DOCUMENT RESUME

ED 186 221 SE 030 433

AUTHOR	Allen, Frank B.; And Others
TITLE	Matematica Para La Escuela Secundaria, Primer Curso de Algebra (Parte 2): Traduccion Preliminar de la Edicion Inglesa Revisada. (Mathematics for High School, First Course in Algebra, Part 2. Preliminary Translation of the Revised English Edition).
INSTITUTION	Stanford Univ., Calif. School Mathematics Study Group.
SPONS AGENCY	National Science Foundation, Washington, D.C.
PUB DATE	62
NOTE	327p.; For related documents in Spanish, see SE 030 431-434; and in English ED 173 100.
LANGUAGE	Spanish
EDRS PRICE	MF01/PC14 Plus Postage.
DESCRIPTORS	*Algebra; *Bilingual Education; Instructional Materials; *Mathematics Curriculum; *Mathematics Instruction; Number Concepts; *Secondary Education; *Secondary School Mathematics; Textbooks
IDENTIFIERS	Polynomials; *School Mathematics Study Group

ABSTRACT

This is part two of a three-part SMSG algebra text for high school students. The principal objective of the text is to help the student develop an understanding and appreciation of some of the algebraic structure as a basis for the techniques of algebra. Chapter topics include addition and multiplication of real numbers, subtraction and division of real numbers, factors, exponents, radicals, and polynomials and rational expressions. (RH)

GROUPO DE ESTUDIO DE LA MATEMATICA ESCOLAR

MATEMATICA PARA LA ESCUELA SECUNDARIA

PRIMER CURSO DE ALGEBRA (Parte 2)

(Traducción preliminar de la edición inglesa revisada)

SMSG

MATEMATICA PARA LA ESCUELA SECUNDARIA

PRIMER CURSO DE ALGEBRA (Parte 2)

(Traducción preliminar de la edición inglesa revisada)

Texto preparado bajo la supervisión del Personal de las Muestras de Libros de Texto, del Grupo de Estudio de la Matemática Escolar:

Frank B. Allen, Escuela Secundaria del Pueblo de Lyons

Edwin C. Douglas, Escuela Taft

Donald E. Richmond, Colegio Williams

Charles E. Rickart, Universidad de Yale

Henry Swain, Escuela Secundaria del Pueblo de New Trier

Robert J. Walker, Universidad de Cornell

El apoyo financiero para el Grupo de Estudio de la Matemática Escolar provino de la Fundación Nacional de Ciencias.

Proyecto de Traducción al Español

Comisión Consultiva

Edward G. Begle, Universidad de Stanford

Howard F. Fehr, Universidad de Columbia

Mariano García, Universidad de Puerto Rico

Max Kramer, San Jose State College

TABLA DE MATERIAS

Capítulo

10. FACTORES Y EXPONENTES 245
10- 1. Factores y divisibilidad 245
10- 2. Números primos 250
10- 3. Descomposición en factores primos 253
10- 4. Suma y resta de fracciones 256
10- 5. Algunas propiedades de los factores 260
10- 6. Introducción de los exponentes 265
10- 7. Otras propiedades de los exponentes 268

11. RADICALES 283
11- 1. Raíces 283
11- 2. Radicales 286
11- 3. Simplificación de radicales 290
11- 4. Simplificación de fracciones con radicales 294
11- 5. Raíces cuadradas 299

12. POLINOMIOS Y EXPRESIONES RACIONALES 313
12- 1. Polinomios y factorización 313
12- 2. Factorización mediante la propiedad distributiva 320
12- 3. Diferencia de cuadrados 326
12- 4. Cuadrados perfectos 331
12- 5. Polinomios cuadráticos 336
12- 6. Polinomios sobre los números racionales o sobre los números reales 350
12- 7. El álgebra de las expresiones racionales . 355
12- 8. Simplificación de sumas de expresiones racionales 359
12- 9. División de polinomios 363
12-10. Resumen 372

13. CONJUNTO DE VALIDEZ DE ENUNCIADOS ABIERTOS 383
13- 1. Enunciados abiertos equivalentes 383
13- 2. Desigualdades equivalentes 392
13- 3. Ecuaciones que contienen expresiones factorizadas 395
13- 4. Ecuaciones fraccionarias 399
13- 5. Elevación al cuadrado 402
13- 6. *Inecuaciones polinómicas 406

14. GRAFICAS DE ENUNCIADOS ABIERTOS CON DOS VARIABLES . . 415
14- 1. El plano numérico real 415
14- 2. Gráficas de enunciados abiertos con dos variables 421
14- 3. Pendientes e intersecciones con los ejes coordenados 435
14- 4. *Gráficas de enunciados abiertos que contienen solamente enteros 452
14- 5. Gráficas de enunciados abiertos que contienen el valor absoluto 461

5

Capítulo

15. SISTEMAS DE ECUACIONES Y DE INECUACIONES 479
- 15- 1. Sistemas de ecuaciones 479
- 15- 2. Sistemas de inecuaciones 500

16. POLINOMIOS CUADRATICOS 509
- 16- 1. Gráficas de polinomios cuadráticos 509
- 16- 2. Forma canónica 518
- 16- 3. Ecuaciones cuadráticas 521

17. FUNCIONES 527
- 17- 1. El concepto de función 527
- 17- 2. La notación funcional 536
- 17- 3. Gráficas de funciones 540
- 17- 4. Funciones lineales 546
- 17- 5. Funciones cuadráticas 547
- 17- 6. La gráfica de $y = Ax^2 + Bx + C$ 553
- 17- 7. Soluciones de ecuaciones cuadráticas . . . 556

INDICE ALFABETICO . . . . páginas siguientes a la N° 561

NOTA: Algunos ejercicios han sido marcados con un asterisco (*) para orientar al maestro en la selección de los mismos.

Capítulo 10

FACTORES Y EXPONENTES

10-1. Factores y divisibilidad

Había una vez un agricultor que por toda riqueza poseía 11 vacas. Este agricultor tenía 3 hijos y al morir dejó un testamento estipulando que la mitad de sus vacas debería ser para Carlos, una cuarta parte para Ricardo y una sexta parte para Oscar. Esto inquietó mucho a los hijos, pues ninguno quería aceptar pedazos de una vaca, como al parecer estipulaba el testamento. Mientras discutían, pasó por el camino un extraño que llevaba una vaca al mercado. Los tres muchachos le confiaron el problema y el extraño les dijo: "Eso es sencillo. Les prestaré mi vaca y traten entonces de hacer la repartición". Los muchachos estaban muy contentos porque ahora tenían 12 vacas en vez de 11. Carlos tomó la mitad de ellas, 6; Ricardo su cuarta parte, o sea, 3; y Óscar su sexta parte, a saber, 2 vacas. Las 11 vacas que el padre había dejado estaban ahora bien repartidas y el extraño cogió su vaca y siguió su camino.

A fin de que no pongas la objeción de que los muchachos no recibieron exactamente lo estipulado en el testamento, observa que de hecho cada uno recibió demás, porque $6 > \frac{11}{2}$, $3 > \frac{11}{4}$, y $2 > \frac{11}{6}$ (¿podrías demostrar estas desigualdades?) Sin embargo, hay algo sospechoso acerca del problema y tiene que ver con lo estipulado en el testamento. ¿Qué es lo que hace posible una solución tan poco usual?

Esta anécdota tiene una conclusión matemática que deseamos considerar ahora. Por alguna razón, era mucho más fácil resolver el problema a base de 12 vacas que a base de 11. ¿Y cuál era esta razón? Pues que 6, 4 y 2 todos dividen exactamente a 12, mientras que ninguno parece dividir exactamente a 11. Y ésta es una diferencia notable entre 12 y 11: hay muchos números que dividen exactamente a 12, pero muy pocos que dividen a 11.

Es un poco molesto escribir siempre "divide exactamente a" y por eso utilizaremos un término matemático más corto en vez de esa frase. Diremos que 6 es un "factor" de 12 porque $6 \times 2 = 12$; análogamente, 4 es un factor de 12 (porque $4 \times 3 = 12$), y así sucesivamente. ¿Es también 3 un factor de 12? ¿Es 2 un factor de 12?

El número 5, sin embargo, no es un factor de 12, porque no podemos hallar otro entero tal que multiplicado por 5 dé 12. Desde luego, 1 y 12 son también factores de 12. Dado cualquier entero positivo, éste tendrá como factores a sí mismo y a 1; debido a que tales factores aparecen siempre, no tienen gran interés. De modo que llamaremos a 2, 3, 4 y 6 <u>factores propios</u> de 12; éstos junto con 1 y 12 son todos <u>factores</u>. Sin embargo, el número 11 no tiene factores propios porque no hay ningún número positivo, excluyendo a 1 y a 11, que sea un factor de 11. Estamos ahora listos para dar una definición más precisa de factor teniendo en cuenta que un factor de n es uno de dos enteros cuyo producto es n.

> El entero m es un <u>factor</u> del entero n si $mq = n$, donde q es un entero. Si el entero q no es 1 ó n, decimos que m es un <u>factor propio</u> de n.

¿Se desprende de esta definición que si m es un factor propio de n, entonces m no podrá ser también 1 ó n?

Toda vez que 3 es un factor de 18, ¿es entonces $\frac{18}{3}$ un factor de 18? ¿Será cierto que si m es un factor de n, entonces $\frac{n}{m}$ es un factor de n? ¿Será esto también cierto para factores propios? ¿Cómo puedes decidirlo?

Como 5 es un factor de 15, decimos que 5 divide a 15. En general, si m <u>y</u> n son enteros <u>positivos</u> y si m es un factor de n, decimos que m <u>divide a</u> n, o que n es <u>divisible</u> por m. Diremos que 0 es divisible por cualquier entero distinto de cero; 0 <u>no</u> divide a ningún número.

Conjunto de problemas 10-1a

En cada una de las siguientes preguntas, si la contestación es "Sí", escribe el número en forma factorial como en la definición. Si la contestación es "No", justifícala de manera análoga.

Ejemplo. ¿Es 5 un factor de 45? Sí, porque $5 \times 9 = 45$.
¿Es 5 un factor de 46? No, porque no hay ningún entero q tal que $5q = 46$.

1. ¿Es 2 un factor de 24?
2. ¿Es 3 un factor de 24?
3. ¿Es 5 un factor de 24?
4. ¿Es 6 un factor de 24?
5. ¿Es 9 un factor de 24?
6. ¿Es 13 un factor de 24?
7. ¿Es 12 un factor de 24?
8. ¿Es 24 un factor de 24?
9. ¿Es 13 un factor de 91?
10. ¿Es 30 un factor de 510?
11. ¿Es 12 un factor de 204?
12. ¿Es 10 un factor de 100,000?
13. ¿Es 3 un factor de 10,101?
14. ¿Es 6 un factor de 20,202?
15. ¿Es 12 un factor de 40,404?

Si alguno de los siguientes números se puede descomponer en factores (es decir, si tiene factores propios), halla uno de estos factores y luego escribe el número como producto de ése y otro factor.

Ejemplo. $69 = 3 \times 23$
67 no puede descomponerse en factores.

16. 85
17. 51
18. 52
19. 29
20. 93
21. 92
22. 37
23. 94
24. 55
25. 61
26. 23
27. 123
28. 57
29. 65
30. 122
31. 68
32. 95
33. 129
34. 141
35. 101

Consideremos ahora la cuestión de cómo saber si 2 es factor de un número dado. ¿Cuáles de los números en los ejercicios anteriores tenían a 2 como factor? ¿Hay alguna manera sencilla de saber si 2 es factor de un número?

Veamos ahora los números 5 y 10. ¿Cuándo es 5 factor de un entero? Probablemente desde hace algún tiempo, sabías que la representación decimal para todo múltiplo de 5 termina o bien en 5 ó en 0, y que todo entero cuya representación decimal termine en 5 ó en 0 es un múltiplo de 5. También, la representación decimal de todo múltiplo de 10 termina en 0, y todo numeral decimal que termina en 0 es un múltiplo de 10. Esto lo podemos considerar ahora de una manera un poco diferente: un número tiene a 10 como factor si y solamente si tiene a ambos 2 y 5 como factores. Las representaciones decimales de los números que tienen a 5 como factor deberán terminar en 5 ó en 0, y los números que tienen a 2 como factor tienen que ser pares; por tanto, para que un número tenga a <u>ambos</u> 2 y 5 como factores su representación decimal deberá terminar en 0. ¿Podrías formular lo que acabamos de decir en términos de dos conjuntos y de los miembros comunes a ambos?

<u>Conjunto de problemas 10-1b</u>

Piensa en una regla para comprobar si un número es divisible por 4, también en otra para la divisibilidad por 3. Los siguientes ejemplos deberían darte algunas sugerencias referentes a estas reglas; pero no te desanimes si no encuentras de momento una regla sencilla para la divisibilidad por 3, pues no es muy fácil descubrirla.

1. Divisibilidad por 4: ¿Cuáles de los siguientes números tienen a 4 como factor? 28, 128, 228, 528, 3028; 6; 106, 306, 806, 2006; 18, 118, 5618; 72, 572. ¿Te das cuenta de la regla? ¿Cuántos dígitos del número tienes que considerar?

2. Divisibilidad por 3: ¿Cuáles de los siguientes números tienen a 3 como factor? 27, 207, 2007, 72, 702, 270; 16, 106, 601, 61, 1006. ¿Qué puedes decir acerca de 36 (observa que $3 + 6 = 9$), de 306, 351, 315, 513, 5129 (observa que $5 + 1 + 2 + 9 = 17$); y de 32122? Escribimos

$$\begin{aligned} 2358 &= 2(1000) + 3(100) + 5(10) + 8(1) \\ &= 2(999 + 1) + 3(99 + 1) + 5(9 + 1) + 8(1) \\ &= 2(999) + 3(99) + 5(9) + 2(1) + 3(1) + 5(1) + 8(1) \\ &= (2(111) + 3(11) + 5(1))9 + (2 + 3 + 5 + 8) \\ &= (222 + 33 + 5)9 + (2 + 3 + 5 + 8). \end{aligned}$$

La expresión $(222 + 33 + 5)9$ es divisible por 3. (¿Por qué?) ¿Es $2 + 3 + 5 + 8$ divisible por 3? Observa que la suma de los dígitos es la clave para la divisibilidad por 3. Trata de formular esto como una regla.

3. Si un número es divisible por 9, ¿será también divisible por 3? Si un número es divisible por 3, ¿será también divisible por 9?

4. ¿Cuál sería una regla para la divisibilidad por 6, si conoces reglas para la divisibilidad por 2 y por 3?

5. En cada uno de los siguientes ejercicios, contesta la pregunta e indica qué reglas de divisibilidad facilitaron tu trabajo:
   (a) ¿Es 3 un factor de 101,001?
   (b) ¿Es 3 un factor de 37,199?
   (c) ¿Es 6 un factor de 151,821?
   (d) ¿Es 15 un factor de 91,215?
   (e) ¿Es 12 un factor de 187,326,648?

10-2. Números primos

Hemos estado hablando acerca de factores de enteros positivos sobre los enteros positivos, en el sentido de que cuando escribimos

$$mq = n$$

sólo admitimos enteros positivos como valores de m, n y q. Desde luego, podríamos admitir enteros negativos, números racionales cualesquiera, o aún números reales cualesquiera como factores. Pero, si por un momento consideras estas posibilidades, verás que nada añaden a nuestros conocimientos. Si, por ejemplo, admitieras enteros negativos como factores, ¿encontrarías en efecto algo nuevo? Por ejemplo, -2, 2, -3, 3 son factores de 6. ¿Qué relación hay entre los factores que comprenden enteros negativos y los que comprenden solamente enteros positivos?

La situación es muy diferente si admites como posibles factores de enteros positivos todos los números racionales. En este sentido amplio el número racional $\frac{2}{7}$, por ejemplo, sería un factor de 13, ~~porque~~ $(\frac{2}{7})(\frac{91}{2}) = 13$. Efectivamente, ¿podrías pensar en algún número racional distinto de cero que no fuera, en este sentido, un factor de 13? Trata con $-\frac{17}{3}$, por ejemplo. Como $(-\frac{17}{3})(-\frac{39}{17}) = 13$, encontramos que $-\frac{17}{3}$ es también un factor racional de 13. ¿Sería diferente la situación si admites la descomposición en factores sobre los números reales?

Verás que si tratas de descomponer en factores los enteros positivos sobre los números racionales o sobre los números reales, entonces cada número distinto de cero resulta ser un factor de todo número. Por lo tanto, este tipo de descomposición en factores nada añadiría a nuestro entendimiento de la estructura del sistema de números reales, y por ello no la consideraremos más. Generalmente, la descomposición en factores sobre los enteros positivos nos da los resultados más interesantes, y por consiguiente cuando hablamos de la "descomposición en factores" de un entero positivo, siempre entenderemos que es sobre los enteros positivos.

Conjunto de problemas 10-2a

1. A continuación aparece un conjunto de los enteros positivos menores que o iguales a 100. Tacha los números que tengan a 2 como factor propio y escribe un 2 abajo y a la derecha de cada uno de estos números. (Por ejemplo, ..., $\cancel{8}_2$, 9, $\cancel{10}_2$, ...)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

¿Cuál es el primer número después del 2 que no ha sido tachado? Tiene que ser el 3. Tacha ahora todos los números que tengan a 3 como factor propio y escribe un 3 abajo y a la derecha de cada uno de ellos. Si alguno de estos números ya había sido tachado por tener 2 como factor, no vuelvas a tacharlo y sigue adelante. ¿Cuál es ahora el primer número después del 3 que no ha sido tachado? Tiene que ser el 5. Tacha los números que tienen a 5 como factor propio. Continúa el procedimiento. Después de la quinta etapa tu trabajo debe aparecer así:

1	2	3	$\cancel{4}_2$	5	$\cancel{6}_2$	7	$\cancel{8}_2$	$\cancel{9}_3$	$\cancel{10}_2$
11	$\cancel{12}_2$	13	$\cancel{14}_2$	$\cancel{15}_3$	$\cancel{16}_2$	17	$\cancel{18}_2$	19	$\cancel{20}_2$
$\cancel{21}_3$	$\cancel{22}_2$	23	$\cancel{24}_2$	$\cancel{25}_5$	$\cancel{26}_2$	$\cancel{27}_3$	$\cancel{28}_2$	29	$\cancel{30}_2$
31	$\cancel{32}_2$	$\cancel{33}_3$	$\cancel{34}_2$	$\cancel{35}_5$	$\cancel{36}_2$	37	$\cancel{38}_2$	$\cancel{39}_3$	$\cancel{40}_2$
41	$\cancel{42}_2$	43	$\cancel{44}_2$	$\cancel{45}_3$	$\cancel{46}_2$	47	$\cancel{48}_2$	$\cancel{49}_7$	$\cancel{50}_2$
$\cancel{51}_3$	$\cancel{52}_2$	53	$\cancel{54}_2$	$\cancel{55}_5$	$\cancel{56}_2$	$\cancel{57}_3$	$\cancel{58}_2$	59	$\cancel{60}_2$
61	$\cancel{62}_2$	$\cancel{63}_3$	$\cancel{64}_2$	$\cancel{65}_5$	$\cancel{66}_2$	67	$\cancel{68}_2$	$\cancel{69}_3$	$\cancel{70}_2$
71	$\cancel{72}_2$	73	$\cancel{74}_2$	$\cancel{75}_3$	$\cancel{76}_2$	$\cancel{77}_7$	$\cancel{78}_2$	79	$\cancel{80}_2$
$\cancel{81}_3$	$\cancel{82}_2$	83	$\cancel{84}_2$	85_5	$\cancel{86}_2$	$\cancel{87}_3$	$\cancel{88}_2$	89	$\cancel{90}_2$
$\cancel{91}_7$	$\cancel{92}_2$	$\cancel{93}_3$	$\cancel{94}_2$	$\cancel{95}_5$	$\cancel{96}_2$	97	$\cancel{98}_2$	$\cancel{99}_3$	$\cancel{100}_2$

¿Hubo algún cambio de la cuarta a la quinta etapa? ¿Por qué sí o por qué no? Si encuentras alguna dificultad en esta pregunta tal vez te ayudaría considerar el primer número tachado en cada etapa. ¿Hasta qué número debería extenderse la lista para que el resultado después de la quinta etapa fuera distinto al resultado después de la cuarta?

En el conjunto de los primeros 100 enteros positivos has tachado todos los números que tienen factores propios. De manera que los números restantes no tienen factores propios. Cada uno de estos números, excepto el 1, se llama un número <u>primo</u>.

> Un número primo es un entero positivo mayor que 1 que no tiene factores propios.

¿Será posible hallar <u>todos</u> los números primos en el conjunto de los enteros positivos mediante el método que acabamos de emplear (llamado la <u>Criba de Eratóstenes</u>)? ¿Será posible hallar, usando este método, todos los números primos menores que un entero positivo dado? ¿Cuál es el próximo número primo después de 97?

<u>Conjunto de problemas 10-2b</u>

1. ¿Cuál es el mayor de los números primos menores que 100?, ¿menores que 200?, ¿menores que 300?
2. ¿Cuál es el mayor de los factores propios primos de números menores que 100?, ¿menores que 200?, ¿menores que 300?
3. Observa que en la Criba de Eratóstenes no hubo necesidad de utilizar un número primo mayor que 7 para tachar los números no primos menores que 100. ¿Cuál será el número primo mayor necesario para tachar todos los números no primos menores que 200?, ¿menores que 300?

10-3. Descomposición en factores primos

Volvamos ahora a la Criba de Eratóstenes y veamos qué más podemos aprender de ella. Por ejemplo, considera el número 63; está tachado y por lo tanto no es primo. ¿Cuándo tachamos el 63? En el diagrama vemos que se tachó el 63 cuando trabajábamos con el 3. Esto significa, si te detienes a pensar en ello, que 3 es el menor de los factores primos de 63. (En efecto, de lo que acabamos de decir se desprende que 3 es el menor de los factores propios de 63, incluyendo los factores propios primos y los no primos. ¿Ves por qué?)

Ya que 3 es el menor de los factores primos de 63, dividamos por él. El resultado es 21, y una vez más podemos examinar nuestra lista de números para averiguar si 21 es primo. Encontramos que no lo es y que en efecto 3 es un factor de 21. Divide 21 por 3 y obtienes 7; si buscas el 7 en la lista encontrarás que no está tachado, por lo tanto, 7 es primo y no admite más descomposición en factores. ¿Qué hemos aprendido de todo esto? Hemos expresado 63 como el producto 3 por 3 por 7; y la significación de esto es que estos factores de 63 son todos primos. En otras palabras, logramos escribir 63 como un producto de factores primos: $63 = 3 \times 3 \times 7$.

Apliquemos el mismo procedimiento al 60. ¿Qué número primo considerabas cuando tachaste el 60? ¿Qué resultado obtienes al dividir 60 por este número? Continúa el procedimiento. ¿Qué representación obtienes de 60 como producto de números primos?

Conjunto de problemas 10-3a

1. Utilizando la Criba de Eratóstenes, escribe cada uno de los siguientes números como un producto de factores primos:

   84, 16, 37, 48, 50, 18, 96, 99, 78, 47, 12.

2. En cada uno de los siguientes ejercicios, halla el entero positivo que tenga la descomposición en factores primos dada:

   (a) $2 \times 2 \times 7$ (c) 7×11 (e) 7×7

   (b) $2 \times 3 \times 5$ (d) $2 \times 3 \times 3 \times 3$ (f) $2 \times 2 \times 3 \times 3$

Como podrás ver, un entero positivo puede considerarse como "compuesto" de un cierto número de factores primos. Así, 63 está compuesto de dos 3 y un 7; 60 está compuesto de dos 2, un 3 y un 5. Tendremos muchas ocasiones de utilizar esta clase de descomposición en factores de un entero positivo, que llamaremos "descomposición en factores primos". Pero ahora surge un problema: ¿Cómo haríamos esto mismo con un número que no aparezca en nuestra lista anterior? Si te piden la descomposición en factores primos de 144, tal vez se te ocurra extender la lista desde 100 hasta 144. Pero, ¿y si el número en cuestión fuera 1764?

Tal vez puedas idear una manera de hacer lo mismo sin la ayuda de la criba. Después de todo, ¿qué fue lo que tuviste en cuenta al construirla? Primero marcaste con un "2" todos los números que eran múltiplos propios de 2; el primer número no marcado era el 3, y procediste a marcar todos los números que eran múltiplos propios del 3, y así sucesivamente. Luego consideraste el 5 y luego el 7. ¿Qué clase de números eran éstos: 2, 3, 5, 7, etc.? Eran sencillamente los números primos. Así, si 2 era un factor propio de un número dado, se tachaba el número cuando estábamos trabajando con los múltiplos de 2; si 2 no era un factor propio pero sí lo era 3, entonces se tachaba el número cuando estábamos trabajando con los múltiplos de 3, y así sucesivamente. Si el número no tenía factores propios; es decir, si era primo, no se tachaba.

Tratemos ahora de obtener, sin la ayuda de la criba, la descomposición en factores primos de, digamos 1764. Primero ensayamos con 2. (Conviene empezar con el factor primo más pequeño.) ¿Es 2 un factor de 1764? Por las reglas que aprendimos sabemos que la contestación es, "Sí"; $1764 = 2 \times 882$. Trabajemos ahora con 882, como si estuviéramos utilizando la criba. ¿Es 2 un factor de 882? Sí, lo es; y $882 = 2 \times 441$. Trabajemos ahora con 441. ¿Es 2 un factor de 441? No, no lo es; de modo que si nuestra criba hubiera incluido el 441, no lo habríamos tachado al considerar los múltiplos de 2. El próximo número primo después del 2 es el 3, y, por lo tanto, tenemos que comprobar ahora si 441 es o no un múltiplo de 3. Si aplicas la regla de divisibilidad por 3 al 441, encontrarás que 3 divide a (4 + 4 + 1), y, por lo tanto, 3 <u>es</u> un factor de 441, de modo que lo hubiéramos tachado en la criba al considerar los múltiplos de 3. Expresamos ahora 441 como 3 × 147. No tiene sentido investigar si 2 es un factor de 147, puesto que si lo fuera, lo sería también de 441 (¿por qué?). Pero 3 divide a 147, y obtenemos 147 = 3 × 49. El número 49, a su vez, es 7 × 7, y 7 es un número primo, de modo que hemos terminado. Resumiendo: Hemos encontrado que 1764 = 2 × 2 × 3 × 3 × 7 × 7, y ésta es la descomposición en factores primos que buscábamos.

Es un tanto inconveniente escribir todo lo anterior; una manera más concisa de escribirlo es la siguiente:

1764	2
882	2
441	3
147	3
49	7
7	7
1	

Aquí el factor primo más pequeño en cualquier etapa está a la derecha de la raya, y el cociente del dividendo por el factor primo más pequeño está debajo del dividendo. La descomposición en factores primos puede obtenerse leyendo los factores a la derecha de la raya.

<u>Conjunto de problemas 10-3b</u>

1. ¿Cuál es el menor de los factores primos de 115, de 135, de 321, de 484, de 539, de 143?
2. Halla la descomposición en factores primos de los siguientes números: 98, 432, 258, 625, 180, 1024, 378, 729, 825, 576, 1098, 486, 3375, 3740, 1311, 5922, 1008, 5005, 444, 5159, 1455, 2324.

Quizás hayas observado que hemos estado hablando de "la" descomposición en factores primos de un entero positivo, como si estuviéramos seguros de que sólo hay una tal descomposición en factores. ¿Crees que esto es realmente cierto? ¿Podrías dar una razón convincente para ello? La afirmación de que todo entero positivo tiene exactamente una descomposición en factores primos se llama frecuentemente el Teorema Fundamental de la Aritmética.

10-4. Suma y resta de fracciones

Una de las muchas aplicaciones de la descomposición en factores primos de los enteros es en la suma y la resta de fracciones. Es fácil sumar o restar dos fracciones si sus denominadores son iguales. Anteriormente encontramos que es posible emplear la propiedad del 1 para cambiar una fracción a otra igual, pero con denominador diferente. De este modo transformamos fracciones que se han de sumar o restar, en fracciones con el mismo denominador.

Para facilitar la suma de fracciones todo lo posible, es deseable que este denominador común sea el mínimo común múltiplo de los denominadores. Definimos el mínimo común múltiplo de dos o más enteros dados como el entero menor que es divisible por todos los enteros dados.

Considera el problema de simplificar esta expresión:

$$\frac{1}{4} - \frac{3}{10} - \frac{4}{45} + \frac{1}{6}$$

Podemos reconocer inmediatamente que un múltiplo común de los denominadores es su producto: $4 \times 10 \times 45 \times 6$, o sea 10,800. Este número parece muy grande. Tal vez lo que hemos aprendido acerca de la descomposición en factores primos nos ayude a encontrar el entero más pequeño que tenga a 4, a 10, a 45 y a 6 como factores.

Considera los factores primos de cada denominador:

$$4 = 2 \times 2,$$
$$10 = 2 \times 5,$$
$$45 = 3 \times 3 \times 5,$$
$$6 = 2 \times 3.$$

Como 4 tiene que ser un factor del denominador común, la descomposición en factores primos de este denominador debe contener al menos dos 2. Para que 10 sea un factor del denominador, esa descomposición debe contener un 2 y un 5; ya tenemos un 2, por el requisito anterior de que 4 sea un factor, pero debemos ahora incluir también un 5. Resumiendo lo que tenemos hasta ahora: a fin de que 4 y 10 sean ambos factores del denominador común, la descomposición en factores primos de éste debe contener al menos dos 2 y un 5.

Además, debemos tener a 45 como factor. Esto significa que hay que incluir dos 3 además de los dos 2 y el 5 que ya tenemos; no hay necesidad de incluir otro 5 porque ya hay uno. Finalmente, como 6 debe ser un factor del denominador, necesitaríamos un 2 y un 3 en la descomposición en factores, pero ya tenemos esos dos números.

Conclusión: La descomposición en factores primos del mínimo común denominador será $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$. Necesitamos cada uno de estos factores y estaría demás añadir otros. ¿Qué factores innecesarios contenía el denominador 10,800?

