -6$.

(b) $\{\frac{4}{3}\}$

(c) Todos los y tales que $y < \frac{15}{8}$.

(d) $\{\frac{3}{16}, -\frac{3}{16}\}$

(e) $\{2\}$

(f) $\{\frac{1}{2}\}$

12. $n^2 - n + 41$ falla en dar un número primo para $n = 41$, porque entonces la suma de los dos últimos términos es cero. Esto deja n^2, que tiene n como factor.

Si un enunciado algebraico es cierto para los primeros 400 valores de la variable, no hay seguridad de que sea cierto para el 401º.

13. La media de n números a, b, c, ... es

$$\frac{a + b + c + \dots (n \text{ sumandos})}{n}.$$

Si g es la "media supuesta", entonces la media de las diferencias es

$$\frac{(a - g) + (b - g) + (c - g) + \dots (n \text{ sumandos})}{n}$$

$= \frac{a+b+c+ \dots (n \text{ sumandos}) - ng}{n}$ Propiedad conmutativa de la suma y la propiedad distributiva

$= \frac{a+b+c+ \dots (n \text{ sumandos})}{n} - g$ Propiedad distributiva y la propiedad multiplicativa del 1

Cuando sumamos esta media de las diferencias a nuestra "media supuesta" g, tenemos

$$\frac{a + b + c + \dots (n \text{ sumandos})}{n} - g + g$$

$$= \frac{a + b + c + \dots (n \text{ sumandos})}{n},$$

y ésta es la media.

$195 - 200 = -5$
$205 - 200 = 5$
$212 - 200 = 12$
$201 - 200 = 1$
$198 - 200 = -2$
$232 - 200 = 32$
$189 - 200 = -11$
$178 - 200 = -22$
$196 - 200 = -4$
$204 - 200 = 4$
$182 - 200 = -18$

Suma de las diferencias es -8.
Media de las diferencias $= -\frac{8}{11}$.

Sumando esto a 200 da $199\frac{3}{11}$ para la media del equipo.

14. Si el ratón pesa x gramos al empezar el experimento, pesará $\frac{5}{4}x$ gramos después de la dieta nutritiva y $\frac{3}{4}\left(\frac{5}{4}x\right)$ gramos al final del experimento. Así, la diferencia es $\frac{15}{16}x - x = -\frac{1}{16}x$ gramos.

15. Si x es el número de cuartillos de pintura blanca, entonces $3x$ es el número de cuartillos de pintura gris, y

$$x + 3x = 7 \cdot 4$$
$$4x = 4 \cdot 7$$
$$x = 7, \quad 3x = 21$$

Por tanto, el hombre compró 1 galón y tres cuartillos de pintura blanca, y 5 galones y 1 cuartillo de pintura gris. La información sobre el costo de la pintura era innecesaria.

16. Demostración: O bien $\sqrt{a} < \sqrt{b}$, $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, ó $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

Supóngase que $\sqrt{a} < \sqrt{b}$;

entonces $a < b$. Si $x < y$, entonces $x^2 < y^2$.

$a < b$ y $a > b$ es una contradicción.

Supóngase que $\sqrt{a} = \sqrt{b}$.

entonces $a = b$.

$a = b$ y $a > b$ es una contradicción.

Por tanto, $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

Capítulo 11
Sugerencias para exámenes

1. Describe el conjunto de los números para los cuales los siguientes nombran números reales:

(a) $\sqrt{a}$ (d) $\sqrt{\frac{1}{a}}$

(b) $\sqrt{x^2}$ (e) $\sqrt[4]{x^4}$

(c) $\sqrt[3]{b}$ (f) $\sqrt{1 + m}$

2. Simplifica:

(a) $\sqrt{27}$

(b) $\sqrt[3]{8}$

(c) $\sqrt{\frac{4}{3}}$

(d) $\sqrt{24} - \frac{1}{3}\sqrt{54}$

(e) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}}$

(f) $\sqrt{2}\ \sqrt{18}$

3. Simplifica, si todas las variables representan números positivos:

(a) $\sqrt{\frac{1}{2x}}$

(b) $\sqrt{\frac{1}{ab}} \cdot \sqrt{a^3b}$

(c) $\frac{\sqrt{\frac{x}{y^2}}}{\sqrt{\frac{y}{x^2}}}$

(d) $\sqrt{\frac{2a}{3}} \cdot \sqrt{\frac{8a}{4}}\sqrt{\frac{4a}{5}}\sqrt{\frac{5a}{6}}$

(e) $\sqrt{4a^3} + \sqrt{\frac{4}{9a}}$

(f) $\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{18})x$

4. (a) Si $\sqrt{a}$ es un número racional; ¿qué clase de número es a?

(b) Si a y b son primos positivos diferentes, ¿qué clase de número es $\sqrt{ab}$?

5. Si $\sqrt{85} \approx 9.219$ y $\sqrt{8.5} \approx 2.939$, halla aproximaciones para:

(a) $\sqrt{0.0085}$

(b) $\sqrt{850}$

(c) $\sqrt{85000}$

(d) $\sqrt{.85}$

6. Explica, usando un ejemplo, por qué $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ no es un enunciado para $a < 0$ y $b \leq 0$.

7. Explica por qué $\sqrt{x^3}$ tiene significado sólo si $x \geq 0$.

8. ¿Es $\sqrt{1764}$ racional o irracional? Explícalo.

9. Simplifica cada uno de los siguientes:

(a) $\sqrt{15}\ \sqrt{20}$

(b) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{20}}$

(c) $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{15}}$

(d) $\sqrt{20} + \sqrt{15}$

Capítulo 12

POLINOMIOS Y EXPRESIONES RACIONALES

En este capítulo, se introduce la descomposición en factores de expresiones por analogía con la factorización de enteros positivos como justificación. Se preparó el camino para esto en el Capítulo 10. Un detalle importante es que la factorización de números racionales sólo resulta significativa cuando el problema se restringe a los enteros. En la factorización de expresiones, la clase de las expresiones racionales corresponde al sistema de los números racionales, y la clase de los polinomios corresponde al sistema de los enteros. El propósito que esto implica es el de mostrar que las expresiones racionales constituyen un sistema algebraico con los polinomios como un subsistema.

Aunque la discusión siguiente no es para los estudiantes, importa que el maestro entienda el álgebra de las expresiones.

Considérese, por ejemplo, la propiedad distributiva:

$$a(b + c) = ab + ac$$

Hemos entendido siempre que a, b, c son números reales, de manera que se trata de una aserción acerca de números reales. La aserción comprende dos frases, "a(b + c)" y "ab + ac", y nos autoriza para remplazar cada frase por la otra en cualquier enunciado acerca de números reales, sin alterar la validez del enunciado. Sin embargo, si olvidamos, por el momento, que hablamos acerca de números reales (como se hacía comúnmente en un tiempo en el álgebra elemental), entonces la propiedad (o "ley") distributiva se convierte en una "regla" para transformar expresiones algebraicas, esto es, una regla en el "juego" de "manejar símbolos". Desde este punto de vista, las diversas propiedades fundamentales, con las cuales hemos estado trabajando, constituyen el conjunto completo de reglas del juego. La atención se desvía de este modo del sistema de los números reales al lenguaje usado al hablar de los números reales. Aunque el manejo mecánico de símbolos es totalmente indeseable, es cierto que trabajamos con expresiones desde este punto de vista. Esto es lo que hacemos cuando consideramos la forma de una expresión. La diferencia es que el manejo de símbolos en este nivel no es mecánico, pero sí lo es con referencia a un sistema algebraico. Describiremos ahora este sistema más cuidadosamente.

En primer lugar, "sumamos" y "multiplicamos" expresiones utilizando lo que hemos llamado sumas y productos "indicados". De modo que, si A y B son expresiones, entonces $A + B$ y $A \cdot B$ son también expresiones. Escribimos además $A = B$, siempre que para todo valor admisible de cada variable que interviene en A y B, los numerales "A" y "B" nombren el mismo número. Esto es, de hecho, una definición de igualdad para las expresiones. En algunos libros, esta clase de igualdad se llama identidad. Mediante estos convenios, se pueden obtener las siguientes propiedades fundamentales de las expresiones y efectivamente, se han utilizado muchas veces durante el curso:

1. Si A, B son expresiones, entonces $A + B$ es una expresión.
2. Si A, B son expresiones, entonces $A + B = B + A$.
3. Si A, B, C son expresiones, entonces $(A + B) + C = A + (B + C)$.

4. Hay una expresión 0 tal que $A + 0 = A$ para toda A.
5. Para cada expresión A, hay una expresión $-A$ tal que $A + (-A) = 0$.
6. Si A, B son expresiones, $A \cdot B$ es una expresión.
7. Si A, B son expresiones, $AB = BA$.
8. Si A, B, C son expresiones, entonces $(AB)C = A(BC)$.
9. Hay una expresión 1 tal que $A \cdot 1 = A$ para toda A.
10. Para cada expresión A, diferente de 0, hay una expresión $\frac{1}{A}$ tal que $A \cdot \frac{1}{A} = 1$.
11. Si A, B, C son expresiones, entonces $A(B + C) = AB + AC$.

De este modo vemos que la clase de las expresiones satisface a los axiomas de un <u>cuerpo</u>. La clase más pequeña, constituída sólo por las expresiones racionales, también tiene estas propiedades. La clase de todos los polinomios (o todos los polinomios con una variable sobre los enteros) es un subsistema de la clase de las expresiones racionales y tiene todas esas propiedades, excepto la número 10. Obsérvese también que el conjunto de los números racionales también tiene todas esas propiedades y el de los enteros las cumple todas, excepto la número 10--de aquí, el paralelo entre expresiones racionales y polinomios, por una parte, y números racionales y enteros por la otra.

Una vez que estas propiedades generales quedan establecidas, podemos estudiar las expresiones racionales y los polinomios como <u>sistemas algebraicos</u> en sí mismos, independientemente de su conexión con los números reales. Esto es manejo de símbolos <u>por excelencia</u>. Nuestro estudio de la factorización, de la simplificación de expresiones racionales y de la división de polinomios, constituye una pequeña porción del estudio de estos sistemas generales, aunque explícitamente no lo hemos presentado como tal. Esta manera de considerar el lenguaje del álgebra, que está implícita en mucho de lo que hemos estudiado antes, y que de hecho ha salido a la luz en el presente capítulo, se presentará frecuentemente en cursos posteriores de álgebra. Un buen estudiante adopta automáticamente este punto de vista sobre el álgebra a medida que adquiere experiencia. Sin embargo, si lo hace antes de que comprenda, al menos intuitivamente, que un sistema algebraico está implicado, sólo confusión será el resultado. Por esto es importante volver a los números reales cuando el estudiante muestre indicios de manipulación mecánica de símbolos. Para discusión ulterior, véase <u>Studies in Mathematics</u>, Volume III, páginas 6.1-6.8.

12-1. <u>Polinomios y factorización</u>

En la mayor parte del capítulo, se trata de polinomios sobre los enteros. La definición de <u>polinomios sobre los enteros</u> y el enunciado del <u>problema de factorización</u> se dan en esta sección. El objetivo de la sección es primordialmente el de presentar estas ideas más bien que el de desarrollar las técnicas de la factorización. De las últimas se trata en las próximas cinco secciones.

<u>Página 314</u>. Si tratáramos de ser cuidadosos con nuestro lenguaje, remplazaríamos la palabra "enteros" por "numerales de enteros" en la definición de polinomios sobre los enteros.

Puesto que no hay duda sobre lo que aquí se quiere decir, decidimos mantener la definición lo más sencilla posible.

La definición corriente de polinomio (con una variable x) es la de una expresión de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 .$$

Con esta definición, la expresión $(x^2 - 1)(3x - 5)$ <u>no</u> es un polinomio, sino que es un producto indicado de polinomios. Por otra parte, generalmente deseamos llamar a esto un polinomio, porque tenemos en la mente la idea de que se puede escribir como un polinomio;

$$(x^2 - 1)(3x - 5) = 3x^3 - 5x^2 - 3x + 5.$$

Este enunciado puede considerarse como una <u>definición de la multiplicación</u> de polinomios, según se define aquí, pues especifica el polinomio indicado por el producto dado. La suma de polinomios puede considerarse en una forma parecida.

En nuestro desarrollo, sería más natural considerar como polinomios una clase mucho más amplia de expresiones. Entonces las definiciones de suma y multiplicación son obvias, y una ecuación como la anterior puede considerarse como una <u>definición de igualdad</u>.

Estos dos puntos de vista, aunque conceptualmente diferentes, significan en la práctica exactamente la misma cosa. La única diferencia real consiste en el modo de <u>pensar en</u> las expresiones mas bien que en la forma de tratarlas. Así, podemos siempre simplificar cualquiera de nuestros polinomios (con una variable), poniéndolo en la forma especial ya indicada y pensar en el polinomio dado como representado por su forma simplificada. Además de prestarse mejor al tratamiento informal de polinomios que deseábamos dar, la definición usada también hace más fácil el estudio de los polinomios con varias variables.

<u>Respuestas al Conjunto de problemas 12-1a</u>; páginas 315-316:

1. (a), (c), (d), (e) son polinomios sobre los enteros.

   (b), (f) son polinomios sobre los números racionales. (g) es un polinomio sobre los números reales. } V. sección 12-6.

   (h) no es un polinomio. Sin embargo, obsérvese que $|x| + 1$ puede representarse mediante polinomios:

   $$|x| + 1 = \begin{cases} x + 1, & \text{si } x \geq 0 \\ -x + 1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

   Un ejemplo mejor aquí es la expresión, $(|x|)^2$, que <u>no</u> es un polinomio, pero puede <u>escribirse</u> como un polinomio, pues $(|x|)^2 = x^2$. Esto es análogo a $\dfrac{x(x^2 + 1)}{x^2 + 1}$, que no es un polinomio, pero puede escribirse como un polinomio, a saber, x.

2. (a), (c), (d) son polinomios sobre los enteros.

   (b) es un polinomio sobre los números racionales.

   (e), (f), (g) y (h) <u>no</u> son polinomios en modo alguno, según nuestra definición. Sin embargo, como $\dfrac{x + y}{2}$ <u>significa lo mismo que</u> $(x + y)\frac{1}{2}$, no sería censurable considerar a (f) como un polinomio sobre los racionales. Lo que pasa aquí es que $\dfrac{x + y}{2} = (x + y)\frac{1}{2}$ por definición, más bien que por virtud de las propiedades de los números reales.

Por otra parte, no desearíamos considerar a (h) como un polinomio a pesar de que puede escribirse como un polinomio:

$$\frac{3s(u + v)}{s} = 3(u + v).$$

3. (a) $2x^2 - 4x$ (e) $u^2 - \frac{1}{4}$

(b) $x^2y - 2xy^2$ (f) $x^2 + 4x + 4$

(c) $t^2 + t - 6$ (g) $18t^2 - 15t - 88$

(d) $-\frac{9}{4}x^3y^3z$ (h) $y^2 + y - 2$

Todos son polinomios sobre los enteros, excepto (d) y (e), que lo son sobre los números racionales.

4. (a) 0 (d) $3u^2 + u - uv$

(b) $a^2 - 2$ (e) $2 + 2s - 6st$

(c) $3su + 3sv$ (f) $2x^2 - 3xy - 2y^2 + 5y - 2$

Todos son polinomios sobre los enteros, aunque los dos factores en (b) no lo son sobre los enteros.

5. ¡Sí! Esperamos que esto sea evidente a todos. Lo mencionamos con el propósito de sugerir que tratamos aquí con un sistema.

6. ¡No! Sin embargo, en algunos casos se puede escribir tal cociente como un polinomio. Véase, por ejemplo, la parte (h) del problema 2. La idea aquí es sugerir el hecho de que el sistema de los polinomios no es cerrado respecto de la división, aunque algunas expresiones racionales pueden escribirse como polinomios.

Respuestas al Conjunto de problemas 12-1b; páginas 318-320:

1. (a), (b), (e), (f)

   (c) es un caso de factorizar $s^2 - 3$ como un polinomio sobre los números reales.

   (d) es un caso de factorizar $3t - 5$ como un polinomio sobre los números racionales.

2. (c), (d), (f)

   En (a), (b) y (e), los polinomios sobre los enteros están factorizados, pero los factores ni siquiera son polinomios.

3. (a)

   (b) es un caso de un polinomio sobre los números racionales factorizado en polinomios sobre los números racionales.

   (c) y (d) no están factorizados.

   (e) El segundo factor no es un polinomio.

4. 2(e) $(|t| + 1)(|t| - 1) = (|t|^2 - 1) = t^2 - 1$

5. (a), (e)

6. (a) $a(a + 2b)$ (d) $3xz\ (x - y)$

   (b) $3(t - 2)$ (e) $a(x - y)$

   (c) $a(b + c)$ (f) $6(p - 2q + 5)$

7. (a) $z^2(z + 1)$

   (b) $15\ (a^2 - 2b)$

   (c) $x^2(1 - x^2)$ es el resultado esperado. Algunos estudiantes pueden obtener $x^2(1 + x)(1 - x)$, lo que es técnicamente correcto, puesto que la propiedad distributiva está implicada.

   (d) $a(a^2 - 2a + 3)$

   (e) $6(x^2 - 24y - 25)$

   (f) $y\big(3x + (x - 3)\big)$ ó $y(4x - 3)$

8. (a) $2\left((z + 1) - 3zw\right)$ (e) $6r^2s(x - y)$
(b) $a^2b^3(a + b - 1)$ (f) $(u^2 + v^2)(x - y)$
(c) No hay factorización posible.
(d) $ab(x - y)$ (g) $(x - y)(4x - y)$
(h) $2^2 3^2 a^2 b^2 c^2$

9. (a) 1, 1, 2
(b) 2, 1, 3
(c) 3, 2, 5
(d) 0, 5, 5
(e) 2, 4
(f) El grado del producto es igual a la suma de los grados de los factores.

12-2. <u>Factorización mediante la propiedad distributiva</u>

Toda la factorización no trivial de polinomios utiliza la propiedad distributiva, así como las otras propiedades de los números reales. Sin embargo, los problemas de esta sección recalcan la propiedad distributiva en una forma especialmente directa y explícita. Esta factorización se designa a menudo "quitar factores comunes (monomios, etc.)".

<u>Ejemplo</u> <u>4</u>. Se presenta una oportunidad en este ejemplo para hacer hincapié en uno de los usos más importantes de la operación de factorizar, a saber, en la resolución de ecuaciones polinómicas. Puesto que a los estudiantes les gusta resolver ecuaciones, esto debe estimular su interés por la factorización.

Respuestas al Conjunto de problemas 12-2a; páginas 322 y 323:

1. $3xz(2x - y)$ sobre los enteros
2. $3st(3 - u)$ sobre los enteros
3. $36(4x^2 - 6s + 5y)$ sobre los enteros
4. $\frac{3v}{5}(2u^2 - 3uv + 5v)$
5. $-xy^2(x^2 - 2x - 1)$ sobre los enteros
6. $\frac{1}{36}ab(6 + 10a - 21b)$
7. $s\sqrt{3}(1 + s\sqrt{2})$
8. $\frac{a}{6\sqrt{2}}(3a - 4b)$
9. Ningún factor común
10. $(a + 3)(x - 1)$ sobre los enteros
11. $(x + 3)(x + 1)$ sobre los enteros
12. $(u + v)(x - y)$ sobre los enteros
13. $(a - b)(a + b)$ sobre los enteros
14. $(x + y)u$ sobre los enteros
15. 0 sobre los enteros
16. $(x + y)(3x - 5y + 1)$ sobre los enteros
17. $3a\sqrt[3]{2}(2 + 5b)$
18. $|x|(3 + 2a)$
19. $7y|x|(1 - 3y)$
20. $(u + v)(r - s)$ sobre los enteros
21. $(a + b + c)(x - y)$ sobre los enteros
22. $(a + b + c)x$ sobre los enteros

Página 324. Es necesario recalcar que la factorización implica la escritura del polinomio dado como un producto de polinomios. Sumas de productos no cuentan para estos efectos.

Respuestas al Conjunto de problemas 12-2b; páginas 325-326:

1. $a(x + 2) + 3(x + 2) = (a + 3)(x + 2)$
2. $x(u + v) + y(u + v) = (x + y)(u + v)$
3. $a(2b + a) + 1(2b + a) = (a + 1)(2b + a)$
4. $3s(r - 1) + 5(r - 1) = (3s + 5)(r - 1)$
5. $x(5 + 3y) - 1(5 + 3y) = (x - 1)(5 + 3y)$
6. 0
7. $a(a - b) + c(a - b) = (a + c)(a - b)$
8. $t(t - 4) + 3(t - 4) = (t + 3)(t - 4)$
9. No es factorizable.
10. $(2a - 3b)(a - b\sqrt{3})$
11. $3x(5a + 4b - 3c + 2d)$
12. $2(a - b) + u(a - b) + v(a - b) = (2 + u + v)(a - b)$
13. $x(u + v - w) + y(u + v - w) = (x + y)(u + v - w)$
14. $a(a - 4x) + 2b(a - 4x) + 3c(a - 4x) = (a + 2b + 3c)(a - 4x)$
15. $\frac{a}{6}(3xy - 6ay + bx - 2ab) = \frac{a}{6}\left(3y(x - 2a) + b(x - 2a)\right) = \frac{a}{6}(3y + b)(x - 2a)$
16. $x^2 + 3x + x + 3 = x(x + 3) + 1(x + 3) = (x + 1)(x + 3)$
17. $a^2 - ab + ab - b^2 = a(a - b) + b(a - b) = (a + b)(a - b)$

12-3. Diferencia de cuadrados

Respuestas al Conjunto de problemas 12-3; páginas 328-331:

1. (a) $a^2 - 4$ (e) $a^4 - b^4$
   (b) $4x^2 - y^2$ (f) $x^2 - a^2$
   (c) $m^2n^2 - 1$ (g) $2x^2 + 3xy - 2y^2$
   (d) $9x^2y^2 - 4z^2$ (h) $r^3 + r^2s^2 - rs - s^3$

2. (a) $(2x - 1)(2x + 1)$ (d) $(1 - n)(1 + n)$
   (b) $9(3 - y)(3 + y)$ (e) $(5x - 3)(5x + 3)$
   (c) $(a - 2)(a + 2)$ (f) $4(2x - y)(2x + y)$

3. (a) $(5a - bc)(5a + bc)$ (d) $4x(2x - 1)(2x + 1)$
   (b) $5(2s - 1)(2s + 1)$ (e) $4(2x - 1)(2x + 1)$
   (c) $6(2y - z)(2y + z)$ (f) $(7x^2 - 1)(7x^2 + 1)$.

4. (a) $(x - 2)(x + 2)$ (d) No es factorizable sobre los enteros.
   (b) No es factorizable sobre los enteros. (e) $3(x - 1)(x + 1)$
   (c) $(x^2 + 2)(x^2 - 2)$ (f) $(4x^2 + 1)(2x - 1)(2x + 1)$

5. (a) $(a - 2)a$ (d) 9
   (b) $2a - 3$ no es factorizable sobre los enteros. (e) $(x - y)(x + y - 1)$
   (c) $4\ mn$ (f) $(x - y)(1 - x - y)$

6. (a) $x^2 - 9 = 0$

   $(x - 3)(x + 3) = 0$

   es equivalente a

   $x - 3 = 0$ ó $x + 3 = 0$.

   El conjunto de validez es $\{-3, 3\}$

   (b) $\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\}$ (e) $\{0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$

   (c) $\{\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\}$ (f) $\emptyset$

(d) $\{2, -2\}$.

(g) $\{2, -2\}$

(h) $\{1, -.5\}$.

7. (a) 396

(b) 1591

(c) $884r$

(d) $391xy$

(e) 9999

(f) $2000\,mn$

(g) $1584m^2 - 1584n^2$

(h) 1584

8. (a) $899 = 30^2 - 1 = (30 - 1)(30 + 1)$, así, 899 es factorizable.

(b) $1591 = 40^2 - 3^2 = (40 - 3)(40 + 3)$, así, 1591 es factorizable.

(c) $391 = 20^2 - 3^2 = (20 - 3)(20 + 3)$, así, 391 es factorizable.

(d) $401 = 20^2 + 1$, no puede descomponerse por diferencia de cuadrados. Con los métodos de factorización prima, vemos que 401 no es divisible por 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 ó 19. Por tanto, 401 es primo.

*9. El recíproco de $2 - \sqrt{3}$ es $2 + \sqrt{3}$, y viceversa. He aquí un ejemplo de un par de números que son recíprocos, pero ninguno de ellos es el otro "invertido".

(a) $\frac{2}{23}(5 - \sqrt{2})$

(b) $\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}$

(c) $-\frac{3}{2}$, obsérvese que 4 es racional.

(d) $3\sqrt{2} + \sqrt{15}$

*10. (b) $(t + 1)(t^2 - t + 1)$

(c) $(s + 2)(s - 2s + 4)$.

(d) $(3x + 1)(9x^2 - 3x + 1)$

*11. (b) $(t - 1)(t^2 + t + 1)$

(c) $(s - 2)(s^2 + 2s + 4)$

(d) $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$

12-4. Cuadrados perfectos

Página 332. Ejemplo 1. Un polinomio cuadrático $x^2 + px + q$, donde p y q son enteros, es un cuadrado perfecto, si y solamente si:

(1) q es el cuadrado de un entero m.

(2) o bien $p = 2m$ ó $p = -2m$.

Respuestas al Conjunto de problemas 12-4a; páginas 332-334:

1. (a) 9
   (b) 16
   (c) 36
   (d) t^2
   (e) x^2
   (f) $10u$
   (g) $12s$
   (h) 9
   (i) 5
   (j) $2\sqrt{3}$; el cero debe también aceptarse.
   (k) $2\sqrt{35}$; 3 podría aceptarse.
   (l) $4t^2$
   (m) $16v^2$
   (n) $56xy$
   (o) 4
   (p) $6(x - 1)$

2. (a), (c), (d), (e), (g), y (h) son cuadrados perfectos.

3. (a) $(a - 2)^2$
   (b) $(2x - 1)^2$
   (c) $(x - 2)(x + 2)$
   (d) No es factorizable sobre los enteros.
   (k) $5(4 - x)$
   (l) No es factorizable sobre los enteros.
   (m) No es factorizable sobre los enteros.
   (n) No es factorizable sobre los enteros.

(e) $(2t + 3)^2$

(f) $7(x + 1)^2$

(g) No es factorizable sobre los enteros.

(h) $(2z - 5)^2$

(i) No es factorizable sobre los enteros.

(j) $(3a - 4)(3a - 2)$

(o) $2a(a - 5b)^2$

(p) $(s + 5)^2$

(q) $(t - s - 2)(t + s)$

(r) $(x - 1)^2(x + 1)^2$

(s) $(z^2 + 8)^2$

4. (a) $x^2 + 6x + 9$

(b) $x^2 - 4x + 4$

(c) $x^2 + 2\sqrt{2}\,x + 2$

(d) $a^2 + 2ab + b^2$

(e) $x^2 - 2xy + y^2$

(f) $x^2 - 2x + 1 - a^2$

(g) $x^2 - 2x + 1 - a^2$

(h) $5 + 2\sqrt{6}$

(i) $100^2 + 2\cdot 100\cdot 1 + 1 = 10{,}201$

<u>Página 334</u>. <u>Ejemplo 4</u>. El método de completar el cuadrado se trata otra vez en la sección 12-6 para polinomios sobre los números reales. Se usa también en los Capítulos 16 y 17, al estudiar la construcción de las gráficas de polinomios y funciones cuadráticas.

<u>Ejemplo 5</u>. Obsérvese que hemos <u>demostrado</u> que el conjunto de validez de esta ecuación es el conjunto vacío. Con otras palabras, no llegamos a la conclusión de que es vacío, sólo porque no podamos encontrar soluciones con nuestros métodos de factorización.

Este ejemplo señala la relación entre "factorizar un polinomio sobre un conjunto" y "resolver la correspondiente ecuación polinómica". Si una ecuación polinómica tiene soluciones que son enteros, entonces el polinomio puede ser factorizado sobre los enteros, y recíprocamente. Si la ecuación polinómica tiene soluciones que son números reales, entonces el polinomio puede ser factorizado sobre los números reales, y recíprocamente. Así, si una ecuación polinómica tiene un conjunto de validez vacío, el polinomio no puede ser factorizado. La conclusión en el Ejemplo 5 es que $x^2 - 8x + 18$ no puede factorizarse sobre los números reales.

<u>Respuestas al Conjunto de problemas 12-4b</u>; páginas 335-336:

1. (a) $x^2 + 4x + 4 - 1 = (x + 2)^2 - 1$
$$= (x + 2 - 1)(x + 2 + 1)$$
$$= (x + 1)(x + 3)$$
   (b) $(x - 4)(x - 2)$
   (c) $(x - 4)(x + 2)$
   (d) $(x - 6)(x - 4)$
   (e) $(x - 12)(x + 2)$
   (f) $(x - 1)^2 - 4(x - 1) + 4 - 9 = \left((x - 1) - 2\right)^2 - 3^2$
$$= (x - 3)^2 - 3^2$$
$$= (x - 3 - 3)(x - 3 + 3)$$
$$= (x - 6)x$$

2. (a) $p = 1$
   (b) $p = 8$ ó -8
   (c) todos
   (d) ninguno
   (e) $p = 4$

3. (a) $y^2 - 10y + 25 = 0$

$$(y - 5)^2 = 0$$

es equivalente a

$y - 5 = 0$ ó $y - 5 = 0$.

El conjunto de validez es $\{5\}$.

(b) $\{\frac{5}{2}\}$

(c) $9a^2 + 6a + 4 = 0$

$9a^2 + 6a + 1 + 3 = 0$

$(3a + 1)^2 + 3 = 0$

$(3a + 1)^2$ es ≥ 0 para todo a.

Por tanto, el conjunto de validez es vacío.

(d) El conjunto de validez es $\{2\}$.

(e) El conjunto de validez es $\{0,2\}$.

(f) El conjunto de validez es $\emptyset$.

(g) El conjunto de validez es $\{4, -2\}$.

(h) El conjunto de validez es $\{4, 6\}$.

12-5. Polinomios cuadráticos

Esta sección, junto con las tres secciones precedentes, comprenden todas las técnicas habituales para factorizar que se encuentran en los cursos corrientes de álgebra elemental. Aunque estas técnicas son importantes, no son definitivas. Las ideas en que se funda la factorización deben señalarse al estudiante en cada oportunidad. El texto contiene muchos ejercicios preparados para afinar las técnicas de factorización del estudiante. Los que se asignen deben escogerse con cuidado. No debe abrumarse a los estudiantes con multitud de problemas de pura habilidad ni deben evitarse los problemas de "ideas". A veces nos vemos tentados a tratar la factorización en una forma mecánica y así permitir que los estudiantes caigan en la trampa de manejar ciegamente los símbolos. Este peligro existe siempre cuando se hace hincapié en las técnicas, y es al maestro a quien corresponde mantener la debida perspectiva en estas situaciones.

Página 338. Ejemplo 3. $x^2 - 10x + 36$ tampoco es factorizable, porque 10 es muy pequeño. El mínimo valor positivo de p para el cual $x^2 + px + 49$ es factorizable es 14, y esto da un cuadrado perfecto. $x^2 + 14x + 49 = (x + 7)^2$. $x^2 + 13x + 49$ no es factorizable, porque 13 es muy pequeño.

El polinomio $x^2 + 40x + 36$ no es factorizable, porque 40 es demasiado grande. De igual manera, $x^2 - 38x + 36$ no es factorizable, porque 38 es demasiado grande. $x^2 - 50x + 49 = (x - 1)(x - 49)$. 50 es el valor absoluto mayor que p puede tener para que $x^2 + px + 49$ sea factorizable. Véanse los problemas 4, 5, 6, más adelante.

Respuestas al Conjunto de problemas 12-5a; páginas 339-342:

1. (a) $(a + 5)(a + 3)$
   (b) $(a - 5)(a - 3)$
   (c) $(a + 5)(a - 3)$
   (d) $(a - 5)(a + 3)$
2. (a) $(t + 10)(t + 2)$
   (b) $(t + 20)(t + 1)$
   (c) $(t + 5)(t + 4)$
   (d) No es factorizable sobre los enteros.

3. (a) $(a + 11)(a - 5)$
   (b) $(x - 3)(x - 2)$
   (c) $(u - 6)(u - 4)$
   (d) $(y - 18)(y + 1)$
   (e) No es factorizable sobre los enteros.

4. (a) $-(x - 4)(x - 3)$
   (b) $-(x + 12)(x - 1)$
   (c) $-(x + 6)(x - 2)$
   (d) $-(x + 12)(x + 1)$
   (e) No es factorizable sobre los enteros.

5. (a) $(a - 8)^2$
   (b) No es factorizable sobre los enteros; $8 < 2\sqrt{64}$.
   (c) No es factorizable sobre los enteros. Puesto que 2 es un factor de 36, y $64 = 2^6$, los doses se deben separar. $32 + 2 < 36$, y cualquier otra repartición de factores da sumas menores.
   (d) $(a - 16)(a - 4)$
   (e) No es factorizable sobre los enteros.

6. (a) $(x - 3)(x + 3)$
   (b) No es factorizable sobre los enteros.
   (c) No es factorizable sobre los enteros.
   (d) $(h - 13)(h + 13)$

7. (a) $(z^3 - 8)(z^3 + 1)$ ó

   $(z - 2)(z^2 + 2z + 4)(z + 1)(z^2 - z + 1)$
   (b) $(b^2 - 7)(b - 2)(b + 2)$
   (c) $(a - 3)(a + 3)(a - 2)(a + 2)$
   (d) $(y - 3)(y + 3)(y^2 + 9)$

8. (a) $(a + 7)(a - 2)$

   (b) No es factorizable sobre los enteros.

   (c) $(a - 12)(a - 9)$

   $108 = 2^2 \cdot 3^3$

   3 es un factor de 21, pero 2 no lo es, de modo que los treses se separan, pero los doses quedan en un factor. Así, $(3 \cdot 2^2) + (3^2) = 21$.

   (d) $(a + 40)(a - 15)$

   $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$

   De los factores 2, 3 y 5, sólo 5 es un factor de 25, de modo que los cincos se separan, pero los doses quedan en el mismo factor.

   Así, pues, $(2^3 \cdot 5) - (5 \cdot 3) = 25$.

9. (a) $3(y^2 - 4y + 4) = 3(y - 2)^2$

   (b) $x(x^2 + 19x + 34) = x(x + 17)(x + 2)$

   (c) $5a(a^2 - 3a + 6)$

   (d) $7(x - 3)(x + 3)$

10. (a) El conjunto de validez es $\{12, -3\}$.

    (b) El conjunto de validez es $\{3,2\}$.

    (c) El conjunto de validez es $\{4,9\}$.

    (d) El conjunto de validez es $\{0, -6\}$.

    (e) El conjunto de validez es $\{6,1\}$.

    (f) El conjunto de validez es $\{3, -2\}$.

    (g) El conjunto de validez es $\{-4,3\}$.

    (h) El conjunto de validez es $\emptyset$.

11. (a) Si x es el número, entonces $x^2 = 6x + 7$.

    El conjunto de validez es $\{7, -1\}$

    El número podría ser o bien 7 ó -1.

(b) Si la anchura del rectángulo es w pulgadas, entonces la longitud es $w + 5$ pulgadas, y $w(w + 5) = 84$.
El conjunto de validez es $\{-12, 7\}$.
Así, el ancho del rectángulo es 7 pulgadas.

(c) El número es o bien 1 ó 9.

12. Si la longitud de la hucha es x pies, entonces la anchura es $12 - x$ pies, y $70 = x(12 - x)2$.
La longitud de la hucha es 7 pies, y la anchura es 5 pies.

13. El cuadrado tiene 6 pies de lado, y el rectángulo tiene 12 pies de largo y 3 pies de ancho.

*14. Supóngase que $(x + m)(x + n) = x^2 + px + q$.
Entonces, $mn = q$ y $m + n = p$.
También, $(x - m)(x - n) = x^2 - (m + n)x + mn = x^2 - px + q$.

*15. $x^2 + px + 36$ es un cuadrado perfecto para $p = 12$ ó $p = -12$. 12 es el mínimo valor de $|p|$ para que $x^2 + px + 36$ sea factorizable. Los valores de p para los cuales $x^2 + px + 64$ es factorizable se obtienen como sigue (obsérvese que $p = m + n$, donde $mn = 2^6$):

$m \cdot n$	$m + n$
$2^6 \cdot 1$	65
$2^5 \cdot 2$	34
$2^4 \cdot 2^2$	20
$2^3 \cdot 2^3$	16

Los valores positivos de p son 16, 20, 34, 65, y los valores negativos son -16, -20, -34, -65. Los cuadrados perfectos se obtienen para $p = 16$ ó $p = -16$. Obsérvese que 16 es el valor mínimo que $|p|$ puede tener.

El estudiante debe poder generalizar los resultados de los dos ejemplos y conjeturar que $2n$ es el valor positivo mínimo de p para el cual $x^2 + px + n^2$ es factorizable, y que esto da el cuadrado perfecto, $(x + n)^2$.

El valor máximo de p para el cual $x^2 + px + n^2$ es factorizable es $n^2 + 1$, y en este caso,

$$x^2 + px + n^2 = (x + 1)(x + n^2).$$

Los resultados anteriores son casos especiales del siguiente teorema general, cuya demostración es demasiado difícil para la mayoría de los estudiantes.

Teorema. Considérese el polinomio cuadrático $x^2 + px + q$, donde p y q son enteros positivos. Entonces:

(1) El valor máximo de p para el cual el polinomio es factorizable es $q + 1$.

(2) El valor mínimo de p para el cual el polinomio es factorizable es $m + n$, donde $mn = q$, y se toman m y n lo más próximo que sea posible.

Demostración: Supóngase que $(x + m)(x + n) = x^2 + px + q$. Entonces, $m + n = p$ y $mn = q$. Obsérvese que $(m + n)^2 - (m - n)^2 = 4mn$ para todos los valores de m y n. Por lo tanto, $p^2 = 4q + (m - n)^2$.

Se deduce que p^2, y, por lo tanto, p, tendrá su mayor valor cuando $(m - n)^2$ es lo más grande posible. Esto ocurre evidentemente con la factorización $q = q \cdot 1$, dando $p = m + n = q + 1$.

De igual manera, p^2, y, por lo tanto, p, tendrá su valor mínimo cuando $(m - n)^2$ sea lo más pequeño posible, esto es, cuando m y n estén lo más cerca posible uno de otro.

Respuestas al Conjunto de problemas 12-5b; páginas 346-349:

1. (a) $(x + 1)(2x + 3)$
   (b) $(2x + 1)(x + 3)$
   (c) No es factorizable sobre los enteros. Los únicos factores con los cuales tenemos que trabajar son 1, 2 y 3, así que la suma máxima es 7.
2. (a) $(3a + 7)(a - 1)$
   (b) $(3a - 7)(a + 1)$
   (c) $-(3a + 7)(a - 1)$
3. (a) $(4y - 1)(y + 6)$
   (b) $(x + 8)(x - 4)$
   (c) $(4a - 1)(2a + 3)$
4. (a) No es factorizable sobre los enteros.
   (b) $(3x + 1)(x - 6)$
   (c) $3(y^2 + y - 2) = 3(y + 2)(y - 1)$
5. (a) $(3x - 2)(3x + 2)$
   (b) $(3x - 2)^2$
   (c) $(3x + 2)^2$
6. (a) $(3a + 2)(3a - 1)$
   (b) $3a(3a + 1)$
   (c) $9(a^2 + 1)$

7. (a) $3(x - 3)(4x - 5)$
(b) $(5x + 9)(2x + 5)$
(c) $(2x - 15)(5x + 3)$

8. (a) $(6 + a)(1 - 4a)$
(b) $-(3x + 1)(x - 6)$
(c) $(7x - 2)(x + 3)$

9. (a) $(p + q)^2$
(b) $(2a - b)(2a - 7b)$
(c) $(5x - 7y)^2$

10. (a) $2a^2(a^2 + 10a + 25) = 2a^2(a + 5)^2$
(b) $b(a^2 - 9a + 25)$, $a^2 - 9a + 25$ no es factorizable, puesto que $9 < 2\sqrt{25}$.
(c) $(2a + 5)(a + 5)$

11. (a) $6(x - 25)(x + 1)$
(b) $(x - 6)(6x + 25)$
(c) $6(x + 5)^2$
(d) $(x - 6)(6x - 25)$
(e). $6x^2 + 25x + 150$ no es factorizable sobre los enteros.
(f) $(3x + 10)(2x + 15)$
(g) $3(x - 2)(2x - 25)$
(h) $3(x - 2)(2x + 25)$

12. No. Hay solamente un factor 2 en el coeficiente de x^2, y ninguno en el término constante. Por lo tanto, o bien el producto interno o el producto externo tendrá un factor 2, pero no ambos. De este modo, la suma de los productos interno y externo será impar.

13. Sí. $3x^2 + 5x - 12 = (3x - 4)(x + 3)$

14. (a) $8x^2 + 10x - 3 = 0$
$(4x - 1)(2x + 3) = 0$
es equivalente a
$4x - 1 = 0$ ó $2x + 3 = 0$, o sea,
$x = \frac{1}{4}$ ó $x = -\frac{3}{2}$.

El conjunto de validez es $\{\frac{1}{4}, -\frac{3}{2}\}$.

(b) El conjunto de validez es $\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\}$.

(c) El conjunto de validez es $\{-\frac{1}{3}, \frac{7}{2}\}$.

(d) $a^2 - 4a + 15$ no es factorizable sobre los enteros.

Si se escribe

$a^2 - 4a + 4 - 4 + 15 = 0$
$(a - 2)^2 + 11 = 0$

resulta claro que el conjunto de validez es vacío.

15. (a) El conjunto de validez es $\{0, \frac{4}{9}\}$.

(b) El conjunto de validez es $\{\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\}$.

(c) El conjunto de validez es $\{-1, 3\}$.

(d) El conjunto de validez es $\{\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\}$.

16. (a) $(w - 4)(w + 4)$

(b) $(x - 1)(x + 7)$

(c) $(y - 1)(y + 7)$

(d) $(a - 5 - 3b)(a - 5 + 3b)$

17. Si x es uno de los números, entonces $15 - x$ es el otro número, y

$$x^2 + (15 - x)^2 = 137$$
$$x^2 + 225 - 30x + x^2 = 137$$
$$2x^2 - 30x + 88 = 0$$
$$2(x^2 - 15x + 44) = 0$$
$$2(x - 4)(x - 11) = 0$$

El conjunto de validez es $\{4,11\}$.

Los dos números son 4 y 11.

18. Si la anchura del rectángulo es w pulgadas, su longitud es $w + 7$ pulgadas, y $w^2 + (w + 7)^2 = 13^2$.

$$w^2 + (w + 7)^2 = 13^2$$

El conjunto de validez es $\{5, -12\}$.

La anchura del rectángulo es 5 pulgadas.

19. Si n es uno de los números, $n - 8$ es el otro número, y

$$n(n - 8) = 84.$$

El conjunto de validez es $\{-6, 14\}$.

Los dos números son 6 y 14, ó -6 y -14.

20. Si q es un número impar, entonces $q + 2$ es el número impar siguiente, y

$$q(q + 2) = 15 + 4q.$$

El conjunto de validez es $\{-3, 5\}$.

Los números son 5 y 7, ó -3 y -1.

21. Si Jaime camina con velocidad de x millas por hora, Guillermo camina con velocidad de $x + 1$ millas por hora.

En una hora Jaime camina $x \cdot 1$ millas y Guillermo camina $(x + 1) \cdot 1$ millas. Entonces,

$$(x \cdot 1)^2 + \left((x + 1) \cdot 1\right)^2 = 5^2.$$

El conjunto de validez es $\{-4, 3\}$.

Jaime camina con velocidad de 3 millas por hora, y Guillermo camina con velocidad de 4 millas por hora.

22. Si la longitud de la base del triángulo es b pulgadas, la altura del triángulo es $b - 3$ pulgadas, y

$$\frac{1}{2}(b)(b - 3) = 14.$$

El conjunto de validez es $\{7, -4\}$.

La longitud de la base del triángulo es 7 pulgadas.

23. Si la anchura del rectángulo es w pies,

$$w(14 - w) = 24.$$

El conjunto de validez es $\{12, 2\}$.

La anchura del rectángulo es 2 pies, y la longitud es 12 pies.

12-6. Polinomios sobre los números racionales o sobre los números reales

La idea principal aquí es que un polinomio que no es factorizable cuando se considera como un polinomio sobre los enteros, puede ser factorizable cuando se considera como un miembro de la clase más amplia de todos los polinomios sobre los números reales. Con otras palabras, la factorización depende de la clase de polinomios que se está considerando.

Esta es una buena ocasión para plantear la cuestión de si se puede o no factorizar el polinomio $x^2 + 1$, si admitimos una clase más amplia de polinomios. Puede señalarse que, para factorizar $x^2 - 2$, teníamos que pasar de los números racionales a los números reales, y para factorizar $x^2 + 1$, debemos pasar de los números reales a los números complejos, que se estudiarán en un curso posterior. Obsérvese también el problema correspondiente de resolver ecuaciones. La ecuación $x^2 - 2 = 0$ no tiene soluciones, si solamente se permiten números racionales, pero sí tiene soluciones, si se permiten números reales. Análogamente, la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene soluciones en el conjunto de los números reales, pero sí tiene soluciones en el conjunto de los números complejos.

Respuestas al Conjunto de problemas 12-6; páginas 352-354:

1. (a) $\frac{2}{3}a^2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}(a^2 - 2)$ sobre los números racionales

$= \frac{2}{3}(a - \sqrt{2})(a + \sqrt{2})$ sobre los números reales

(b) $17u(1 - 3u^2)$ sobre los números racionales

$17u(1 - \sqrt{3}u)(1 + \sqrt{3}\,u)$ sobre los números reales

(c) $\frac{1}{2}t^3 - 3t^2 + 4t = \frac{1}{2}t(t^2 - 6t + 8)$

$= \frac{1}{2}t(t - 4)(t - 2)$ sobre los números racionales

(d) $\frac{1}{2}t^3 - 4t^2 + 8t = \frac{1}{2}t(t^2 - 8t + 16)$

$= \frac{1}{2}t(t - 4)^2$ sobre los números racionales

(e) $a^4 - 16 = (a^2 - 4)(a^2 + 4)$

$= (a - 2)(a + 2)(a^2 + 4)$ sobre los números racionales

(f) $4x^2 + 9$ no es factorizable sobre los números reales.

2. (a) $2x^2 - 6 = 0$

$2(x^2 - 3) = 0$

$2(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$

es equivalente a

$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$,

que a su vez es equivalente a

$x - \sqrt{3} = 0$ ó $x + \sqrt{3} = 0$.

El conjunto de validez es $\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$.

(b) El conjunto de validez es $\{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

(c) El conjunto de validez es $\{0\}$.

3. (a) $x^2 + 4x - 1 = (x^2 + 4x + 4) - 1 - 4$

$= (x + 2)^2 - (\sqrt{5})^2$

$= (x + 2 - \sqrt{5})(x + 2 + \sqrt{5})$

(b) $x^2 + 4x + 2 = (x^2 + 4x + 4) + 2 - 4$

$= (x + 2)^2 - (\sqrt{2})^2$

$= (x + 2 - \sqrt{2})(x + 2 + \sqrt{2})$

(c) $x^2 + 4x + 3 = (x + 3)(x + 1)$

(d) $x^2 - 6x + 6 = (x^2 - 6x + 9) + 6 - 9$

$= (x - 3)^2 - (\sqrt{3})^2$

$= (x - 3 - \sqrt{3})(x - 3 + \sqrt{3})$

(e) $y^2 - 5 = (y - \sqrt{5})(y + \sqrt{5})$

(f) $(z - 6 - \sqrt{2})(z - 6 + \sqrt{2})$

(g) $(s - 5 - 2\sqrt{6})(s - 5 + 2\sqrt{6})$

(h) $2(x - 2 - \sqrt{5})(x - 2 + \sqrt{5})$

4. (a) $y^2 - 4y + 2 = 0$

$(y^2 - 4y + 4) + 2 - 4 = 0$

$(y - 2)^2 - (\sqrt{2})^2 = 0$

$(y - 2 - \sqrt{2})(y - 2 + \sqrt{2}) = 0$

$y - 2 - \sqrt{2} = 0$ ó $y - 2 + \sqrt{2} = 0$

$y = 2 + \sqrt{2}$ ó $y = 2 - \sqrt{2}$

Las soluciones son $2 + \sqrt{2}$ y $2 - \sqrt{2}$.

(b) Las soluciones son $3 + \sqrt{3}$ y $3 - \sqrt{3}$.

(c) Las soluciones son $5 + \sqrt{26}$ y $5 - \sqrt{26}$.

(d) No hay soluciones.

*5. (a) 49

(b) $\frac{9}{4}$

(c) $\frac{1}{4}$

(d) $\frac{1}{25}$

(e) $\frac{9}{64}$

*6. (a) $(a + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})(a + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})$

(b) $(y + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2})(y + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2})$

(c) $(x - \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2})(x - \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2})$

(d) No es factorizable sobre los números reales.

*7. (a) El conjunto de validez es $\{-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\}$.

(b) Las soluciones son $\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{61}}{2}$ y $\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{61}}{2}$.

(c) El conjunto de validez es $\{\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\}$.

(d) Las soluciones son -1 y $\frac{1}{2}$.

*8. (a)
$$\begin{aligned} 2x^2 - 12x - 5 &= 2(x^2 - 6x - \tfrac{5}{2}) \\ &= 2(x^2 - 6x + 9 - 9 - \tfrac{5}{2}) \\ &= 2\left((x-3)^2 - \tfrac{23}{2}\right) \\ &= 2\left(x - 3 - \sqrt{\tfrac{23}{2}}\right)\left(x - 3 + \sqrt{\tfrac{23}{2}}\right) \end{aligned}$$

(b) $3(y + \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{7}}{3})(y + \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3})$

(c) $5(a - \frac{1}{10} - \frac{\sqrt{21}}{10})(a - \frac{1}{10} + \frac{\sqrt{21}}{10})$

*9. (a) $\{3 + \sqrt{\frac{23}{2}}, 3 - \sqrt{\frac{23}{2}}\}$

(b) $\{1 + \sqrt{\frac{7}{3}}, 1 - \sqrt{\frac{7}{3}}\}$

(c) $\{-\frac{5}{6} + \frac{\sqrt{13}}{6}, -\frac{5}{6} - \frac{\sqrt{13}}{6}\}$

12-7. El álgebra de las expresiones racionales

Según indica el título de esta sección, esperamos que el estudiante empiece a darse cuenta de que, al tratar con expresiones tales como los polinomios, en realidad trata con un sistema. Puede ser natural el aludir a esto en la clase si se presenta la oportunidad, aunque probablemente no es oportuno en este momento el dedicar a ello una especial atención. Los mejores estudiantes, al menos, deben ya darse cuenta de que nuestro trabajo con expresiones se basa en las operaciones de suma y multiplicación, que poseen algunas de las propiedades de las operaciones correspondientes para los números reales. Como hemos recalcado muchas veces que estas operaciones y sus propiedades son lo que da estructura al sistema de los números reales, dichos estudiantes deberán estar prácticamente dispuestos para pensar sobre el sistema de las expresiones, en esta forma más elaborada.

La analogía entre expresiones racionales y números racionales y entre polinomios y enteros deberá puntualizarse.

Obsérvese que el cero (así como el 5, por ejemplo) es una expresión racional. De hecho, el cero puede considerarse como un polinomio sobre los enteros. Si A y B son expresiones racionales, entonces $A + B$, $A - B$, y AB son evidentemente expresiones racionales. También, $\frac{A}{B}$ es una expresión racional, si B no puede escribirse como la expresión cero. Sin embargo, pueden imponerse restricciones en el dominio de las variables que intervienen en B para evitar la división por cero. Un ejemplo de una expresión que puede escribirse como la expresión cero, es el siguiente:

$$(x + y)(x - y) + y^2 - x^2$$

Puesto que

$$(x + y)(x - y) + y^2 - x^2 = 0$$

para todos los valores de las variables x e y, una expresión tal como

$$\frac{x + y}{(x + y)(x - y) + y^2 - x^2}$$

no es un numeral para cualesquiera valores de las variables, y, por tanto, no puede ser admitida como una expresión racional, aún con el convenio de restringir el dominio de las variables. Las expresiones que pueden escribirse como la expresión cero son precisamente aquellas que representan el número cero para todos los valores de las variables. Con otras palabras, son "iguales a cero" en el sentido de la definición mencionada en los comentarios preliminares en este capítulo.

Respuestas al Conjunto de problemas 12-7; página 359:

1. $\frac{3x - 3}{x^2 - 1} = \frac{3}{x + 1}$ si $x \neq 1$ y $x \neq -1$.
2. x^2 si $y \neq 1$.
3. $\frac{x + 2}{x + 1}$ si $x \neq 6$, $x \neq -1$.
4. $\frac{b}{1 + b}$ si $b \neq 1$, $b \neq -1$, $a \neq 0$.
5. $\frac{(x + 3)(x + 1)}{2x}$ si $x \neq 3$, $x \neq -1$, $x \neq 0$.
6. 1 si $x \neq 1$, $x \neq -1$.

12-8. Simplificación de sumas de expresiones racionales

Respuestas al Conjunto de problemas 12-8; páginas 362-363:

1. $\frac{3}{x^2} - \frac{2}{5x} = \frac{3}{x^2} \cdot \frac{5}{5} - \frac{2}{5x} \cdot \frac{x}{x}$

$$= \frac{15}{5x^2} - \frac{2x}{5x^2} = \frac{15 - 2x}{5x^2}$$

2. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a} \cdot \frac{bc}{bc} + \frac{1}{b} \cdot \frac{ac}{ac} + \frac{1}{c} \cdot \frac{ab}{ab}$

$$= \frac{bc}{abc} + \frac{ac}{abc} + \frac{ab}{abc} = \frac{bc + ac + ab}{abc}$$

3. $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{2a} - 2 = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{2}{2} - \frac{1}{2a} \cdot \frac{a}{a} - 2 \cdot \frac{2a^2}{2a^2}$

$$= \frac{2}{2a^2} - \frac{a}{2a^2} - \frac{4a^2}{2a^2} = \frac{2 - a - 4a^2}{2a^2}$$

4. $\frac{5}{x - 1} + 1 = \frac{5}{x - 1} + \frac{x - 1}{x - 1} = \frac{5 + x - 1}{x - 1} = \frac{4 + x}{x - 1}$

5. $\frac{3}{m - 1} + \frac{2}{m - 2} = \frac{3}{m - 1} \cdot \frac{m - 2}{m - 2} + \frac{2}{m - 2} \cdot \frac{m - 1}{m - 1}$

$$= \frac{3m - 6 + 2m - 2}{(m - 1)(m - 2)} = \frac{5m - 8}{(m - 1)(m - 2)}$$

6. $\frac{x}{x + 5} - \frac{x}{x - 3} = \frac{x}{x + 5} \cdot \frac{x - 3}{x - 3} - \frac{x}{x - 3} \cdot \frac{x + 5}{x + 5}$

$$= \frac{x^2 - 3x - x^2 - 5x}{(x + 5)(x - 3)} = - \frac{8x}{(x + 5)(x - 3)}$$

7. $\frac{5m - n}{(m - n)n}$

8. $\frac{x^2 - 2xy - y^2}{(x - y)(x + y)}$

9. $\frac{5}{a - b}$

10. $\frac{12x - 21}{x^2 - 9}$

11. $\frac{-a + 3b}{(a - b)^2}$

12. $\frac{7a - 7b + 6}{(a - b)^2}$

13. $\frac{9 - 5x}{3x(x + 2)}$

14. $\frac{6a - 10}{a(a - 5)(a + 1)}$

15. $\frac{8x - 1}{(x - 2)^2 (x + 3)}$

16. $\frac{y^2 - 3y + 10}{2y^2}$

17. $\frac{9}{a(a + 3)}$

18. $\frac{b + 2}{2(b - 5)}$

19. $\frac{5 + 2x}{x(x - 1)}$

20. $\frac{11a + 65}{6(a - 5)(a + 5)}$

21. $x - y$

22. $\frac{ab}{b - a}$

23. $\frac{x - 3}{3}$

24. El conjunto es cerrado respecto de estas operaciones. Esperamos que el estudiante se esté ya dando cuenta de que se trata de otro sistema.

12-9: <u>División de polinomios</u>

La idea fundamental en esta sección está representada por la siguiente propiedad del sistema de los polinomios:

> Sean N y D polinomios, con D diferente de cero. Entonces, <u>existen</u> polinomios Q y R, con R de grado menor que D, tales que N = QD + R.

Esta propiedad es análoga a la siguiente propiedad del sistema de los enteros:

> Sean n y d enteros positivos, con d diferente de 0. Entonces, <u>existen</u> enteros positivos q y r, con r menor que d, tales que n = qd + r.

La analogía de estas propiedades explica además el paralelo entre polinomios y enteros. Justamente lo mismo que el proceso de la división en aritmética es un procedimiento sistemático para obtener los enteros q y r, así también el proceso de la división de polinomios es simplemente un procedimiento sistemático para obtener los polinomios Q y R.

No debe permitirse que la técnica de la división oculte la idea en que se basa la división. De importancia matemática aquí, son las propiedades estructurales del sistema de los polinomios, implicadas por la <u>existencia</u> de Q y R. Este es otro caso en el cual una técnica típica en álgebra elemental, puede ser provechosa al desarrollar algunas ideas matemáticas importantes.

Respuestas al Conjunto de problemas 12-9a; página 367:

1. (a) $-22a^2 - 7a + 12$
   (b) $-2x^3 - 2x^2 - 7x + 8$
   (c) $-2y^2 + 4y - 5$
2. (a) $13a - 20$
   (b) $-11x^2 - 6x - 6$
   (c) $2y^2 + 11y - 16$
   (d) 9

Respuestas al Conjunto de problemas 12-9b; página 368:

1. $$\begin{array}{l|l} x - 2 & 2x^2 - 4x + 3 = 2x(x - 2) + 3 \\ & \underline{2x^2 - 4x} \\ & \qquad\quad 3 \end{array}$$

   Así, $2x^2 - 4x + 3 = 2x(x - 2) + 3$

   y $\dfrac{2x^2 - 4x + 3}{x - 2} = 2x + \dfrac{3}{x - 2}$

2. $4x^2 - 4x - 15 = (2x - 5)(2x + 3)$

   y $\dfrac{4x^2 - 4x - 15}{2x + 3} = 2x - 5$

3. $2x^3 - 5x^2 - 8x + 10 = (x^2 - 4x + 2)(2x + 3) + 4$

   y $\dfrac{2x^3 - 5x^2 - 8x + 10}{2x + 3} = x^2 - 4x + 2 + \dfrac{4}{2x + 3}$

4. $2x^3 - 2x^2 + 5 = (2x^2 + 10x + 60)(x - 6) + 365$

   y $\dfrac{2x^3 - 2x^2 + 5}{x - 6} = 2x^2 + 10x + 60 + \dfrac{365}{x - 6}$

5. $2x^5 + x^3 - 5x^2 + 2 = (2x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 2x - 2)(x - 1)$

   y $\dfrac{2x^5 + x^3 - 5x^2 + 2}{x - 1} = 2x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 2x - 2$

6. $3x^3 - 2x^2 + 14x + 5 = (x^2 - x + 5)(3x + 1)$

y $\dfrac{3x^3 - 2x^2 + 14x + 5}{3x + 1} = x^2 - x + 5$

Respuestas al Conjunto de problemas 12-9c; página 370:

1.
$$\begin{array}{r|l|l} x - 3 & x^3 - 3x^2 + 7x - 1 & x^2 + 7 \\ & \underline{x^3 - 3x^2} & \\ & 7x - 1 & \\ & \underline{7x - 21} & \\ & 20 & \end{array}$$

Comprobación: $(x^2 + 7)(x - 3) + 20 = x^3 - 3x^2 + 7x - 1$

Por lo tanto, $\dfrac{x^3 - 3x^2 + 7x - 1}{x - 3} = x^2 + 7 + \dfrac{20}{x - 3}$

2. $x + 3 + \dfrac{30}{x - 5}$

3. $x^3 - 3x^2 + \dfrac{-1}{x + 3}$

4. $5x^2 - 10x + 9 + \dfrac{-11}{x + 2}$

5. $2x - 5$

6. $2x^2 + x - 1 + \dfrac{2}{3x - 2}$

7. $x^3 + x^2 + x + 1$

8. $x^3 - x^2 + x - 1 + \dfrac{2}{x + 1}$

9. $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

10. $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} + \dfrac{1}{3x - 15}$ Nota: El cociente es un polinomio sobre los números racionales.

11. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{5}{8} - \dfrac{\frac{13}{8}}{2x + 1}$

12. $\frac{3}{2}x + \frac{1}{4} - \dfrac{\frac{1}{4}}{2x + 1}$

13. $N = QD + R$

Si $R = 0$, entonces $N = QD$, y D es un factor de N.
Por tanto, si se divide N por D y no hay residuo, entonces D es un factor de N.

$$
\begin{array}{r|l|l}
x+3 & 2x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 14x - 3 & 2x^3 - 4x^2 + 5x - 1 \\
 & \underline{2x^4 + 6x^3} & \\
 & \quad -4x^3 - 7x^2 & \\
 & \quad \underline{-4x^3 - 12x^2} & \\
 & \qquad\qquad 5x^2 + 14x & \\
 & \qquad\qquad \underline{5x^2 + 15x} & \\
 & \qquad\qquad\qquad -x - 3 & \\
 & \qquad\qquad\qquad \underline{-x - 3} &
\end{array}
$$

Así, $2x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 14x - 3 = (2x^3 - 4x^2 + 5x - 1)(x + 3)$.