Ahora que hemos encontrado el mínimo común denominador, podemos cambiar cada una de las fracciones de nuestro problema de modo que tenga este denominador. ¿Cómo escribiríamos $\frac{1}{4}$? Una manera sencilla de hacerlo es utilizando la descomposición en factores del mínimo común denominador y la del 4. El 4 contiene dos 2 y nada más, mientras que el denominador común contiene dos 2, dos 3 y un 5. Así, para cambiar 4 en el denominador deseado tenemos que multiplicar por dos 3, y por un 5 para añadir los factores que faltan.

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{2 \times 2} \times \frac{3 \times 3 \times 5}{3 \times 3 \times 5} = \frac{45}{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5}.$$

Análogamente,

$$\frac{3}{10} = \frac{3}{2 \times 5} = \frac{3}{2 \times 5} \times \frac{2 \times 3 \times 3}{2 \times 3 \times 3} = \frac{54}{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5}.$$

¿Puedes ahora hacer lo mismo con $\frac{4}{45}$ y con $\frac{1}{6}$? Si has hecho los cálculos aritméticos correctamente, obtendrás lo siguiente:

$$\frac{1}{4} - \frac{3}{10} - \frac{4}{45} + \frac{1}{6} = \frac{45 - 54 - 16 + 30}{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5}$$

$$= \frac{5}{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5} = \frac{1}{2 \times 2 \times 3 \times 3} = \frac{1}{36}.$$

¿Qué ventajas tiene esta manera de hacer el problema? Una es que se evitan números grandes; el denominador puede dejarse expresado en términos de sus factores hasta casi terminado el problema y observa de paso que nunca tuvimos que trabajar con números mayores que 54. Otra ventaja de tener el denominador expresado en términos de sus factores es que para reducir el resultado a su "mínima expresión" sólo tenemos que investigar el numerador resultante con respecto a divisibilidad por los factores del denominador.

Conjunto de problemas 10-4

1. Efectúa las siguientes sumas:

(a) $\frac{2}{9} + \frac{1}{15}$

(b) $\frac{3}{14} - \frac{4}{35}$

(c) $-\frac{1}{12} + \frac{4}{26}$

(d) $-\frac{5}{12} - \frac{7}{18}$

(e) $\frac{1}{85} + \frac{3}{51}$

(f) $-\frac{20}{57} - \frac{7}{95}$

(g) $\frac{5}{21} - \frac{3}{91}$

(h) $\frac{3x}{8} + \frac{5x}{36}$

(i) $\frac{1}{6} + \frac{3}{20} - \frac{2}{45}$

(j) $\frac{3k}{10} + \frac{2k}{28} - \frac{k}{56}$

(k) $\frac{3a}{5} + \frac{7a}{75} - \frac{5a}{63}$

(l) $\frac{x}{3} + \frac{5x}{8} - \frac{11}{70} + \frac{3}{20}$

2. Determina si son ciertos los siguientes enunciados:

(a) $\frac{8}{15} < \frac{13}{24}$

(b) $\frac{3}{16} < \frac{11}{64}$

(c) $\frac{14}{63} < \frac{6}{27}$

3. En cada uno de los siguientes pares de números, determina qué número es el mayor:

(a) $\frac{1}{7}$ ó $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

(b) $\frac{4}{15}$ ó $\frac{7}{27}$

(c) $\frac{5}{12}$ ó $\frac{5}{13}$

4. En el capítulo 5 aprendiste que para cualquier par de números a, b, solamente una de las siguientes posibilidades es cierta: $a > b$, $a = b$, ó $a < b$. En cada uno de los siguientes ejercicios, determina qué símbolo indica la relación correcta entre los dos números:

(a) $\frac{6}{27}, \frac{5}{28}$

(b) $\frac{2}{3}, \frac{5}{7}$

(c) $\frac{6}{16}, \frac{9}{24}$

(d) $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}), (\frac{11}{12} - \frac{1}{13})$

5. Juan y su hermano Roberto recibían cada uno una asignación de \$1.00 por semana. Una semana su padre dijo: "Les pagaré, como de costumbre, \$1.00 a cada uno, ó les pagaré en centavos cualquier número menor que 100 aumentado en el mayor de sus factores propios primos. Si no son muy perezosos, tendrán mucho que ganar". ¿Qué número deberán escoger?

6. Supongamos que el padre de Juan y Roberto se olvidó decir <u>propio</u>. ¿Cuánto ganarían los muchachos debido al descuido de su padre?

*7. Se emplea un hombre para vender trajes en la Tienda de Ropa AB. Se le dio a escoger el pagarle: \$200 más $\frac{1}{12}$ de sus ventas o sencillamente $\frac{1}{3}$ es sus ventas. ¿Cuál sería la mejor elección si cree que puede vender mensualmente mercancías por valor de \$600? Supongamos que pudiera vender \$700 en mercancías, ¿cuál sería entónces la mejor elección? ¿Y si pudiera vender \$1000? ¿Cuánto debería vender para que las ofertas resultaran iguales?

10-5. Algunas propiedades de los factores

Suponte que estuvieras buscando dos enteros tales que su suma sea 22 y su producto 72. Una manera de hallarlos sería ensayar todas las posibles maneras de descomponer 72 en factores hasta hallar un par de números que satisfaga la condición. Sin embargo, veremos ahora que los factores de los números tienen propiedades que nos permiten descartar muchas posibilidades sin tener que ensayarlas. La descomposición de 72 en factores primos es $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$. Los dos factores de 72 que interesamos deben contener los tres 2 y los dos 3 que hay en la descomposición en factores primos de 72. Supongamos que los tres 2 estuvieran todos en un solo factor y no hubiera ningún 2 en el otro; es decir, tendríamos $(2 \times 2 \times 2)(3 \times 3)$ ó $(2 \times 2 \times 2 \times 3)(3)$ ó $(2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3)(1)$. Entonces, uno de los factores sería par, mientras que el otro sería impar debido a que no contiene un 2. Pero la suma de un número par y uno impar es siempre impar, y 22 no es impar; esto es,

$$(2 \times 2 \times 2) + (3 \times 3) = 17 \quad ó$$
$$(2 \times 2 \times 2 \times 3) + 3 = 27 \quad ó$$
$$(2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3) + 1 = 73.$$

De modo que esta manera de descomponer 72 en factores no es apropiada; deberemos repartir los tres 2 entre los dos factores, y así poner dos 2 en un factor y un 2 en el otro.

Consideremos ahora los factores 3. ¿Repartiremos los dos 3 ó pondremos ambos en uno de los dos factores? Sabemos que 22 no tiene a 3 como factor, pero si repartiéramos los dos 3 entre los dos factores de 72, entonces cada uno de ellos tendría a 3 como factor y la suma también tendría a 3 como factor. Ciertamente la suma no podría ser 22.

Así, hemos averiguado que los dos factores de 72 tienen que "disponerse" como sigue: un factor contiene dos 2 mientras que el otro contiene un 2; un factor contiene los dos 3 mientras que el otro no contiene ningún 3. Por lo tanto, hay solamente dos posibilidades: o los dos 3 van junto a un 2 ó con los dos 2; es decir, las disposiciones posibles serán $(2 \times 2 \times 3 \times 3)(2)$ y $(2 \times 3 \times 3)(2 \times 2)$. Pero el producto de dos 2 y dos 3 es 36, que es obviamente demasiado grande, de modo que los dos 3 van con el 2 (lo que da 18) y los otros dos 2 forman el otro factor, que es 4. Como $(2 \times 3 \times 3) + (2 \times 2) = 22$ y $(2 \times 3 \times 3)(2 \times 2) = 72$, hemos encontrado nuestra contestación.

El razonamiento expuesto depende de dos ideas; a saber, si 2 es un factor de uno de dos números, y es también factor de la suma de éstos, entonces 2 será factor del otro número; y si 3 es un factor de uno de dos números, pero no es un factor de la suma de éstos, entonces 3 no es un factor del otro número.

Demostremos ahora un teorema semejante:

> Teorema 10-5a. Para dos enteros positivos b y c, si 2 es un factor de ambos b y c, entonces 2 es un factor de $(b + c)$.

Demostración. $2q = b$, donde q es un entero, porque 2 es un factor de b; $2p = c$, donde p es un entero, porque 2 es un factor de c.

Por lo tanto,

$2q + 2p = b + c$, (¿Por qué?)

$2(q + p) = b + c$, por la propiedad distributiva

Como $q + p$ es un entero,

2 es un factor de $(b + c)$.

Por ejemplo, el teorema 10-5a asegura que como 2 es un factor de ambos 6 y 16, sabemos que 2 es un factor de $(6 + 16)$. Toda vez que 7 es un factor de ambos 21 y 35, ¿crees que, como consecuencia 7 es un factor de $(21 + 35)$? Si en el teorema 10-5a, sustituimos 2 por cualquier entero positivo a, podemos demostrar el resultado general:

> Teorema 10-5b. Para tres enteros positivos a, b, c, si a es un factor de ambos b y c, entonces a es un factor de $(b + c)$.

La demostración de este teorema será un ejercicio del próximo conjunto de problemas.

Otro teorema útil es

> Teorema 10-5c. Para tres enteros positivos a, b, c, si a es un factor de b, y a no es un factor de $(b + c)$, entonces a no es un factor de c.

Demostración. Suponte que a es un factor de c; entonces a es un factor de ambos b y c, y por consiguiente, es un factor de $(b + c)$. (¿Por qué?) Pero esto contradice la hipótesis de que a no es un factor de $(b + c)$. Por lo tanto, a no es un factor de c.

Como 3 es un factor de 15, y 3 no es un factor de $(15 + 8)$, estamos seguros de que 3 no es un factor de 8.

Un tercer teorema que es útil cuando trabajamos con factores es el siguiente:

> Teorema 10-5d. Para tres enteros positivos a, b, c, si a es un factor de b, y a es un factor de $(b + c)$, entonces a es un factor de c.

Dejamos la demostración de este teorema para que la hagas como un ejercicio.

Conjunto de problemas 10-5

1. La descomposición en factores primos de 12 es $2 \times 2 \times 3$. ¿Qué dos números cuyo producto es 12, tienen suma par? ¿Y suma impar? ¿Podrás encontrar otra suma impar? (Recuerda que 1 es un factor de todo entero positivo.) ¿Podrá ser 3 un factor de alguna suma posible?
2. La descomposición en factores primos de 36 es $2 \times 2 \times 3 \times 3$. Halla dos números cuyo producto es 36 y (a) cuya suma sea divisible por 3 pero no por 2; (b) cuya suma sea divisible por 2 pero no por 3; (c) cuya suma no sea divisible ni por 2 ni por 3.

3. La descomposición en factores primos de 150 es $2 \times 3 \times 5 \times 5$. Halla dos números cuyo producto es 150 y (a) cuya suma sea par; (b) cuya suma sea divisible por 5; (c) cuya suma no sea divisible por 5.

4. Escribe la descomposición en factores primos de 18. Halla dos números cuyo producto sea 18 y cuya suma sea (a) 9; (b) 11.

5. En cada uno de los siguientes ejercicios, escribe la descomposición en factores primos del primer número y utilízala para buscar los dos números que tienen el producto y la suma indicados:

   (a) Producto es 288 y suma es 34
   (b) " " 972 " " " 247
   (c) " " 216 " " " 217
   (d) " " 330 " " " 37
   (e) " " 500 " " " 62
   (f) " " 270 " " " 39

6. El perímetro de un terreno rectangular es de 68 pies y el área es de 225 pies cuadrados. Determina el ancho y el largo, si éstos son enteros.

7. Demuestra el teorema 10-5b.

8. Demuestra el teorema 10-5d.

9. Muestra que si y es un entero positivo, entonces y es un factor de $(3y + y^2)$. (Sugerencia: Utiliza el teorema 10-5b.)

10. ¿Para qué entero positivo x es 3 un factor de $6 + 4x$? (Sugerencia: Aplica el teorema 10-5d. ¿Cuántos valores de x puedes hallar?)

11. Tres jóvenes limpian de nieve las aceras y cobran 50¢ cuando se trata de una tienda y \$1.50 cuando se trata de una casa. ¿De cuántas aceras de tiendas y cuántas de casas tendrán que quitar la nieve para poder repartir el dinero en partes iguales? *¿Qué sucedería si fueran 4 jóvenes?

12. (a) 3 es un factor de 39 y 39 es un factor de 195. ¿Podemos deducir que 3 es un factor de 195?

    (b) 3 es un factor de 39 y 5 es un factor de 20. ¿Podemos deducir que 3 + 5 es un factor de 39 + 20?

(c) 3 es un factor de 39 y 5 es un factor de 20. ¿Podemos deducir que $3 \cdot 5$ es un factor de $39 \cdot 20$?

(d) 3 es un factor de 39 y 3 es un factor de 27. ¿Podemos deducir que 3^2 es un factor de $39 \cdot 27$?

(e) 3 es un factor de 39 y 3 es un factor de 27. ¿Podemos deducir que 3 es un factor de $39 + 27$?

(f) 3 es un factor de 39. ¿Podemos deducir que 3^2 es un factor de 39^2?

(g) 3^2 es un factor de 15^2. ¿Podemos deducir que 3 es un factor de 15?

(h) 3 es un factor de 39 y 5 es un factor de 135. ¿Podemos deducir que 3 es un factor de 135?

13. Demuestra los siguientes teoremas:

(a) Para tres enteros positivos a, b, c, si a es un factor de b, y b es un factor de c, entonces a es un factor de c.

(b) Para cuatro enteros positivos a, b, c, d, si a es un factor de b, y c es un factor de d, entonces ac es un factor de bd.

(c) Para tres enteros positivos a, b, c, si a es un factor de b, y a es un factor de c, entonces a^2 es un factor de bc.

(d) Para dos enteros positivos a y b, si a es un factor de b, entonces a^2 es un factor de b^2.

14. Determina qué teorema del problema 13 justifica cada uno de los siguientes:

(a) 25 es un factor de (35)(15).

(b) 6 es un factor de (30)(7).

(c) $(13)^2$ es un factor de (39)(26).

(d) 49 es un factor de (14)(35).

(e) c^2 es un factor de (5c)(9c) si c es un entero positivo.

(f) 20ab es un factor de (15)(24)ab si ab es un entero positivo.

10-6. Introducción de los exponentes

Hemos visto que podemos escribir un entero positivo en términos de sus factores primos; así, por ejemplo,

$$288 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3.$$

Esta notación no es muy conveniente porque es muy larga; no sería necesario escribir "2" cinco veces si hubiera otra manera más concisa que $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ de escribir "2 tomado cinco veces como factor".

Como primer paso hacia este objetivo, ya sabes que 3×3 se puede escribir como 3^2. Esto se lee "3 al cuadrado". El "3" indica que vamos a multiplicar un cierto número de 3, y el "2" indica que ese número de 3 es dos. En forma semejante, ¿cómo escribiríamos $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$? El número 288 se podrá escribir, pues, en términos de sus factores en una forma más concisa, como $2^5 \times 3^2$.

En una expresión de la forma a^n, necesitamos alguna manera de designar los números incluidos en tal expresión. La "a", que indica qué número se ha de tomar como factor varias veces, se llama la base; la "n" que indica las veces que "a" se toma como factor se llama el exponente. Así, a^n significa un número que consiste en el factor a tomado n veces; a^n se llama una potencia, o más precisamente, la enésima potencia de a. Podemos escribir

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ factores}}.$$

a^2 se lee "a cuadrado" o "a al cuadrado".

a^3 se lee "a cubo" o "a al cubo"

a^n se lee "a elevado a la enésima potencia", o simplemente "a a la ene".

Conjunto de problemas 10-6a

1. ¿Podrías decir cuál es el origen de los términos "cuadrado" y "cubo"? Si la longitud de un lado de un cuadrado es 5 pulgadas, ¿cuál es el área en pulgadas cuadradas?
2. Utilizando exponentes cuando sea conveniente, halla la descomposición en factores primos de los siguientes números: 64, 60, 80, 48, 128, 81, 49, 41, 32, 15, 27, 29, 56, 96, 243, 432, 512, 576, 625, 768, 686.
3. En la expresión a^n, ¿qué clase de número deberá ser n? ¿Y a?

*4. Podemos considerar que la expresión a^b define una operación binaria que, al efectuarse con los enteros positivos a y b, da el número a^b. ¿Qué significa el preguntar si esta operación es conmutativa? ¿Es conmutativa? ¿Qué significaría el preguntar si esta operación es o no asociativa?

Ampliemos nuestras nociones acerca de los exponentes. Como ya sabemos que el conjunto de los números reales es cerrado respecto de la multiplicación, debe ser cierto que $a^3 \cdot a^2$ es el nombre de un número real. ¿Habrá un nombre más sencillo? Como a^3 significa que hay que tomar la a tres veces como factor, y a^2 que hay que tomarla dos veces como factor, podemos deducir que $a^3 \cdot a^2$ contiene la a cinco veces como factor. Es decir,

$$a^3 \cdot a^2 = \overbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot a}_{3 \text{ factores}} \cdot \underbrace{a \cdot a}_{2 \text{ factores}}}^{5 \text{ factores}} = a^5$$

Escribe un nombre más sencillo para cada uno de los siguientes: $a^2 \cdot a^3$; $b^3 \cdot b^3$; $3^3 \cdot 3^4$; $(x^2)(x^5)$; $a^4 \cdot a^3 \cdot a^2$; $c^5 \cdot c^8$; $a^2 \cdot b^3$; $2^2 \cdot 3^3$. Consideremos el número $a^m \cdot a^n$, donde m y n son enteros positivos.

$$a^m a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{m \text{ factores}} \times \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ factores}} = a^{m+n}$$

(con $m + n$ factores en total)

¿Parecería, por tanto, razonable decir que $a^m a^n$ y a^{m+n} son nombres del mismo número?

¿Te has dado cuenta de que hemos estado considerando a^2, a^3, a^5, a^7, etc., es decir, expresiones del tipo a^n, donde n es un entero positivo, pero que no hemos mencionado a^1? En efecto 1 es un entero positivo y definimos $a^1 = a$.

Conjunto de problemas 10-6b

1. Escribe nombres más sencillos para los siguientes:

<u>Ejemplo.</u> $(9x^2)(3x^4) = (3^2x^2)(3x^4)$

$= 3^3x^6$.

(a) $m^3 m^{11}$

(b) $(x^3)(x^9)$

(c) $(2x^2)(x)$

(d) $(2x)(2x^3)$

(e) $(2x)(2^3x^3)$

(f) $(27a)(3^4a^3)$

(Sugerencia: escribe 27 en términos de sus factores primos.)

(g) $(16a^2)(32a^8)$

(h) $(x^{2a})(x^a)$

(i) $3^4 \cdot 3^2$

(j) $3^4 \cdot 2^3$

(k) $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$

(l) $2^a \cdot 2^{4a}$

(m) $(3a^2b^3)(3^2ab^2)$

(n) $(3k^2t)(3m^2t)$

En los problemas 2 - 12, determina qué enunciados son ciertos y cuáles falsos y justifica tu contestación en cada caso.

2. $2^3 + 3^3 = 5^3$
3. $2^3 \cdot 3^3 = 6^3$
4. $2^3 + 3^3 = 6^3$
5. $2^3 \cdot 3^3 = 6^6$
6. $2^3 \cdot 3^3 = 6^9$
7. $2^3 + 2^3 = 2^6$
8. $2^3 + 2^3 = 2^4$
9. $3^3 + 3^3 = 3^4$

10. $3^3 + 3^3 + 3^3 = 3^4$

11. $4^3 + 4^3 + 4^3 = 4^4$

12. $4^3 + 4^3 + 4^3 + 4^3 = 4^4$

13. Escribe otros nombres para los siguientes:

(a) $2^3(2^2 + 2)$

(b) $x^2(2x^3 + x^2)$

(c) $2x^3(2x^2 - 4x^3)$

(d) $-3a^4(3^2a^3 - 3^3a^2)$

(e) $(a^2 + 2a^3)(a - a^2)$

10-7. Otras propiedades de los exponentes

Examinemos ahora, la fracción $\frac{a^5}{a^3}$, $a \neq 0$. ¿Habrá un nombre más sencillo para esta fracción? Del significado de a^5 y a^3, es evidente que

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{a \times a \times a \times a \times a}{a \times a \times a}$$

$$= a \times a \times \frac{a \times a \times a}{a \times a \times a}$$

$$= a^2.$$

Escribe nombres más sencillos para: $\frac{x^5}{x^2}$; $\frac{b^2}{b^3}$; $\frac{c^6}{c}$; $\frac{3^7}{3^2}$; $\frac{a^2}{a^2}$; $\frac{m^3}{m^2}$; en los que ninguna de las variables tome el valor 0. ¿Podrás generalizar los resultados? Suponte que consideramos de nuevo a $\frac{a^5}{a^3}$, pero ahora razonamos de esta manera:

$$a^5 = a^3 \cdot a^2, \text{ porque } a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Entonces

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{1}{a^3} \cdot (a^3 \cdot a^2)$$

$$= (\frac{1}{a^3} \cdot a^3)a^2 \qquad \text{(¿Por qué?)}$$

$$= 1 \cdot a^2 \qquad \text{(¿Por qué?)}$$

$$= a^2 \qquad \text{(¿Por qué?)}$$

Es decir, si $m > n$,

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^n}(a^n \cdot a^{m-n})$$

$$= (\frac{1}{a^n} \cdot a^n)a^{m-n}$$

$$= 1 \cdot a^{m-n}$$

$$= a^{m-n}$$

Especificamos que $m > n$ porque deseamos que $m - n$ sea un entero positivo.

Si $m = n$,

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^m}$$

$$= 1$$

Si $m < n$,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m(\frac{1}{a^m \cdot a^{n-m}})$$

$$= a^m(\frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^{n-m}})$$

$$= (a^m \cdot \frac{1}{a^m}) \frac{1}{a^{n-m}}$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{a^{n-m}}$$

$$= \frac{1}{a^{n-m}}$$

Resumiendo: Cuando $a \neq 0$, tenemos que:

Si $m > n$ entonces $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. Por ejemplo, $\frac{6^5}{6^3} = 6^2$.

Si $m = n$ entonces $\frac{a^m}{a^n} = 1$. Por ejemplo, $\frac{6^5}{6^5} = 1$.

Si $m < n$ entonces $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$, Por ejemplo, $\frac{6^5}{6^9} = \frac{1}{6^4}$.

Conjunto de problemas 10-7a

1. Simplifica:

(a) $\frac{2^3}{2^2}$ (c) $\frac{2^3}{2^3}$ (e) $\frac{2^{16}}{2^{12}}$ (g) $\frac{2^2 \cdot 3^4}{2^5 \cdot 3^4}$

(b) $\frac{2^2}{2^3}$ (d) $\frac{2^3}{3^3}$ (f) $\frac{2^{10}}{2^{13}}$ (h) $\frac{2^3 \cdot 3^5}{2^2 \cdot 3^7}$

En los problemas 2 - 7, simplifica cada expresión. (Suponemos que ninguna de las variables toma el valor 0.)

2. (a) $\frac{a^3}{a}$ (b) $\frac{m}{m^4}$ (c) $\frac{z^3}{z^3}$ (d) $\frac{b^3}{b^{11}}$

3. (a) $\frac{2x^6}{2^3x^2}$ (b) $\frac{3^2b^6}{3b^4}$ (c) $\frac{5b^4}{5b^4}$ (d) $\frac{4^2a}{4a^2}$

4. (a) $\frac{a^2b^3c}{a^4b^3c^4}$ (b) $(a^2b^3c)(a^4b^3c^4)$ (c) $a^2b^3c + a^4b^3c^4$

5. (a) $\frac{(5x)(5x)}{5^3x^3}$ (b) $\frac{5x(5+x)}{5^3x^3}$ (c) $\frac{(5x)(5x)}{5x}$

6. (a) $\frac{36a^2b^3}{8a^5b}$ (b) $\frac{36a^2b^3}{6a^2b^2}$ (c) $\frac{36a^2b^3}{7ab^9}$

7. (a) $\frac{288x^2y^3}{48x^6y^6}$ (b) $\frac{54x^2y^3}{153x^6a^6}$ (c) $\frac{63x^2y^3}{28a^6b^6}$

En los problemas 8 - 12, determina qué enunciados son ciertos y cuáles falsos y demuestra por qué.

8. $\frac{3^2}{2^2} = \frac{3}{2}$

9. $\frac{6^3}{3^3} = 2$

10. $\frac{3^4}{2^4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4$

11. $\left(\frac{4^3}{3^3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^3 = 1$

12. $\frac{6^3}{3^3} = 2^3$

13. ¿Por qué debemos tener el cuidado de evitar que las variables en los problemas 2 - 7 tomen el valor 0?

El tener tres propiedades de los exponentes para la división nunca es tan conveniente como tener una sola que haga el mismo trabajo. Si eliminamos la condición $m > n$, es posible reducir las tres propiedades a una sola, a saber:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Trabajemos algunos problemas de dos maneras, primero utilizando cualquiera de las propiedades de la sección anterior que sea apropiada, y segundo utilizando la propiedad,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Conviene tabular los resultados.

Completa la tabla siguiente:

Compara $\frac{a^7}{a^3} = a^{7-3} = a^4$ con $\frac{a^7}{a^3} = a^{7-3} = a^4$

Compara $\frac{a^3}{a^3} = 1$ con $\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^?$

Compara $\frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^{5-3}} = \frac{1}{a^2}$ con $\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^?$

Compara $\frac{a^4}{a^4} = 1$ con $\frac{a^4}{a^4} = a^{4-4} = a^?$

Compara $\frac{a^2}{a^3} = \frac{1}{a}$ con $\frac{a^2}{a^3} = a^{2-3} = a^?$

En varias ocasiones anteriores, hemos ampliado nociones acerca de números. ¿Podrías ahora ampliar tus nociones acerca de los exponentes? Examina cuidadosamente la tabla anterior a fin de contestar las siguientes preguntas:

$$a^0 = ?$$
$$a^{-1} = ?$$
$$a^{-2} = ?$$

¿Tienen los exponentes negativos y cero algún sentido en nuestra definición de $a^n = a \cdot a \cdot a \ldots$ hasta n factores? Desde luego, el pensar en a tomada (-3) veces como factor carece de sentido; pero las consideraciones anteriores sugieren una manera única de escribir la propiedad de los exponentes en la división. Si, para m y n enteros positivos, y $a \neq 0$, definimos

$$a^0 = 1,$$

y

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ a \neq 0,$$

entonces

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n}$$
$$= a^m \cdot a^{-n}$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Ejemplo 1.

$$\frac{7^3}{7^5} = 7^{3-5}$$
$$= 7^{-2}$$
$$= \frac{1}{7^2}$$

¿Es éste el mismo resultado que se obtiene al aplicar la primera definición?

Ahora que tenemos un significado para un exponente negativo y un exponente cero, las propiedades

$$a^m a^n = a^{m+n} \quad y \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

son válidas para enteros cualesquiera m y n, sean éstos positivos, cero o negativos.

Ejemplo 2.

$$\frac{x^{-2}y^{-3}}{x^4\ y^{-2}} = \left(\frac{x^{-2}}{x^4}\right)\left(\frac{y^{-3}}{y^{-2}}\right), \quad x \neq 0,\ y \neq 0,$$
$$= x^{-2-4}\ y^{-3-(-2)}$$
$$= x^{-6} \cdot y^{-1}$$
$$= \frac{1}{x^6} \cdot \frac{1}{y}$$
$$= \frac{1}{x^6 y}$$

Ejemplo 3.

$$\frac{10^3 \times 10^{-4}}{10^{-5}} = \frac{10^{3+(-4)}}{10^{-5}}$$
$$= \frac{10^{-1}}{10^{-5}}$$
$$= 10^{-1-(-5)}$$
$$= 10^4$$

Conjunto de problemas 10-7b

1. Simplifica cada una de las siguientes expresiones, utilizando primero la propiedad

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

y luego en una forma que contenga solamente exponentes positivos. (Suponte que ninguna de las variables toma el valor 0.)

Ejemplo. $\frac{a^7}{a^9} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

(a) $\frac{3^5}{3^3}$ (d) $\frac{b^4}{b^2}$ (g) $\frac{10^5 \times 10^2}{10^8}$ (j) $\frac{a^4b^3}{a^7b}$

(b) $\frac{3^5}{3^8}$ (e) $\frac{b^7}{b^{10}}$ (h) $\frac{10^2 \times 10^4}{10^3}$ (k) $\frac{36x^2y^4}{8x^5y}$

(c) $\frac{3^8}{3^8}$ (f) $\frac{10^5}{10^6}$ (i) $\frac{10^4 \times 10^3}{10^2 \times 10^5}$ (l) $\frac{3m^4}{m^9}$

(m) $\frac{t^3}{3t^5}$

2. Simplifica cada una de las siguientes expresiones hasta llegar a una forma que contenga solamente exponentes positivos. (Suponte que ninguna de las variables toma el valor 0.)

(a) $\frac{10^4 \times 10^{-2}}{10^2}$ (f) $\frac{2x^2y^{-2}}{4^2x^2y^2}$

(b) $\frac{10^3 \times 10^2}{10^{-2}}$ (g) $\frac{3^2 \times 2^{-3}}{2^3 \times 3^{-2}}$

(c) $.007 \times 10^4 \times 10^{-4}$ (h) $\frac{10^3 \times 10^{-4} \times 10^0}{10^2 \times 10^{-3}}$

(d) $\frac{12a^4b}{3a^7b^2}$ (i) $\frac{2^{-3}x^{-2}y^4}{2^{-2}x^2y^{-1}}$

(e) $\frac{2x^2y^{-2}}{4x^2y^2}$

3. La distancia en millas de la tierra al sol es aproximadamente 93,000,000.
   (a) ¿Cuántos millones de millas es esa distancia?
   (b) ¿Cuántos "diez millones" de millas?
   (c) ¿Será 9.3×10^7 otro nombre para 93,000,000?
4. Simplifica cada una de las siguientes expresiones hasta que contenga solamente exponentes positivos:
   (a) $10^2(10^4 + 10^{-2})$
   (b) $3a^2(3a + a^{-1})$
   (c) $3a^2(3^{-1}a + 3a^{-2})$
   (d) $(a + a^{-1})(a + a^{-1})$
   (e) $(a + a^{-1})(a - a^{-1})$
5. En cada uno de los siguientes ejercicios, halla el valor de n que haga cierto el enunciado:
   (a) $10^3 \times 10^3 = 10^n$
   (b) $10^{-1} \times 10^{-1} = 10^n$
   (c) $10^{-4} \times 10^{-4} = 10^n$
   (d) $10^7 \times 10^7 = 10^n$
   (e) $10^n \times 10^n = 10^8$
   (f) $10^n \times 10^n = 10^{-6}$
   (g) $10^n \times 10^n = 10^{18}$
   (h) $10^n \times 10^n = 10^{-4}$
6. Si n es un entero positivo y $a \neq 0$, demuestra que

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}.$$

*7. Si m y n son enteros cualesquiera, demuestra que

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

incluye todos los casos de multiplicación y división de potencias. (Sugerencia: El caso de $\frac{a^p}{a^q}$ puede considerarse como $a^{p+(-q)}$.)

¿Cuál es el significado de $(ab)^3$? Sabemos que ab es el nombre de un número y sabemos también que un número al cubo significa que tomamos dicho número tres veces como factor. Por lo tanto, el significado de $(ab)^3$ debe ser $(ab)(ab)(ab)$. Por las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación de números reales, sabemos que

$$(ab)(ab)(ab) = (aaa)(bbb) = a^3 b^3.$$

De modo que

$$(ab)^3 = a^3 b^3.$$

Utilizando un razonamiento análogo, escribe otro nombre para $\left(\frac{a}{b}\right)^3$. Haz lo mismo con $(a^2 b^3)^3$. En general, tenemos que

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

Conjunto de problemas 10-7c

En los problemas 1 - 8, simplifica cada una de las expresiones y escribe tus respuestas utilizando exponentes positivos solamente: (supón siempre que ninguna variable toma el valor 0.)

1. (a) $(3a^3)^2$ (b) $3(a^3)^2$ (c) $(3a^2)^3$ (d) $3a^{(3^2)}$

2. (a) $\frac{5x^2}{15xy^2}$ (b) $\frac{(5x)^2}{15xy^2}$ (c) $\frac{5x^2}{15(xy)^2}$

3. (a) $\frac{(-3)^2a}{9}$ (b) $\frac{-3^2a}{9}$ (c) $\frac{(-3a)^2}{9}$ (d) $\frac{(-3a)^3}{9}$

4. (a) $\frac{(2y^2)^3(2y)}{(2y)^3(2y^2)}$ (b) $\frac{(2y^2)^5}{(2y^2)^5}$ (c) $\frac{(2y)^5}{2y^5}$

5. (a) $\frac{-7^2z^{15}}{49z^{30}}$ (b) $\frac{(-7)^2z^{15}}{49z^{30}}$ (c) $\frac{-7^2z^{30}}{-49z^{15}}$

6. (a) $\left(\frac{28a^3}{45a}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2$ (b) $\left(\frac{63a^2}{243a^5}\right)\left(\frac{54a^7}{14a^4}\right)$ (c) $\left(\frac{37(-a)^3}{3a}\right)\left(\frac{2a^{11}}{7(-a)^4}\right)$

7. (a) $\frac{x^{2a}}{x^a}$ (b) $x^{2a}\cdot x^a$ (c) $(x^{2a})^3$

8. (a) $\dfrac{\frac{90(ab)^2}{16a^3}}{\frac{81ab^3}{108b}}$ (b) $\dfrac{\frac{(xy)^2}{xy^2}}{\frac{x^2y}{x^2y^2}}$

9. ¿Será cierto cada uno de los siguientes enunciados? Justifica tus contestaciones.

(a) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2}$

(b) $\frac{2}{3} = \frac{2^2}{3^2}$

(c) $\left(\frac{5a}{7b}\right)^2 = \frac{5^2a^2}{7^2b^2}$

(d) $\frac{5a^2}{7b^2} = \frac{5^2a^2}{7^2b^2}$

(e) 3^3 es un factor de $(3^3 + 3^5)$.

(f) 3^2 es un factor de $(6^2 + 9^2)$.

(g) $(2x + 4y^2)$ es un número par si x, y, son enteros positivos.

10. (1) Toma un número, (2) dóblalo, (3) cuadra el resultado. Ahora vuelve a empezar: (1) Toma el número original, (2) cuádralo, (3) dobla el resultado.

(a) ¿Es el resultado final el mismo utilizando ambos procedimientos?

(b) Utilizando una variable, prueba si los dos procedimientos conducen o no al mismo resultado.

11. (a) Considera un cuadrado cuyo lado tiene s unidades de largo. ¿Cuál es su área? Considera ahora un cuadrado cuyos lados son dos veces el largo de los del cuadrado original. Escribe y simplifica una frase (en términos de s) para el área del cuadrado mayor. ¿Cuántas veces el área del cuadrado menor será la del cuadrado mayor?

(b) De manera semejante, compara el área del cuadrado original con el área de un cuadrado cuyos lados sean tres veces el largo de los lados del primero.

(c) Si aún no lo has hecho, muestra, mediante un dibujo de los cuadrados mencionados, que los resultados de las partes (a) y (b) parecen razonables.

12. Simplifica las siguientes expresiones, es decir, transfórmalas de manera que contengan una sola división indicada.

Ejemplo.

$$\frac{5}{3x^2} + \frac{11}{6xy} - \frac{4}{9y^2} = \frac{5}{3x^2}\cdot\frac{3\cdot 2y^2}{3\cdot 2y^2} + \frac{11}{6xy}\cdot\frac{3xy}{3xy} - \frac{4}{9y^2}\cdot\frac{2x^2}{2x^2}$$

$$= \frac{30y^2 + 33xy - 8x^2}{3^2\cdot 2x^2y^2}$$

$$= \frac{30y^2 + 33xy - 8x^2}{18x^2y^2}$$

(Observa que $3^2 \cdot 2 \cdot x^2 y^2$ es el mínimo común múltiplo de $3x^2$, $6xy$, y $9y^2$ debido a que $3^2 \cdot 2 \cdot x^2 y^2$ es el conjunto más pequeño de factores que contiene a $3x^2$, $3 \cdot 2xy$, y $3 \cdot 3y^2$.)

(a) $\frac{5}{6a} + \frac{9}{8a}$

(b) $\frac{5}{2x^2} - \frac{2}{3x^2} + \frac{1}{6x}$

(c) $\frac{x}{6a^3} - \frac{y}{5a^2} - \frac{z}{2a}$

(d) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

(e) $\frac{11}{35a^2} + \frac{13}{25ab} - \frac{7}{5b^2}$

13. Demuestra: Si a^2 es impar y a es un entero, entonces a es impar. (Sugerencia: Supón que a es par y llega a una contradicción.)

14. Demuestra: Si a^2 es par y a es un entero, entonces a es par. (Sugerencia: Supón que a es impar.)

15. Sea a igual a 2, b igual a -2, c igual a 3, d igual a -3. Entonces, determina el valor de:

(a) $-2a^2b^2c^2$

(b) $(-2abc)^2$

(c) $\frac{-4a^4d}{6b^2a^3}$

(d) $\frac{-6a^{12}b^{16}c^{20}}{2a^{10}b^{18}c^{22}}$

(e) $\frac{a^3 + b^3}{a^3b^3}$

(f) $\frac{(a + b + c)^2}{a^2 + b^2 + c^2}$

16. Multiplica:

<u>Ejemplo</u>. $(a^2 - 3)(a^2 - 2a + 1) = a^2(a^2 - 2a + 1) - 3(a^2 - 2a + 1)$

$$= a^4 - 2a^3 + a^2 - 3a^2 + 6a - 3$$

$$= a^4 - 2a^3 - 2a^2 + 6a - 3$$

(a) $(x^2 + 1)(x^3 + x^2 + 1)$

(b) $(2a^3 - b^2)(3a^2 - 2b^2)$

(c) $(2x - 3y)^2$

(d) $(a + b)^3$

Problemas de repaso

1. Halla las siguientes sumas:

(a) $\frac{1}{13} + \frac{3}{26}$

(b) $\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$

(c) $\frac{27}{35} - \frac{19}{21}$

(d) $\frac{5m}{12} - \frac{7m}{18} - \frac{1}{2}$

(e) $\frac{a}{44} + \frac{2a}{33} + \frac{3a}{22}$

(f) $\frac{2}{3a^2} - \frac{5}{12a} + \frac{1}{4}$

2. Reduce a su "mínima expresión":

(a) $\frac{102}{2^2 \cdot 3 \cdot 5}$

(b) $\frac{2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot a^2}{450a}$

(c) $\frac{51\ x^3y}{85\ xy}$

(d) $\frac{142857}{999999}$

3. ¿Cuál es el número primo que sigue a 129?

4. Cuatro veces un entero es diez más que el doble de su sucesor. ¿Cuál es el entero?

5. Si el dominio de la variable es el conjunto de los números primos, determina el conjunto de validez de cada uno de los siguientes enunciados:

(a) $\frac{1}{3}(2x - 99) = 29$

(b) $\frac{x}{3} + \frac{5}{12} = 12 + \frac{1}{4}x$

(c) $3x^2 < 121$

(d) $|x - 10| < 3$

6. Simplifica:

(a) $(2a)(3a^2)$

(b) $\frac{2xy}{8x^2}$

(c) $m^2 \cdot m^{-2}$

(d) $\frac{2^2 \cdot 2^3}{2^4}$

(e) $\frac{3^5 a^4}{3^2 a}$

(f) $\frac{10^3 \times 10^{-1}}{10^{-2}}$

7. Escribe los productos indicados como sumas indicadas:

(a) $a^2(a + 1)$

(b) $xy^2(x^2 + y^3)$

(c) $(2x + 1)\ 3x^2$

(d) $(-mn)(m - n)$

(e) $(a^2 + b^2)(a + b)$

(f) $x^{-1}(x^2 + x^3)$

(g) $(a + b)(a^{-1} + b^{-1})$

(h) $(x^2y + 1)(xy^2 + 2y)$

8. Si n es un entero positivo, ¿cuáles de los siguientes números son pares, cuáles son impares, y cuáles pueden ser cualquiera de las dos cosas?

(a) n^2

(b) n^3

(c) $2n$

(d) $2n + 1$

(e) $(2n)^2$

(f) $(2n + 1)^2$

(g) $4n^2$

(h) $2n - 1$

(i) $2^{10} + 3^{10}$

(j) $2^{10} + 6^{10}$

9. ¿Cuáles de las siguientes expresiones son no negativas para cualquier número real n?

(a) n^2

(b) $(-n)^3$

(c) $(-n)(-n)$

(d) $-n^3$

(e) $(-n)^2$

(f) $(n^2)(n^2)$

(g) n^4

(h) $(-n)^4$

(i) $-n^4$

(j) $-|n^2|$

(k) $|-n^3|$

10. Las áreas de dos cuadrados difieren en 27 unidades cuadradas. Un lado del cuadrado mayor es una unidad más largo que un lado del menor. Escribe y resuelve una ecuación para determinar el largo del lado del cuadrado menor.

11. Durante 27 días Guillermo ha estado ahorrando monedas de cinco y de diez centavos para sus gastos del campamento de verano. Se encuentra con que tiene 41 monedas, cuyo valor total es de \$3.35. Si tiene más monedas de diez centavos que de cinco centavos, ¿cuántas monedas de cinco centavos tendrá?

12. Samuel tiene cinco horas libres. ¿Qué distancia podrá correr en bicicleta hasta las colinas vecinas a una velocidad de 8 millas por hora para luego regresar a una velocidad de 12 millas por hora?

Capítulo 11

RADICALES

11-1. Raíces

Una vez estudiada la operación de sumar nos fue posible definir su inversa, la operación de restar. ¿Qué operación definimos como la inversa de la multiplicación? En el capítulo 10 consideramos la operación de cuadrar un número. Esta también tiene una inversa.

Repasemos por un momento el procedimiento para hallar la raíz cuadrada de un número.

Si $x = 17$, ¿cuál es el valor de x^2?

Si $x = .3$, ¿cuál es el valor de x^2?

Si $x = -2wa^2$, ¿cuánto es x^2?

Veamos ahora el mismo tipo de pregunta, pero en la dirección opuesta.

¿Cuál es el conjunto de validez de $x^2 = 49$?

¿y el de $x^2 = .09$?

¿y el de $x^2 = -4$?

En este segundo grupo de preguntas nos interesa, por ejemplo, un número cuyo cuadrado sea 49. Determinarlo constituye la operación inversa de la de cuad[illegible] que llamamos extraer una <u>raíz cuadrada</u>. Ciertamente 7 es un número cuyo cuadrado es 49, y por lo tanto, 7 es una raíz cuadrada de 49. Como es igualmente cierto que $(-7)^2 = 49$, deducimos que -7 es también una raíz cuadrada de 49. Debemos convenir en una notación y una terminología que permitan distinguir entre estas dos raíces cuadradas; se acostumbra llamar a la raíz cuadrada <u>positiva</u> de un número b "<u>la</u> raíz cuadrada de b", y denotarla con $\sqrt{b}$.

Resumamos ahora lo arriba apuntado:

Si b es un número positivo real, y $a^2 = b$, entonces a es una raíz cuadrada de b. Si a es una raíz cuadrada de b, también lo es $-a$. La raíz cuadrada positiva de b se denota con $\sqrt{b}$ y se llama corrientemente "la" raíz cuadrada de b. La raíz cuadrada negativa de b será entonces $-\sqrt{b}$.

Definimos también $\sqrt{0} = 0$, y en este caso hay solamente una raíz cuadrada.

Conjunto de problemas 11-1a

1. Simplifica:
   (a) $\sqrt{4}$
   (b) $-\sqrt{121}$
   (c) $\sqrt{(-3)^2}$ (ten cuidado)
   (d) $\sqrt{2.25}$
   (e) $\sqrt{\frac{49}{9}}$
   (f) $\sqrt{.81}$
   (g) $\sqrt{4} + \sqrt{9} - \sqrt{25} + 3$
   (h) $2\sqrt{\frac{49}{4}} - 3\sqrt{\frac{64}{9}}$
2. ¿Es el enunciado "$\sqrt{x^2} = x$" cierto si
   (a) x es 3?
   (b) x es -3?
3. ¿Es el enunciado "$\sqrt{x^2} = |x|$" cierto si
   (a) x es 3?
   (b) x es -3?
4. Si a y b son números positivos reales y $a < b$, demuestra que $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. (Sugerencia: Solamente una de estas tres relaciones es cierta: $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. (¿Por qué?) Muestra que cada una de las dos primeras conduce a una contradicción.)
5. ¿Será posible que $\sqrt{x^2} + 2 = 1$ para algún valor de x? Explica.
6. Determina la raíz cuadrada de $(2x - 1)^2$ si:
   (a) $x < \frac{1}{2}$
   (b) $x > \frac{1}{2}$
   (c) $x = \frac{1}{2}$

*7. Examina la siguiente "demostración" de que todos los números son iguales: Si a y b son dos números reales cualesquiera, entonces

$$|a - b| = |b - a|,$$
$$(a - b)^2 = (b - a)^2,$$
$$a - b = b - a,$$
$$2a = 2b,$$
$$a = b.$$

¿En qué paso falla la "demostración" y por qué?

Si $x = 2$, ¿cuál es entonces el valor de x^3?

Si $x = -.3$, ¿cuál es entonces el valor de x^3?

Si $x = \frac{1}{2}a^2$, ¿cuánto será x^4?

De nuevo, en la otra dirección, podemos preguntar:
¿Cuál es el conjunto de validez de $x^3 = 8$?
¿y el de $x^3 = -0.027$?
¿y el de $x^4 = 16$?

Siguiendo el procedimiento usado anteriormente, podemos decir que a es una raíz cúbica de b si $a^3 = b$. Escribimos $a = \sqrt[3]{b}$. De los ejemplos anteriores deducirás que, aunque no nos fué posible hallar raíces cuadradas de números negativos, ya que ambos, los números positivos y los negativos, tienen cuadrados positivos, sí es posible hallar raíces cúbicas de números negativos porque el cubo de un número negativo es negativo.

Por otra parte, parece que sólo podemos hallar un número cuyo cubo sea 8; a saber, el número 2, mientras que hemos visto que todos los números distintos de cero tendrán dos raíces cuadradas, si es que tienen alguna. Esto es correcto si consideramos solamente los números reales; en el futuro verás que, extendiendo la clase de números que estamos dispuestos a usar, los números negativos también tendrán raíces cuadradas y todo número distinto de cero tendrá tres raíces cúbicas.

Conjunto de problemas 11-1b

Simplifica las expresiones de los problemas 1 al 8:

1. (a) $\sqrt[3]{27}$ (b) $\sqrt[4]{81}$ (c) $\sqrt[5]{243}$

2. (a) $\sqrt[3]{8}$ (b) $\sqrt[3]{1000}$ (c) $\sqrt[3]{729}$

3. (a) $\sqrt[3]{x^3}$ (b) $\sqrt{x^2}$ (c) $\sqrt[4]{x^4}$

4. (a) $\sqrt[3]{-125}$ (b) $\sqrt[3]{-8y^3}$ (c) $\sqrt[3]{(-8)(-y)^3}$

5. (a) $\sqrt[3]{(-13)^3}$ (b) $\sqrt{(-13)^2}$ (c) $\sqrt[3]{(-13)^6}$

6. (a) $\sqrt[3]{.008}$ (b) $\sqrt[3]{\frac{27}{1000}}$ (c) $\sqrt[3]{.216}$

7. (a) $\sqrt[3]{-\frac{125}{8}}$ (b) $\sqrt[3]{\frac{64}{b^3}}$ (c) $\sqrt{\frac{a^2}{b^6}}$

8. (a) $\sqrt[3]{64c^6}$ (b) $\sqrt[3]{(x-3y)^3}$ (c) $\sqrt{\sqrt{81}}$

9. ¿Qué relación hay entre $\sqrt[4]{16}$ y $\sqrt{4}$? ¿Entre $\sqrt[4]{10,000}$ y $\sqrt{100}$? ¿Se te ocurre una relación entre raíces cuartas y raíces cuadradas que parezca ser cierta?

*10. Redacta una definición para raíces cuartas y otra para raíces enésimas, donde n es un entero positivo. ¿Para qué valores de n crees que tienen raíces enésimas reales los números negativos? ¿Cómo crees que se pueda extender a las raíces enésimas la propiedad de los números positivos de tener dos raíces cuadradas reales y una raíz cúbica real?

11-2. Radicales

El símbolo $\sqrt{}$ se llama signo radical y una expresión que consiste en una frase dentro de un signo radical se llama un radical. Así $\sqrt{3x^2}$ es un radical.

Volvamos a las raíces cuadradas. Hasta ahora no hemos tratado de extraer la raíz cuadrada de n a menos que pudiéramos, sin gran dificultad, darnos cuenta de que n era el cuadrado de algún número o expresión sencilla. (En este caso decimos que n es un <u>cuadrado perfecto</u> o <u>cuadrado exacto</u>.) Consideremos ahora el caso de una raíz cuadrada que no podamos reconocer inmediatamente, tal como, por ejemplo, $\sqrt{2}$. ¿Qué pregunta haremos acerca de esto? Por ejemplo, si se nos diera la expresión $\sqrt{\frac{4}{9}} + 1$, no la dejaríamos en esta forma, ya que comprende una operación indicada que puede llevarse a cabo. Es posible simplificarla a $\frac{2}{3} + 1$, o simplemente a $\frac{5}{3}$. ¿Qué ocurriría si la expresión fuese $\sqrt{2} + 1$?

Veamos lo que ocurrió en el caso de $\sqrt{\frac{4}{9}} + 1$. Encontramos que $\sqrt{\frac{4}{9}}$ es un número <u>racional</u> que podríamos combinar con el número racional 1 para obtener la expresión más simple $\frac{5}{3}$. ¿Podemos hacer algo parecido con $\sqrt{2} + 1$? La verdad es que no sabemos que exista un número racional cuyo cuadrado sea 2, pero aún no hemos demostrado que <u>no</u> hay tal número. Decidamos esta cuestión de una vez para siempre.

<u>Teorema 11-2.</u> $\sqrt{2}$ es irracional.

<u>Planteamiento</u>:

Antes de empezar la demostración del teorema, pensemos en el problema en cuestión. Queremos demostrar que $\sqrt{2}$ es irracional; es decir, que un número cuyo cuadrado sea 2 no puede ser racional. ¿Cómo se demuestra que algo <u>no</u> tiene una cierta propiedad? Por ejemplo, en el capítulo 9 demostramos que 0 <u>no</u> tiene recíproco. ¿Cómo lo hicimos? Suponiendo que 0 <u>tiene</u> un recíproco y demostrando que tal supuesto conduce a una contradicción. Si un supuesto nos lleva a una contradicción, el supuesto debe ser falso, y si es falso que 0 tiene un recíproco, entonces no tiene recíproco.

Tratemos de emplear aquí el mismo razonamiento.

Demostración. Supongamos que existe un número racional, digamos $\frac{a}{b}$, siendo a y b enteros positivos tal que $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$. Ciertamente, podemos insistir en que a y b no tengan factor común alguno, pues caso de tenerlo, se puede simplificar la fracción $\frac{a}{b}$ eliminando ese factor.

Si $$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2,$$

entonces $$\frac{a^2}{b^2} = 2, \qquad \text{(¿Por qué?)}$$

y también $$a^2 = 2b^2. \qquad \text{(¿Por qué?)}$$

Esto nos dice que a^2 es un número par. (¿Por qué?) Entonces a es también un número par. (Demostraste este resultado en un ejercicio en el capítulo 10, página 278.).

Si a es par, entonces $a = 2c$, siendo c otro entero, (¿Por qué?) Si, en nuestra última ecuación, reemplazamos a por 2c, obtenemos

$$4c^2 = 2b^2,$$
$$2c^2 = b^2.$$

Por la misma razón que dimos en el caso de a, sabemos que b debe ser también par, ya que su cuadrado es par. Por lo tanto, hemos demostrado que a y b deben ser ambos números pares. Pero habíamos escogido los números a y b de modo que no tuvieran ningún factor en común, y esto desde luego no permite que a y b tengan el factor común 2. Así, pues, tenemos una contradicción; la hipótesis de que $\sqrt{2}$ es racional nos ha llevado a una contradicción, y dicha hipótesis tiene que ser falsa. Por lo tanto, $\sqrt{2}$ es irracional. Así termina la demostración.

Fíjate de paso, en la siguiente diferencia interesante entre una demostración por contradicción, como la que acabamos de hacer, y los otros tipos de demostraciones que has visto durante el curso. En la demostración directa hay una propiedad particular que estás tratando de establecer, y procedes a trabajar con la información dada y con las propiedades de los números reales hasta llegar al resultado que buscas. Fijas tu atención en derivar la afirmación deseada a base de afirmaciones que has supuesto son ciertas. En la demostración por contradicción, por otra parte, añades a tu lista de las cosas con las cuales trabajas, la negación de lo que quieres demostrar, y después continúas derivando resultados hasta llegar a una contradicción. No sabes de antemano de dónde proviene la contradicción, pero continúas trabajando hasta dar con una. Esta contradicción demuestra que cometiste un error al negar lo que querías demostrar, por lo tanto, lo que querías demostrar debe ser cierto siempre.

De manera análoga, es posible establecer que la raíz cuadrada de cualquier entero positivo que no sea un cuadrado exacto es irracional. Esto nos dice que, por ejemplo, entre los enteros desde el 1 hasta el 10 solamente el 1, el 4 y el 9 tienen raíces cuadradas racionales, mientras que los otros tienen raíces cuadradas irracionales. Trata de probar que $\sqrt{3}$, por ejemplo, es irracional.

Conjunto de problemas 11-2

1. Como todos los enteros son números racionales, la afirmación de que $\sqrt{2}$ no es un entero está, en efecto, incluida en el teorema 11-2. Trata de mostrar directamente que $\sqrt{2}$ no es un entero.
2. En el capítulo 1 aprendiste que entre dos puntos cualesquiera de la recta numérica hay un número infinito de puntos marcados con números racionales. ¿Crees que hay entre dos puntos cualesquiera en la mitad positiva de la recta numérica un número infinito de puntos cuyas coordenadas no solamente son racionales, sino que también son cuadrados exactos? Entre los números racionales $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$, halla dos números racionales que sean cuadrados exactos.
3. Demuestra que $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ es irracional. (Sugerencia: Suponte que es racional y llega a una contradicción.)
4. Demuestra que $\sqrt{2} + 3$ es irracional.

*5. Demuestra que $\sqrt{5}$ es irracional. (Sugerencia: Emplea el mismo razonamiento que en la demostración de que $\sqrt{2}$ es irracional. Puedes utilizar la propiedad de que si p es un entero y 5 divide a p^2, entonces 5 divide a p.)

11-3. Simplificación de radicales

Observemos que sólo puede haber un número positivo a que sea una raíz cuadrada de n. Porque si hubiera otro número positivo, b, distinto de a, entonces ó $a < b$ ó $b < a$. (¿Por qué?) En estos dos casos, respectivamente, tendríamos que ó $a^2 < b^2$ ó $b^2 < a^2$. Así, los cuadrados de a y b no podrían ser ambos iguales a n.

Consideremos ahora el producto de dos raíces cuadradas, digamos $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$. ¿Podríamos transformar este producto en una forma más sencilla? Examinando la expresión $(\sqrt{2} \cdot \sqrt{3})^2$, podemos llegar a una conclusión acerca de $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$. Tenemos que $(\sqrt{2} \cdot \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 \cdot (\sqrt{3})^2 = 2 \cdot 3 = 6$. Así, pues, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ debe ser una raíz cuadrada de 6. Como acabamos de aprender que hay sólo un número positivo que sea una raíz cuadrada de 6, debe ser cierto que $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$.

Al igual que en este ejemplo, podemos demostrar el siguiente teorema:

<u>Teorema 11-3</u>. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, para dos números reales cualesquiera a y b.

<u>Demostración</u>. Como $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2$,

$$= ab,$$

se deduce que la raíz cuadrada de ab es $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Conjunto de problemas 11-3a

Simplifica. En los problemas que contengan variables, indica qué restricciones deben imponerse a los dominios de esas variables.

1. (a) $\sqrt{5}\sqrt{6}$ (b) $\sqrt{2}\sqrt{7}$ (c) $\sqrt{3}\sqrt{3}$
2. (a) $\sqrt{3}\sqrt{11}\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{5}\sqrt{4\cdot 2}$ (c) $\sqrt{3}\sqrt{12}$

3. (a) $\sqrt{2}\sqrt{x}$ (b) $\sqrt{z}\,\sqrt{3y}$ (c) $\sqrt{3}\,\sqrt{x^2}$
4. (a) $\sqrt{5}\sqrt{0}$ (b) $\sqrt{(-5)^2}\sqrt{4^3}$ (c) $\sqrt{y}\sqrt{y^3}$
5. ¿Es cierto que para todo número real a, $(\sqrt{a})^2 = a$? ¿Será eso cierto para todo número no negativo a?
6. Si n es un entero positivo y a, b son números reales positivos, demuestra que

$$\sqrt[3]{a}\,\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}.$$

7. Multiplica (en los casos en que sea necesario, explica las restricciones en los dominios de las variables).

(a) $\sqrt{2}\,(\sqrt{3}+\sqrt{8})$ (d) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})$

(b) $\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)$ (e) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$

(c) $(\sqrt{a}+1)^2$ (f) $(2\sqrt{2}+1)(3\sqrt{2}+1)$

Podemos utilizar la propiedad de las raíces cuadradas dada en el teorema 11-3 para transformar una raíz cuadrada en el producto de dos raíces cuadradas. Utilizando nuestro conocimiento acerca de la descomposición en factores primos, podemos también, por ejemplo, escribir

$$\sqrt{98} = \sqrt{7^2 \cdot 2}.$$

Vemos que

$$\sqrt{98} = \sqrt{7^2}\cdot\sqrt{2} \quad (\text{¿Por qué?})$$

$$= 7\sqrt{2}.$$

Ciertamente, $7\sqrt{2}$ es una forma más simple que $\sqrt{98}$ porque no contiene dentro del radical ningún factor que sea un cuadrado exacto. Recuerda que decimos que una frase es "simple" cuando no contiene operaciones indicadas que se pueden efectuar. Así, se puede efectuar la operación indicada $\sqrt{7^2}$ mientras que $\sqrt{2}$ tiene que dejarse como una operación indicada.

Ejemplo 1. Simplifica $\sqrt{108}$.

La descomposición en factores primos de 108 es $2^2 \cdot 3^3$. Por lo tanto,

$$\sqrt{108} = \sqrt{2^2 \cdot 3^3}$$

$$= \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 3}$$
$$= \sqrt{2^2 \cdot 3^2} \cdot \sqrt{3}$$
$$= 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

Ejemplo 2. Simplifica $\sqrt[3]{48}$.

Como $48 = 2^4 \cdot 3 = 2^3 \cdot 2 \cdot 3$,

$$\sqrt[3]{48} = \sqrt[3]{2^3}\,\sqrt[3]{2 \cdot 3}$$
$$= 2\sqrt[3]{6}.$$

Observa cómo tratamos estos dos ejemplos. Al simplificar raíces cuadradas, arreglamos los factores con el fin de agrupar sus potencias pares mayores. (¿Por qué las pares?) Esto nos asegura que la nueva forma de la expresión será simple, ya que no dejamos indicada la raíz cuadrada de ningún cuadrado exacto. Describe el procedimiento correspondiente para raíces cúbicas.

Ejemplo 3. Simplifica $\sqrt{18x^2}$.