Respuestas al Conjunto de problemas 12-9d; página 372:

1. (a) $2x + 2 + \frac{9}{x - 3}$

(b) $2x - 5 + \frac{2}{2x + 3}$

(c) $x^2 - 4x + 2 + \frac{3}{2x + 3}$

(d) $x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{7}{9} + \frac{\frac{29}{9}}{3x - 1}$

(e) $x^2 - 2x + 5 + \frac{-12}{x + 2}$

(f) $2x - 1 + \frac{10x + 2}{x^2 + 3}$

(g) $x + \frac{8x - 1}{x^2 - 2x - 1}$

(h) $3x^2 + 4x + 10 + \frac{16x + 33}{x^2 - 4}$

(i) $x - \frac{1}{5} + \frac{-\frac{2}{5}x^2 - x + 4}{5x^3 - 2x^2}$

(j) $3x + \frac{x^2 - x + 2}{x^3 - x}$

2. (a) $3x^5 - 5x^4 + 1$

(b) $x^6 - x^3 + 1$

(c) $2x^2 + 2x - 1$

(d) $(2x^4 + x - 5)(2x^4 - 5) + \frac{x^2 - 5x}{2x^4 + x - 5}$

Por lo tanto, $2x^4 + x - 5$ <u>no</u> es un factor de $4x^8 + 2x^5 - 20x^2 - 10x + 25$.

<u>Respuestas a los Problemas de repaso</u>; páginas 375-382:

1. Todas son expresiones racionales, excepto (i), (j), (k).

   (a), (b), (c), (d), (e), (f), (g), (q), (r), (s), (v), (w) son polinomios.

   (b), (q), (r), (v), (w) son polinomios con una variable.

   (a), (b), (c), (d), (q), (s), (v) son polinomios sobre los enteros.

   (e), (f), (g) son polinomios sobre los números racionales, pero no sobre los enteros.

   (r), (w) son pólinomios sobre los números reales, pero no sobre los números racionales.

2. (a) $6\sqrt{2} + 6\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2} - 2\sqrt{3} = \frac{11}{2}\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$.

(b) $\sqrt{18a^4} = 3a^2\sqrt{2}$

(c) $(x + y)\sqrt{x + y}$ para números no negativos $(x + y)$

3. (a) $4\sqrt{3} - 6\sqrt{2}$

(b) $3 + 2\sqrt{6} + 2 = 5 + 2\sqrt{6}$

(c) $x - 1$

4. (a) $(x - 24)(x + 2)$

(b) No es factorizable sobre los enteros.

(c) $3a^2b^3(ab^2 - 2 + 4a^2b)$

(d) $(x - y)(x + y) - 4(x + y) = (x + y)(x - y - 4)$

(e) $(x - y)(x + y) + 2(x - y)(x - y) - 3(x - y)(x - y)^2$

$= (x - y)\left((x + y) + 2(x - y) - 3(x - y)^2\right)$

$= (x - y)(x + y + 2x - 2y - 3x^2 + 6xy - 3y^2)$

$= (x - y)(3x - y - 3x^2 + 6xy - 3y^2)$

(f) $(3a - 2)(2a - 5)$

(g) $(3a - 2)(2a + 5)$

(h) $4(x - y)^3 + 8(x - y)^2 - 2(y - x)^2$ Obsérvese que $(y - x)^2 = (x - y)^2$.

$= 4(x - y)^3 + 6(x - y)^2$

$= 2(x - y)^2\left(2(x - y) + 3\right)$

$= 2(x - y)^2(2x - 2y + 3)$

(i) $x^2 + 2ax + a^2 - bx - ba - cx - ca$

$= (x + a)^2 - (x + a)(b + c)$

$= (x + a)(x + a - b - c)$

5. (a) Los factores positivos de 12 son 12, 1,
6, 2,
4, 3.

k puede ser 13, 8, 7.

(b) $6 = 1 + 5$

$= 2 + 4$

$= 3 + 3$

k puede ser 5, 8, 9.

(c) $\frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} = \frac{b}{2}$

$(\frac{b}{2})^2 = K$

$(3\sqrt{3})^2 = 27$

6. (a) $\frac{9b^2}{14x}$

(b) $\frac{15b^2 + 91ab - 125a^2}{175a^2b^2}$

(c) $\frac{a - 2b}{ab(a - b)}$

(d) $\frac{3(3x - 5)}{(x + 3)(x - 3)(x - 1)}$

7. (a) $x^2 - x - 2$

(b) $x^3 + 4x^2 - 4x - 1$

(c) $x^2 - x + 1 - \frac{2}{x + 1}$

(d) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

8. (a) $\{-\frac{3}{2}\}$, si $x \neq 0$.

(b) $\{25\}$, si $y \neq 0$, $y \neq 5$.

(c) $\{-\frac{5}{4}\}$, si $x \neq -1$, $x \neq -2$.

(d) $\{2, -7\}$, si $n \neq 3$, $n \neq -3$.

(e) $\{\frac{22}{7}, \frac{20}{7}\}$, si $x \neq 3$.

(f) $\{9, -9\}$

(g) $\{0, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\}$

(h) $|x|^2 + |x| = 12$

$|x|^2 + |x| - 12 = 0$

$(|x| + 4)(|x| - 3) = 0$

$|x| + 4 = 0$ | $|x| - 3 = 0$

$|x| = -4$ | $|x| = 3$

$\emptyset$ | $x = -3$

$x = 3$

Si $x = -3$,

$|-3|^2 + |-3| = 12$

$9 + 3 = 12$

Si $x = 3$,

$|3|^2 + |3| = 12$

$9 + 3 = 12$

Por lo tanto, el conjunto de validez es $\{-3, 3\}$.

9. $(n + 3)^2 - n^2 = \big((n + 3) - n\big)\big((n + 3) + n\big)$
$= 3\ (2n + 3)$

10.
$$
\begin{array}{r|l}
x - 3 & x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 3 \quad \underline{|x^3 - 2x^2} \\
 & \underline{x^4 - 3x^3} \\
 & -2x^3 + 6x^2 - 3 \\
 & \underline{-2x^3 + 6x^2} \\
 & -3
\end{array}
$$

Por lo tanto,

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 3 = (x^3 - 2x^2)(x - 3) - 3$$

así que $x - 3$ <u>no</u> es un factor.

11. (a) El grado de R es menor que 3.

(b) El grado de Q es 97.

12. (a) Cuando utilizamos la igualdad para indicar que una expresión está "escrita en" otra forma, se entiende que la ecuación es un enunciado cierto para <u>todos</u> los valores admisibles de las variables. Por lo tanto, en este caso, el conjunto de validez consiste en todos los números reales.

(b) <u>Podemos</u> asignar cualquier valor a x. Por ejemplo, si $x = 0$, obtenemos $1 = 2\cdot(-1) + R$, y, por lo tanto, $R = 3$. Un valor mejor es $x = 1$, puesto que en este caso

$$2\cdot1^4 + 1 = 2(1^3 + 1^2 + 1^1 + 1)(1 - 1) = R$$

$$3 = 2\cdot4\cdot0 + R$$

$$3 = R$$

La idea es que con este valor de x el primer término en el miembro de la derecha de la ecuación es automáticamente cero, cualquiera que sea el número $2(x^3 + x^2 + x + 1)$. (V. el próximo problema.)

13. En este problema no conocemos Q, y sería trabajoso obtenerlo. Sin embargo, la elección de 1 para valor de x da

$$5\cdot1^{100} + 3\cdot1^{17} - 1 = Q(1 - 1) + R$$

$$7 = Q\cdot0 + R$$

$$7 = R\,.$$

Por lo tanto, obtenemos el valor de R, a pesar de no saber qué número representa Q cuando $x = 1$.

14. (a) Q és de grado 7.

(b) Si $R = 0$, $x - 1$ es un factor de $4x^8 + n$.

(c) Si $x = 1$, entonces

$$4\cdot 1^8 + n = Q\cdot 0 + R$$
$$4 + n = R$$

Por lo tanto, si $n = -4$, entonces $R = 0$.

15.

$$\begin{array}{r|l|l} x+3 & 2x^{17} - 5x^{15} + 1 & 2x^{16} - 6x^{15} \\ & \underline{2x^{17} + 6x^{16}} & \\ & -6x^{16} - 5x^{15} + 1 & \\ & \underline{-6x^{16} - 18x^{15}} & \\ & 13x^{15} + 1 & \end{array}$$

Por lo tanto,

$$2x^{17} - 5x^{15} + 1 = (2x^{16} - 6x^{15})(x + 3) + (13x^{15} + 1)$$

16. <u>Teorema</u>. Si a <u>y</u> b son números reales positivos y distintos, entonces

$$\frac{a + b}{2} > \sqrt{ab}.$$

<u>Demostración</u> : Si $a + b - 2\sqrt{ab} > 0$,

entonces $a + b - 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{ab} > 0 + 2\sqrt{ab}$,

(Propiedad aditiva de la ordenación)

ó $a + b > 2\sqrt{ab}$.

Por lo tanto, $\frac{a + b}{2} > \sqrt{ab}$. (Propiedad multiplicativa de la ordenación)

Por lo tanto, sólo debemos demostrar que

$$a + b - 2\sqrt{ab} > 0.$$

Obsérvese que

$$\begin{aligned} a + b - 2\sqrt{ab} &= a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \\ &= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2. \end{aligned}$$

Siendo $a \neq b$, también $\sqrt{a} \neq \sqrt{b}$, y así, $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq 0$. Puesto que el cuadrado de cualquier número real distinto de cero es positivo, se deduce que

$a + b - 2\sqrt{ab} > 0$.

17. Si x es el número de minutos transcurridos hasta que se encuentren, entonces $x \cdot \frac{1}{30}$ ó $\frac{x}{30}$ es la porción del trabajo total hecho por un muchacho, y $x \cdot \frac{1}{45}$ ó $\frac{x}{45}$ es la porción del trabajo total hecho por el otro muchacho. Después de transcurrir x minutos, las dos fracciones deben sumar 1. Entonces,

$\frac{x}{30} + \frac{x}{45} = 1$, y $x = 18$.

18. Si n es el número de libras de bombones que se venden a \$1.00 la libra y que se han de usar en la mezcla, entonces $40 - n$ es el número de libras de bombones que se venden a \$1.40 la libra y que se han de usar en la mezcla. Luego, $(n)(100)$ es el valor en centavos de los bombones más baratos empleados en la mezcla, $(40 - n)(140)$ es el valor en centavos de los bombones más caros incluidos en la mezcla, y $(40)(110)$ es el valor total en centavos de la mezcla. Por lo tanto, $100n + (140)(40 - n) = (40)(110)$, y $n = 30$, $40 - n = 10$. De aquí que se incluyen en la mezcla 30 libras de bombones de \$1.00 la libra, y 10 libras de bombones de \$1.40 la libra.

19. Si x es el número de galones tomados de la mezcla, entonces la cantidad de agua al principio menos la cantidad de agua de la porción tomada, más el agua agregada son iguales a la cantidad de agua que habrá al final.

$$.85(100) - .85x + x = .90(100)$$

y $x = 33\frac{1}{3}$.

Así, $33\frac{1}{3}$ galones de mezcla se tomaron. Una ecuación basada en la cantidad de sal en la solución es

$$(.15)(100) - (.15)(x) = .10(100),$$

donde x es otra vez el número de galones tomados de la mezcla.

20. Si r es la velocidad del tren, entonces $10r$ es la velocidad del avión de retropropulsión. En 8 horas el tren recorre $8r$ millas, y en una hora el avión recorrerá $10r$ millas.

Entonces, $10r = 8r + 120$.

$r = 60$, la velocidad del tren en millas por hora.

$10r = 600$, la velocidad del avión en millas por hora.

21. Si r es la velocidad de un tren, entonces $\frac{2}{3}r$ es la velocidad del segundo. En 3 horas y 12 minutos, ó $3\frac{1}{5}$ horas,

$$\frac{16}{5}r + \frac{16}{5}\left(\frac{2}{3}r\right) = 160.$$

$r = 30$ millas por hora

$\frac{2}{3}r = 20$ millas por hora

22. $\frac{300}{30} = 10$ horas ida

$\frac{300}{20} = 15$ horas vuelta

Puesto que la velocidad media para todo el viaje debe comprender la distancia total y el tiempo total, la velocidad media es $\frac{600}{25}$, ó 24 millas por hora.

23. Si d es la distancia en millas a la ida ($d > 0$), y la velocidad es r millas por hora, el tiempo de ida es $\frac{d}{r}$ horas. A la vuelta, si la velocidad es q millas por hora, el tiempo es $\frac{d}{q}$ horas. La distancia total, $2d$ millas, dividida por el tiempo total, $\frac{d}{r} + \frac{d}{q}$ horas, será

$$\frac{2d}{\frac{d}{r} + \frac{d}{q}} = \frac{2d}{\frac{d}{r} + \frac{d}{q}} \cdot \frac{rq}{rq} = \frac{2drq}{dq + dr}$$

$$= \frac{2drq}{d(q + r)} = \frac{2rq}{q + r} \cdot \frac{d}{d}$$

$$= \frac{2rq}{q + r} \text{ millas por hora, } q \neq 0, \quad r \neq 0.$$

Aplicando esto al problema 22,

$$\frac{2(30)(20)}{30 + 20} = \frac{1200}{50}$$

$$= 24 \text{ millas por hora.}$$

El estudiante deberá observar que la distancia recorrida no afecta a la velocidad media.

24. Si x es el primer entero, entonces $x + 1$ es su sucesor, y los recíprocos son $\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{x + 1}$, respectivamente.

Por lo tanto, $\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 1} = \frac{27}{182}$, si $x \neq 0$, $x \neq -1$.

$$182(x + 1) + 182(x) = 27x(x + 1)$$

$$(27x + 14)(x - 13) = 0$$

$$x - 13 = 0$$

$$x = 13$$

$$27x + 14 = 0$$

Esta ecuación no tiene solución en números enteros.

Si $x = 13$, entonces

$$\frac{1}{13} + \frac{1}{14} = \frac{27}{182} \text{ ó } \frac{14}{182} + \frac{13}{182} = \frac{27}{182}.$$

De este modo, el conjunto de validez del enunciado es $\{13\}$, y los enteros requeridos son 13 y 14.

25. $$\frac{\frac{x+3}{x} + \frac{x-3}{x}}{2} = \frac{\frac{2x}{x}}{2} = \frac{2}{2} = 1, \text{ si } x \neq 0.$$

26. Si x es el número, entonces

$$x^2 = 91 + 6x.$$

$$x^2 - 6x - 91 = 0$$

$$(x - 13)(x + 7) = 0$$

$x - 13 = 0$ | $x + 7 = 0$

$x = 13$ | $x = -7$

Si $x = 13$, | Si $x = -7$,

$13^2 = 91 + 6(13)$, | $(-7)^2 = 91 + 6(-7)$,

$169 = 91 + 78$ | $49 = 91 - 42$

Por lo tanto, el conjunto de validez es $\{13, -7\}$.

27. Si n es la velocidad en millas por hora del carro más rápido, entonces $n - 4$ es la velocidad en millas por hora del segundo. Luego, $\frac{360}{n}$ es el número de horas que viaja el más rápido, y $\frac{360}{n-4}$ es el número de horas que viaja el más lento. Por lo tanto,

$$\frac{360}{n} + 1 = \frac{360}{n-4}, \text{ si } n \neq 0,\ n \neq 4,\ n > 0.$$

$$360(n - 4) + n(n - 4) = 360n$$
$$360n - 1440 + n^2 - 4n = 360n$$
$$n^2 - 4n - 1440 = 0$$
$$(n + 36)(n - 40) = 0$$

$n + 36 = 0$

Esta ecuación no tiene solución en números positivos.

$n - 40 = 0$

$n = 40$

Si $n = 40$,

$$\frac{360}{40} + 1 = \frac{360}{36}$$
$$9 + 1 = 10$$

Por lo tanto, el número positivo del conjunto de validez es 40, y las velocidades son 40 millas por hora y 36 millas por hora.

28. Si el ancho del espacio es w pies, entonces el número de pies del largo de la alfombra es $20 - 2w$, y el número de pies del ancho de la alfombra es $14 - 2w$. Por lo tanto, se tienen dos nombres disponibles para el área de la alfombra, y aparecen como miembros de la siguiente ecuación:

$$(20 - 2w)(14 - 2w) = (24)(9), \quad 0 < w < 7$$
$$280 - 68w + 4w^2 = 216$$
$$4w^2 - 68w + 64 = 0$$
$$w^2 - 17w + 16 = 0$$
$$(w - 16)(w - 1) = 0$$
$$w = 1$$

$w - 16 = 0$ no tiene solución tal que $w < 7$.

Si $w = 1$,

$$(20 - 2)(14 - 2) = (24)(9)$$
$$(18)(12) = 216$$

De este modo, el conjunto de validez de la ecuación original es $\{1\}$.

Por lo tanto, el ancho del espacio es 1 pie.

29. Si x es el número de unidades del largo del cateto menor, entonces, $2x + 2$ es el número de unidades del largo del cateto mayor. Por lo tanto, por la relación pitagórica,

$$x^2 + (2x + 2)^2 = 13^2, \quad 0 < x < 13.$$

$$x^2 + 4x^2 + 8x + 4 = 169$$

$$5x^2 + 8x - 165 = 0$$

$$(5x + 33)(x - 5) = 0$$

$$x = 5$$

$5x + 33 = 0$ no tiene solución positiva.

Si $x = 5$,

$$5^2 + \left((2)(5) + 2\right)^2 = 13^2$$

$$169 = 169$$

De este modo, el conjunto de validez es $\{5\}$, y el cateto menor tiene 5 unidades de largo, y el cateto mayor, 12 unidades.

30. $\sqrt[3]{\pi^3} = \pi$, que es irracional.

$\sqrt{.4} = \sqrt{\frac{4}{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5}$, que es irracional.

$\sqrt[3]{.0008} = \sqrt[3]{\frac{8}{10000}} = \sqrt[3]{\frac{800}{1000000}} = \frac{\sqrt[3]{800}}{100} = \frac{\sqrt[3]{100}}{50}$,

que es irracional.

$(\sqrt[3]{-1})(\sqrt{.16}) = (-1)(.4) = -.4$ que es racional.

31. Si el número de dos cifras es $10t + u$, la suma de sus cifras es $t + u$, y

$$\frac{10t + u}{t + u} = 4 + \frac{3}{t + u}$$

$$10t + u = 4t + 4u + 3$$

$$6t - 3u = 3$$

$$2t - u = 1$$

$u = 2t - 1$, y u es un entero positivo ≤ 9.

Si $t = 1$, entonces $u = 1$, y el número es 11;
si $t = 2$, entonces $u = 3$, y el número es 23;
si $t = 3$, entonces $u = 5$, y el número es 35;
si $t = 4$, entonces $u = 7$, y el número es 47;
si $t = 5$, entonces $u = 9$, y el número es 59.

Si $t = 1$, $u = 1$, entonces $\frac{10t + u}{t + u}$ es $\frac{11}{2} = 4 + \frac{3}{2}$.

El par de valores, $t = 1$, $u = 1$, no debe admitirse, puesto que el numerador, 3, del resto es mayor que el denominador 2.

Si $t = 2$, y $u = 3$, $\frac{23}{5} = 4 + \frac{3}{5}$;

si $t = 3$, y $u = 5$, $\frac{35}{8} = 4 + \frac{3}{8}$;

si $t = 4$, y $u = 7$, $\frac{47}{11} = 4 + \frac{3}{11}$;

si $t = 5$, y $u = 9$, $\frac{59}{14} = 4 + \frac{3}{14}$.

Por lo tanto, las soluciones son 23, 35, 47, 59.

32. $\frac{8}{5}$

33. $$|x - 5|^2 \geq 9$$
$$|x - 5| \cdot |x - 5| \geq 3 \cdot 3$$
$$|x - 5| \geq 3$$
$$x - 5 \geq 3 \quad ó \quad x - 5 \leq -3$$
$$x \geq 8 \quad ó \quad x \leq 2$$

El conjunto de validez es el conjunto de todos los x tales que $x \geq 8$ ó $x \leq 2$. Los métodos formales para resolver desigualdades tales como ésta no están disponibles todavía, así es que el estudiante tendrá que alcanzar la solución ensayando cuidadosamente varios posibles miembros del conjunto, o, si busca un enfoque menos casual, puede suponer que si a y b son números positivos, y $a^2 > b^2$, entonces $a > b$.

34. (a) Mientras el horario recorre un número x de marcas de minutos, el minutero recorre $12x$ de estas unidades. Puesto que el horario está en la posición de las 3 en punto, tiene un adelanto de 15 unidades sobre el minutero a la hora 3:00. Así,

$$12x = x + 15,$$
$$11x = 15,$$
$$x = \frac{15}{11}.$$

Si $x = \frac{15}{11}$, entonces

$$12\left(\frac{15}{11}\right) = \frac{15}{11} + 15,$$
$$\frac{180}{11} = \frac{180}{11}.$$

De este modo, el conjunto de validez de la ecuación es $\{\frac{15}{11}\}$, y la hora cuando las dos agujas están juntas es $16\frac{4}{11}$ minutos después de las 3.

(b) En la parte (a), ambas agujas coinciden en la misma marca de minutos; en la parte (b) el minutero ha de llegar a una posición 30 unidades por delante del horario. Por lo tanto, la ecuación para la parte (b) es

$$12x = (x + 15) + 30, \text{ y } x = 4\frac{1}{11} .$$

Las agujas resultarán opuestas la una a la otra al cabo de $49\frac{1}{11}$ minutos después de las 3.

35. Si el número de novillos es s, y el número de vacas es c, entonces

$$25s + 26c = 1000$$

$$25s = 1000 - 26c$$

$$s = \frac{1000 - 26c}{25}$$

$$s = 40 - \frac{26c}{25}$$

Si s y c son enteros positivos, entonces $26c$ debe ser divisible por 25. Esto es cierto cuando $c = 25, 50, 75, \ldots$, un múltiplo de 25, porque 26 y 25 son primos entre sí.

Si $c = 25$, $\frac{26c}{25} = 26$ y $s = 40 - 26 = 14$.

Si $c = 50$, $\frac{26c}{25} = 52$ y $s = 40 - 52 = -12$.

Si $c = 75$, $\frac{26c}{25} = 78$ y $s = 40 - 78 = -38$.

De este modo, es evidente que si $c \geq 50$, s es un número negativo. Por lo tanto, c puede ser solamente 25,

$$\underline{y} \quad s = 40 - 26,$$

o sea, $\quad s = 14.$

Así, puede comprar 25 vacas y 14 novillos.

Si resolviéramos la ecuación original respecto de c, obtendríamos $\quad c = \dfrac{1000 - 25s}{26}$, y habría que escogerse s de manera que $1000 - 25s$ sea divisible por 26. Aunque esto puede hacerse, es desde luego más difícil que la otra manera de resolver la cuestión.

Sugerencias para exámenes

1. Clasifica las siguientes expresiones, indicando la letra identificadora de la expresión en los espacios en blanco. Una expresión puede entrar en más de una de las clasificaciones.

(a) $(x - 3)(x + 2)$ (e) $\sqrt{3}x^2 + 1$

(b) $s + \frac{1}{3}t$ (f) $\frac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 2)}$

(c) $\sqrt{x + 1}$ (g) $|x - 1|$

(d) $3x^{-2} + x^{-1}$

expresiones racionales ______________________

polinomios sobre los números reales ______________

polinomios sobre los números racionales __________

polinomios sobre los enteros ________________

ninguno de los anteriores ____________________

2. Factoriza sobre los enteros, si es posible:

(a) $ax^2 - ax - 6a^2$ (d) $6x^2 - 11x - 72$

(b) $9a^2 - 16$ (e) $(2a - b)^2 - (a - 2b)^2$

(c) $x^2 - x - 20$ (f) $3ab - 3b^2 + 2a^2 - 2ab$

3. Determina el conjunto de validez de las siguientes ecuaciones:

(a) $x^2 + 3x = 54$ (d) $9b^2 = 11b - 36$

(b) $y^2 + 56 = 15y$ (e) $x^2 + 2 = 4x$

(c) $3a^2 + 8a = 3$ (f) $27x^2 = 42x + 49$

4. Un triángulo tiene lados de $x - 7$ pulgadas, x pulgadas, y $x + 1$ pulgadas. ¿Para qué valores de x será éste un triángulo rectángulo?

5. Demuestra que $2x - 1$ es un factor de

$$6x^3 - 3x^2 - 2x + 1,$$

o que no lo es.

6. Para cada entero x, muestra que $(x + 5)^2 - x^2$ es divisible por 5.

7. Determina una expresión de x en términos de a y b, si $ax - a^2 = ab - bx$.

8. Si $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + a) = x^4 + 8x^3 + 23x^2 + 22x + 12$, donde a es un entero, determina el valor de a.

9. Simplifica:

(a) $\frac{3}{x^2 - 4x - 5} + \frac{4}{x^2 + x}$

(b) $\frac{z - 3}{2z} - \frac{z + 5}{z^2}$

(c) $\frac{3a}{a - b} \cdot \frac{b - a}{6a^2}$

(d) $\frac{1 + \frac{1}{x}}{2 + \frac{2}{x}}$

(e) $\frac{a^2 - 11a - 26}{a^2 - 5a + 6}$

10. Explica cuándo $\frac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 2)}$ es igual a $(x - 1)$.

11. Considera el conjunto de los polinomios sobre los enteros pares. ¿Es este conjunto cerrado respecto de la suma? ¿Es este conjunto cerrado respecto de la multiplicación?

12. Determina los enteros a, b, y c en la siguiente ecuación:

$(bx + 2)(3x - a) = 6x^2 - 5x - c.$

13. Determina por cuál polinomio debe multiplicarse $x + 2$ para obtener el polinomio

$$x^5 + 2x^4 - x^2 + 5x + 14.$$

Capítulo 13

CONJUNTO DE VALIDEZ DE ENUNCIADOS ABIERTOS

En este capítulo, consideramos con más detenimiento el proceso de determinar el conjunto de validez de un enunciado. Mediante una teoría rigurosa de las ecuaciones equivalentes y de las desigualdades equivalentes, podremos decidir cuándo un nuevo enunciado tiene el mismo conjunto de validez que el enunciado original sin tener que verificar éste.

Información abundante sobre enunciados abiertos y enunciados equivalentes se encontrará en <u>Studies in Mathematics</u>, Vol. III, páginas 6.8-6.16.

13-1. Enunciados abiertos equivalentes

La cuestión importante sobre la cual se insistirá aquí es la de comprender bien <u>por qué</u> ciertos enunciados son equivalentes. Si los estudiantes tienen alguna dificultad con la técnica de decidir <u>qué hacer</u> con un enunciado para obtener un enunciado más sencillo, se les puede señalar la manera de "deshacer" una suma indicada añadiendo el opuesto (como al sumar $(-x - 7)$ en el ejemplo 1), y la manera de "deshacer" un producto indicado multiplicando por el recíproco (como al multiplicar por $\frac{1}{2}$ en el ejemplo 1).

<u>Respuestas al Conjunto de problemas 13-1a</u>; páginas 385-388:

1. En las partes (a), (b), (c), (d), (g), (h), (i), (k), (m), los enunciados son equivalentes.

   (a) $2s = 12$ $\qquad\qquad$ $s = 6$

   $\frac{1}{2}(2s) = \frac{1}{2} \cdot 12$ $\qquad\qquad$ $2s = 2 \cdot 6$

   $s = 6$ $\qquad\qquad$ $2s = 12$

(b) $5s = 3s + 12$ $\qquad$ $2s = 12$

$5s - 3s = (3s + 12) - 3s$ $\qquad$ $2s + 3s = 12 + 3s$

$2s = 12$ $\qquad$ $5s = 3s + 12$

(c) $5y - 4 = 3y + 8$ $\qquad$ $y = 6$

$5y - 3y = 8 + 4$ $\qquad$ $2y = 12$

$2y = 12$ $\qquad$ $5y - 3y = 8 + 4$

$y = 6$ $\qquad$ $5y - 4 = 3y + 8$

(d) $7s - 5s = 12$ $\qquad$ $s = 6$

$2s = 12$ $\qquad$ $2s = 12$

$s = 6$ $\qquad$ $7s - 5s = 12$

(e) No son equivalentes, pues 2 es un miembro del conjunto de validez de $x^2 = 4$, pero no de $2x^2 + 4 = 10$.

(f) No son equivalentes, pues $\frac{7}{2}$ es un miembro del conjunto de validez de $3x + 9 - 2x = 7x - 12$, pero no de $\frac{7}{3} = x$.

(g) $x^2 = x - 1$ $\qquad$ $1 = x - x^2$

$x^2 + 1 = x$ $\qquad$ $x^2 + 1 = x$

$1 = x - x^2$ $\qquad$ $x^2 = x - 1$

(h) $\frac{y - 1}{|y| + 2} = 3$ $\qquad$ $y - 1 = 3(|y| + 2)$

$\frac{y - 1}{|y| + 2}(|y| + 2) = 3(|y| + 2)$ $\qquad$ $(y-1)\frac{1}{|y+2|} = 3(|y| + 2)\frac{1}{|y| + 2}$

$y - 1 = 3(|y| + 2)$ $\qquad$ $\frac{y - 1}{|y| + 2} = 3$

(i) $x^2 + 1 = 2x$ $\qquad$ $(x - 1)^2 = 0$

$x^2 - 2x + 1 = 0$ $\qquad$ $x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x - 1)^2 = 0$ $\qquad$ $x^2 + 1 = 2x$

(j) No son equivalentes, pues 1 es un miembro del conjunto de validez de $x^2 - 1 = x - 1$, pero no de $x + 1 = 1$.

(k) $\frac{x^2+5}{x^2+5} = 0$ $\qquad$ $x^2 + 5 = 0$

$\frac{x^2+5}{x^2+5}(x^2+5) = 0(x^2+5)$ $\qquad$ $(x^2+5)\frac{1}{x^2+5} = 0\frac{1}{x^2+5}$

$x^2 + 5 = 0$ $\qquad$ $\frac{x^2+5}{x^2+5} = 0$

($x^2 + 5$ es un número real distinto de cero para todo valor de x.)

(l) No son equivalentes, pues 0 es un miembro del conjunto de validez de $\frac{x^2+5}{x^2+5} = 1$, pero no de $x^2 + 5 = 1$.

(m) No son equivalentes, pues -1 es un miembro del conjunto de validez de $|v + 1| = 0$, pero no de $v^2 + 1 = 0$.

2. Los enunciados son equivalentes en (a), (b), (c) y (f).

3. (a) $y = 12$ $\qquad$ (d) $s = \frac{1}{15}$

(b) $x = 20$ $\qquad$ (e) $x = 2$

(c) $t = -1$ $\qquad$ (f) $y = 1$

4. (a) $11t + 21 = 32$

$11t = 11$

$t = 1$

El conjunto de validez es $\{1\}$.

(b) $\frac{4}{3} - \frac{y}{5} = \frac{1}{2}$

$(\frac{4}{3} - \frac{y}{5})30 = \frac{1}{2} \cdot 30$

$40 - 6y = 15$

$40 - 15 = 6y$

$25 = 6y$

$\frac{25}{6} = y$

El conjunto de validez és $\{\frac{25}{6}\}$.

(c) $\{80\}$

(d) $\{0\}$

(e) $\{6\}$

(f) $\emptyset$

(g) $\{-5\}$

(h) $\{\frac{3}{2}\}$

(i) $\emptyset$

(j) $y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 = y^4 - y^3 + y^2 - y + 1$

$2y^3 + 2y = 0$

$2y(y^2 + 1) = 0$

$2 = 0$ ó $y = 0$ ó $y^2 + 1 = 0$

Puesto que 2 y $y^2 + 1$ no pueden nunca ser 0, el conjunto de validez es $\{0\}$.

(k) $x^2 + 3x = x - \frac{x^2}{2}$

$2x^2 + 6x = 2x - x^2$

$3x^2 + 4x = 0$

$x(3x + 4) = 0$

$x = 0$ ó $3x + 4 = 0$

$x = 0$ ó $x = -\frac{4}{3}$

El conjunto de validez es $\{0, -\frac{4}{3}\}$.

5. Cualquier simplificación algebraica es admisible si:

   (1) no cambia el dominio de la variable,

   (2) sustituye una frase por otra que es un nombre del mismo número, para todos los valores admisibles de la variable.

   Tales simplificaciones incluyen la combinación de términos y la factorización, como en los dos primeros ejemplos. Por otra parte, $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$ y $x + 2 = 4$ no son equivalentes. Sus dominios no son los mismos.

6. (a) Equivalentes; combinación de términos en el miembro de la izquierda.

   (b) Equivalentes; factorización del miembro de la izquierda.

   (c) No son equivalentes, pues 0 es un miembro del conjunto de validez de $3x^2 = 6x$, pero no de $3x = 6$.

   (d) Equivalentes; suma de un número real $(-6x)$ a ambos miembros.

   (e) Equivalentes; combinación de términos en ambos miembros.

   (f) Equivalentes; si $x = y$, entonces $y = x$.

   (g) No son equivalentes, pues 0 es un miembro del conjunto de validez de $2 = y + 2$, pero no de $2 = \frac{y^2 + 2y}{y}$.

   (h) Equivalentes; aplicación de la propiedad distributiva y combinación de términos en el miembro de la izquierda.

<u>Respuestas al Conjunto de problemas 13-1b</u>; páginas 390-392:

1.

	Un número real para todo valor de la variable	Un número real distinto de cero para todo valor de la variable
(a)	Sí	No
(b)	No	No
(c)	No	No
(d)	No	No
(e)	Sí	No
(f)	Sí	Sí
(g)	Sí	No
(h)	Sí	Sí
(i)	Sí	Sí
(j)	Sí	Sí
(k)	No	No
(l)	No	No

En la parte (j), puede parecer que no hay variable comprendida. En algunos contextos, sin embargo, -3 puede considerarse como una expresión en x tal como $-3 + 0x$. Si tenemos presente dicha variable, es perfectamente cierto que -3 sigue siendo un número real distinto de cero, no importa el valor que se asigne a la variable.

2. (a) $\frac{y}{y-2} = 3$ y $y \neq 2$

$y = 3(y - 2)$ y $y \neq 2$

$y = 3y - 6$ y $y \neq 2$

$6 = 2y$ y $y \neq 2$

$3 = y$ y $y \neq 2$

El conjunto de validez es $\{3\}$.

(b) $\frac{x}{x^2 + 1} = x$

$x = x(x^2 + 1)$

$x = x^3 + x$

$0 = x^3$

$0 = x$

El conjunto de validez es $\{0\}$.
(Puesto que $x^2 + 1$ es un número real distinto de cero para todos los valores de x, no es necesario restringir el dominio de x.)

(c) $\frac{1}{x} + 3 = \frac{2}{x}$ y $x \neq 0$

$1 + 3x = 2$ y $x \neq 0$

$3x = 1$ y $x \neq 0$

$x = \frac{1}{3}$ y $x \neq 0$

El conjunto de validez es $\{\frac{1}{3}\}$.

(d) $\frac{1}{x-2} + \frac{x-3}{x-2} = 2$ $\quad$ y $\quad x \neq 2$

$1 + (x - 3) = 2(x - 2)$ $\quad$ y $\quad x \neq 2$

$x - 2 = 2x - 4$ $\quad$ y $\quad x \neq 2$

$2 = x$ $\quad$ y $\quad x \neq 2$

El conjunto de validez es $\emptyset$.

(e) $-\frac{1}{x+1} + 1 = \frac{x}{x+1}$ $\quad$ y $\quad x \neq -1$

$-1 + (x + 1) = x$ $\quad$ y $\quad x \neq -1$

$x = x$ $\quad$ y $\quad x \neq -1$

El conjunto de validez es el conjunto de todos los números reales, excepto -1.

(f) $x(x^2 + 1) = 2x^2 + 2$

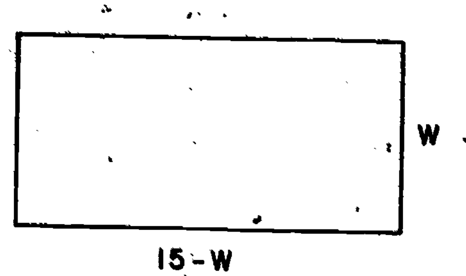
$x(x^2 + 1) = 2(x^2 + 1)$

$x = 2$

El conjunto de validez es $\{2\}$.

(Se nos permitió multiplicar ambos miembros por $\frac{1}{x^2+1}$ y obtener así con seguridad un enunciado equivalente, porque $\frac{1}{x^2+1}$ es un número real distinto de cero para todos los valores de x.)

3. Si el rectángulo tiene w pulgadas de ancho, entonces tiene 15 - w pulgadas de largo, y



$w(15 - w) = 54$

$15w - w^2 = 54$

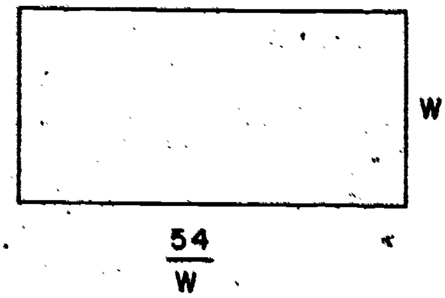
$0 = w^2 - 15w + 54$

$0 = (w - 9)(w - 6)$

$w - 9 = 0$ ó $w - 6 = 0$

$w = 9$ ó $w = 6$

ó Si el rectángulo tiene w pulgadas de ancho, tiene $\frac{54}{w}$ pulgadas de largo, y



$$2w + 2\cdot\frac{54}{w} = 30 \quad \underline{y} \quad w \neq 0$$

$$2w^2 + 108 = 30w \quad \underline{y} \quad w \neq 0$$

$$2w^2 - 30w + 108 = 0 \quad \underline{y} \quad w \neq 0$$

$$2(w - 9)(w - 6) = 0 \quad \underline{y} \quad w \neq 0$$

$$2 = 0 \text{ ó } w - 9 = 0, \text{ ó } w - 6 = 0 \quad \underline{y} \quad w \neq 0.$$

El conjunto de validez es $\{6,9\}$.
El rectángulo tiene 6 pulgadas de ancho y 9 pulgadas de largo. (Obsérvese que no podemos usar el valor $w = 9$, puesto que ya designamos con w el ancho, o lado más corto. El largo, 9 pulgadas, procede de $15 - w$ en el primer método, y de $\frac{54}{w}$ en el segundo.)

4. Si el primer entero es i, entonces

$$i^2 + (i + 1)^2 + (i + 2)^2 = 61$$

$$i^2 + i^2 + 2i + 1 + i^2 + 4i + 4 = 61$$

$$3i^2 + 6i - 56 = 0$$

Puesto que el miembro de la izquierda no es factorizable sobre los enteros, no hay tres enteros consecutivos cuya suma de cuadrados sea 61.

5. Si n es uno de los números, entonces el otro número es $8 - n$, $\underline{y}$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{8 - n} = \frac{2}{3} \quad \underline{y} \quad n \neq 8, \quad n \neq 0$$

$$3(8 - n) + 3n = 2n(8 - n) \quad \underline{y} \quad n \neq 8, \quad n \neq 0$$

$$24 - 3n + 3n = 16n - 2n^2 \quad \underline{y} \quad n \neq 8, \quad n \neq 0$$

$2n^2 - 16n + 24 = 0$ $\quad$ y $n \neq 8, \; n \neq 0$

$n^2 - 8n + 12 = 0$ $\quad$ y $n \neq 8, \; n \neq 0$

$(n - 6)(n - 2) = 0$ $\quad$ y $n \neq 8, \; n \neq 0$

$n - 6 = 0$ ó $n - 2 = 0$ $\quad$ y $n \neq 8, \; n \neq 0$

$n = 6$ ó $n = 2$ $\quad$ y $n \neq 8, \; n \neq 0$

El conjunto de validez es $\{6,2\}$.

Un número es 6 y el otro es $8 - 6$, ó sea, 2.

6. Si había g niñas, entonces había $(2600 - g)$ niños,

$\frac{2600 - g}{g} = \frac{7}{6}$ $\quad$ y $g \neq 0$

$6(2600 - g) = 7g$ $\quad$ $g \neq 0$

$15600 - 6g = 7g$ $\quad$ $g \neq 0$

$15600 = 13g$ $\quad$ $g \neq 0$

$1200 = g$ $\quad$ $g \neq 0$

El conjunto de validez es $\{1200\}$.

Había 1200 niñas.

Para algunos propósitos, conviene saber que si dos números están en la razón $\frac{a}{b}$, dichos números pueden representarse por ax y bx, donde x es un número positivo, puesto que $\frac{ax}{bx} = \frac{a}{b}$, si $x \neq 0$ y $b \neq 0$.

En este problema, entonces, podríamos decir:

Si había $7x$ niñas, entonces tenía que haber $6x$ niños, (puesto que $\frac{7x}{6x} = \frac{7}{6}$, $x \neq 0$), y $7x + 6x = 2600$.

Este tipo de problema no aparece con suficiente frecuencia en este curso para justificar mayor atención a esta técnica. Si se quiere, se puede hacer mención de ella.

7. $3x + 18 = y + 23$

es equivalente a

$$3x + 18 + (-23) = y + 23 + (-23)$$

$$3x - 5 = y$$

$$y = 3x - 5.$$

Por lo tanto, los dos conjuntos de soluciones (cada solución es un par) son idénticos.

8. A continuación aparece una cadena de enunciados equivalentes:

$$4x - \frac{2}{3}y = 6$$

$$12x - 2y = 18$$

$$12x - 18 = 2y$$

$$6x - 9 = y$$

$$y = 6x - 9$$

9. $\frac{x}{2x - 5} = \frac{4}{6}$

Los lados tienen longitudes de 10 y 15.

10. Si se usan k cuartillos de yerbicida, entonces se usan $40 - k$ cuartillos de agua.

$$\frac{k}{40 - k} = \frac{3}{17}$$

Deben usarse 6 cuartillos de yerbicida.

13-2. Desigualdades equivalentes

Justamente como para las ecuaciones, lo que debemos averiguar al establecer que dos desigualdades son equivalentes es si las operaciones efectuadas pueden invertirse para llevarnos de la desigualdad más sencilla obtenida a la dada. Si se pueden invertir, sabemos que el conjunto de validez de la desigualdad original es un subconjunto del conjunto de validez de la nueva desigualdad, y que el conjunto de validez de la nueva es un subconjunto del de la original. Los dos conjuntos de validez son, por lo tanto, idénticos.

Página 392. Al igual que con las ecuaciones, se puede querer señalar a los estudiantes que las desigualdades pueden simplificarse, si sabemos la manera de "deshacer" algunas de las operaciones indicadas. Sumas indicadas pueden "deshacerse" sumando el opuesto y productos indicados multiplicando por el recíproco.

Página 393. En el ejemplo 1 y en el ejemplo 2, el conjunto de validez de la desigualdad final es el conjunto de validez de la desigualdad original, porque solamente se utilizaron operaciones que producen desigualdades equivalentes. Por lo tanto, no es necesaria la verificación.

Respuestas al Conjunto de problemas 13-2; páginas 394-395:

1. (a) $x + 12 < 39$

$x < 27$

El conjunto de validez es el conjunto de todos los números reales menores que 27.

(b) $\frac{5}{7}x < 36 - x$

$\frac{12}{7}x < 36$

$x < 36 \cdot \frac{7}{12}$

$x < 21$

El conjunto de validez es el conjunto de todos los números reales menores que 21.

(c) El conjunto de todos los números reales mayores que $\sqrt{2}$.

(d) El conjunto de todos los números reales menores que $\sqrt{3}$.

(e) El conjunto de todos los números reales mayores que 2.

(f) El conjunto de todos los números reales menores que 12.

(g) El conjunto de todos los números reales.

(h) $\emptyset$

(i) El conjunto de todos los números reales.

2. (a) $1 < 4x + 1$ y $4x + 1 < 2$

$0 < 4x$ y $4x < 1$

$0 < x$ y $x < \frac{1}{4}$

El conjunto de validez es el conjunto de todos los números reales entre 0 y $\frac{1}{4}$.

(b) $4t - 4 < 0$ y $1 - 3t < 0$

$4t < 4$ y $1 < 3t$

$t < 1$ y $\frac{1}{3} < t$

El conjunto de validez es el conjunto de todos los números reales entre $\frac{1}{3}$ y 1.

(c) El conjunto de todos los números reales entre $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$.

(d) El conjunto de todos los números reales menores que $-\frac{1}{2}$ o mayores que $\frac{1}{2}$.

(e) $|x - 1| < 2$

En la recta numérica, la distancia entre x y 1 debe ser menor que 2. Por lo tanto,

$$1 - 2 < x < 1 + 2$$

$$-1 < x < 3$$

El conjunto de todos los números reales entre -1 y 3.

(f) $|2t| < 1$

$2\,|t| < 1$

$|t| < \frac{1}{2}$

En la recta numérica, la distancia entre t y el origen debe ser menor que $\frac{1}{2}$.

El conjunto de todos los números reales entre $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$.

(g) $|x + 2| < \frac{1}{2}$

$|x - (-2)| < \frac{1}{2}$

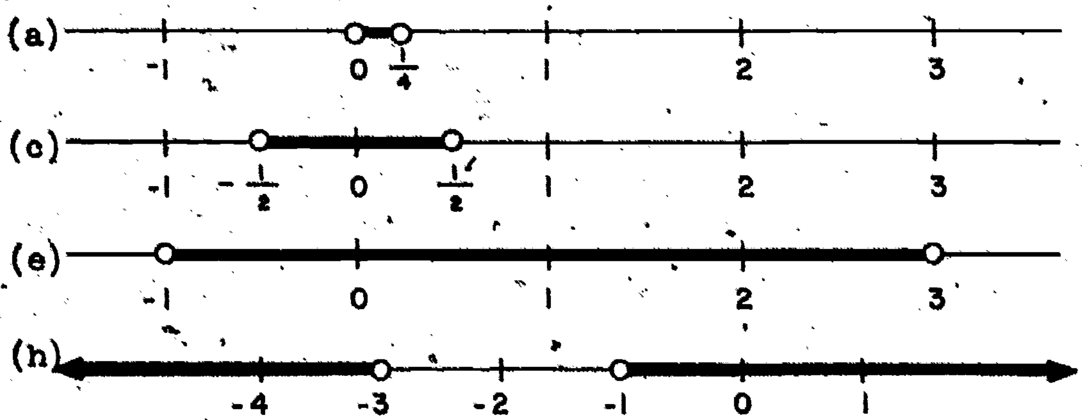
El conjunto de todos los números reales entre $-\frac{5}{2}$ y $-\frac{3}{2}$.

(h) $|y + 2| > 1$

$|y - (-2)| > 1$

El conjunto de todos los números reales menores que -3 o mayores que -1.

3.



4. (c) y (f) son números reales negativos para todo valor de x. Véase la nota para el problema 1(j) del Conjunto de problemas 13-1b.

5. $3y - x + 7 < 0$

$3y < x - 7$

$y < \frac{1}{3}(x - 7)$

Cuando $x = 1$, $y < \frac{1}{3}(1 - 7)$

$y < -2$

El conjunto de validez es el conjunto de todos los números reales menores que -2.

$3y - x + 7 < 0$

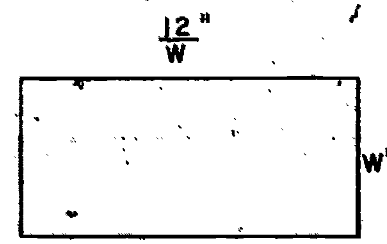
$-x < -3y - 7$

$x > 3y + 7$

Cuando $y = -2$, $x > 3(-2) + 7$

$x > 1$.

El conjunto de validez es el conjunto de todos los números reales mayores que 1.



6. Si el rectángulo tiene w pulgadas de ancho, tiene $\frac{12}{w}$ pulgadas de largo, puesto que el área es de 12 pulgadas cuadradas. Entonces $\frac{12}{w} < 5$. Como, por la naturaleza del problema, $w > 0$,

$$12 < 5w$$

$$\frac{12}{5} < w$$

La anchura del rectángulo es mayor que $2\frac{2}{5}$ pulgadas.

7. Si n es el número negativo, entonces

$$n < \frac{1}{n} \quad \underline{y} \quad n < 0$$

$$n^2 > 1 \quad \underline{y} \quad n < 0$$

$$n < -1$$

El conjunto de validez es el conjunto de todos los números reales menores que -1.

En este momento, los estudiantes no tienen un método formal para resolver $n^2 > 1$. Pueden, sin embargo, recurrir al método de idear una conjetura y verificarla con la ayuda de la recta numérica. Este es siempre un método útil, cuando no tenemos otro mejor. Más adelante, en la sección 13-6, el estudiante puede dedicarse más a fondo a resolver enunciados tales como $n^2 - 1 > 0$.

13-3. <u>Ecuaciones que contienen expresiones factorizadas</u>

<u>Página 395</u>. Si $(x - 3)(x + 2) = 0$, entonces $x - 3 = 0$ ó $x + 2 = 0$. Si $x - 3 = 0$ ó $x + 2 = 0$, entonces $(x - 3)(x + 2) = 0$. Nuevamente, el hecho de que este proceso es invertible nos permite saber que

$$(x - 3)(x + 2) = 0$$

y $\quad x - 3 = 0$ ó $x + 2 = 0$

son enunciados equivalentes.

Si hay varios factores como en $abcd = 0$, entonces el enunciado equivalente es

$a = 0$ ó $b = 0$ ó $c = 0$ ó $d = 0$.

El conjunto de validez de $(x + 1)(x - 3)(2x + 3)(3x - 2) = 0$ es $\{-1, 3, -\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\}$.

Obsérvese lo que se puede decir acerca de una ecuación como

$$3x(x + 2)(x - 3) = 0.$$

Un enunciado equivalente es

$3 = 0$ ó $x = 0$ ó $x + 2 = 0$ ó $x - 3 = 0$.

Puesto que el conjunto de validez de $3 = 0$ es $\emptyset$, el conjunto de validez de la ecuación dada es $\{0, -2, 3\}$.

Respuestas al Conjunto de problemas 13-3a; páginas 396-397:

1. (a) $(a + 2)(a - 5) = 0$

$a + 2 = 0$ ó $a - 5 = 0$

$a = -2$ ó $a = 5$

El conjunto de validez es $\{-2,5\}$.

(b) $\{-3, -1, 2, 0\}$

(c) $\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$

2. (a) $x^2 - x - 2 = 0$

$(x - 2)(x + 1) = 0$

$x - 2 = 0$ ó $x + 1 = 0$

$x = 2$ ó $x = -1$

El conjunto de validez es $\{2, -1\}$.

(b) $\{11, -11\}$

(c) $\{1, -1, -3, -2\}$

(d) $\{\sqrt{5}, -\sqrt{5}, 2\sqrt{6}, -2\sqrt{6}\}$

(e) $\{0, 5, -5\}$

(f) $\{-\frac{1}{2}, 3\}$

(g) $\{0,1\}$

(h) $\emptyset$

(i) $\{6,1\}$

(j) $\{2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}\}$ (V. el problema 3 en el Conjunto de problemas 12-6)

(k) $\{-3 + \sqrt{10}, -3 - \sqrt{10}\}$

3. Suponemos que 2 es una solución.

   x no puede ser negativo o cero.

   Si $x > 0$ y $x < 2$,

   $$x^2 < 2x,$$

   y.

   $$2x < 4,$$

   de lo cual se deduce que $x^2 < 4$, por la propiedad transitiva de la ordenación.

   Si $x^2 < 2x$ y $x > 0$,

   $$x^3 < 2x^2,$$

   y si $x^2 < 4$,

   $$2x^2 < 8.$$

   Por tanto, $x^3 < 8$, en virtud de la propiedad transitiva de la ordenación. Esto demuestra que ningún número menor que 2 es una solución.

   De la misma manera, ningún número mayor que 2 es una solución. Puesto que $2^3 = 8$, el conjunto de validez es $\{2\}$.

   Sería suficiente si el estudiante argumentara intuitivamente que si $x < 2$, $x^3 < 8$, y si $x > 2$, $x^3 > 8$.

4. $$x^4 = 1$$
   $$(x^2)^2 - 1 = 0$$
   $$(x^2 + 1)(x^2 - 1) = 0$$
   $$(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1) = 0$$
   $$x^2 + 1 = 0 \quad ó \quad x + 1 = 0 \quad ó \quad x - 1 = 0$$
   $$x = -1 \quad ó \quad x = 1$$

   El conjunto de validez es $\{-1, 1\}$.

5. $(x - 1)(x + 1)x$

6. $(x - 3)(x - 1)(x + 1) = 0$ y $|x - 2| < 2$

   $(x - 3 = 0$ ó $x - 1 = 0$ ó $x + 1 = 0)$ y

   $(0 < x < 4)$

   $(x = 3$ ó $x = 1$ ó $x = -1)$ y $(0 < x < 4)$

   El conjunto de validez es $\{3, 1\}$.

Página 397. Hay ocasiones en que estamos tentados, y a veces hasta forzados, a efectuar operaciones con enunciados que no necesariamente van a dar enunciados equivalentes.

Una de esas tentaciones es eliminar un factor que vemos en cada término, multiplicando por su recíproco. Si el recíproco no es un número real--si su denominador es cero para algún x, o si hay una raíz cuadrada indicada--esto puede producir dificultad. En el ejemplo dado, la ecuación original tiene el conjunto de validez {7, 1, -1}, mientras que la ecuación obtenida mediante la eliminación del factor $x^2 - 1$ tiene el conjunto de validez {7}.

Página 398. La generalización indicada es de interés y debe estimularse a los estudiantes a seguir las distintas etapas con atención. En la práctica, sin embargo, probablemente sea más conveniente proceder como se hizo en el ejemplo anterior, y no aplicar precisamente la conclusión de la generalización.

Respuestas al Conjunto de problemas 13-3b; página 398:

1. (a)

$$x(2x - 5) = 7x$$
$$x(2x - 5) - 7x = 0$$
$$x(2x - 5 - 7) = 0$$
$$x(2x - 12) = 0$$
$$x = 0 \quad ó \quad 2x - 12 = 0$$
$$x = 0 \quad ó \quad x = 6$$

El conjunto de validez es {0,6}.

(b) {-3,2,-2}

(c) {2,-3}

(d) {2,-2,0}

(e) {5,3} (Obsérvese que cada miembro de la ecuación original puede factorizarse.)

2. No, pues 1 es un miembro del conjunto de validez de

$$(x - 1)x^2 = (x - 1)\ 3,$$

pero 1 no es un miembro del conjunto de validez de $x^2 = 3$. Puesto que $x - 1$ es 0 cuando $x = 1$, no debemos esperar que los dos enunciados sean necesariamente equivalentes.

3. El conjunto de validez de $t^2 = 1$ es $\{1,-1\}$.
El conjunto de validez de $(t + 1)t^2 = (t + 1)\cdot 1$ es $\{1,-1\}$.
En el problema 2, se amplió el conjunto de validez al multiplicar por $(x - 1)$.
En el problema 3, no se amplió el conjunto de validez al multiplicar por $(t + 1)$, porque (-1), el número que hace a $t + 1$ igual a 0, es ya un miembro del conjunto de validez de $t^2 = 1$.

13-4. Ecuaciones fraccionarias

Usualmente, para simplificar una ecuación fraccionaria, multiplicamos por una expresión que es un producto de factores de los denominadores de la ecuación. Esta expresión puede no ser un número real distinto de cero, y ya se nos ha advertido de que esto puede no dar una ecuación equivalente. Encontramos, sin embargo, que podemos evitar la dificultad, si tenemos el cuidado de excluir los valores de la variable que hacen el multiplicador cero; de modo que, debemos tener el cuidado de excluir valores de la variable para los cuales alguno de los denominadores toma el valor cero. Así, en

$\frac{1}{x} = \frac{1}{1 - x}$ exigimos que $x \neq 0$ y $x \neq 1$.

Páginas 399-400. El enunciado $\frac{x + 1}{x - 2} = 0$ es equivalente al enunciado "$x + 1 = 0$ y $x - 2 \neq 0$", ó a "$x = -1$ y $x \neq 2$". El conjunto de validez del último enunciado, y, por tanto, también del primero, es $\{-1\}$.

El polinomio conveniente es $x(1 - x)$

El ejemplo que resulta equivalente a "$x \neq 2$ y $x = 2$" tiene $\emptyset$, desde luego, como su conjunto de validez.

En el Conjunto de problemas 13-4, los problemas 10 y 11 son de particular interés e importancia, porque ponen de relieve algunas de las cosas extraordinarias que pueden suceder. Demuestran por qué es necesario tener presente el dominio de la variable.

<u>Respuestas al Conjunto de problemas 13-4</u>; páginas 401-402:

1. $(\frac{2}{x} - \frac{3}{x})x = 10x$ y $x \neq 0$

   $2 - 3 = 10x$ y $x \neq 0$

   $-\frac{1}{10} = x$ y $x \neq 0$

   Solución: $-\frac{1}{10}$.

2. $(\frac{x}{2} - \frac{x}{3})6 = 10 \cdot 6$

   $3x - 2x = 60$

   $x = 60$

   Solución: 60.

3. $(x + \frac{1}{x})x = 2x$ y $x \neq 0$

   $x^2 + 1 = 2x$ y $x \neq 0$

   $x^2 - 2x + 1 = 0$ y $x \neq 0$

   $(x - 1)^2 = 0$ y $x \neq 0$

   $(x - 1 = 0$ ó $x - 1 = 0)$ y $(x \neq 0)$

   $x = 1$ y $x \neq 0$

   El conjunto de validez es $\{1\}$.

4. $\{2, -1\}$
5. $\{\frac{3}{2}\}$
6. $\{-\frac{3}{32}\}$

7. $\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y - 4}\right)y(y - 4) = 1 \cdot y(y - 4)$ $\underline{y}$ $y \neq 0$ $\underline{y}$ $y \neq 4$

$(y - 4) - y = y^2 - 4y$ $\underline{y}$ $y \neq 0$ $\underline{y}$ $y \neq 4$

$0 = y^2 - 4y + 4$ $\underline{y}$ $y \neq 0$ $\underline{y}$ $y \neq 4$

$0 = (y - 2)(y - 2)$ $\underline{y}$ $y \neq 0$ $\underline{y}$ $y \neq 4$

$y = 2$ $\underline{y}$ $y \neq 0$ $\underline{y}$ $y \neq 4$

El conjunto de validez es $\{2\}$.

8. $\emptyset$

9. $\{-\frac{1}{3}, -3\}$

10. $\left(\frac{-2}{x - 2} + \frac{x}{x - 2}\right)(x - 2) = 1 \cdot (x - 2)$ $\underline{y}$ $x \neq 2$

$-2 + x = x - 2$ $\underline{y}$ $x \neq 2$

$-2 = -2$ $\underline{y}$ $x \neq 2$

El conjunto de validez consiste en todos los números del conjunto de validez de $-2 = -2$ que no son iguales a 2. El conjunto de validez de $-2 = -2$ es el conjunto de todos los números reales. El conjunto de validez pedido consiste en todos los números reales, excepto 2.

11. $\left(\frac{x}{x + 1}\right)(x^2 - 1)(x + 1) = 0$ $\underline{y}$ $x + 1 \neq 0$

$x(x^2 - 1) = 0$ $\underline{y}$ $x + 1 \neq 0$

$x(x - 1)(x + 1) = 0$ $\underline{y}$ $x \neq -1$

$(x = 0$ ó $x = 1$ ó $x = -1)$ $\underline{y}$ $x \neq -1$

El conjunto de validez es $\{0,1\}$.

12. $\{0\}$

13. $\emptyset$

14. $\{0\}$

*15. $\{-\frac{1}{3}\}$

*16. $\{1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\}$ (El método del problema 3 del Conjunto de problemas 12-6 se necesita aquí.)

17. Si n es el número,

$$n + \frac{1}{n} = -2 \quad \text{y} \quad n \neq 0$$
$$n^2 + 1 = -2n \qquad n \neq 0$$
$$n^2 + 2n + 1 = 0 \qquad n \neq 0$$
$$(n + 1)^2 = 0 \qquad n \neq 0$$
$$n = -1 \qquad n \neq 0$$

El número es -1.

18. (a) En una hora la imprenta A puede hacer $\frac{1}{3}$ de la tarea.

En una hora la imprenta B puede hacer $\frac{1}{2}$ de la tarea.

En h horas la imprenta A puede hacer $\frac{h}{3}$ de la tarea.

En h horas la imprenta B puede hacer $\frac{h}{2}$ de la tarea.

$$\frac{h}{3} + \frac{h}{2} = 1$$

(El 1 representa una tarea completa, que es igual a la suma de las fracciones de la tarea.)

$$\left(\frac{h}{3} + \frac{h}{2}\right)6 = 6$$
$$2h + 3h = 6$$
$$5h = 6$$
$$h = \frac{6}{5}$$

Las imprentas A y B pueden ejecutar la tarea juntas en $1\frac{1}{5}$ horas, o sea, en 1 hora con 12 minutos.

(b) Si la imprenta C emplea c horas en hacer sola la tarea, entonces en una hora la imprenta C puede hacer $\frac{1}{c}$ de la tarea, y en 2 horas puede hacer $\frac{2}{c}$ de la tarea, mientras que en 2 horas la imprenta A puede hacer $\frac{2}{3}$ de la tarea.

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{c} = 1 \quad \text{y} \quad c \neq 0$$
$$c = 6$$

La imprenta C sola emplearía 6 horas para realizar la tarea.

(c) Si la imprenta A trabaja a horas después que la imprenta B se para, entonces

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{a}{3} = 1$$

$$a = \frac{1}{2}.$$

La imprenta A emplea $\frac{1}{2}$ hora para terminar el trabajo.