De nuevo, descomponemos en factores: $18x^2 = 3^2 \cdot x^2 \cdot 2$. Por lo tanto,

$$\sqrt{18x^2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{2}$$
$$= 3\sqrt{x^2}\sqrt{2}.$$

Antes de simplificar $\sqrt{x^2}$, recordemos que $\sqrt{x^2}$ nunca es negativo. De modo que si x es positivo o cero, entonces $\sqrt{x^2} = x$, un número positivo; si x es negativo, entonces $\sqrt{x^2} = -x$, un número positivo.

Como resultado, vemos que $\sqrt{x^2} = |x|$.

Por tanto, $\sqrt{18x^2} = 3|x|\sqrt{2}$.

Conjunto de problemas 11-3b

En los problemas 1 - 7, simplifica:

1. (a) $\sqrt{20}$ (b) $\sqrt{50}$ (c) $\sqrt{250}$ (d) $\sqrt{80}$
2. (a) $\sqrt{12}$ (b) $\sqrt{30}$ (c) $\sqrt{16}$ (d) $\sqrt{192}$
3. (a) $7\sqrt{28}$ (b) $3\sqrt{52}$ (c) $5\sqrt{13}$ (d) $4\sqrt{121}$
4. (a) $\sqrt{10}\sqrt{15}$ (b) $\sqrt{5}\sqrt{20}$ (c) $\sqrt{18}\sqrt{27}$
5. (a) $(6\sqrt{2})(3\sqrt{14})$ (b) $\sqrt{7}\ (2\sqrt{11})$ (c) $(3\sqrt{38})(2\sqrt{57})$
6. (a) $\sqrt{9+16}$ (b) $\sqrt{9\cdot 16}$ (c) $\sqrt{9}+\sqrt{16}$
7. (a) $\sqrt[3]{16}$ (b) $\sqrt[3]{250}$ (c) $\sqrt[3]{8+27}$ (d) $\sqrt[3]{8}\ \sqrt[3]{27}$
8. Para cada uno de los siguientes enunciados, halla el valor positivo de x que lo haga cierto. ¿Qué enunciados son ciertos también para algún valor negativo de x?

   (a) $x^2 = 56$ (b) $x^2 = 162$ (c) $x^3 = 56$

En los problemas 9 - 15, simplifica. Indica el dominio de las variables en cada uno de los problemas en los cuales el dominio sea limitado.

9. (a) $\sqrt{24x^2}$ (b) $\sqrt{24x^3}$ (c) $\sqrt{24x^5}$
10. (a) $\sqrt{32a^4}$ (b) $\sqrt[3]{32a^4}$ (c) $\sqrt[4]{32a^4}$
11. (a) $\sqrt{47x}$ (b) $\sqrt{625x^2}$ (c) $\sqrt{5x^7}$
12. (a) $\sqrt{x^4+x^2}$ (b) $\sqrt{(x^4)(x^2)}$ (c) $\sqrt{x^4}+\sqrt{x^2}$
13. (a) $(2\sqrt{3x})(5\sqrt{6x})$ (b) $(3\sqrt{x^2y})(\sqrt{ay^2})$ (c) $\sqrt{600x}\cdot\sqrt{5000}$
14. (a) $\sqrt{16}$ (b) $\sqrt[3]{16}$ (c) $\sqrt[4]{16}$ (d) $\sqrt[5]{16}$
15. (a) $\sqrt[3]{27a^2}$ (b) $\sqrt[3]{-27b^3}$ (c) $\sqrt[3]{-27c^4}$ (d) $\sqrt[6]{2^7}$

16. Determina el conjunto de validez de cada uno de los siguientes enunciados:

(a) $2x^2 = 32$ (b) $\frac{1}{3}y^2 = 16$ (c) $(\eta - 1)^2 = 9$

17. Multiplica y simplifica:

(a) $3\sqrt{2}(2\sqrt{6} - \sqrt{2})$ (c) $(\sqrt{3} - \sqrt{8})(2\sqrt{3} + \sqrt{8})$

(b) $(4\sqrt{8} - 2)2\sqrt{2}$

11-4. Simplificación de fracciones con radicales

Hemos visto lo que se puede hacer con enteros y con algunas potencias de las variables dentro del signo radical y también cuál es el propósito de simplificar tales expresiones. ¿Qué haremos si hay una fracción dentro del radical?

Consideremos $\sqrt{\frac{8}{9}}$. Como antes, descomponemos los números en factores para obtener $\frac{8}{9} = \frac{2^3}{3^2} = \frac{2^2}{3^2} \cdot 2$. Entonces

$$\sqrt{\frac{8}{9}} = \sqrt{\frac{2^2}{3^2}} \cdot \sqrt{2}$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{2}.$$

El siguiente teorema nos da un resultado útil para la simplificación de radicales:

Teorema 11-4. Si $a \geq 0$ y $b > 0$, entonces

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Ejemplo.

$$\sqrt{\frac{15}{5x^2}} = \sqrt{\frac{3}{x^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{|x|}.$$

¿Para qué valores de x es éste un número real?

Conjunto de problemas 11-4a

Simplifica cada uno de los siguientes radicales e indica el dominio de la variable en los casos en que esté restringido:

1. (a) $\sqrt{\frac{16}{25}}$ (b) $\sqrt{\frac{3}{25}}$ (c) $\sqrt{\frac{12}{25}}$
2. (a) $\sqrt{\frac{x^2}{9}}$ (b) $\sqrt{\frac{49}{a^2}}$ (c) $\sqrt{\frac{3w^2}{y^2}}$
3. (a) $\sqrt{\frac{3x^2}{75}}$ (b) $\sqrt{\frac{4y}{9y^3}}$ (c) $\sqrt{\frac{6}{27a^2}}$
4. (a) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{27}}$ (b) $\frac{\sqrt{a^5}}{\sqrt{9a^3}}$ (c) $\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x^3}}$
5. (a) $\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot\sqrt{\frac{10}{49}}$ (b) $\sqrt{\frac{m}{11}}\cdot\sqrt{\frac{3m}{44}}$ (c) $\sqrt{\frac{5}{3a}}\cdot\sqrt{\frac{3}{5a}}$
6. (a) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ (b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{18}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ (c) $\frac{\sqrt{3a^2}}{\sqrt{25x}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$
7. (a) $\sqrt{1+\frac{24}{25}}$ (b) $\sqrt{\frac{35}{4}+\frac{7}{9}}$ (c) $\sqrt{\frac{15}{4}-\frac{5}{6}+\frac{5}{9}}$
8. Demuestra el teorema 11-4.

Consideraremos ahora el caso de radicales que contienen fracciones cuyos denominadores no son cuadrados exactos. ¿Qué nos propondremos hacer, por ejemplo, con $\sqrt{\frac{3}{5}}$? Sabemos que

$$\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}. \qquad \text{(¿Por qué?)}$$

En esta forma, $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ contiene dos raíces cuadradas de enteros, lo que ciertamente no es tan sencillo como si tuviera sólo una. ¿Cómo podríamos transformar $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ de manera que sólo hubiera un radical (con un entero dentro del signo radical) en toda la expresión? Podemos escoger entre dos alternativas: Debemos, de alguna manera, deshacernos de $\sqrt{3}$ ó de $\sqrt{5}$. ¿Cómo podríamos deshacernos de $\sqrt{3}$, por ejemplo? Si multiplicáramos toda la expresión por $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$, que es otra manera de escribir 1, entonces tendríamos en el numerador $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$, que es simplemente 3, y así se eliminaría el radical. En el denominador tendríamos $\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}$, es decir $\sqrt{15}$, que no se puede simplificar más, ya que 15 no contiene factores que sean cuadrados exactos.

$$\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{\sqrt{5}\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{15}} \qquad \text{(Justifica cada paso.)}$$

Dijimos, sin embargo, que hay otra alternativa. Podríamos deshacernos de $\sqrt{5}$ en vez de $\sqrt{3}$. En este caso,

$$\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}. \qquad \text{(Justifica cada paso.)}$$

¿Cuál de las dos expresiones finales preferiríamos? Cada una de ellas contiene un solo radical, $\sqrt{15}$. Si tuviéramos una aproximación decimal de $\sqrt{15}$, tal como 3.873, ¿cómo podrías hallar una aproximación numérica de $\sqrt{\frac{3}{5}}$? La expresión $\frac{3}{\sqrt{15}}$ te conduciría al problema de calcular $\frac{3}{3.873}$; y la expresión $\frac{\sqrt{15}}{5}$ a calcular $\frac{3.873}{5}$. ¿Cuál es más fácil?

Es por esta razón por lo que a menudo se prefiere la expresión que tiene el denominador racional a la que tiene el numerador racional. Como es natural, el procedimiento que conduce a un denominador racional se llama "racionalizar el denominador".

Ejemplo 1. Racionaliza el denominador de los siguientes radicales:

$$\text{(a)}\ \sqrt{\frac{7}{12}}\,, \qquad \text{(b)}\ \sqrt{\frac{3}{2x^2}}\,, \quad x \neq 0.$$

$$\text{(a)}\ \sqrt{\frac{7}{12}} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{6}$$

$$\text{(b)}\ \sqrt{\frac{3}{2x^2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}|x|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}|x|} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2|x|} \quad x \neq 0.$$

Ejemplo 2. Racionaliza el numerador de

$$\sqrt{\frac{x}{2}},\ x \geq 0.$$

$$\sqrt{\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{2x}},\quad x > 0.$$

(¿Por qué es necesario, en el problema original, restringir los valores de x a números no negativos? ¿Por qué debemos restringir x en la forma racionalizada a valores positivos?)

Conjunto de problemas 11-4b

En cada uno de los siguientes ejercicios, racionaliza el denominador. Indica el dominio de la variable en aquellos casos en que esté restringido.

1. (a) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ (b) $\sqrt{\frac{1}{4}}$ (c) $\sqrt{\frac{1}{12}}$ (d) $\sqrt{\frac{1}{27}}$

2. (a) $\sqrt{\frac{9}{50}}$ (b) $\sqrt{\frac{5}{18}}$ (c) $3\sqrt{\frac{7}{36}}$ (d) $\frac{1}{5}\sqrt{\frac{75}{63}}$

3. (a) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{30}}$ (b) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{240}}{\sqrt{24}}$ (d) $\frac{9\sqrt{5}}{12\sqrt{15}}$

4. (a) $\sqrt{\frac{3b}{5}}$ (b) $\sqrt{\frac{2a}{7b}}$ (c) $\sqrt{\frac{2x^2}{9}}$ (d) $\sqrt{\frac{5}{x^3}}$

5. (a) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ (b) $\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$ (c) $\sqrt[3]{\frac{4}{a^2}}$ (d) $\sqrt[3]{\frac{5}{4a}}$

6. (a) $\sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt{\frac{2}{15}}$ (b) $\sqrt{\frac{2a}{45}} \cdot \sqrt{\frac{a^5}{2}}$ (c) $3\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot 5\sqrt{\frac{3}{5}}$

7. (a) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{6}}$ (b) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{24}}{\sqrt{6}}$ (c) $\sqrt{\frac{9 + 16}{25}}$

8. Racionaliza el numerador en cada uno de los siguientes ejercicios:

   (a) $\frac{\sqrt{x}}{x}$ (b) $\frac{\sqrt{b}}{1 + \sqrt{b}}$ (c) $\frac{3\sqrt{7}}{14\sqrt{9}}$

9. Simplifica:

   (a) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$ (b) $(\sqrt{x} + 1)^2$ (c) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2$

Visto lo que se puede hacer para simplificar productos y cocientes de radicales, consideremos ahora sumas y diferencias de radicales. Tomamos siempre como guía el convenio de que una frase no está en forma simple si contiene operaciones indicadas que puedan efectuarse. Considera $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. Ciertamente, $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ están cada una en forma simple y no podemos efectuar la operación indicada de sumar $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$. Por lo tanto, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es una frase simple.

Por otra parte, considera $4\sqrt{3} - 3\sqrt{12}$. Mediante el procedimiento ya conocido, obtenemos:

$$4\sqrt{3} - 3\sqrt{12} = 4\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = (4 - 6)\sqrt{3} = -2\sqrt{3}.$$

La última igualdad es una consecuencia inmediata de la propiedad distributiva. Por lo tanto, en este caso pudimos simplificar considerablemente la frase.

¿En qué difieren estos dos ejemplos? La suma de dos raíces cuadradas diferentes, ninguna de las cuales contiene un factor que sea un cuadrado exacto, está en una forma simple. Por otra parte, si una o más de las raíces cuadradas en la suma contiene un factor que sea un cuadrado exacto, hay la posibilidad de simplificar la frase mediante el uso de la propiedad distributiva.

Conjunto de problemas 11-4c

Simplifica:

1. (a) $\sqrt{2} + \sqrt{8}$ (b) $\sqrt{18} - \sqrt{27}$ (c) $2\sqrt{12} + 3\sqrt{75}$
2. (a) $8\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{8}$ (b) $\sqrt{\frac{5}{9}} + \sqrt{\frac{9}{5}}$ (c) $\frac{1}{3}\sqrt{63} + 7\sqrt{3}$
3. (a) $\sqrt{34} + \frac{1}{2}\sqrt{16} - \sqrt{20}$ (b) $\frac{1}{4}\sqrt{288} - \frac{1}{6}\sqrt{72} + \frac{1}{\sqrt{24}}$
4. (a) $\sqrt[3]{6} + \sqrt{6}$ (b) $\sqrt[3]{-6} + \sqrt[3]{48}$ (c) $\sqrt[4]{32} + 3\sqrt[4]{1250}$
5. Suponiendo que a y b sean números positivos, simplifica las siguientes expresiones:
   (a) $\sqrt{9a} + \sqrt{4a}$ (b) $a\sqrt{3a} + 2\sqrt{a^3}$ (c) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{ab}}{b}$

6. ¿Para qué valores de x son ciertos ~~los siguientes~~ enunciados?

(a) $x^2 = 5$ (b) $\sqrt{x} = 5$ (c) $\sqrt{x^2} = 5$

11-5. Raíces cuadradas

Has aprendido a reconocer inmediatamente las raíces cuadradas de 1, 4, 9, 16, 36, 49, 64, 81, 100, 121, y 144. Tal vez puedas reconocer hasta las raíces cuadradas de 225, 400, 625, 900, etc., debido a que las raíces cuadradas de estos números son racionales. Por otra parte, ¿cuál es la raíz cuadrada de 3?, ¿la de .0621? Estas son preguntas completamente distintas, porque $\sqrt{3}$ y $\sqrt{.0621}$ son números irracionales.

Puedes localizar en la recta numérica el número $\sqrt{49}$ simplemente localizando el número 7. Pero, ¿cómo puedes localizar el número irracional $\sqrt{3}$? En realidad, ¿qué significa "hallar", "localizar", o "evaluar" un número irracional tal como $\sqrt{3}$? Por "evaluar $\sqrt{3}$" entendemos el procedimiento de hallar dos números racionales entre los cuales esté $\sqrt{3}$. Cada uno de estos números racionales se llama una aproximación a $\sqrt{3}$. Cuanto más cerca estén, uno del otro, estos dos números racionales, mejor será la aproximación.

Así, evaluamos un número irracional en el sentido de hallar números racionales que estén cerca del número irracional.

Como $1^2 = 1$, $(\sqrt{3})^2 = 3$ y $2^2 = 4$ y como $1 < 3 < 4$, sabemos que

$$1 < \sqrt{3} < 2.$$

Estas aproximaciones a $\sqrt{3}$ son los enteros más próximos a este número. Consideramos ahora los siguientes cuadrados:

$$(1.1)^2 = 1.21, \quad (1.2)^2 = 1.44, \quad (1.3)^2 = 1.69,$$
$$(1.4)^2 = 1.96, \quad (1.5)^2 = 2.25, \quad (1.6)^2 = 2.76,$$
$$(1.7)^2 = 2.89, \quad (1.8)^2 = 3.24, \quad (1.9)^2 = 3.61.$$

Una simple inspección nos muestra que

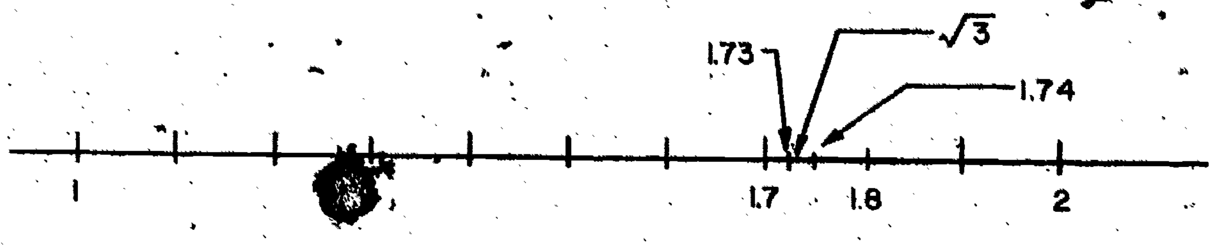
$$1.7 < \sqrt{3} < 1.8.$$

Estas aproximaciones corresponden a las décimas más próximas. De nuevo, al tratar los cuadrados de las centésimas entre 1.7 y 1.8 encontramos que $(1.73)^2 = 2.9929$ y $(1.74)^2 = 3.0286$. Por lo tanto,

$$1.73 < \sqrt{3} < 1.74,$$

y así tenemos aproximaciones a $\sqrt{3}$ en las centésimas más próximas a $\sqrt{3}$. Escribe los cuadrados de las milésimas entre 1.73 y 1.74, y halla las aproximaciones a $\sqrt{3}$ en las milésimas más próximas. (Sugerencia: Trata 1.732.) Este procedimiento podría continuarse indefinidamente, encontrando en cada etapa sucesiva dos números racionales que se acerquen más y más uno al otro y entre los cuales está $\sqrt{3}$. Decimos que cada una de estas aproximaciones sucesivas contiene una cifra más que la aproximación anterior.

Ves que podemos colocar a $\sqrt{3}$ entre dos números racionales arbitrariamente cercanos el uno del otro. Esto puede hacerse con cualquier número irracional, aunque el procedimiento empleado



aquí es muy lento y laborioso.

Afortunadamente, hay maneras más eficaces de evaluar raíces cuadradas que el método de tanteos que acabamos de emplear. Describamos una de ellas. Empezaremos eligiendo como estimación tosca una primera aproximación. Después afinamos nuestra primera aproximación mediante un procedimiento adecuado.

Para lograr una estimación tosca del valor de la raíz cuadrada de un número, debemos primero expresar el número en una <u>forma tipo</u>. Entendemos por esto escribir el número como el producto de un número a entre 1 y 100 y una potencia de 10. Por ejemplo,

$$392 = 39.2 \times 10 = 3.92 \times 10^2$$

$$3920 = 39.2 \times 10^2 = 3.92 \times 10^3$$

$$39200 = 39.2 \times 10^3 = 3.92 \times 10^4$$

Podemos ver que obtenemos 39.2×10^2 al multiplicar 3920 por $10^{-2} \times 10^2$. (¿Qué número es $10^{-2} \times 10^2$?)

$$3920 = 3920(10^{-2} \times 10^2) = (3920 \times 10^{-2}) \times 10^2 = 39.2 \times 10^2.$$

Observa que podemos escribir cada uno de estos números como 39.2 multiplicado por una potencia de diez, o como 3.92 multiplicado por una potencia de 10. Análogamente, podemos escribir

$$0.392 = 39.2 \times 10^{-2} = 3.92 \times 10^{-1},$$
$$0.0392 = 39.2 \times 10^{-3} = 3.92 \times 10^{-2},$$
$$0.00392 = 39.2 \times 10^{-4} = 3.92 \times 10^{-3},$$

donde, por ejemplo, obtenemos 39.2×10^{-4} al multiplicar 0.00392 por $10^4 \times 10^{-4}$.

$$0.00392 = 0.00392(10^4 \times 10^{-4}) = (0.00392 \times 10^4) \times 10^{-4}$$
$$= 39.2 \times 10^{-4}.$$

Con arreglo a la forma $a \times 10^k$, en la que a es un número entre 1 y 100 y k es un entero, es posible escribir cualquier número de dos maneras. En una de ellas, k es un entero par y en la otra, k es impar. Escribe de dos maneras el número $29{,}300$. Haz lo mismo con 0.000293; con 0.00293; con 2.93.

Ahora estamos preparados para lograr una estimación tosca de la raíz cuadrada de un número.

Nuestro método de estimar dependerá de que escribamos el número como un producto y de que utilicemos el teorema $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ para dos números no negativos cualesquiera a y b. Escogeremos a y b de manera tal que sea fácil estimar una raíz cuadrada de cada uno de ellos. En particular, si escogemos b como 10^k, siendo k un entero par, podemos hallar $\sqrt{b}$ exactamente. Halla las potencias de 10 que completen los siguientes enunciados:

$\sqrt{10^6} = 10^3$	$\sqrt{10^{-2}} = ?$
$\sqrt{10^2} = ?$	$\sqrt{10^{-8}} = ?$
$\sqrt{10^4} = ?$	$\sqrt{10^0} = ?$
$\sqrt{10^{14}} = ?$	$\sqrt{10^{-6}} = ?$

Si escribimos nuestro número en la forma tipo descrita anteriormente, el primer factor será un número entre 1 y 100. Por ejemplo, $354000 = 35.4 \times 10^4$. Así,

$$\sqrt{354000} = \sqrt{35.4}\sqrt{10^4}.$$

Para 35.4 y para cualquier número entre 1 y 100 no es difícil encontrar los enteros más próximos a la raíz cuadrada de dicho número. Esto es posible debido a que estamos familiarizados con todos los números entre 1 y 100 que son cuadrados exactos. Así, pues, 35.4 está entre 25 y 36; por lo tanto, $\sqrt{35.4}$ está entre 5 y 6. Para cada uno de los siguientes radicales, halla dos enteros consecutivos entre los cuales está el número irracional:

$$\sqrt{19} \qquad \sqrt{96} \qquad \sqrt{1.38}$$

$$\sqrt{54} \qquad \sqrt{11.6} \qquad \sqrt{7}$$

$$\sqrt{5} \qquad \sqrt{79.42} \qquad \sqrt{30.2}$$

Combinemos ahora las ideas que hemos desarrollado y utilicémoslas para evaluar $\sqrt{354000}$.

$$\sqrt{354000} = \sqrt{35.4}\sqrt{10^4}$$

Ya que

$$5 < \sqrt{35.4} < 6,$$

entonces,

$$5 \times 10^2 < \sqrt{35.4}\sqrt{10^4} < 6 \times 10^2,$$

$$500 < \sqrt{354000} < 600.$$

Como $\sqrt{35.4}$ está más cerca de 6 que de 5, escribimos

$$\sqrt{354000} \approx 600.$$

En este caso el símbolo " $\approx$ " significa "es aproximadamente igual a". ¿Cómo podrías comprobar que 600 es aproximadamente igual a $\sqrt{354000}$? ¿Está 600^2 bastante cerca de 35400?

<u>Ejemplo 1</u>. Calcula aproximadamente $\sqrt{.00537}$.

$$\sqrt{.00537} = \sqrt{53.7}\sqrt{10^{-4}}$$

Ya que $$7 < \sqrt{53.7} < 8,$$

entonces, $$7 \times 10^{-2} < \sqrt{53.7}\sqrt{10^{-4}} < 8 \times 10^{-2},$$

$$.07 < \sqrt{.00537} < .08.$$

Como $\sqrt{53.7}$ está más cerca de 7 que de 8, escribimos

$$\sqrt{.00537} \approx .07.$$

Ejemplo 2. Calcula aproximadamente $\sqrt{546}$.

$$\sqrt{546} = \sqrt{5.46} \times \sqrt{10^2}$$

$$\approx 2 \times 10$$

$$\sqrt{546} \approx 20$$

Conjunto de problemas 11-5a

Halla una primera aproximación para cada uno de los siguientes radicales:

1. (a) $\sqrt{27}$ (b) $\sqrt{67}$ (c) $\sqrt{17}$ (d) $\sqrt{47}$ (e) $\sqrt{7}$
2. (a) $\sqrt{7900}$ (b) $\sqrt{.79}$ (c) $\sqrt{.000079}$ (d) $\sqrt{79}$
3. (a) $\sqrt{846}$ (b) $\sqrt{84600}$ (c) $\sqrt{.0846}$ (d) $\sqrt{84.6}$
4. (a) $\sqrt{2280000000}$ (b) $\sqrt{.000000053}$
5. (a) $\sqrt{19 \times 10^{-34}}$ (b) $\sqrt{77 \times 10^{16}}$

El próximo paso es derivar, de la primera aproximación tosca, una mejor aproximación. Para hallarla basta con trabajar a base solamente del primero de los dos factores obtenidos en nuestro procedimiento. (¿Por qué?)

Volvamos al ejemplo 1 anterior en el cual estimamos que 7 es el entero más próximo a $\sqrt{53.7}$.

Considera el producto $pq = 53.7$. Si $p = q$, entonces p (y también q) es $\sqrt{53.7}$. Si p es mayor que $\sqrt{53.7}$, entonces a fin de que pq sea todavía igual a 53.7, q debe ser menor que $\sqrt{53.7}$*. Vemos, pues, que $\sqrt{53.7}$ está entre p y q. Análogamente, si p es muy pequeño, q es muy grande, y la raíz cuadrada todavía está entre p y q.

En nuestro caso, sea $p = 7$; entonces $\frac{53.7}{7}$, que es aproximadamente 7.68, es el valor de q para el cual $pq = 53.7$. Conforme a nuestro planteamiento anterior, $\sqrt{53.7}$ está entre 7 y 7.68. Tomamos como siguiente aproximación un número que sea el término medio entre ellos. Por lo tanto, hallamos la media aritmética de p y q, o sea $\frac{p+q}{2}$.

En este caso $\frac{7 + 7.68}{2} = \frac{14.68}{2} = 7.34$.

Se puede mostrar que este nuevo número, 7.34, está mucho más cerca de $\sqrt{53.7}$ que nuestra primera aproximación, 7, y que es mayor que $\sqrt{53.7}$. Así, $7 < \sqrt{53.7} < 7.34$. En realidad, $7.32 < \sqrt{53.7} < 7.34$. Comprueba esto elevando al cuadrado 7.32 y 7.34.

Si necesitamos una aproximación aún mejor, podemos usar esta segunda, 7.34, como p, calcular $q = \frac{53.7}{p}$, y hallar la media aritmética de estos nuevos valores de p y q. Para simplificar los cálculos, redondeemos 7.34 a 7.3.

$$p = 7.3$$

$$q = \frac{53.7}{7.3} \approx 7.356$$

$$\frac{p+q}{2} \approx \frac{7.3 + 7.356}{2}$$

---

*Si $pq = 53.7$ y $p > \sqrt{53.7}$, entonces

$$pq > \sqrt{53.7}\, q,$$

$$53.7 > \sqrt{53.7}\, q,$$

$$\sqrt{53.7} > q.$$

$$\approx \frac{14.656}{2}$$

$$\approx 7.328$$

$$\sqrt{53.7} \approx 7.328$$

De ahí que, $\sqrt{.00537} \approx 7.328 \times 10^{-2}$,

$$\sqrt{.00537} \approx .07328.$$

En realidad, $.07328 < \sqrt{.00537} < .07329$. Quizás te gustaría ver lo cerca que cae esta aproximación; para ello cuadrarías .07328 y .07329.

Ejemplo 1. Halla una segunda aproximación de $\sqrt{763}$.

$$\sqrt{763} = \sqrt{7.63} \times \sqrt{10^2}$$

$$\approx 3 \times 10$$

aproxima	divide	promedia
p	$q = \frac{7.63}{p}$	$\frac{p+q}{2}$
3	2.54	2.77

$$\frac{3 + 2.54}{2} = \frac{5.54}{2} = 2.77$$

$$\sqrt{763} \approx 2.77 \times 10$$

$$\sqrt{763} \approx 27.7 \quad y \quad 27.6 < \sqrt{763} < 27.7.$$

Ejemplo 2. Halla una tercera aproximación de $\sqrt{.2138}$.

$$\sqrt{.2138} = \sqrt{21.38} \times \sqrt{10^{-2}}$$

$$\approx 5 \times 10^{-1}$$

aproxima	divide	promedia
p	$q = \frac{21.38}{p}$	$\frac{p+q}{2}$
5	4.28	4.64
4.6	4.648	4.624

$$\frac{5 + 4.28}{2} = \frac{9.28}{2} = 4.64$$

$$\frac{4.6 + 4.648}{2} = \frac{9.248}{2}$$

$$= 4.624$$

De ahí que $\sqrt{.2138} \approx 4.624 \times 10^{-1}$

$\sqrt{.2138} \approx .4624$ y $.4623 < \sqrt{.2138} < .4624$.

Resumen: Para efectuar un cálculo aproximado de $\sqrt{x}$, escribe primero dicha expresión como el producto de la raíz cuadrada de un número a entre 1 y 100 y una potencia par de 10;

$$\sqrt{x} = \sqrt{a}\,\sqrt{10^{2n}}$$

Segundo, determina un entero positivo p menor que 10 que sea la primera aproximación de $\sqrt{a}$. Para encontrar la segunda aproximación divide a por p para hallar q, $(q = \frac{a}{p})$, y determina la media aritmética de p y q. Este promedio, $\frac{p+q}{2}$, es la segunda aproximación para $\sqrt{a}$.

Entonces $\sqrt{x} \approx \frac{p+q}{2} \times 10^{n}$.

Efectúa la división $\frac{a}{p}$, hasta que el cociente tenga tres cifras, y recuerda que la tercera cifra puede no ser correcta. Si se desea mayor precisión, redondea la segunda aproximación $\frac{p+q}{2}$, hasta dos cifras y repite el procedimiento de dividir y hallar el promedio. Generalmente, la tercera aproximación así obtenida tendrá un error de no más de 1 ó 2 en la cuarta cifra. Con esto queremos decir que la diferencia entre $\sqrt{a}$ y su aproximación es menor que .002. Si todavía deseas una aproximación mejor, repetirás el procedimiento de dividir y hallar el promedio (pero sin redondear el divisor).

Cada nueva aproximación es mayor que el valor de la raíz cuadrada y cada una tendrá alrededor del doble de cifras correctas que la aproximación anterior.

¿Cómo sabemos que estos enunciados son generalmente ciertos? Los ejemplos numéricos anteriores ilustran un resultado que es posible <u>demostrar</u> aplicando las propiedades fundamentales de las operaciones.

Conjunto de problemas 11-5b

1. Calcula una segunda aproximación para cada uno de los siguientes:

(a) $\sqrt{796}$ (c) $\sqrt{0.0884}$ (e) $\sqrt{0.00580}$

(b) $\sqrt{73}$ (d) $\sqrt{304000}$ (f) $\sqrt{9999900}$

2. Calcula una tercera aproximación para cada uno de los siguientes:

(a) $\sqrt{0.00470}$ (d) $\sqrt{3.1416}$

(b) $\sqrt{0.273}$ (e) $\sqrt{70260}$

(c) $\sqrt{5280}$ (f) $\sqrt{502060}$

3. En una tabla de aproximaciones decimales de las raíces cuadradas de los enteros del 1 al 100, leemos lo siguiente:

$$\sqrt{72} \approx 8.485$$

$$\sqrt{8} \approx 2.828$$

Utiliza esta información para calcular una aproximación de:

(a) $\sqrt{0.0072}$ (d) $\sqrt{0.08}$

(b) $\sqrt{720000}$ (e) $\sqrt{800}$

(c) $\sqrt{.72}$ (f) $\sqrt{8,000,000}$

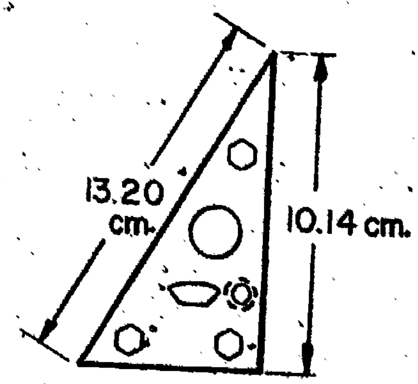
4. Calcula segundas aproximaciones para los elementos del conjunto de validez de cada una de las siguientes ecuaciones:

(a) $x^2 = 0.0124$ (b) $x^2 - 519 = 0$

5. Los estudiantes que asisten a la Escuela Superior Lincoln tienen la costumbre de atajar atravesando un solar vacío que hay cerca de la escuela, en vez de seguir la acera que va por la esquina. El solar es rectangular, de 200 pies por 300 pies, y el atajo sigue una línea recta desde una esquina del solar hasta la esquina opuesta. Halla, con aproximación de un pie, la longitud del atajo.

6. Una escalera de catorce pies de largo descansa contra una pared vertical, y su extremo inferior se encuentra a siete pies de la base de la pared. Determina la altura a la cual la escalera se apoya en la pared. ¿Qué aproximación cabe esperar de tu cálculo en este caso?

7. Una pieza de una máquina tiene la forma de un triángulo rectángulo con hipotenusa de 13.20 centímetros y un cateto de 10.14 centímetros de largo. Calcula la longitud del otro cateto hasta una tercera aproximación.



Problemas de repaso

1. Simplifica las siguientes expresiones e indica el dominio de la variable cuando esté restringido:

(a) $\sqrt{12}$ (d) $\sqrt{\frac{16}{3}}$ (g) $\sqrt{8} - \sqrt{18}$

(b) $\frac{1}{\sqrt{36}}$ (e) $\sqrt{18x^2}$ (h) $(a^2bc)(ab^2c)$

(c) $\sqrt{8a}$ (f) $\sqrt{6}\sqrt{24}$ (i) $\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$

2. Simplifica las siguientes expresiones e indica el dominio de la variable cuando esté restringido:

(a) $\sqrt{48} - \sqrt{75} + \sqrt{12}$ (d) $(3^a)(2^b)$ (g) $\sqrt[3]{54}$

(b) $\sqrt{5}\sqrt{20}$ (e) $\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{8}}$ (h) $-\sqrt{32x^3y}$

(c) $\sqrt{4(a+b)^2}$ (f) $\sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{6})$ (i) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + 1$

3. Simplifica las siguientes expresiones e indica el dominio de la variable cuando esté restringido:

(a) $2\sqrt{12a^2} - \frac{3|a|}{\sqrt{3}} - \frac{1}{4}\sqrt{48a^2}$

(b) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

(c) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

(d) $\sqrt{\frac{4m^2}{q}} + \sqrt{98m^2q^3}$

(e) $\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{5}{6}}\sqrt{\frac{3}{2}}$

(f) $\frac{1}{\sqrt[3]{250x}}$

(g) $\sqrt{3p}\sqrt{6p^3}$

(h) $\sqrt[3]{\frac{1}{4a}} - \sqrt[3]{16a^5}$

(i) $\sqrt{4a^2 + 4b^2}$

4. Resuelve las siguientes:

(a) $\sqrt{x} = 2$

(b) $\sqrt[3]{n} = 4$

(c) $y^2 = 2$

(d) $m^2 \leq 16$

(e) $3 = \sqrt{t+1}$

(f) $2|x| + \sqrt{x^2} = 3$

5. En cada uno de los ejercicios siguientes, escribe uno de los símbolos $<$, $=$, $>$ entre las dos frases, de manera que resulte un enunciado cierto:

(a) $\frac{1}{x} + \frac{2}{3x}$, $\frac{1}{3}$, para $x = 5$

(b) $x + \sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, para $x > 0$

(c) $\sqrt{a^2 + b^2}$, $(a + b)$, para $a > 0$ y $b > 0$

(d) $\sqrt[4]{3^2}$, $\sqrt{3}$

(e) $(\sqrt{m} + \sqrt{n})(\sqrt{m} - \sqrt{n})$, $(m - n)$, para $m > 0$ y $n > 0$

(f) $(|x| + 5\sqrt[3]{125})$, $(-x^3)$, para $x = 25$

(g) $\sqrt{\frac{3^2 \cdot 5^2}{256}}$, $7\sqrt{\frac{1}{8}}$

6. Calcula la segunda aproximación de $\sqrt{390}$.

7. Calcula la tercera aproximación de $\sqrt{3900}$.

8. Escribe como potencias de numerales simples, si es posible:

(a) $3^2 \cdot 3^3$

(b) $3^2 \cdot 2^2$

(c) $3^2 \cdot 2^3$

(d) $3^3 + 3^3 + 3^3$

(e) $3^4 + 3^4 + 3^4$

(f) $3^2 + 2^2$

9. Expresa como potencias de 10 (n es un entero):

(a) $10^{-2} \times 10^2$

(b) $\frac{10^3 \times 10^{-1}}{10^1}$

(c) $10^n \times 10^2$

(d) $\frac{10^5 \times 10^{-3}}{10^{-2}}$

(e) $10^{-3} \times 10^{-5} \times 10^3$

(f) $(10^{2n})^3$

10. Simplifica las siguientes expresiones (suponiendo que ninguna de las variables toma el valor cero):

(a) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}}$

(b) $\frac{\frac{b^3}{2}}{\frac{b}{6}}$

(c) $\frac{\frac{mn}{q^2}}{\frac{2nq}{m^2}}$

(d) $\frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{3}}{\frac{5}{12}}$

(e) $\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$

(f) $\frac{\frac{x + 3}{2}}{\frac{x(x + 3)}{3}}$

11. Resuelve:

(a) $\frac{1}{3}x - 1 > \frac{1}{2}x$

(b) $\frac{8 - x}{3} = \frac{10x}{6}$

(c) $\frac{y}{3} + \frac{y}{5} < 1$

(d) $|m| - \frac{3}{20} = \frac{1}{5}|m|$

(e) $(q + 3)^2 = q^2 + 21$

(f) $\frac{x - 3}{x + 2} = \frac{x - 2}{x + 1}$

12. Una expresión notable que nos da muchos números primos es

$$n^2 - n + 41.$$

Si n es cualquier número del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 40\}$, el valor de la expresión es un número primo, pero si n es 41, la expresión no da un número primo. Explica por qué no. Si un enunciado algebraico es cierto para los primeros 400 valores de la variable, ¿será necesariamente cierto para el valor siguiente?

13. Un procedimiento que a veces se utiliza para economizar tiempo al calcular la media aritmética de números grandes es estimar un promedio, promediar las diferencias entre las cantidades y ese promedio y añadir ese número a la estimación original. Así, al calcular la media aritmética de, digamos las notas de tus exámenes, que han sido $78, 80, 76, 72, 85, 70, 90$, podríamos tomar 80 como una estimación razonable de la media. Determinamos ahora la diferencia entre cada uno de los números y 80.

$$78 - 80 = -2$$
$$80 - 80 = 0$$
$$76 - 80 = -4$$
$$72 - 80 = -8$$
$$85 - 80 = 5$$
$$70 - 80 = -10$$
$$90 - 80 = 10$$

La suma de todas las diferencias es -9. La media aritmética de éstas es $-\frac{9}{7}$. Sumando este resultado a 80, obtenemos $78\frac{5}{7}$ como el promedio requerido. ¿Podrías explicar por qué funciona este procedimiento?

En cierta universidad se publicó la siguiente lista de los pesos de los futbolistas: $195, 205, 212, 201, 198, 232, 189, 178, 196, 204, 182$. Determina el peso medio del equipo mediante el procedimiento anterior.

14. A un ratón que pesa x gramos lo alimentaron con una dieta nutritiva y aumentó 25% de su peso. Luego se le puso a una dieta pobre y perdió el 25% de su peso. Halla la diferencia entre el número de gramos que pesaba al comienzo y al final del experimento.

15. Un hombre necesitaba 7 galones de pintura para pintar su casa y compró tres veces más pintura gris a $\$6$ el galón que pintura blanca a $\$7$ el galón. Si la cuenta por la pintura fue menor de $\$50$, halla cuántos galones de pintura compró de cada

color. (Supone que la pintura se vende en recipientes no menores de un cuartillo.)

16. Demuestra: Si $a > 0$, $b > 0$ y $a > b$, entonces $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

Sugerencia: Utiliza la propiedad de comparación en una demostración indirecta.

Capítulo 12

POLINOMIOS Y EXPRESIONES RACIONALES

12-1. Polinomios y factorización

En el capítulo 10 vimos que es muy ventajoso el poder expresar un numeral en forma factorial. Consideremos, por ejemplo, el número 288. El nombre corriente de este número es en realidad una abreviatura de "$2(100) + 8(10) + 8$". Gran parte de la aritmética referente al número se basa sobre esta forma. También tenemos la forma factorial "$2^5 \cdot 3^2$". ¿Qué forma utilizarías si necesitas averiguar si 288 es o no un cuadrado perfecto? ¿Y si quisieras obtener la expresión más sencilla de $\sqrt{288}$? En el álgebra, la forma factorial de un entero positivo es con frecuencia la más conveniente.

Puesto que la descomposición factorial de los enteros en factores primos ha resultado ser tan útil, es natural tratar de averiguar si podemos análogamente presentar las expresiones algebraicas en "forma factorial", esto es, como productos indicados de frases más simples. Ya has hecho problemas de esta clase. ¿Qué propiedades de los números reales nos permiten escribir, para cualquier número real x,

$$3x^2 + x = x(3x + 1)?$$

También podríamos escribir $3x^2 + x$ en la forma factorial

$$3x^2 + x = (x^2 + 1) \cdot \frac{3x^2 + x}{x^2 + 1}.$$

¿Por qué no es esta última forma tan interesante como la primera? Una razón es que el factor "$\frac{3x^2 + x}{x^2 + 1}$" es más complicado que la expresión dada: incluye una división, mientras que "$3x^2 + x$"

sólo contiene sumas y productos. Recordemos nuestro estudio de los enteros positivos; era útil factorizar enteros positivos sobre los enteros positivos, pero no sobre los racionales o los reales.

¿Qué tipo de expresión correspondería ahora a un entero positivo? Con otras palabras, ¿para qué tipos de expresiones será interesante el problema de factorización? Ciertamente, frases como $3x^2 + x$, x, $3x + 1$, deben ser aceptadas mientras que frases tales como $\frac{3x^2 + x}{x^2 + 1}$ serían excluidas.

Examinemos más detenidamente la forma de la frase

$$3x^2 + x.$$

Contiene el entero 3, la variable x, y operaciones indicadas de suma y multiplicación. Por otro lado, la frase

$$\frac{3x^2 + x}{x^2 + 1}$$

contiene los enteros 3 y 1, la variable x, y operaciones indicadas de suma, multiplicación y división. Como vemos, la diferencia esencial entre dichas frases es que la segunda contiene la división en tanto que la primera no.

Nos vemos así orientados hacia una definición general de frases como "$3x^2 + x$".

> Una frase formada con enteros y variables, y sin más operaciones indicadas que la suma, resta, multiplicación y la toma de opuestos, se llama <u>polinomio sobre los enteros</u>.

Si la frase contiene sólo una variable, digamos x, tenemos un <u>polinomio en x</u>. Así, "$3x^2 + x$", "$3x + 1$", "x" son polinomios en x sobre los enteros.

Más adelante extenderemos nuestro estudio actual a polinomios sobre los números reales, pero por ahora "polinomio" significará "polinomio sobre los enteros".

Conjunto de problemas 12-1a

En los problemas 1 y 2, ¿cuáles son polinomios sobre los enteros?

1. (a) $3t + 1$
   (b) $t + \frac{1}{3}$
   (c) $3a^2b$
   (d) 2
   (e) $(x - 2)(x + 3)$
   (f) $\frac{3}{2}$
   (g) $rq - \sqrt{2}$
   (h) $|x| + 1$

2. (a) $(s + 5)(t - 1)u$
   (b) $\frac{2}{3}(x - 4)$
   (c) $2(x - 1) + x(x - 1)$
   (d) $(3x - y + 7)^3$
   (e) $\frac{x + 1}{x - 1}$
   (f) $\frac{x + y}{2}$
   (g) $\frac{x^2}{a^2} + 2\frac{x}{a} + 1$
   (h) $\frac{3s(u + v)}{s}$

En los problemas 3 y 4, simplifica efectuando las multiplicaciones indicadas y reduciendo términos. ¿Es siempre el resultado un polinomio sobre los enteros?

3. (a) $2x(x - 2)$
   (b) $xy(x - 2y)$
   (c) $(t - 2)(t + 3)$
   (d) $(-3xy^2)(\frac{3}{4}x^2y)z$
   (e) $(u + \frac{1}{2})(u - \frac{1}{2})$
   (f) $(x + 2)(x + 2)$
   (g) $(3t - 8)(6t + 11)$
   (h) $2(y - 1) + y(y - 1)$

4. (a) $(s^2 - 1) - (s + 1)(s - 1)$

(b) $(a + \sqrt{2})(a - \sqrt{2})$

(c) $3s(u + v)$

(d) $3u(u + \frac{1}{3}) - uv$

(e) $2(s + 1) - 6st$

(f) $(x - 2y + 1)(2x + y - 2)$

5. ¿Son siempre polinomios sobre los enteros las sumas y productos indicados de polinomios sobre los enteros?

6. ¿Podría un cociente indicado de dos polinomios ser en algún caso un polinomio? ¿Podría en algún caso tal cociente ser simplificado de modo que sea un polinomio? Da un ejemplo.

Volvamos al problema de la factorización de expresiones que nos condujo en primer lugar a considerar polinomios. De igual modo que el problema de la factorización de números era más interesante cuando se limitaba a enteros positivos, así en el caso de las expresiones, el problema de descomponer en factores resulta más interesante cuando se restringe a los polinomios.

Recordemos la expresión "$3x^2 + x$" que consideramos al principio de esta sección. Es un polinomio sobre los enteros y vimos que la propiedad distributiva podría utilizarse para escribirlo en la forma factorial

$$3x^2 + x = x(3x + 1).$$

Puesto que "x" y "$3x + 1$" son también polinomios sobre los enteros, decimos que hemos <u>factorizado un polinomio</u> sobre los enteros.

Esto sugiere una explicación de nuestra oposición a aceptar la descomposición

$$3x^2 + x = (x^2 + 1)\frac{3x^2 + x}{x^2 + 1}.$$

Queremos que los factores de "$3x^2 + x$" sean frases de la misma clase que "$3x^2 + x$", es decir, polinomios. Así, pues,

el problema de factorización consiste en expresar un polinomio dado como un producto indicado de polinomios.

Lo mismo que en el caso de los enteros positivos, también aquí deseamos llevar a cabo el proceso de factorización de polinomios tan lejos como sea posible, es decir, hasta que los factores finalmente obtenidos no puedan ya ser descompuestos en polinomios "más simples".

La factorización puede considerarse como el proceso inverso de lo que hemos llamado "simplificación". Por ejemplo, dado el polinomio

$$x(3x + 5y)(2y - x),$$

lo "simplificamos" efectuando las multiplicaciones indicadas y reduciendo términos semejantes, obteniéndose así el polinomio

$$-3x^3 + x^2y + 10xy^2.$$

Por otra parte, para factorizar el polinomio

$$-3x^3 + x^2y + 10xy^2,$$

debemos en cierto modo invertir los pasos seguidos en la simplificación hasta obtener

$$x(3x + 5y)(2y - x).$$

Examinando cuidadosamente el proceso de simplificar productos indicados, lograremos en este capítulo obtener técnicas para tratar los problemas de este tipo.

Observa que el polinomio obtenido mediante la simplificación anterior es una suma de términos, cada uno de los cuales es también un polinomio. Un polinomio en el que figuran a lo más productos indicados y el tomar opuestos se llama un monomio. Por consiguiente, cada uno de los términos $-3x^3$, x^2y, $10xy^2$ es un monomio, y hemos escrito el polinomio dado como una suma de monomios. Todo polinomio puede escribirse de esta manera como una suma de monomios.

Cuando un polinomio en <u>una variable</u> se escribe como una suma de monomios, decimos que su <u>grado</u> es el mayor exponente de las potencias de la variable en los monomios. Así, por ejemplo,

$$3x^2 - 2x + 4$$

es un polinomio de grado dos. También decimos que "3" es el <u>coeficiente</u> de x^2, "-2" es el <u>coeficiente</u> de x, y "4" es el término <u>constante</u>. Un polinomio de grado dos se llama <u>polinomio cuadrático</u>.

Al factorizar polinomios en una variable, nuestro objetivo es obtener factores polinómicos del menor grado posible.

<u>Conjunto de problemas 12-1b</u>

En los problemas 1, 2 y 3, indica cuáles son ejemplos de factorización de polinomios sobre los enteros:

1. (a) $ax + 2ay = a(x + 2y)$
   (b) $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$
   (c) $s^2 - 3 = (s + \sqrt{3})(s - \sqrt{3})$
   (d) $3t - 5 = 3(t - \frac{5}{3})$
   (e) $a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2$
   (f) $9y^2 - 4 = (3y + 2)(3y - 2)$

2. (a) $u - 9 = (\sqrt{u} + 3)(\sqrt{u} - 3)$
   (b) $r^3 - 3s^2 = (t^2 + 1)\frac{r^3 - 3s^2}{t^2 + 1}$
   (c) $3x^3y^2 - 2x^2y^3 = (3x - 2y)x^2y^2$
   (d) $a(c + d) - b(c + d) = (a - b)(c + d)$
   (e) $t^2 - 1 = (|t| + 1)(|t| - 1)$
   (f) $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$

3. (a) $3x(y^2 + 1) - 2z(y^2 + 1) = (y^2 + 1)(3x - 2z)$

(b) $h^2 - h + \frac{1}{4} = (h - \frac{1}{2})^2$

(c) $3rs + 5r - 10st - 6t = r(3s + 5) - 2t(5s + 3)$

(d) $ac + ad - bc - bd = a(c + d) - b(c + d)$

(e) $a^2x^2 + ax + 1 = a^2\left((\frac{x}{a})^2 + (\frac{x}{a}) + (\frac{1}{a})^2\right)$

4. Verifica si las factorizaciones en los problemas 1, 2 y 3 son correctas, efectuando en cada caso las multiplicaciones indicadas a la derecha.

5. ¿Cuáles de los polinomios siguientes están en forma factorial?

(a) $(x - 3)(x - 2)$

(b) $(x - 3) + (x - 2)$

(c) $(x - 3)x - 2$

(d) $(x - 3)(x - 2)(x - 1) + (x - 1)$

(e) $(x + y + z)(x - y - z)$

(f) $3z(z + 1) - 2z$

En los problemas 6, 7 y 8, utiliza la propiedad distributiva, si es posible, para factorizar tan completamente como puedas, los polinomios siguientes:

6. (a) $a^2 + 2ab$

(b) $3t - 6$

(c) $ab + ac$

(d) $3x(xz - yz)$

(e) $ax - ay$

(f) [illegible] $- 12q + 30$

7. (a) $z^3 + z$

(b) $15a^2 - 30b$

(c) $x^2 - x^4$

(d) $a^3 - 2a^2 + 3a$

(e) $6x^2 - 144y - 150$

(f) $3xy + y(x - 3)$

8. (a) $2(z + 1) - 6zw$ (e) $(6r^2s)x - (6r^2s)y$
(b) $a^3b^3 + a^2b^4 - a^2b^3$ (f) $(u^2 + v^2)x - (u^2 + v^2)y$
(c) $3ab + 4bc - 4ac$ (g) $x(4x - y) - y(4x - y)$
(d) $abx - aby$ (h) $36a^2b^2c^2$

9. ¿Cuál es el grado de cada uno de los siguientes polinomios?
(a) $3x + 2$, $5 - x$, $(3x + 2)(5 - x)$
(b) $x^2 - 4$, $2x + 1$, $(x^2 - 4)(2x + 1)$
(c) $2x^3 - 5x^2 + x$, x^2, $x^2(2x^3 - 5x^2 + x)$
(d) 1, $7x^5 - 6x + 2$, $1\cdot(7x^5 - 6x + 2)$
(e) $x^2 - 3x - 7$, $(x^2 - 3x - 7)^2$
(f) ¿Qué puedes decir acerca del grado del producto de dos polinomios, si conoces los grados de éstos?

12-2. Factorización mediante la propiedad distributiva

En muchas de las aplicaciones de la propiedad distributiva que hemos visto en capítulos anteriores, transformábamos productos indicados en sumas indicadas y sumas indicadas en productos indicados. La última transformación es realmente una factorización y nos proporciona una importante técnica para descomponer en factores ciertos polinomios. Ya vimos en la sección anterior algunos ejemplos sencillos. Ahora consideraremos ejemplos más complicados.

Ejemplo 1. $4t^2 - 6t^4$. Este es un polinomio en t. Empleando la propiedad distributiva, podemos escribir

$$4t^2 - 6t^4 = 2t^2(2 - 3t^2).$$

Ejemplo 2. $6a^3b^2 - 3a^2b^3$. Este es un polinomio en dos variables, a y b. La propiedad distributiva nos permite escribirlo de varias maneras, algunas de las cuales son

$$\text{(i)}\quad 3(2a^3b^2 - a^2b^3)$$

$$\text{(ii)}\quad ab(6a^2b - 3ab^2)$$

$$\text{(iii)}\quad 3a^2(2ab^2 - b^3)$$

$$\text{(iv)}\quad 3a^2b^2(2a - b).$$

En cada caso hemos factorizado el polinomio en polinomios. ¿Qué forma es la más simple? En las formas (i), (ii), (iii) todavía se puede utilizar la propiedad distributiva para descomponer aún más. En el caso (iv) la factorización es completa.

<u>Ejemplo 3</u>. $5(z - 2) + (z^2 - 2z)$. Este es un polinomio en una variable z sobre los enteros. Primero escribiremos

$$5(z - 2) + (z^2 - 2z) = 5(z - 2) + z(z - 2).$$

Después, comparando con la forma de la propiedad distributiva, tenemos

$$\begin{array}{ccccc} ac & + & bc & = & (a + b)\,c \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 5(z - 2) & + & z(z - 2) & = & (5 + z)(z - 2). \end{array}$$

Observa cómo identificamos c con $(z - 2)$ considerado éste como <u>un solo</u> número. La propiedad distributiva se ha usado dos veces, primero para obtener $z^2 - 2z = z(z - 2)$ y luego al escribir $5(z - 2) + z(z - 2)$ como el producto indicado $(5 + z)(z - 2)$.

Hemos visto muchas aplicaciones de la forma factorial de un entero. Análogamente encontraremos muchas también para la forma factorial de un polinomio.

<u>Ejemplo 4</u>. Resuelve $5(z - 2) + (z^2 - 2z) = 0$.

El resultado del ejemplo 3 nos dice que, para cualquier número real z,

$$5(z - 2) + (z^2 - 2z) = (5 + z)(z - 2).$$

Por tanto, una ecuación equivalente es

$$(5 + z)(z - 2) = 0.$$

El conjunto de validez de esta ecuación es $\{-5, 2\}$. (¿Por qué?) Observa cómo la factorización nos ayudó a resolver la ecuación.

Conjunto de problemas 12-2a

Factoriza cada una de las siguientes expresiones hasta donde te sea posible, utilizando la propiedad distributiva. ¿Qué casos ilustran la factorización de polinomios sobre los enteros?

1. $3x(2xz - yz)$
2. $6s^2t - 3stu$
3. $144x^2 - 216s + 180y$. ¿Qué has aprendido ya acerca de los enteros que te permita hallar el mayor factor común en este ejemplo?
4. $\frac{6}{5}u^2v - \frac{9}{5}uv^2 + 3v^2$
5. $-x^3y^2 + 2x^2y^2 + xy^2$
6. $\frac{1}{6}ab + \frac{5}{18}a^2b - \frac{7}{12}ab^2$
7. $s\sqrt{3} + s^2\sqrt{6}$
8. $\frac{a^2}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{2ab}{3\sqrt{2}}$
9. $3ab + 4bc - 5ac$
10. $a(x - 1) + 3(x - 1)$
11. $(x + 3)^2 - 2(x + 3)$
12. $(u + v)x - (u + v)y$
13. $(a - b)a + (a - b)b$
14. $(x + y)(u - v) + (x + y)v$
15. $(r - s)(a + 2) + (s - r)(a + 2)$
16. $3x(x + y) - 5y(x + y) + (x + y)$

17. $6a\sqrt[3]{2} + 15ab\sqrt[3]{2}$
18. $3|x| + 2a|x|$
19. $7y\sqrt{x^2} - 21y^2|x|$
20. $r(u + v) - (u + v)s$
21. $(a + b + c)x - (a + b + c)y$
22. $(a + b + c)(x + y) - (a + b + c)y$

La propiedad distributiva nos ha permitido descomponer polinomios tales como $x^2 + bx$ y $ax + ab$ en

$$x^2 + bx = x(x + b)$$

y

$$ax + ab = a(x + b),$$

respectivamente. Consideremos ahora el polinomio

$$x^2 + bx + ax + ab.$$

Verás que podemos factorizar la suma de los dos primeros términos, es decir, $x^2 + bx$, y la suma de los dos últimos, $ax + ab$. Así que,

$$\begin{aligned} x^2 + bx + ax + ab &= (x^2 + bx) + (ax + ab) \\ &= x(x + b) + a(x + b). \end{aligned}$$

Hemos logrado escribir la suma dada de cuatro términos como una suma de dos términos que tienen un factor común, $(x + b)$. Aplicando la propiedad distributiva por tercera vez, obtenemos

$$\begin{aligned} rt \quad + \quad st \quad &= (r + s)\;t \\ x(x + b) + a(x + b) &= (x + a)(x + b), \\ x^2 + bx + ax + ab &= (x + a)(x + b). \end{aligned}$$

La factorización tal como la acabamos de hacer, por <u>agrupación de términos</u>, depende de la disposición de los términos:

Por ejemplo, consideremos la disposición $x^2 + ab + bx + ax$. Esto se puede escribir así:

$$x^2 + ab + bx + ax = (x^2 + ab) + (b + a)x.$$

En esta forma, sin embargo, no hay un factor común en los dos términos, y, por tanto, no nos conduce a una factorización del polinomio dado. (¿Por qué?)

<u>Ejemplo 5</u>. Factoriza $x^2 + 4x + 3x + 12$.

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 3x + 12 &= (x^2 + 4x) + (3x + 12) \\ &= x(x + 4) + 3(x + 4). \end{aligned}$$

$$a\,c + b\,c = (a + b)\,c$$

$$x(x + 4) + 3(x + 4) = (x + 3)(x + 4).$$

De modo que,

$$x^2 + 4x + 3x + 12 = (x + 3)(x + 4).$$

Una vez más, observa cómo $(x + 4)$ se trata como un solo número al aplicar por última vez la propiedad distributiva.

<u>Ejemplo 6</u>. Factoriza $xz - 8z + x - 8$.

$$\begin{aligned} xz - 8z + x - 8 &= (xz - 8z) + (x - 8) \\ &= (x - 8)z + (x - 8)\cdot 1 \\ &= (x - 8)(z + 1). \end{aligned}$$

Tratemos con otra agrupación de los términos:

$$\begin{aligned} xz - 8z + x - 8 &= xz + x - 8z - 8 \\ &= (xz + x) - (8z + 8) \\ &= x(z + 1) - 8(z + 1) \\ &= (x - 8)(z + 1). \end{aligned}$$

<u>Ejemplo 7</u>. Factoriza $2st + 6 - 3s - 4t$.

$$\begin{aligned} 2st + 6 - 3s - 4t &= (2st + 6) - (3s + 4t) \\ &= 2(st + 3) - (3s + 4t) \end{aligned}$$

Esta agrupación no nos lleva a ninguna parte. Quizás otra sería mejor. Observa que $2st$ y $-3s$ tienen un factor común s, y los términos restantes 6 y $-4t$ tienen el factor común 2. Por consiguiente, ensayamos

$$\begin{aligned} 2st + 6 - 3s - 4t &= 2st - 3s - 4t + 6 \\ &= s(2t - 3) - 2(2t - 3) \\ &= (s - 2)(2t - 3). \end{aligned}$$

De todo lo dicho hasta ahora, no debemos concluir que <u>todos</u> los polinomios de esta clase puedan ser factorizados siguiendo el método de los ejemplos 5, 6, 7. Algunos polinomios que se parecen a los considerados, sencillamente no pueden factorizarse, independientemente de la agrupación. Por ejemplo, trata de factorizar $2st + 6 - 3s - 2t$.