19. (a) $A = \frac{1}{2}bh$

$2A = bh$

$\frac{2A}{b} = h$ y $b \neq 0$

(b) $T = \frac{D}{R}$ y $R \neq 0$

$TR = D$ y $R \neq 0$

$R = \frac{D}{T}$ y $T \neq 0,\ R \neq 0$

(c) $A = \frac{1}{2}h(x + y)$

$2A = h(x + y)$

$\frac{2A}{x + y} = h$ y $x + y \neq 0$

(d) $S = \frac{n}{2}(a + 1)$

$2S = na + n1$

$2S - na = n1$

$\frac{2S - na}{n} = 1$ y $n \neq 0$

ó $S = \frac{n}{2}(a + 1)$

$\frac{2S}{n} = a + 1$ y $n \neq 0$

$\frac{2S}{n} - a = 1$ y $n \neq 0$

(e) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ y $a \neq 0, \quad b \neq 0$

$(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})ab = ab$ y $a \neq 0, \quad b \neq 0$

$b + a = ab$ y $a \neq 0, \quad b \neq 0$

$a = ab - b$ y $a \neq 0, \quad b \neq 0$

$a = (a - 1)b$ y $a \neq 0, \quad b \neq 0$

$\frac{a}{a - 1} = b$ y $a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad a \neq 1.$

13-5. Elevación al cuadrado

Si $a = b$, entonces a y b son nombres para el mismo número. Si ese número se eleva al cuadrado, a^2 y b^2 son nombres para el nuevo número, y $a^2 = b^2$. Algunas veces se prefiere una manera más formal de decir esto: Si $a = b$, entonces $a^2 = ab$ y $ab = b^2$; así, $a^2 = b^2$, por la propiedad transitiva de la igualdad.

Esta operación no es invertible, porque hay dos raíces cuadradas de a^2 y de b^2. De modo que podremos decir que $(-3)^2 = (3)^2$, a pesar de que $-3 \neq 3$.

He aquí una cadena de enunciados equivalentes:

$a^2 = b^2$	
$a^2 - b^2 = 0$	Propiedad aditiva de la igualdad
$(a - b)(a + b) = 0$	Factorización
$a - b = 0$ ó $a + b = 0$	$xy = 0$ si y solamente si $x = 0$ ó $y = 0$.
$a = b$ ó $a = -b$	Propiedad aditiva de la igualdad

Es evidente que al cuadrar ambos miembros de una ecuación, en general no se obtiene una ecuación equivalente. Y, sin embargo, al resolver ciertas ecuaciones que contienen raíces cuadradas o valores absolutos, necesitamos cuadrar ambos miembros. Al hacerlo así, entonces, hay que tener muy presente que esperamos encontrar un conjunto de validez más amplio para la nueva ecuación. Debemos, por tanto, comprobar los elementos de este conjunto de validez para determinar cuáles realmente satisfacen

3. $\sqrt{x+1} - 1 = x$

$\sqrt{x+1} = x + 1$

$x + 1 = x^2 + 2x + 1$

$0 = x^2 + x$

$0 = x(x + 1)$

$x = 0$ ó $x = -1$

Si $x = 0$, el miembro de la izquierda es $\sqrt{0+1} - 1 = 0$,
y el miembro de la derecha es 0.
Si $x = -1$, el miembro de la izquierda es $\sqrt{-1+1} - 1 = -1$,
y el miembro de la derecha es -1.
El conjunto de validez es $\{0, -1\}$.

4. $\sqrt{4x} - x + 3 = 0$

$\sqrt{4x} = x - 3$

$4x = x^2 - 6x + 9$

$0 = x^2 - 10x + 9$

$0 = (x - 9)(x - 1)$

$x - 9 = 0$ ó $x - 1 = 0$

$x = 9$ ó $x = 1$

Si $x = 9$, el miembro de la izquierda es $\sqrt{4.9} - 9 + 3 = 0$,
y el miembro de la derecha es 0.
Si $x = 1$, el miembro de la izquierda es $\sqrt{4.1} - 1 + 3 = 4$,
y el miembro de la derecha es 0.
El conjunto de validez es $\{9\}$.

5. $3\sqrt{x+13} = x + 9$

$9(x + 13) = x^2 + 18x + 81$

$9x + 117 = x^2 + 18x + 81$

$0 = x^2 + 9x - 36$

$0 = (x + 12)(x - 3)$

$x = -12$ ó $x = 3$

Si $x = -12$, el miembro de la izquierda es $3\sqrt{-12+13} = 3$,
y el miembro de la derecha es $-12 + 9 = -3$.

a la ecuación original.

Respuestas al Conjunto de problemas 13-5a; página 403:

1. $x^2 = 4$ tiene el conjunto de validez $\{2,-2\}$, mientras que
   $x = 2$ tiene el conjunto de validez $\{2\}$.
2. $(x - 1)^2 = 1^2$ tiene el conjunto de validez $\{0,2\}$, mientras que
   $x - 1 = 1$ tiene el conjunto de validez $\{2\}$.
3. $(x + 2)^2 = 0$ tiene el conjunto de validez $\{-2\}$, y
   $x + 2 = 0$ tiene el mismo conjunto de validez.
4. $(x - 1)^2 = 2^2$ tiene el conjunto de validez $\{3,-1\}$, mientras que
   $x - 1 = 2$ tiene el conjunto de validez $\{3\}$.

Respuestas al Conjunto de problemas 13-5b; páginas 405-406:

1. $$\sqrt{2x} = 1 + x$$
   $$2x = 1 + 2x + x^2$$
   $$0 = 1 + x^2$$
   El conjunto de validez es $\emptyset$.
2. $$\sqrt{2x + 1} = x + 1$$
   $$2x + 1 = x^2 + 2x + 1$$
   $$0 = x^2$$
   $$x = 0$$
   Si $x = 0$, el miembro de la izquierda es $\sqrt{2 \cdot 0 + 1} = 1$,
   y el miembro de la derecha es $0 + 1 = 1$.
   El conjunto de validez es $\{0\}$.

Si $x = 3$, el miembro de la izquierda es $3\sqrt{3 + 13} = 12$,
y el miembro de la derecha es $3 + 9 = 12$.
El conjunto de validez es $\{3\}$.

6. $|2x| = x + 1$

$4x^2 = x^2 + 2x + 1$

$3x^2 - 2x - 1 = 0$

$(3x + 1)(x - 1) = 0$

$3x + 1 = 0$ ó $x = 1$

$x = -\frac{1}{3}$ ó $x = 1$

Si $x = -\frac{1}{3}$, el miembro de la izquierda es $|2(-\frac{1}{3})| = \frac{2}{3}$,
y el miembro de la derecha es $-\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$.
Si $x = 1$, el miembro de la izquierda es $|2.1| = 2$,
y el miembro de la derecha es $1 + 1 = 2$.
El conjunto de validez es $\{-\frac{1}{3}, 1\}$.

7. $2x = |x| + 1$

$2x - 1 = |x|$

$4x^2 - 4x + 1 = x^2$

$3x^2 - 4x + 1 = 0$

$(3x - 1)(x - 1) = 0$

$x = \frac{1}{3}$ ó $x = 1$

Si $x = \frac{1}{3}$, el miembro de la izquierda es $2\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$,
y el miembro de la derecha es $|\frac{1}{3}| + 1 = \frac{4}{3}$.
Si $x = 1$, el miembro de la izquierda es $2.1 = 2$,
y el miembro de la derecha es $|1| + 1 = 2$.
El conjunto de validez es $\{1\}$.

8. $x = |2x| + 1$

$x - 1 = |2x|$

$x^2 - 2x + 1 = 4x^2$

$0 = 3x^2 + 2x - 1$

$0 = (3x - 1)(x + 1)$

$x = \frac{1}{3}$ ó $x = -1$

Si $x = \frac{1}{3}$, el miembro de la izquierda es $\frac{1}{3}$,

y el miembro de la derecha es $\left|2 \cdot \frac{1}{3}\right| + 1 = \frac{5}{3}$.

Si $x = -1$, el miembro de la izquierda es -1,

y el miembro de la derecha es $|2(-1)| + 1 = 3$.

El conjunto de validez es $\emptyset$.

9. $x - |x| = 1$

$x - 1 = |x|$

$x^2 - 2x + 1 = x^2$

$-2x + 1 = 0$

$x = \frac{1}{2}$

7

Si $x = \frac{1}{2}$, el miembro de la izquierda es $\frac{1}{2} - \left|\frac{1}{2}\right| = 0$,

y el miembro de la derecha es 1.

El conjunto de validez es $\emptyset$.

10. $|x - 2| = 3$

$x^2 - 4x + 4 = 9$

$x^2 - 4x - 5 = 0$

$(x - 5)(x + 1) = 0$

$x = 5$ ó $x = -1$

Si $x = 5$, el miembro de la izquierda es $|5 - 2| = 3$,

y el miembro de la derecha es 3.

Si $x = -1$, el miembro de la izquierda es $|-1 - 2| = 3$,

y el miembro de la derecha es 3.

El conjunto de validez es $\{5, -1\}$.

11. Para todo número real x, $|x|^2 = x^2$.

Demostración: Si $x \geq 0$, $|x| = x$,

de modo que $|x|^2 = x^2$.

Si $x < 0$, $|x| = -x$,

de modo que $|x|^2 = (-x)^2$.

Pero $(-x)^2 = x^2$, pues $(-a)(-b) = ab$,

de modo que $|x|^2 = x^2$.

12. $|x - 3| = x + 2$

$$x^2 - 6x + 9 = x^2 + 4x + 4$$
$$5 = 10x$$
$$\frac{1}{2} = x$$

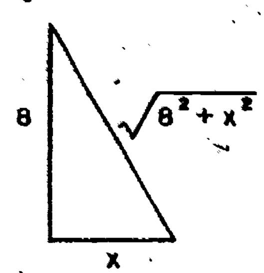
Si $x = \frac{1}{2}$, el miembro de la izquierda es $\left|\frac{1}{2} - 3\right| = \frac{5}{2}$,

y el miembro de la derecha es $\frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$.

El conjunto de validez es $\{\frac{1}{2}\}$.

13. Si el otro cateto tiene x pulgadas de longitud, la hipotenusa tiene $\sqrt{8^2 + x^2}$ pulgadas de longitud, puesto que $(\text{hipotenusa})^2 = 8^2 + x^2$.

$$\sqrt{8^2 + x^2} = (8 + x) - 4$$
$$\sqrt{64 + x^2} = 4 + x$$
$$64 + x^2 = 16 + 8x + x^2$$
$$48 = 8x$$
$$6 = x$$



Si $x = 6$, el miembro de la izquierda es $\sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$,

y el miembro de la derecha es $(8 + 6) - 4 = 14 - 4 = 10$.

El otro cateto tiene 6 pulgadas de longitud.

14. $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$

$t^2 = \frac{2s}{g}$

$t^2 g = 2s$

$\frac{t^2 g}{2} = s$

Si $t = 6.25$ y $g = 32$,

$s = \frac{(6.25)^2 \cdot 32}{2}$

$s = \frac{(\frac{25}{4})^2 \cdot 32}{2}$

$s = 625$

$$\sqrt{\frac{2 \cdot 625}{32}} = \sqrt{\frac{625}{16}}$$

$$= \frac{25}{4}$$

$$= 6.25$$

15. $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$

$t^2 = \frac{2s}{g}$

$t^2 g = 2s$

$g = \frac{2s}{t^2}$

Esto, desde luego, supone que $t > 0$, $s \geq 0$, $g > 0$.

Si $g = \frac{2s}{t^2}$, $\sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2s}{\frac{2s}{t^2}}}$

$$= \sqrt{\frac{2st^2}{2s}}$$

$$= \sqrt{t^2}$$

$$= t$$

16. (a) No son equivalentes. Los números $x = 0$, $y = -1$, satisfacen al primer enunciado, pero no al segundo.

(b) Equivalentes. Para cada par de números que hacen cierto el primer enunciado, el segundo enunciado es también cierto, puesto que $\sqrt{1} = 1$. Para cada par de números que hacen cierto el segundo enunciado, el primer enunciado es también cierto, puesto que si $a = b$, entonces $a^2 = b^2$.

(c) Cadena de enunciados equivalentes:

$x^2 = xy$

$x^2 - xy = 0$

$x(x - y) = 0$

$x = 0$ ó $x - y = 0$

*13-6. Inecuaciones polinómicas

La proposición que establece cuándo un producto de varios números distintos de cero es positivo y cuándo es negativo puede, desde luego, demostrarse utilizando las propiedades conmutativa y asociativa para agrupar los factores negativos en parejas. El producto de cada par de factores negativos es positivo, y el producto de estos pares y todos los factores positivos será también positivo. Por lo tanto, el producto completo será negativo solamente cuando hay un número impar de factores negativos. La misma clase debe ser estimulada mediante discusión a tratar los detalles de la cuestión.

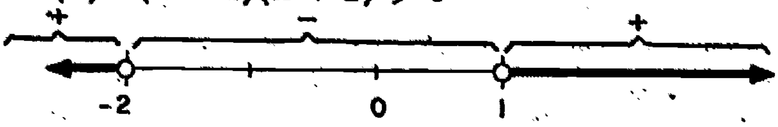
Página 406. Por ejemplo, cuando $x = 2$, es suficiente reconocer que $(2 + 3)$ es positivo, $(2 + 2)$ es positivo, y $(2 - 1)$ es positivo. Por lo tanto, el producto es positivo. De igual manera, para $x = -\frac{5}{2}$, $(-\frac{5}{2} + 3)$ es positivo, $(-\frac{5}{2} + 2)$ es negativo, y $(-\frac{5}{2} - 1)$ es negativo. Puesto que hay dos factores negativos, el producto es positivo.

Página 408. El conjunto de validez de $(x + 3)(x + 2)(x - 1) > 0$ es el conjunto de todos los x tales que $-3 < x < -2$ ó $x > 1$.

El conjunto de validez de $(x + 3)(x + 2)(x - 1) \geq 0$ es el conjunto de todos los x tales que $-3 \leq x \leq -2$ ó $x \geq 1$.

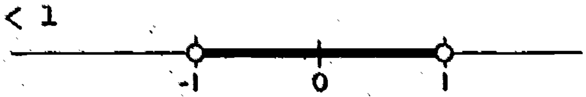
Respuestas al Conjunto de problemas 13-6a; páginas 409-410:

1. (a) $(x - 1)(x + 2) > 0$



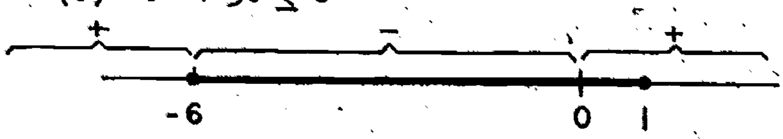
El conjunto de los números menores que -2 ó mayores que 1.

(b) $y^2 < 1$



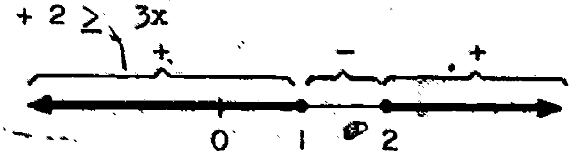
El conjunto de los números menores que 1 y mayores que -1.

(c) $t^2 + 5t \leq 6$



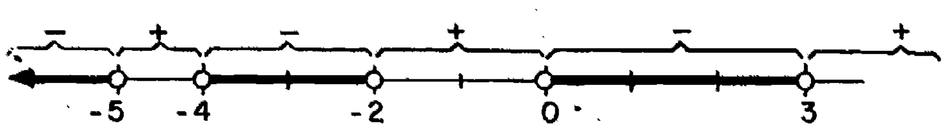
El conjunto de los números (mayores que o iguales a -6) y (menores que o iguales a 1).

(d) $x^2 + 2 \geq 3x$



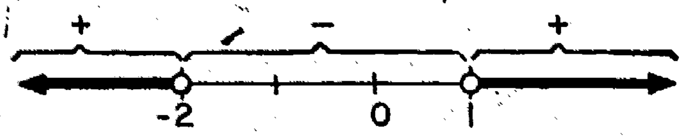
El conjunto de los números (menores que o iguales a 1) ó (mayores que o iguales a 2).

(e) $(s + 5)(s + 4)(s + 2)(s)(s - 3) < 0$



El conjunto de los números (menores que -5) ó (mayores que -4 y menores que -2) ó (mayores que 0 y menores que 3).

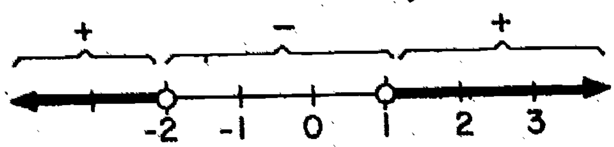
(f) $2 - x^2 < x$



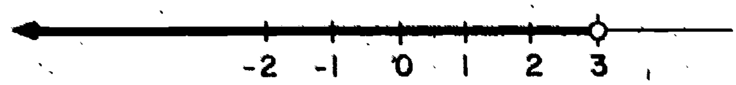
El conjunto de los números menores que -2 ó mayores que 1.

2. $(x + 2)(x - 1) > 0$ y $x < 3$

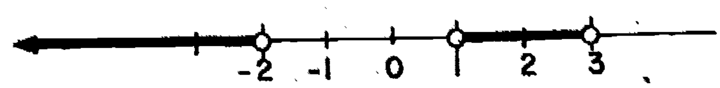
La gráfica de $(x + 2)(x - 1) > 0$ es



La gráfica de $x < 3$ es



El conjunto de validez de "$(x + 2)(x - 1) > 0$ y $x < 3$" es el conjunto de todos los números, cada uno de los cuales está en los dos conjuntos de validez anteriores.



El conjunto de los números (menores que -2) ó (mayores que 1 y menores que 3).

*3. Si $(x + 2)(x - 1)$ es positivo y $(x - 3)$ es negativo, entonces $(x + 2)(x - 1)(x - 3)$ es negativo; de este modo, cada solución del enunciado en el problema 2 es una solución de $(x + 2)(x - 1)(x - 3) < 0$. Esta inecuación es, por lo tanto, una buena posibilidad, y cuando hacemos la gráfica de su conjunto de validez, obtenemos la gráfica dibujada en el problema 2, de modo que los dos enunciados son equivalentes.

Páginas 410-411. Si x es una solución de $(x + 2)^2(x - 1) > 0$, entonces $(x + 2)^2$ no debe ser 0, y, por lo tanto, debe ser positivo, siendo un cuadrado. Multiplicando por el número positivo $\frac{1}{(x + 2)^2}$, obtenemos $x - 1 > 0$. Volviendo atrás, vemos que, si $x - 1 > 0$, $x > 1$, y, por lo tanto, $x \neq -2$. Luego, $x + 2 \neq 0$, y así $(x + 2)^2$ debe ser positivo. Multiplicando $x - 1 > 0$ por este número positivo, se obtiene $(x + 2)^2(x - 1) > 0$. Por lo tanto, $(x + 2)^2(x - 1) > 0$ y $x - 1 > 0$ son enunciados equivalentes.

El conjunto de validez de $(x + 2)^2(x - 1) \leq 0$ es el conjunto de todos los números que no están en el conjunto de validez de $(x + 2)^2(x - 1) > 0$. Hemos visto que precisamente el último conjunto consta de todos los x tales que $x > 1$. Así, el conjunto de validez de $(x + 2)^2(x - 1) \leq 0$ es el conjunto de todos los x tales que $x \leq 1$.

El producto de x y $(x - 1)^3$ será negativo, si y solamente si o bien $x < 0$ y $(x - 1)^3 > 0$, ó $x > 0$ y $(x - 1)^3 < 0$.

La primera cláusula es equivalente a "$x < 0$ y $x - 1 > 0$", esto es, a "$x < 0$ y $x > 1$". Puesto que ningún número es a la vez menor que 0 y mayor que 1, este enunciado no tiene solución. La segunda cláusula es equivalente a "$x > 0$ y $x - 1 < 0$", y esto nos da el conjunto de validez consistente en todos los x entre 0 y 1. El conjunto de validez de $x(x - 1)^3 < 0$ es, por tanto, el conjunto $0 < x < 1$.

El conjunto de validez de $x(x - 1)^3 \geq 0$ consistirá en todos los números que no estén en el conjunto de validez de $x(x - 1)^3 < 0$. Hemos visto que precisamente el último conjunto consta de todos los x tales que $0 < x < 1$. Los números que no están en este conjunto son todos los $x \leq 0$ juntamente con todos los $x \geq 1$. Por lo tanto, "$x(x - 1)^3 \geq 0$" equivale a "$x \leq 0$ ó $x \geq 1$".

Hemos utilizado anteriormente el hecho de que si el factor $x - 1$ ocurre tres veces, hay tres factores que pasan todos de negativo a positivo cuando x creciendo cruza 1, con lo cual el producto de esos factores pasa de negativo a positivo. Algunos estudiantes sentirán placer en extender esta idea a polinomios con un mismo factor repetido cuatro o cinco veces, y entonces, generalizar la situación.

Un factor que es un número real positivo tal como $x^2 + 2$, no hará cambiar el signo del producto de negativo a positivo o viceversa. Por esta razón, el conjunto de validez de $(x^2 + 2)(x - 3) < 0$ es el mismo conjunto de validez de $x - 3 < 0$, esto es, todos los x tales que $x < 3$; y el conjunto de validez de $(x^2 + 2)(x - 3) \geq 0$ es el conjunto de todos los x tales que $x \geq 3$.

<u>Respuestas al Conjunto de problemas 13-6b</u>; página 411:

1. $$x^2 + 1 > 2x$$
$$x^2 + 1 - 2x > 0$$
$$(x - 1)^2 > 0$$

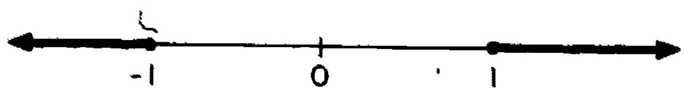
Puesto que $a^2 > 0$ para todos los números reales a, con la excepción del cero, el conjunto de validez es el conjunto de todos los números reales, excepto el 1.

2. $x^2 + 1 < 0$

El conjunto de validez es $\emptyset$.

3. $(t^2 + 1)(t^2 - 1) \geq 0$

El conjunto de números (menores que o iguales a -1) ó (mayores que o iguales a 1).

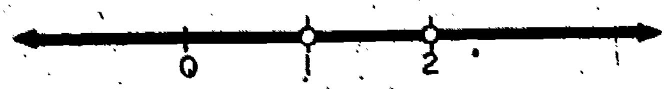


4. $4s - s^2 > 4$

El conjunto de validez es $\emptyset$.

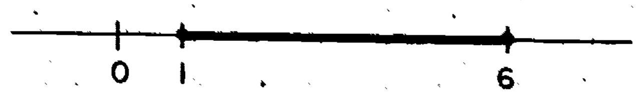
5. $(x - 1)^2(x - 2)^2 > 0$

El conjunto de todos los números reales, excepto el 1 y el 2.



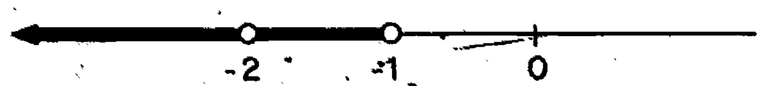
6. $(y^2 - 7y + 6) \leq 0$

El conjunto de los números (mayores que o iguales a 1) y (menores que o iguales a 6).



7. $(x + 2)(x^2 + 3x + 2) < 0$

El conjunto de los números menores que -1, excepto -2.



8. $3y + 12 \leq y^2 - 16$

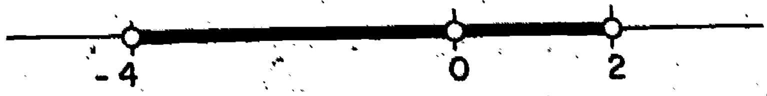
El conjunto de los números (menores que o iguales a -4) ó (mayores que o iguales a 7).

9. $x^2 + 5x > 24$

El conjunto de los números menores que -8 ó mayores que 3.

10. $|x| \quad (x - 2)(x + 4) < 0$

El conjunto de los números mayores que -4 y menores que 2, excepto el 0.



Respuestas a los Problemas de repaso

1. Sí, $\dfrac{1}{x^2 + 1}$ es un número real para todo x.

2. No, $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 1} \neq 1$ para $x = 1$ ó $x = -1$.

3. Sí, $\dfrac{1}{x^2 + 4}$ es un número real para todo x.

4. No, $\dfrac{x}{x - 3} - \dfrac{3}{x - 3} = 0$ no es un enunciado para $x = 3$.

5. No, $|x| = 2$ tiene el conjunto de validez $\{2, -2\}$, pero 2 no es una solución de $\dfrac{x + 2}{x - 2} = 0$.

6. Sí

7. $\emptyset$

8. $\{-3\}$

9. $\{3,6\}$

10. $\{1,-1\}$

11. $\{0,1,2\}$

12. $\{-4\}$

13. $\emptyset$

14. $\emptyset$. Obsérvese que $\sqrt{x + 2} = -2$ no puede ser cierto para ningún número real, pues afirma que un número positivo es lo mismo que un número negativo.

15. $\{2\}$

16. $\{2,-4\}$

17. $\{\frac{1}{2}\}$

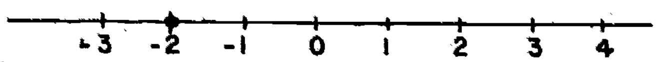
18. $\emptyset$. Obsérvese que $x \geq 0$ es contradictorio con $1 = 0$, y $x < 0$ es contradictorio con $x = \frac{1}{2}$.

19. Todo x excepto $x = -1$.

20. Todo x.

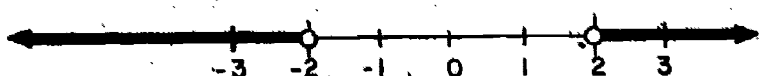
21. (a) El conjunto de validez es $\{-2\}$.

La gráfica es:



(b) El conjunto de validez es todo x tal que $x < -2$ ó $x > 2$.

La gráfica es:



(c) Lo mismo que (b).

(d) Lo mismo que (b).

22. $\sqrt{1 + 2x} < x - 1$

Observamos que $\sqrt{1 + 2x}$ se define para $x \geq -\frac{1}{2}$, y que si hay un x tal que $x - 1$ es mayor que un número no negativo, entonces $x > 1$.

Así, pues,

$$\sqrt{1 + 2x} < x - 1 \quad \text{y} \quad x > 1$$

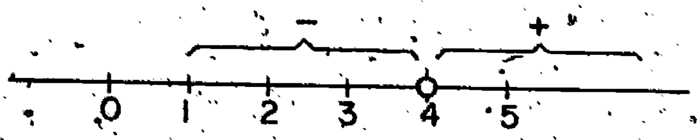
es equivalente a

$$1 + 2x < x^2 - 2x + 1 \quad \text{y} \quad x > 1,$$

que a su vez es equivalente a

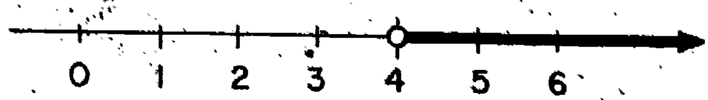
$$0 < x(x - 4) \quad \text{y} \quad x > 1.$$

Necesitamos considerar solamente valores de $x > 1$.



Por lo tanto, el conjunto de validez consiste en todos los números mayores que 4.

La gráfica es:

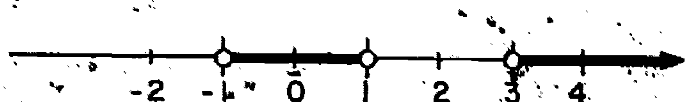


Los primeros dos enunciados son invertibles, puesto que:

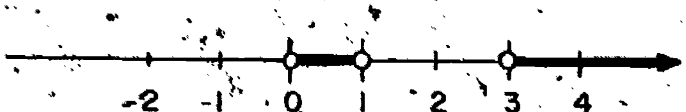
(i) Si $0 < a < b$, entonces $a^2 < b^2$.

(ii) Si $0 < a < b$, entonces $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

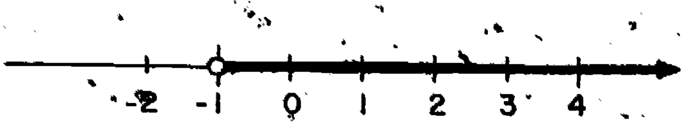
23. (a)



(b)



(c)



Sugerencias para exámenes

1. En cada uno de los siguientes casos, determina si los dos enunciados son equivalentes:

   (a) $3x + 6 = 8, \quad x = \frac{2}{3}$

   (b) $\frac{x - 2}{x + 2} = 0, \quad x = 2$

   (c) $|x| + 1 = 4, \quad x^2 - 9 = 0$

2. En cada uno de los siguientes casos, determina si los dos enunciados son equivalentes:

   (a) $x(x - 3) + 3(x - 3) = 0, \quad x - 3 = 0$

   (b) $x(x - 3) - 3(x - 3) = 0, \quad x - 3 = 0$

3. Determina el conjunto de validez de cada uno de los siguientes enunciados:

   (a) $x(x - 3) + 3(x - 3) = 0$

   (b) $x(x - 3) - 3(x - 3) = 0$

4. Determina el conjunto de validez de $\sqrt{1 - 2x} = x - 1$.

5. Resuelve: $\sqrt{x^2 - 9} = 4$

6. Construye la gráfica y describe el conjunto de validez de cada uno de los siguientes enunciados:

   (a) $8y - 3 > 3y + 7$

   (b) $|x| < 1 - x$

7. Construye la gráfica del conjunto de validez de cada uno de los siguientes enunciados compuestos:

   (a) $x - 3 < 0$ y $x \geq 0$

   (b) $x - 3 < 0$ ó $x \geq 0$

   (c) $x - 3 > 0$ y $x \leq 0$

   (d) $x - 3 > 0$ ó $x \leq 0$

8. Construye la gráfica y describe el conjunto de validez de

$$\frac{m}{m - 2} \leq 3$$

9. Resuelve y construye la gráfica del conjunto de validez:

$$\frac{3}{y^2 - 1} < 1$$

10. Resuelve y construye la gráfica del conjunto de validez:

$$\frac{1}{x^2 + 1} < 1$$

11. Construye la gráfica y describe el conjunto de validez de

$$x^2 + 1 < 2x + 1$$

Capítulo 14

GRAFICAS DE ENUNCIADOS ABIERTOS CON DOS VARIABLES

En este capítulo, extendemos el método de representación de gráficas en la recta al plano introduciendo ejes coordenados y asociando puntos del plano con pares ordenados de números. Dibujamos las gráficas de los conjuntos de validez de enunciados con dos variables, tanto de ecuaciones como de inecuaciones, y con especial atención al principio de las expresiones lineales. Incluimos gráficas de enunciados abiertos que contienen el valor absoluto. Para los mejores estudiantes, dedicamos alguna atención a la reflexión de los puntos del plano respecto de un eje, al movimiento de los puntos en el plano, y al efecto de estas transformaciones en la ecuación de la gráfica.

Los alumnos que han estudiado el curso del SMSG para octavo grado tendrán seguramente ya alguna familiaridad con el sistema de coordenadas rectangulares en el plano y con algunas gráficas sencillas. La mayor parte de este capítulo, sin embargo, será nuevo para ellos.

Referimos al maestro a Studies in Mathematics, Vol. III, páginas 6.8-6.17, para una discusión de enunciados abiertos con dos variables.

14-1. El plano numérico real

Página 415. Pensamos hacer bastante hincapié sobre la ordenación en los pares de números, lo mismo ahora que más adelante, para que resulte perfectamente natural al estudiante.

Por eso, empezamos con <u>una</u> recta numérica.

<u>Páginas 417-418</u>. Aquí una vez más tratamos con la <u>ordenación</u>. Es de esperar que el estudiante se dé cuenta de que para puntos P, A, B, L y Q, el número escrito primero es el asociado con la recta numérica horizontal, y el segundo es el asociado con la recta vertical.

El par numérico correspondiente al punto Q difiere del que corresponde al punto P en que el segundo número para Q es negativo, mientras que el segundo número para P es positivo. El segundo número para Q es negativo, porque se mide <u>hacia abajo</u> respecto de la recta numérica horizontal, mientras que el segundo número para P se mide <u>hacia arriba</u>.

El par ordenado asociado con E es (5,4), con C es (-2,-5), con K es (0,-5), con D es (3,-6). El par ordenado asociado con H es (0,0), con F es (8,0), y con G es (-4,0). Si un punto está situado en la recta horizontal, el segundo número del par ordenado asociado con <u>el</u> punto es 0. Al señalar la diferencia en los pares ordenados de números asociados con S y T, de nuevo insistimos en la <u>ordenación</u>.

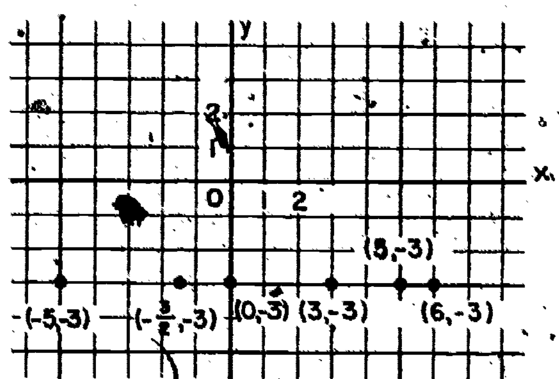
<u>Respuestas al Conjunto de problemas 14-1a</u>; páginas 418-419:

1.

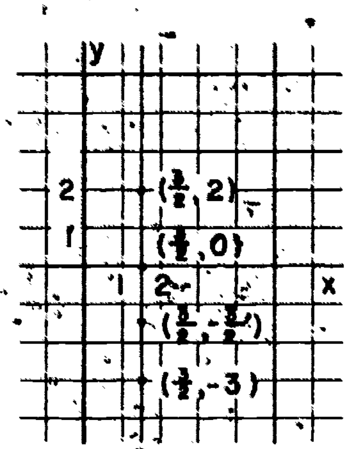
A(6,-6)	F(4,6)	K(-8,4)
B(-5,-5)	G(-3,0)	L(7,0)
C(3,-4)	H(0,-6)	M(0,7)
D(-8,-4)	I$(-4,5\frac{1}{2})$	
E(2,3)	J$(7\frac{1}{2},3)$	

2. Señálese a los estudiantes el uso de numerales romanos en la numeración de los cuadrantes. Los puntos para los cuales la segunda coordenada es igual a la primera están situados en los cuadrantes I y III.

3. Todos los puntos con ordenada -3 están situados 3 unidades por debajo del eje x. Forman una recta.



4. Todos los puntos con abscisa $\frac{3}{2}$ están en la recta $1\frac{1}{2}$ unidades a la derecha del eje y.



Respuestas al Conjunto de problemas 14-1b; páginas [illegible]-421:

1.

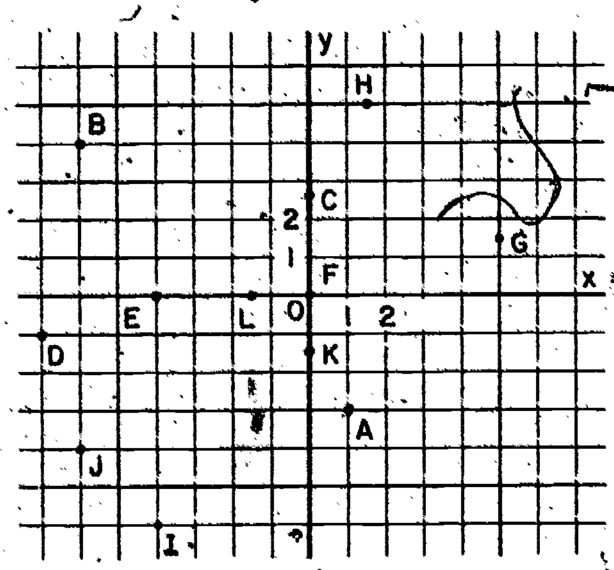


Figura para el problema 1

2. G y H no son el mismo punto, porque, aunque los mismos números se usan en las coordenadas, la ordenación es diferente. Por la misma razón, I y J no son el mismo punto, ni lo son K y L.

3. Todos los pares ordenados de números tienen abscisa igual a 2. Todos los puntos para los cuales la abscisa del par ordenado es 2 están en la recta paralela al eje y, 2 unidades a la derecha del mismo.

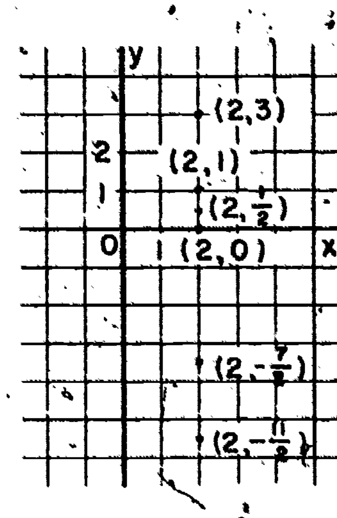


Figura para el problema 3

4. Todos los pares ordenados con ordenada igual a 5 están asociados con puntos en la recta paralela al eje y, 5 unidades por encima del mismo.

5. Si se pudieran localizar todos los puntos cuyas coordenadas son pares de números tales que el primer y segundo números de cada par sean el mismo, se tendría una recta pasando por el origen.

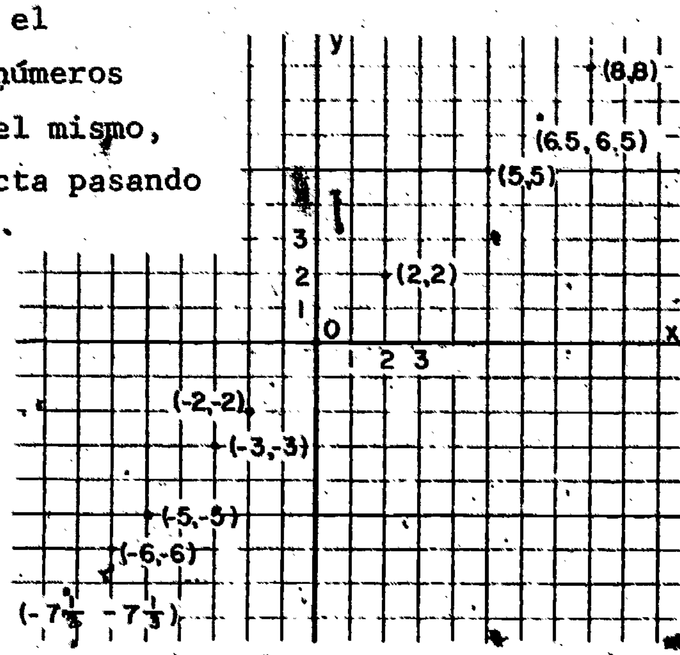


Figura para el problema 5

*6. Cada punto va a un punto con la misma ordenada, y con abscisa el opuesto de la del punto original.

(a) (2,1)	va a	(-2,1).	(b) (-2,1)	va a	(2,1).
(2,-1)	va a	(-2,-1).	(-2,-1)	va a	(2,-1).
$(-\frac{1}{2},2)$	va a	$(\frac{1}{2},2)$.	$(\frac{1}{2},2)$	va a	$(-\frac{1}{2},2)$.
(-1,-1)	va a	(1,-1).	(1,-1)	va a	(-1,-1).
(3,0)	va a	(-3,0).	(-3,0)	va a	(3,0).
(-5,0)	va a	(5,0).	(5,0)	va a	(-5,0).
(0,2)	va a	(0,2).	(0,2)	va a	(0,2).
(0,-2)	va a	(0,-2).	(0,-2)	va a	(0,-2).

(c) (c,-d) va a (-c,-d).

(d) (-c,d) va a (c,d).

(e) (c,d) va a (-c,d).

(f) Los puntos en el eje y no cambian de posición.

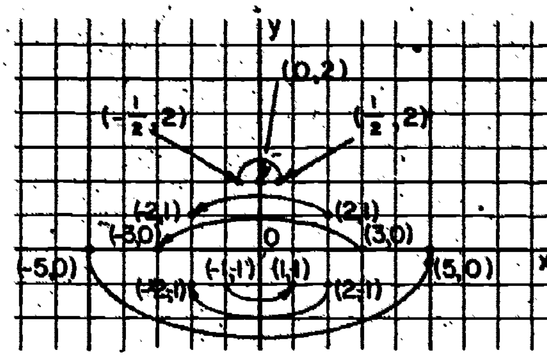


Figura para el problema 6

*7.

(a) (1,1) va a (3,1).
(-1,1) va a (1,1).
(-2,2) va a (0,2).
(0,-3) va a (2,-3).
(3,0) va a (5,0).

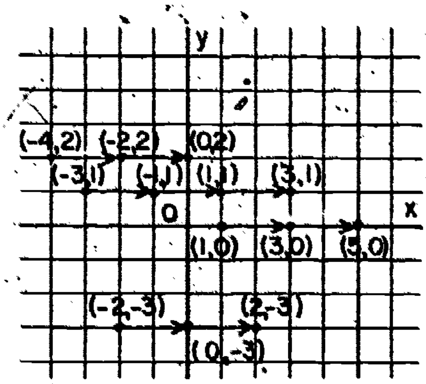


Figura para el problema 7

(b) (-1,1) va a (1,1).
(-3,1) va a (-1,1).
(-4,2) va a (-2,2).
(-2,-3) va a (0,-3).
(1,0) va a (3,0).

(c) (c-2,d) va a (c,d).

(d) (-c-2,d) va a (-c,d).

(e) Todos los puntos cambian de posición.

14-2. Gráficas de enunciados abiertos con dos variables

Nuestro objeto aquí es establecer la conexión entre los pares ordenados como asociados a los puntos del plano, y los pares ordenados como soluciones de enunciados abiertos. De nuevo el acento está en la ordenación.

Página 421. Si se asigna 0 a y, y -2 a x, tenemos

$3(0) - 2(-2) + 6 = 0$. Este enunciado no es cierto.

Si se asigna 0 a x, y -2 a y, tenemos

$3(-2) - 2(0) + 6 = 0$. Este enunciado es cierto.

Páginas 422-23. Como vimos anteriormente, (0,-2) pertenece al conjunto de validez del enunciado

$$3y - 2x + 6 = 0,$$

mientras que (-2,0) no pertenece a ese conjunto de validez.

Si r se toma como la primera variable, las soluciones de "$s = r + 1$" incluyen (0,1), (-5,-4), ($2\frac{1}{3}$, $3\frac{1}{3}$), y así sucesivamente. (-2,-3) no es una solución, pero (-3,-2) sí lo es.

Si u se toma como la primera variable, las soluciones de "$v = 2u^2$" incluyen los pares ordenados (0,0), (2,8), (-1,2), (.5,.5), y así sucesivamente. (-1,2) es una solución; (2,-1) no satisface al enunciado.

Las soluciones de "$y = 4$" como un enunciado con dos variables, incluyen los pares ordenados (0,4), (-3,4), (5.3,4), y así sucesivamente. Todo par ordenado que satisface al enunciado tiene ordenada igual a 4.

Todo par ordenado que satisface al enunciado "$x = -2$" tiene abscisa igual a -2.

Respuestas al Conjunto de problemas 14-2a; páginas 423-424:

1. (a) El conjunto de validez es el conjunto de todos los pares ordenados cuyas ordenadas son iguales a 5.
   (b) El conjunto de validez es el conjunto de todos los pares ordenados cuyas abscisas son iguales a 0.
   (c) El conjunto de validez es el conjunto de todos los pares ordenados tales que la ordenada es -3 veces la abscisa.
   (d) El conjunto de validez es el conjunto de todos los pares ordenados cuyas abscisas son iguales a 3.
2. Aquí se sugieren algunos pares. Hágase que cada estudiante revise sus soluciones preferidas verificando si satisfacen a los enunciados abiertos:

(a)	(0,-2),	(2,4),	(-2,-8),	$(\frac{3}{2},\frac{5}{2})$
(b)	(-2,0),	(0,2),	$(\frac{7}{2},\frac{11}{2})$,	(-5,-3)
(c)	(-3,10),	(0,1),	(3,10),	$(\frac{4}{3},\frac{25}{9})$
(d)	(-1,1),	(0,0),	(2,2),	$(\frac{4}{5},\frac{4}{5})$

3.

(a)	(1,2),	(-2,-5)
(b)	(0,3),	(-5,4)
(c)	(-2,-3),	(3,8)
(d)	(-5,-5),	(4,3)

4. (a)

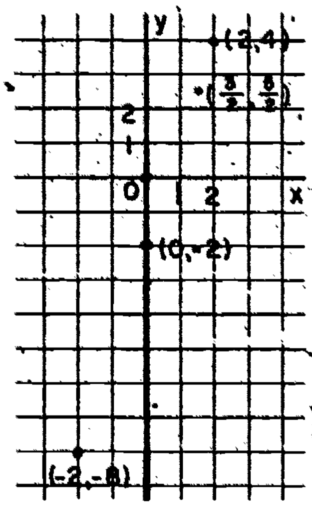


Figura para el problema 4(a)

(b)

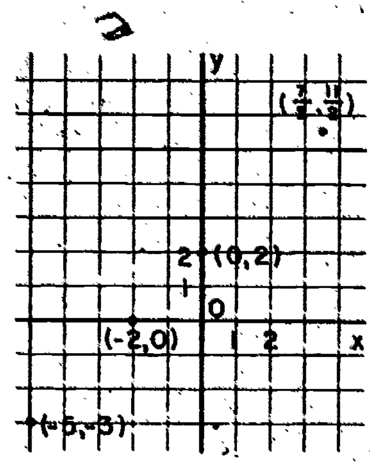


Figura para el problema 4(b)

(c)

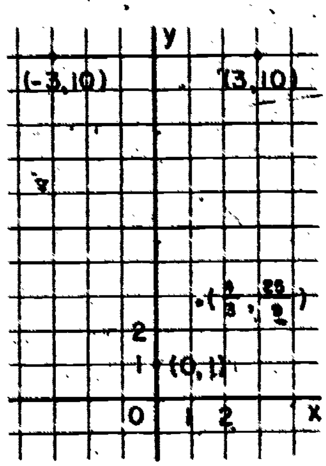


Figura para el problema 4(c)

(d)

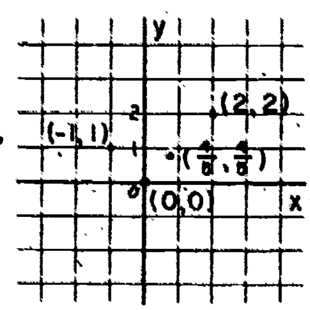


Figura para el problema 4(d)

Al hacer estos problemas, y en la discusión de ellos en clase, los estudiantes pronto notarán que los puntos en (a) parecen estar en una línea recta, al igual que los puntos en (b), mientras que ni ~~los de~~ (c) ni los de (d) están en una sola línea recta. Estimúlese a los estudiantes a considerar esto; las respuestas aparecerán más adelante en este mismo capítulo.

Páginas 425-427.

x	-9	-6	-3	0	3	5	$16\frac{1}{2}$
y	-8	-6	-4	-2	0	$1\frac{1}{3}$	9

El examen de la gráfica demostrará al estudiante que todos los puntos asociados con los pares ordenados indicados en la tabla, parecen estar en la recta.

Las coordenadas del punto A satisfacen a la ecuación, puesto que

$$2(6) - 3(2) - 6 = 0$$

es un enunciado cierto.

La forma general de la ecuación lineal con dos variables

$$Ax + By + C = 0$$

debe ser destacada, y se debe referir a ella con frecuencia para que los discípulos puedan reconocer al momento tales ecuaciones y asociarlas automáticamente con líneas rectas. Puesto que los alumnos no han estudiado formalmente la geometría, no debemos esperar que entiendan una definición geométrica de la recta. Sin embargo, su experiencia en dibujar gráficas de ecuaciones de la forma $Ax + By + C = 0$ sugiere que tomemos como definición de recta, la siguiente:

> Una recta es un conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen a una ecuación de la forma
>
> $$Ax + By + C = 0,$$
>
> con A ó B al menos distinto de cero.

En general, cada gráfica (conjunto de puntos en el plano), aún la gráfica vacía, está asociada con un enunciado abierto e inversamente.

Obsérvese que hemos usado "línea recta" y "recta" indistintamente. En adelante, preferiremos la expresión más corta "recta".

Respuestas al Conjunto de problemas 14-2b; páginas 428-429:

El maestro debe insistir en todos los ejercicios siguientes en que se tracen las rectas tan largas como sea posible dentro del campo de la gráfica. Desde el principio, la tendencia a dibujar solamente segmentos debe eliminarse, a menos que las limitaciones se incluyan en los enunciados abiertos.

1. Todos los puntos con ordenada -3 están en una recta paralela al eje horizontal, y 3 unidades por debajo de éste.

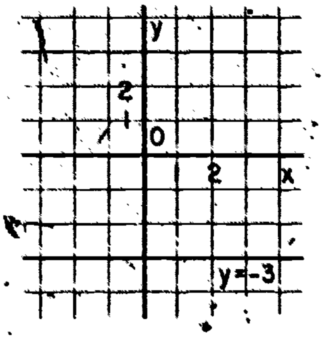


Figura para el problema 1

2. La ecuación cuya gráfica es el eje horizontal es "y = 0". La ecuación cuya gráfica es el eje vertical es "x = 0".

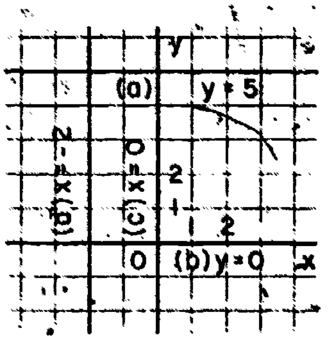


Figura para el problema 2

3. La recta (a) incluye todos los posibles puntos para los cuales la abscisa es igual al opuesto de la ordenada. La recta (b) incluye los puntos para los cuales la ordenada es el doble de la abscisa. La recta (c) incluye los puntos para los cuales la ordenada es el opuesto del doble de la abscisa. Todas estas gráficas son rectas, y todas pasan por el origen. Sus ecuaciones son:

   (a) $y = -x$

   (b) $y = 2x$

   (c) $y = -2x$

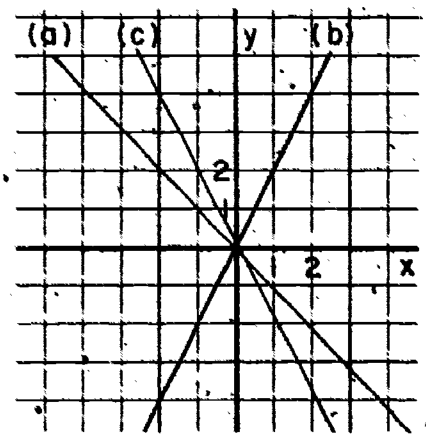


Figura para el problema 3

4. Todas las gráficas son rectas que pasan por el origen. La gráfica de (a) asciende a medida que va de izquierda a derecha, mientras que la gráfica de (d) desciende. Lo mismo se puede decir de las gráficas de (b) y (e), y también de las gráficas de (c) y (f).

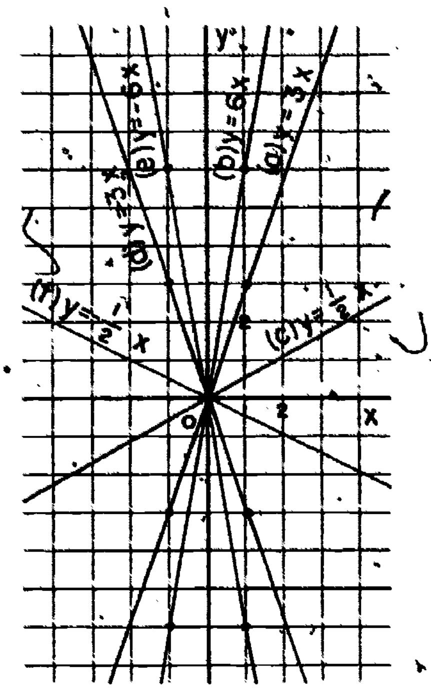


Figura para el problema 4

5. La gráfica de (a) difiere de la gráfica de (b) en que corta al eje y en un punto 8 unidades por encima del punto en que lo corta la gráfica de (b). La gráfica de (c) corta al eje y en un punto 10 unidades por encima del punto en que lo corta la gráfica de (d).

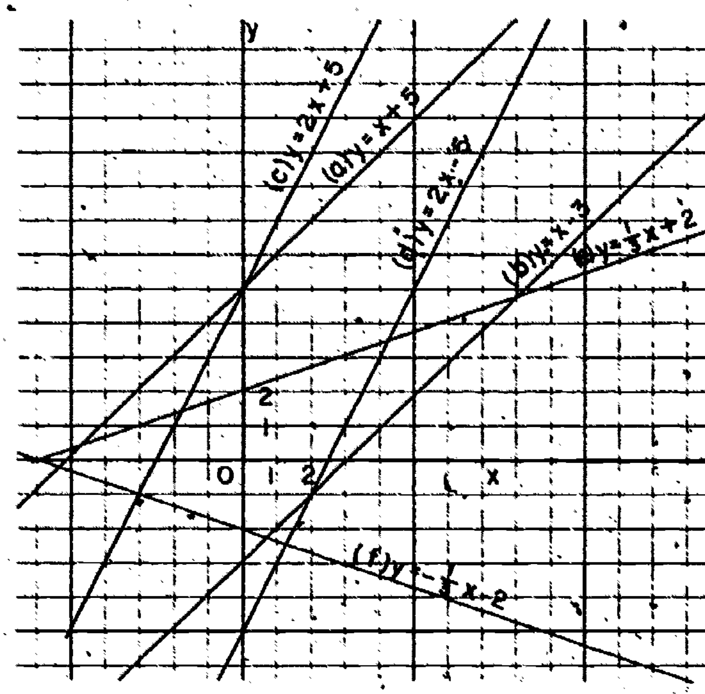


Figura para el problema 5

La gráfica de (e) no solamente corta el eje y en un punto diferente del punto en que lo corta la gráfica de (f), sino que también la gráfica de (e) asciende, mientras la gráfica de (f) desciende.

Las gráficas de (a) y (b) parecen ser un par de rectas paralelas. Las gráficas de (c) y (d) también parecen ser paralelas, pero las gráficas de (e) y (f) no lo son.

Páginas 429-430. Al intentar situar puntos tales como (-2,5), (-1,2), (0,2), (1,4), (2,8), y (3,10), los estudiantes notarán en seguida que los puntos no están todos en una recta, sino que están por encima de la recta que constituye la gráfica del enunciado abierto "y = 3x", puesto que a lo largo del eje y, "mayor que" significa "por encima de". El enunciado abierto cuya gráfica es el conjunto de puntos para los cuales la ordenada es mayor que 3 veces la abscisa, es "y > 3x".

Respuestas al Conjunto de problemas 14-2c; páginas 432-435:

1. El enunciado abierto cuyo conjunto de validez es el conjunto de pares ordenados tales que la ordenada es dos unidades mayor que la abscisa, es "y = x + 2". La gráfica del conjunto de puntos asociados con este conjunto de pares ordenados es la recta mostrada en la figura.

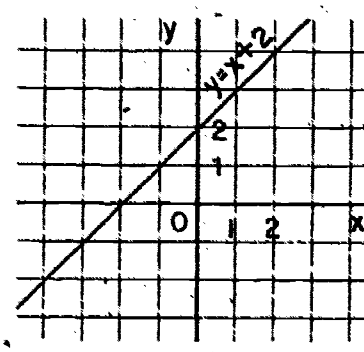


Figura para el problema 1

Con referencia al mismo sistema de ejes coordenados, no es posible dibujar las gráficas de ambos enunciados "y > x + 2" y "y ≥ x + 2", porque en el primero, la recta cuya ecuación es "y = x + 2" está punteada, y en el segundo, es una recta de trazo continuo.

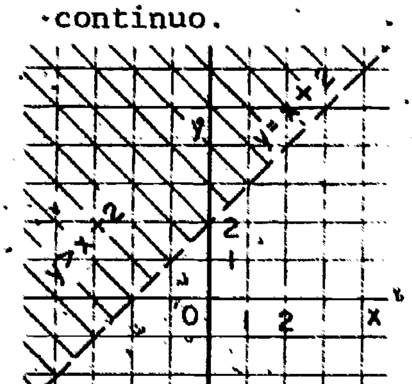


Figura para el problema 1(a)

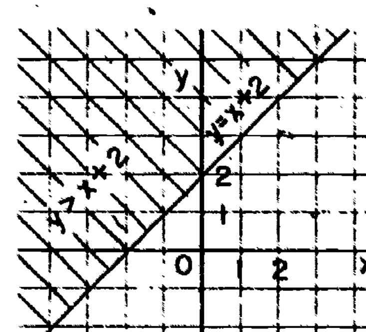


Figura para el problema 1(b)

2. En el enunciado, "y = $|x|$", puesto que $|x|$ es positivo o cero para todos los valores de x, se infiere que y nunca es negativo. Las soluciones para las cuales las abscisas se dan son: $(-3,3)$, $(-1,1)$, $(1\frac{1}{2},1\frac{1}{2})$, $(2,2)$, $(4,4)$.

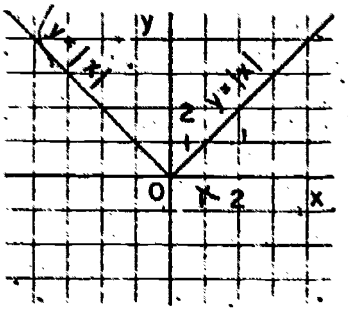


Figura para el problema 2

3. (a) y = 2x

x	-3	-1	0	2	5
y	-6	-2	0	4	16

(b) y = 3x

x	-2	-1	0	2	3
y	-6	-3	0	6	9

(c) $y = \frac{1}{2}x$

x	-4	-1	0	2	5
y	-2	$-\frac{1}{2}$	0	1	$2\frac{1}{2}$

(d) $y = -\frac{1}{3}x$

x	-9	-6	0	3	6
y	3	2	0	-1	-2

(e) y = x

x	-8	-4	0	3	7
y	-8	-4	0	3	7

(f) y = -x

x	-7	-5	0	3	4
y	7	5	0	-3	-4

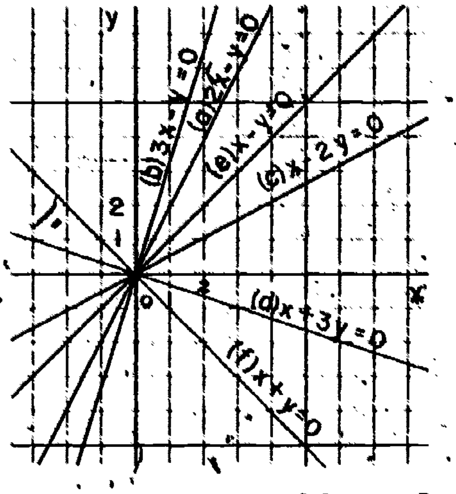


Figura para el problema 3

Las gráficas de todos estos enunciados abiertos son rectas que pasan por el origen.

4\. (a) $y = \frac{3}{2}x$

x	-6	-4	0	4	8
y	-9	-6	0	6	12

(b) $y = \frac{3}{2}x - 3$

x	-4	-2	0	2	4
y	-9	-6	-3	0	3

(c) $y = \frac{3}{2}x - 6$

x	-2	-1	0	4	10
y	-9	$-7\frac{1}{2}$	-6	0	9

(d) $y = \frac{3}{2}x + 3$

x	-6	-2	0	4	6
y	-6	0	3	9	12

(e) $y = \frac{3}{2}x + 6$

x	-8	-6	0	1	2
y	-6	-3	6	$7\frac{1}{2}$	9

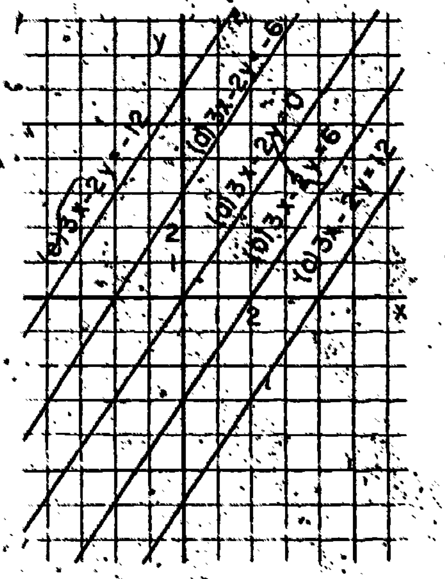


Figura para el problema 4

Las gráficas de todos estos enunciados abiertos son rectas paralelas unas a otras.

5\.

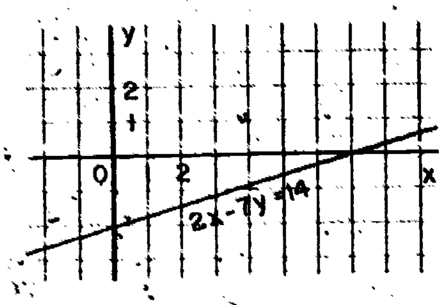


Figura para el problema 5(a)

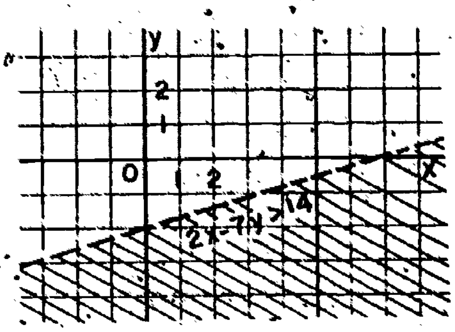


Figura para el problema 5(b)

(a) $2x - 7y = 14$

$y = \frac{2}{7}x - 2$

(b) $2x - 7y > 14$

$y < \frac{2}{7}x - 2$

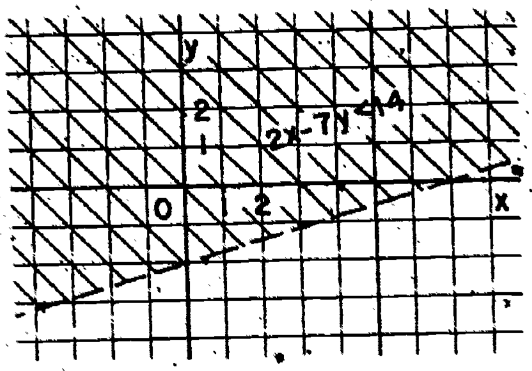


Figura para el problema 5(c)

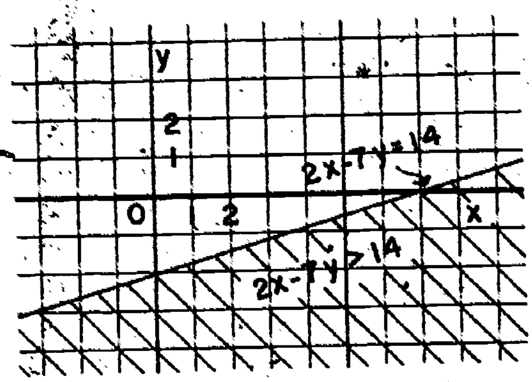


Figura para el problema 5(d)

(c) $2x - 7y < 14$

$$y > \frac{2}{7}x - 2$$

(d) $2x - 7y \geq 14$

$$y \leq \frac{2}{7}x - 2$$

En las partes (b), (c) y (d), para obtener la forma en y, recordamos el trabajo hecho en la sección 13-2, al hallar los conjuntos de validez de inecuaciones. Hágase que el estudiante recuerde los pasos implicados.

$2x - 7y > 14$

$-7y > 14 - 2x$ (Propiedad aditiva de la ordenación)

$-7y > -2x + 14$ (Propiedad conmutativa de la suma)

$y < \frac{2}{7}x - 2$ (Propiedad multiplicativa de la ordenación)

6. (a) $5x - 2y = 10$

$$y = \frac{5}{2}x - 5$$

(b) $2x + 5y = 10$

$$y = -\frac{2}{5}x + 2$$

(c) $5x + y = 10$

$$y = -5x + 10$$

(c) $3x - 4y = 6$

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$$

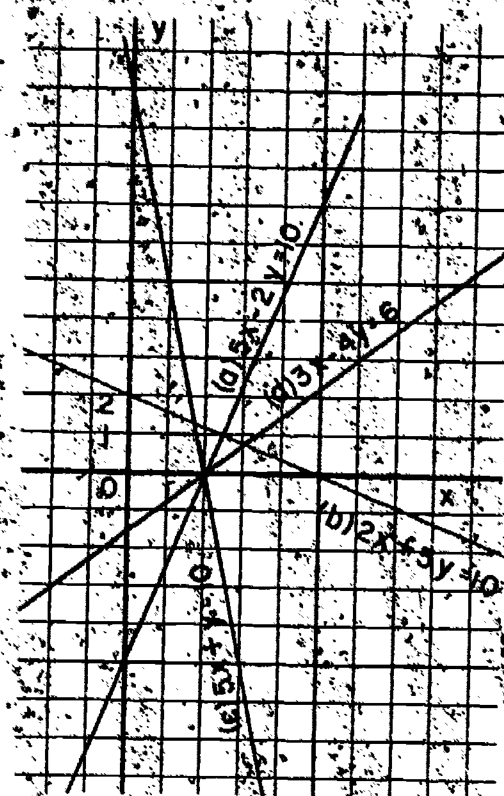


Figura para el problema 6

Al hallar puntos para (d), sería oportuna alguna discusión en la clase sobre valores convenientes para x. El punto (2,0) parece estar en las gráficas de (a), (c) y (d). A continuación verificamos que estas coordenadas satisfacen a los enunciados abiertos correspondientes:

(a) $5(2) - 2(0) = 10$ es un enunciado cierto.

(c) $5(2) + 0 = 10$ es un enunciado cierto.

(d) $3(2) - 4(0) = 6$ es un enunciado cierto.

7\. (a) $2x - 3y = 10$

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{10}{3}$$

Aquí sería de gran ayuda para el estudiante señalar que puede sustituirse x por un número entero de tal manera que resulte un valor entero para y; entonces pueden hallarse tantos otros como se desee, sumando al primer valor de x múltiplos del denominador de la fracción que es el coeficiente de x. Por ejemplo:

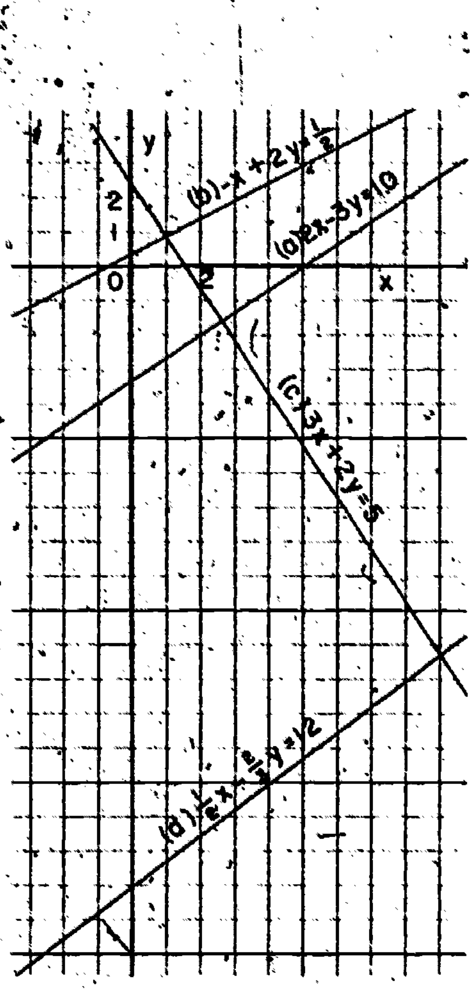


Figura para el problema 7

x	-4	-1	2	8
y	-6	-4	-2	2

(b) $-x + 2y = \frac{1}{2}$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

Aquí es evidente a simple vista, que no hay valores enteros para x que den valores enteros para y. De modo que hacemos lo mejor posible:

x	-4	0	3	6
y	$-1\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$1\frac{3}{4}$	$3\frac{1}{4}$

(c) $3x + 2y = 5$

$y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$

x	-3	1	5	7
y	7	1	-5	-8

(d) $\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y = 12$

$y = \frac{3}{4}x - 18$

x	4	12	16	0
y	-15	-9	-6	-18

8. (a)

x	-3	-2	$-\sqrt{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	3
y	9	4	2	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	2	4	9

(b)

x	-3	-2	$-\sqrt{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	3
y	-9	-4	-2	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	-1	-2	-4	-9

(c)

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	$2\frac{1}{2}$	3
y	10	5	2	$1\frac{1}{4}$	1	$1\frac{1}{4}$	2	5	$7\frac{1}{4}$	10

(d)

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	ningún valor	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Obsérvese que aproximamos $\sqrt{2}$ mediante 1.4 cuando dibujamos gráficas.

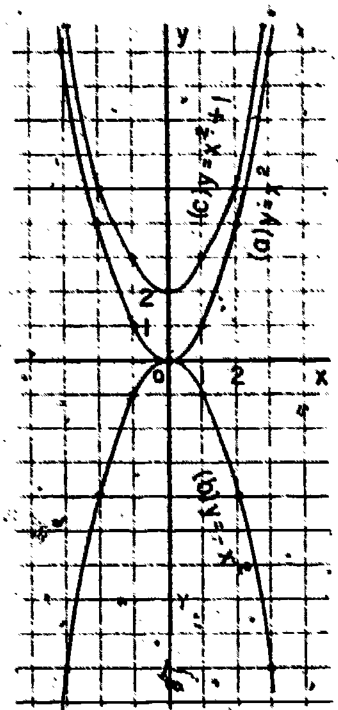


Figura para el problema 8(a)-(c)

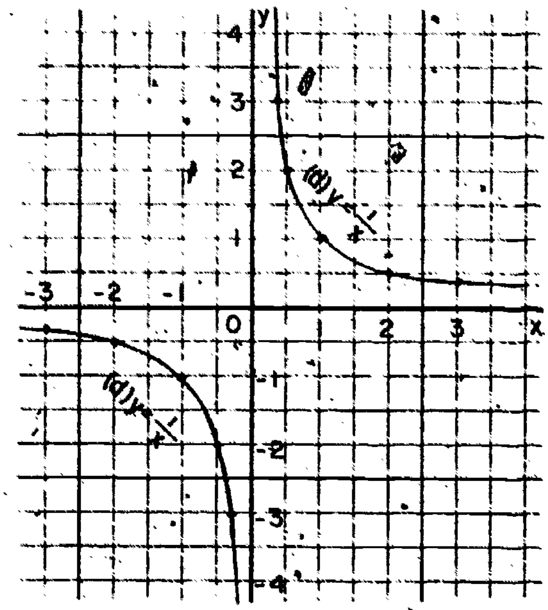


Figura para el problema 8(d)

Las gráficas de estos enunciados no son rectas, sino curvas. Los enunciados abiertos para las tres primeras difieren de las consideradas en problemas anteriores en este capítulo, por el hecho de que en cada una de ellas la x está elevada al cuadrado. En el enunciado abierto para (d), y es igual, no a un múltiplo de x, sino a su recíproco. De manera que no podemos decir que la gráfica de todo enunciado abierto es una recta. No hay ningún perjuicio en decir a los estudiantes que las tres primeras gráficas se llaman parábolas, mientras que la cuarta es una hipérbola. Estas curvas se encontrarán otra vez más adelante.

*9. El objeto de este problema es hacer que los alumnos se percaten de que un punto dado se puede asociar con muchos pares ordenados diferentes, dependiendo ello de la localización de los ejes.

(a)

Punto	(x,y)	(a,b)
P	(-4,2)	(-8,-1)
Q	(-5,6)	(-9,3)
R	(11,8)	(7,5)
S	(-8,-2)	(-12,-5)
T	(8,1)	(4,-2)
U	(2,2)	(-2,-1)
V	(3,-4)	(-1,-7)
W	(12,-2)	(8,-5)

El estudiante dotado puede descubrir rápidamente que para cada punto, "$a = x - 4$" y "$b = y - 3$". Debe acostumbrarse a usar estos hechos como una verificación de sus resultados. Si al tratar la parte (b) lo hace, entonces debe verificar cada par ordenado situando el punto en la figura para este problema.

(b)

(x,y)	(a,b)
(5,-5)	(1,-8)
(-3,-4)	(-7,-7)
(-1,0)	(-5,-3)
(3,5)	(-1,2)

14-3. Pendientes e intersecciones con los ejes coordenados

Los estudiantes necesitan dibujar cuidadosamente las gráficas de (a) a (j) y hallar la ecuación de cada una de estas gráficas como preparación para el Conjunto de problemas 14-3a.

(a)

x	-6	-3	$-2\frac{1}{2}$	0	3	5.1	6
y	-6	-3	$-2\frac{1}{2}$	0	3	5.1	6

Cuando los puntos sucesivos se unen, resultan situados en una recta. No hay puntos en la tabla que no estén en la recta que pasa por los puntos (-6,-6) y (6,6). El punto (8,8) está en la recta, pero no en la parte de ella entre (-6,-6) y (6,6). El enunciado abierto que describe esta gráfica para todos los puntos del plano es "y = x". La recta divide los ángulos formados por los ejes en dos partes iguales.

(b)

x	-6	-5.1	-4.3	0	2.5	4	6.1
y	6	5.1	4.3	0	-2.5	-4	-6.1

Sería fácil, por supuesto, determinar pares que cumplieran la condición, sin hacer la tabla. Una recta pasa por todos los puntos. El enunciado abierto que describe esta recta es "y = -x". Difiere del enunciado abierto en (a), porque aquí asociamos y con el opuesto de x. Los estudiantes pueden notar que esta recta divide en dos partes iguales al otro par de ángulos formados por los ejes.

(c) $y = 2x$

(d) $y = 6x$

(e) $y = 3x$

(f) $y = -6x$

(g) $y = -3x$

(h) $y = \frac{1}{2}x$

(i) $y = -\frac{1}{2}x$

(j) $y = \frac{1}{6}x$

(k) $y = -\frac{1}{5}x$

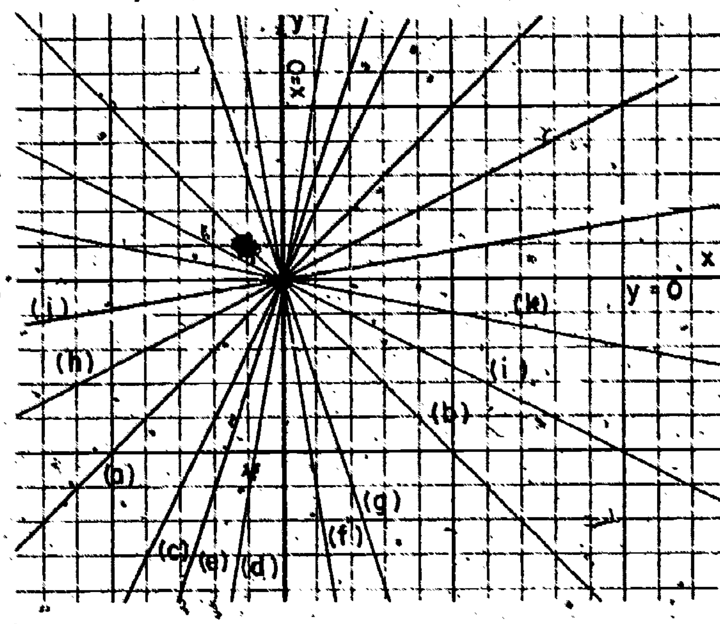


Figura 1

<u>Respuestas al Conjunto de problemas 14-3a</u>; página 437-438:

1. Los coeficientes de x en los enunciados abiertos para los cuales las rectas están entre las gráficas de "$y = x$" <u>y</u> "$x = 0$", son 2, 6, y 3. Observamos que todos estos números son mayores que 1.

2. Los coeficientes de x en los enunciados abiertos para los cuales las rectas están entre las gráficas de "$y = 0$" <u>y</u> "$y = x$", son $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{6}$. Estos coeficientes son mayores que 0, pero menores que 1.

3. Los coeficientes de x en los enunciados abiertos para los cuales las rectas están entre las gráficas de "$y = 0$" <u>y</u> "$y = -x$", son $-\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{6}$. Estos coeficientes son menores que 0, pero mayores que -1.

4. Los coeficientes de x en los enunciados abiertos para los cuales las rectas están entre las gráficas

de "$y = -x$" y "$x = 0$", son -6 y -3. Estos coeficientes son menores que -1.

5. La gráfica de "$y = 0.01x$" está entre las gráficas de "$y = 0$" y "$y = x$".
   La gráfica de "$y = -100x$" está entre las gráficas de "$y = -x$" y "$x = 0$".
   La gráfica de "$y = -56x$" está entre las gráficas de "$y = -x$" y "$x = 0$".
   La gráfica de "$y = -\frac{5}{6}x$" está entre las gráficas de "$y = -x$" y "$y = 0$".
   La gráfica de "$y = \frac{5x}{12}$" está entre las gráficas de "$y = x$" y "$y = 0$".
   La gráfica de "$y = -\frac{25x}{24}$" está entre las gráficas de "$y = -x$" y "$x = 0$".
6. Hay muchas rectas que contienen el origen. Dónde está situada, con respecto a los ejes, una recta que contiene el origen, depende del coeficiente de x en su enunciado abierto. Cuando el coeficiente de x es positivo, la recta está en los cuadrantes I y III. Cuando el coeficiente de x es negativo, la recta está en los cuadrantes II y IV. Cuando el valor absoluto del coeficiente es menor que 1, la recta está entre "$y = -x$" y "$y = 0$", ó entre "$y = x$" y "$y = 0$". Cuando el valor absoluto del coeficiente es mayor que 1, la recta está entre "$y = -x$" y "$x = 0$", ó entre "$y = x$" y "$x = 0$".
7. Las gráficas de ecuaciones de la forma "$y = kx$", donde k es un número real, son rectas que pasan por el origen. Cuando k es positivo, la gráfica está en los cuadrantes I y III. Cuando k es negativo, la gráfica está en los cuadrantes II y IV. Cuando k

está entre 0 y 1, la gráfica está entre las gráficas de "$y = x$" y "$y = 0$". Cuando $k > 1$, la gráfica está entre las gráficas de "$y = x$" y "$x = 0$". Cuando $k < -1$, la gráfica está entre las gráficas de "$y = -x$" y "$x = 0$". Cuando $|k| > 1$, la gráfica está entre las gráficas de "$y = x$" y "$x = 0$", ó entre las gráficas de "$y = -x$" y "$x = 0$". Cuando $|k| < 1$, la gráfica está entre las gráficas de "$y = 0$" y "$y = x$", o entre "$y = -x$" y "$y = 0$". Cuando k es 0, la gráfica es el eje x.

<u>Páginas</u> <u>438-439</u>. Para hallar las ordenadas de puntos para el tercer enunciado abierto, "$y = \frac{2}{3}x - 3$", restamos 3 de la ordenada de cada punto en la gráfica del primero. Las coordenadas de los puntos en los cuales las rectas (a), (b) y (c) intersecan al eje vertical son (0,0), (0,4) y (0,-3), respectivamente. La ordenada de cada par es el mismo número que el añadido al término "$\frac{2}{3}x$" en el correspondiente enunciado abierto.

<u>Páginas</u> <u>439-440</u>. La gráfica de "$y = \frac{2}{3}x + 4$" podría obtenerse trasladando la gráfica de "$y = \frac{2}{3}x$" 4 unidades hacia arriba.

La gráfica de "$y = \frac{2}{3}x - 3$" podría obtenerse trasladando la gráfica de "$y = \frac{2}{3}x$" 3 unidades hacia abajo.

Los enunciados abiertos son:

$$y = \frac{2}{3}x + 6$$

$$y = \frac{2}{3}x - 6$$

Sus gráficas se muestran en la figura 2.

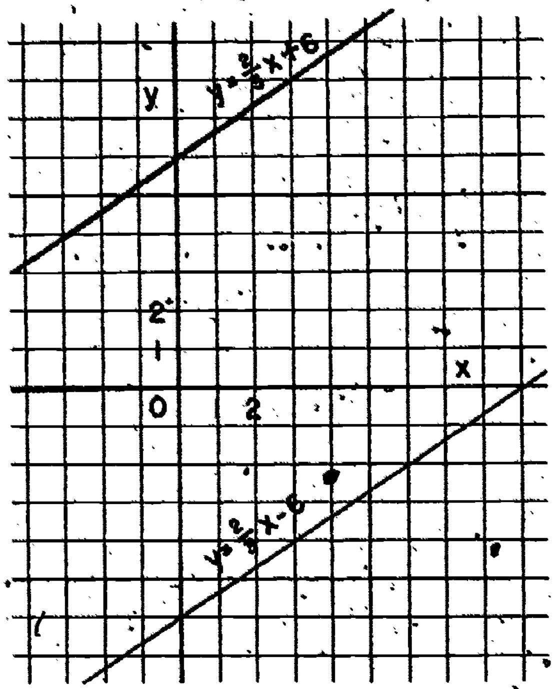


Figura 2

La pendiente es negativa cuando la recta desciende a medida que se recorre de izquierda a derecha. La pendiente es 0 cuando la recta es paralela al eje x. La recta "x = 2" no tiene pendiente, porque no podemos escribir "x = 2" en la forma en y. Así, cada recta no vertical tiene una pendiente, y solamente las rectas verticales no tienen pendientes.

Página 441. Si tomamos como primer número en el numerador y en el denominador la ordenada y la abscisa, respectivamente, del punto (2,2), la razón es: $\frac{2 - 7}{2 - 4}$, ó $\frac{5}{2}$. De modo que obtenemos el mismo valor para la razón, no importa qué par ordenado tomamos primero.

Página 442. Podemos elegir, esencialmente, entre dos posibles definiciones de la pendiente de la recta: el coeficiente de x en la forma en y de la recta, y la razón de la variación vertical a la variación horizontal al pasar de un punto a otro en la recta (no vertical). En un curso de geometría analítica, en el cual a una recta se le da una significación geométrica, la segunda se tomaría como definición, y la primera se demostraría como un teorema. Aquí hemos definido una recta mediante su ecuación, y es natural tomar la primera definición y demostrar la segunda. Los estudiantes más aprovechados preferirán remplazar la fraseología del teorema 14-3 por el simbolismo más preciso: Si (a,b) y (c,d) son puntos distintos en una recta no vertical L, entonces la pendiente de L es

$$\frac{b-d}{a-c}.$$

La pendiente de la recta que contiene los puntos (6,5) y (-2,-3) es $\frac{5-(-3)}{6-(-2)}$, ó 1. La pendiente de la recta que contiene los puntos (2,7) y (7,3) es $\frac{3-7}{7-2}$, ó $-\frac{4}{5}$.

Respuestas al Conjunto de problemas 14-3b; página 443:

1. (a) $\frac{2-(-3)}{6-(-7)} = \frac{5}{13}$ (e) $\frac{-2-11}{-1-4} = \frac{-13}{-5} = \frac{13}{5}$

   (b) $\frac{3-3}{8-(-7)} = \frac{0}{15} = 0$ (f) $\frac{0-5}{6-6} = \frac{-5}{0}$ no tiene pendiente

   (c) $\frac{-1-6}{-4-8} = \frac{-7}{-12} = \frac{7}{12}$ (g) $\frac{-2-0}{-6-0} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$

   (d) $\frac{10-(-12)}{-8-3} = \frac{22}{-11} = -2$ (h) $\frac{4-0}{-7-0} = \frac{4}{-7} = -\frac{4}{7}$

Página 444. La ecuación de una recta paralela a la recta de la figura 10 del texto, pero que contiene el punto (0,6), es "$y = -\frac{4}{3}x + 6$".

Respuestas al Conjunto de problemas 14-3c; página 445:

1. $y = \frac{4}{3}x + 6$
2. $y = \frac{4}{3}x - 12$
3. $-\frac{4}{3}$
4. $-\frac{2}{3}$

5. $y = -\frac{5}{6}x - 3$

6. La pendiente es $\frac{11 - 4}{4 - 2} = \frac{7}{2}$; la ecuación es
"$y = \frac{7}{2}x - 3$"

Verificación:

$11 = \frac{7}{2}(4) - 3$

$4 = \frac{7}{2}(2) - 3$

7. La pendiente es $\frac{6 - (-4)}{5 - (-5)} = \frac{10}{10} = 1$; la ecuación parece ser "$y = x$", pero (5,6) y (-5,-4) no están en esta recta. No hay ninguna recta que cumpla estas condiciones.

Página 447. Si la pendiente de la recta hubiera sido $\frac{2}{3}$, hubiéramos escogido puntos partiendo del (0,6), contando tres unidades a la derecha y dos unidades hacia arriba, o tres unidades a la izquierda y dos unidades hacia abajo. Otro punto estaría situado seis unidades a la derecha y cuatro unidades hacia arriba, y así sucesivamente. El enunciado abierto para esta recta es $y = \frac{2}{3}x + 6$.

Recuérdese a los estudiantes que las rectas verticales no tienen pendientes, y tales rectas tienen ecuaciones "$x = k$", donde k es un número. Así, la ecuación de la recta que contiene el punto (-3,4) y que no tenga pendiente es $x = -3$.

Respuestas al Conjunto de problemas 14-3d; páginas 447-452:

1. (a) Puesto que la intersección con el eje y resulta ser (0,2) en la gráfica, la ecuación de la recta es $y = \frac{5}{6}x + 2$.

(b) La recta que contiene (-6,-3) y que carece de pendiente tiene por ecuación $x = -6$.

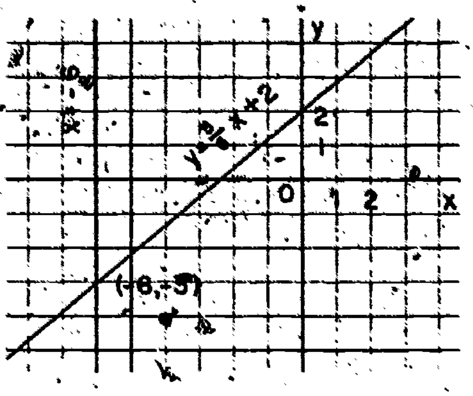


Figura para el problema 1

2. Llámese la atención sobre la distinción entre las pendientes de (c) y (e). Para (c), la pendiente es 0, y la ecuación es "$y = 4$". Para (e), no hay pendiente, puesto que el denominador de la forma fraccionaria de la pendiente es $3 - 3$, ó 0.

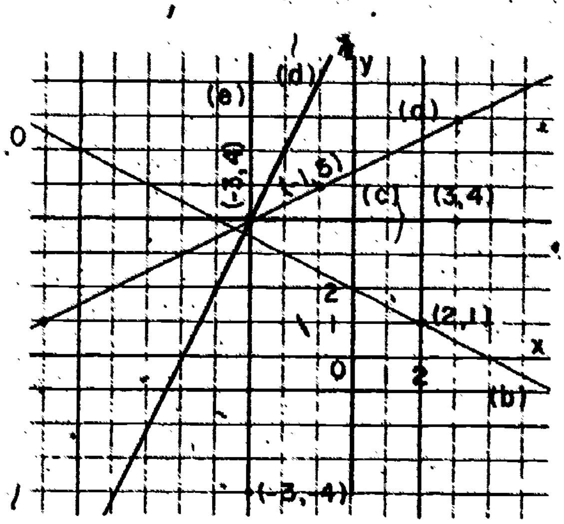


Figura para el problema 2

3. La pendiente de la recta que contiene (1,-1) y (3,3) es

$$\frac{3 - (-1)}{3 - 1}, \text{ ó } 2.$$

La pendiente de la recta que contiene (1,-1) y (-3,-9) es

$$\frac{-9 - (-1)}{-3 - 1}, \text{ ó } 2.$$

Por lo tanto, el punto (-3,-9) está en la recta que contiene (1,-1) y (3,3).

4. (a) Todas las rectas pasan por el origen, o tienen el punto (0,0) común.

(b) Todas las rectas tienen la misma pendiente, $\frac{1}{2}$.

(c) Todas las rectas tienen la misma ordenada en el origen, -3.

(d) Las rectas tienen la misma pendiente, $-\frac{1}{2}$. Además, las dos rectas cuyos enunciados abiertos son "$\frac{1}{2}x + y = 3$" y "$2x + 4y = 12$" tienen la misma ordenada en el origen, y, por tanto, son paralelas a la primera.

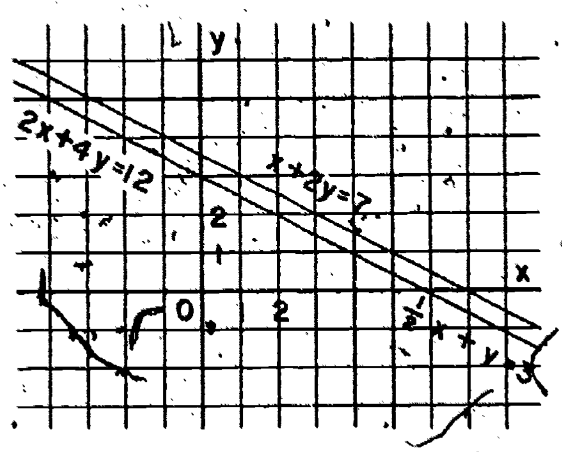


Figura para el problema 4(d)

5. (a) $3x + 4y = 12$ (b) $2x - 3y = 6$

$y = -\frac{3}{4}x + 3$ $y = \frac{2}{3}x - 2$

La ordenada en el origen de (a) es 3.

La ordenada en el origen de (b) es -2. La pendiente de la primera recta es $-\frac{3}{4}$. La pendiente de la segunda recta es $\frac{2}{3}$.

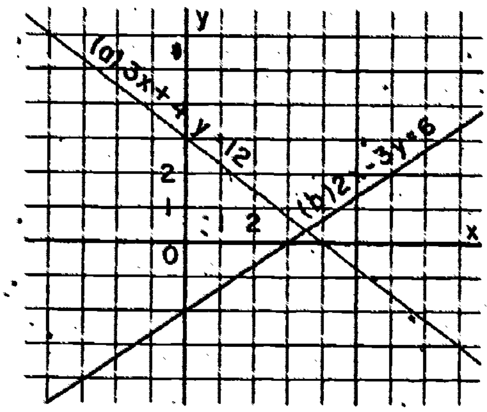


Figura para el problema 5

6. (a) $y = 2x - 7$

(b) $y = \frac{3}{4}x - 3$

(c) $y = -\frac{4}{3}x + 4$

(d) $y = \frac{1}{2}x - 2$

Las gráficas de estos enunciados son rectas, porque cada enunciado abierto es de la forma

$Ax + By + C = 0.$

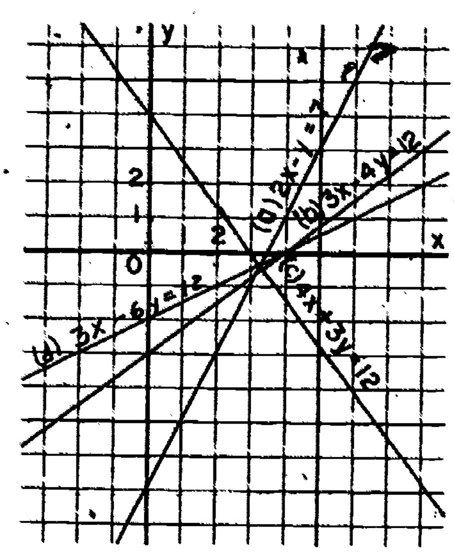


Figura para el problema 6

7. (a) $y = \frac{2}{3}x$ (d) $y = -7x - 5$

(b) $y = \frac{3}{4}x - 2$ (e) $y = mx + b$

(c) $y = -2x + \frac{4}{3}$

La ecuación de cada recta puede escribirse en la forma $Ax + By + C = 0$. Cada una de éstas puede ponerse en la forma $y = mx + b$, excepto cuando $B = 0$. Ni el eje y ni ninguna recta paralela al mismo pueden ponerse en la forma $y = mx + b$. La ecuación del eje x, "$y = 0$", es de esta forma con m y b ambos 0.

8. La pendiente es $\frac{4 - 0}{3 - 0}$, ó $\frac{4}{3}$. La ordenada en el origen es 0. La ecuación es "$y = \frac{4}{3}x$".

9. Puesto que la ordenada en el origen es 7, la recta contiene el punto (0,7). Como también contiene el punto (6,8), su pendiente se puede escribir en la forma $\frac{8 - 7}{6 - 0}$, ó $\frac{1}{6}$. La ecuación de la recta es "$y = \frac{1}{6}x + 7$".

10. La pendiente es $\frac{(-4) - 2}{3 - (-3)}$ ó -1. La pendiente de la recta que contiene $(-3,2)$ y (x,y) es $\frac{y - 2}{x - (-3)}$. La pendiente de la recta que contiene $(3,-4)$ y (x,y) es $\frac{y - (-4)}{x - 3}$. Puesto que -1 y $\frac{y - 2}{x - (-3)}$ son nombres para el mismo número,

$$\frac{y - 2}{x - (-3)} = -1, \text{ siempre que } x \neq -3.$$

Entonces, obtenemos $y - 2 = (-1)(x + 3)$ después de multiplicar ambos miembros por "$(x + 3)$", con la restricción de que $x \neq -3$. Luego,

$$y = -x - 1.$$

Como -1 y $\frac{y - (-4)}{x - 3}$ son nombres para el mismo número,

$$\frac{y - (-4)}{x - 3} = -1, \text{ siempre que } x \neq 3.$$

Entonces $y + 4 = (-1)(x - 3)$, ó, es decir,

$y = - x - 1.$

11. (a) La pendiente es $\frac{2 - 3}{(-5) - 0}$, ó $\frac{1}{5}$, y la ordenada en el origen es 3, de modo que, la ecuación es "$y = \frac{1}{5}x + 3$".

(b) La pendiente es $\frac{(-4) - 8}{0 - 5}$, ó $\frac{12}{5}$, y la ordenada en el origen es -4, de modo que, la ecuación es "$y = \frac{12}{5}x - 4$".

(c) La pendiente es $\frac{-7 - (-2)}{-3 - 0}$, ó $\frac{5}{3}$, y la ordenada en el origen es -2, de modo que, la ecuación es "$y = \frac{5}{3}x - 2$".

(d) La pendiente es $\frac{6 - (-2)}{0 - 5}$, ó $-\frac{8}{5}$, y la ordenada en el origen es 6, de modo que, la ecuación es "$y = -\frac{8}{5}x + 6$".

(e) Dos expresiones para la pendiente son

$\frac{y - 3}{x - (-3)}$ y $\frac{0 - 3}{6 - (-3)} = -\frac{1}{3}$, si $x \neq -3$.

Entonces $\frac{y - 3}{x + 3} = -\frac{1}{3}$,

y $\qquad y - 3 = -\frac{1}{3}(x + 3)$.

(f) Dos expresiones para la pendiente son

$$\frac{y - 3}{x - (-3)} \text{ y } \frac{3 - 3}{-5 - (-3)} = 0, \text{ si } x \neq -3.$$

Entonces $\dfrac{y - 3}{x + 3} = 0,$

y $\quad y - 3 = 0.$

(g) La pendiente es $\dfrac{5 - 3}{-3 - (-3)}$, ó $\dfrac{2}{0}$. Pero $\dfrac{2}{0}$ no es un número. Por lo tanto, la recta no tiene pendiente. Las únicas rectas que no tienen pendiente son las rectas verticales. La recta vertical por el punto (-3,3) tiene la ecuación "x + 3 = 0".

(h) Dos expresiones para la pendiente son

$$\frac{y - 2}{x - 4} \text{ y } \frac{2 - 1}{4 - (-3)} = \frac{1}{7}, \text{ si } x \neq 4.$$

Entonces $\dfrac{y - 2}{x - 4} = \dfrac{1}{7},$

y $\quad y - 2 = \frac{1}{7}(x - 4).$

12.

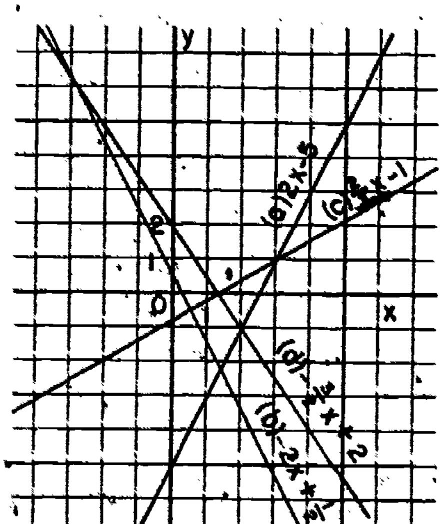


Figura para el problema 12

*13. (a) $2w + 2(w + 3)$. Esta es una expresión lineal en w, pues usando las propiedades distributiva y asociativa, se convierte en "$4w + 6$".

(b) $w(w + 3)$, ó $w^2 + 3w$. Esta no es una expresión lineal en w.

*14. (a) πd. Esta expresión es lineal en d. Si se duplica el diámetro, la longitud de la circunferencia se duplica; si el diámetro se reduce a la mitad, la longitud de la circunferencia se reduce a la mitad. La razón $\frac{c}{d}$ es igual a π; esta razón no cambia cuando d varía.

(b) $\frac{1}{4}\pi d^2$. (Si el estudiante no está familiarizado con esta fórmula, puede considerarse como el resultado de combinar los dos enunciados familiares, "el área es πr^2" y "d es 2r", ó "r es $\frac{1}{2}d$".) Esta expresión no es lineal en d, pero es lineal en d^2. Si A representa el área, $\frac{A}{d} = \frac{1}{4}\pi d$; $\frac{A}{d^2} = \frac{1}{4}\pi$. El valor de $\frac{A}{d}$ cambia cuando varía el valor de d; el valor de $\frac{A}{d^2}$ no varía cuando se cambia d.

*15. (a) La longitud de una circunferencia varía directamente como el diámetro. La constante de proporcionalidad es π. El área del disco no varía directamente como el diámetro, pero varía directamente como el cuadrado del diámetro. La constante de proporcionalidad es $\frac{1}{4}\pi$.

(b) Con respecto a la gráfica de una expresión lineal, la constante de proporcionalidad indica la pendiente de la recta.

(c) Si la constante de proporcionalidad es negativa, el valor de la expresión disminuye cuando el valor de la variable aumenta.

(d) La expresión tendría la forma "$k\sqrt{x}$".

*16. La distancia en millas sería "kt". Esta es una expresión lineal en t. La distancia varía directamente como el tiempo. La constante de proporcionalidad es la velocidad en millas por hora. Si el automóvil ha recorrido 25 millas al cabo de 20 minutos (que es $\frac{1}{3}$ de una hora), hallamos la constante de proporcionalidad, $\underline{k}$, como sigue :

$$k\left(\frac{1}{3}\right) = 25$$

$$k = 75$$

*17.

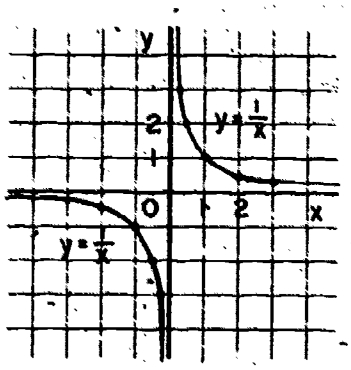


Figura para el problema 17(a)

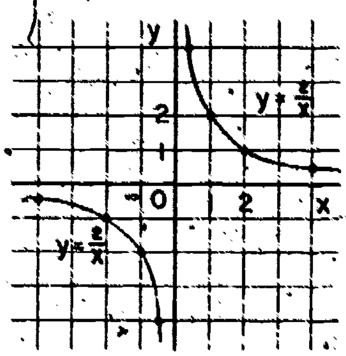


Figura para el problema 17(a)

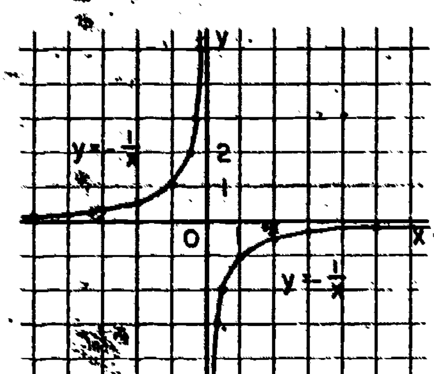


Figura para el problema 17(a)

(b) Si a la variable x se le asignan valores positivos crecientes, los valores de $\frac{k}{x}$ $(k > 0)$ disminuyen. Si k es negativo, entonces para valores positivos crecientes de x, los valores de $\frac{k}{x}$ aumentan.

18. (a) $\frac{25}{w}$, donde $w > 0$.

(b) Esta es una variación inversa, y la constante de proporcionalidad es 25.

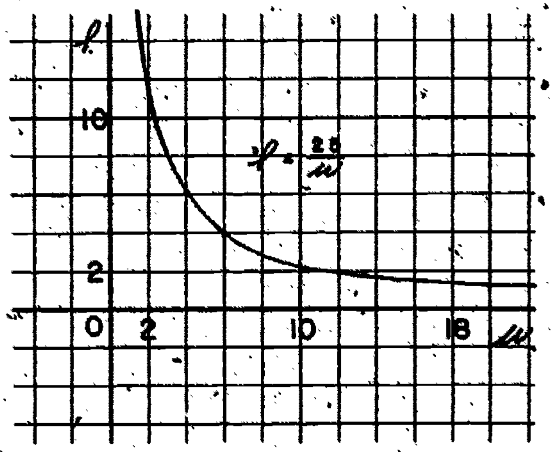


Figura para el problema 18.

Los puntos utilizados incluyen:

w	$1\frac{1}{4}$	2	4	5	$6\frac{1}{4}$	$12\frac{1}{2}$	20
ℓ	20	$12\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{4}$	5	4	2	$1\frac{1}{4}$

*14-4. Gráficas de enunciados abiertos que contienen solamente enteros

Esta sección se incluye con el propósito de que el estudiante se dé cuenta clara de que los enunciados abiertos no necesariamente tienen que incluir todos los números reales como posibles miembros de sus conjuntos de validez, y reconozca la situación correspondiente en cuanto afecta a las gráficas.

Página 454. Cada ordenada es una tercera parte de la abscisa correspondiente. Por lo tanto, obtendremos pares ordenados de enteros solamente para abscisas que son múltiplos de 3. El 1 y el 2 no son múltiplos de 3, así que no pueden ser abscisas.

Respuestas al Conjunto de problemas 14-4; páginas 457-460:

1. (a)

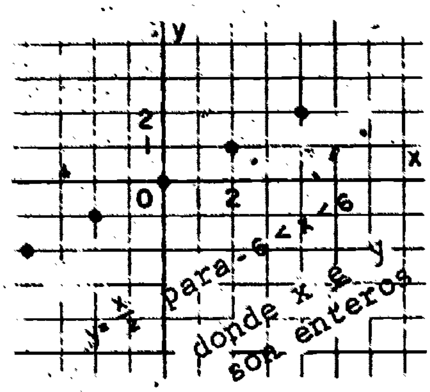


Figura para el problema 1(a)

(b)

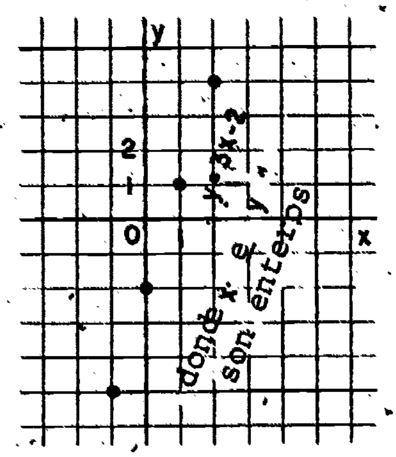


Figura para el problema 1(b)

(c)

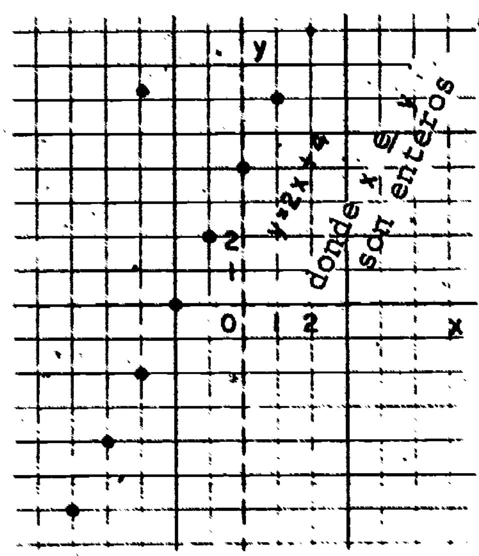


Figura para el problema 1(c)

2. (a)

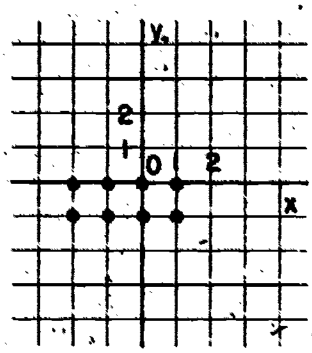


Figura para el problema 2(a)

(b)

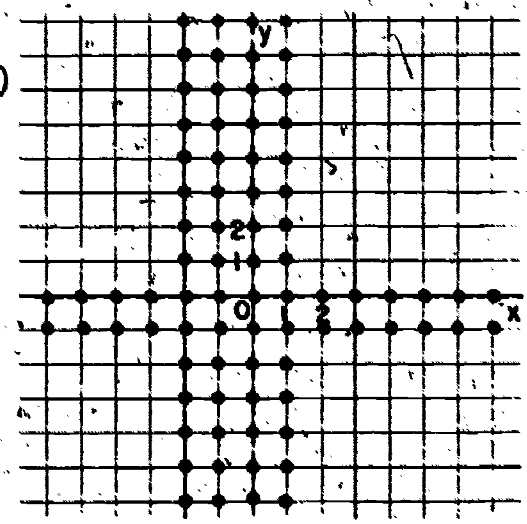


Figura para el problema 2(b)

(c)

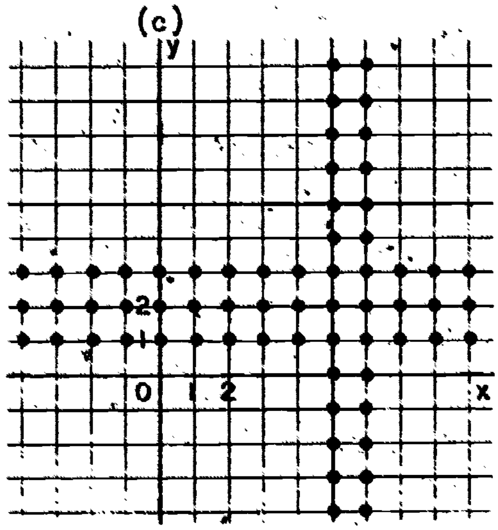


Figura para el problema 2(c)

(d)

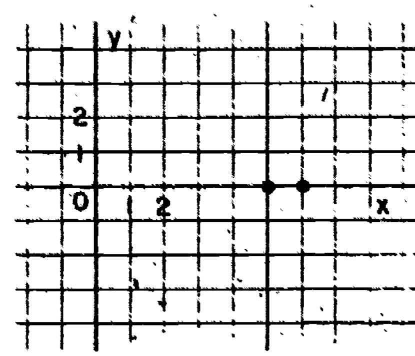


Figura para el problema 2(d)

3. $-2 < x < 0$ y $2 < y < 4$, donde x, y son enteros.

4. (a) $y = -3x + 1$, donde x, y son enteros.

(b) $4 < x < 8$ y $-2 < y < 2$, donde x, y son enteros, ó

$5 \leq x \leq 7$ y $-1 \leq y \leq 1$, donde x, y son enteros.

(c) $y = -x - 3$ para $-8 < x < -4$, donde x, y son enteros.

(d) $x = -2$ y $2 < y < 7$, donde x, y son enteros.

(e) $x = -4$ ó $-7 < y < -2$, donde x, y son enteros.

(f) $-2 < x < 2$ y $-4 < y < 3$, donde x, y son enteros.

(g) $x > -6$ y $y < 6$ y $y \geq x + 6$, donde x, y son enteros.

5. (a) (b)

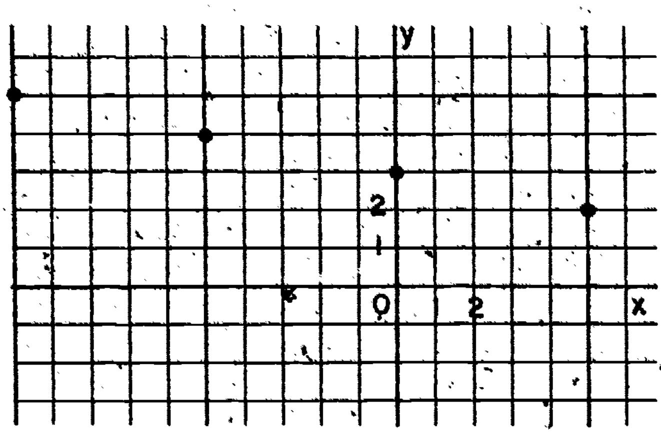


Figura para el problema 5(a)

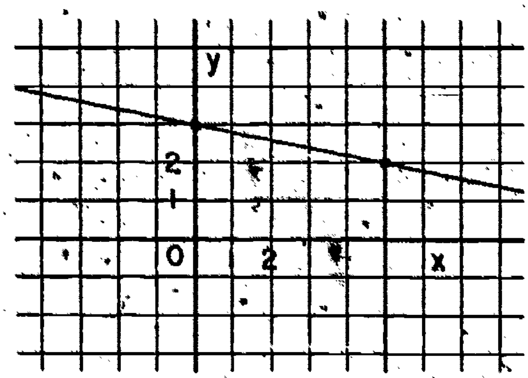


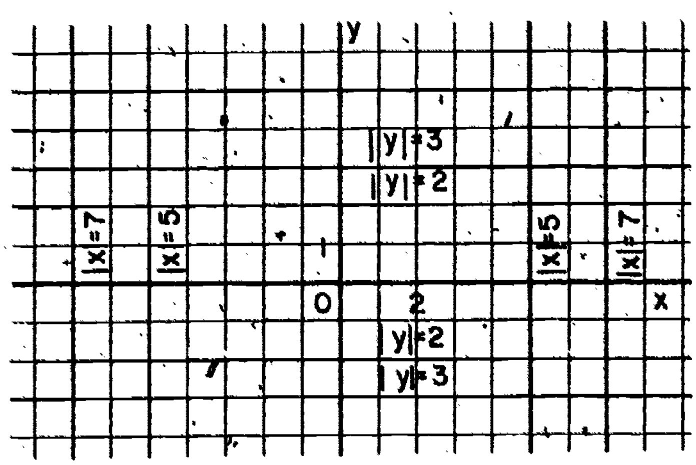
Figura para el problema 5(b)

La gráfica de (a) es un conjunto de puntos aislados, mientras que la gráfica de (b) es una línea recta. Puntos sobre (b), pero no sobre (a), incluyen: $(1, 2\frac{4}{5})$, $(-2, 3\frac{2}{5})$, etc.

La gráfica de (c) tendría que trazarse como la gráfica de (b), puesto que no sería posible indicar los "huecos" para los valores irracionales. Si x es racional, y es racional.

14-5. Gráficas de enunciados abiertos que contienen el valor absoluto

Esta sección, que trata del valor absoluto, es importante, no solamente por la ocasión que procura para recordar el estudio del valor absoluto ya antes hecho en el curso, sino también por la oportunidad que da para examinar lo que sucede a una gráfica, cuando se hacen ciertos cambios en su ecuación. Página 461. Las gráficas de $|x| = 5$ y $|x| = 7$ son pares de rectas verticales, y las gráficas de $|y| = 2$ y $|y| = 3$ son pares de rectas horizontales. La gráfica de $|x| = k$ es una recta sencilla, si y solamente si $k = 0$.



Respuestas al Conjunto de problemas 14-5a; páginas 463-464:

1. (a)

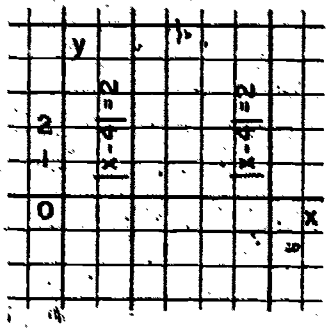


Figura para el problema 1(a)

(b)

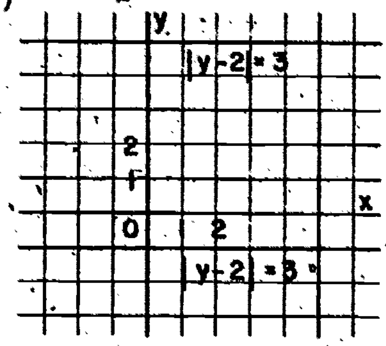


Figura para el problema 1(b)

(c)

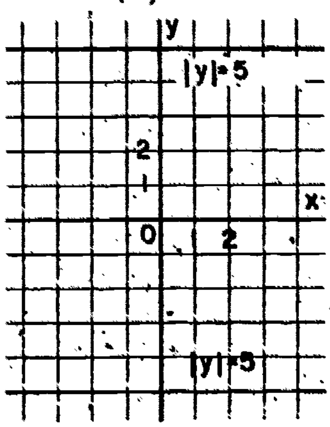


Figura para el problema 1(c)

(d)

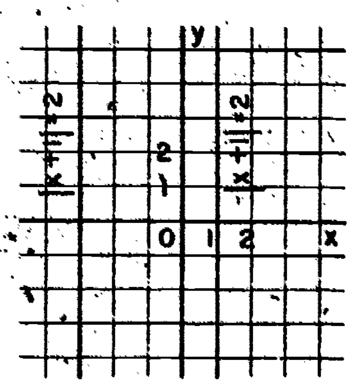


Figura para el problema 1(d)

(e)

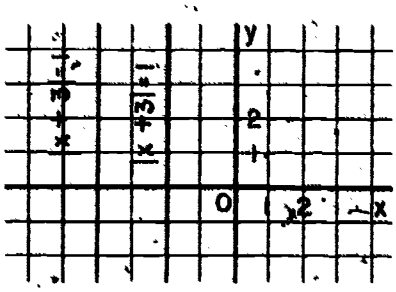


Figura para el problema 1(e)

(f)

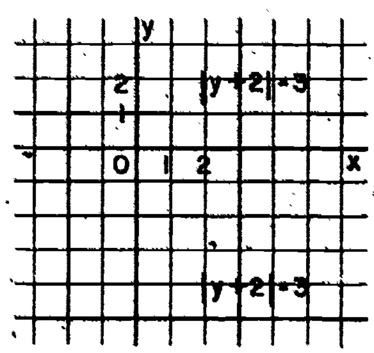


Figura para el problema 1(f)

2. (a)

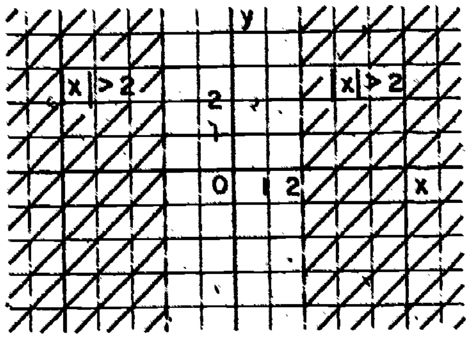


Figura para el problema 2(a)

(b)

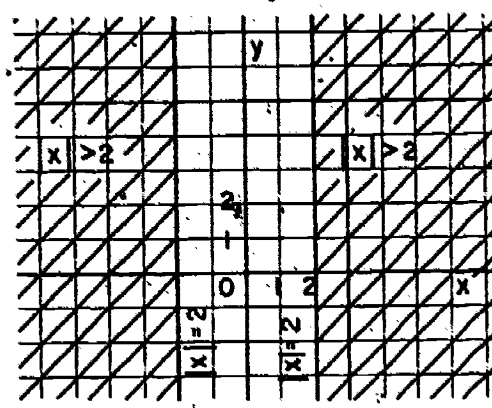


Figura para el problema 2(b)

(c)

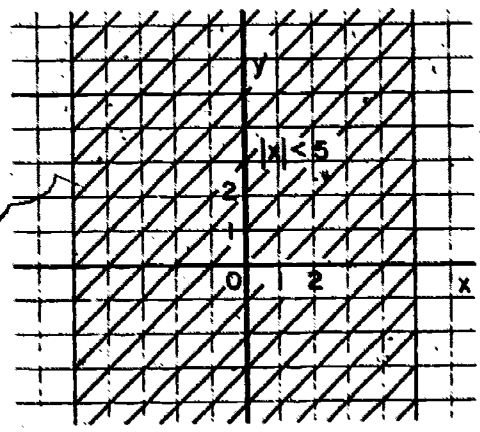


Figura para el problema 2(c)

3. (a)

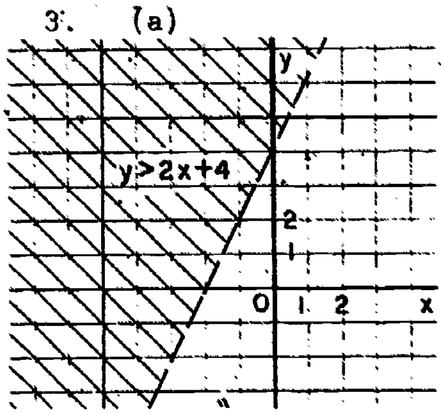


Figura para el problema 3(a)

(b)

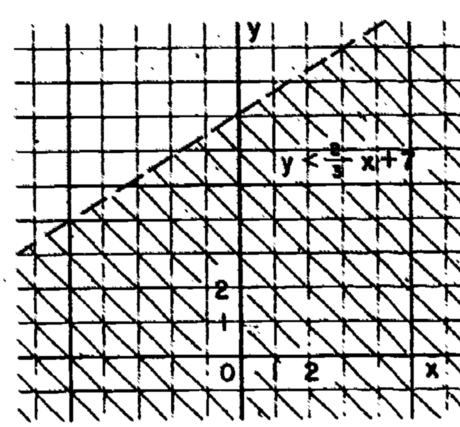


Figura para el problema 3(b)

3. (c) (d)

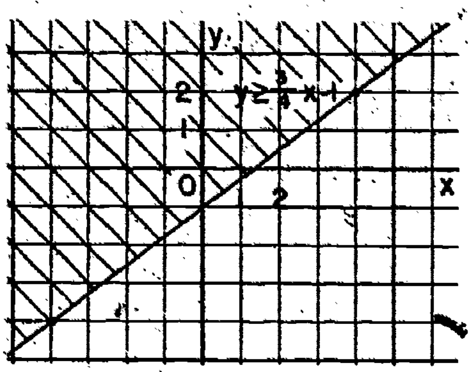


Figura para el problema 3(c)

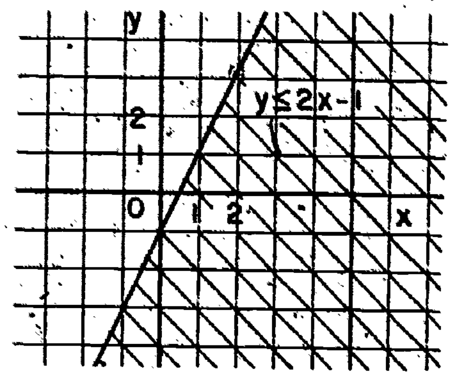


Figura para el problema 3(d)

4. (a) (b)

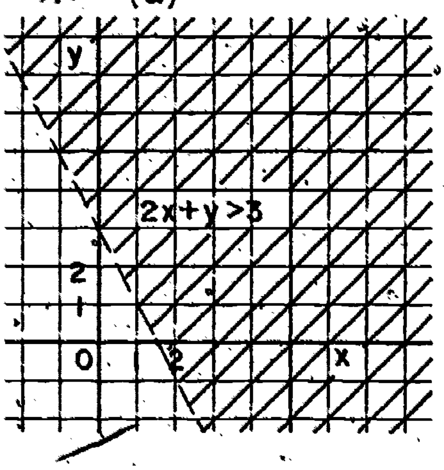


Figura para el problema 4(a)

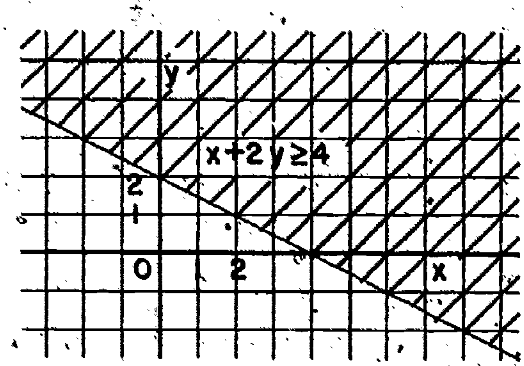


Figura para el problema 4(b)

(c) (d)

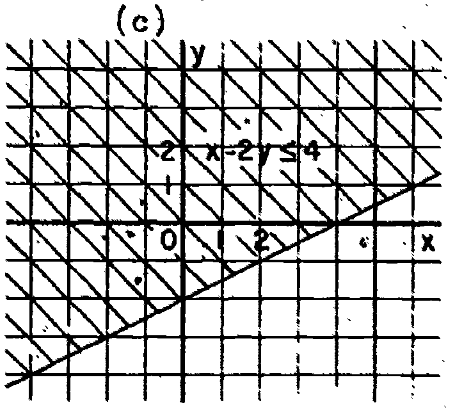


Figura para el problema 4(c)

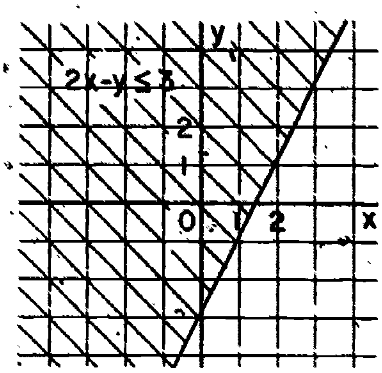


Figura para el problema 4(d)

5. (1) $y = 3x$

(2) $y = -x + 4$

(3) $y = \frac{1}{2}x + 6$

(4) $|x| = 6$

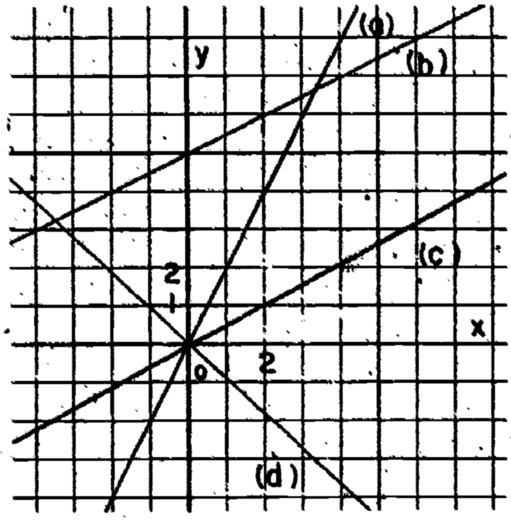
6. 

Figura para el problema 6

Página 465. Sea x positivo o negativo, el valor absoluto de x tiene que ser positivo. Así que cada valor de y es positivo para todo valor de x, excepto 0. Para $x = 0$, $y = 0$.

Las dos rectas que constituyen la gráfica de $y = |x|$ forman un ángulo recto, porque cada una forma una mitad de ángulo recto con la recta $y = 0$. Una ecuación sencilla cuya gráfica sería dos rectas que no forman un ángulo recto, es "$y = 2|x|$" ó "$y = -2|x|$", o cualquier ecuación de la forma "$y = k|x|$", donde k no es 1.