<u>Conjunto de problemas 12-2b</u>

Factoriza cada uno de los siguientes polinomios, considerando polinomios sobre los enteros mientras sea posible:

1. $ax + 2a + 3x + 6$
2. $ux + vx + uy + vy$
3. $2ab + a^2 + 2b + a$
4. $3rs - 3s + 5r - 5$
5. $5x + 3xy - 3y - 5$
6. $3a + 15b - 3a - 15b$
7. $a^2 - ab + ac - bc$
8. $t^2 - 4t + 3t - 12$
9. $p^2 - pq + mp + mq$
10. $2a^2 - 2ab\sqrt{3} - 3ab + 3b^2\sqrt{3}$
11. $15ax + 12bx - 9cx + 6dx$
12. $2a - 2b + ua - ub + va - vb$ (Trata de formar tres grupos de a dos términos cada uno.)
13. $xu + xv - xw + yu + yv - yw$ (Trata de formar dos grupos de a tres términos cada uno.)

14. $a^2 - 4ax + 2ab + 3ac - 12cx - 8bx$

15. $\frac{1}{2}axy - a^2y + \frac{1}{6}abx - \frac{1}{3}a^2b$

16. $x^2 + 4x + 3$ (Observa que $4x = 3x + x$.)

17. $a^2 - b^2$ (Observa que $a^2 - b^2 = a^2 - ab + ab - b^2$.)

12-3. Diferencia de cuadrados

Consideremos, para cualquier par de números reales a y b, el producto

$$\begin{aligned}(a + b)(a - b) &= (a + b)a - (a + b)b \\ &= a^2 + ba - ab - b^2 \\ &= a^2 - b^2.\end{aligned}$$

Esto muestra que el producto de la suma y la diferencia de dos números reales cualesquiera es igual a la diferencia de sus cuadrados.

Ejemplo 1. Halla el producto de la suma y la diferencia de 20 y 2.

$$\begin{aligned}(20 + 2)(20 - 2) &= (20)^2 - (2)^2 \\ &= 400 - 4 \\ &= 396.\end{aligned}$$

Ejemplo 2. Halla el producto de la suma y la diferencia de $2x$ y $3y$.

$$\begin{aligned}(2x + 3y)(2x - 3y) &= (2x)^2 - (3y)^2 \\ &= 4x^2 - 9y^2.\end{aligned}$$

Consideremos el problema anterior desde otro punto de vista. Si nos dan el polinomio $a^2 - b^2$, entonces sabemos que

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Es decir, una diferencia de cuadrados se puede factorizar en un producto de una suma y una diferencia. Sabido esto, podemos siempre factorizar un polinomio si es posible escribirlo previamente como una diferencia de cuadrados. Así, en el ejemplo 2, si nos dan $4x^2 - 9y^2$, podemos escribir

$$\begin{aligned} 4x^2 - 9y^2 &= (2x)^2 - (3y)^2 \\ &= (2x + 3y)(2x - 3y). \end{aligned}$$

<u>Ejemplo 3</u>. Factoriza $8y^2 - 18$.

Usando la propiedad distributiva, tenemos

$$8y^2 - 18 = 2(4y^2 - 9).$$

En esta forma vemos que un factor es una diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned} 4y^2 - 9 &= (2y)^2 - (3)^2 \\ &= (2y + 3)(2y - 3). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$8y^2 - 18 = 2(2y + 3)(2y - 3).$$

<u>Ejemplo 4</u>. Factoriza $3a^2 - 3ab + a^2 - b^2$.

Agrupando convenientemente, escribiremos

$$\begin{aligned} 3a^2 - 3ab + a^2 - b^2 &= (3a^2 - 3ab) + (a^2 - b^2) \\ &= 3a(a - b) + (a + b)(a - b) \\ &= (3a + (a + b))(a - b) \\ &= (3a + a + b)(a - b) \\ &= (4a + b)(a - b). \end{aligned}$$

<u>Ejemplo 5</u>. Resuelve la ecuación $9x^2 - 4 = 0$.

Puesto que $9x^2 - 4 = (3x + 2)(3x - 2)$ para todo número real x, la ecuación dada es equivalente a:

$$(3x + 2)(3x - 2) = 0.$$

Además, para x real, $(3x + 2)(3x - 2) = 0$ si y sólo si $3x + 2 = 0$ ó $3x - 2 = 0$. Por consiguiente, el enunciado

"$9x^2 - 4 = 0$" es equivalente al enunciado "$3x = 2$ ó $3x = -2$", y el conjunto de validez de la ecuación $9x^2 - 4 = 0$ es $\{\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\}$.

Conjunto de problemas 12-3

1. Efectúa las operaciones indicadas.

(a) $(a - 2)(a + 2)$
(b) $(2x - y)(2x + y)$
(c) $(mn + 1)(mn - 1)$
(d) $(3xy - 2z)(3xy + 2z)$
(e) $(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$
(f) $(x - a)(x - a)$
(g) $(2x - y)(x + 2y)$
(h) $(r^2 - s)(r + s^2)$

2. Factoriza los polinomios siguientes sobre los enteros si es posible:

(a) $4x^2 - 1$
(b) $81 - 9y^2$
(c) $a^2 - 4$
(d) $1 - n^2$
(e) $25x^2 - 9$
(f) $16x^2 - 4y^2$

3. Factoriza los polinomios siguientes sobre los enteros si es posible:

(a) $25a^2 - b^2c^2$
(b) $20s^2 - 5$
(c) $24y^2 - 6z^2$
(d) $16x^3 - 4x$
(e) $16x^2 - 4$
(f) $49x^4 - 1$

4. Factoriza los polinomios siguientes sobre los enteros si es posible:

(a) $x^2 - 4$
(b) $x^2 - 3$
(c) $x^4 - 4$
(d) $x^2 + 4$
(e) $3x^2 - 3$
(f) $16x^4 - 1$

5. Factoriza los polinomios siguientes sobre los enteros si es posible:

(a) $(a - 1)^2 - 1$
(b) $(a - 1)^2 - (a - 2)^2$
(c) $(m + n)^2 - (m - n)^2$
(d) $(m + n)^2 - (m + n)^2$
(e) $(x^2 - y^2) - (x - y)$
(f) $x - y + y^2 - x^2$

6. Resuelve las ecuaciones:

(a) $x^2 - 9 = 0$
(b) $9r^2 = 1$
(c) $75s^2 - 3 = 0$
(d) $2x^2 = 8$
(e) $4t^3 - t = 0$
(f) $x^2 + 4 = 0$
(g) $y^4 - 16 = 0$
(h) $(s + 2)^2 - 9 = 0$

7. Factoriza $20^2 - 1$.

Solución: $20^2 - 1 = 20^2 - 1^2$ (¿Por qué?)

$= (20 - 1)(20 + 1)$ (¿Por qué?)

$= 19 \cdot 21$.

¿Te das cuenta de cómo podrías proceder en sentido inverso? Supónte que te piden calcular mentalmente (19)(21). ¿Sería más fácil calcular $20^2 - 1$?

Calcula mentalmente:

(a) (22)(18)
(b) (37)(43)
(c) (26r)(34)
(d) (23x)(17y)
(e) (101)(99)
(f) (40m)(50n)
(g) $(36(m + n))(44(m - n))$
(h) (6)(6)(4)(11)

8. (a) ¿Puede 899 ser un número primo? (Sugerencia: $899 = 30^2 - 1$)
(b) ¿Puede 1591 ser un número primo?
(c) ¿Puedes decir algo acerca de los factores de 391?
(d) ¿Puedes decir algo acerca de los factores de 401?

*9. ¿A qué es igual $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})$? Una vez más, puesto que tenemos la suma y la diferencia de los mismos dos números, la expresión resulta ser igual a $(2)^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1$. Podemos aplicar esto para racionalizar el denominador en

$$\frac{1}{2 - \sqrt{3}}.$$

Por la propiedad multiplicativa del 1,

$$\frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$$

$$= \frac{2 + \sqrt{3}}{1} = 2 + \sqrt{3}.$$

¿Qué nos dice esto acerca del recíproco de $2 - \sqrt{3}$? ¿Y del de $2 + \sqrt{3}$?

Racionaliza el denominador:

(a) $\frac{2}{5 + \sqrt{2}}$ (b) $\frac{3 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}$ (c) $\frac{-6}{2 + \sqrt{4}}$ (d) $\frac{3}{\sqrt{6} - \sqrt{5}}$.

*10. Factoriza cada una de las siguientes expresiones:

(a) $a^3 + b^3 = a^3 - ab^2 + ab^2 + b^3$

$$= a(a^2 - b^2) + (a + b)b^2$$

$$= a(a + b)(a - b) + (a + b)b^2$$

$$= (a + b)(a(a - b) + b^2)$$

$$= (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

(b) $t^3 + 1$

(c) $s^3 + 8$

(d) $27x^3 + 1$

*11. Factoriza cada una de las siguientes expresiones:

(a) $a^3 - b^3 = a^3 - ab^2 + ab^2 - b^3$

$$= a(a^2 - b^2) + (a - b)b^2$$
$$= a(a - b)(a + b) + (a - b)b^2$$
$$= (a - b)(a(a + b) + b^2)$$
$$= (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

(b) $t^3 - 1$

(c) $s^3 - 8$

(d) $8x^3 - 1$

12-4. Cuadrados perfectos

Para a y b números reales cualesquiera, considera el producto

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$
$$= (a + b)a + (a + b)b$$
$$= a^2 + ba + ab + b^2$$
$$= a^2 + 2(ab) + b^2$$

Puesto que el polinomio "$a^2 + 2(ab) + b^2$" puede escribirse como producto de dos factores idénticos, se le llamará un cuadrado perfecto o exacto. Del mismo modo podemos obtener

$$(a - b)^2 = a^2 - 2(ab) + b^2,$$

de manera que "$a^2 - 2(ab) + b^2$" es también un cuadrado perfecto.

El problema que vamos a considerar ahora es el de identificar un polinomio que es un cuadrado perfecto y escribirlo en forma "cuadrada". Ya hemos encontrado cuadrados perfectos del tipo de $25a^4b^2c^6$ (observa que $25a^4b^2c^6 = (5a^2bc^3)^2$). Nos interesan ahora los dos tipos considerados antes.

Comparemos el ejemplo $(2x + 3y)^2$ con el caso general $(a + b)^2$.

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2(ab) + b^2 \\ (2x + 3y)^2 &= (2x)^2 + 2(2x \cdot 3y) + (3y)^2 \\ &= 4x^2 + 12xy + 9y^2.\end{aligned}$$

Si nos dan $4x^2 + 12xy + 9y^2$, la cuestión está en escribirlo en la forma $(2x)^2 + 2(2x \cdot 3y) + (3y)^2$, de la cual se obtiene inmediatamente la forma factorial $(2x + 3y)^2$, tomando a como $2x$ y b como $3y$ en la forma general.

Ejemplo 1. Factoriza $x^2 + 6x + 9$.

$$\begin{aligned}x^2 + 6x + 9 &= x^2 + 2(3x) + 3^2 \\ &= (x + 3)^2.\end{aligned}$$

¿Cómo puedes decir, de una ojeada, si un polinomio tal como ése es o no un cuadrado perfecto?

Ejemplo 2. Factoriza $9s^2 + 12st + 4t^2$.

$$\begin{aligned}9s^2 + 12st + 4t^2 &= (3s)^2 + 2(3s \cdot 2t) + (2t)^2 \\ &= (3s + 2t)^2.\end{aligned}$$

Ejemplo 3. Factoriza $4a^2 - 4ab + b^2$.

$$\begin{aligned}4a^2 - 4ab + b^2 &= (2a)^2 - 2(2a \cdot b) + b^2 \\ &= (2a - b)^2.\end{aligned}$$

Conjunto de problemas 12-4a

1. Llena el espacio vacío de tal modo que el resultado sea un cuadrado perfecto.

(a) $t^2 - 6t + (\quad)$

(b) $x^2 + 8x + (\quad)$

(c) $a^2 + 12a + (\quad)$

(d) $4s^2 + 4st + (\quad)$

(e) $(\quad) + 6xy + 9y^2$

(f) $u^2 - (\quad) + 25$

(g) $4s^2 + (\quad) + 9$

(h) $9x^2 + 18x + (\quad)$

(i) $4 - 4\sqrt{5} + (\quad)$

(j) $1 + (\quad) + 3$

(k) $5 - (\quad) + 7$

(l) $(\quad) - 8tp + 4p^2$

(m) $(\quad) + 40v + 25$

(n) $49x^2 - (\quad) + 16y^2$

(o) $(v + 1)^2 + 4(v + 1) + (\quad)$

(p) $(x - 1)^2 + (\quad) + 9$

2. ¿Cuáles entre los siguientes son cuadrados perfectos?

(a) $x^2 + 2xy + y^2$

(b) $x^2 + 2ax + 9a^2$

(c) $7^2 + 2(7)(5) + 5^2$

(d) $7 + 2\sqrt{7}\sqrt{5} + 5$

(e) $4 - 2\sqrt{15} + \frac{15}{4}$

(f) $x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$

(g) $(x - 1)^2 - 6(x - 1) + 9$

(h) $(2a + 1)^2 + 10(2a + 1) + 25$

3. Factoriza cada uno de los siguientes polinomios sobre los enteros si es posible:

(a) $a^2 - 4a + 4$

(b) $4x^2 - 4x + 1$

(c) $x^2 - 4$

(d) $x^2 + 4$

(e) $4t^2 + 12t + 9$

(f) $7x^2 + 14x + 7$

(g) $y^2 + y + 1$

(h) $4z^2 - 20z + 25$

(i) $9s^2 + 6st + 4t^2$

(j) $9(a - 1)^2 - 1$

(k) $20 - 5x$

(l) $2a^2 - 20ab + 5b^2$

(m) $rs + 2st + 3rt$

(n) $u(v + w) + w(v - w)$

(o) $2a^2 - 20a^2b + 50ab^2$

(p) $(s + 3)^2 + 4(s + 3) + 4$

(q) $(t^2 - 2t + 1) - (s + 1)^2$

(r) $x^4 - 2x^2 + 1$

(s) $z^4 + 16z^2 + 64$

4. Escribe los resultados de efectuar las multiplicaciones siguientes:

(a) $(x + 3)^2 =$

(b) $(x - 2)^2 =$

(c) $(x + \sqrt{2})^2 =$

(d) $(a + b)^2 =$

(e) $(x - y)^2 =$

(f) $(x - 1)^2 - a^2 =$

(g) $\big((x - 1) + a\big)\big((x - 1) - a\big) =$

(h) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 =$

(i) $(100 + 1)^2 =$

Algunos polinomios pueden ser factorizados combinando los dos métodos, el de los cuadrados perfectos y el de la diferencia de cuadrados.

Ejemplo 4. Factoriza $x^2 + 6x + 5$.

Sabemos que $x^2 + 6x + 9$ es un cuadrado perfecto. Esto nos sugiere el escribir

$$x^2 + 6x + 5 = x^2 + 6x + 9 - 9 + 5 \quad \text{(para formar un cuadrado perfecto)}$$

$$= (x^2 + 6x + 9) - 4$$

$$= (x + 3)^2 - 2^2 \quad \text{(para formar una diferencia de cuadrados)}$$

$$= (x + 3 + 2)(x + 3 - 2)$$

$$= (x + 5)(x + 1).$$

El método que acabamos de emplear, consistente en sumar y restar un mismo número para obtener un cuadrado perfecto, se llama <u>compleción del cuadrado</u>.

<u>Ejemplo 5</u>. Resuelve la ecuación $x^2 - 8x + 18 = 0$.

Completando el cuadrado, obtenemos

$$x^2 - 8x + 16 - 16 + 18 = 0$$
$$(x - 4)^2 + 2 = 0$$

No conocemos método alguno para factorizar este polinomio. ¿Nos garantiza esto el que <u>no pueda</u> ser factorizado? En tal caso, podemos encontrar el conjunto de validez sin escribir el polinomio en forma factorial. Puesto que $(x - 4)^2$ es no negativo para todo x, $(x - 4)^2 + 2$ nunca es menor que 2. Por consiguiente, el conjunto de validez de la ecuación dada es vacío.

<u>Conjunto de problemas 12-4b</u>

1. Factoriza los siguientes polinomios sobre los enteros, empleando el método de compleción del cuadrado:

   (a) $x^2 + 4x + 3$
   (b) $x^2 - 6x + 8$
   (c) $x^2 - 2x - 8$
   (d) $x^2 - 10x + 24$
   (e) $x^2 - 10x - 24$
   (f) $(x - 1)^2 - 4(x - 1) - 5$

2. ¿Qué valores enteros de p, si los hay, hacen que los polinomios siguientes sean cuadrados perfectos?

   (a) $u^2 - 2u + p$
   (b) $x^2 + px + 16$
   (c) $p^2t^2 + 2pt + 1$
   (d) $v^2 - 2pv - 1$
   (e) $x^2 - 8x - p + 20$

3. Resuelve:

(a) $y^2 - 10y + 25 = 0$

(b) $4t^2 - 20t + 25 = 0$

(c) $9a^2 + 12a + 4 = 0$

(d) $a^2 = 4a - 4$

(e) $(a - 1)^2 - 1 = 0$

(f) $z^4 + 16z^2 + 64 = 0$

(g) $x^2 - 2x - 8 = 0$

(h) $x^2 - 10x + 24 = 0$

12-5. Polinomios cuadráticos

Ya hemos señalado que la factorización puede ser considerada como un proceso inverso al de la simplificación. Por ello, sería plausible que, si alguien nos presentara un polinomio obtenido como el resultado de simplificar un producto, pudiéramos invertir el proceso y descubrir la forma factorial original. Esto puede ser difícil en general pero se puede hacer en algunos casos especiales, como ya lo hemos visto en las secciones anteriores. En esta sección utilizamos esta indicación para factorizar polinomios cuadráticos, esto es, polinomios en una variable y de grado dos.

Examinemos el producto

$$\begin{aligned}(x + m)(x + n) &= (x + m)x + (x + m)n \\ &= x^2 + mx + xn + mn \\ &= x^2 + (m + n)x + mn .\end{aligned}$$

Dado un polinomio cuadrático tal como $x^2 + (m + n)x + mn$, donde m y n son números enteros particulares, entonces es fácil invertir el proceso:

$$\begin{aligned}x^2 + (m + n)x + mn &= (x^2 + mx) + (nx + mn) \\ &= (x + m)x + (x + m)n \\ &= (x + m)(x + n).\end{aligned}$$

En realidad, este es sólo otro ejemplo de la factorización mediante la propiedad distributiva considerada en la sección 12-2. Sin embargo, supongamos que m y n se reemplazan por algunos nombres corrientes, digamos 6 y 4. Entonces

$$(x + 6)(x + 4) = x^2 + 10x + 24.$$

Podemos ver ahora la dificultad que surge. Las variables m y n conservan su identidad y mantienen la forma de la expresión, mientras que el 6 y el 4 desaparecen en la simplificación. El problema de factorizar un polinomio tal como $x^2 + 10x + 24$ consiste en "redescubrir" los números 6 y 4.

Examinemos este ejemplo con más detenimiento.

$$\begin{aligned}(x + 6)(x + 4) &= x^2 + (6 + 4)x + (6 \cdot 4)\\ &= x^2 + 10x + 24.\end{aligned}$$

Evidentemente la cuestión está en escribir 24 como un producto de dos factores cuya suma es 10. En este caso, puesto que los números son sencillos, con toda probabilidad podrás enumerar mentalmente las distintas maneras de factorizar 24,

$1 \cdot 24$
$2 \cdot 12$
$3 \cdot 8$
$4 \cdot 6$

y escoger el par de factores cuya suma es 10.

Aunque esta manera de proceder es fácil cuando el número de factores es pequeño, resulta tediosa cuando el número de factores es grande; por otra parte, el número de casos que necesitamos considerar puede con frecuencia reducirse, si utilizamos algo de lo que ya conocemos acerca de los enteros.

Ejemplo 1. Factoriza el polinomio cuadrático $x^2 + 22x + 72$.

Tenemos que hallar dos enteros cuyo producto sea 72 y cuya suma sea 22. (¿Recuerdas este problema del capítulo

10?) Como $72 = 2^3 \cdot 3^2$, los diversos factores de 72 aparecen como productos de potencias de 2 y de 3. Siendo 22 par, ambos enteros cuya suma es 22 deben tener el factor común 2, y, puesto que 22 no es divisible por 3, uno de los enteros deberá contener todos los factores 3 de 72. Esto reduce las posibilidades a

$$2^2 \cdot 3^2 + 2 = 36 + 2$$

ó

$$2^2 + 2 \cdot 3^2 = 4 + 18.$$

Como $4 + 18 = 22$, tenemos que

$$x^2 + 22x + 72 = x^2 + (4 + 18)x + 4 \cdot 18$$
$$= (x + 4)(x + 18).$$

Ejemplo 2. Factoriza $a^2 - 69a - 450$.

La descomposición en factores primos de 450 es $2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$. Como 69 no es divisible por 5, los factores 5 deben estar juntos. Puesto que 69 es un múltiplo de 3, los factores 3 deben repartirse.

Además, como -450 es negativo, uno de sus factores debe ser positivo y el otro negativo. De modo que necesitamos encontrar un entero positivo y un entero negativo cuya suma sea -69 y cuyo producto sea -450. Las posibilidades son

$$5^2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 75 - 6$$

$$5^2 \cdot 3 \cdot 2 - 3 = 150 - 3$$

y sus "opuestos". El opuesto del primero da -69; esto es, $-(5^2 \cdot 3) + 3 \cdot 2 = -69$. Por tanto,

$$a^2 - 69a - 450 = a^2 + (6 - 75)a + 6(-75)$$
$$= (a + 6)(a - 75).$$

Ejemplo 3. Factoriza $x^2 + 5x + 36$.

La descomposición en factores primos de 36 es $2^2 \cdot 3^2$.

Si examinamos todos los pares posibles de factores de 36, nos encontramos con que su suma siempre es mayor que 5.

Producto	Suma
$1\cdot 36$	37
$2\cdot 18$	20
$3\cdot 12$	15
$4\cdot 9$	13
$6\cdot 6$	12

Se ve que la suma menor ocurre cuando los dos factores son iguales. Puesto que $5 < 12$, concluimos que $x^2 + 5x + 36$ no puede factorizarse porque el coeficiente de x es demasiado pequeño.

Con razonamiento análogo determina si $x^2 - 10x + 36$ puede factorizarse. ¿Es factorizable $x^2 + 13x + 49$? ¿Es factorizable $x^2 + 14x + 49$?

Luego trata de factorizar $x^2 + 40x + 36$. En este caso 40 es demasiado grande para que $x^2 + 40x + 36$ pueda ser factorizado. (Ten en cuenta la tabla anterior de productos y de sumas.)

Con razonamiento análogo determina si $x^2 - 38x + 36$ puede factorizarse. ¿Es $x^2 + 51x + 49$ factorizable? ¿Es $x^2 - 50x + 49$ factorizable?

Conjunto de problemas 12-5a

En los problemas 1 - 9 factoriza los polinomios cuadráticos, si es posible, utilizando el método anterior.

1. (a) $a^2 + 8a + 15$ (c) $a^2 + 2a - 15$
   (b) $a^2 - 8a + 15$ (d) $a^2 - 2a - 15$

2. (a) $t^2 + 12t + 20$ (c) $t^2 + 9t + 20$
   (b) $t^2 + 21t + 20$ (d) $t^2 + 10t + 20$

3. (a) $a^2 + 6a - 55$ (d) $y^2 - 17y - 18$
   (b) $x^2 - 5x + 6$ (e) $z^2 - 2z + 18$
   (c) $u^2 - 10u + 24$

4. (a) $-x^2 + 7x - 12$ (d) $-x^2 - 13x - 12$
   (b) $12 - 11x - x^2$ (e) $-x^2 + x - 12$
   (c) $-x^2 - 4x + 12$

5. (a) $a^2 - 16a + 64$ (d) $a^2 - 20a + 64$
   (b) $a^2 + 8a + 64$ (e) $a^2 - 16a - 64$
   (c) $a^2 + 36a + 64$

6. (a) $x^2 - 9$ (c) $d^2 - 2$
   (b) $a^2 + 1$ (d) $h^2 - 169$

7. (a) $z^6 - 7z^3 - 8$ (c) $a^4 - 13a^2 + 36$
   (b) $b^4 - 11b^2 + 28$ (d) $y^4 - 81$

8. (a) $5a + a^2 - 14$ (c) $108 + a^2 - 21a$
   (b) $10a + 39 + a^2$ (d) $a^2 + 25a - 600$

9. (a) $3y^2 - 12y + 12$ (c) $5a^3 - 15a^2 + 30a$
   (b) $x^3 + 19x^2 + 34x$ (d) $7x^2 - 63$

10. Resuelve las ecuaciones:

(a) $a^2 - 9a - 36 = 0$

(b) $x^2 = 5x - 6$

(c) $y^2 - 13y + 36 = 0$

(d) $x^2 + 6x = 0$

(e) $x^2 + 6 = 7x$

(f) $(x - 2)(x + 1) = 4$

(g) $6x^2 + 6x - 72 = 0$

(h) $x^2 - 4x + 11 = 0$

11. Traduce lo que sigue en enunciados abiertos y determina sus conjuntos de validez:

(a) El cuadrado de un número es 7 unidades mayor que 6 veces el número. ¿Cuál es el número?

(b) La longitud de un rectángulo es 5 pulgadas más que su anchura. Su área es 84 pulgadas cuadradas. Halla la anchura.

(c) El cuadrado de un número es 9 unidades menor que 10 veces el número. ¿Cuál es el número?

12. Una hucha rectangular tiene 2 pies de profundidad y su perímetro es 24 pies. Si el volumen de la hucha es 70 pies cúbicos, ¿cuáles son la longitud y la anchura?

13. Dos paneles de madera laminada, cada uno de los cuales cuesta 30¢ por pie cuadrado, tienen la misma área aunque uno de ellos es un cuadrado y el otro un rectángulo 6 pulgadas más largo que el cuadrado, pero con sólo 3 pulgadas de ancho. ¿Cuáles eran las dimensiones de los dos paneles?

14. Demuestra que si p y q son enteros y si $x^2 + px + q$ es factorizable, entonces, $x^2 - px + q$ también lo es.

15. Determina todos los enteros p para los cuales $x^2 + px + 36$ es factorizable. ¿Para qué valores de p será $x^2 + px + 36$ un cuadrado perfecto? ¿Cómo se distinguen estos valores de

p de los demás? Contesta las mismas preguntas para el polinomio $x^2 + px + 64$. Si n es un entero positivo, ¿cuál crees que es el menor entero positivo p para el cual $x^2 + px + n^2$ es factorizable? ¿Y cuál te parece que es el mayor entero positivo p para el cual $x^2 + px + n^2$ es factorizable?

En los polinomios cuadráticos de los ejemplos 1, 2, 3, el coeficiente de la segunda potencia de la variable era igual a 1. Con objeto de poder manejar otros polinomios cuadráticos consideremos una vez más un producto:

$$\begin{aligned}(ax + b)(cx + d) &= (ax + b)cx + (ax + b)d \\ &= (ac)x^2 + (ad + bc)x + (bd)\end{aligned}$$

Para simplificar nuestra discusión, llamemos a y b los coeficientes del factor $(ax + b)$, c y d los de $(cx + d)$, y ac, $(ad + bc)$, bd los coeficientes del polinomio cuadrático $(ac)x^2 + (ad + bc)x + (bd)$.

Observa cómo resultan los coeficientes del polinomio cuadrático. El coeficiente de x^2 es el producto de los primeros coeficientes de los factores, la constante es el producto de las constantes de los factores, y el coeficiente de x es el producto de los coeficientes "externos" más el producto de los coeficientes "internos". Por ejemplo:

$$\overset{2\cdot 3 \qquad 5\cdot 2}{(2x + 5)(3x + 2)} = 2\cdot 3x^2 + (2\cdot 2 + 5\cdot 3)x + 5\cdot 2.$$
$$\underset{2\cdot 2 + 5\cdot 3}{}$$

Para abreviar al hablar de estos coeficientes, diremos $2\cdot 3$ el producto de los primeros coeficientes, $5\cdot 2$ el producto de los últimos, $2\cdot 2$ el producto de los externos y $5\cdot 3$ el producto de los coeficientes internos.

Así que el problema de factorizar un polinomio cuadrático tal como "$6x^2 + 19x + 10$", consiste en hallar dos factores de 6 y dos factores de 10 tales que la "suma de los productos de los factores externos y de los internos" sea 19. En casos sencillos, esto puede hacerse ensayando todas las posibles factorizaciones de los coeficientes. Puesto que los factores de 6 son $1 \cdot 6$ ó $2 \cdot 3$ y los de 10 son $1 \cdot 10$ ó $2 \cdot 5$ ó $5 \cdot 2$ ó $10 \cdot 1$, podemos ensayar cada posibilidad.

(1) $(1x + 1)(6x + 10)$
$1 \cdot 10 + 1 \cdot 6 = 16$

(2) $(1x + 2)(6x + 5)$
$1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 = 17$

(3) $(1x + 5)(6x + 2)$
$1 \cdot 2 + 5 \cdot 6 = 32$

(4) $(1x + 10)(6x + 1)$
$1 \cdot 1 + 10 \cdot 6 = 61$

(5) $(2x + 1)(3x + 10)$
$2 \cdot 10 + 1 \cdot 3 = 23$

(6) $(2x + 2)(3x + 5)$
$2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 16$

(7) $(2x + 5)(3x + 2)$
$2 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = \underline{19}$

Desde luego, con un poco de práctica podríamos lograr directamente los factores deseados $(2x + 5)$ y $(3x + 2)$ eliminando mentalmente los otros casos. Diríamos: $6 = 2 \cdot 3$ y $10 = 2 \cdot 5$. Como el coeficiente central 19 es impar, no podemos tener un factor par en cada uno de los productos, externo e interno. Esto excluye las posibilidades (1), (3) y (6). Ciertamente, la factorización $10 = 1 \cdot 10$ en las otras posibilidades nos dará un coeficiente central demasiado grande. Así nos quedamos con las posibilidades (2) y (7). Por consiguiente, las ensayamos y encontramos que (7) da lugar al par deseado de factores.