Respuestas al Conjunto de problemas 14-5b; páginas 466-468:

1\. (a)

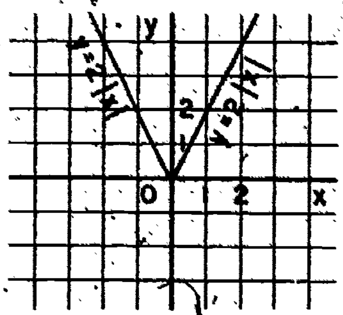


Figura para el problema 1(a)

(b)

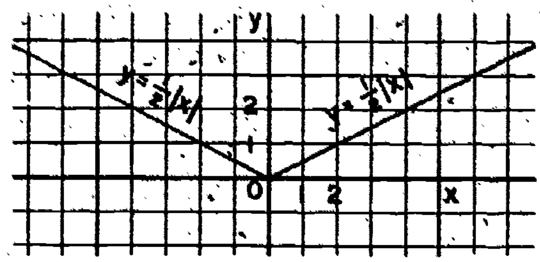


Figura para el problema 1(b)

(c)

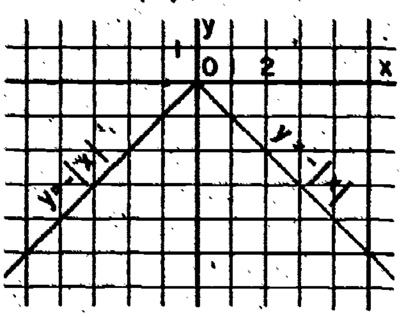


Figura para el problema 1(c)

(d)

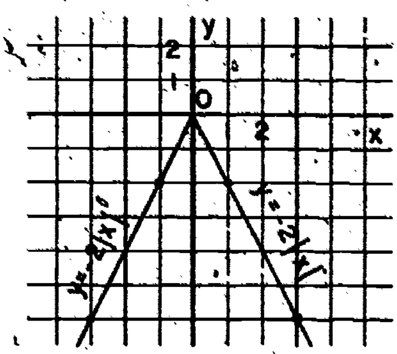


Figura para el problema 1(d)

(e)

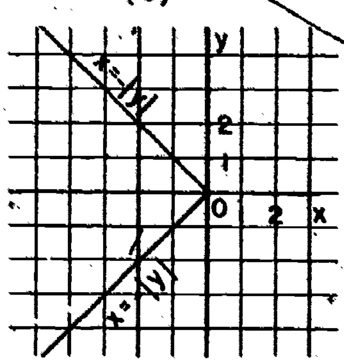


Figura para el problema 1(e)

(f)

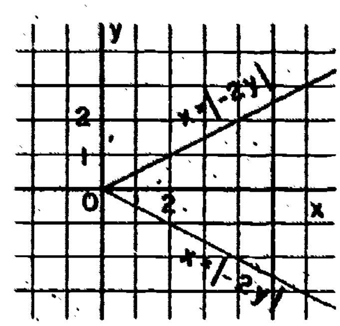


Figura para el problema 1(f)

2. (a)

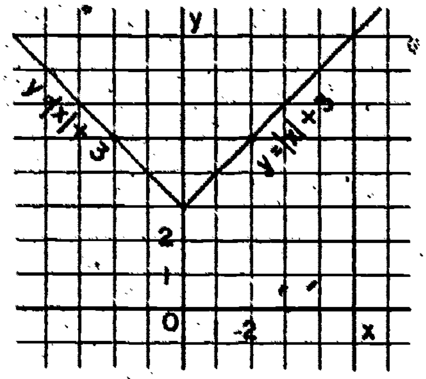


Figura para el problema 2(a)

(b)

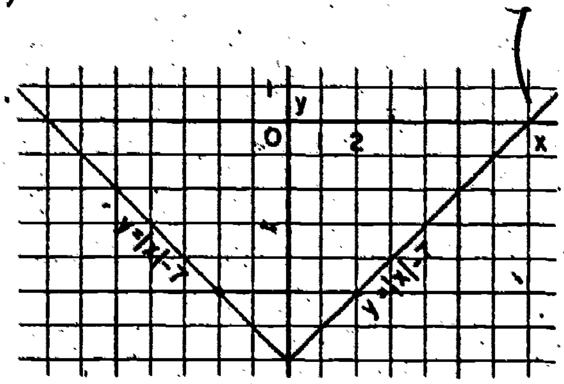


Figura para el problema 2(b)

(c)

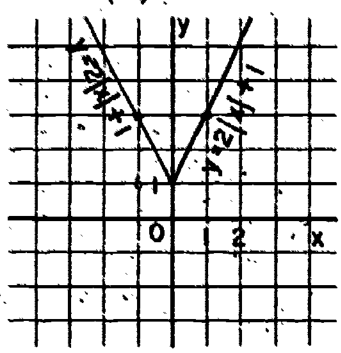


Figura para el problema 2(c)

(d)

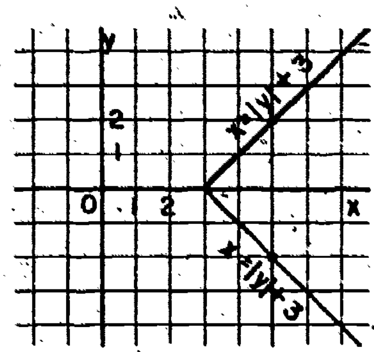


Figura para el problema 2(d)

(e)

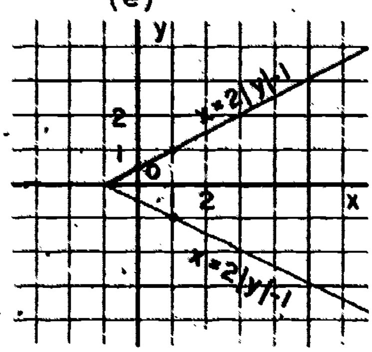


Figura para el problema 2(e)

(f)

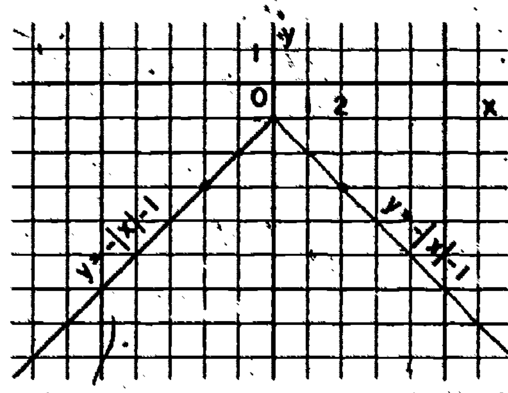


Figura para el problema 2(f)

3. (a)

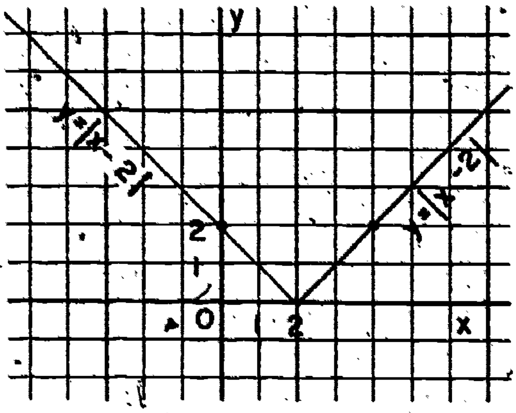


Figura para el problema 3(a)

(b)

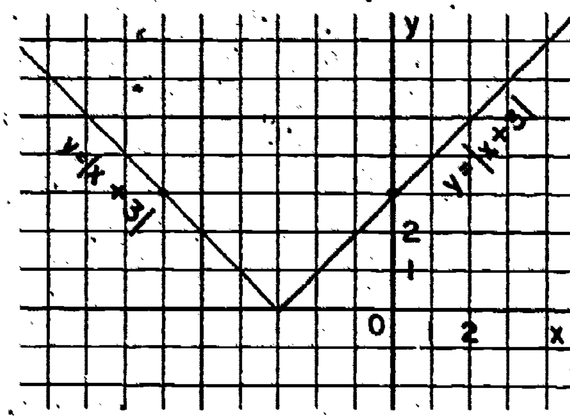


Figura para el problema 3(b)

(c)

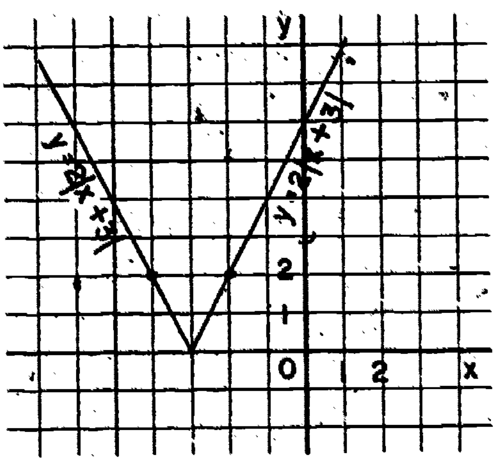


Figura para el problema 3(c)

(d)

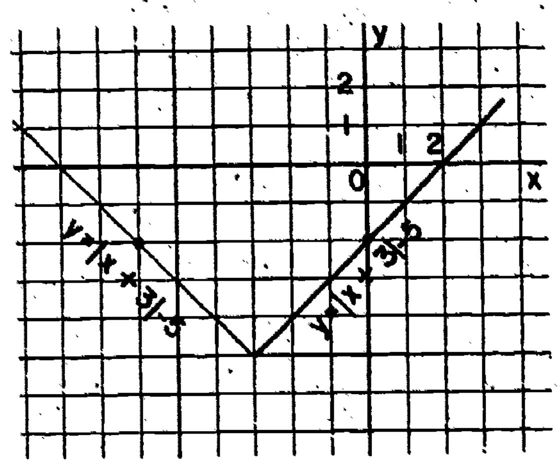


Figura para el problema 3(d)

(e)

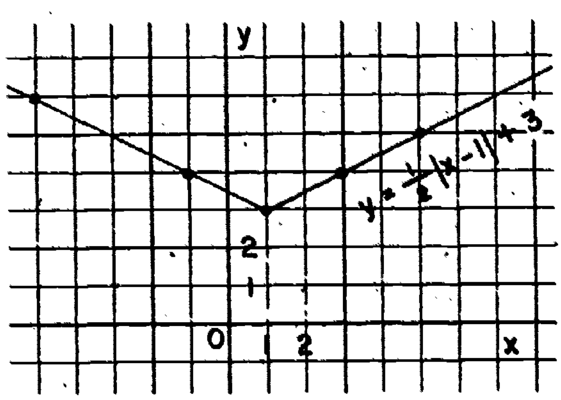


Figura para el problema 3(e)

4. Problema

1(c) La gráfica de "$y = -|x|$" puede obtenerse girando la gráfica de "$y = |x|$" media vuelta alrededor del eje x.

1(e) La gráfica de "$x = -|y|$" puede obtenerse girando la gráfica de "$x = |y|$" media vuelta alrededor del eje y.

2(a) La gráfica de "$y = |x| + 3$" puede obtenerse trasladando la gráfica de "$y = |x|$" tres unidades hacia arriba.

2(b) La gráfica de "$y = |x| - 7$" puede obtenerse trasladando la gráfica de "$y = |x|$" siete unidades hacia abajo.

2(d) La gráfica de "$x = |y| + 3$" puede obtenerse trasladando la gráfica de "$x = |y|$" tres unidades hacia la derecha.

2(f) La gráfica de "$y = -|x| - 1$" puede obtenerse girando la gráfica de "$y = |x|$" alrededor del eje x, y trasladándola entonces una unidad hacia abajo.

3(a) La gráfica de "$y = |x - 2|$" puede obtenerse trasladando la gráfica de "$y = |x|$" dos unidades hacia la derecha.

3(b) La gráfica de "$y = |x + 3|$" puede obtenerse trasladando la gráfica de "$y = |x|$" tres unidades hacia la izquierda.

3(d) La gráfica de "$y = |x + 3| - 5$" puede obtenerse trasladando la gráfica de "$y = |x|$" tres unidades hacia la izquierda, y cinco unidades hacia abajo.

*5. Si $x = 6$, no hay valores posibles de y, puesto que $|y| = -1$, y esto es imposible. Si $|y| = 2$, hay dos valores posibles para y: $y = -2$ y $y = 2$.

x	-5	-3	-3	-1	-1	0	0	1	1	3	3	5
|x|	5	3	3	1	1	0	0	1	1	3	3	5
|y|	0	2	2	4	4	5	5	4	4	2	2	0
y	0	2	-2	4	-4	5	-5	4	-4	2	-2	0

La gráfica de la figura es la de $|x| + |y| = 5$, así como las gráficas de los siguientes cuatro enunciados abiertos:

$x + y = 5$ y $0 \leq x \leq 5$

ó $x - y = 5$ y $0 \leq x \leq 5$

ó $-x + y = 5$ y $-5 \leq x \leq 0$

ó $-x - y = 5$ y $-5 \leq x \leq 0$

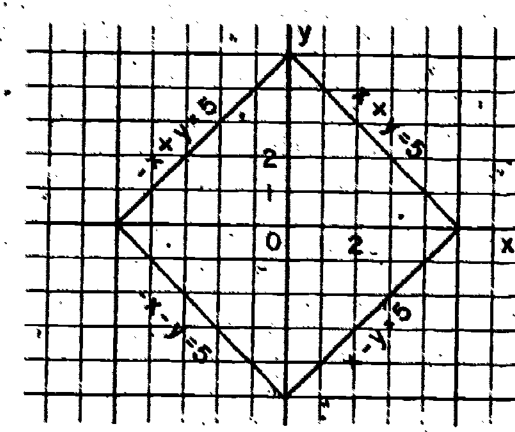


Figura para el problema 5

Ha sido necesario en éstos limitar los valores de x de manera que solamente los segmentos indicados de las rectas estarán incluidos.

*6. (a) Señálense al estudiante los cuatro enunciados abiertos implicados aquí:

$x + y > 5$,

ó $x - y > 5$,

ó $-x + y > 5$,

ó $-x - y > 5$.

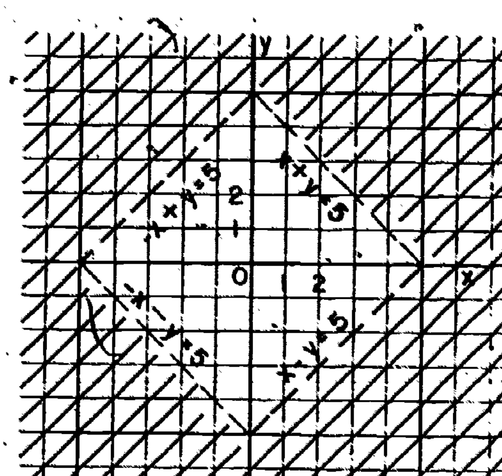


Figura para el problema 6(a)

Las gráficas de las ecuaciones correspondientes: "$x + y = 5$ ó $x - y = 5$, ó etc." están entonces trazadas mediante líneas punteadas. Ahora obsérvese que $x + y > 5$ se convierte en $y > -x + 5$, y $-x + y > 5$ se convierte en $y > x + 5$. Así, el área por encima de cada una de las rectas "$x + y = 5$" y "$-x + y = 5$" está sombreada. También $x - y > 5$ se convierte en $y < x - 5$, y $-x - y > 5$ se convierte en $y < -x - 5$. Así, el área por debajo de las rectas "$x - y = 5$" y "$-x - y = 5$" está sombreada. Por lo tanto, la gráfica de $|x| + |y| > 5$ es toda la porción del plano fuera de la gráfica de $|x| + |y| = 5$.

(b) Siguiendo el mismo razonamiento,

$|x| + |y| < 5$ implica:

$x + y < 5$,
y $x - y < 5$,
y $-x + y < 5$,
y $-x - y < 5$.

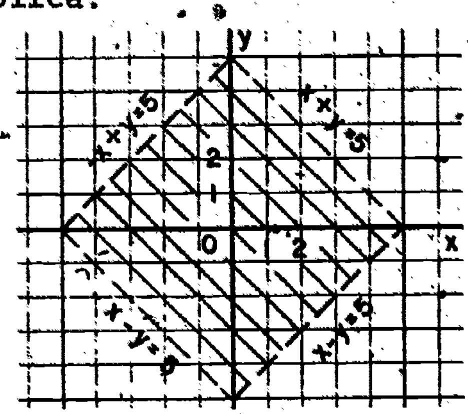


Figura para el problema 6(b)

Por lo tanto, la gráfica es el área dentro de la gráfica de $|x| + |y| = 5$.

Verifíquese sobre la recta numérica que "$|y| < k$" es equivalente a "$y < k$ y $-y < k$", mientras que "$|y| > k$" es equivalente a "$y > k$ ó $-y > k$".

(c) La gráfica es la misma que la de (b), excepto que las rectas son de trazo continuo para indicar que la gráfica de

$|x| + |y| = 5$

está incluida, lo mismo que la gráfica de $|x| + |y| < 5$.

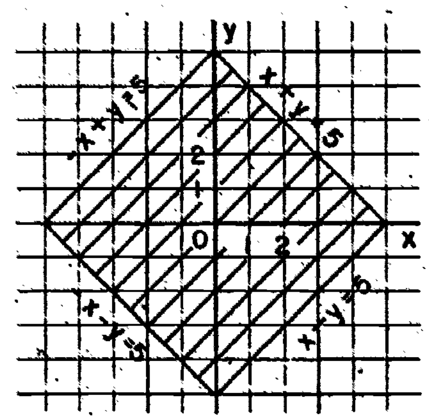


Figura para el problema 6(c)

(d) "$|x| + |y| \nless 5$" implica "$|x| + |y| = 5$ ó $|x| + |y| > 5$", de modo que la gráfica es la misma de (a), excepto que las rectas son de trazo continuo.

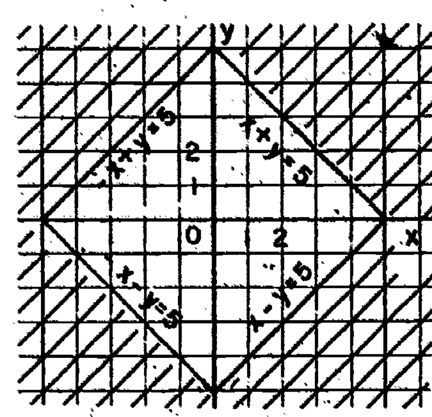


Figura para el problema 6(d)

*7.

x	-7	-7	-6	-6	-4	-4	-3	-2	1	3	4	4	7	7
$\|x\|$	7	7	6	6	4	4	3	2	1	3	4	4	7	7
$\|y\|$	4	4	3	3	1	1	0	-1	-2	0	1	1	4	4
y	4	-4	3	-3	1	-1	0	Imposible		0	1	-1	4	-4

Los cuatro enunciados abiertos cuyas gráficas forman la misma figura son:

$x - y = 3$ y $x \geq 3$
$x + y = 3$ y $x \geq 3$
$-x + y = 3$ y $x \leq -3$
$-x - y = 3$ y $x \leq -3$

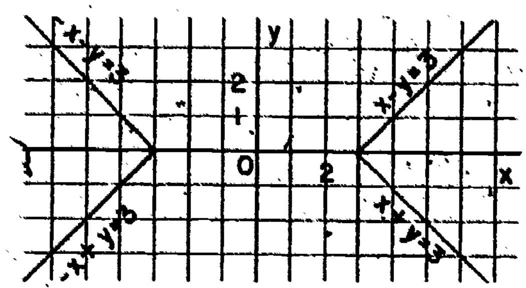


Figura para el problema 7

Respuestas a los Problemas de repaso; páginas 469-477:

1. (a) $y = 3x$

   (b) $y = -\frac{3}{2}x - 3$

   (c) $0 < x < 3$ y $0 < y < 5$, donde x, y son enteros. (ó $1 \leq x \leq 2$ y $1 \leq y \leq 4$, donde x, y son enteros.)

   (d) $x = 2$ y $-1 < y < 8$, donde y es un entero (ó $x = 2$ y $0 \leq y \leq 7$, donde y es un entero.)

   (e) $y = 2|x|$

   (f) $y = |x| - 2$

   (g) $y = |2x - 4|$, o sea, $y = 2|x - 2|$

   (h) $|x| + |y| \leq 8$

   (i) $y \leq \frac{3}{2}x + 2$

   (j) $y \geq 2|x - 3|$

   (k) $y > -x + 4$

   (ℓ) $x < 6$ y $y > 0$ y $y \leq x$, donde x, y son enteros; ó $x \leq 5$ y $y \geq 1$ y $y \leq x$, donde x, y son enteros.

2. (a)

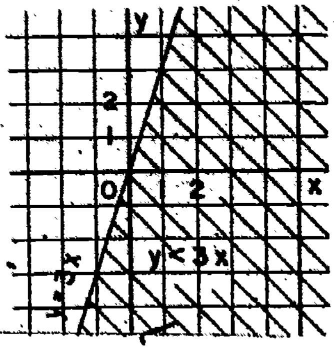


Figura para el problema 2(a)

(b)

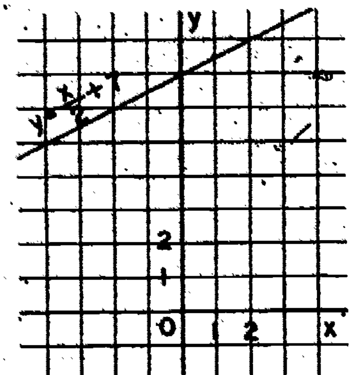


Figura para el problema 2(b)

(c)

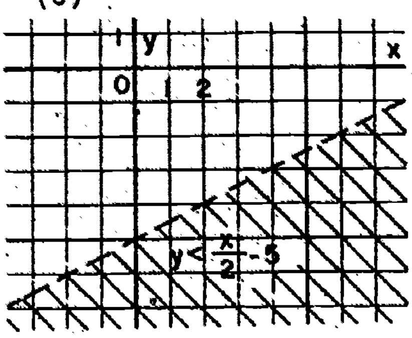


Figura para el problema 2(c)

(d)

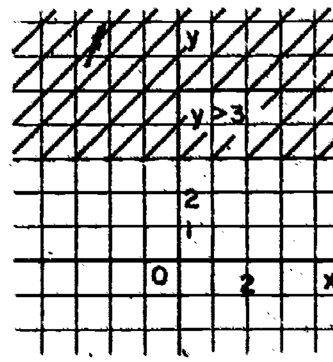


Figura para el problema 2(d)

(e)

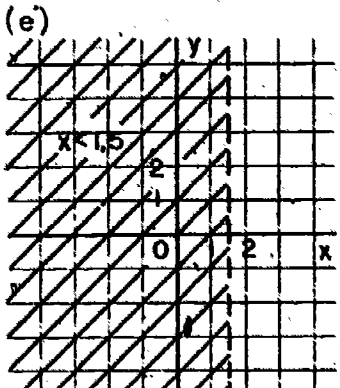


Figura para el problema 2(e)

(f)

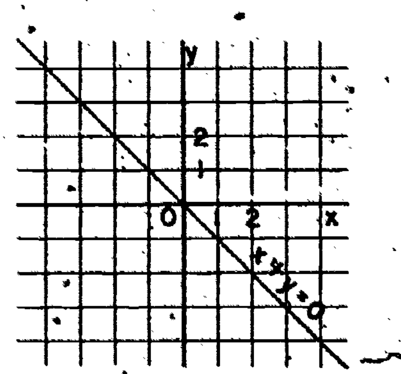


Figura para el problema 2(f)

(g) Ninguna gráfica es posible, puesto que "$|x| + |y|$" <u>debe</u> ser no negativo. Por lo tanto, el conjunto de validez de "$|x| + |y| = -2$" es $\emptyset$.

(h)

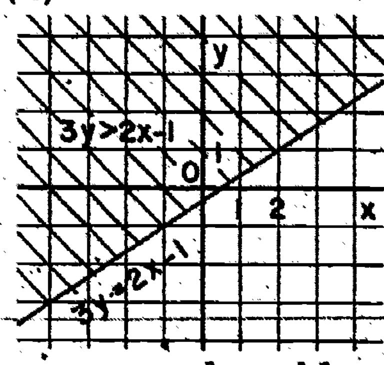


Figura para el problema 2(h)

(i)

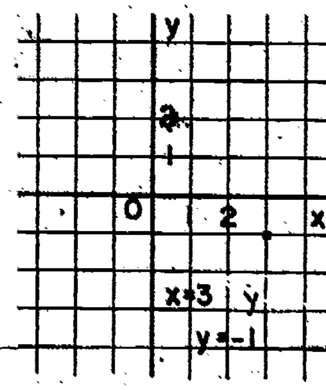


Figura para el problema 2(i)

(j)

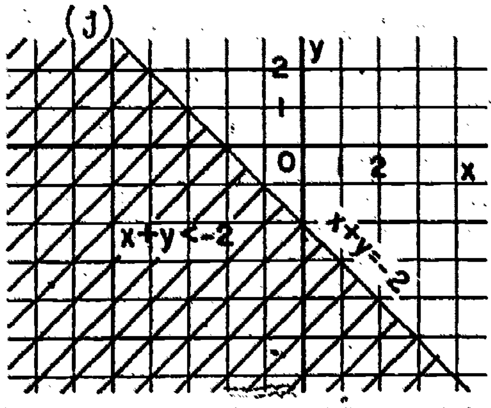


Figura para el problema 2(j)

(k)

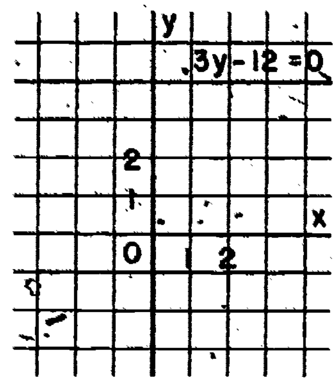
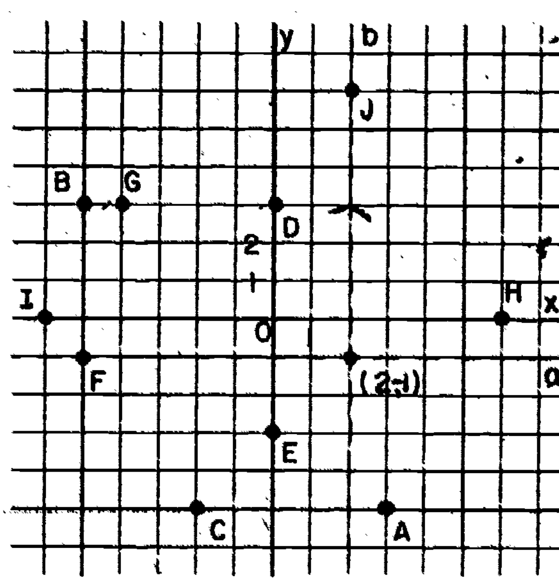


Figura para el problema 2(k)

*3.

	(a, b)
A	(1, -4)
B	(-7, 4)
C	(-4, -4)
D	(-2, [illegible]
E	(-2, -2)
F	(-7, 0)
G	(-6, 4)
H	(4, 1)
I	(-8, 1)
J	(0, 7)



4. L_1: $y = -\frac{3}{2}x - 7$; $b = -\frac{3}{2}a$

L_2: $y = 2x - 5$; $b = 2a - 5$

L_3: $y = -\frac{1}{2}x$; $b = -\frac{1}{2}a + 5$

L_4: $y = -9$; $b = -5$

L_5: $|x - 5| = 1$; $|a - 7| = 1$

5. (a) a es negativo.

(b) b es positivo.

(c) P (a,-b); Q(-a,-b); R(-a,b)

6. (c,-d) está en el cuadrante II

(-c,d) está en el cuadrante IV

(-c,-d) está en el cuadrante I

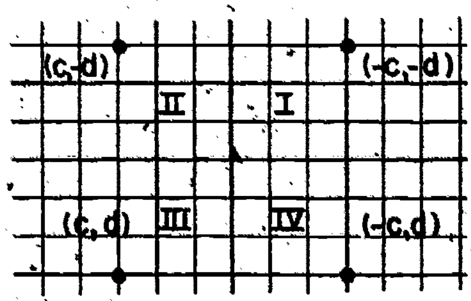


Figura para el problema 6

*7. (a) La gráfica de "y = 3x + 4" se gira alrededor del eje y.

(b) La gráfica de "y = 3x + 4" se gira alrededor del eje x.

(c) La gráfica se traslada 3 unidades hacia abajo.

(d) La gráfica se traslada 2 unidades hacia la derecha.

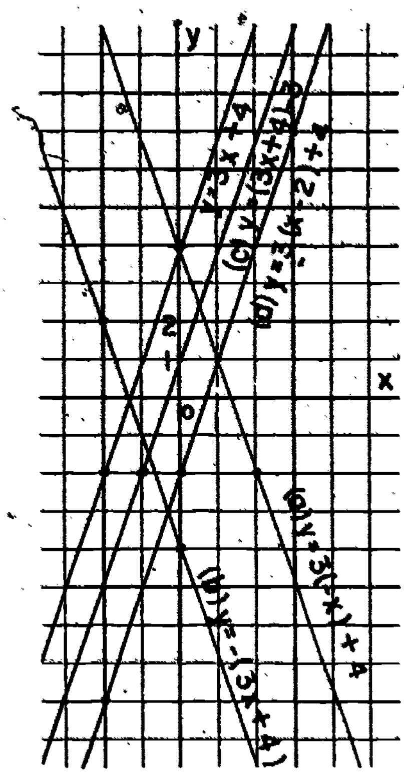


Figura para los problemas 7(a)-7(d)

*8. (a) $y = -2\ |x|$

(b) $y = 2\ |x - 3|$

(c) $y = 2\ |x + 2|$

(d) $y = 2\ |x| + 5$

(e) $y = 2\ |x - 2| - 4$

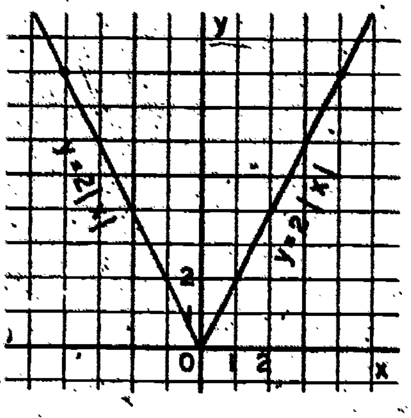


Figura para el problema 8

9. (a) La misma recta constituye la gráfica de cada ecuación. Se obtiene la segunda ecuación multiplicando los miembros de la primera por 3.

(b) Las gráficas serían la misma línea recta.

(c) Las gráficas de las dos ecuaciones serán la misma recta,

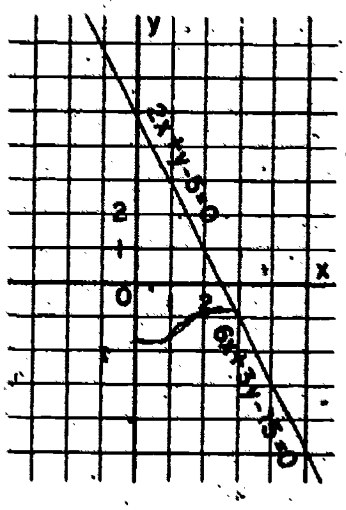


Figura para el problema 9

si hay un número k, tal que

$$D = kA,\ E = kB,\ y\ F = kC.$$

Si las gráficas son la misma recta, entonces

$$\frac{A}{D} = \frac{B}{E} = \frac{C}{F}. \quad (D \neq 0,\ E \neq 0,\ F \neq 0)$$

10. (a) Las gráficas tienen la misma pendiente, y son rectas paralelas. Los coeficientes de x y de y en la segunda ecuación son cuatro veces los coeficientes de x y de y en la primera ecuación.

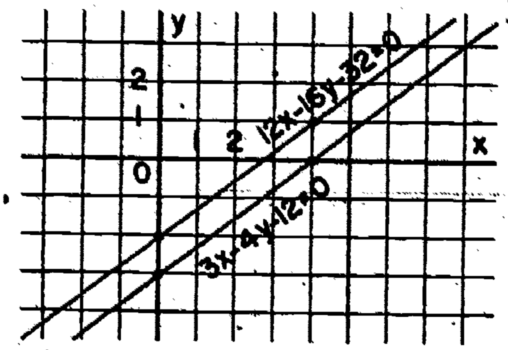


Figura para el problema 10

(b) Las gráficas serán rectas paralelas, a menos que D = kC, y en tal caso serán la misma recta.

(c) Las gráficas serán rectas paralelas, si hay un número k tal que D = kA, E = kB, y F ≠ kC. Si las gráficas son rectas paralelas, entonces

$$\frac{A}{D} = \frac{B}{E} \neq \frac{C}{F} \, . \quad (D \neq 0,\ E \neq 0,\ F \neq 0)$$

11. (a)

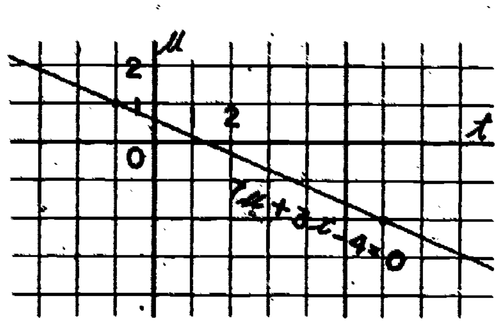


Figura para el problema 11(a)

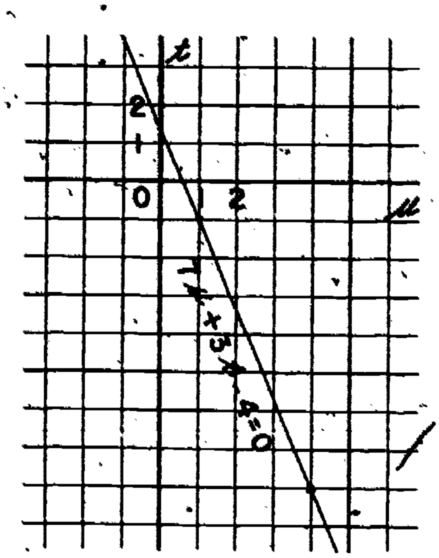


Figura para el problema 11(a)

(b)

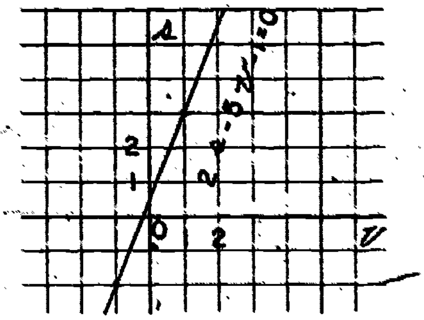


Figura para el problema 11(b)

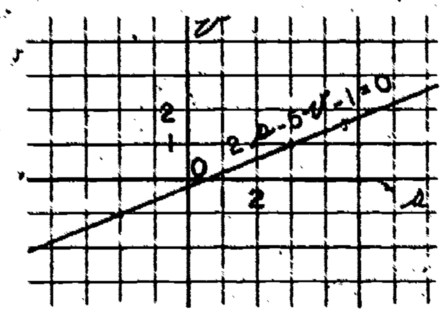


Figura para el problema 11(b)

En ambos casos, es evidente que las gráficas dependen de la elección hecha de la primera variable. Hablamos de enunciados con dos variables ordenadas, porque tratamos con pares ordenados de números reales, y a menos que las variables estén también ordenadas, no tenemos medio de conocer qué número de un par ordenado corresponde a qué variable.

*12. Cada punto del plano se traslada a un punto con la misma abscisa que antes, y la ordenada del nuevo punto es el opuesto de la ordenada del punto original. Esto significa lo mismo que girar los puntos del plano media vuelta alrededor del eje x.

(a)	(2,1)	va a	(2,-1)	(b) (2,-1)	va a	(2,1)
	(2,-1)	va a	(2,1)	(2,1)	va a	(2,-1)
	$(-\frac{1}{2},2)$	va a	$(-\frac{1}{2},-2)$	$(-\frac{1}{2},-2)$	va a	$(-\frac{1}{2},2)$
	(-2,-3)	va a	(-2,3)	(-2,3)	va a	(-2,-3)
	(3,0)	va a	(3,0)	(3,0)	va a	(3,0)
	(-5,0)	va a	(-5,0)	(-5,0)	va a	(-5,0)
	(0,5)	va a	(0,-5)	(0,-5)	va a	(0,-5)
	(0,-5)	va a	(0,5)	(0,5)	va a	(0,-5)

(c) (a,-b) va a (a,b)

(d) (-a,b) va a (-a,-b)

(e) (a,-b) va a (a,b)

(f) Los puntos situados en el eje x no cambian de posición.

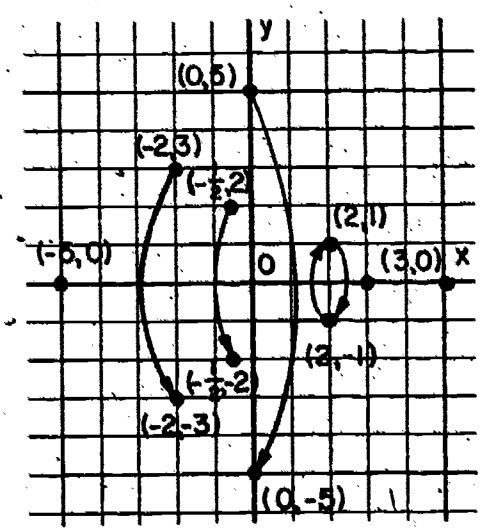


Figura para el problema 12

*13. Los puntos del plano se trasladan dos unidades hacia arriba y tres unidades hacia la izquierda.

(a)	(1,1)	va a	(-2,3)	(b) (4,-1)	va a	(1,1)
	(-1,-1)	va a	(-4,1)	(2,-3)	va a	(-1,-1)
	(-2,2)	va a	(-5,4)	(1,0)	va a	(-2,2)
	(0,-3)	va a	(-3,-1)	(3,-5)	va a	(0,-3)
	(3,0)	va a	(0,2)	(6,-2)	va a	(3,0)

(c) (a,b-2) va a (a-3,b)

(d) (-a+3,-b-2) va a (-a,-b)

(e) Todos los puntos cambian de posición.

(f) Trasladando (a,b) a (a,b-2), produce el efecto de deslizar los puntos del plano dos unidades hacia abajo.

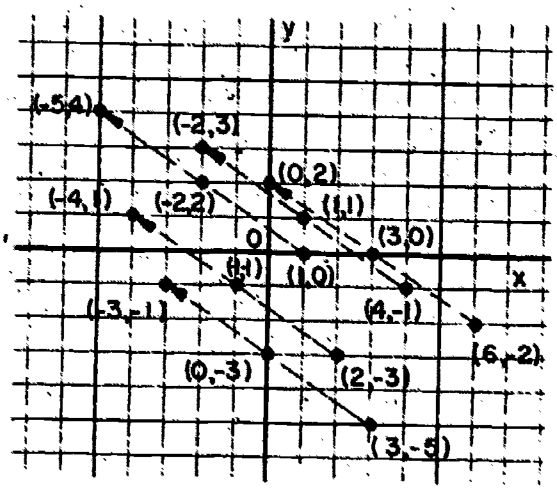


Figura para el problema 13

Sugerencias para exámenes

1. Considera la ecuación $2x - 5y + 6 = 0$.
   (a) Escribe la ecuación en la forma en y.
   (b) ¿Cuál es la pendiente de la recta con esta ecuación?
   (c) ¿Cuál es la intersección con el eje y de esta recta?
   (d) Dibuja la gráfica de la ecuación.
   (e) ¿Cuál es una ecuación de la recta paralela a la recta dada y con ordenada en el origen igual a -2?
2. ¿Cuál es el valor de <u>a</u> tal que la recta de ecuación $3x + 2y - 6 = 0$ contenga el punto $(a,3)$?
3. ¿Cuál es el valor de <u>b</u> tal que el punto $(2,-3)$ esté en la recta de ecuación $2x - by = 3$?
4. Determina la pendiente de cada una de las rectas cuyas ecuaciones son :
   (a) $y - 3 = 0$
   (b) $x = 2y - 2$
   (c) $-x + 1 = 0$
5. Se dan la ecuación $x^2 - 1 - y = 0$, y los pares ordenados $(0,2)$, $(-3,8)$, $(1,1)$, $(-2,4)$, $(0,-1)$, $(0,1)$, $(-2,3)$. ¿Cuáles de esos pares ordenados son elementos del conjunto de validez de la ecuación dada?
6. Explica por qué sí o por qué no, la ecuación del problema 5 tiene una gráfica que es una recta.
7. Dibuja las gráficas de cada una de las siguientes, en sistemas de ejes diferentes:

(a) $2x + y + 5 = 0$	(f) $2y + 3 = 0$
(b) $y = \frac{3}{2}x - 2$	(g) $y - x > 0$
(c) $2x - 1 = 0$	(h) $x - 2y > 0$
(d) $\lvert y\rvert = x$	(i) $x + 2 = y$ ó $x = y$
(e) $x = 2y + 3$	(j) $x + 2 = y$ <u>y</u> $x = y$

8. Dibuja una recta tal que las coordenadas de sus puntos sean los pares ordenados para los cuales cada ordenada es el duplo del opuesto de la abscisa. ¿Cuál es la ecuación de esta recta?
9. Al pasar de un punto a otro de una recta, la variación horizontal es de -3 unidades, y la variación vertical es de 6 unidades. ¿Cuál es la pendiente de la recta?
10. Si la recta descrita en el problema 9 contiene el punto $(0,-\frac{1}{2})$, ¿cuál es una ecuación de la recta?
11. ¿Está el punto $(-1,4)$ en la recta que pasa por los puntos $(-6,7)$ y $(9,-3)$? Explica tu respuesta.
12. Con respecto a sistemas diferentes de ejes, dibuja las gráficas de:
    (a) $x \geq -4$ y $x < -1$, con x, y enteros.
    (b) $x \geq -4$ y $x < -1$, con x, y números reales.
13. Con respecto a sistemas de ejes distintos, dibuja las gráficas de:
    (a) $|x - 1| = 3$ (b) $|x - 1| < 3$
14. Con respecto a sistemas de ejes distintos, dibuja las gráficas de:
    (a) $y = |x| + 1$ (c) $x + 2y > 4$
    (b) $y = |x + 1|$ (d) $|x + 2y| > 4$

Capítulo 15

SISTEMAS DE ECUACIONES E INECUACIONES

El sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ Dx + Ey + F = 0, \end{cases}$$

esto es, la conjunción

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{y} \quad Dx + Ey + F = 0,$$

se presenta en muchas cuestiones en las que dos variables tienen que cumplir dos condiciones impuestas simultáneamente. Esto probablemente explica la razón de llamar este sistema con frecuencia un "sistema de ecuaciones simultáneas".

Es nuestro propósito que los estudiantes continúen ampliando sus ideas acerca de enunciados, conjuntos de validez, y gráficas. Así que, dicho sistema es otro ejemplo de un enunciado con dos variables, y volvemos a enfrentarnos con el problema de describir su conjunto de validez y de dibujar su gráfica. Como antes, resolvemos este enunciado obteniendo un enunciado equivalente cuyo conjunto de validez sea obvio. En este caso, nos ayudará mucho la geometría intuitiva de las rectas. Dos rectas, o se cortan solamente en un punto, o son paralelas. Si las rectas dadas por el sistema se cortan, entonces el punto de intersección debe tener coordenadas que satisfacen a ambas ecuaciones del sistema, y este par ordenado es la solución del enunciado. Así, el problema consiste en determinar dos rectas que pasen por dicho punto de intersección y cuyas ecuaciones sean lo más simple posible, a saber, una recta vertical y una recta horizontal. Todos los métodos para resolver dichos sistemas son en definitiva procedimientos para determinar estas dos rectas.

<u>Página 480</u>. Nuestro simbolismo

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ Dx + Ey + F = 0 \end{cases}$$

es meramente otra manera de escribir el enunciado abierto

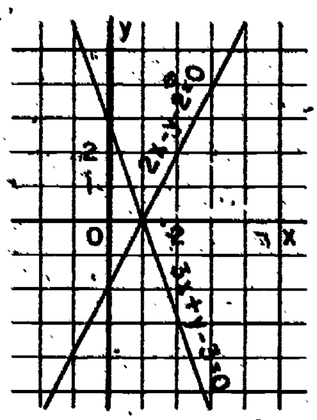
$$Ax + By + C = 0 \quad \underline{y} \quad Dx + Ey + F = 0.$$

Los estudiantes <u>no</u> deben interpretar el simbolismo como la disyunción "$Ax + By + C = 0$ <u>ó</u> $Dx + Ey + F = 0$".

En los problemas 1(a) hasta 1(e) del Conjunto de problemas 15-1a, los estudiantes deben <u>estimar</u> las coordenadas de los puntos de intersección mediante gráficas trazadas cuidadosamente y luego <u>verificar</u> que lo estimado está correcto.

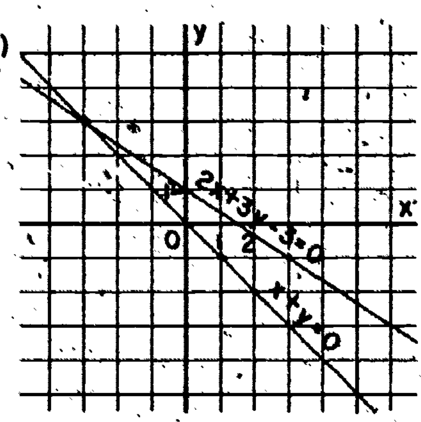
<u>Respuestas al Conjunto de problemas 15-1a</u>; página 481:

1(a)



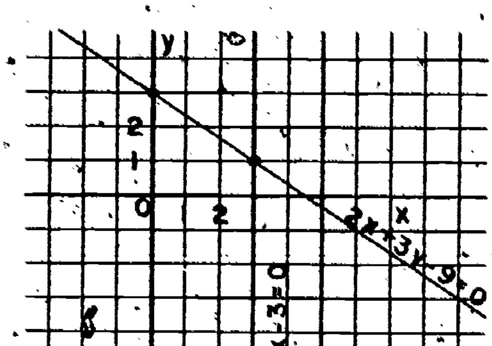
Conjunto de validez: $\{(1,0)\}$

1(b)



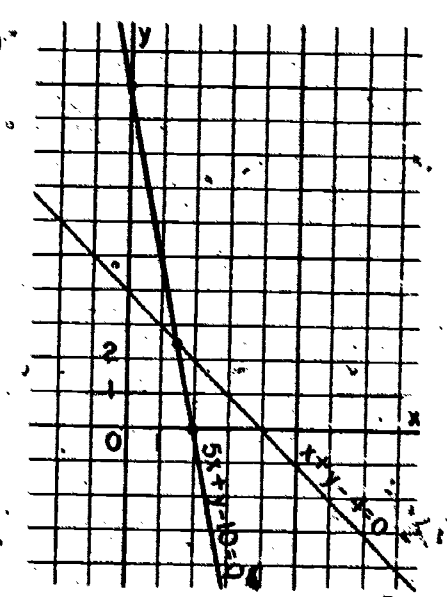
Conjunto de validez: $\{(-3,3)\}$

1(c)



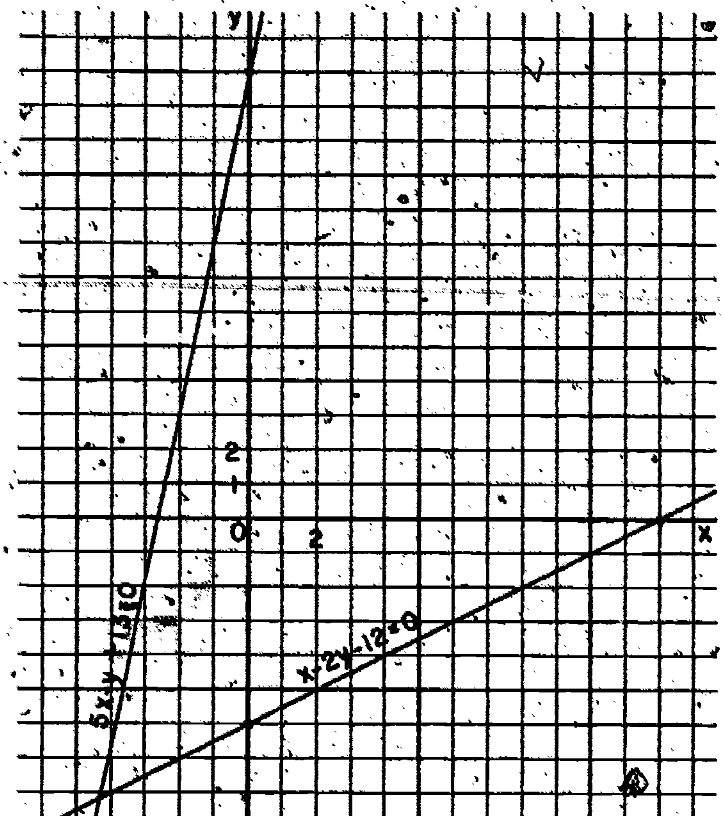
Conjunto de validez: $\{(3,1)\}$

1(d)



Conjunto de validez: $\{(\frac{3}{2},\frac{5}{2})\}$

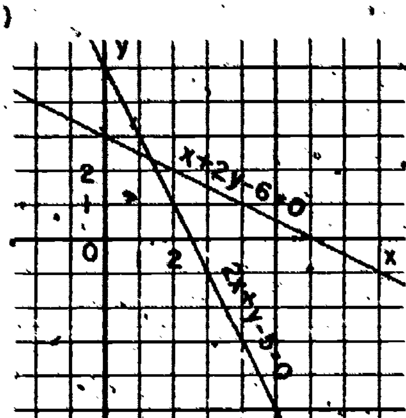
1 (e)



Conjunto de validez: $\left\{\left(-\frac{38}{9}, -\frac{73}{9}\right)\right\}$

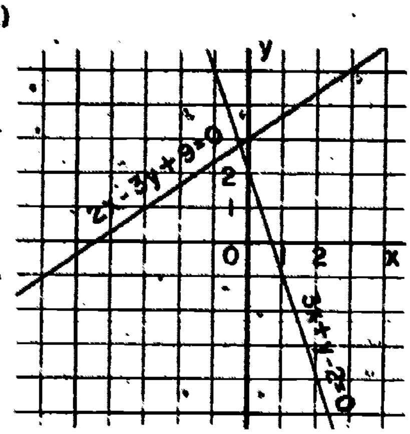
Lo estimado por el estudiante podría ser $\{(-4.2, -8.1)\}$ ó $\{(-4, -8)\}$. No se trate de sacar los valores exactos en estos momentos. Este problema será utilizado como base de discusión en las próximas páginas.

2(a)



Conjunto de validez: Todos los puntos de ambas rectas

2(b)



Conjunto de validez: Todos los puntos de ambas rectas

Páginas 481-482. Otros enunciados compuestos con conjunto de validez $\{(-1,3)\}$ son:

$$x + 1 = 0 \quad \underline{y} \quad y - 3 = 0$$
$$x + 1 = 0 \quad \underline{y} \quad 2x + y - 1 = 0$$
$$x + 2y - 5 = 0 \quad \underline{y} \quad y - 3 = 0$$

Páginas 482-487. Nuestro propósito aquí es deducir un método para resolver el sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ Dx + Ey + F = 0 \end{cases} \qquad (A \neq 0 \text{ ó } B \neq 0; D \neq 0 \text{ ó } E \neq 0),$$

en el supuesto de que este sistema tiene exactamente un par ordenado de números reales como solución. Consideramos las cláusulas individuales del sistema como ecuaciones de rectas y tratamos de encontrar una recta horizontal y una recta vertical que pasen por el punto común al primer par de rectas. Si estas nuevas rectas tienen ecuaciones "$y = d$" y "$x = c$", entonces (c, d) es la solución de nuestro sistema.

Las rectas del sistema $\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ Dx + Ey + F = 0 \end{cases}$

tienen exactamente un punto común, si y solamente si no son ni paralelas ni coincidentes. Sabemos que dos rectas son paralelas o coincidentes, si y solamente si ambas son verticales o ambas tienen la misma pendiente. Reuniendo estos enunciados, podemos decir que las rectas del anterior sistema tienen <u>exactamente un punto común, si y solamente si</u>:

(i) $B \neq 0$ ó $E \neq 0$ (las rectas no son ambas verticales)

y (ii) $-\frac{A}{B} \neq -\frac{D}{E}$ (si las rectas no son verticales, entonces no son paralelas).

Es posible que un estudiante sagaz quiera averiguar cómo influyen estas condiciones en el método presentado en el texto para resolver los sistemas lineales. Puede, por ejemplo, preguntarse por qué <u>siempre</u> podemos escoger multiplicadores apropiados a y b que dan ecuaciones de rectas horizontales y verticales pasando por el punto común a las rectas dadas, si <u>hay</u> efectivamente un solo punto. La explicación, que ciertamente no se pretende discutir en la clase corriente, depende de lo siguiente:

<u>Teorema</u>: Las rectas del sistema

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ Dx + Ey + F = 0 \end{cases}$$

son o bien paralelas o coincidentes, si y solamente si existen números reales a <u>y</u> b, no ambos cero, tales que

$aA + bD = 0$ <u>y</u> $aB + bE = 0$.

<u>Discusión</u>: Otro modo de enunciar una parte de este teorema es: Si las rectas no son <u>ni</u> paralelas <u>ni</u> coincidentes, entonces para todo par de números reales a <u>y</u> b, no ambos cero, se cumple

$$aA + bD \neq 0 \quad ó \quad aB + bE \neq 0.$$

(Obsérvese que hemos enunciado parte del teorema en la forma del <u>contrapositivo</u>. Esto es, si el enunciado A implica el enunciado B, entonces la negación de B implica la negación de A.) Según veremos, el hecho de que o bien $aA + bD \neq 0$ ó $aB + bE \neq 0$ garantizará el éxito del método empleado en el texto.

<u>Demostración</u>: Probemos primero que si las rectas son paralelas o coincidentes, entonces existen números a <u>y</u> b, no ambos cero, tales que $aA + bD = 0$ <u>y</u> $aB + bE = 0$. Hay tres casos a considerar: o las rectas son verticales, o son horizontales, o ni una cosa ni otra. Si las rectas son verticales, entonces

$B = 0, \quad E = 0, \quad A \neq 0, \quad D \neq 0,$

y podemos escoger $a = -D$ <u>y</u> $b = A$, de manera que

$aA + bD = (-D)A + AD = 0$ <u>y</u> $aB + bE = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0.$

Si son horizontales, entonces

$A = 0,\ D = 0,\ B \neq 0,\ E \neq 0,$

y podemos escoger $a = -E$ <u>y</u> $b = B$, de manera que

$aA + bD = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$ <u>y</u> $aB + bE = -EB + BE = 0.$

Si las rectas no son ni verticales ni horizontales (y son paralelas), entonces

$$-\frac{A}{B} = -\frac{D}{E}, \; A \neq 0, \quad B \neq 0, \quad C \neq 0, \quad D \neq 0,$$

esto es,

$$\frac{A}{D} = \frac{B}{E}.$$

En este caso, podemos escoger $a = -1$, y $b = \frac{A}{D} = \frac{B}{E}$, obteniendo así

$$aA + bD = -A + \frac{A}{D} \cdot D = 0 \quad \underline{y} \quad aB + bE = -B + \frac{B}{E} \cdot E = 0.$$

Inversamente, demostramos que si existen números reales a y b, no ambos cero, tales que $aA + bD = 0$ y $aB + bE = 0$, entonces las rectas o son paralelas o son coincidentes. Hay dos casos a considerar: $a \neq 0$ ó $a = 0$. Si $a \neq 0$, podemos expresar las condiciones así:

$$A = \frac{b}{a} D \quad \underline{y} \quad B = \frac{b}{a} E.$$

Puesto que la ecuación $Ax + By + C = 0$ no puede tener $A = B = 0$, se deduce que $b \neq 0$. Por lo tanto, la ecuación $Ax + By + C = 0$ puede escribirse en la forma

$$\frac{b}{a}Dx + \frac{b}{a}Ey + C = 0,$$

la cual es equivalente a

$$Dx + Ey + \frac{aC}{b} = 0.$$

Esta es la ecuación de una recta paralela a, o coincidente con la recta cuya ecuación es $Dx + Ey + C = 0$.
Si $a = 0$, entonces $bD = 0$ y $bE = 0$. Como $b \neq 0$, se deduce que $D = 0$ y $E = 0$. Luego, las rectas son ambas verticales, y, por lo tanto, o son paralelas o son coincidentes. Esto completa la demostración.

El teorema que se acaba de demostrar nos permite justificar el método del texto. Si las rectas $Ax + By + C = 0$ y $Dx + Ey + F = 0$ tienen efectivamente un punto común, formamos la ecuación,

$$a(Ax + By + C) + b(Dx + Ey + F) = 0$$

con números reales a y b, al menos uno de los cuales es distinto de 0. Esta nueva ecuación puede escribirse así:

$$(aA + bD)x + (aB + bE)y + (aC + bF) = 0.$$

Como las rectas del sistema original no son ni paralelas ni coincidentes, sabemos que o bien $aA + bD \neq 0$ ó $aB + bE \neq 0$, y, por tanto, esta nueva ecuación es la ecuación de una recta. Además, si (c,d) es <u>la</u> solución de nuestro sistema original, entonces $Ac + Bd + C = 0$ y $Dc + Ed + F = 0$, así que

$$a(Ac + Bd + C) + b(Dc + Ed + F) = a(0) + b(0) = 0.$$

Con otras palabras, la nueva recta pasa por la intersección de las rectas del sistema original.

Todo lo que tenemos que hacer para obtener una recta horizontal que contenga (c,d), es escoger a y b de manera que por lo menos uno de ellos no sea 0, y $aA + bD = 0$. Si A y D son ambos 0, las rectas del sistema original son horizontales, y, por lo tanto, o no tienen puntos comunes o tienen todos sus puntos comunes, contra nuestra suposición original de que (c,d) es el único punto común a las dos rectas del sistema. Así, por lo menos uno de los números A y D no es 0, y sencillamente escogemos $a = D$ y $b = -A$.

De igual manera, la elección de $a = E$ y $b = -B$ nos da una recta vertical por (c,d).

Los estudiantes seguramente no apreciarán en su valor el razonamiento que acabamos de exponer. <u>Podrán</u> darse cuenta de los casos en que las rectas del sistema no son ni paralelas ni coincidentes, y así, sabrán si el sistema tiene o no una sola solución. Sin embargo, siempre deberán verificar la "solución" en ambas ecuaciones del sistema, para ver si sus cálculos son correctos.

El método dado en el texto tiene un sentido geométrico: rectas, puntos comunes a rectas, etc. En el problema 2 del Conjunto de problemas 15-1b, se presenta un método puramente algebraico.

<u>Páginas 487-488</u>. Los ejemplos 1 y 2 ilustran ambos métodos para obtener el segundo enunciado sencillo después que tenemos el primero. El método del ejemplo 1 es generalmente más sencillo, pero algunas veces se prefiere el método del ejemplo 2 en los casos en que intervienen fracciones.

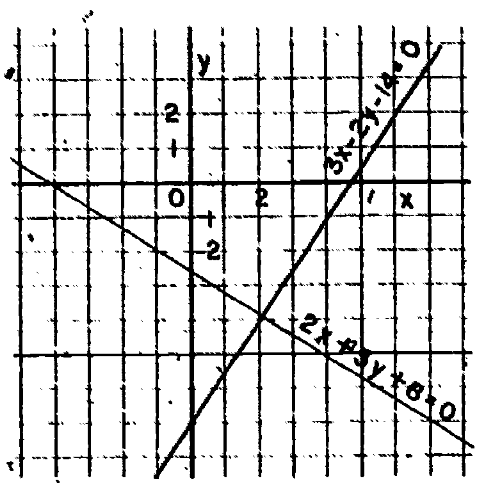
Ayúdese a los estudiantes a ver claramente que el enunciado "$x = 3$ <u>y</u> $y = 2$" es equivalente a "$4x - 3y = 6$ <u>y</u> $2x + 5y = 16$".

Lógicamente, la verificación no es necesaria para demostrar que los enunciados son equivalentes. Es deseable, sin embargo, comprobar la exactitud de la aritmética y tener siempre presente lo que entendemos por "el conjunto de validez del enunciado".

<u>Respuestas al Conjunto de problemas 15-1b</u>; páginas 489-492:

1. (a) $\begin{cases} 3x - 2y - 14 = 0 \\ 2x + 3y + 8 = 0 \end{cases}$

$$3(3x - 2y - 14) + 2(2x + 3y + 8) = 0$$
$$9x - 6y - 42 + 4x + 6y + 16 = 0$$
$$13x - 26 = 0$$
$$13x = 26$$
$$x = 2$$

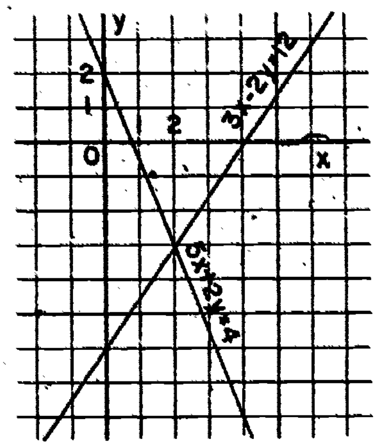


Cuando $x = 2$,

$$2\cdot 2 + 3y + 8 = 0$$
$$3y = -12$$
$$y = -4$$

El conjunto de validez es $\{(2,-4)\}$.

Verificación:	Miembro de la Izquierda	Miembro de la Derecha
Primera cláusula:	$3\cdot 2 - 2(-4) - 14 = 6 + 8 - 14 = 0$	0
Segunda cláusula:	$2\cdot 2 + 3(-4) + 8 = 4 - 12 + 8 = 0$	0



(b) $\{(2,-3)\}$

(c) $\{(5,-7)\}$

(d) $\{(17,12)\}$

(e) $\{(\frac{23}{2},\frac{37}{2})\}$

(f) $\{(-\frac{2}{3},\frac{1}{3})\}$

(g) $\{(\frac{3}{5}, -\frac{9}{5})\}$

(h) $\{(\frac{6}{5},\frac{7}{5})\}$

(i) $\{(15,16)\}$

2. En este momento, usamos los símbolos c, d como números <u>particulares</u>, a saber, los números que se supone hagan ciertos ambos enunciados del sistema. Así, no consideramos c <u>y</u> d como las variables usuales, que representan números no especificados. La diferencia entre "$3x - 2y - 5 = 0$" <u>y</u> "$3c - 2d - 5 = 0$" es que el primero es un enunciado abierto, mientras que el segundo es un enunciado sobre dos numerales <u>particulares</u> que representan el

mismo número. Las ecuaciones anteriores no son otra cosa que la aritmética de encontrar nombres corrientes de c y d, si existen.

(a) Supóngase que (c,d) es una solución del sistema:

$$\begin{cases} x - 4y - 15 = 0 \\ 3x + 5y - 11 = 0 \end{cases}$$

Entonces,

$$c - 4d - 15 = 0$$
$$3c + 5d - 11 = 0$$
$$3(c - 4d - 15) = 3\cdot 0$$
$$-1(3c + 5d - 11) = -1\cdot 0$$
$$3c - 12d - 45 = 0$$
$$-3c - 5d + 11 = 0$$
$$-17d - 34 = 0$$
$$d = -2$$
$$5(c - 4d - 15) = 5\cdot 0$$
$$4(3c + 5d - 11) = 4\cdot 0$$
$$5c - 20d - 75 = 0$$
$$12c + 20d - 44 = 0$$
$$17c - 119 = 0$$
$$c = 7$$

Verificación: $7 - 4(-2) - 15 = 7 + 8 - 15 = 0$
$3\cdot 7 + 5(-2) - 11 = 21 - 10 - 11 = 0$

Conjunto de validez: $\{(7,-2)\}$

(b) $\{(\frac{1}{2}, 1)\}$

(c) $\{(\frac{7}{10}, \frac{4}{5})\}$

(d) Supóngase que (c,d) es una solución del sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 3 \\ 3x + 3y = 4 \end{cases}$$

Entonces,

$$2c + 2d - 3 = 0$$
$$3c + 3d - 4 = 0$$
$$3(2c + 2d - 3) = 3\cdot 0$$
$$2(3c + 3d - 4) = 2\cdot 0$$
$$6c + 6d - 9 = 0$$
$$6c + 6d - 8 = 0$$
$$0 + 0 - 1 = 0.$$

Puesto que $-1 \neq 0$, esto nos dice que nuestra suposición de que (c,d) es una solución es falsa. Por lo tanto, no hay solución. El estudiante puede además comprobar esta conclusión, observando que estas dos rectas tienen la misma pendiente, pero diferentes ordenadas en el origen; esto es, son paralelas y no se intersecan.

3. (a) Supóngase que se venden x boletos a 25 centavos y w boletos a 75 centavos.

Enunciado abierto: $x + w = 311$ y $25x + 75w = 10875$

Conjunto de validez: $\{(249,62)\}$. Por lo tanto, se vendieron 249 boletos de estudiantes y 62 boletos de adultos.

(b) Si hay x niñas, entonces Elsa tiene $x - 1$ hermanas. Por lo tanto, debe haber $x - 1$ niños.

De igual manera, si hay w niños, entonces Jaime tiene $w - 1$ hermanos y $2(w - 1)$ hermanas.

Enunciado abierto: $x - 1 = w$ y $2(w - 1) = x$

Conjunto de validez: $\{(4,3)\}$. Por lo tanto, hay 4 niñas y 3 niños en la familia.

(c) Supóngase que se compraron x sellos de tres centavos, y w sellos de cuatro centavos.

Enunciado abierto: $x + w = 352$ y $3x + 4w = 1267$

Conjunto de validez: $\{(141,211)\}$. Por lo tanto, se compraron 141 sellos de tres centavos y 211 sellos de cuatro centavos.

(d) Supóngase que había x billetes de un dólar y w billetes de cinco dólares.

Enunciado abierto: $x + w = 154$ y $x + 5w = 465$

Conjunto de validez: $\{(76\frac{1}{4}, 77\frac{3}{4})\}$

No ha contado correctamente, pues el número de billetes debe ser un entero.

4. Los estudiantes deben tratar de determinar aquí los conjuntos de validez por el método presentado en las páginas 482-489. Lo lograrán con el problema 4(a) solamente. El método falla para los problemas 4(b) y 4(c).

(b) $a(2x - y - 5) + b(4x - 2y - 10) = 0$

$(a + 2b)(2x) - (a + 2b)y - (a + 2b)5 = 0$

(c) $a(2x + y - 4) + b(2x + y - 2) = 0$

$(a + b)2x + (a + b)y - 4a - 2b = 0$

Evidentemente, en ambos casos cualquier elección de a y b que da un coeficiente cero para x hace lo mismo para y, e inversamente.

Pedimos que los estudiantes dibujen las gráficas de las cláusulas de los sistemas, de modo que hagan las siguientes observaciones:

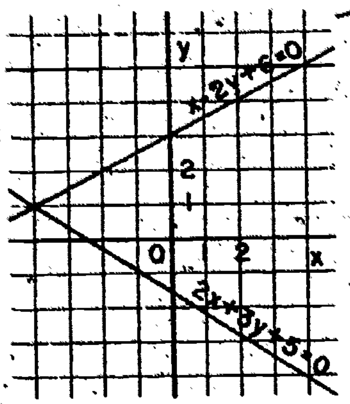
(1) En el problema 4(b), hay más de un punto común a las gráficas de las cláusulas

$2x - y - 5 = 0$ y $4x - 2y - 10 = 0$.

(2) Las gráficas de las cláusulas en el problema 4(c) no tienen puntos comunes.

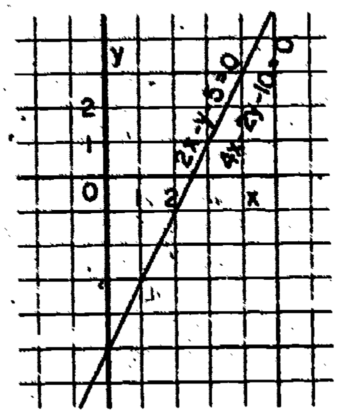
Deberíamos quizás subrayar una vez más que el método de las páginas 482-489 del texto conduce al conjunto de validez del sistema, si y solamente si las gráficas de las cláusulas del sistema tienen exactamente un punto común.

4(a)



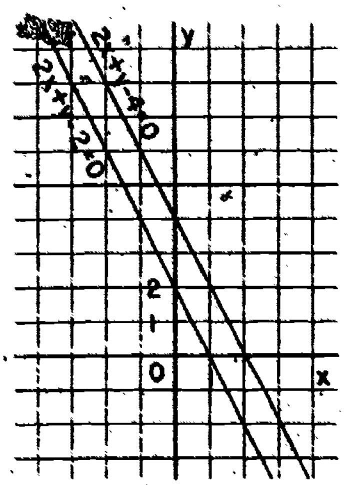
Conjunto de validez:
{(-4,1)}

4(b)



Conjunto de validez: La recta completa .

4(c)



Conjunto de validez: $\emptyset$
Las rectas son paralelas.

5. Si la recta $Ax + By + C = 0$ ha de contener el origen, entonces C debe ser igual a cero. Puesto que $a(5x - 7y - 3) + b(3x - 6y + 5) = 0$ representa una recta que pasa por la intersección de las rectas $5x - 7y - 3 = 0$ y $3x - 6y + 5 = 0$, debemos escoger a y b no ambos iguales a cero, de manera que $-3a + 5b = 0$. Una elección obvia es $a = 5$, $b = 3$. Por lo tanto, nuestro enunciado compuesto se convierte ahora en

$$5(5x - 7y - 3) + 3(3x - 6y + 5) = 0.$$

Luego, $34x - 53y = 0$ es la ecuación de la recta que pasa por el origen y la intersección de las rectas $5x - 7y - 3 = 0$ y $3x - 6y + 5 = 0$.

<u>Página 492</u>. Para el sistema

$$\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ 4x - 2y - 10 = 0, \end{cases}$$

tenemos

$$a(2x - y - 5) + b(4x - 2y - 10) = (a + 2b)(2x) - (a + 2b)y - (a + 2b)5$$

Es evidente entonces que ninguna elección de a y b dará un coeficiente 0 para una de las variables x e y, y no para la otra.

<u>Página 493</u>. Las respuestas de los estudiantes a las preguntas referentes a la pendiente y ordenada en el origen de $y = -2x + 4$ y $y = -2x + 2$ deben sugerirles por qué la forma en y de la ecuación de una recta se llama también la *forma de pendiente y ordenada en el origen*.

Cuando la técnica algebraica que hemos desarrollado se aplica al sistema

$$\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0, \end{cases}$$

encontramos que

$$a(2x + y - 4) + b(2x + y - 2) = (a + b)(2x) + (a + b)y - 4a - 2b$$

Evidentemente, cualquier elección de a y b que da un coeficiente 0 para x también da un coeficiente 0 para y, e inversamente.

Página 495. La relación "son proporcionales a" para conjuntos ordenados de números reales es muy útil. En el texto hemos dado la definición para pares ordenados de números reales. Para ternas ordenadas de números, sería: Los números reales A, B y C son proporcionales a los números reales D, E y F, si hay un número real k, distinto de cero, tal que

$$A = kD, \quad B = kE, \quad y \quad C = kF.$$

De este modo, las rectas del sistema

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ Dx + Ey + F = 0 \end{cases}$$

son coincidentes, si y solamente si los números A, B y C son proporcionales a D, E y F.

El enunciado de que A, B y C son proporcionales a D, E y F se abrevia a menudo del modo siguiente:

$$\frac{A}{D} = \frac{B}{E} = \frac{C}{F},$$

donde se conviene que cuando uno de los denominadores es 0, entonces también lo es el numerador correspondiente. De ningún modo se propone que se interprete $\frac{0}{0}$ como "el cociente de 0 por 0"; más bien $\frac{0}{0}$ es un modo de escribir el enunciado $0 = k \cdot 0$, de manera que se puedan abreviar enunciados tales como "0, 1, y -7 son proporcionales a 0, -3, y 21" escribiendo

$$\frac{0}{0} = \frac{1}{-3} = \frac{-7}{21}.$$

Mediante esta abreviación, las rectas del sistema

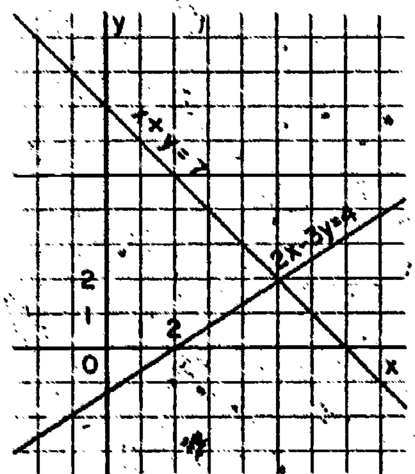
$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ Dx + Ey + F = 0 \end{cases}$$

son coincidentes, si y sólo si $\frac{A}{D} = \frac{B}{E} = \frac{C}{F}$.

Respuestas al Conjunto de problemas 15-1c; páginas 496-500:

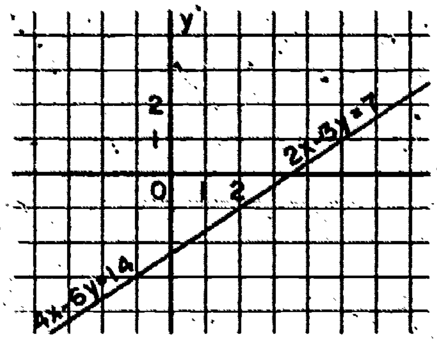
1.

Ejemplo 1



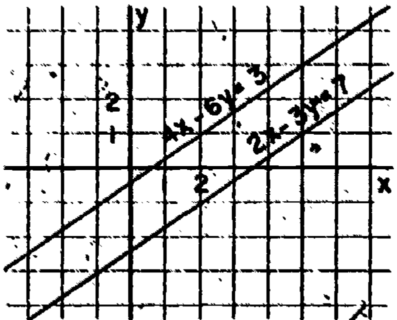
Conjunto de validez: $\{(5,2)\}$

Ejemplo 2



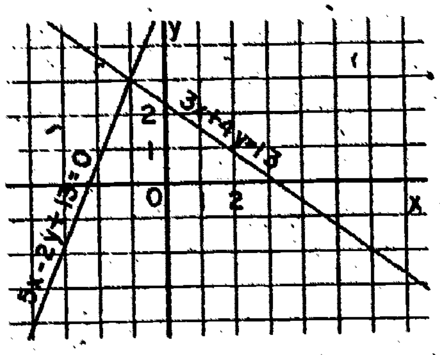
El conjunto de validez es la recta completa.

Ejemplo 3



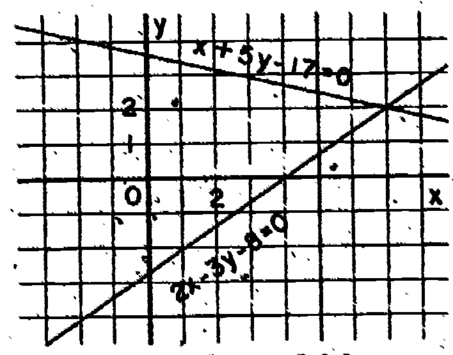
El conjunto de validez es $\emptyset$.
Las rectas son paralelas.

2 (a)



Conjunto de validez:
$\{(-1,4)\}$

2 (b)



Conjunto de validez:
$\{(7,2)\}$

(c) El conjunto de todas las coordenadas de puntos en la recta.

(d) $\{(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})\}$

(e) $\emptyset$

(f) $\{(\frac{28}{5}, 3)\}$

3. La idea aquí es que los valores de y para cada ecuación deben ser los mismos cuando x es la abscisa del punto común a las rectas del sistema

$$\begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ 5x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$$

Esta simple observación permite entonces resolver una ecuación con la variable x, obtenida poniendo cada ecuación en la forma en y, y entonces "igualando" las dos expresiones en x.

En vez de escribir ambas ecuaciones en la forma en y, a veces resulta más conveniente escribir una de ellas en la forma en y, y sustituir y por la expresión resultante en x, en la otra ecuación.

Se deberá animar a los estudiantes a utilizar cualquiera de estos métodos, el que parezca más apropiado.

(a) $\begin{cases} 3x + y + 18 = 0 \\ 2x - 7y - 34 = 0 \end{cases}$

De la primera ecuación,

$$y = -3x - 18.$$

Entonces

$$\begin{aligned} 2x - 7(-3x - 18) - 34 &= 0 \\ 2x + 21x + 126 - 34 &= 0 \\ 23x + 92 &= 0 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

Cuando $x = -4$,

$$\begin{aligned} y &= -3(-4) - 18 \\ y &= -6 \end{aligned}$$

La solución es $(-4, -6)$.

(b) $\begin{cases} y = \frac{2}{3}x + 2 \\ y = -\frac{5}{2}x + 40 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}x + 2 &= -\frac{5}{2}x + 40 \\ 4x + 12 &= -15x + 240 \\ 19x &= 228 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

Cuando $x = 12$,

$$\begin{aligned} y &= \frac{2}{3}\cdot 12 + 2 \\ y &= 10 \end{aligned}$$

La solución es $(12, 10)$.

(c) $\begin{cases} 5x + 2y - 4 = 0 \\ 10x + 4y - 8 = 0 \end{cases}$

Puesto que $\frac{5}{10} = \frac{2}{4} = \frac{-4}{-8}$,

las ecuaciones representan la misma recta, y el conjunto de validez es el conjunto de las coordenadas de todos los puntos en la recta.

(d) $(3,-5)$

(e) $$\begin{cases} x + 7y = 11 \\ x - 3y = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -7y + 11 \\ x = 3y - 4 \end{cases}$$

$$-7y + 11 = 3y - 4$$

$$15 = 10y$$

$$\frac{3}{2} = y$$

Cuando $y = \frac{3}{2}$,

$$x = 3(\tfrac{3}{2}) - 4$$

$$x = \tfrac{1}{2}$$

La solución es $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

(f) $(-2, \frac{4}{3})$

4. (a) Las gráficas de las cláusulas se intersecan en el punto correspondiente al par ordenado dado.

(b) Las gráficas coinciden. Las dos cláusulas son equivalentes. Hay un número real k, distinto de cero, tal que $Ax + By + C = k(Dx + Ey + F)$.

(c) A y B son proporcionales a D y E. Las gráficas son paralelas.

5. Obtenemos que el conjunto de validez es $\{(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})\}$ por cualquiera de los métodos:

   (a) Elíjanse a, b tal que

   $a(4x + 2y - 11) + b(3x - y - 2) = 0$

   sea la ecuación de la recta que pasa por la intersección y es paralela a un eje, etc.

   (b) Supóngase que (c,d) satisface a ambas ecuaciones, y resuélvanse las ecuaciones resultantes respecto a c, d por el método de reducción.

   (c) Escríbanse ambas ecuaciones en la forma en y e iguálense los valores de y.

   (d) Úsese el método de sustitución.

   (e) Dibújense las gráficas de las ecuaciones y mídanse aproximadamente las coordenadas del punto de intersección.

6. (a) $\{(3, -4)\}$. Cualquier método, excepto el de las formas en y, será igualmente eficaz.

   (b) $\{(0, 0)\}$. El método de reducción sería el más fácil.

   (c) $\{(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})\}$. El método de sustitución; o el método de reducción luego de simplificar las fracciones.

   (d) $\{(1, \frac{1}{2})\}$. El método de reducción, porque los coeficientes de y son opuestos.

   (e) $\{(6, 1)\}$. Resuélvase en x la primera ecuación, y sustitúyase este valor en la segunda.

   (f) $\emptyset$. Simplifíquense los miembros de la izquierda y obsérvese que los coeficientes de x e y son proporcionales.

   (g) $\{(\frac{7}{3}, \frac{8}{9})\}$. Cualquier método, excepto el de gráficas.

   (h) $\{(5, 7)\}$. El método de sustitución, porque la primera ecuación puede fácilmente "resolverse respecto de y en términos de x".

En los siguientes problemas, trátese de mostrar la posibilidad de usar dos variables o una variable. Resuélvanse algunos de los problemas de ambas maneras. Obsérvense las conveniencias relativas de las dos maneras. Véase cómo la ecuación con una variable sale de las dos ecuaciones con dos variables.

7. Si los números son x e y, entonces

$$\begin{cases} x + y = 56, \\ x - y = 18 \end{cases}$$

Conjunto de validez: $\{(37, 19)\}$

Los números son 37 y 19.

0 Si el número más grande es x, el número más pequeño es $56 - x$, y

$$x - (56 - x) = 18.$$

0 Si el número más pequeño es y, el número más grande es $y + 18$, y

$$y + (y + 18) = 56.$$

8. Si Sara tiene x años de edad y José tiene y años de edad, entonces

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ x - y = 4 \end{cases} \quad ó \quad \begin{cases} x + y = 30 \\ y - x = 4 \end{cases}$$

Obsérvese que no sabemos cuál es el mayor, de modo que podemos contestar la pregunta de dos maneras. Obsérvese también que la información "De aquí a cinco años" es irrelevante, puesto que la diferencia en las edades es la misma ahora que en cualquier otro momento.

Conjunto de validez: $\{(17, 13)\}$ ó $\{(13, 17)\}$

Sara tiene 17 años de edad y José 13, ó

José tiene 17 años de edad y Sara 13.

Este problema se puede plantear de cuatro maneras diferentes, usando una variable:

Sara n años de edad José 30-n años de edad	Sara n años de edad José (n+4) ó (n-4) años de edad
José n años de edad Sara 30-n años de edad	José n años de edad Sara (n+4) ó (n-4) años de edad

9\. Si emplea a libras de almendras y c libras de anacardos, entonces

$$\begin{cases} a + c = 200 \\ 1.50a + 1.20c = 1.32(200) \end{cases}$$

Conjunto de validez: $\{(80, 120)\}$

Debe emplear 80 libras de almendras y 120 libras de anacardos.

0 Si emplea a libras de almendras, entonces utiliza (200-a) libras de anacardos, y

$$1.50a + 1.20(200-a) = 1.32(200)$$

10\. Si la cifra de las decenas es t y la de las unidades es u, entonces

$$\begin{cases} u = 2t + 1 \\ (10t + u) + u = 3t + 35 \end{cases}$$

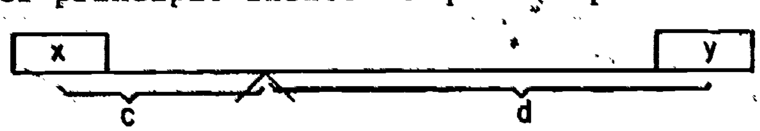
Conjunto de validez: $\{(3, 7)\}$

El número es 37.

0 Si u es la cifra de las unidades, entonces (2u + 1) es la cifra de las decenas, y

$$10(2u + 1) + a = 3(2u + 1) + 35.$$

11\. Usamos el principio físico de que una palanca



está en equilibrio si $cx = dy$,

donde c y d son las medidas de las distancias desde el fulcro, o punto de apoyo, y x e y representan los pesos de los objetos puestos en la palanca. Podemos considerar a cx y dy como medidas de las fuerzas que tienden a hacer girar la palanca.

Explíquese esto informalmente a los estudiantes, pero sin hacer de ello una lección de física.

Si Héctor está a h pies del punto de equilibrio, y Federico está a f pies del mismo punto, entonces

$$\begin{cases} f + h = 9 \\ 100f = 80h \end{cases}$$

El conjunto de validez: $\{(4, 5)\}$

Héctor está a 5 pies, y Federico está a 4 pies del punto de equilibrio.

12. Si un muchacho pesa a libras, y otro muchacho pesa b libras, entonces

$$\begin{cases} a + b = 209 \\ 5a = 6b \end{cases}$$

Conjunto de validez: $\{(114, 95)\}$

Un muchacho pesa 114 libras, y el otro 95 libras.

13. Si la velocidad de la corriente es c millas por hora, y la velocidad del bote en agua estacionaria es b millas por hora, entonces

$$\begin{cases} \frac{3}{2}(b + c) = 12 \\ 6(b - c) = 12 \end{cases}$$

Conjunto de validez: $\{(5, 3)\}$

La velocidad de la corriente es 3 millas por hora, y la velocidad del bote en agua estacionaria es 5 millas por hora.

Este problema no se resuelve fácilmente con una variable.

14. Si las manzanas cuestan a centavos por libra, y los guineos cuestan b centavos por libra, entonces

$$\begin{cases} 3a + 4b = 108 \\ 4a + 3b = 102 \end{cases}$$

Conjunto de validez: {(12, 18)}

Las manzanas son a 12 centavos la libra, y los guineos a 18 centavos la libra.

15. Si A camina a razón de a millas por hora, y B a razón de b millas por hora, entonces en 60 horas,

A camina 60a millas, y
B camina 60b millas;

en 5 horas, A camina 5a millas, y
B camina 5b millas.

$$\begin{cases} 60a = 60b + 30 \\ 5a + 5b = 30 \end{cases}$$

El conjunto de validez: $\{(\frac{13}{4}, \frac{11}{4})\}$

A camina a razón de $3\frac{1}{4}$ millas por hora.

B camina a razón de $2\frac{3}{4}$ millas por hora.

16. Si hay x cuartillos de la solución al 90%, y z cuartillos al 75%, entonces hay 0.90x cuartillos de alcohol en la solución al 90%, y 0.75z cuartillos de alcohol en la solución al 75%. Además, hay 0.78(20) cuartillos de alcohol en la solución mezclada.

$$\begin{cases} 0.90x + 0.75y = 0.78(20) \\ x + y = 20 \end{cases}$$

Conjunto de validez: {(4, 16)}

Deberán utilizarse 4 cuartillos de la solución al 90%.

17. Si la velocidad media del automóvil A es a millas por hora, y la velocidad media del automóvil B es b millas por hora, entonces

$$\begin{cases} \frac{300}{a} = \frac{275}{b} - \frac{1}{2} \\ \frac{300}{a} = \frac{240}{b} + \frac{1}{5} \end{cases}$$

Conjunto de validez: $\{(60, 50)\}$

La velocidad media de A fue 60 millas por hora.

La velocidad media de B fue 50 millas por hora.

15-2. Sistemas de inecuaciones

Página 500. El sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y - 4 > 0 \\ 2x - y - 3 > 0 \end{cases}$$

es una forma abreviada del enunciado abierto compuesto,

$$x + 2y - 4 > 0 \text{ y } 2x - y - 3 > 0.$$

La gráfica de este sistema es, desde luego, la ~~gráfica~~ del enunciado abierto compuesto.

Página 501. Al dibujar la gráfica de la inecuación

$$Ax + By + C > 0 \ , \quad (B \neq 0)$$

escríbase la desigualdad en una u otra de las formas:

(1) $y > -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ $(B > 0)$,

(2) $y < -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ $(B < 0)$,

la que sea apropiada. En la recta

(3) $Ax + By + C = 0$,

$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. Así, para un valor dado de x, (x,y) satisface a la ecuación (1) si el punto (x,y) está por encima de la recta, puesto que la ordenada de este punto es mayor que $-\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. Por otra parte, para un valor dado de x, (x,y) satisface a la ecuación (2) si el punto (x,y) está por debajo de la recta. En general, la gráfica de (1) es el conjunto de puntos <u>por encima</u> de la recta (3), y la gráfica de (2) es el conjunto de puntos <u>por debajo</u> de la recta (3).

<u>Página 502</u>. La gráfica del sistema

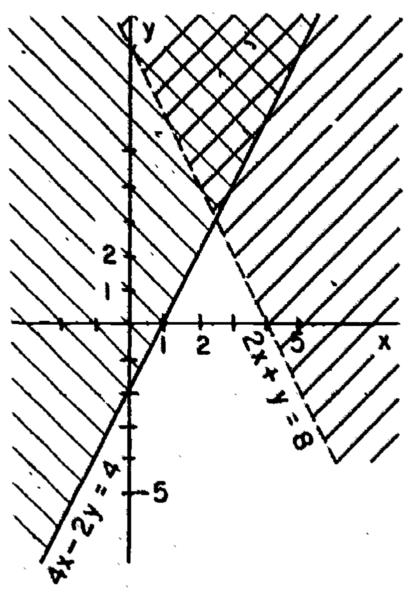
$$\begin{cases} 3x - 2y - 5 = 0 \\ x + 3y - 9 \leq 0 \end{cases}$$

es la porción de la recta $3x - 2y - 5 = 0$ que está en la recta $x + 3y - 9 = 0$ ó por debajo de ella.

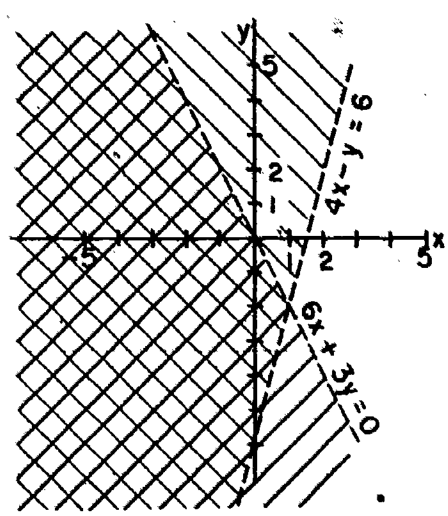
<u>Respuestas al Conjunto de problemas 15-2a</u>; página 503:

El conjunto de validez de cada enunciado abierto en los problemas 1, 2, 5, 6, 7, consiste en todos los puntos en las regiones <u>doblemente</u> sombreadas de la gráfica, junto con todos los puntos de los <u>límites rectilíneos de trazo lleno</u> de estas regiones. En los problemas 3 y 4, el conjunto de validez es la porción de recta de trazo lleno dentro de la región sombreada.

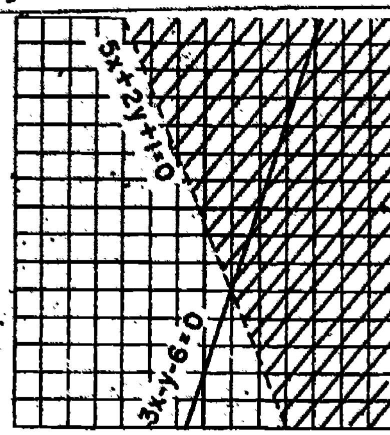
1.



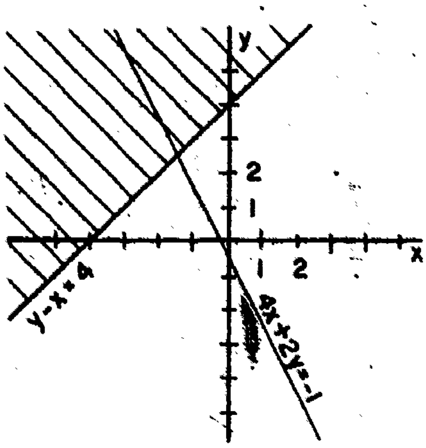
2.



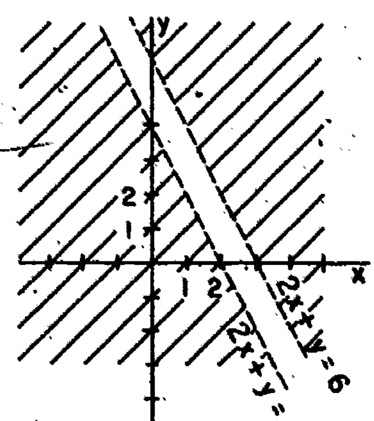
3.



4.

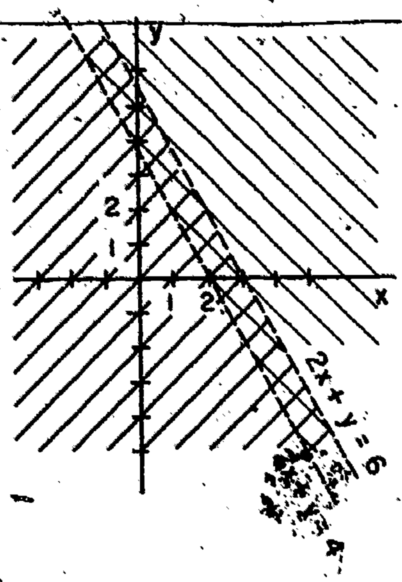


5.

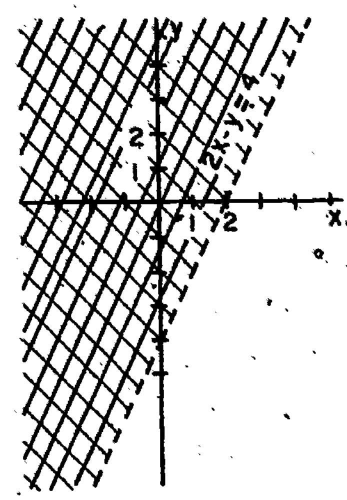


El conjunto vacío, $\emptyset$.

6.



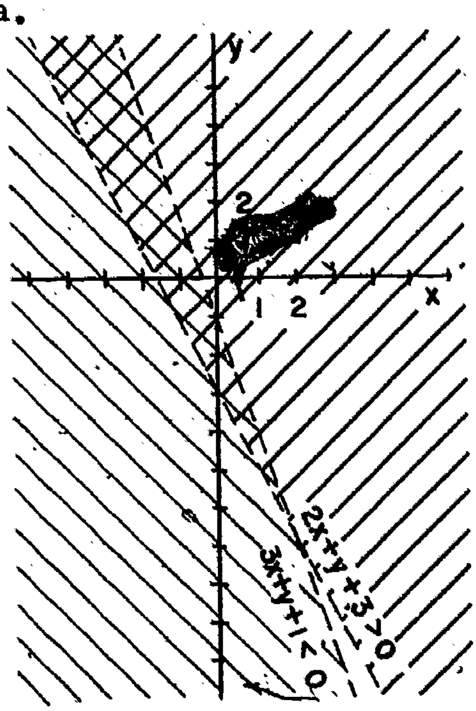
7.



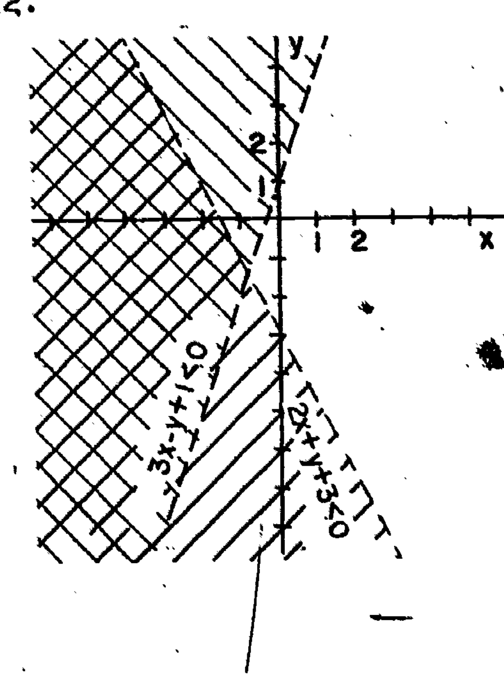
Respuestas al Conjunto de problemas 15-2b; página 504:

Las gráficas de todos los enunciados abiertos en los problemas 1-3 de este Conjunto de problemas, consisten en todos los puntos incluidos en todas las áreas sombreadas, junto con todos los puntos de los límites rectilíneos de trazo lleno de estas regiones. En el problema 4, la gráfica es la región doblemente sombreada.

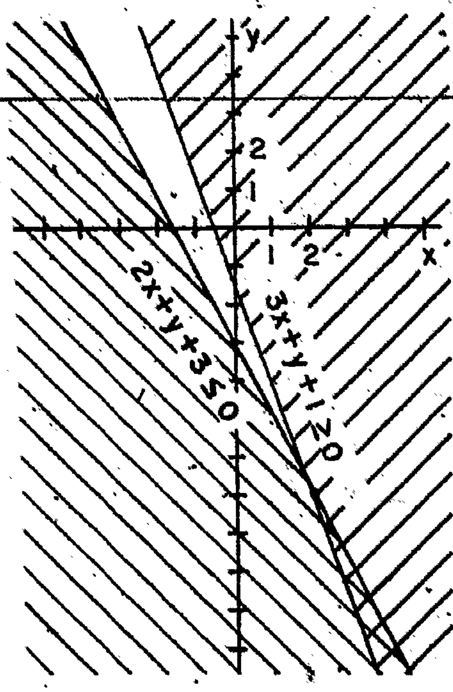
1.



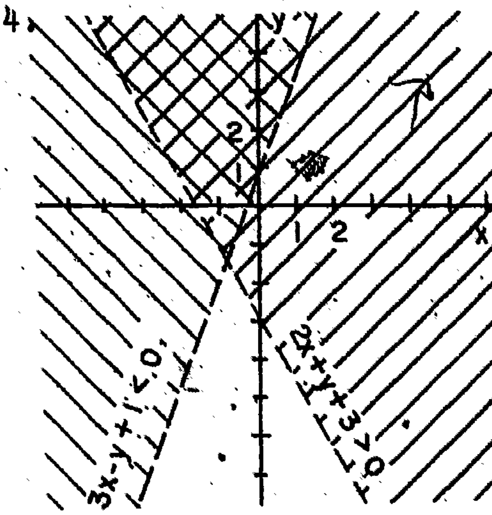
2.



3.



4.



<u>Página 505</u>. La gráfica de

$$(x - y - 2)(x + y - 2) < 0$$

es la gráfica de

$$x - y - 2 < 0 \quad \text{y} \quad x + y - 2 > 0$$

o de

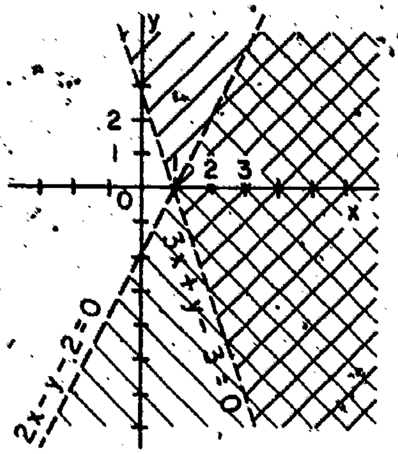
$$x - y - 2 > 0 \quad \text{y} \quad x + y - 2 < 0.$$

La gráfica consiste en las dos regiones sombreadas una sola vez.

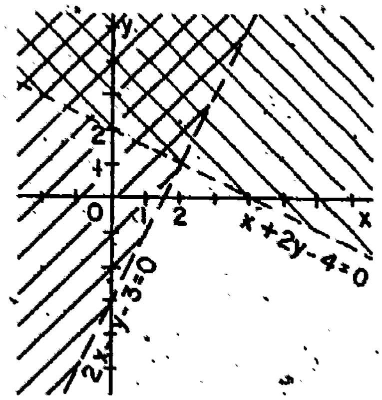
Respuestas al Conjunto de problemas 15-2c; páginas 505-506:

Las gráficas de los conjuntos de validez aquí consisten en todos los puntos de las regiones no sombreadas y doblemente sombreadas de las figuras.

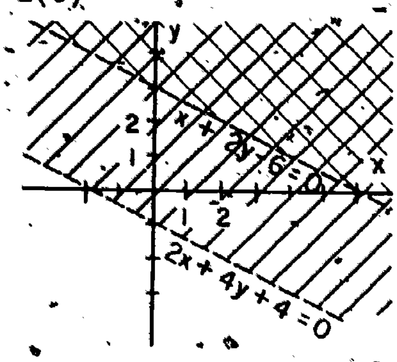
1(a)



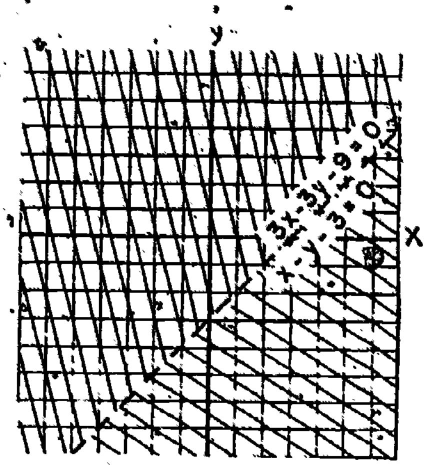
1(b)



1(c)

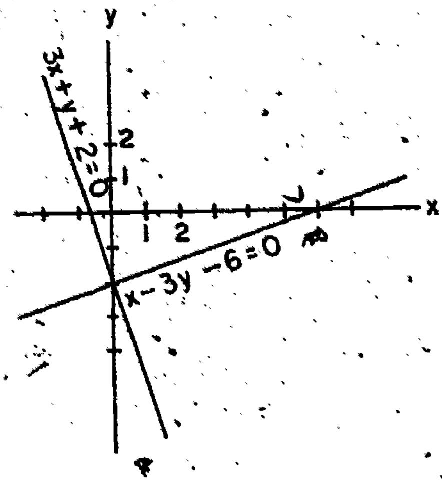


1(d)



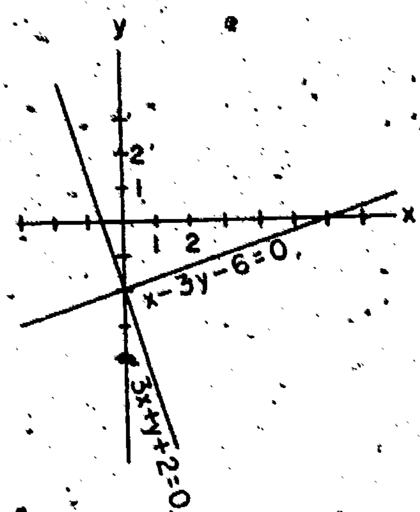
El conjunto vacío, $\emptyset$.

2(a)



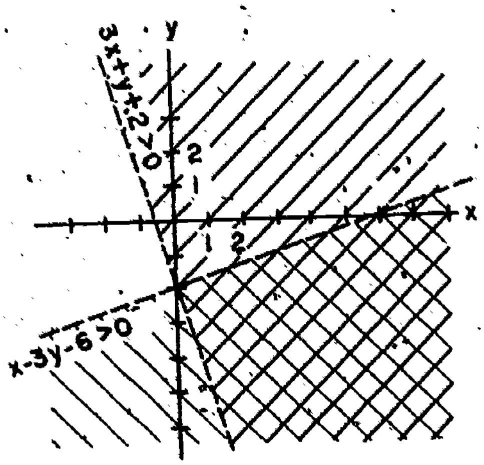
Conjunto de validez: {(0,-2)}

2(b)



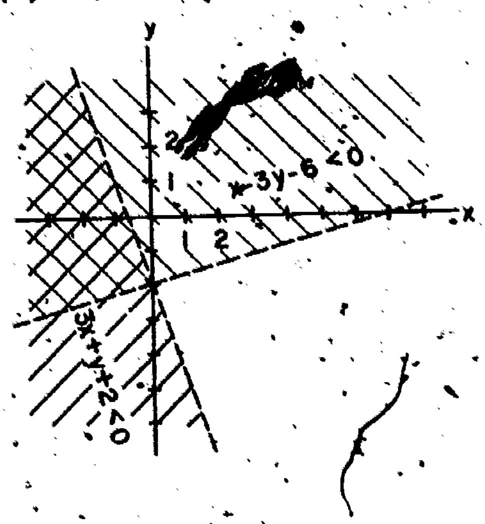
Conjunto de validez:
Todos los puntos en ambas rectas.

2(c)



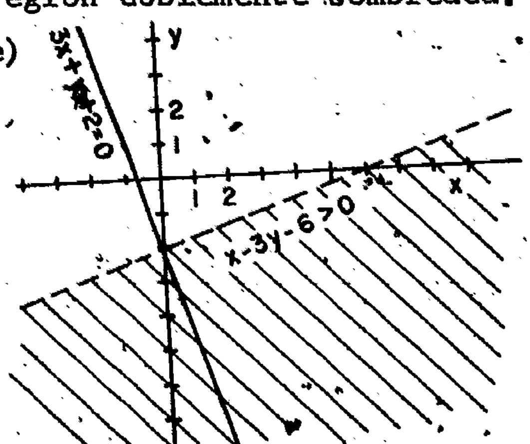
El conjunto de validez es la región doblemente sombreada.

2(d)



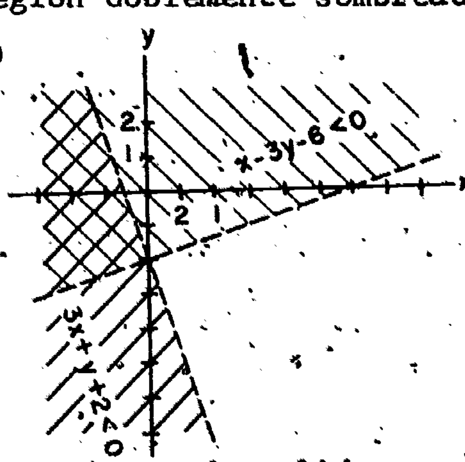
El conjunto de validez es la región doblemente sombreada.

2(e)



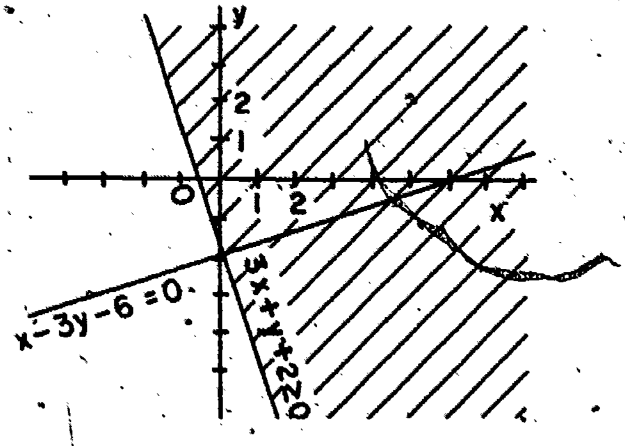
El conjunto de validez es el conjunto de puntos de la porción de recta de trazo lleno dentro de la región sombreada.

2(f)



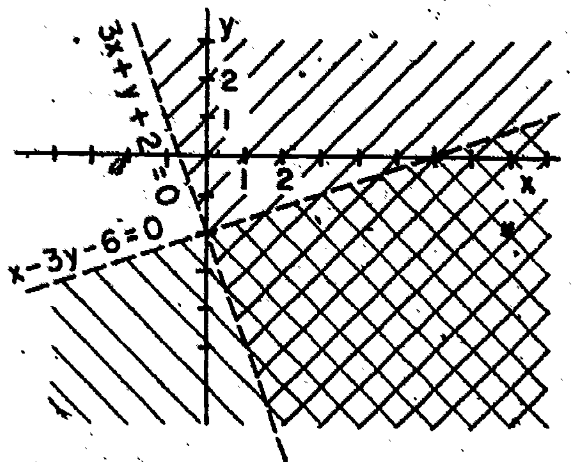
El conjunto de validez es toda la región sombreada.

2(g)



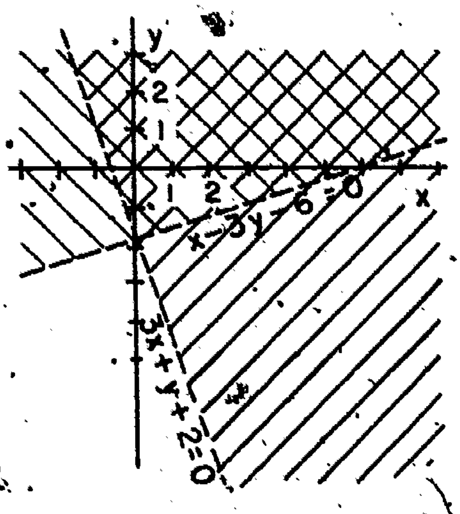
El conjunto de validez es toda la región sombreada y ambas rectas.

2(h)



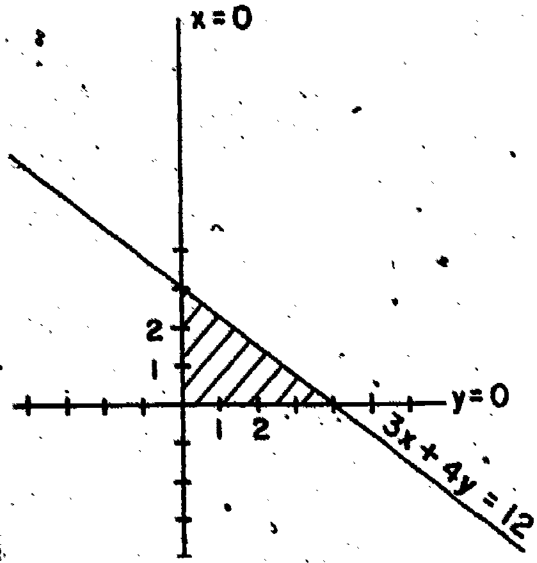
El conjunto de validez es la región doblemente sombreada y la no sombreada.

2(i)

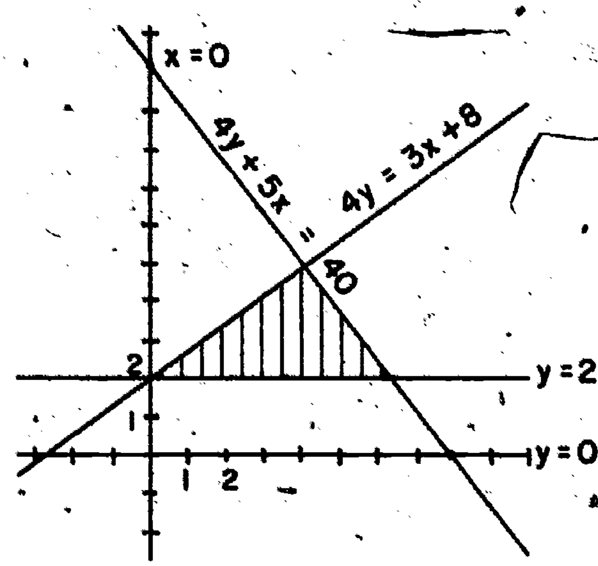


El conjunto de validez está constituido por la región doblemente sombreada y la no sombreada.

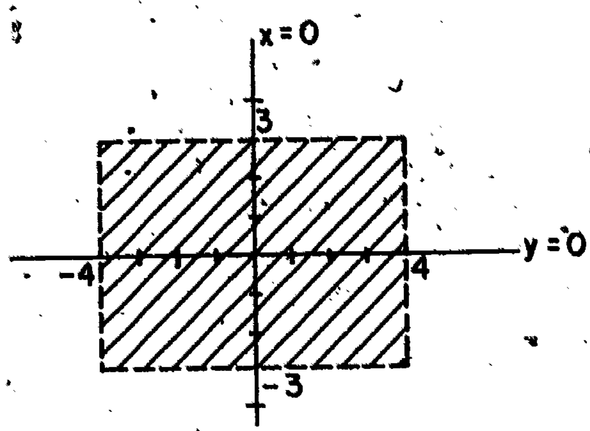
3(a)



3(b)



3(c)



*4. Si r es el número de jugadas de correr con la pelota, y p es el número de jugadas de pases, entonces 3r es el número de yardas ganadas en r carreras con la pelota, y $20(\frac{1}{3})p$ es el número de yardas ganadas mediante p pases. Como el equipo está a 60 yardas de la meta, si ha de anotar, deberá cumplirse:

$$3r + \frac{20}{3}p \geq 60.$$

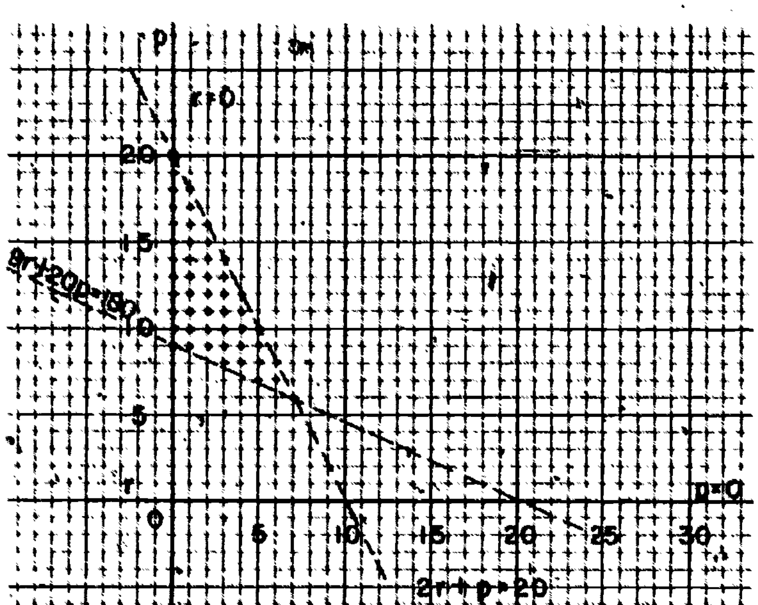
Se requieren 30r segundos para r carreras con la pelota, y 15p segundos para p pases; por lo tanto,

$$30r + 15p \leq 5(60).$$

Estas dos inecuaciones dan el sistema equivalente,

$$\begin{cases} 20p + 9r \geq 180 \\ p + 2r \leq 20 \end{cases} \quad \text{(p y r son enteros no negativos)}$$

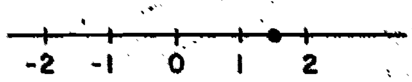
La gráfica de este sistema es:



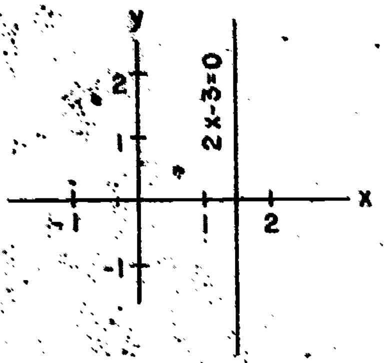
Es evidente que hay 48 combinaciones diferentes de r y p que asegurarán la victoria; por ejemplo, 2 jugadas de correr y 10 de pasar, etc. Sin embargo, hay algunas combinaciones que dejan un menor intervalo de tiempo, dando así a los contrincantes menos tiempo para tratar de anotar. Estos son los puntos de la gráfica que están más cerca de la recta $p + 2r = 20$.

Respuestas a los Problemas de repaso; páginas 506-508

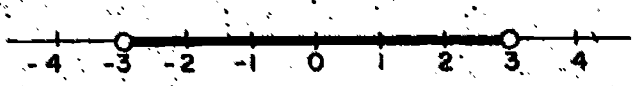
1. (a) Como una ecuación con una variable, el conjunto de validez de "$2x - 3 = 0$" es $\{(\frac{3}{2})\}$, y su gráfica es:



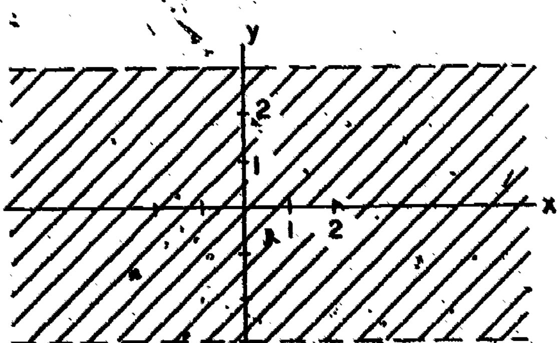
(b) Como una ecuación con dos variables, su conjunto de validez es el conjunto de todos los pares ordenados de números reales con primer número $\frac{3}{2}$. Su gráfica es:



2. (a) Como un enunciado con una variable, el conjunto de validez de " $|y| < 3$" es el conjunto de todos los y tales que $-3 < y < 3$, y su gráfica es:



(b) Como un enunciado con dos variables, su conjunto de validez es el conjunto de todos los pares ordenados de números reales con segundo número entre -3 y 3. La gráfica es la porción sombreada de la figura siguiente:



3\. (a) Los enunciados ~~no son equivalentes, porque el conjunto~~ de validez de "$x - 2 = 0$ y $x - 1 = 0$" es $\emptyset$. (x no puede ser a la vez 2 y 1.)

(b) Son equivalentes. La operación de multiplicar por $x^2 + 1$ conduce a un enunciado equivalente.

(c) No son equivalentes. La gráfica de $xy > 0$ contiene todos los puntos en el primer y tercer cuadrantes, mientras que la gráfica de "$x > 0$ ó $y > 0$" contiene todos los puntos en los cuadrantes I, II, y IV.

(d) No son equivalentes. El conjunto de validez de $(y - 1) = 2(x - 1)$ incluye el elemento $(1, 1)$, mientras que el conjunto de validez de $\frac{y - 1}{x - 1} = 2$ no incluye $(1, 1)$.

(e) Son equivalentes. Ambos tienen el conjunto de validez $\{(6,-3)\}$.

4\. La recta $a(3x - 5y - 4) + b(2x + 3y + 4) = 0$ contiene el punto de intersección para dos números cualesquiera a y b, no ambos 0. Sean $a = -2$ y $b = 3$. Entonces

$$-2(3x - 5y - 4) + 3(2x + 3y + 4) = 0$$
$$19y + 20 = 0$$

es la ecuación de la recta horizontal pedida. Sean $a = 3$ y $b = 5$. Entonces

$$3(3x - 5y - 4) + 5(2x + 3y + 4) = 0$$
$$19x + 8 = 0$$

es la ecuación de la recta vertical pedida.

5\. (a) $\{(5,3)\}$

(b) $\{(-2,-1)\}$

(c) El conjunto de todas las soluciones de una u otra ecuación.

(d) $\emptyset$

(e) $\{(6,-5)\}$

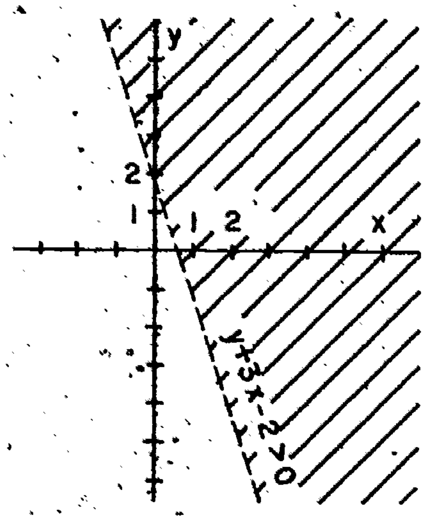
(f) $\{(24,9)\}$

6. (a) Las rectas $Ax + By + C = 0$ y $Dx + Ey + F = 0$ son paralelas, si y solamente si o bien $B = E = 0$, $\frac{A}{D} \neq \frac{C}{F}$, ó $\frac{A}{D} = \frac{B}{E} \neq \frac{C}{F}$.

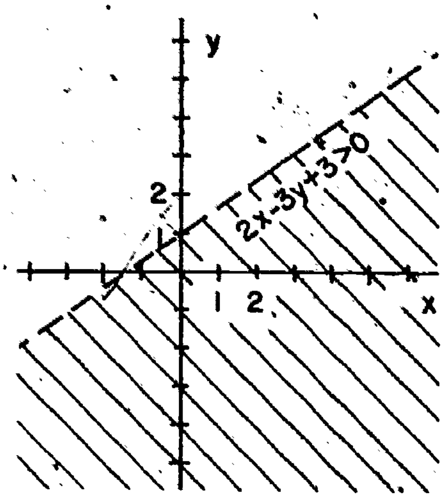
(b) Si $\frac{A}{D} = \frac{B}{E} = \frac{C}{F}$, las ecuaciones representan la misma recta no vertical.

(c) Dos rectas tienen exactamente un punto común, si y sólo si ambas tienen pendientes y dichas pendientes son diferentes, o si una tiene pendiente y la otra no.

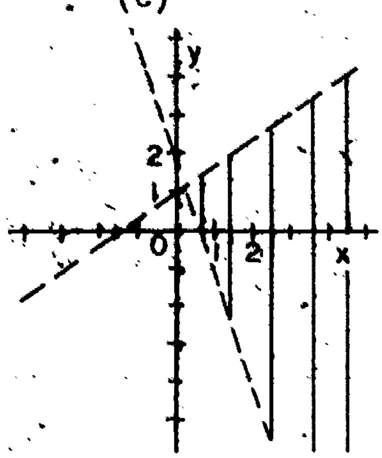
7. (a)



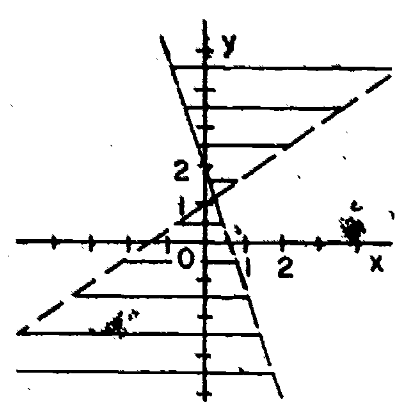
(b)



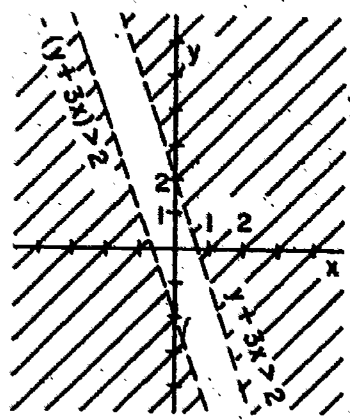
(c)



(d)



(e)



"$|y + 3x| > 2$" es equivalente a "$y + 3x > 2$ ó $-(y + 3x) > 2$".

8. (a) $\begin{cases} y = x + 1 \\ x + y = 57, \end{cases}$ x e y enteros

Conjunto de validez: $\{(28,29)\}$

(b) $\begin{cases} x + y = 16 \\ 2x = y - 3, \end{cases}$ x e y enteros

Conjunto de validez: $\emptyset$

(c) $\begin{cases} x + y = 45 \\ y = 4x + 5 \end{cases}$ Conjunto de validez: $\{(8,37)\}$

(d) $\begin{cases} x + y = 20 \\ 4.8x + 6.0y = 110 \end{cases}$ Conjunto de validez: $\{(8\frac{1}{3}, 11\frac{2}{3})\}$

Sugerencias para exámenes

1. Dibuja las gráficas de los conjuntos de validez de los siguientes enunciados:

   (a) $x = 2$ y $2x - 3y + 5 = 0$

   (b) $y - 3 = 0$ ó $x + y = 1$

   (c) $(2x - 1)(x + y) = 0$

2. Considera el sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} 3x + y - 5 = 0 \\ 2x - 3y + 4 = 0. \end{cases}$$

   (a) Determina el conjunto de validez de este sistema, dibujando gráficas de las dos ecuaciones.

   (b) Elige un valor de a y un valor de b tal que
   $a(3x + y - 5) + b(2x - 3y + 4) = 0$
   sea la ecuación de una recta horizontal que contiene el punto de intersección de las dos rectas dadas.

   (c) Escribe cada una de las ecuaciones dadas en la forma en y, y resuelve la ecuación obtenida al igualar las dos expresiones en x resultantes.

   (d) Explica la relación entre los resultados de las partes (a), (b) y (c).

3. Resuelve los siguientes sistemas, utilizando uno cualquiera de los métodos. En cada caso, explica por qué escogiste un método particular.

   (a) $\begin{cases} y = -2x + 1 \\ y = 3x - 4 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} y = -2x + 1 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ 4x - 5y + 6 = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - y + 3 = 0 \\ x - \frac{1}{3}y + 1 = 0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - y + 3 = 0 \\ x - 2y - 3 = 0 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} y - 3x = 3 \\ x - \frac{1}{3}y + 1 = 0 \end{cases}$

4. Sin resolver los siguientes sistemas, determina cuáles tienen exactamente una solución, cuáles tienen varias soluciones, y cuáles no tienen solución:

(a) $\begin{cases} 3x = 4y - 2 \\ 8y + 6x + 2 = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 3 = 2y \\ x - 2y = 2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}y = x \\ 3 = x + 2.5y \end{cases}$

(d) $\begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{4}{3}y - 1 = 0 \\ \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y + 2 = 0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} .5y = .4 - .4x \\ 8x + 10y = 8 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} \frac{3}{5}x + \frac{1}{2}y = 1 \\ .12x + y = 2 \end{cases}$

En los problemas 5-10, traduce a enunciados abiertos y resuelve:

5. Dos números son tales que su diferencia es 3 y su media aritmética es 6. ¿Cuáles son los números?

6. ¿Habrá dos enteros cuya diferencia es 13 y la suma de cuyos sucesores es 28?