Ahora consideremos un polinomio cuadrático cuyos coeficientes tienen muchos más factores:

$$6x^2 + 7x - 24.$$

Tenemos que encontrar un par de enteros cuyo producto sea 6, y un par cuyo producto sea -24 de tal modo que la suma de los productos externo e interno sea 7. También en este caso podríamos ensayar todas las factorizaciones posibles de 6 y de -24, pero entonces obtendríamos 32 casos. En vez de esto, utilicemos nuestros conocimientos acerca de los enteros para reducir el número de casos. Puesto que $6 = 2 \cdot 3$ y $24 = 2^3 \cdot 3$, sabemos que los enteros que deseamos estarán formados de productos de los factores 2 y 3. Como 7 es impar, no podemos tener el factor 2 en ambos productos, externo e interno. (¿Por qué?) Así, pues, los factores 2 deben entrar todos en el producto externo o todos en el interno. Además, como 7 no es divisible por 3, los factores 3 deberán estar todos en el producto externo o todos en el producto interno. Hemos reducido así las posibilidades a:

$$(1x - 2^3 \cdot 3)(2 \cdot 3x + 1)$$

$$1 \cdot 1 - 2^3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = -143$$

ó

$$(2x - 3)(3x + 2^3)$$

$$2\cdot 2^3 - 3\cdot 3 = 7,$$

o sus "opuestos". Por tanto, la forma factorial resulta ser

$$6x^2 + 7x - 24 = (2x - 3)(3x + 8).$$

Algunas veces es posible reducir el número de casos aplicando propiedades de los enteros; otras veces no. En realidad, no hay nunca una garantía de que un polinomio cuadrático dado pueda ser factorizado.

Ejemplo 4. Factoriza $3x^2 - 2x - 21$.

Buscamos coeficientes tales que

$$\Big((\ )x + (\ )\Big)\Big((\ )x + (\ )\Big) = 3x^2 - 2x - 21$$

3   -21

-2

Hay una factorización de 3: $3\cdot 1$ y dos de 21: $21\cdot 1$ ó $3\cdot 7$. Puesto que 2 no es divisible por 3, debemos mantener todos los factores 3 o bien en el producto externo o en el interno. De las demás posibilidades, ¿cuál da -2 como suma de los productos externo e interno? Por consiguiente,

$$3x^2 - 2x - 21 = (x - 3)(3x + 7)$$

Ejemplo 5. Factoriza $25x^2 - 45x - 36$.

Tenemos $25 = 5^2$ y $36 = 2^2\cdot 3^2$. Debemos encontrar un par de enteros cuyo producto sea 25 y un par de enteros cuyo producto sea -36, de manera que la suma de los productos externo e interno sea -45. Puesto que 5 divide a 45, tiene que haber un 5 en cada uno de los productos externo e interno. Por consiguiente, los primeros coeficientes son 5 y 5. Como 3 divide a 45, tiene que haber también un 3 en cada uno de los productos externo e interno. Por otra parte, 45 es impar; de modo que los factores 2 deben entrar todos en un término. Hemos reducido así los casos a los últimos coeficientes: 12, -3; ó -12, 3; ó 3, -12; ó -3, 12. El que da los factores deseados corresponde a los últimos coeficientes -12, 3. Por consiguiente,

$$25x^2 - 45x - 36 = (\overset{25}{5x} - 12)(5x + \overset{-36}{3})$$

$$-45$$

Conjunto de problemas 12-5b

En los problemas 1-10 factoriza, si es posible, los polinomios sobre los enteros.

1. (a) $2x^2 + 5x + 3$
   (b) $2x^2 + 7x + 3$
   (c) $2x^2 + 9x + 3$

2. (a) $3a^2 + 4a - 7$
   (b) $3a^2 - 4a - 7$
   (c) $-3a^2 - 4a + 7$

3. (a) $4y^2 + 23y - 6$
   (b) $x^2 + 4x - 32$
   (c) $8a^2 + 10a - 3$

4. (a) $3c^2 - 2c - 6$
   (b) $3x^2 - 17x - 6$
   (c) $3y^2 + 3y - 6$

5. (a) $9x^2 - 4$
   (b) $9x^2 - 12x + 4$
   (c) $9x^2 + 12x + 4$

6. (a) $9a^2 + 3a - 2$
   (b) $9a^2 + 3a$
   (c) $9a^2 + 9$

7. (a) $12x^2 - 51x + 45$
   (b) $10x^2 + 43x + 45$
   (c) $10x^2 - 69x - 45$

8. (a) $6 - 23a - 4a^2$
   (b) $6 - 3x^2 + 17x$
   (c) $19x - 6 + 7x^2$

9. (a) $p^2 + 2pq + q^2$
   (b) $4a^2 - 16ab + 7b^2$
   (c) $25x^2 - 70xy + 49y^2$

10. (a) $2a^4 + 20a^3 + 50a^2$
    (b) $a^2b - 9ab + 25b$
    (c) $2a^2 + 15a + 25$

11. Factoriza:

(a) $6x^2 - 144x - 150$
(b) $6x^2 - 11x - 150$
(c) $6x^2 + 60x + 150$
(d) $6x^2 - 61x + 150$
(e) $6x^2 + 25x + 150$
(f) $6x^2 + 65x + 150$
(g) $6x^2 - 87x + 150$
(h) $6x^2 + 63x - 150$

12. ¿Puede factorizarse $2x^2 + ax + b$ cuando a es par y b impar? ¿Por qué?

13. ¿Puede factorizarse $3x^2 + 5x + b$ si 3 es un factor de b? Si es así, elige un valor de b tal que $3x^2 + 5x + b$ pueda ser factorizado.

14. Determina el conjunto de validez cuando el dominio de la variable es el conjunto de los números racionales.

(a) $8x^2 + 10x - 3 = 0$
(b) $6y^2 + y = 1$
(c) $6v^2 = 19v + 7$
(d) $a^2 - 4a + 15 = 0$

15. Determina el conjunto de validez cuando el dominio de la variable es el conjunto de los números racionales.

(a) $9x^2 = 4x$
(b) $9x^2 = 4$
(c) $(x - 1)^2 = 4$
(d) $9(x - 1)^2 = 4$

16. Factoriza:

(a) $w^2 - 16$
(b) $(x + 3)^2 - 16$
(c) $(y^2 + 6y + 9) - 16$
(d) $a^2 - 10a + 25 - 9b^2$

Traduce lo que sigue a enunciados abiertos y determina sus conjuntos de validez:

17. La suma de dos números es 15 y la suma de sus cuadrados es 137. Halla los números.
18. La longitud de un rectángulo es 7 pulgadas más que su anchura y su diagonal tiene 13 pulgadas. Determina su anchura.
19. La diferencia entre dos números es 8 y su producto es 84. Determina dichos números.
20. El producto de dos números impares consecutivos es 15 más que 4 veces el más pequeño. ¿Cuáles son los números?
21. Partiendo del mismo punto, Jaime camina hacia el norte con una velocidad constante, mientras que Guillermo camina hacia el oeste con una velocidad constante que es una milla por hora más que la de Jaime. Si al cabo de una hora se encuentran a 5 millas de distancia el uno del otro, ¿a qué velocidad caminó cada uno?
22. La altura de un triángulo tiene 3 pulgadas menos que su base. Su área es de 14 pulgadas cuadradas. ¿Cuál es la longitud de su base?
23. Determina las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro tiene 28 pies y cuya área es de 24 pies cuadrados.

12-6. Polinomios sobre los números racionales o sobre los números reales

La mayor parte de lo expuesto sobre la factorización se refería a la factorización de polinomios sobre los enteros. El nombre mismo sugiere que tenemos la posibilidad de considerar otras clases de polinomios.

> Una frase constituida por números racionales y variables, con solamente las operaciones de suma, resta, multiplicación y tomar opuestos se llama un polinomio sobre los números racionales.

Da una definición de polinomio sobre los números reales.

Tenemos así tres tipos de polinomios: polinomios sobre los enteros, sobre los números racionales y sobre los números reales. Considera la expresión $3x^2 - 4x + 1$. Este es un polinomio sobre los enteros. Puesto que todo entero es también un número racional, $3x^2 - 4x + 1$ se puede considerar también como un polinomio sobre los números racionales. ¿Será posible considerarlo como un polinomio sobre los números reales? La expresión $u^3 - \frac{2}{3}u^2 + u - 1$ es un polinomio sobre los números racionales. ¿Será posible considerarlo como un polinomio sobre los enteros? ¿O sobre los números reales?

El problema de la factorización puede ahora plantearse de un modo más general:

> El problema consiste en escribir un polinomio dado, que consideramos de un cierto tipo, como un producto indicado de polinomios del mismo tipo.

Consideremos la expresión "$x^2 - 2$". Es un polinomio sobre los enteros y, como tal, sólo puede factorizarse en forma trivial

$$x^2 - 2 = (-1)(2 - x^2).$$

Esto no es especialmente interesante, ya que el factor $2 - x^2$ no es de grado menor que el de $x^2 - 2$. En este sentido, $x^2 - 2$ es "primo" como polinomio sobre los enteros. Sin embargo, $x^2 - 2$ también puede ser considerado como un polinomio sobre los números reales, y entonces tenemos

$$\begin{aligned} x^2 - 2 &= x^2 - (\sqrt{2})^2 \\ &= (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}), \end{aligned}$$

donde $x + \sqrt{2}$ y $x - \sqrt{2}$ son polinomios sobre los números reales (pero no sobre los números racionales o sobre los enteros). Así que $x^2 - 2$, considerado como un polinomio sobre los números reales, admite una factorización no trivial. Este ejemplo muestra que es esencial en la factorización la clase de polinomio considerado.

Veamos ahora la expresión

$$"\frac{3}{2}st + \frac{15}{2}st^2 - 27s^2t^3" .$$

Es un polinomio en dos variables sobre los números racionales. La propiedad distributiva nos permite escribirlo en la forma

$$(\frac{3}{2})(st + 5st^2 - 18s^2t^3).$$

El factor $"\frac{3}{2}"$ puede considerarse como un polinomio sobre los números racionales, mientras que $"st + 5st^2 - 18s^2t^3"$ es un polinomio sobre los enteros. Esta reducción puede hacerse siempre:

> Un polinomio sobre los números racionales puede escribirse como un producto de un número racional y un polinomio sobre los enteros.

Con esto se reduce el problema de factorizar polinomios sobre los números racionales al problema de factorizar polinomios sobre los enteros.

Conjunto de problemas 12-6

1. Factoriza cada uno de los polinomios siguientes, si es posible, considerándolo como
   (i) un polinomio sobre los números racionales,
   (ii) un polinomio sobre los números reales.

   Ejemplo: Considerado como un polinomio sobre los números racionales,

$$\frac{1}{2}x^2 - 4 = \frac{1}{2}(x^2 - 8).$$

   Considerado como un polinomio sobre los números reales,

$$\frac{1}{2}x^2 - 4 = \frac{1}{2}(x + \sqrt{8})(x - \sqrt{8})$$
$$= \frac{1}{2}(x + 2\sqrt{2})(x - 2\sqrt{2}).$$

   (a) $\frac{2}{3}a^2 - \frac{4}{3}$
   (b) $17u - 51u^3$
   (c) $\frac{1}{2}t^3 - 3t^2 + 4t$
   (d) $\frac{1}{2}t^3 - 4t^2 + 8t$
   (e) $a^4 - 16$
   (f) $4x^2 + 9$

2. Resuelve las ecuaciones:
   (a) $2x^2 - 6 = 0$
   (b) $4t^3 - 8t = 0$
   (c) $z^3 + 7z = 0$

3. Ensayando todos los casos posible, vemos que $x^2 + 4x - 2$, considerado como polinomio sobre los enteros, no es factorizable. Por otra parte, considerado como polinomio sobre los números reales, puede escribirse

$$x^2 + 4x - 2 = (x^2 + 4x + 4) - 2 - 4,$$

sumando $4 - 4$ para formar un cuadrado perfecto,

$$= (x + 2)^2 - (\sqrt{6})^2$$

$$= (x + 2 + \sqrt{6})(x + 2 - \sqrt{6})$$

Así, pues, la técnica de compleción del cuadrado con el fin de obtener la <u>diferencia de cuadrados</u> nos permite a veces factorizar un polinomio cuadrático sobre los números reales; aun cuando no sea factorizable como polinomio sobre los enteros.

Factoriza los polinomios siguientes sobre los números reales, si es posible, completando el cuadrado para formar diferencias de cuadrados:

(a) $x^2 + 4x - 1$ (e) $y^2 - 5$

(b) $x^2 + 4x + 2$ (f) $z^2 - 12z + 34$

(c) $x^2 + 4x + 3$ (g) $s^2 - 10s + 1$

(d) $x^2 - 6x + 6$ (h) $2x^2 - 8x - 2$

4. Resuelve (factoriza con el método del problema 3):

(a) $y^2 - 4y + 2 = 0$ (c) $t^2 - 10t = 1$

(b) $a^2 = 6a - 6$ ~~(d)~~ $\cancel{2v^2} - 4v + 6 = 0$

*5. Observando la forma del coeficiente de x y de la constante en

$$(x + b)^2 = x^2 + 2bx + b^2,$$

determina el número que hace a cada una de las expresiones siguientes ser un cuadrado perfecto:

(a) $x^2 + 14x + (\quad)$ (d) $m^2 + \frac{2}{5}m + (\quad)$

(b) $a^2 - 3a + (\quad)$ (e) $b^2 - \frac{3}{\pi}b + (\quad)$

(c) $y^2 + y + (\quad)$

*6. Factoriza completando el cuadrado:

(a) $a^2 + 3a + 1$

(b) $y^2 + y - 3$

(c) $x^2 - 5x - 2$

(d) $y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}$

*7. Resuelve:

(a) $a^2 + 3a + 1 = 0$

(b) $x^2 = 7x + 3$

(c) $y^2 - \frac{4}{3}y = \frac{5}{9}$

(d) $b^2 + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2} = 0$

*8. Factoriza:

Ejemplo.
$$
\begin{aligned}
3x^2 - 12x + 2 &= 3(x^2 - 4x + \tfrac{2}{3}) \\
&= 3\left((x^2 - 4x + 4) - 4 + \tfrac{2}{3}\right) \\
&= 3\left((x - 2)^2 - \tfrac{10}{3}\right) \\
&= 3\left(x - 2 + \sqrt{\tfrac{10}{3}}\right)\left(x - 2 - \sqrt{\tfrac{10}{3}}\right)
\end{aligned}
$$

(a) $2x^2 - 12x - 5$

(b) $3y^2 + 2y - 2$

(c) $5a^2 - a - 1$

*9. Resuelve:

(a) $2x^2 = 12x + 5$

(b) $3a^2 - 6a = 4$

(c) $3m^2 + 5m + 1 = 0$

12-7. El álgebra de las expresiones racionales

Cuando empezamos nuestra discusión de la factorización, hicimos hincapié especialmente sobre la semejanza entre la factorización de polinomios y la de enteros. Esta analogía puede desarrollarse aún más. El sistema de los enteros es cerrado respecto de la suma, resta y multiplicación, pero no de la división. El conjunto de los polinomios es cerrado respecto de la suma, resta y multiplicación (indicadas), pero no respecto de la división. Si extendemos el sistema de los enteros hasta obtener la propiedad de clausura respecto de la división también (excepto la división por cero), obtenemos el sistema de los números racionales. ¿Cuál es la extensión análoga para los polinomios?

> Una expresión racional es una frase que contiene números reales y variables y que envuelve, a lo más, las operaciones de suma, resta, multiplicación, división y toma de opuestos.

¿Es todo polinomio una expresión racional? ¿Es el conjunto de expresiones racionales cerrado respecto de las operaciones indicadas de suma, resta, multiplicación y división? ¿Por qué no es $\sqrt{2x - 1}$ una expresión racional?

Como ejemplo de expresiones racionales, tenemos

(1) $\frac{1}{x} + 1$ (2) $\frac{2x - 3}{4y^2 - 9}$ (3) $\frac{x^3 + 5}{5}$

(4) $\frac{3}{2t} + \frac{5}{s - 1}$ (5) $3a - 2b$ (6) $\frac{z}{z - 1} \cdot \frac{z + 2}{3}$.

Entre estas expresiones racionales, (1), (3) y (6) son en un una variable. Observa que (2) y (3) son cocientes indicados de polinomios, en tanto que (6) es un producto indicado y (1), (4), y (5) son sumas indicadas de expresiones racionales. De igual modo que todo número racional puede ser representado como un cociente de dos enteros, así toda expresión racional puede escribirse como el cociente de dos polinomios.

Puesto que las expresiones racionales son frases, representan números. Por consiguiente, en una expresión tal como

$$\frac{3}{2t}+\frac{5}{s-1},$$

el valor 0 queda automáticamente excluido del dominio de la variable t y el valor 1 del dominio de s. Tal restricción se sobrentiende siempre para cualquier frase que contiene una variable en su denominador.

Estamos ya en condiciones de estudiar algo del "álgebra" de las expresiones racionales. Esto equivale a estudiar los procedimientos de simplificación de sumas y productos (indicados) de expresiones racionales hasta convertirlos en cocientes de polinomios. Como en el caso de los números racionales, podemos esperar que parte de lo hecho con las fracciones podrá aplicarse ahora. En efecto, recuerda que <u>para cada valor de sus variables toda expresión racional es un número real</u>. Por consiguiente, las mismas propiedades que son válidas para las operaciones con números reales lo son también para las operaciones con expresiones racionales.

Para números reales a, b, c, d, tenemos las propiedades:

(1) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

(2) $\frac{b}{b}=1$ (donde b <u>y</u> d son distintos de cero)

(3) $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$

Si representamos simbólicamente las expresiones con las letras mayúsculas A, B, C, D, podemos escribir las propiedades correspondientes así:

(i) $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$

(ii) $\frac{B}{B} = 1$ (donde ni B ni D puede escribirse como la expresión cero)

(iii) $\frac{A}{B} + \frac{C}{B} = \frac{A + C}{B}$.

¿Cuáles son las restricciones referentes al dominio de las variables contenidas en B y en D? Si A, B son expresiones racionales y B puede escribirse como la expresión cero, entonces, ¿es $\frac{A}{B}$ una expresión racional?

Utilizamos las propiedades anteriores aplicadas a las expresiones racionales para simplificar dichas expresiones. Con otras palabras, necesitamos escribir una expresión en forma de cociente indicado único de dos polinomios que no tengan factores comunes.

Ejemplo 1. Simplifica: $\frac{ax - bx}{x^2} \cdot \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - b^2}$.

Usamos la propiedad (i) con $A = ax - bx$, $B = x^2$; $C = a^2 + 2ab + b^2$ y $D = a^2 - b^2$. Cada uno de estos polinomios puede factorizarse:

$A = (a - b)x \qquad C = (a + b)(a + b)$

$B = x \cdot x \qquad D = (a + b)(a - b)$.

Por tanto,

$$\frac{ax - bx}{x^2} \cdot \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{(a - b)x(a + b)(a + b)}{x^2(a + b)(a - b)}, \quad \text{por (i)}$$

$$= \frac{(a + b)\big(x(a + b)(a - b)\big)}{x\big(x(a + b)(a - b)\big)}$$

$$= \frac{a + b}{x}, \quad \text{por (ii)}.$$

Las restricciones son :

$$x \neq 0, \quad a \neq b, \quad a \neq -b.$$

Ejemplo 2.

$$\frac{1-x^2}{1+x} \cdot \frac{x-2}{x^2-3x+2} = \frac{(1-x)(1+x)}{1+x} \cdot \frac{x-2}{(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{(1-x)(1+x)(x-2)}{(1+x)(x-1)(x-2)} \qquad \text{(¿Por qué?)}$$

$$= \frac{(1-x)\ \big((1+x)(x-2)\big)}{(x-1)\ \big((1+x)(x-2)\big)}$$

$$= \frac{1-x}{x-1} \qquad \text{(¿Por qué?)}$$

$$= \frac{(-1)(x-1)}{x-1} = -1 \qquad \text{(¿Por qué?)}$$

¿Cuál es la restricción en el dominio de x?

Ejemplo 3.

$$\frac{\dfrac{x^2+x-2}{x^2-4x+4}}{\dfrac{x+2}{x-2}} = \frac{x^2+x-2}{x^2-4x+4} \cdot \frac{x-2}{x+2}$$

$$= \frac{(x+2)(x-1)(x-2)}{(x-2)(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{x-1}{x-2} \cdot \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \frac{x-1}{x-2}$$

Conjunto de problemas 12-7

Simplifica lo que sigue, señalando las restricciones en los valores de las variables:

1. $\dfrac{3x - 3}{x^2 - 1}$

2. $\dfrac{x^2 - x^2y}{1 - y}$

3. $\dfrac{x^2 - 4x - 12}{x^2 - 5x - 6}$

4. $\dfrac{ab + ab^2}{a - ab^2} \cdot \dfrac{1 - b}{1 + b}$

5. $\dfrac{\dfrac{x^2 - 9}{6}}{\dfrac{x^2 - 3x}{3x + 3}}$

6. $\dfrac{\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}}{\dfrac{x + 1}{x - 1}}$

12-8. Simplificación de sumas de expresiones racionales

Con el fin de utilizar la propiedad

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$$

al sumar números racionales, es necesario primero escribirlos en tal forma que tengan un denominador común. En el caso de números racionales, el menor (común) denominador que serviría es el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de los dos denominadores dados. Tenemos un problema similar al sumar expresiones racionales, y el método es precisamente análogo al empleado con los números racionales, jugando la factorización de polinomios exactamente el mismo papel que la factorización de enteros.

Ejemplo 1. $\dfrac{7}{36a^2b} + \dfrac{5}{24b^3}$

Las formas factorizadas de los denominadores son

$$36a^2b = 2^2 3^2 a^2 b$$

$$24b^3 = 2^3 3 b^3$$

Escogiendo cada factor el mayor número de veces que ocurre en cada denominador, obtenemos el m.c.m. que es $2^3 \cdot 3^2 a^2 b^3$.

Entonces

$$\frac{7}{36a^2b} + \frac{5}{24b^3} = \frac{7}{2^2 3^2 a^2 b} \cdot \frac{2b^2}{2b^2} + \frac{5}{2^3 3 b^3} \cdot \frac{3a^2}{3a^2}$$

$$= \frac{14b^2}{2^3 3^2 a^2 b^3} + \frac{15a^2}{2^3 3^2 a^2 b^3}$$

$$= \frac{14b^2 + 15a^2}{72a^2b^3}$$

<u>Ejemplo 2</u>. $\dfrac{7}{12 - x - x^2} + \dfrac{2}{x^2 + 8x + 16}$.

Puesto que $12 - x - x^2 = (4 + x)(3 - x) = (-1)(x + 4)(x - 3)$

y $x^2 - 8x + 15 = (x - 3)(x - 5)$,

el m.c.m. es $(-1)(x - 3)(x + 4)(x - 5)$.

Si $x \neq 3$, $x \neq -4$ y $x \neq 5$, entonces

$$\frac{3}{12-x-x^2} + \frac{2}{x^2+8x+16} = \frac{3}{(-1)(x+4)(x-3)} \cdot \frac{(x-5)}{(x-5)} + \frac{2}{(x-3)(x-5)} \cdot \frac{(-1)(x+4)}{(-1)(x+4)}$$

$$= \frac{3x-15}{(-1)(x+4)(x-3)(x-5)} + \frac{-2x-8}{(-1)(x+4)(x-3)(x-5)}$$

$$= \frac{3x-15-2x-8}{(-1)(x+4)(x-3)(x-5)}$$

$$= \frac{x - 23}{(3-x)(x+4)(x-5)}$$

Ejemplo 3. $\dfrac{a}{3a - 9} - \dfrac{2a - 3}{5a - 15}$.

El m.c.m. es $3\cdot5(a - 3)$.

Si $a \neq 3$, entonces

$$\frac{a}{3a - 9} - \frac{2a - 3}{5a - 15} = \frac{a}{3(a - 3)}\cdot\frac{5}{5} - \frac{2a - 3}{5(a - 3)}\cdot\frac{3}{3}$$

$$= \frac{5a}{3\cdot5(a - 3)} - \frac{6a - 9}{3\cdot5(a - 3)}$$

$$= \frac{5a - (6a - 9)}{3\cdot5(a - 3)}$$

$$= \frac{5a - 6a + 9}{3\cdot5(a - 3)}$$

$$= \frac{-a + 9}{15(a - 3)}$$

Ejemplo 4. $(1 - \frac{1}{x+1})(1 + \frac{1}{x-1})$

$$1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1 - 1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$$

y

$$1 + \frac{1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{x-1} = \frac{x-1 + 1}{x-1} = \frac{x}{x-1}.$$

Por tanto, si $x \neq 1$ y $x \neq -1$, entonces

$$\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\left(1 + \frac{1}{x-1}\right) = \frac{x}{x+1}\cdot\frac{x}{x-1} = \frac{x^2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2}{x^2 - 1}.$$

<u>Conjunto de problemas 12-8</u>

1. $\frac{3}{x^2} - \frac{2}{5x}$

2. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

3. $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{2a} - 2$

4. $\frac{5}{x - 1} + 1$

5. $\frac{3}{m - 1} + \frac{2}{m - 2}$

6. $\frac{x}{x + 5} - \frac{x}{x - 3}$

7. $\frac{4}{m - n} + \frac{5}{n}$

8. $\frac{x}{x + y} - \frac{y}{x - y}$

9. $\frac{2}{a - b} - \frac{3}{b - a}$

10. $\frac{5x}{x^2 - 9} + \frac{7}{x + 3}$

11. $\frac{2a}{(a - b)^2} - \frac{3}{a - b}$

12. $\frac{7}{a - b} + \frac{6}{a^2 - 2ab + b^2}$

13. $\frac{3}{x^2 + 2x} - \frac{5}{3x + 6}$

14. $\frac{4}{a^2 - 4a - 5} + \frac{2}{a^2 + a}$

15. $\frac{5}{x^2 + x - 6} + \frac{3}{x^2 - 4x + 4}$

16. $\frac{y - 5}{2y} + \frac{y + 5}{y^2}$

17. $\frac{a}{3 + a} - \frac{a - 3}{a}$

18. $\frac{b + 1}{b - 5} + \frac{b}{10 - 2b}$

19. $\frac{4}{x^2 - x} + \frac{3}{x - 1} - \frac{1}{x}$

20. $\frac{a}{a^2 - 25} - \frac{2}{3a + 15} + \frac{3}{2a - 10}$

21. $\frac{x - \frac{y^2}{x}}{1 + \frac{y}{x}}$ Sugerencia: Multiplica por $\frac{x}{x}$.

22. $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}$

23. $\frac{\frac{x}{3} - 2 + \frac{3}{x}}{1 - \frac{3}{x}}$

24. Considera el conjunto de todas las expresiones racionales. ¿Crees que este conjunto es cerrado con respecto a cada una de las cuatro operaciones de la aritmética?

12-9. División de polinomios

Cuando se nos da un número racional tal como $\frac{171}{23}$ en la aritmética, lo reconocemos inmediatamente como una fracción "impropia" y nos apresuramos a escribirlo en la forma "propia" $7\frac{10}{23}$. Esta forma en realidad significa $7 + \frac{10}{23}$ y, puesto que $\frac{10}{23} < 1$, tiene la ventaja de mostrarnos de modo inmediato que $\frac{171}{23}$ está entre los enteros 7 y 8. El número 7 es la parte entera de $\frac{171}{23}$. Puesto que

$$7 + \frac{10}{23} = \frac{7 \cdot 23 + 10}{23} = \frac{171}{23},$$

una manera equivalente de mostrar esto es escribir

$$171 = 7 \cdot 23 + 10.$$

Así que el entero 171 está representado como un múltiplo entero de 23 más un entero que es menor que 23. Esto es realmente lo que siempre hacemos cuando efectuamos el proceso de dividir un entero por otro. ¿Cómo se comprueba el "resultado" en la división?

Estudiaremos ahora el problema análogo para expresiones racionales en una variable. Consideremos el ejemplo:

$$\frac{2x^3 - 6x^2 + 5x + 1}{x^2 - 3x} = \frac{2x(x^2 - 3x) + 5x + 1}{x^2 - 3x}$$

$$= 2x + \frac{5x + 1}{x^2 - 3x}.$$

¿Se parece esto al ejemplo anterior para números racionales? Observa que primero escribimos el numerador en la forma

$$2x^3 - 6x^2 + 5x + 1 = 2x(x^2 - 3x) + (5x + 1),$$

esto es, como un polinomio múltiplo de $x^2 - 3x$ más un polinomio de <u>grado menor</u> que el de $x^2 - 3x$. Pongamos a un lado, por el momento, la cuestión de cómo hemos logrado esto (más adelante aprenderás una manera sistemática de hacerlo) y enunciemos en términos generales precisamente en qué consiste el problema.

> Sean N y D dos polinomios en una variable. Entonces dividir N por D significa obtener polinomios Q y R, R de <u>menor</u> grado que D, tales que
>
> $$\frac{N}{D} = Q + \frac{R}{D}.$$

Este problema es equivalente al de hallar dos polinomios Q y R tales que

$$N = QD + R.$$

Como en la aritmética, N es el <u>dividendo</u>, D el <u>divisor</u>, Q el <u>cociente</u> y R el <u>resto</u>. Identifica N, D, Q, R en el ejemplo tratado antes. En ese ejemplo fue fácil obtener Q y R, puesto que los dos primeros términos de N, $2x^3 - 6x^2$, contienen D como factor.