7. La suma de las cifras de un entero entre 0 y 100 es 12, y la cifra de las decenas es 3 más que dos veces la cifra de las unidades. ¿Cuál es el entero?

8. Si se invierten las cifras de un entero entre 0 y 100, el entero resultante excede en 45 al entero dado. ¿Cuál es el entero, si la suma de sus cifras es 11?

9. Una persona efectuó dos inversiones, la primera al 4% y la segunda al 6%. Por dichas inversiones recibió un ingreso anual de \$400. Si la inversión total fue de \$8000, ¿cuánto invirtió al 4% y cuánto al 6%?

10. ¿Cuántas libras de café de 95 centavos la libra y de 90 centavos la libra deben utilizarse para obtener una mezcla de 90 libras a venderse a 92 centavos la libra?

11. En sistemas de ejes diferentes, construye las gráficas de los siguientes enunciados:

(a) $\begin{cases} 2x + 3 > 0 \\ y - 3 < 0 \end{cases}$ (d) $y < x + 1$ ó $2x - y < 0$

(b) $\begin{cases} y < x + 1 \\ 2x - y < 0 \end{cases}$ (e) $(x + y - 1)(2x - y) > 0$

(c) $2x + 3 > 0$ ó $y - 3 < 0$

Capítulo 16

POLINOMIOS CUADRÁTICOS

Este capítulo continúa el estudio sobre gráficas iniciado en el Capítulo 14. Después de construir las gráficas de algunos polinomios cuadráticos generales de la forma $Ax^2 + Bx + C$, dibujando curvas que pasen por puntos elegidos, examinamos la parábola que es la gráfica del polinomio simple x^2. Notamos los cambios en la gráfica al multiplicar x^2 por a, al sumar algún número h a x, y al sumar algún número k a x^2. Generalizamos pasando a la gráfica de $a(x - h)^2 + k$, donde a, h y k son números reales, siendo $a \neq 0$. Esto nos conduce a utilizar el método de completar el cuadrado para transformar cualquier polinomio cuadrático a la forma canónica $a(x - h)^2 + k$. Finalmente, usamos el método de completar el cuadrado para resolver ecuaciones cuadráticas.

16-1. <u>Gráficas de polinomios cuadráticos</u>

<u>Página 509</u>. $-2(x + 1)^2 + 3$ es un polinomio cuadrático, puesto que es igual a $-2x^2 - 4x + 1$ para todos los valores de x.

<u>Ejemplo 1</u>.

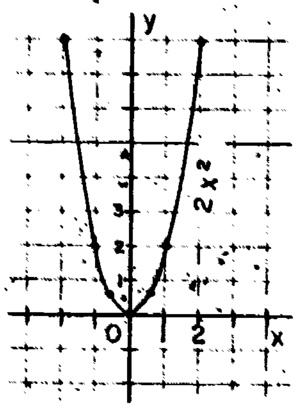
$$y = x^2 - 2x - 3$$

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{4}{3}$	2	$\frac{5}{2}$	3	4
y	5	$\frac{9}{4}$	0	$-\frac{11}{9}$	-3	$-\frac{15}{4}$	-4	$-\frac{35}{9}$	-3	$-\frac{7}{4}$	0	5

<u>Respuestas al Conjunto de problemas 16-1a; página 510:</u>

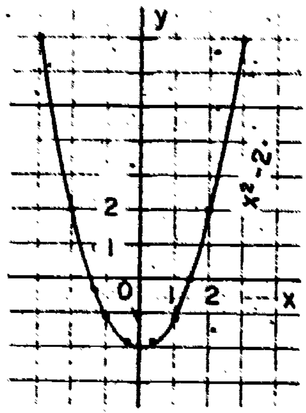
1.

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y	8	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	8



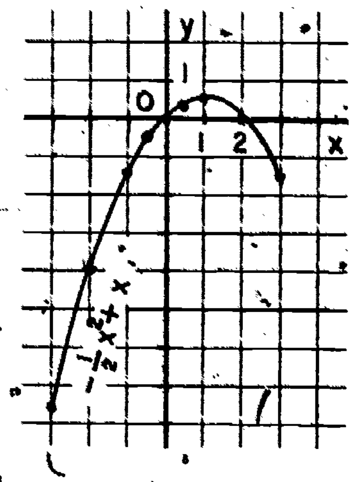
2.

x	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	1	2	3
y	7	2	$\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{7}{4}$	-2	$-\frac{17}{9}$	-1	2	7



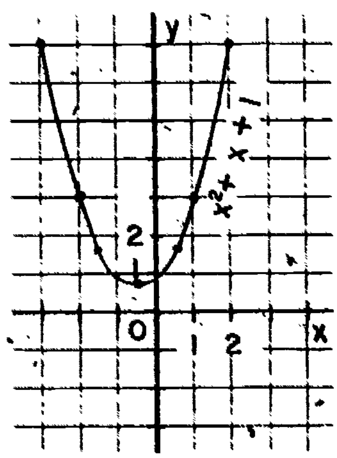
3.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y	$-7\frac{1}{2}$	-4	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$



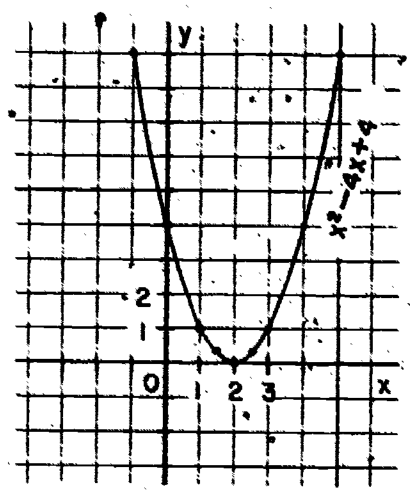
4.

x	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y	7	3	$\frac{7}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{7}{4}$	3	7



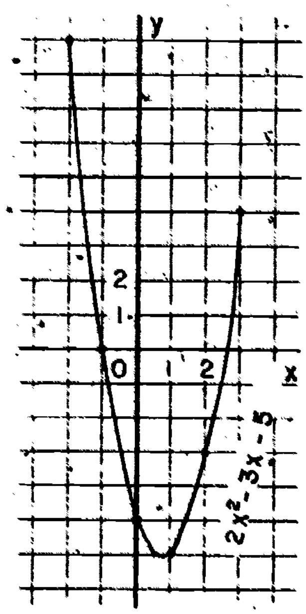
5.

x	-1	0	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	4	5
y	9	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9



6.

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	2	3
y	9	0	-5	-6	$-6\frac{1}{8}$	-6	-3	4



__Página__ __511__.

x	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	-0.1	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	2	3
x^2	9	4	$\frac{9}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	.01	0	$\frac{1}{9}$	1	$\frac{16}{9}$	4	9
$2x^2$	18	8	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	.02	0	$\frac{2}{9}$	2	$\frac{32}{9}$	8	18
$\frac{1}{2}x^2$	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{9}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	.005	0	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{9}$	2	$\frac{9}{2}$
$-\frac{1}{2}x^2$	$-\frac{9}{2}$	-2	$-\frac{9}{8}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	-.005	0	$-\frac{1}{18}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{8}{9}$	-2	$-\frac{9}{2}$

Respuestas al Conjunto de problemas 16-1b; página 512:

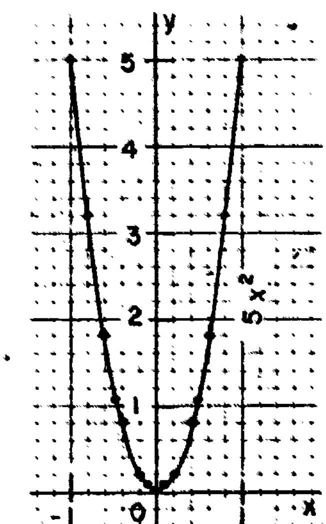
1. La gráfica de $y = 2x^2$ puede obtenerse multiplicando cada ordenada de $y = x^2$ por 2.

2. La gráfica de $y = -\frac{1}{2}x^2$ puede obtenerse girando la gráfica de $y = \frac{1}{2}x^2$ media vuelta alrededor del eje x.

3.

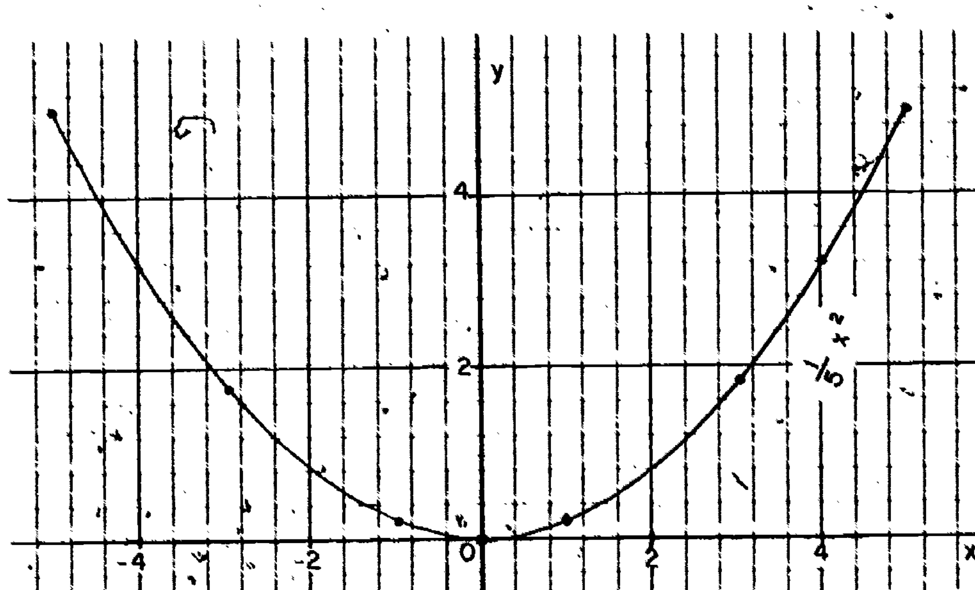
x	-1	-.3	-.6	-.5	-.4	-.2	-.1
y	5	3.2	1.8	1.25	.8	.2	.05

x	0	.1	.2	.4	.5	.6	.8	1
y	0	.05	.2	.8	1.25	1.8	3.2	5



4.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	5	3.2	1.8	.8	.2	0	.2	.8	1.8	3.2	5



5. La gráfica de $y = -5x^2$ puede obtenerse girando la gráfica de $y = 5x^2$ media vuelta alrededor del eje x.

6. La gráfica de $y = -ax^2$ puede obtenerse girando la gráfica de $y = ax^2$ media vuelta alrededor del eje x.

Página 513.

$y = \frac{1}{2}(x - 3)^2$

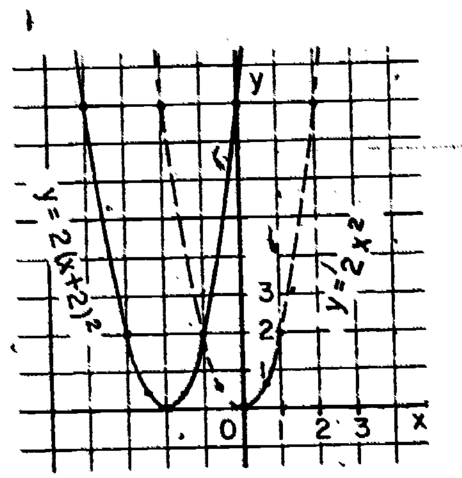
x	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	2	2.5	3	$\frac{13}{4}$	4	5
y	$\frac{9}{2}$	$\frac{32}{9}$	2	$\frac{9}{8}$	$\frac{1}{2}$	.125	0	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{2}$	2

Podemos obtener la gráfica de $y = -(x + 3)^2$ trasladando la gráfica de $y = -x^2$ tres unidades hacia la izquierda.

Respuestas al Conjunto de problemas 16-1c; página 514:

1. $y = 2(x + 2)^2$

x	-4	-3	$-\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	0
y	8	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	8



Se puede obtener la gráfica de $y = 2(x + 2)^2$ trasladando la gráfica de $y = 2x^2$ dos unidades hacia la izquierda.

2. (a) Se puede obtener la gráfica de $y = 3(x + 4)^2$ trasladando la gráfica de $y = 3x^2$ cuatro unidades hacia la izquierda.

   (b) Se puede obtener la gráfica de $y = -2(x - 3)^2$ trasladando la gráfica de $y = -2x^2$ tres unidades hacia la derecha.

   (c) Se puede obtener la gráfica de $y = -\frac{1}{2}(x + 1)^2$ trasladando la gráfica de $y = -\frac{1}{2}x^2$ una unidad hacia la izquierda.

   (d) Se puede obtener la gráfica de $y = \frac{1}{3}(x + \frac{1}{2})^2$ trasladando la gráfica de $y = \frac{1}{3}x^2$ media unidad hacia la izquierda.

3. La gráfica de $y = a(x - h)^2$, donde a y h son números reales, y $a \neq 0$, puede obtenerse trasladando la gráfica de $y = ax^2$, $|h|$ unidades hacia la derecha si h es positivo, y $|h|$ unidades hacia la izquierda si h es negativo.

Página 515.

$$y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 + 2$$

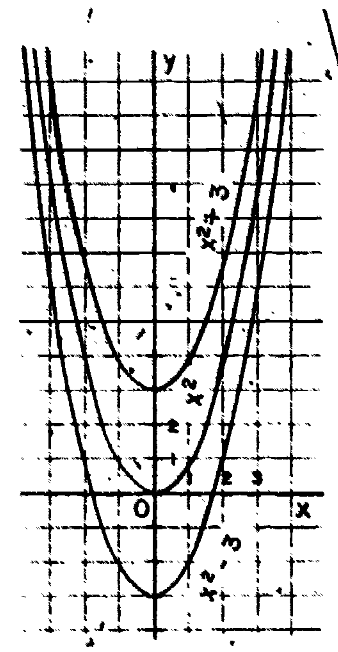
x	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	2	2.5	3	$\frac{13}{4}$	4	5
y	$\frac{13}{2}$	$\frac{50}{9}$	4	$\frac{25}{8}$	$\frac{5}{2}$	2.125	2	$\frac{65}{32}$	$\frac{5}{2}$	4

Página 516. El vértice de la parábola cuya ecuación es $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 + 2$ es el punto $(3, 2)$. Obsérvese que éste es el punto al que va el origen $(0, 0)$, cuando todos los puntos del plano se mueven tres unidades hacia la derecha y dos unidades hacia arriba. El origen es el vértice de cualquier parábola cuya ecuación es de la forma $y = ax^2$.

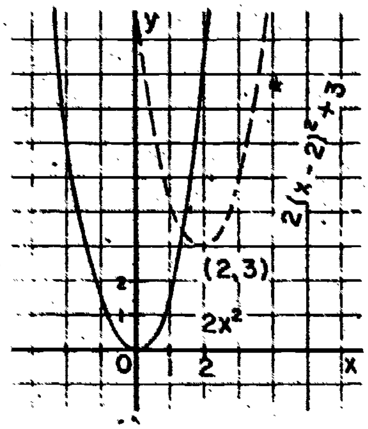
El eje de la parábola es la recta de ecuación $x = 3$.

Respuestas al Conjunto de problemas 16-1d; página 517:

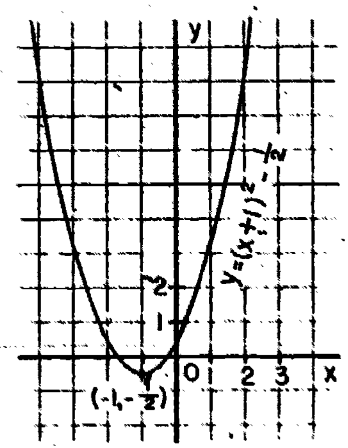
1. La gráfica de $y = x^2 - 3$ puede obtenerse trasladando la gráfica de $y = x^2$ tres unidades hacia abajo. La gráfica de $y = x^2 + 3$ puede obtenerse trasladando la gráfica de $y = x^2$ tres unidades hacia arriba.



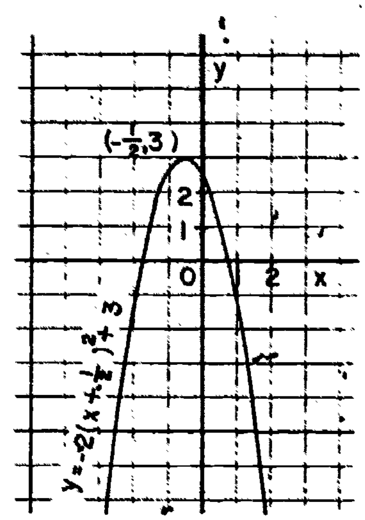
2. La gráfica de $y = 2(x - 2)^2 + 3$ puede obtenerse trasladando la gráfica de $y = 2x^2$ dos unidades hacia la derecha y tres unidades hacia arriba.



3. La gráfica de $y = (x + 1)^2 - \frac{1}{2}$ puede obtenerse trasladando la gráfica de $y = x^2$ una unidad hacia la izquierda y media unidad hacia abajo. Su vértice es $(-1, -\frac{1}{2})$. La ecuación de su eje es $x = -1$.



4. La gráfica de $y = -2(x + \frac{1}{2})^2 + 3$ puede obtenerse trasladando la gráfica de $y = -2x^2$ media unidad hacia la izquierda y tres unidades hacia arriba.



5. (a) $y = (x + 5)^2 - 2$
   (b) $y = -(x + 2)^2 + 3$
   (c) $y = \frac{1}{3}(x - \frac{1}{2})^2 - 1$
   (d) $y = \frac{1}{2}x^2$

6. (a) La gráfica de $y = 3x^2$ se traslada dos unidades hacia la derecha y cuatro unidades hacia abajo.
   (b) La gráfica de $y = -x^2$ se traslada tres unidades hacia la izquierda y una unidad hacia arriba.
   (c) La gráfica de $y = \frac{1}{2}x^2$ se traslada dos unidades hacia la derecha y dos unidades hacia abajo.
   (d) La gráfica de $y = -2x^2$ se traslada una unidad hacia la izquierda y dos unidades hacia arriba.

16-2. Forma canónica

Explicamos en detalle la reducción de polinomios cuadráticos a la forma canónica $a(x - h)^2 + k$ y ofrecemos la suficiente práctica, por dos razones. Primero, hemos demostrado ya cuán rápidamente se puede dibujar en ese caso la gráfica. Segundo, demostraremos su aplicación a la resolución de ecuaciones cuadráticas.

Respuestas al Conjunto de problemas 16-2; páginas 519-520:

1. (a) $x^2 - 2x = (x^2 - 2x + 1) - 1$
   $= (x - 1)^2 - 1$

   (b) $x^2 + x + 1 = (x^2 + x + \frac{1}{4}) + 1 - \frac{1}{4}$
   $= (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$

   (c) $x^2 + 6x = (x^2 + 6x + 9) - 9$
   $= (x + 3)^2 - 9$

   (d) $x^2 - 3x - 2 = (x^2 - 3x + \frac{9}{4}) - 2 - \frac{9}{4}$
   $= (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{17}{4}$

   (e) $x^2 - 3x + 2 = (x^2 - 3x + \frac{9}{4}) + 2 - \frac{9}{4}$
   $= (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}$

   (f) $5x^2 - 10x - 5 = 5(x^2 - 2x + 1) - 5 - 5(1)$
   $= 5(x - 1)^2 - 10$

(g) $4x^2 + 4 \quad (0 : 4(x - 0)^2 + 4)$

(h) $x^2 + kx = (x^2 + kx + \frac{k^2}{4}) - \frac{k^2}{4}$

$= (x + \frac{k}{2})^2 - \frac{k^2}{4}$

(i) $x^2 + \sqrt{2}\,x - 1 = (x^2 + \sqrt{2}\,x + \frac{2}{4}) - 1 - \frac{1}{2}$

$= (x + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 - \frac{3}{2}$

(j) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 2 = \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 9) + 2 - \frac{9}{2}$

$= \frac{1}{2}(x - 3)^2 - \frac{5}{2}$

2. (a) $x^2 - x + 2 = (x^2 - x + \frac{1}{4}) + 2 - \frac{1}{4}$

$= (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}$

(b) $x^2 + 3x + 1 = (x^2 + 3x + \frac{9}{4}) + 1 - \frac{9}{4}$

$= (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{5}{4}$

(c) $3x^2 - 2x = 3(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}) - \frac{1}{3}$

$= 3(x - \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{3}$

(d) $(x + 5)(x - 5) = x^2 - 25 \quad (0 : (x - 0)^2 - 25)$

(e) $6x^2 - x - 15 = 6(x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{144}) - 15 - \frac{1}{24}$

$= 6(x - \frac{1}{12})^2 - 15\frac{1}{24}$

(f) $(x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2}) = (x + 1)^2 - 2$

3. (a) La gráfica de $y = x^2 - x + 2$ es una parábola con vértice $(\frac{1}{2}, \frac{7}{4})$ y eje $x = \frac{1}{2}$. Se obtiene trasladando la gráfica de $y = x^2$, $\frac{1}{2}$ unidad hacia la derecha y $1\frac{3}{4}$ unidades hacia arriba.

   (b) La gráfica de $y = x^2 + 3x + 1$ es una parábola con vértice $(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4})$ y eje $x = -\frac{3}{2}$. Se obtiene trasladando la gráfica de $y = x^2$, $1\frac{1}{2}$ unidades hacia la izquierda y $1\frac{1}{4}$ unidades hacia abajo.

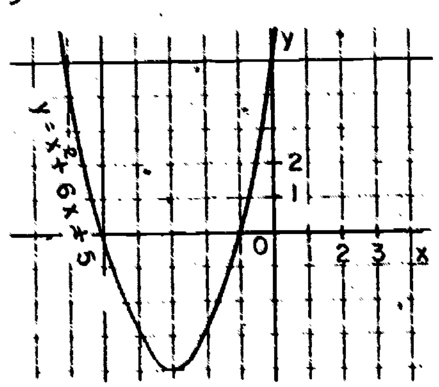
   (c) La gráfica de $y = 3x^2 - 2x$ es una parábola con vértice $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ y eje $x = \frac{1}{3}$. Se obtiene trasladando la gráfica de $y = 3x^2$, $\frac{1}{3}$ unidad hacia la derecha y $\frac{1}{3}$ unidad hacia abajo.

   (d) La gráfica de $y = (x + 5)(x - 5)$ es una parábola con vértice $(0, -25)$ y eje $x = 0$. Se obtiene trasladando la gráfica de $y = x^2$, 25 unidades hacia abajo.

   (e) La gráfica de $y = 6x^2 - x - 15$ es una parábola con vértice $(\frac{1}{12}, -15\frac{1}{24})$ y eje $x = \frac{1}{12}$. Se obtiene trasladando la gráfica de $y = 6x^2$, $\frac{1}{12}$ unidad hacia la derecha y $15\frac{1}{24}$ unidades hacia abajo.

   (f) La gráfica de $y = (x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2})$ es una parábola con vértice $(-1, -2)$ y eje $x = -1$. Se obtiene trasladando la gráfica de $y = x^2$ una unidad hacia la izquierda y dos unidades hacia abajo.

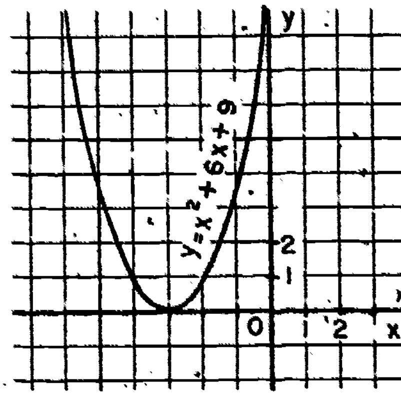
4. $$x^2 + 6x + 5 = (x^2 + 6x + 9) + 5 - 9$$
$$= (x + 3)^2 - 4$$



La gráfica cruza al eje x en dos puntos. Estos son $(-1, 0)$ y $(-5, 0)$.

5. $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

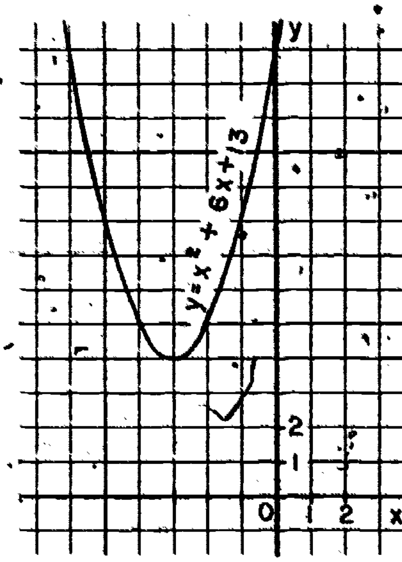
La gráfica no cruza al eje x. Lo toca en un punto, a saber, (-3, 0).



6. $x^2 + 6x + 13 = (x^2 + 6x + 9) + 13 - 9$

$= (x + 3)^2 + 4$

La gráfica no cruza ni toca al eje x.



7. Si en el problema 4, $y = 0$, entonces

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$
$$(x + 5)(x + 1) = 0$$
$$x + 5 = 0 \quad \text{ó} \quad x + 1 = 0$$
$$x = -5 \quad \text{ó} \quad x = -1$$

son todos equivalentes. Por lo tanto, el conjunto de validez de la ecuación es $\{-5, -1\}$.

Si en el problema 5, $y = 0$, entonces

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$
$$(x + 3)(x + 3) = 0$$
$$x + 3 = 0 \quad ó \quad x + 3 = 0$$
$$x = -3 \quad ó \quad x = -3$$

son todos equivalentes. Por lo tanto, el conjunto de validez de la ecuación es $\{-3\}$.

En cada caso, los miembros del conjunto de validez de la ecuación son los mismos que las abscisas de los puntos donde la parábola corta al eje x.

Los puntos en los cuales una parábola corta al eje x serán aquellos puntos cuyas abscisas son miembros del conjunto de validez de la ecuación de la parábola, y cuyas ordenadas son 0.

8.

	Polinomio	Forma canónica
Problema 4	$x^2 + 6x + 5$	$(x + 3)^2 - 4$
Problema 5	$x^2 + 6x + 9$	$(x + 3)^2 - 0$
Problema 6	$x^2 + 6x + 13$	$(x + 3)^2 + 4$

El polinomio en el problema 4 puede factorizarse como diferencia de dos cuadrados, del modo siguiente:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 5 &= (x + 3)^2 - 4 \\ &= (x + 3)^2 - (2)^2 \\ &= (x + 3 + 2)(x + 3 - 2) \\ &= (x + 5)(x + 1) \end{aligned}$$

16.3 Ecuaciones cuadráticas

Página 521. $2x^2 - 3x + 1 = 0$

$(2x - 1)(x - 1) = 0$

$2x - 1 = 0$ ó $x - 1 = 0$

$x = \frac{1}{2}$ ó $x = 1$

son todos equivalentes. Por lo tanto, el conjunto de validez de la ecuación es $\{\frac{1}{2}, 1\}$.

Página 522. Para todo número real x, $x-1$ es también real. Por lo tanto, $(x - 1)^2$ es mayor que o igual a 0, puesto que el cuadrado de un número real no puede ser negativo.

Respuestas al Conjunto de problemas 16-3; páginas 522-525:

1. (a) $(3x - 5)(2x + 3)$

   (b) No es factorizable sobre los números reales.

   (c) $(x^2 + 8x + 16) - 16 + 3 = (x + 4)^2 - 13$
   $= (x + 4 + \sqrt{13})(x + 4 - \sqrt{13})$

   (d) No es factorizable sobre los números reales.

   (e) $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$

   (f) $(3x - 2)(3x - 2)$

   (g) $(\sqrt{2}(x - 1) + \sqrt{5})(\sqrt{2}(x - 1) - \sqrt{5})$
   $= (\sqrt{2}\,x - \sqrt{2} + \sqrt{5})(\sqrt{2}\,x - \sqrt{2} - \sqrt{5})$

   (h) $x(3 - 2x)$

2. (a) $x^2 + 6x + 4 = 0$

   $(x^2 + 6x + 9) + 4 - 9 = 0$

   $(x + 3)^2 - 5 = 0$

   $(x + 3 + \sqrt{5})(x + 3 - \sqrt{5}) = 0$

   $x + 3 + \sqrt{5} = 0$ ó $x + 3 - \sqrt{5} = 0$

   $x = -3 - \sqrt{5}$ ó $x = -3 + \sqrt{5}$

   son todos equivalentes. Por lo tanto, el conjunto de validez de la ecuación es $\{-3 - \sqrt{5}, -3 + \sqrt{5}\}$.

(b)
$$2x^2 - 5x = 12$$
$$2x^2 - 5x - 12 = 0$$
$$2\left(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{16}\right) - 12 - \frac{50}{16} = 0$$
$$2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{242}{16} = 0$$
$$\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{121}{16} = 0$$
$$x - \frac{5}{4} + \frac{11}{4} = 0 \quad ó \quad x - \frac{5}{4} - \frac{11}{4} = 0$$
$$x = -\frac{3}{2} \quad ó \quad x = 4$$

son todos equivalentes. Por lo tanto, el conjunto de validez de la ecuación es $\{-\frac{3}{2}, 4\}$. Obsérvese que en este problema, podríamos escribir $2x^2 - 5x - 12 = (2x + 3)(x - 4)$ y obtener el conjunto de validez directamente de esta forma factorizada.

(c)
$$x^2 + 4x + 6 = 0$$
$$(x^2 + 4x + 4) + 6 - 4 = 0$$
$$(x + 2)^2 + 2 = 0$$

son todos equivalentes. Sin embargo, $(x + 2)^2 + 2$ no es factorizable sobre los números reales, y el conjunto de validez de la ecuación es $\emptyset$.

(d)
$$x^2 = 2x + 4$$
$$x^2 - 2x - 4 = 0$$
$$(x^2 - 2x + 1) - 4 - 1 = 0$$
$$(x - 1)^2 - 5 = 0$$
$$(x - 1 + \sqrt{5})(x - 1 - \sqrt{5}) = 0$$
$$x - 1 + \sqrt{5} = 0 \quad ó \quad x - 1 - \sqrt{5} = 0$$
$$x = 1 - \sqrt{5} \quad ó \quad x = 1 + \sqrt{5}$$

son todos equivalentes. Por lo tanto, el conjunto de validez de la ecuación es $\{1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}\}$.

(e) $$2x^2 = 4x - 11$$

$$2x^2 - 4x + 11 = 0$$

$$2(x^2 - 2x + 1) + 11 - 2 = 0$$

$$2(x - 1)^2 + 9 = 0$$

son todos equivalentes. Sin embargo, $2(x - 1)^2 + 9$ no es factorizable sobre los números reales. Por lo tanto, el conjunto de validez de la ecuación es $\emptyset$.

(f) $$12x^2 - 8x = 15$$

$$12x^2 - 8x - 15 = 0$$

$$12(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}) - 15 - \frac{12}{9} = 0$$

$$12(x - \frac{1}{3})^2 - \frac{147}{9} = 0$$

$$4(x - \frac{1}{3})^2 - \frac{49}{9} = 0$$

$$(2(x - \frac{1}{3}) + \frac{7}{3})(2(x - \frac{1}{3}) - \frac{7}{3}) = 0$$

$$2x + \frac{5}{3} = 0 \text{ ó } 2x - \frac{9}{3} = 0$$

$$x = -\frac{5}{6} \text{ ó } x = \frac{3}{2}$$

son todos equivalentes. Por lo tanto, el conjunto de validez de la ecuación es $\{-\frac{5}{6}, \frac{3}{2}\}$. (Obsérvese que $12x^2 - 8x - 15$ puede factorizarse como un polinomio sobre los enteros.)

3. $$-3x^2 + 6x - 5 = -3(x^2 - 2x) - 5$$
$$= -3(x^2 - 2x + 1) - 5 - (-3)$$
$$= -3(x - 1)^2 - 2$$

De la ecuación en forma canónica, podemos deducir que el vértice de la parábola es el punto $(1, -2)$.

Puesto que el coeficiente de $(x - 1)^2$ es negativo, la parábola se extiende hacia abajo, y -2 es el mayor valor que el polinomio $-3x^2 + 6x - 5$ puede tomar.

4. $$x^2 - 8x + 21 = (x^2 - 8x) + 21$$
$$= (x^2 - 8x + 16) + 21 - 16$$
$$= (x - 4)^2 + 5$$

El vértice de la parábola que constituye la gráfica del polinomio es el punto $(4, 5)$. Puesto que esta parábola se extiende hacia arriba, el valor menor del polinomio es 5.

El polinomio puede tomar muchos valores mayores que 5.

Sus valores son números enteros para valores enteros de x, pero no para todos los valores <u>reales</u> de x.

5. $$2x^2 - 4x - 1 = 0$$
$$2(x - 1)^2 - 3 = 0$$
$$(\sqrt{2}(x - 1) + \sqrt{3})(\sqrt{2}(x - 1) - \sqrt{3}) = 0$$
$$\sqrt{2}\,x - \sqrt{2} + \sqrt{3} = 0 \quad \text{ó} \quad \sqrt{2}\,x - \sqrt{2} - \sqrt{3} = 0$$
$$x = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \quad \text{ó} \quad x = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

son todos equivalentes. Por lo tanto, el conjunto de validez de la ecuación es $\{\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}\}$.

En el Capítulo 11, aprendimos a racionalizar el denominador; por lo tanto, vemos que el conjunto de validez puede también escribirse así: $\{1 - \frac{\sqrt{6}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\}$.

6. Si el número de pies del ancho es x, y el número de pies del perímetro es 94, entonces el número de pies del largo es $47 - x$. El número de pies cuadrados del área es $x(47 - x)$.

$$x(47 - x) = 496$$

$$x^2 - 47x + 496 = 0$$

$$\left(x^2 - 47x + \frac{2209}{4}\right) + 496 - \frac{2209}{4} = 0$$

$$\left(x - \frac{47}{2}\right)^2 - \frac{225}{4} = 0$$

$$\left(x - \frac{47}{2} + \frac{15}{2}\right)\left(x - \frac{47}{2} - \frac{15}{2}\right) = 0$$

$$(x - 16)(x - 31) = 0$$

$$x - 16 = 0 \quad ó \quad x - 31 = 0$$

$$x = 16 \quad ó \quad x = 31$$

son todos equivalentes. Por lo tanto, el conjunto de validez de la ecuación es $\{16, 31\}$. Cuando $x = 16$, $47 - x = 31$. El rectángulo tiene 16 pies de ancho y 31 pies de largo.

Toda vez que $x^2 - 47x + 496$ es factorizable sobre los enteros, no hubiera sido necesario usar el método de completar el cuadrado en este caso.

El estudiante podría tratar de resolver este problema utilizando dos variables del modo siguiente:

Si el rectángulo tiene x pies de ancho, y y pies de largo, entonces

$$\begin{cases} 2x + 2y = 94 \\ xy = 496 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 47 \\ xy = 496 \end{cases}$$

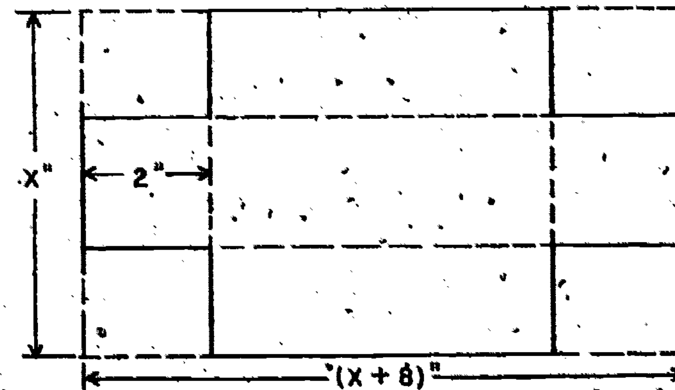
$$\begin{cases} y = 47 - x \\ xy = 496 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 47 - x \\ x(47 - x) = 496 \end{cases}$$

Aunque esto implica una ecuación cuadrática con dos variables, el estudiante puede ver que el método de "sustitución" lo reduce a una ecuación con una variable.

7. Si la lámina metálica tiene x pulgadas de ancho, tiene $x + 8$ pulgadas de largo.

La caja tiene $x - 4$ pulgadas de ancho, $x + 8 - 4$ pulgadas de largo, y 2 pulgadas de profundidad.



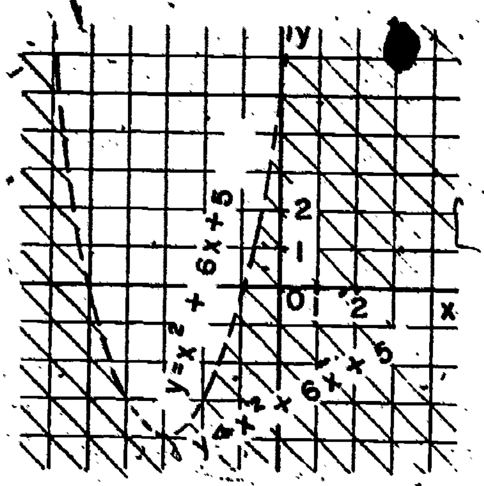
$$2(x - 4)(x + 4) = 256 \quad \underline{y} \quad x > 0$$
$$2(x^2 - 16) = 256 \quad \underline{y} \quad x > 0$$
$$x^2 - 16 = 128 \quad \underline{y} \quad x > 0$$
$$x^2 - 144 = 0 \quad \underline{y} \quad x > 0$$
$$(x + 12)(x - 12) = 0 \quad \underline{y} \quad x > 0$$
$$x + 12 = 0 \quad \text{ó} \quad x - 12 = 0, \quad \underline{y} \quad x > 0$$
$$x = -12 \quad \text{ó} \quad x = 12, \quad \underline{y} \quad x > 0$$

son todos equivalentes. Por lo tanto, el conjunto de validez del enunciado es $\{12\}$.

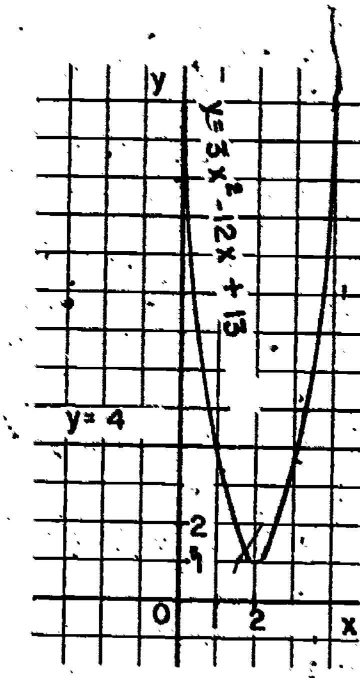
La lámina tiene 12 pulgadas de ancho y 20 pulgadas de largo.

8.

(a)

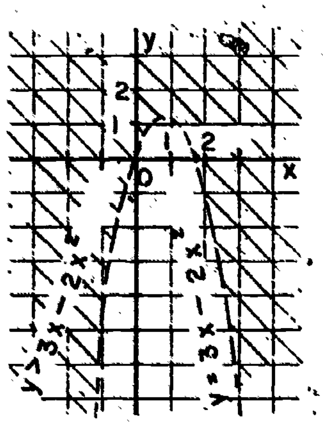


(b)

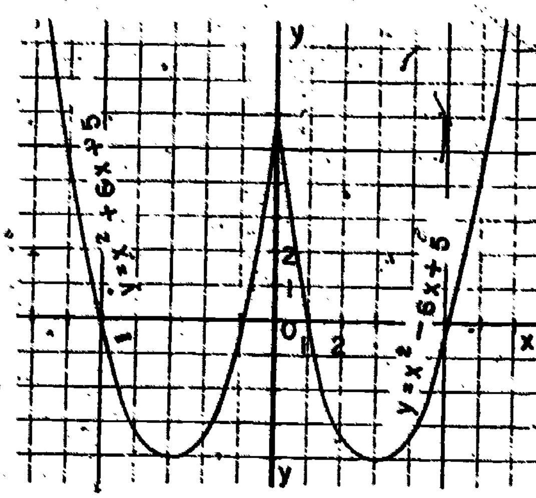


Los dos puntos $(1, 4)$ y $(3, 4)$ constituyen la gráfica.

(c)



(d)



En (d), recordamos que $y = x^2 - 6|x| + 5$ implica:

$$y = \begin{cases} x^2 - 6x + 5, & x \geq 0 \\ x^2 + 6x + 5, & x < 0. \end{cases}$$

9. Si un cateto tiene y pies de largo, el otro cateto tiene $y - 1$ pies de largo, y la hipotenusa tiene $y + 8$ pies de largo. Luego,

$$y^2 + (y - 1)^2 = (y + 8)^2 \text{ y } y > 0.$$

Conjunto de validez: $\{21\}$

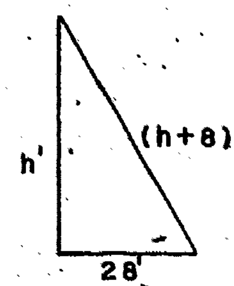
Las longitudes de los lados del triángulo son 20 pies, 21 pies y 29 pies.

10. Si la ventana está a h pies de altura sobre el suelo, la cuerda tiene $h + 8$ pies de largo. Luego,

$h^2 + 28^2 = (h + 8)^2$ y $h > 0$.

Conjunto de validez: $\{45\}$

La ventana está a 45 pies sobre el suelo.



11. Si un cateto del triángulo tiene x unidades de largo, entonces

$$x^2 + x^2 = 3^2 \text{ y } x > 0.$$

Conjunto de validez: $\{\frac{3\sqrt{2}}{2}\}$

Cada cateto tiene $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ unidades de largo.

12. Si la diagonal tiene d pulgadas de largo, un lado tiene $d - 2$ pulgadas de largo. Luego,

$$(d - 2)^2 + (d - 2)^2 = d^2 \text{ y } d > 0.$$

Conjunto de validez: $\{4 + 2\sqrt{2}\}$

La diagonal tiene $4 + 2\sqrt{2}$ pulgadas de largo.

13. Si la lámina tiene t pies de largo, de ancho tiene $t - 3$ pies. Luego,

$$t(t - 3) = 46\tfrac{3}{4} \text{ y } t > 0$$

Conjunto de validez: $\{\frac{17}{2}\}$

La lámina tiene $8\frac{1}{2}$ pies de largo.

14. Si n es uno de los números, $9 - n$ es el otro número, y

$$n^2 - (9 - n)^2 = 25.$$

Conjunto de validez: $\{\frac{53}{9}\}$

Los números son $\frac{53}{9}$ y $\frac{28}{9}$.

15. Si n es el número,

$$14n + n^2 = 11.$$

Conjunto de validez: $\{-7 + 2\sqrt{15}, -7 - 2\sqrt{15}\}$

El número es $(-7 + 2\sqrt{15})$ ó $(-7 - 2\sqrt{15})$.

16. Si su velocidad media a la ida era g millas por hora, entonces su velocidad media a la vuelta fue $g - 6$ millas por hora. Luego,

$$\frac{336}{g-6} = \frac{336}{g} + 1 \quad , \quad g > 0.$$

Conjunto de validez: $\{48\}$

La velocidad media fue 48 millas por hora a la ida y 42 millas por hora a la vuelta.

17. Si x es el número,

$$x + \frac{1}{x} = 4 \quad \text{y} \quad x \neq 0.$$

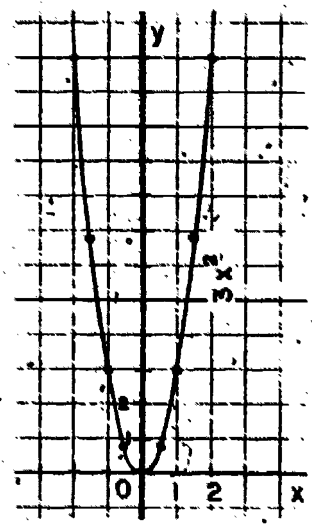
Conjunto de validez: $\{2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}\}$

El número es $2 + \sqrt{3}$ ó $2 - \sqrt{3}$.

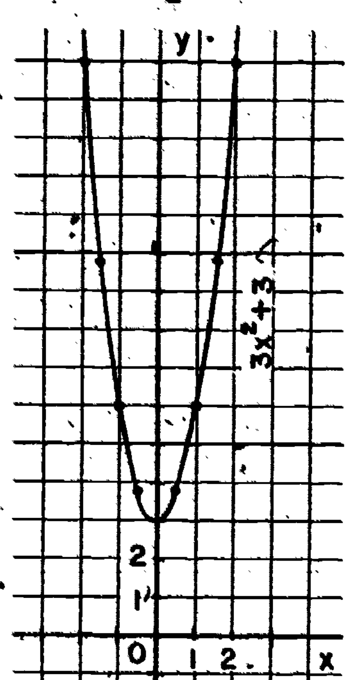
Respuestas a los Problemas de repaso; páginas 525-526:

1\. (a)

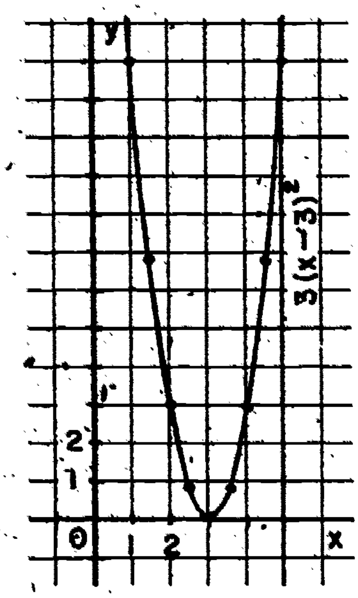
x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
y	12	$\frac{27}{4}$	3	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	3	$\frac{27}{4}$	12



(b)



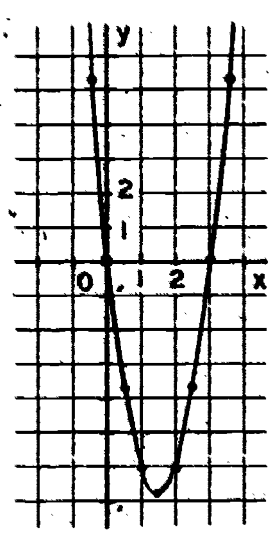
(c)



(d) $3x(x-3) = 3x^2 - 9x$

$= 3(x^2 - 3x + \frac{9}{4}) - \frac{27}{4}$

$= 3(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{27}{4}$



(e) La gráfica de (d) puede obtenerse trasladando la gráfica de (a) $\frac{3}{2}$ unidades hacia la derecha y $\frac{27}{4}$ unidades hacia abajo.

2. (a) $y = -x^2$

(b) $y = x^2 + 3$

(c) $y = (x + 2)^2$

(d) $y = (x - 1)^2 - 2$

3. (a) Recta

(b) Parábola

(c) Par de rectas: $y = x$ ó $y = -x$

(d) Recta

(e) Recta

(f) Parábola

(g) Parábola

(h) Recta

(i) Punto

4. (a)

(i) La gráfica corta al eje y en un punto donde $x = 0$. Cuando $x = 0$, $x^2 + 2x - 8 = -8$. Por tanto, la gráfica corta al eje y en -8.

(ii) La gráfica corta al eje x en los puntos donde

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$(x - 2)(x + 4) = 0$$

$$x - 2 = 0 \text{ ó } x + 4 = 0$$

$$x = 2 \text{ ó } x = -4$$

La gráfica corta al eje x en 2 y en -4.

(iii) El mayor o menor valor del polinomio es la ordenada del vértice de la parábola.

$$x^2 + 2x - 8$$

$$(x^2 + 2x + 1) - 1 - 8$$

$$(x - 1)^2 - 9$$

El vértice está en $(1, -9)$ y la parábola se extiende hacia arriba. Por tanto, el valor menor es -9.

(b) (i) 3 (ii) No corta al eje x. (iii) El menor valor es 2.

(c) (i) 4 (ii) 2 y -2 (iii) El mayor valor es 4.

(d) (i) 12 (ii) 4 y -3 (iii) No hay valor mayor ni menor. La gráfica es una recta.

(e) (i) 12 (ii) 4 y -3 (iii) El mayor valor es $\frac{49}{4}$.

(f) (i) 0 (ii) 0 (iii) El menor valor es 0.

5. (a) $\{7, 3\}$

(b) $\{1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\}$

(c) $\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\}$

(d) $\{\frac{3}{5}, \frac{6}{7}\}$

(e) $\{2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}\}$

(f) El conjunto de todos los números reales.

6. Si uno de los números es n, el otro es $9 - n$, y su producto es $n(9 - n)$.

$$
\begin{aligned}
n(9 - n) &= 9n - n^2 \\
&= -(n^2 - 9n + \tfrac{81}{4}) + \tfrac{81}{4} \\
&= -(n - \tfrac{9}{2})^2 + \tfrac{81}{4}
\end{aligned}
$$

El vértice de la parábola es $(\frac{9}{2}, \frac{81}{4})$, y la parábola se extiende hacia abajo. Por lo tanto, el valor de n que da el mayor valor para $n(9 - n)$ es $\frac{9}{2}$.

Los números son $\frac{9}{2}$ y $\frac{9}{2}$.

7. $$
\begin{aligned}
n^2 - 10n + 175 &= (n^2 - 10n + 25) + 150 \\
&= (n - 5)^2 + 150
\end{aligned}
$$

El vértice de la parábola está en $(5, 150)$.
El fabricante deberá construir 5 botes en un día; esto dará un costo mínimo de \$150 por bote.

Capítulo 16

Sugerencias para exámenes

1. Dibuja una gráfica de $y = x^2$.
   (a) Explica la manera de obtener la gráfica de $y = -x^2$ a partir de la gráfica de $y = x^2$.
   (b) Explica la manera de obtener la gráfica de $y = x^2 + 6$ a partir de la gráfica de $y = x^2$.

2. Escribe cada uno de los siguientes en la forma canónica y dibuja su gráfica:
   (a) $x^2 - 2x - 3$
   (b) $x(x + 6)$
   (c) $6 - 6x - x^2$
   (d) $2x^2 + 4x + 8$
   (e) $(2x + 1)(2x - 5)$
   (f) $(x - 3)(x + 3)$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:
   (a) $x^2 + 5x + 4 = 0$
   (b) $4x^2 + 3 = 8x$
   (c) $2x^2 + 1 = 4x$
   (d) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$
   (e) $x^2 - 2x + 2 = 0$
   (f) $x(x + 1) - (x + 1) = x^2 + 13$

4. ¿Cuál es el menor valor que puede tener el polinomio "$x^2 - 6x + 16$"?

5. Dos números primos sucesivos difieren en 2 y su producto es 899. Determina los números.

6. Si cada dimensión de una habitación que mide 8 pies por 12 pies se aumenta en la misma cantidad, el espacio del piso se aumenta en 224 pies cuadrados. Determina las nuevas dimensiones de la habitación.

Capítulo 17

FUNCIONES

17-1. El concepto de función

Este capítulo trata una de las ideas más importantes y fundamentales en la matemática, la idea de función. Se incluye aquí para aquellas clases organizadas para los estudiantes más aprovechados, así como para individuos excepcionales que tienen capacidad para avanzar rápidamente, asimilando todo lo expuesto en los capítulos anteriores en menos lecciones que de ordinario. Se podrá encontrar discusión adicional de este concepto en Studies in Mathematics, Vol. III, páginas 6.17-6.25

En el pasado, la costumbre ha sido posponer un estudio cuidadoso de las funciones para un nivel matemático mucho más avanzado. A causa de esto, el tema está rodeado de un aura de dificultad completamente injustificado. La idea es sencilla y, según se hará evidente en lo que sigue, está implícita en nuestras más elementales consideraciones. En este respecto, el concepto de función está en la misma categoría que el concepto de conjunto. Incidentalmente, el concepto de conjunto es otro buen ejemplo de una idea que estaba implícita en muchas cuestiones matemáticas mucho antes de que fuera aislada y estudiada con gran cuidado en sí misma. Otra ilustración más de este fenómeno lo ofrecen las propiedades generales ACD de la suma y de la multiplicación que están implícitas en toda la aritmética, pero que no se hacen explícitas hasta el estudio del álgebra.

Página 529. La tabla completa de franqueo es

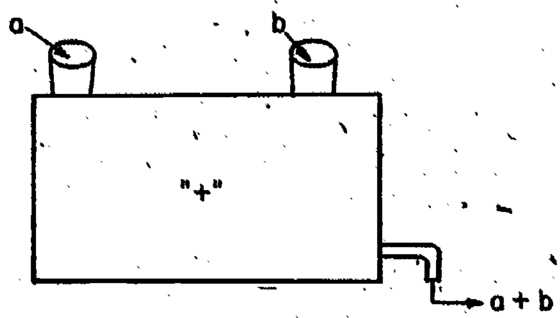
onzas	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$	2	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$	3	$3\frac{1}{4}$	...
centavos	4	4	4	4	8	8	8	8	12	12	12	12	16	...

Respuestas al Conjunto de problemas 17-1a; páginas 529-531:

1. (a) La asociación es del conjunto de todos los enteros positivos al conjunto de todos los enteros positivos impares. Como evidentemente no podemos escribir todos los enteros impares, la tabla puede sólo sugerir la asociación completa. Los enteros impares asociados con 13 y 1000 son 25 y 1999, respectivamente.
   Una regla para la asociación podría expresarse así: "Con cada entero positivo n, se asocia el enésimo entero positivo impar". Otra forma de expresar esta asociación es: "Con cada entero positivo n, se asocia el entero $2n-1$".

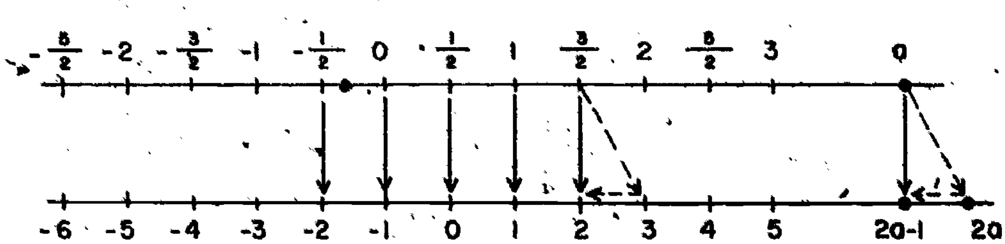
   (b) La imagen de la máquina sólo puede sugerir la asociación completa aquí descrita. La asociación es del conjunto de todos los números reales positivos al conjunto de todos los números reales mayores que -1. La máquina dará el número 33 cuando se le da el número 17. Rechazará los números 0 y -1, puesto que está "construida" para aceptar números reales positivos solamente.

   A algunos maestros les gusta destacar la idea de la máquina mucho más de lo que lo hemos hecho aquí. No hay inconveniente en así hacerlo. La máquina puede usarse también para visualizar todas las operaciones algebraicas. Por ejemplo, una máquina de sumar puede imaginarse como sigue:



Obsérvese que esto sugiere que la operación de la suma puede considerarse como una función que asocia un número real a cada par ordenado de números reales.

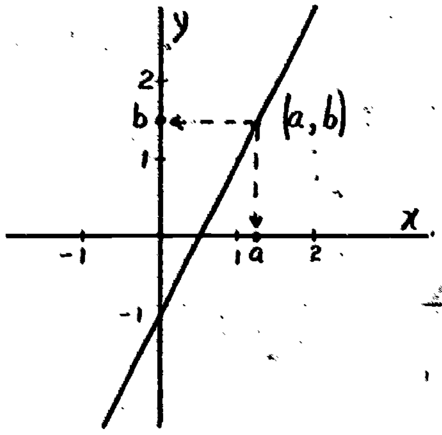
(c) La asociación aquí es <u>del</u> conjunto de todos los números reales <u>al</u> conjunto de todos los números reales. La asociación se puede representar como sigue:



Para determinar el número asociado con cualquier número real a en la recta superior, observamos primero que, antes de deslizar la recta inferior hacia la derecha (es decir, si 0 está directamente debajo de 0), el número en la recta inferior directamente debajo de a es 2a. Esto se desprende inmediatamente del supuesto de que la unidad en la recta superior es dos veces la unidad en la recta inferior. El trasladar la recta numérica inferior una unidad hacia la derecha de su posición original produce el efecto de restar 1 de la coordenada original de cada punto de la recta inferior. Por lo tanto, el número asociado con a es 2a-1. El número asociado con -13 es -27, con 13 es 25, y con 1000 es 1999.

<u>Nota</u>: Posiblemente no valga la pena exigir a todos los estudiantes que comprendan a cabalidad el argumento general anterior de que 2a-1 es el número asociado con a. El fin principal aquí no es estudiar esta forma especial de establecer una asociación, sino más bien destacar el hecho de que una asociación puede surgir en una variedad de maneras muy diferentes.

(d) Este ejercicio es muy importante y todos los estudiantes deberán estudiarlo a fondo. La asociación es <u>del</u> conjunto de todos los números reales <u>al</u> conjunto de todos los números reales. Obsérvese que para cada número a, hay <u>exactamente</u> <u>un número</u> b tal que (a,b) es un punto en



la recta. Esto es lo que hace posible establecer la asociación en este caso. El número asociado con -1 es -3, con $-\frac{1}{2}$ es -2, y con 13 es 25. Puesto que la forma en y de la ecuación de la recta es $y = 2x - 1$, llegamos a la conclusión de que el número asociado con el número a es $2a-1$.

(e) Esta asociación es <u>del</u> conjunto de todos los números reales t tales que $-1 < t < 1$ <u>al</u> conjunto de todos los números reales y tales que $-3 < y < 1$. Asociado con $-\frac{2}{3}$ está el número $-\frac{7}{3}$. Puesto que $|2| > 1$, ningún número está asociado con 2.

(f) La asociación es <u>del</u> conjunto de todos los números reales negativos <u>al</u> conjunto de todos los números reales y tales que $y < -1$. De nuevo, el número asociado con el número negativo a es $2a-1$. El número asociado con -13 es -27. Ningún número está asociado con 0.

2. (a) La asociación es <u>del</u> conjunto de todos los números reales x tales que $x < 1$ <u>al</u> conjunto de todos los números reales y tales que $y < -3$. La regla es: "A cada número real menor que 1, se le asigna el número obtenido al multiplicar el número dado por 2 y después restar 5". La regla asigna exactamente un número a cada número del primer conjunto.

(b) La asociación es <u>del</u> conjunto de todos los números reales no negativos <u>al</u> conjunto de todos los números reales. La regla es: "A cada número real no negativo, se le asignan números cuyos valores absolutos son iguales al número dado". La regla asigna 0 a 0 y, a cada número positivo, el número dado y su opuesto.

(c) La asociación es <u>del</u> conjunto de todos los números reales <u>al</u> conjunto de todos los números reales. La regla es: "A cada número real x, se le asigna el número obtenido al multiplicar el número dado por 3 y después sumar 7". La regla asigna exactamente un número a cada número real.

(d) La asociación es <u>del</u> conjunto de todos los enteros <u>al</u> conjunto de todos los números reales. La regla es: "A cada entero, se le asignan aquellos números reales menores que el entero dado". La regla asigna un conjunto infinito de números reales a cada entero.

(e) La asociación es <u>del</u> conjunto de todos los números racionales no negativos <u>al</u> conjunto de todos los números reales cuyos cuadrados sean racionales. La regla es: "A cada número racional no negativo, se asignan aquellos números reales cuyos cuadrados son iguales al número racional dado". La regla asigna 0 a 0 y, a cada racional positivo, sus dos raíces cuadradas.

3. Con cada número real entre 0 y 320, se asocia 4 veces el entero más pequeño que sea mayor que o igual al número dado.

4. El punto de partida aquí podría ser una máquina tal como las balanzas que imprimen tu peso a la vez que tu buenaventura en una tarjeta. Un estudiante que tenga una idea de la manera como podrían construirse tales balanzas, deberá poder indicar las modificaciones y adiciones necesarias para el fin aquí sugerido. La idea, desde luego, es obtener otra "imagen" mecánica de una asociación interesante de números.

La definición de función presentada en el texto es, estrictamente hablando, una definición de <u>función real</u>, puesto que se han restringido el dominio y el campo de valores a números reales. En los próximos cursos, el estudiante encontrará tipos de funciones más generales, en los cuales el dominio y el campo de valores pueden ser conjuntos distintos de conjuntos de números reales. Una tal función podría, por ejemplo, tener conjuntos de puntos en el plano como su dominio de definición. A modo de ilustración, asóciese con cada punto (x,y) del plano, la abscisa x del punto. En este caso, el dominio es el conjunto de todos los puntos del plano, y el campo de valores es el conjunto de todos los números reales. Si asociamos con cada punto (x,y) del plano, el punto $(-x,y)$, el resultado es una función con ambos, dominio y campo de valores, iguales al conjunto de todos los puntos en el plano.

En el estudio de las funciones, es importante subrayar en todas las oportunidades, los siguientes puntos:

(1) A cada número en el dominio de definición, la función asigna un número, y <u>solamente uno</u>, del campo de valores. Con otras palabras, no hay funciones "con varios valores o plurívocas". Sin embargo, el mismo número en el campo de valores puede estar asignado a muchos elementos diferentes del dominio.

(2) La idea esencial de función se encuentra precisamente en la asociación de números del dominio con números en el campo de valores, y <u>no</u> en la forma particular en la cual la asociación resulta descrita.

(3) Háblese siempre de la asociación del dominio al campo de valores. Esto ayuda a fijar la idea correcta de que se trata de un apareamiento ordenado de números en el cual el número del dominio se menciona primero y el número asignado del campo de valores se menciona en segundo lugar.

(4) No todas las funciones pueden representarse mediante expresiones algebraicas.

Aunque los puntos anteriores no son cruciales en una consideración elemental de las funciones, resultan de importancia capital más tarde. Además, muchas de las dificultades que los estudiantes tienen con la idea de función pueden atribuirse a confusión en estas cuestiones. Por lo tanto, resulta importante cerciorarse de que el estudiante entiende estos puntos desde su primerísimo contacto con el concepto de función.

Respuestas al Conjunto de problemas 17-1b; páginas 533-535:

1. Todos los enunciados del problema 1 y todos los del problema 2, excepto (b), (d), (e), definen funciones. Los enunciados en 2(b), (d), (e) no definen funciones, puesto que asocian más de un número con algunos de los números en el dominio de definición.

2. (a) $2x - 5$, $x < 1$.
   (b) Ninguna expresión sencilla.
   (c) $3x + 7$, donde x es cualquier número real.
   (d) Ninguna expresión sencilla.
   (e) Ninguna expresión sencilla.

3. (a) El dominio de definición es el conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

(i)

Número del día	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ingreso por día (dólares)	7	5	6	-4	-7	4	0	-3	-4	-6

(ii) La función no se puede representar mediante una expresión algebraica sencilla en x. Sin embargo, se puede representar mediante un polinomio de grado suficientemente alto.

(b) El dominio de definición es el conjunto de todos los enteros positivos, y el campo de valores es el conjunto $\{0,1,2,3,4\}$.

(i)

Entero positivo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
Residuo de la división por 5	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	...

(ii) La función no se puede representar mediante una expresión algebraica sencilla, pero podemos hacer lo siguiente: Con cada entero positivo, n, asociemos

0, si $n = 5k$, k cualquier entero positivo,
1, si $n = 5k + 1$, k cualquier entero positivo,
2, si $n = 5k + 2$, k cualquier entero positivo,
3, si $n = 5k + 3$, k cualquier entero positivo,
4, si $n = 5k + 4$, k cualquier entero positivo.

(c) El dominio de definición es el conjunto de todos los números reales positivos.

(i)

Número real positivo a	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}$	2	3	4	...
$\frac{1}{3}(a + 2)$	$\frac{5}{6}$	1	$\frac{1}{3}(\sqrt{2}+2)$	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2	...

(ii) Con cada número real positivo a, se asocia el número $\frac{1}{3}(a + 2)$.

(d) El dominio de definición es el conjunto de todos los enteros positivos.

(i)

Entero positivo n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
Enésimo primo	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	...

(ii) No se conoce ninguna función cuyo dominio de definición sea el conjunto de los enteros positivos, cuyo campo de valores sea un conjunto de números primos, y cuya ley sea una expresión algebraica.

(e) El dominio de definición es el conjunto de todos los enteros positivos del 1 al 365 inclusive. El campo de valores es el conjunto de todos los enteros no negativos del 0 al 364 inclusive.

(i)

Número del día	1	2	3	4	...	360	361	362	363	364	365
Días restantes del año	364	363	362	361	...	5	4	3	2	1	0

(ii) Con el enésimo día, se asocia $365-n$.

(f) El dominio es el conjunto de todos los enteros positivos menores que o iguales al número de dólares que se posea.

(i)

Número de dólares invertidos	1	2	3	...	20	...	100	...
Interés al 6 %	0.06	0.12	0.18	...	1.20	...	6.00	...

(ii) Con el número P de dólares invertidos, se asocia $0.06P$.

(g) El dominio es el conjunto de todos los números reales positivos.

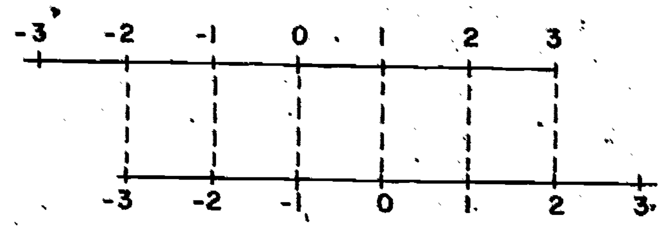
(i)

Diámetro en pulgadas	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{\pi}$	$\sqrt{2}$	2
Circunferencia en pulgadas	$\frac{\pi}{4}$	1	$\frac{\pi}{2}$	2	$\sqrt{2}\pi$	2π

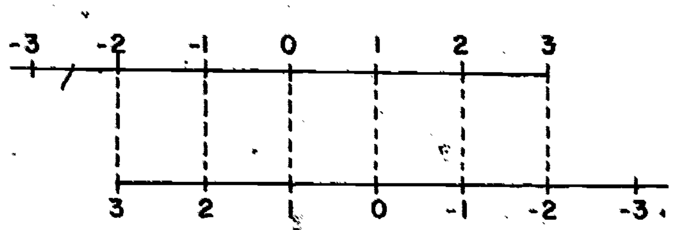
(ii) Si d es el diámetro, la circunferencia es πd.

(h) El dominio es el conjunto de todos los números reales.

Primera posición:



Segunda posición:



(i)

Número real a	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	10	...
Número asociado con a	3	2	1	$\frac{1}{2}$	0	-1	-9	...

(ii) Sea a cualquier número real en la recta superior. Después que se desliza la recta inferior de manera que su punto 0 esté directamente debajo del punto 1 de la recta superior, el punto en la recta inferior directamente debajo de a es $a - 1$. Cuando la recta inferior se gira alrededor del 0, el número $a - 1$ se remplaza por su opuesto, $-(a - 1)$. Por tanto, la asociación resultante puede expresarse como sigue:

Con todo número real a, se asocia el número $1 - a$.

4. El dominio es el conjunto de todos los enteros positivos mayores que 1.

Entero positivo n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
Factor más pequeño de n, mayor que 1	2	3	2	5	2	7	2	3	2	11	2	13	2	3	...

Los números primos están asociados con ellos mismos. El campo de valores es el conjunto de todos los números primos.

5. Esta función es parecida al ejemplo considerado al comienzo del capítulo. El dominio es el conjunto de todos los números reales mayores que 0 y menores que o iguales a 32, y el campo de valores es el conjunto de todos los enteros del 1 al 32. La función no se puede representar mediante una expresión algebraica con una variable. Los números asignados a 3.7 y 5 son 4 y 5, respectivamente.

6. La descripción verbal es el único método que podemos dar ahora para representar esta función. Los números asignados a $-\pi$, $-\frac{3}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$, $\frac{\pi}{2}$ y 10^6, son 1, -1, 1, -1, -1, 1, 1 y -1, respectivamente.

7. Obsérvese que $\frac{1}{x+2}$ da un número real para todo valor de x distinto de -2. Puesto que sólo tenemos raíces cuadradas de números reales no negativos, $\sqrt{x+2}$ tiene significado solamente para $x+2 \geq 0$ ó $x \geq -2$.
   (a) Todos los números reales, excepto 3.
   (b) Todos los números reales mayores que o iguales a 1.
   (c) Todos los números reales, excepto 0.
   (d) Todos los números reales.
   (e) Todos los números reales x tales que $x^2 \geq 1$.
   Esto es lo mismo que el conjunto de todos los números reales x tales que $x \geq 1$ ó $x \leq -1$.
   (f) Todos los números reales, excepto 2 y -2.

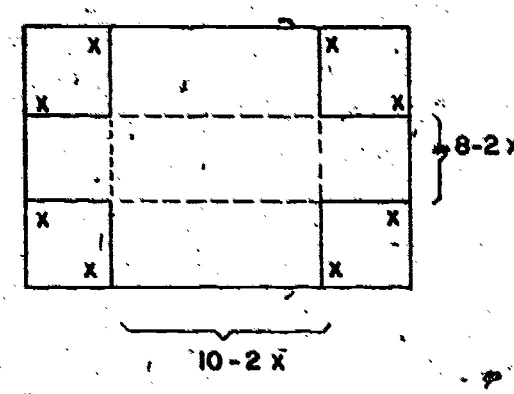
8. Obsérvese que si el perímetro de un rectángulo es igual a 10 pies, entonces la longitud de un lado debe ser menor que 5 pies.
   (a) El dominio de definición aquí es el conjunto de todos los enteros positivos entre 0 y el número de dólares de que se disponga.
   (b) Puesto que el área de un triángulo es igual a la mitad de la base x multiplicada por la altura a, debemos tener $\frac{1}{2}xa = 12$ ó $a = \frac{24}{x}$. En este caso, la longitud de la base puede ser cualquier valor, excepto 0. Por lo tanto, el dominio es el conjunto de todos los números reales positivos.

(c) El fondo de la caja tiene las dimensiones $8-2x$ por $10-2x$. Por tanto, el volumen viene dado por

$$(8-2x)(10-2x)x,$$

o sea

$$4x(4-x)(5-x).$$



Evidentemente, el cuadrado que se corta debe tener su lado menor que 4, así que $0 < x < 4$. Con otras palabras, el dominio de definición es el conjunto de todos los números reales entre 0 y 4.

17-2. La notación funcional

La notación funcional debe ser utilizada con gran cuidado. Al principio, no se pueden tratar demasiados ejemplos y ejercicios del tipo, "¿Cuál es el valor de f en 2?" o "¿Qué número está representado por $f(2)$?" Debe aprovecharse toda oportunidad que se presente para enfrentar al estudiante con esta cuestión. Es esencial para todos entender que el símbolo "f", cuando se usa para una función, representa la función completa y no solamente la regla o alguna forma especial de expresar la función. Obsérvese que hemos evitado el uso de la engañosa expresión, "la función $f(x)$", como un sustituto de la expresión correcta, "la función f". Con otras palabras, $f(x)$ es un número; es el valor de f en x, no la función misma.

Si dos variables x e y están relacionadas mediante el enunciado $y = f(x)$, donde f es una función dada, entonces x se llama algunas veces la variable <u>independiente</u>, e y la <u>variable dependiente</u> en la relación. Esta terminología, que se emplea mucho, ha sido evitada aquí, puesto que es un abuso del lenguaje. Conduce a expresiones tales como "y es una función de x", que tienden a oscurecer el concepto de función.

Para la función f definida por la regla,

$$f(x) = 2x - 1, \text{ para todo número real } x,$$

$f(-\frac{4}{3}) = -\frac{11}{3}$, $f(-\frac{1}{2}) = -2$, $f(\frac{4}{3}) = \frac{5}{3}$, $f(s) = 2s-1$, $f(-t) = -2t - 1$, $-f(t) = -2t + 1$, $f(t - 1) = 2(t - 1) - 1 = 2t - 3$, $f(t) - 1 = (2t - 1) - 1 = 2t - 2$.

Para la función g definida en la página 537, el campo de valores es el conjunto $\{-1,0,1\}$. También, $g(-3.2) = -1$, $g(0) = 0$, $g(-\frac{1}{2}) = -1$, $g(\sqrt{2}) = 1$. Si $a > 0$, $g(a) = 1$ y $g(-a) = -1$. Si $a \neq 0$, $g(|a|) = 1$. La regla para g no puede darse por una expresión algebraica sencilla con una variable.

<u>Respuestas al Conjunto de problemas 17-2</u>; páginas 538-540:

1. (a) $F(-2) = 3$ (e) $F(0) = 2$ (i) $F(\frac{t}{2}) = 2 - \frac{t}{4}$

   (b) $-F(2) = -1$ (f) $|F(-6)| = 5$ (j) $F(2t) = 2-t$

   (c) $F(-\frac{1}{2}) = \frac{9}{4}$ (g) $F(|-6|) = -1$ (k) $F(\frac{1}{t}) = 2 - \frac{1}{2t}$

   (d) $F(1)-1 = \frac{1}{2}$ (h) $F(t) = 2 - \frac{t}{2}$

2. El dominio de definición de G es el conjunto de todos los números reales, y el campo de valores es el conjunto

de todos los números reales no negativos.

(a) $G(0) = 0$ (b) $G(a) - G(-a) = 0$ (c) $\frac{G(-3)}{3} = 1$

3. La función h es idéntica con la función g definida en la sección 17-2. Asegúrese de que los estudiantes entienden por qué $h = g$. Subráyese otra vez que la función es independiente del método particular de describirla o de los símbolos usados para representarla.

4. Si $x < 0$, entonces $|x| = -x$, de manera que $\frac{x}{|x|} = -1$.

Si $x > 0$, entonces $|x| = x$, de manera que $\frac{x}{|x|} = 1$.

Por lo tanto,

$$k(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x < 0, \end{cases}$$

y de aquí que $k = g$.

5. (a) $H(2) = 3$ (b) $H(\frac{1}{3}) = -\frac{8}{9}$ (c) $H(-\frac{1}{3}) = -\frac{8}{9}$

(d) $-H(-2) = -3$ (e) $H(-1) + 1 = 1$ (f) $H(3)$ no está definido.

(g) $H(a) = a^2 - 1$, para $-3 < a < 3$.

(h) $H(t-1) = t^2 - 2t$, para $-2 < t < 4$. Obsérvese que

si $-2 < t < 4$, entonces $-3 < t-1 < 3$,

de manera que $H(t-1)$ está definido. (Esto es, $t-1$ está en el dominio de definición de H.)

(i) $H(t) - 1 = t^2 - 2$, para $-3 < t < 3$.

6. (a) El dominio de definición de Q es el conjunto de todos los números reales x tales que $-1 \leq x < 0$ ó $0 < x \leq 2$, esto es, todos los números entre -1 y 2, excepto 0, e incluyendo -1 y 2.

(b) El campo de valores de Q consiste en el número -1 y todos los x tales que $\cancel{0 < x \leq 2}$.

(c) $Q(-1) = -1$, $Q(-\frac{1}{2}) = -1$, $Q(0)$ no está definido,

$Q(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $Q(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}$, $Q(\pi)$ no está definido.

(d) R es la misma función que Q. (V. el problema 3 anterior.)

7. (a) $\{6\}$

(b) Todos los x tales que $4 < x$.

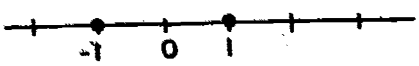
(c) $\{5\}$

(d) $\{\frac{4}{3}\}$.

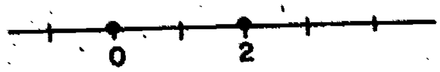
(e) Todos los x tales que $x < 0$.

(f) Todos los x tales que $2 \leq x$.

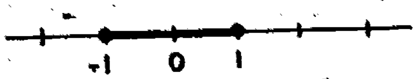
8. (a) $\{-1, 1\}$



(b) $\{0, 2\}$



(c) Todos los x tales que $-1 \leq x \leq 1$.



(d) Todos los x tales que $x < -3$ ó $x > 1$.

9. (a) El dominio de definición de f es el conjunto de todos los números reales, y el dominio de definición de F es el conjunto de todos los números reales distintos de -2. Por lo tanto, $f \neq F$.

Sin embargo, puesto que

$$\frac{x^2 - 4}{x + 2} = x - 2, \text{ si } x \neq -2,$$

tenemos

$$f(x) = F(x), \text{ para todos los } x \neq -2.$$

(b) En ambos casos, el dominio de definición es el conjunto de todos los números reales. Puesto que

$$\frac{t^4 - 1}{t^2 + 1} = t^2 - 1 \quad \text{para todos}$$

los números reales t, se desprende que $g = G$.

17-3. Gráficas de funciones

La gráfica de una función nos da una manera rápida de representar ciertas propiedades de la función. En la mayoría de los casos, nos interesa primariamente la "forma" de la gráfica, más bien que la localización precisa de puntos individuales, aunque puede haber ciertos puntos claves que deberán localizarse con precisión. Si hubiere alguna duda acerca de la forma de una porción de la gráfica, frecuentemente ésta puede resolverse gracias a unos pocos puntos bien elegidos. Otros tipos de información pueden ser también de utilidad al determinar la forma general de la gráfica. Por ejemplo, sin localizar punto alguno, sabemos que la gráfica de $y = 3x^2 + 1$ debe estar por encima de la recta $y = 1$, puesto que $3x^2 \geq 0$ para todo x. También, como $0 < a < b$ implica $0 < a^2 < b^2$, sabemos que la gráfica de $y = 3x^2 + 1$ asciende hacia la derecha. Debe inculcarse en los estudiantes que el objetivo al dibujar una gráfica no es simplemente situar un cierto número de puntos, sino más bien descubrir la forma de la gráfica mediante diversos métodos adecuados. La localización de ciertos puntos de la gráfica cuidadosamente elegidos es uno de los métodos.

Ejemplo 1. Las gráficas de la función f definida por

$$f(x) = 2x - 1, \quad 0 \leq x < 2,$$

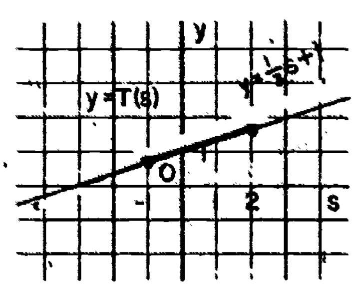
y la función F definida por

$$F(x) = 2x - 1, \; -2 < x < 2$$

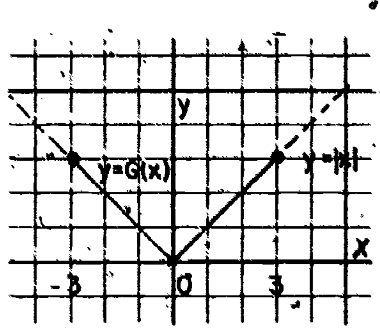
son distintas, puesto que la primera gráfica es el segmento de recta que une los puntos (0, -1) y (2, 3) con el primer punto incluido y el segundo excluido, y la segunda gráfica es el segmento de recta que une los puntos (-2, -5) y (2, 3) con ambos extremos excluidos.

Respuestas al Conjunto de problemas 17-3a; páginas 541-542:

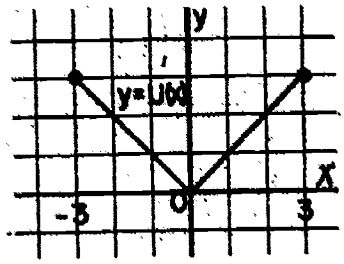
1. (a)



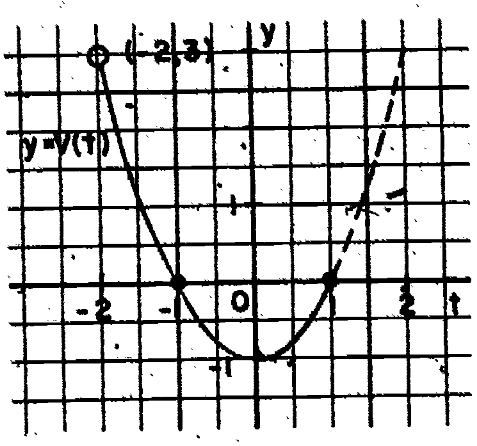
(b)



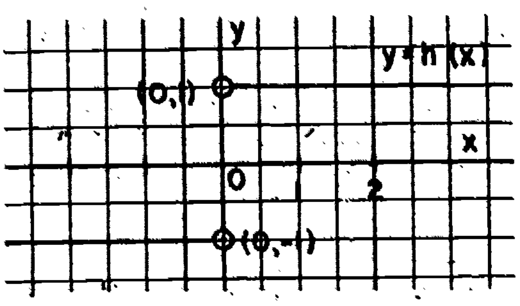
(c)



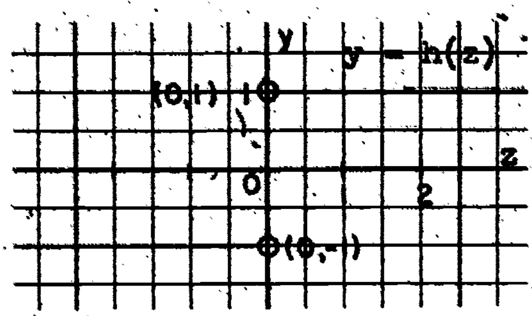
(d)



(e)

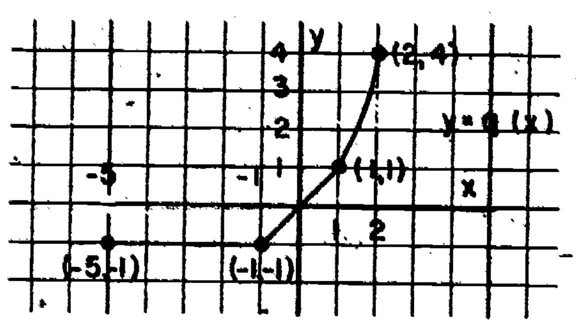


(f)

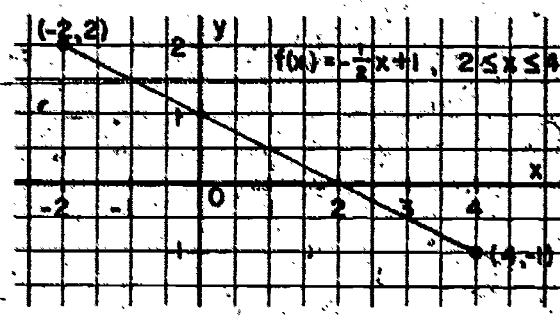


2. (a) Dominio: todos los s tales que $-1 \leq s \leq 2$. Campo de valores: todos los y tales que $\frac{2}{3} \leq y \leq \frac{5}{3}$.
   (b) Dominio: todos los x tales que $-3 \leq x \leq 3$. Campo de valores: todos los y tales que $0 \leq y \leq 3$.
   (c) Dominio: todos los x tales que $-3 \leq x < 3$. Campo de valores: todos los y tales que $0 \leq y \leq 3$.
   (d) Dominio: todos los t tales que $-2 < t \leq 1$. Campo de valores: todos los y tales que $-1 \leq y < 3$.
   (e) Dominio: todos los números reales distintos de cero. Campo de valores: $\{-1, 1\}$.
   (f) La misma función que en (e).

3.

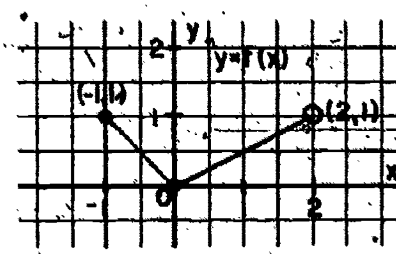


4.



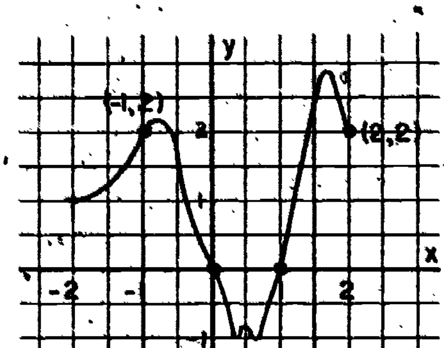
5. Dominio: todos los x tales que $-1 \leq x < 2$.

Campo de valores: todos los y tales que $0 \leq y \leq 1$.



$$f(x) = \begin{cases} -x, & -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x, & 0 < x < 2. \end{cases}$$

6. Hay muchas funciones que satisfacen a todas las condiciones. Un ejemplo es:



Para cualquier número a en el dominio de definición de una función f, hay exactamente un punto con abscisa a, en la gráfica de la función, y éste es (a,f(a)). Por lo tanto, la recta vertical x = a intersecará a la gráfica de f exactamente en un punto, a saber, (a,f(a)). Si a no está en el dominio de definición de f; entonces la recta x = a no intersecará a la gráfica de f en ningún punto. La regla para f puede enunciarse como sigue: "A cada número real a en el dominio de definición, se asigna el número real b tal que (a,b) es un punto de la gráfica ".

Respuestas al Conjunto de problemas 17-3b; páginas 544-545:

1. Cada una de las gráficas (a) - (ℓ), sea o no la gráfica de una función, determina un conjunto que consiste en todos los números reales a tales que hay al menos un punto de la gráfica con abscisa a. Si la gráfica resulta ser la de una función, entonces este conjunto es el dominio de definición de la función. Ahora, con cada número a en este "dominio", asociamos todos los números reales b tales que (a,b) está en la gráfica. Esta asociación será una función, si y sólo si hay exactamente un tal número b para cada número a. Esta es la situación en los casos (a), (e), (h) e (i), así que son gráficas de funciones. Por otra parte, en los casos restantes, hay valores de a con los cuales están asociados varios valores diferentes de b, de manera que no son gráficas de funciones.

   La mayoría de los estudiantes ciertamente no estará en condiciones de explicar este ejercicio con la precisión con que lo hemos hecho. Sin embargo, muchos de ellos estarán preparados para captar la idea. Respuestas aceptables en los casos (e) y (f) podrían ser algo así: "(e) es la gráfica de una función, porque hay solamente un punto en la gráfica directamente encima de cualquier punto del eje x, y, por tanto, la gráfica puede usarse para definir una asociación para una función, según se hizo en el problema 1(d) del Conjunto de problemas 17-1a. (f) no es la gráfica de una función, porque directamente encima de algunos puntos del eje x hay dos puntos en la gráfica, de manera que ésta no puede usarse para definir una función".

A medida que se van estudiando estos problemas, trátese de conseguir que los estudiantes enuncien explícitamente lo que es el dominio de definición y la manera de formular la regla en aquellos casos que son gráficas de funciones. El propósito de los problemas 2, 3 y 4 es conducir al criterio general para que una gráfica sea la gráfica de una función.

2. (a) $h(-3) = \sqrt{3}$. Puede tomarse aproximadamente como 1,7. $h(0) = 0$, $h(2) = -2$.

   (b) El conjunto de todos los x tales que $-4 \le x \le 3$.

   (c) El conjunto de todos los y tales que $-3 \le y \le 2$.

3. (a) Para x en el dominio de definición de g, habrá un punto, y sólo uno, (x,y), en la gráfica G. El número $g(x)$ es igual a la ordenada, y, del punto (x,y) de la gráfica.

   (b) El dominio de definición de g es el conjunto de todos los números reales x tales que existe un punto en G con abscisa igual a x.

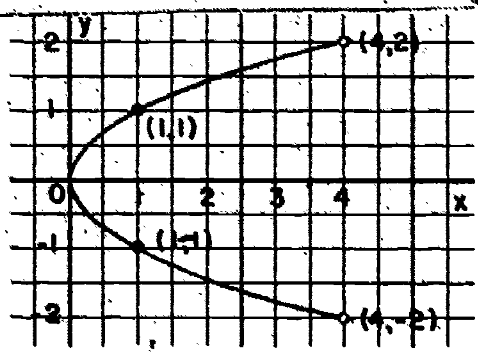
(c) Para demostrar que "si $(a,b) \neq (c,d)$, entonces $a \neq c$," debemos probar el contrapositivo de este enunciado, a saber, "si $a = c$, entonces $(a,b) = (c,d)$".

Así, si $a = c$, y si los puntos (a,b) y (c,d) están en la gráfica de g, entonces $b = g(a)$ y $d = g(c)$. Puesto que g es una función, hay exactamente un valor $g(a)$. Por lo tanto, si $a = c$, entonces $g(a) = g(c)$. De aquí que $b = d$, y $(a,b) = (c,d)$. Esto completa la demostración.

4. Este problema es la base para la definición de función como "conjunto de pares ordenados", que el estudiante encontrará eventualmente si continúa estudiando la matemática. En esa definición, la función se identifica con su gráfica, esto es, un conjunto de pares ordenados, y así la definición consiste en especificar qué conjuntos de pares ordenados se desean.

Para demostrar que el conjunto de puntos G que satisface a la condición dada es la gráfica de una función, necesitamos mostrar el dominio de definición y la regla para una función g de manera que G sea la gráfica de g. Considérese el dominio de definición como el conjunto de todos los números reales x para los cuales existe y de modo que el punto (x,y) pertenece a G. Obsérvese que, por la condición sobre G, hay para cada x exactamente un número y tal que (x,y) pertenece a G. Por lo tanto, si definimos $g(x) = y$ para cada x en el dominio, el resultado es una función g cuya gráfica es G.

5. Esta no es la gráfica de una función.



17-4. Funciones lineales

Cualquier recta (o porción de una recta) es la gráfica de una función lineal, con la excepción de las rectas verticales. Si una recta no es vertical, su ecuación puede ponerse en su forma en y: $y = Ax + B$. Así, pues, cada función lineal puede representarse mediante una expresión lineal. Con otras palabras, si f es una función lineal, entonces existen números reales A y B tales que $f(x) = Ax + B$ para cada x en el dominio de definición de f.

Respuestas al Conjunto de problemas 17-4; páginas 546-547:

1. (a) La gráfica es una recta horizontal, $y = B$.

   (b) La gráfica es el eje x.

   (c) Puesto que los puntos $(-3,0)$ y $(1,2)$ están en la gráfica, debemos tener

$$\begin{cases} 0 = A\cdot(-3) + B \\ 2 = A\cdot 1 + B \end{cases}$$

Este es un sistema de ecuaciones con las incógnitas A y B. La solución es $A = \frac{1}{2}$ y $B = \frac{3}{2}$. El problema puede también resolverse, obteniendo la ecuación de la recta determinada por los puntos $(-3,0)$, $(1,2)$, y entonces poniéndola en la forma en y.

(d) El dominio de definición es el conjunto de todos los números reales x tales que $-3 \leq x \leq 1$.

(e) $\begin{cases} 1 = A\cdot(-1) + B \\ 3 = A\cdot 3 + B \end{cases}$

Resolviendo respecto de A y B, obtenemos $A = \frac{1}{2}$ y $B = \frac{3}{2}$. Además, podríamos obtener A y B, escribiendo la ecuación de la recta determinada por los puntos $(-1,1)$ y $(3,3)$, en la forma en y. Obsérvese que ésta es la misma recta, pero una función distinta de la que hay en (c).

(f) La pendiente es $\frac{1}{2}$, y el punto de intersección con el eje y es $(0,\frac{3}{2})$.

(g) El dominio de definición es el conjunto de todos los números reales x tales que $-1 < x < 3$.

2. La ecuación de la recta es $x + 2y + 1 = 0$. Cuando $y = 2$, $x = -5$, y cuando $y = -2$, $x = 3$. Por lo tanto,

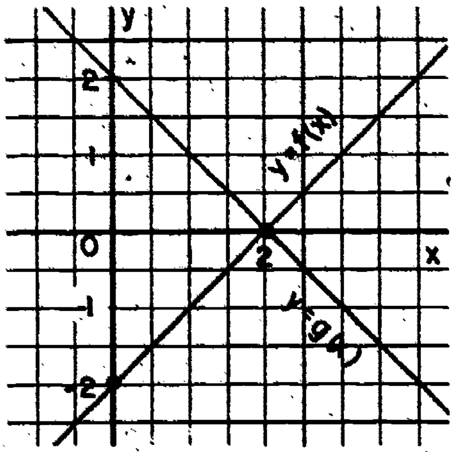
$$h(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, \quad -5 < x < 3.$$

3. (a) lineal
(b) no lineal
(c) no lineal
(d) no lineal
(e) lineal
(f) no lineal

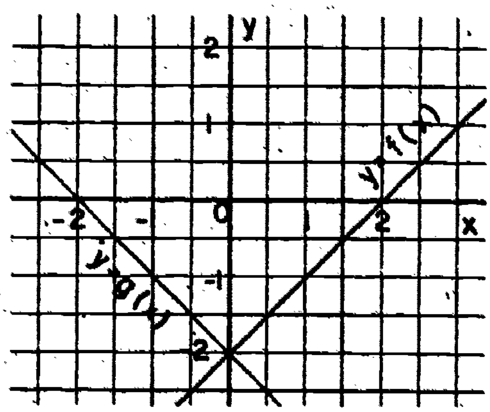
4. (a) $g(x) = -f(x)$
(b) $g(x) = |f(x)|$
(c) $g(x) = \frac{1}{f(x)}$
(d) $g(x) = f(|x|)$
(e) $g(x) = f(-x)$
(f) $g(x) = f(x^2)$

5. (a) La gráfica de g se obtiene girando la gráfica de f media vuelta alrededor del eje x.

(a)



(e)



(e) La gráfica de g se obtiene girando la gráfica de f media vuelta alrededor del eje y.

6. La gráfica de la ecuación $\big(y - F(x)\big)\big(y - G(x)\big) = 0$ es el conjunto de todos los puntos en la gráfica de F o en la gráfica de G.

Respuestas al Conjunto de problemas 17-5a; páginas 548-551:

1. (a) $f(-2) = -11$; $f(-\frac{1}{2}) = -19\frac{1}{4}$; $f(0) = -21$; $f(\frac{3}{4}) = -22\frac{11}{16}$; $f(3) = -21$; $f(a) = a^2 - 3a - 21$; $f(\frac{a}{2}) = \frac{a^2}{4} - \frac{3a}{2} - 21$; $f(a+1) = (a+1)^2 - 3(a+1) - 21 = a^2 - a - 23$.

   (b) $g(-2) = 10$; $g(-\frac{1}{2}) = -1\frac{1}{4}$; $g(0) = -2$; $g(3)$ no está definido.

   (Obsérvese que el dominio de $g(x)$ es $-3 < x < 3$.)

   $g(2t - 1) = 3(2t - 1)^2 - 2 = 12t^2 - 12t + 1$ para

   $-1 < t < 2$. (Obsérvese que $-3 < x < 3$, por lo tanto, $-3 < 2t - 1 < 3$ ó $-1 < t < 2$.)

(c) $f(x) = x^2 - 3x - 21 = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{93}{4}$

$= \left((x - \frac{3}{2}) + \frac{\sqrt{93}}{2}\right)\left((x - \frac{3}{2}) - \frac{\sqrt{93}}{2}\right)$

$= \left(x - (\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{93}}{2})\right)\left(x - (\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{93}}{2})\right) = 0$

Por lo tanto, el conjunto de validez es

$\left\{\frac{3 + \sqrt{93}}{2}, \frac{3 - \sqrt{93}}{2}\right\}$.

(d) 

0

$\frac{3 - \sqrt{93}}{2} \approx -3.3$ $\frac{3 + \sqrt{93}}{2} \approx 6.3$

(e) $f(t) + g(t) = 4t^2 - 3t - 23$. Obsérvese que si una función está definida para todos los números reales, y la otra función está definida para $-3 < t < 3$, entonces la suma de las dos funciones está definida para $-3 < t < 3$.

(f) $f(a) + 3 = a^2 - 3a - 18$; $f(a + 3) = (a + 3)^2 - 3(a + 3) - 21 = a^2 + 3a - 21$; $3f(a) = 3a^2 - 9a - 63$;

$f(3a) = (3a)^2 - 3(3a) - 21 = 9a^2 - 9a - 21$.

(g) Todos en la parte (f) son polinomios cuadráticos.

(h) $f(t)g(t) = (t^2 - 3t - 21)(3t^2 - 2)$

$= 3t^4 - 9t^3 - 65t^2 + 6t + 42$

Obsérvese que como en el caso (e), el producto de las dos funciones está definido para $-3 < t < 3$.

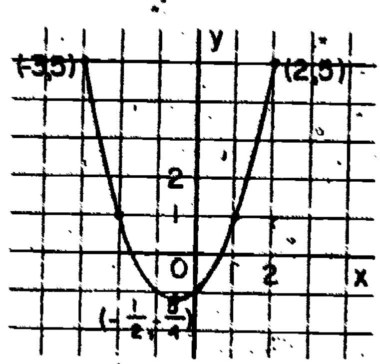
(i) El resultado en (e) es un polinomio cuadrático, y en (h) el polinomio no es cuadrático.

2. (a) $A = \frac{1}{2}b\ (b + 10)$ es un polinomio cuadrático; dominio (de definición): todo número real positivo.

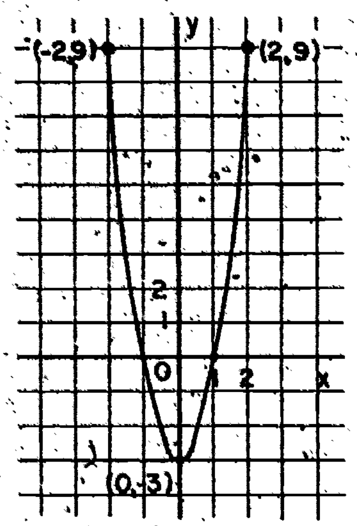
(b) Si el número más pequeño se denota por s, entonces el número mayor es $120-2s$, y el producto $P = s(120 - 2s)$ es un polinomio cuadrático en s. Puesto que ambos números son positivos, el dominio es el conjunto de los números reales s tales que $0 < s < 40$. Obsérvese que esta restricción del dominio es necesaria, debido a la condición de que s es el menor de los dos números.

(c) Si L es la longitud del lado paralelo a la pared, entonces la longitud del lado perpendicular a la pared es $\frac{1}{2}(120 - L)$, y el área A del corral rectangular es: $A = \frac{1}{2}L(120 - L)$. El área es un polinomio cuadrático en L; el dominio (de definición) es el conjunto de los números reales L tales que $0 < L < 120$.

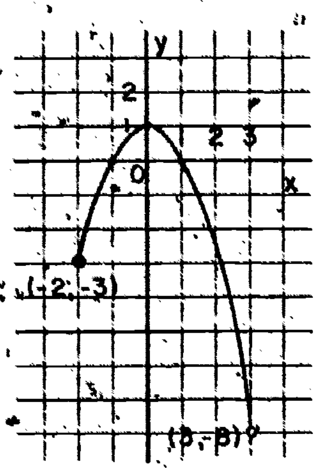
3. (a)



(b)



(c)



4. Sabemos que el producto de dos números reales positivos o dos negativos es positivo. Como $x^2 = x \cdot x$, se desprende que x^2 es el producto de dos números positivos, si $x > 0$, o el producto de dos números negativos, si $x < 0$; esto es, $x^2 > 0$ para cualquier número real $x \neq 0$. Sabemos, además, que si $ab = 0$, donde a y b son números reales, entonces por lo menos uno de ellos es cero. Puesto que $x^2 = x \cdot x = 0$,

se deduce que $x = 0$. Inversamente, si $x = 0$, entonces $x^2 = x \cdot x = 0 \cdot 0 = 0$. Como los puntos con ordenadas positivas están por encima del eje x, se deduce que la gráfica de $y = x^2$ tiene una ordenada positiva para todo $x \neq 0$, y un punto único $(0,0)$, correspondiente al valor $x = 0$, está en el eje x.

5. Obsérvese que por la gráfica de la función $y = x^2$, entendemos la gráfica del enunciado abierto $y = x^2$. Si (a,b) es un punto de la gráfica, entonces $b = a^2$ es un enunciado cierto. Puesto que $b = (-a)^2 = a^2$, se deduce que el enunciado abierto es también cierto para el par ordenado $(-a,b)$; con otras palabras, $(-a,b)$ está también en la gráfica.

6. Si x es positivo, la multiplicación de los miembros de "$x < 1$" por x da $x^2 < x$. Si, para el mismo valor de x, la ordenada de $y = x^2$ se denota por y_1 y la ordenada de $y = x$ por y_2, entonces para $0 < x < 1$, tenemos $y_1 < y_2$. Con otras palabras, la gráfica de $y = x^2$ está por debajo de la gráfica de $y = x$.

7. Aquí, como en el problema 6, obtenemos $x < x^2$ y $y_2 < y_1$. Por lo tanto, para $x > 1$, la gráfica de $y = x^2$ está por encima de la recta $y = x$.

8. La multiplicación de los miembros de "$a < b$" por a y b da $a^2 < ab$ y $ab < b^2$, respectivamente. En consecuencia, por la propiedad transitiva de la ordenación, obtenemos $a^2 < b^2$. Si tomamos $y_a = a^2$ e $y_b = b^2$,

entonces por la propiedad anterior para $b > a$, obtenemos $y_b > y_a$ para todo $b > a > 0$. Por lo tanto, se deduce que la gráfica de $y = x^2$ asciende constantemente a medida que nos movemos desde 0 hacia la derecha.

9. La recta horizontal $y = a$, donde $a \geq 0$ (como la gráfica de $y = x^2$ está por encima del eje x, a no puede ser negativo), y la gráfica de $y = x^2$ tienen ordenadas iguales en los puntos de intersección. Por lo tanto, $x^2 = a$.
Puesto que $x^2 - a = (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a})$, $x^2 - a = 0$ tiene el conjunto de validez $\{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}$ para $a \neq 0$, y el conjunto de validez $\{0\}$ para $a = 0$. De ahí se deduce que puede haber a lo más dos puntos de intersección.

10. Puesto que la pendiente de una recta que contiene los puntos (a,b) y (c,d) es $\frac{d - b}{c - a}$, $(c \neq a)$, obtenemos fácilmente para los puntos $(0,0)$ y (a,a^2), la pendiente $\frac{a^2 - 0}{a - 0} = a$. Por consiguiente, concluimos que la pendiente de la recta que contiene los puntos $(0,0)$ y (a,a^2) se aproxima a 0 según a se aproxima a 0.
Pero una recta que pasa por $(0,0)$ con una pendiente que se aproxima a cero, aparentemente se acerca al eje x, que toca la parábola en $(0,0)$. Si notamos que el segmento de la recta entre $(0,0)$ y (a, a^2), para a cerca de 0, casi coincide con el arco de la parábola, es plausible que la gráfica sea aplanada cerca del origen.

Respuestas al Conjunto de problemas 17-5b; páginas 551-553:

1. (a) Mientras más pequeño sea el valor de a, más aplanada será la gráfica de $y = ax^2$, y para $a = 0$, degenera en el eje x. Todas las parábolas para $0 < a < 1$ están entre el eje x y la parábola $y = x^2$.
   (b) Para $a > 1$, las parábolas $y = ax^2$ están en el interior de la parábola $y = x^2$.
   (c) La gráfica de $y = ax^2$ está entre el eje x y la parábola $y = -x^2$, si $-1 < a < 0$.
   (d) La gráfica de $y = ax^2$ está en el interior de la parábola $y = -x^2$, si $a < -1$.
   (e) La gráfica de $y = ax^2$ está muy cerca del eje y para valores muy grandes de $|a|$.
2. Las gráficas de $y = x^2 + k$ e $y = x^2$ difieren en su posición solamente. En relación con la gráfica de $y = x^2$, la de $y = x^2 + k$ está $|k|$ unidades hacia arriba, si $k > 0$, y $|k|$ unidades hacia abajo, si $k < 0$.
3. $y = (x - h)^2$ e $y = x^2$ difieren solamente en su posición; a saber, $y = (x - h)^2$ está $|h|$ unidades a la derecha de $y = x^2$, si $h > 0$, y $|h|$ unidades a la izquierda, si $h < 0$.
4. (a) $y = (x + 1)^2$ tiene exactamente la forma de $y = x^2$, y está situada una unidad a la izquierda de la misma.
   (b) $y = -3x^2$ está en el interior de la parábola $y = -x^2$, más cerca del eje y.
   (c) $y = x^2 - 3$ tiene exactamente la forma de la parábola $y = x^2$, y está situada 3 unidades por debajo de la misma.
   (d) $y = -(x - 1)^2$ tiene exactamente la forma de la parábola $y = -x^2$, y está situada una unidad a la derecha de la misma.

(e) $y = 2(x - 2)^2$ tiene exactamente la forma de la parábola $y = 2x^2$, que está en el interior de la parábola $y = x^2$, y dos unidades a la derecha de $y = 2x^2$.

(f) $y = (x + 1)^2 + 1$ tiene exactamente la forma de la parábola $y = x^2$, y está situada una unidad a la izquierda y una unidad hacia arriba de $y = x^2$.

(g) $y = 2(x - 1)^2 - 1$ tiene exactamente la forma de la parábola $y = 2x^2$, y está situada una unidad a la derecha y una unidad por debajo de $y = 2x^2$.

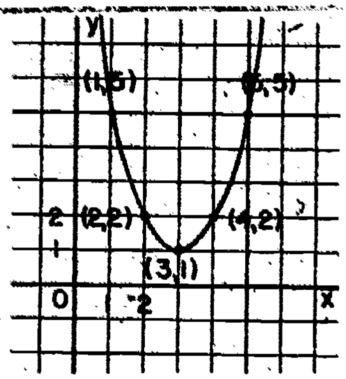
(h) $y = -2(x + 1)^2 - 1$ tiene exactamente la forma de la parábola $y = -2x^2$, que está en el interior de $y = -x^2$, y situada una unidad a la izquierda y una unidad por debajo de la parábola $y = -2x^2$.

5. La gráfica de $y = a(x - h)^2 + k$ puede obtenerse trasladando la gráfica de $y = ax^2$, $|h|$ unidades en la dirección positiva del eje x, si $h > 0$, y $|h|$ unidades en la dirección negativa del eje x, si $h < 0$, y además $|k|$ unidades hacia arriba, si $k > 0$, y $|k|$ unidades hacia abajo, si $k < 0$. El vértice y la ecuación del eje de la parábola son (h,k) y $x = h$, respectivamente.

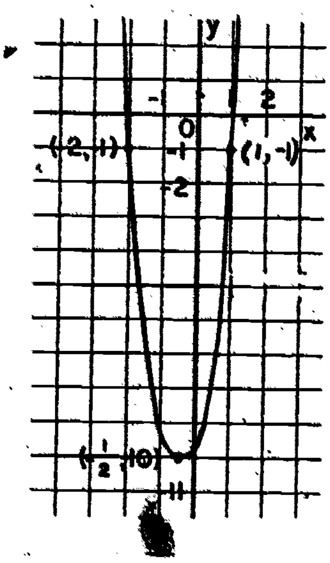
6. $x = a(y - 1)^2 - 1$. Puesto que a es arbitrario, hay una infinidad de tales parábolas.

Respuestas al Conjunto de problemas 17-6; páginas 555-556:

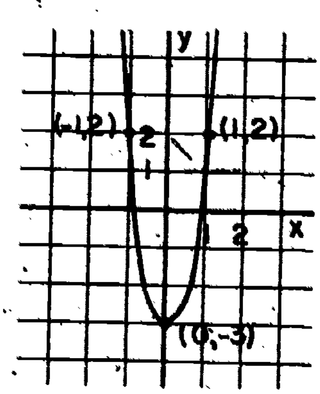
1. (a) $y = x^2 - 6x + 10 = (x - 3)^2 + 1$



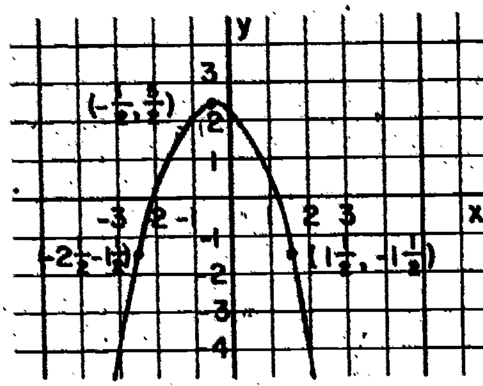
(b) $y = 4x^2 + 4x - 9 = 4(x + \frac{1}{2})^2 - 10$



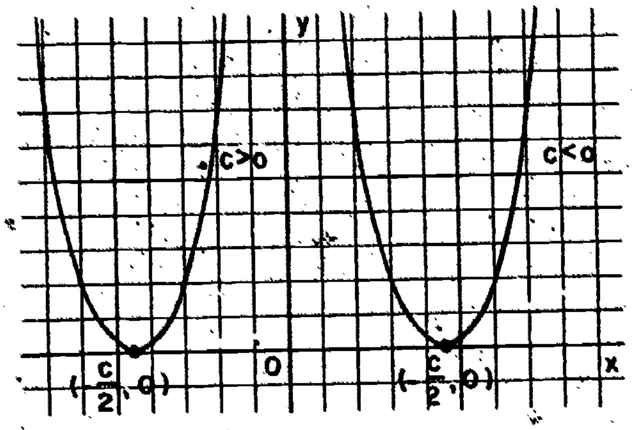
(c) $y = 5x^2 - 3$



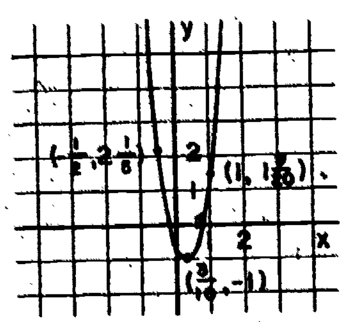
(d) $y = -x^2 - x + \frac{9}{4} = -(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{2}$



(e) $y = 4x^2 + 4cx + c^2 = (2x + c)^2 = 4(x + \frac{c}{2})^2$



(f) $y = 5x^2 - 3x - \frac{11}{20} = 5(x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{9}{100}) - \frac{11}{20} - \frac{9}{20}$
$= 5(x - \frac{3}{10})^2 - 1$



2. (a) No hay punto alguno.

(b) $(\frac{-1 + \sqrt{10}}{2}, 0)$ y $(\frac{-1 - \sqrt{10}}{2}, 0)$

2. (c) $(\sqrt{\frac{3}{5}},0)$ y $(-\sqrt{\frac{3}{5}},0)$

(d) $(\frac{-1 + \sqrt{10}}{2},0)$ y $(\frac{-1 - \sqrt{10}}{2},0)$

(e) $(-\frac{c}{2},0)$

(f) $(\frac{3 + 2\sqrt{5}}{10},0)$ y $(\frac{3 - 2\sqrt{5}}{10},0)$

3. $$Ax^2 + Bx + C = A(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{B^2}{4A^2}) + C - \frac{B^2}{4A}, \quad A \neq 0$$

$$= A(x + \frac{B}{2A})^2 + \frac{4AC - B^2}{4A}$$

$$= a(x - h)^2 + k,$$

donde $a = A$, $h = -\frac{B}{2A}$, $k = \frac{4AC - B^2}{4A}$.

*4. (a) $a(x - h)^2 + k = ax^2 - 2ahx + (ah^2 + k) = 3x^2 - 7x + 5$

Si $a = 3$, $-2ah = -7$, $ah^2 + k = 5$, entonces

$a = 3$ implica que $-2(3)h = -7$; es decir que, $h = \frac{7}{6}$;

$a = 3$ y $h = \frac{7}{6}$ implican que $(3)(\frac{7}{6})^2 + k = 5$, o sea, que

$k = \frac{11}{12}$.

Por lo tanto, $3x^2 - 7x + 5 = 3(x - \frac{7}{6})^2 + \frac{11}{12}$.

(b) $ax^2 - 2ahx + (ah^2 + k) = 5x^2 - 3x + \frac{13}{20}$

Si $a = 5$, $-2ah = -3$, $ah^2 + k = \frac{13}{20}$, entonces

$a = 5$, $h = \frac{3}{10}$, $k = \frac{1}{5}$.

Por lo tanto, $5x^2 - 3x + \frac{13}{20} = 5(x - \frac{3}{10})^2 + \frac{1}{5}$.

(c) $ax^2 - 2ahx + (ah^2 + k) = Ax^2 + Bx + C$, para todo número real x. Esto es posible si
$a = A$, $-2ah = B$, y $ah^2 + k = C$.
Si $a = A$, entonces el enunciado "$-2ah = B$" es equivalente a "$-2Ah = B$", esto es, a $h = -\frac{B}{2A}$.
Además, si $a = A$ y $h = -\frac{B}{2A}$, entonces "$ah^2 + k = C$" es equivalente a "$A\frac{B^2}{4A^2} + k = C$", esto es, a $k = C - \frac{B^2}{4A} = \frac{4AC - B^2}{4A}$.

Respuestas al Conjunto de problemas 17-7; páginas 560-561:

1\. (a) No es factorizable.

(b) $6x^2 - x - 12 = (3x + 4)(2x - 3)$

En este caso, la compleción del cuadrado daría los mismos factores, pero deberíamos primero tratar de hallar factores sobre los enteros por los métodos del Capítulo 12.

(c) $\frac{1}{2}x^2 + 4x + 6 = \frac{1}{2}(x^2 + 8x + 12)$
$= \frac{1}{2}(x + 6)(x + 2)$

(d) $4y^2 + 2y + \frac{1}{4} = (2y + \frac{1}{2})^2$

(e) No es factorable.

(f) $2 - 2z - z^2 = 3 - (z + 1)^2 = (\sqrt{3} + z + 1)(\sqrt{3} - z - 1)$.

(g) $1 - 5x^2 = (1 - \sqrt{5}x)(1 + \sqrt{5}x)$.

(h) No es factorable.

(i) $5v^2 - 5v - \frac{11}{4} = 5(v - \frac{1}{2})^2 - 4$
$= (\sqrt{5}(v - \frac{1}{2}) + 2)(\sqrt{5}(v - \frac{1}{2}) - 2)$.

(j) $x^2 + (a + b)x + ab = (x + \frac{a+b}{2})^2 - (\frac{a-b}{2})^2 = (x + a)(x + b)$.

2. (a) $\left\{\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{\sqrt{3}}\right\}$

(b) $4 - x - 3x^2 = (4 + 3x)(1 - x) = 0.$ $\{-\frac{4}{3}, 1\}.$

(c) $\emptyset.$

(d) $s^2 - s - \frac{1}{2} = (s - \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{4} = (s - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2})(s - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}) = 0.$

$\{\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\}$

(e) $\frac{4}{5}t^2 + \frac{4}{5}t + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}(4t^2 + 4t + 1) = \frac{1}{5}(2t + 1)^2 = 0.$ $\{-\frac{1}{2}\}$

(f) $\frac{1}{3}y^2 + 2y - 3 = \frac{1}{3}(y + 3)^2 - 6 = \frac{1}{3}\left((y + 3)^2 - 18\right)$

$= \frac{1}{3}(y + 3 + \sqrt{18})(y + 3 - \sqrt{18}) = 0.$

$\{-3 - 3\sqrt{2}, -3 + 3\sqrt{2}\}.$

(g) $\emptyset.$

(h) $3n^2 - 7n = n(3n - 7) = 0.$ $\{0, \frac{7}{3}\}.$

3. (a) Puesto que

$a(x - h)^2 + k = a\left((x - h)^2 + \frac{k}{a}\right), a \neq 0$

se deduce que es factorizable si $\frac{k}{a} \leq 0.$

(b) Si $\frac{k}{a} = -p^2$, donde $p = \frac{m}{n}$, siendo m y n enteros,

entonces $a(x - h)^2 + k = a\left((x - h)^2 - p^2\right) =$

$a(x - h - p)(x - h + p) = \frac{a}{n^2}\left(n(x - h) - m\right)\left(n(x - h) + m\right)$

donde m, n, h son enteros, con la posible excepción del factor constante $\frac{a}{n^2}$. Si $n = 1$, es decir, p es un entero, entonces $\frac{a}{n^2}$ es también un entero.

Por lo tanto, si $-\frac{k}{a}$ es un cuadrado perfecto de un entero, el polinomio anterior es perfectamente factorizable sobre los enteros.

(c) Si $\frac{k}{a} > 0$, $\frac{k}{a} = 0$, o $\frac{k}{a} < 0$, el conjunto de validez de $a(x - h)^2 + k = 0$ contiene ninguno, uno o dos números reales, respectivamente.

4. (a) Si la longitud de su lado mayor es x pulgadas, entonces la longitud del lado menor es $(6 - x)$ pulgadas. Así,

$$x(6 - x) = 7 \quad ó \quad x^2 - 6x + 7 = 0$$

$$x^2 - 6x + 7 = (x-3)^2 - 2 = (x - 3 - \sqrt{2})(x - 3 + \sqrt{2}) = 0.$$

Por consiguiente, $x = 3 \pm \sqrt{2}$. La longitud del lado mayor es $(3 + \sqrt{2})$ pulgadas.

(b) Si un lado mide x pulgadas, entonces el segundo lado mide $(x - 1)$ pulgadas, y la hipotenusa mide $(x + 2)$ pulgadas. Por el teorema de Pitágoras, tenemos

$$x^2 + (x - 1)^2 = (x + 2)^2 \quad ó \quad x^2 - 6x - 3 = 0$$

$$x^2 - 6x - 3 = (x - 3)^2 - 12$$

$$= (x - 3 - \sqrt{12})(x - 3 + \sqrt{12}) = 0.$$

Por lo tanto, $x = 3 \pm \sqrt{12}$. El lado requerido mide $3+2\sqrt{3}$ pulgadas.

(c) Si un número es x, entonces el segundo es $5 - x$, y el producto es $x(5 - x) = 9$. Así, $x^2 - 5x + 9 = 0$. Puesto que el conjunto de validez de

$$x^2 - 5x + 9 = (x - \frac{5}{2})^2 + \frac{11}{4} = 0$$ no contiene ningún número real, el problema no tiene solución.

5. En el problema 3 del Conjunto de problemas 17-6, obtuvimos la relación

(a) $$Ax^2 + Bx + C = A(x + \frac{B}{2A})^2 - \frac{B^2-4AC}{4A}$$

$$= A\left((x + \frac{B}{2A})^2 - \frac{B^2 - 4AC}{4A^2}\right)$$

(b) Si $B^2 - 4AC < 0$, entonces $(x + \frac{B}{2A})^2 - \frac{B^2 - 4AC}{4A^2} > 0$.

La parábola $y = Ax^2 + Bx + C$ está por encima o por debajo del eje x (por encima para $A > 0$, y por debajo para $A < 0$); esto es, $Ax^2 + Bx + C = 0$ no tiene solución.

(c) Si $B^2 - 4AC = 0$, entonces $y = Ax^2 + Bx + C = A(x + \frac{B}{2A})^2$, y la parábola está por encima o por debajo del eje x, y toca el eje x en $(- \frac{B}{2A}, 0)$; esto es, $Ax^2 + Bx + C = 0$ tiene una solución $x = \frac{-B}{2A}$.

(d) Si $B^2 - 4AC > 0$, entonces $A\left((x + \frac{B}{2A})^2 - \frac{B^2 - 4AC}{4A^2}\right) =$

$$A(x + \frac{B}{2A} + \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A})(x + \frac{B}{2A} - \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}) = 0$$

tiene el conjunto solución

$$\left\{\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}\right\}.$$

Esta es la fórmula cuadrática familiar que se enuncia a menudo sin demostración. Se presenta aquí solamente como una generalización de la técnica de factorizar un polinomio cuadrático mediante el método de compleción del cuadrado. No se debe pedir a los estudiantes que se aprendan de memoria esta fórmula. Lo importante es que todo polinomio cuadrático con $B^2 - 4AC \geq 0$ puede ser factorizado sobre los números reales, y, por lo tanto, toda ecuación cuadrática con $B^2 - 4AC \geq 0$ tiene soluciones reales.

Capítulo 17

Sugerencias para exámenes

1. En cada uno de los siguientes, describe, si es posible, la función (i) mediante una tabla, (ii) mediante una expresión en x. En cada caso, indica el dominio de definición y el campo de valores.
   (a) A cada número real positivo, asigna la suma de 2 y el duplo del número.
   (b) Asocia con cada entero el recíproco del mismo.
   (c) A cada número real, asigna la ordenada del punto de la recta con pendiente 2 y ordenada en el origen -2, cuya abscisa es el número.
2. ¿Cuál es el dominio de la función definida por la expresión $\sqrt{2x - 4}$? ¿Cuál es el campo de valores de esta función?
3. Dada la función g definida como sigue:

   $g(x) = x - \frac{1}{x}$, para cada número real x, distinto de cero.

   ¿Qué números reales están representados por los siguientes?

(a) $g(-2)$	(e) $\lvert g(-\frac{1}{2}) \rvert$
(b) $g(-\frac{1}{2})$	(f) $\frac{1}{2}\, g(-1)$
(c) $-g(\frac{1}{2})$	(g) $g(\frac{a}{2})$, $a > 0$
(d) $g(\lvert -\frac{1}{2} \rvert)$	(h) $-g\,(-a)$, $a > 0$

4. Considera la función F definida por:

$$F(x) = \begin{cases} 2, & -2 \leq x < 0 \\ x+2, & 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

(a) ¿Cuál es el dominio de definición de F?

(b) ¿Qué números están representados por $F(-\frac{3}{2})$, $F(\frac{1}{2})$, $F(0)$, $F(-\frac{2}{3})$, $F(\frac{5}{2})$?

(c) Dibuja la gráfica de F.

(d) ¿Cuál es el conjunto de validez del enunciado $F(x) = 3$?

5. Da una regla para definir la función cuya gráfica es el segmento de recta que se extiende desde (-1,2) hasta (4,1), incluyendo los extremos.

6. ¿Es toda recta la gráfica de una función? Si no lo es, da algunas excepciones.

7. Si f es la función lineal definida por $f(x) = mx + b$, para todos los números reales x,

(a) describe la gráfica de f, si $b = 0$ y $m > 0$,

(b) describe la gráfica de f, si $m = 0$ y $b > 0$,

(c) determina m y b, si la gráfica de f contiene los puntos $(-2,3)$ y $(3,-2)$.

8. Sean F y G las funciones definidas por:

$F(x) = 3x^2 + 2x - 4, \quad -2 < x < 2,$

$G(x) = -x^2 + 2 \quad , \quad -1 < x < 3.$

(a) Determina $F(2) - G(1)$; $F(-4) + G(-4)$.

(b) Determina $F(x) + G(x)$, $-1 < x < 2$.

(c) Determina $F(x)\ G(x)$, $-1 < x < 2$.

(d) Con respecto al mismo sistema de ejes, dibuja las gráficas de F y G.

(e) ¿Cuál es el conjunto de validez del enunciado "$F(x) = G(x)$, $-1 < x < 2$"?

(f) Escribe $F(x)$ en la forma canónica, y halla el vértice y el eje de la gráfica de F.

(g) Resuelve la ecuación cuadrática $F(x) = 0$, $-2 < x < 2$.

9. Si una ecuación cuadrática se escribe en la forma

$$a(x - h)^2 + k = 0,$$

determina los valores de h y k para los cuales la ecuación tiene

(a) dos soluciones reales,

(b) una solución real,

(c) ninguna solución real.

10. El primer lado de un rectángulo tiene x pulgadas de longitud; otro lado es 2 pulgadas más corto, y la diagonal es 3 pulgadas más larga que el primer lado. ¿Cuál es el valor de x?