Nuestro objetivo es dar un procedimiento general para encontrar paso a paso los polinomios Q y R, cuando se dan dos polinomios N y D. Observa que, por ser

$$N = QD + R,$$

se sigue que

$$R = N - QD.$$

Esto quiere decir que si podemos hallar Q, entonces se obtiene R restando QD de N.

Consideremos otro ejemplo:

$$\frac{2x^2 + x - 5}{x - 3}$$

Aquí $N = 2x^2 + x - 5$ y $D = x - 3$. Tratemos primero de obtener un polinomio múltiplo de D tal que al restarlo de N nos dé un polinomio de menor grado que N (pero no necesariamente de menor grado que D). Todo lo que tenemos que hacer es multiplicar $x - 3$ por un monomio de tal modo que el polinomio resultante tenga el mismo término del mayor grado que en N. El término de mayor grado de N es "$2x^2$". De manera que si multiplicamos $(x - 3)$ por $2x$, el resultado tiene el mismo término de grado máximo.

$$2x(x - 3) = 2x^2 - 6x$$

y

$$(2x^2 + x - 5) - 2x(x - 3) = 7x - 5.$$

Esto es,

(1) $$2x^2 + x - 5 = 2x(x - 3) + (7x - 5).$$

Sin embargo, el polinomio $7x - 5$ no es de menor grado que $x - 3$. Por tanto, apliquemos el mismo procedimiento a $7x - 5$. Multipliquemos $(x - 3)$ por 7 para tener el mismo término del mayor grado que en $7x - 5$.

$$(7x - 5) - 7(x - 3) = 16$$

(2) $$7x - 5 = 7(x - 3) + 16$$

Combinando los resultados (1) y (2), tenemos

$$\begin{aligned} 2x^2 + x - 5 &= 2x(x - 3) + 7(x - 3) + 16 \\ &= (2x + 7)(x - 3) + 16. \end{aligned}$$

Como 16 es de menor grado que $(x - 3)$, los polinomios deseados son $Q = 2x + 7$ y $R = 16$. (¿Cuál es el grado de 16?) Por consiguiente,

$$\frac{2x^2 + x - 5}{x - 3} = (2x + 7) + \frac{16}{x - 3}.$$

En este proceso de división de polinomios restamos sucesivamente (polinomios) múltiplos del divisor, obteniendo en cada paso un polinomio de menor grado. Se acaba cuando el resultado es de menor grado que el divisor. Este procedimiento te habrá recordado probablemente, el proceso de división larga de números en la aritmética; y recuerda que tal división se reduce a restar sucesivamente del dividendo múltiplos del divisor. Por ejemplo,

$$\begin{array}{lrr} & \underline{13} & 2953 \quad = 200 \cdot 13 + 20 \cdot 13 + 7 \cdot 13 + 2 \\ \text{Resta} & & \underline{2600} \\ & & 353 \\ & & \underline{260} \\ & & 93 \\ & & \underline{91} \\ & & 2 \end{array}$$

De manera que
$$2953 = 200 \cdot 13 + 20 \cdot 13 + 7 \cdot 13 + 2,$$
$$= 13(200 + 20 + 7) + 2$$

y
$$\frac{2953}{13} = (200 + 20 + 7) + \frac{2}{13}$$
$$= 227 + \frac{2}{13}.$$

Podemos utilizar una forma análoga para disponer nuestro trabajo de división de polinomios. Antes, sin embargo, debemos ver cómo disponer la resta "verticalmente" como se hace en la aritmética. Por ejemplo, el enunciado

$$(-5x^4 + 2x^3 - x + 1) - (3x^4 - x^2 + x + 2) = -8x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 1$$

puede escribirse "verticalmente" así:

$$\begin{array}{lrrrrr} & -5x^4 & + 2x^3 & & - x & + 1 \\ \text{Resta} \longrightarrow & \underline{3x^4} & & \underline{- x^2} & \underline{+ x} & \underline{+ 2} \\ & -8x^4 & + 2x^3 & + x^2 & - 2x & - 1. \end{array}$$

Observa cómo los términos del mismo grado están colocados unos encima de otros y si falta un término (como acontece con el de segundo grado en el primer polinomio), entonces se deja vacío el espacio que le correspondería. La diferencia se obtiene luego restando los términos del mismo grado.

Conjunto de problemas 12-9a

1. Resta, empleando la forma "vertical" descrita en la página 366.

(a)
$$\begin{array}{rrrr} a^3 & -\,5a^2 & +\,2a & +\,1 \\ \underline{a^3} & \underline{+\,7a^2} & \underline{+\,9a} & \underline{-\,11} \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rrrrr} -3x^4 & & -\,5x^2 & -\,7x & +\,2 \\ \underline{-3x^4} & \underline{+\,2x^3} & \underline{-\,3x^2} & \underline{} & \underline{-\,6} \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{rrr} 7y^2 & +\,8y & -\,5 \\ \underline{9y^2} & \underline{+\,4y} & \underline{} \end{array}$$

2. Utiliza la forma "vertical" en lo que sigue:

(a) Resta $3a^2 - 6a + 9$ de $3a^2 + 7a - 11$.

(b) De $12x^3 - 11x^2 + 3$ resta $12x^3 + 6x + 9$.

(c) A $14y^2 + 8y - 16$ súmale $-12y^2 + 3y$.

(d) De $-6x + 8$ resta $-6x - 1$.

Ahora podemos desarrollar una forma "vertical" para la división de polinomios. Utilicemos el mismo ejemplo que antes.

Ejemplo 1. $\dfrac{2x^2 + x - 5}{x - 3}$.

$$\begin{array}{l|l} \underline{x - 3} & 2x^2 + x - 5 = 2x(x - 3) + 7(x - 3) + 16 \\ & \underline{2x^2 - 6x} \\ \text{Resta} & \qquad\;\; 7x - 5 \\ & \qquad\;\; \underline{7x - 21} \\ & \qquad\qquad\; 16 \end{array}$$

De modo que, $2x^2 + x - 5 = (2x + 7)(x - 3) + 16,$

y $$\frac{2x^2 + x - 5}{x - 3} = 2x + 7 + \frac{16}{x - 3}.$$

Conjunto de problemas 12-9b

Efectúa las divisiones indicadas utilizando la forma presentada en el ejemplo 1.

1. $\dfrac{2x^2 - 4x + 3}{x - 2}$

2. $\dfrac{4x^2 - 4x - 15}{2x + 3}$

3. $\dfrac{2x^3 - 5x^2 - 8x + 10}{2x + 3}$

4. $\dfrac{2x^3 - 2x^2 + 5}{x - 6}$ Sugerencia: Escribe el dividendo $2x^3 - 2x^2 \quad + 5$ dejando un espacio para el término de primer grado que falta.

5. $\dfrac{2x^5 + x^3 - 5x^2 + 2}{x - 1}$

6. $\dfrac{3x^3 - 2x^2 + 14x + 5}{3x + 1}$

El ejemplo 1 de la página 367 puede escribirse en forma más concisa así:

Dividendo

$$\text{Divisor} \rightarrow \underline{x - 3}\,\big| \quad 2x^2 + x - 5 \quad \big|\underline{2x + 7} \leftarrow \text{Cociente}$$

$$\begin{array}{r}
\underline{2x^2 - 6x} \\
7x - 5 \\
\underline{7x - 21} \\
16
\end{array} \leftarrow \text{Resto}$$

Comprobación: $(2x + 7)(x - 3) + 16 = 2x^2 + x - 5$

Por consiguiente, $\dfrac{2x^2 + x - 5}{x - 3} = 2x + 7 + \dfrac{16}{x - 3}$.

Ejemplo 2. Divide $x^3 + 3x^2 - 38x - 10$ por $x - 5$.

$$
\begin{array}{r|l|l}
x - 5 & x^3 + 3x^2 - 38x - 10 & x^2 + 8x + 2 \\
 & \underline{x^3 - 5x^2} & \\
 & \quad 8x^2 - 38x - 10 & \\
 & \quad \underline{8x^2 - 40x} & \\
 & \qquad\quad 2x - 10 & \\
 & \qquad\quad \underline{2x - 10} & \\
 & \qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Comprobación: $(x^2 + 8x + 2)(x - 5) + 0 = x^3 + 3x^2 - 38x - 10$.

Por tanto, $\dfrac{x^3 + 3x^2 - 38x - 10}{x - 5} = x^2 + 8x + 2$.

Ejemplo 3. Divide $3x^3 + x$ por $x + 2$.

$$
\begin{array}{r|l|l}
x + 2 & 3x^3 \qquad\quad + x & 3x^2 - 6x + 13 \\
 & \underline{3x^3 + 6x^2} & \\
 & \quad - 6x^2 + x & \\
 & \quad \underline{- 6x^2 - 12x} & \\
 & \qquad\qquad 13x & \\
 & \qquad\qquad \underline{13x + 26} & \\
 & \qquad\qquad\quad - 26 &
\end{array}
$$

Comprobación: $(3x^2 - 6x + 13)(x + 2) - 26 = 3x^3 + x$

Por tanto, $\dfrac{3x^3 + x}{x + 2} = 3x^2 - 6x + 13 - \dfrac{26}{x + 2}$.

Conjunto de problemas 12-9c

1. Divide $x^3 - 3x^2 + 7x - 1$ por $x - 3$.
2. Divide $x^2 - 2x + 15$ por $x - 5$.
3. Divide $x^4 - 9x^2 - 1$ por $x + 3$.
4. Divide $5x^3 - 11x + 7$ por $x + 2$.

En los problemas 5-12, efectúa la división indicada.

5. $\dfrac{4x^2 - 4x - 15}{2x - 3}$
6. $\dfrac{6x^3 - x^2 - 5x + 4}{3x - 2}$
7. $\dfrac{x^4 - 1}{x - 1}$
8. $\dfrac{x^4 + 1}{x + 1}$
9. $\dfrac{x^5 + 1}{x + 1}$
10. $\dfrac{x^2 - 3x - 9}{3x - 15}$
11. $\dfrac{x^3 + x - 1}{2x + 1}$
12. $\dfrac{3x^2 + 2x}{2x + 1}$
13. ¿Cómo queda indicado en el proceso de división que el polinomio D es un factor de N? Muestra que $x + 3$ es un factor de

$$2x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 14x - 3.$$

*En los ejemplos y problemas anteriores, hemos hecho hincapié en el caso donde el divisor es un polinomio de grado uno. Sin embargo, el procedimiento funciona igualmente bien con dos polinomios cualesquiera.

<u>Ejemplo 4</u>. $\dfrac{4x^3 - x^2 + 1}{x^4 - 2x^3 + 1}$

Aquí no hay nada que hacer, pues N es ya de menor grado que D; así que $Q = 0$ y $N = R$. Con otras palabras, la expresión racional ya es "propia".

Ejemplo 5.

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+2 & 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 12x + 1 = 5x(x^3+2) - 3(x^3+2) + 2x^2 + 2x + 7 \\
 & \underline{5x^4 \qquad\qquad\qquad + 10x} \\
 & \qquad - 3x^3 + 2x^2 + 2x + 1 \\
 & \qquad \underline{- 3x^3 \qquad\qquad\quad - 6} \\
 & \qquad\qquad\quad 2x^2 + 2x + 7
\end{array}
$$

De modo que

$$5x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 12x + 1 = (5x - 3)(x^3 + 2) + 2x^2 + 2x + 7$$

y
$$\frac{5x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 12x + 1}{x^3 + 2} = 5x - 3 + \frac{2x^2 + 2x + 7}{x^3 + 2}.$$

Escrito en forma más concisa, resulta:

$$
\begin{array}{r|l|l}
x^3+2 & 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 12x + 1 & 5x - 3 \\
 & \underline{5x^4 \qquad\qquad\qquad + 10x} & \\
 & \qquad - 3x^3 + 2x^2 + 2x + 1 & \\
 & \qquad \underline{- 3x^3 \qquad\qquad\quad - 6} & \\
 & \qquad\qquad\quad 2x^2 + 2x + 7 &
\end{array}
$$

Comprobación:

$$(5x - 3)(x^3 + 2) + (2x^2 + 2x + 7) = 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 12x + 1$$

Por tanto,

$$\frac{5x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 12x + 1}{x^3 + 2} = 5x - 3 + \frac{2x^2 + 2x + 7}{x^3 + 2}.$$

Conjunto de problemas 12-9d

1. Efectúa las divisiones indicadas:

(a) $\dfrac{2x^2 - 4x + 3}{x - 3}$

(b) $\dfrac{4x^2 - 4x - 13}{2x + 3}$

(c) $\dfrac{2x^3 - 5x^2 - 8x + 9}{2x + 3}$

(d) $\dfrac{3x^3 + 7x^2 - 5x + 4}{3x - 1}$

(e) $\dfrac{x^3 + x - 2}{x + 2}$

(f) $\dfrac{2x^3 - x^2 + 4x + 5}{x^2 - 3}$

(g) $\dfrac{x^3 - 2x^2 + 7x - 1}{x^2 - 2x - 1}$

(h) $\dfrac{3x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 7}{x^2 - 4}$

(i) $\dfrac{5x^4 - 3x^3 - x + 4}{5x^3 - 2x^2}$

(j) $\dfrac{3x^4 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - x}$

2. Determina el segundo factor en cada uno de los casos siguientes:

(a) $9x^6 - 25x^4 + 3x + 5 = (3x + 5)(\qquad)$

(b) $x^9 + 1 = (x^3 + 1)(\qquad)$

(c) $2x^4 - 5x^2 - x + 1 = (x^2 - x - 1)(\qquad)$

(d) $4x^8 + 2x^5 - 20x^4 + x^2 - 10x + 25 = (2x^4 + x - 5)(\qquad)$

12-10. Resumen

Introdujimos el concepto de polinomio y vimos que el problema de factorización de expresiones es significativo solamente cuando se limita a la factorización de polinomios. Aunque la mayor parte de nuestra labor ha sido realizada con polinomios sobre los enteros, también consideramos polinomios sobre los números racionales y sobre los números reales. Cada uno de estos conjuntos de polinomios es cerrado respecto a la suma y la multiplicación.

Al factorizar un polinomio de un tipo dado, insistimos en que los factores sean polinomios del mismo tipo. Un polinomio que no es factorizable como polinomio sobre los enteros, puede ser o no factorizable cuando se le considera como un polinomio sobre los números reales. La factorización de un polinomio sobre los números racionales puede reducirse a la factorización de un polinomio sobre los enteros.

Vimos que la factorización es un instrumento útil para resolver ecuaciones.

Los diversos métodos de factorización de polinomios están basados en las siguientes formas:

Propiedad distributiva:

$$ab + ac = a(b + c)$$

Diferencia de cuadrados:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Cuadrados perfectos:

$$a^2 + 2(ab) + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2(ab) + b^2 = (a - b)^2$$

Compleción del cuadrado:

$$x^2 + px = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4}$$

Polinomios cuadráticos en una variable:

$$x^2 + (m + n)x + (mn) = (x + m)(x + n).$$

$$(ac)x^2 + (ad + bc)x + (bd) = (ax + b)(cx + d).$$

Hemos considerado el concepto de expresión racional y observado que las expresiones racionales están con los polinomios en la misma relación en que están los números racionales con los enteros. Los problemas de simplificación de expresiones racionales son análogos a los problemas correspondientes para los números racionales. Vimos que las expresiones racionales tienen las propiedades habituales de las fracciones y que la factorización de polinomios juega el mismo papel en el manejo de las expresiones racionales que la factorización de los enteros juega en el de los números racionales.

Toda expresión racional puede escribirse como un cociente indicado de dos polinomios que no tienen ningún factor común.

Hemos desarrollado un método sistemático de dividir polinomios en una variable. Este se basa en la importante propiedad de los polinomios que dice:

> Para dos polinomios cualesquiera N y D, con D distinto de cero, <u>existen</u> polinomios Q y R, con R de menor grado que D, tal que $N = QD + R$.

La división nos proporciona un medio de calcular Q y R cuando nos dan N y D.

Problemas de repaso

1. ¿Cuáles de las expresiones siguientes son racionales?; ¿polinomios? ¿Cuáles son polinomios en una variable?; ¿polinomios sobre los enteros?; ¿sobre los números racionales?; ¿sobre los números reales?

(a) $(s^2 - t)(3st + 1) + 5(s + t)$

(b) $7x^2 + 2x - 5$

(c) $ax^2 + bx + c$

(d) $2u + v$

(e) $2(u + \frac{1}{2}v)$

(f) $u + \frac{1}{2}v$

(g) $\frac{1}{2}(4u + 2v)$

(h) $(\frac{1}{x})^2 - 2(\frac{1}{x}) + 1$

(i) $\sqrt{x}$

(j) $\sqrt[3]{x}$

(k) $(|x| + 1)(|x| - 1)$

(l) $\frac{a - b}{a + b}$

(m) $\frac{a^2 - b^2}{a + b}$

(n) $\frac{r - 5}{s + 2} \cdot \frac{r + 5}{s - 2}$

(o) $\frac{r - 5}{s + 2} \cdot \frac{s + 2}{r - 5}$

(p) $\frac{1}{3 - z} + \frac{z}{2 + z}$

(q) $s^2 - 2$

(r) $(s + \sqrt{2})(s - \sqrt{2})$

(s) $(a + b)(a - b) + b^2 - a^2$

(t) $\dfrac{1}{(a + b)(a - b) + b^2 - a^2}$

(u) $(t^2 + 1) \cdot \dfrac{r^3 - 3s^2}{t^2 + 1}$

(v) $\sqrt{4}\, x^2 - \frac{10}{2}x + 1$

(w) $x^2 - 2\sqrt{3}\, x + 3$

2. Simplifica las siguientes expresiones:

(a) $2\sqrt{18} + 3\sqrt{12} - \sqrt{\frac{1}{2}} - 6\sqrt{\frac{1}{3}}$

(b) $\sqrt{3}\,\sqrt{6a^4}$

(c) $\sqrt{(x + y)^3}$

3. Multiplica los factores y simplifica los resultados:

(a) $2\sqrt{3}\,(2 - \sqrt{6})$

(b) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$

(c) $(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)$

4. Factoriza los siguientes polinomios sobre los enteros, si es posible:

(a) $x^2 - 22x - 48$

(b) $x^2 - 22x + 48$

(c) $3a^3b^5 - 6a^2b^3 + 12a^4b^4$

(d) $x^2 - y^2 - 4x - 4y$

(e) $(x^2 - y^2) + 2(x - y)^2 - 3(x - y)^3$

(f) $6a^2 - 19a + 10$

(g) $6a^2 + 11a - 10$

(h) $4(x - y)^3 + 8(x - y)^2 - 2(y - x)^2$

(i) $x^2 + 2as + a^2 - bx - ba - cx - ca$

5. (a) ¿Para qué valores enteros positivos de k el polinomio $x^2 + kx + 12$ es factorizable sobre los enteros?

   (b) ¿Para qué valores enteros positivos de k el polinomio $x^2 + 6x + k$ es factorizable sobre los enteros?

   (c) Determina el valor de k para el cual $x^2 - 6\sqrt{3}x + k$ es un cuadrado perfecto.

6. Simplifica las expresiones que siguen:

   (a) $\dfrac{\dfrac{3x^2y^6}{20a^2b^2}}{\dfrac{7(xy^2)^3}{30(ab^2)^2}}$

   (b) $\dfrac{3}{35a^2} + \dfrac{13}{25ab} - \dfrac{5}{7b^2}$

   (c) $\dfrac{2}{a^2 - ab} + \dfrac{3}{b^2 - ab} + \dfrac{4}{ab}$

   (d) $\dfrac{x}{x^2 - 9} + \dfrac{2x - 5}{x^2 - 4x + 3} - \dfrac{3x}{x^2 + 2x - 3}$

7. Divide los siguientes polinomios y comprueba:

   (a) $\dfrac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x - 3}$

   (b) $\dfrac{3x^4 + 14x^3 - 4x^2 - 11x - 2}{3x + 2}$

   (c) $\dfrac{x^3 - 1}{x + 1}$

   (d) $\dfrac{x^5 - 1}{x - 1}$

8. Determina los conjuntos de validez de los siguientes enunciados:

(a) $\frac{3}{5x} - \frac{3}{4x} = \frac{1}{10}$

(b) $\frac{4}{y - 5} = \frac{5}{y}$

(c) $\frac{x + 2}{x + 1} - \frac{x - 1}{x + 2} = 0$

(d) $\frac{5}{n - 3} - \frac{20}{n^2 - 9} = -1$

(e) $\frac{1}{|x - 3|} = 7$

(f) $4x^2 - 243 = x^2$

(g) $3|x|^2 - 2|x| = 0$

(h) $|x|^2 + |x| = 12$

9. Muestra que para todo entero n, el entero $(n + 3)^2 - n^2$ es divisible por 3.

10. Determina si $x - 3$ es o no un factor del polinomio $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 3$.

11. El polinomio $5x^{100} + 3x^{17} - 1$ puede escribirse en la forma

$$5x^{100} + 3x^{17} - 1 = Q(x^3 - x^2 + 1) + R,$$

donde Q y R son polinomios.

(a) ¿Qué se puede decir del grado de R si es el menor posible?

(b) Si R es de grado mínimo, ¿cuál es el grado de Q?

12. El polinomio $2x^4 + 1$ puede escribirse en la forma

$$2x^4 + 1 = 2(x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1) + R$$

donde R es un entero.

(a) ¿Cuál es el significado de esta ecuación? ¿Cuál es su conjunto de validez?

(b) Si se da un valor a x, ¿puedes determinar R sin efectuar la división? ¿Hay algún valor especial de x para el cual esto resulta lo más simple?

13. El polinomio $5x^{100} + 3x^{17} - 1$ puede escribirse en la forma

$$5x^{100} + 3x^{17} - 1 = Q(x - 1) + R,$$

donde Q es un polinomio y R un entero. Determina el entero R sin efectuar la división.

14. El polinomio $4x^8 + n$, en el que n es un entero, puede escribirse en la forma

$$4x^8 + n = Q(x - 1) + R,$$

donde R es un entero.

(a) ¿Cuál es el grado de Q?

(b) Si $R = 0$, ¿qué se puede decir acerca de la relación entre $(x - 1)$ y $4x^8 + n$?

(c) Determina un valor entero de n tal que $R = 0$.

15. Dados los polinomios $2x^{17} - 5x^{15} + 1$ y $x + 3$, determina los polinomios Q y R de tal modo que

$$2x^{17} - 5x^{15} + 1 = Q(x + 3) + R$$

y el grado de R sea menor que 16.

16. Demuestra el

<u>Teorema</u>: Si a y b son números reales positivos y distintos,

entonces $\dfrac{a + b}{2} > \sqrt{ab}$.

Sugerencia: Observa que demostrar que $\dfrac{a + b}{2} > \sqrt{ab}$ es equivalente a demostrar que $a + b - 2\sqrt{ab} > 0$.

En los problemas desde el 17 hasta el 29, traduce cada problema en una ecuación o en una inecuación, y resuélvelo determinando el conjunto de validez de la ecuación o de la inecuación.

17. Un muchacho puede hacer el recorrido de venta de periódicos en 30 minutos. Su sustituto lo hace en sentido inverso y emplea 45 minutos. Cuando trabajan juntos yendo el uno hacia el otro, ¿cuánto tardarán en encontrarse?

18. Una confitería prepara 40 libras de una mezcla de bombones de crema que se venden a $1.00 la libra y de bombones de nueces que se venden a $1.40 la libra. Si dicha mezcla se ha de vender a $1.10 la libra, ¿cuántas libras de cada clase de bombones se necesitan?

19. Un recipiente contiene 100 galones de agua cuya concentración de sal es de 15%. ¿Cuántos galones habrá que remplazar por agua pura de modo que resulte una solución al 10%?

20. Un avión de retropropulsión corre 10 veces más rápidamente que un tren de pasajeros. En una hora el avión recorre 120 millas más que lo que el tren recorrería en 8 horas. ¿Cuál es la velocidad del avión?; ¿cuál la del tren?

21. Dos trenes están a 160 millas el uno del otro y marchan el uno hacia el otro. Uno viaja con una velocidad que es $\frac{2}{3}$ la del otro. ¿Cuál es la velocidad de cada uno si sabemos que tardan 3 horas 12 minutos en encontrarse?

22. Un hombre hace un viaje de 300 millas con una velocidad media de 30 millas por hora y el regreso lo hace a una velocidad media de 20 millas por hora. ¿Cuál es la velocidad media durante todo el viaje de ida y vuelta?

23. Generalización del problema 22: un hombre hace un viaje de d millas a una velocidad media de r millas por hora y el regreso lo hace con una velocidad media de q millas por

hora. ¿Cuál es la velocidad media para el viaje de ida y vuelta?

24. La suma de los recíprocos de dos enteros sucesivos es $\frac{27}{182}$. ¿Cuáles son los números?

25. Determina la media de $\frac{x + 3}{x}$ y $\frac{x - 3}{x}$.

26. El cuadrado de un número es 91 más que 6 veces el número. Escribe la ecuación correspondiente y determina su conjunto de validez.

27. Un automóvil recorre una distancia de 360 millas en una hora menos que otro que marcha con una velocidad 4 millas por hora menos que la del primero. Determina las velocidades de ambos automóviles.

28. Una alfombra de 24 yardas cuadradas se coloca en una habitación cuyas dimensiones son de 14 pies por 20 pies, dejando un ancho uniforme alrededor de la alfombra. ¿Cuál es este ancho? Te ayudará a plantear la cuestión algebraicamente el hacer un diagrama esquemático de la alfombra colocada sobre el suelo.

29. Un cateto de un triángulo rectángulo tiene 2 pies más que el doble del cateto menor. La hipotenusa tiene 13 pies. ¿Cuáles son las longitudes de los catetos?

30. ¿Cuáles de los números siguientes son racionales?

$$\sqrt[3]{\pi^3}, \quad \sqrt{.4}, \quad \sqrt[3]{.0008}, \quad (\sqrt[3]{-1})(\sqrt{.16}) .$$

31. Si un número de dos cifras de la forma $10t + u$ se divide por la suma de sus cifras, el cociente es 4 y el resto es 3. Determina los números para los cuales esta propiedad es válida.

32. Simplifica $1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$.

33. Determina el conjunto de validez de $|x - 5|^2 \geq 9$.

34. ¿En qué instante entre las 3 y las 4 las agujas de un reloj coincidirán? ¿En qué instante estarán en posiciones opuestas?

35. Un granjero tiene \$1000 para comprar novillos a \$25 y vacas a \$26. Sabiendo que el número de novillos y el de vacas son cada uno números enteros positivos, ¿cuál es el mayor número de animales que puede comprar, si quiere gastar los \$1000?

Capítulo 13

CONJUNTO DE VALIDEZ DE ENUNCIADOS ABIERTOS

13-1. Enunciados abiertos equivalentes

En el transcurso de estas lecciones hemos estado resolviendo enunciados abiertos, esto es, hemos estado determinando sus conjuntos de validez. Al principio ensayamos valores de la variable que suponíamos verificaban el enunciado, comprobando siempre la verdad de dicho enunciado. Luego aprendimos que ciertas operaciones, al aplicarlas a los miembros del enunciado, daban lugar a otros enunciados con exactamente el mismo conjunto de validez que el enunciado original. Decimos que:

> Dos enunciados son equivalentes si tienen el mismo conjunto de validez.

Entonces nuestro procedimiento en la solución de un enunciado consistía en efectuar operaciones permitidas sobre el enunciado para producir un enunciado equivalente cuyo conjunto de validez es obvio.

¿Cuáles son las operaciones permitidas? Recordemos antes un problema ya previamente estudiado.

Ejemplo 1. Resuelve $3x + 7 = x + 15$.

Este enunciado es equivalente a

$$(3x + 7) + (-x - 7) = (x + 15) + (-x - 7),$$

esto es, a

$$2x = 8.$$

Este enunciado es equivalente a

$$(2x)(\tfrac{1}{2}) = (8)(\tfrac{1}{2}),$$

esto es, a

$$x = 4.$$

Por tanto, "$3x + 7 = x + 15$" y "$x = 4$" son enunciados equivalentes, y el conjunto de validez deseado es $\{4\}$.

Examinemos este ejemplo con más detenimiento. Cuando decimos que "$3x + 7 = x + 15$" es equivalente a "$2x = 8$", queremos significar que toda solución del primer enunciado es una solución del segundo y que toda solución del segundo enunciado es una solución del primero. ¿Cómo nos aseguramos de que esto es así? Sabemos que $(-x - 7)$ es un número real para todo valor de x. Así que, cuando sumamos $(-x - 7)$ a los dos miembros del primer enunciado, obtenemos otro enunciado que es cierto para los mismos valores de x y posiblemente más. Para mostrar la equivalencia de esos enunciados, tenemos también que verificar que toda solución del segundo enunciado es una solución del primero. Esto lo podemos lograr sumando $(x + 7)$ a los dos miembros del segundo enunciado para obtener el primero, mostrando así que toda solución del segundo enunciado lo es también del primero.

En verdad no necesitamos realizar este segundo paso de "invertir" la operación. Ya sabíamos que era posible, porque sabemos que el opuesto de $(-x - 7)$ es también un número real para todo valor de x.

De igual manera sabemos que "$2x = 8$" es equivalente a "$x = 4$", porque la operación de multiplicar los miembros de "$2x = 8$" por $\frac{1}{2}$ es invertible, siendo la operación inversa la de multiplicar por 2. En efecto, todo número real distinto de cero tiene un recíproco que es un número real.

Así que, dos operaciones que producen enunciados equivalentes son:

(1) Sumar un número real a los dos miembros,

(2) Multiplicar ambos miembros por un número real distinto de cero.

Todos los enunciados resueltos hasta ahora han sido de un tipo cuyos miembros son polinomios. Recuerda que un polinomio no contiene ninguna división indicada con variables en el denominador. Como consecuencia, no hemos necesitado enfrentarnos al problema de determinar enunciados más sencillos multiplicando los miembros de un enunciado por expresiones que contienen variables.

Consideremos ahora otros tipos de enunciados, incluyendo aquellos cuyos miembros son expresiones racionales.

Ejemplo 2. Resuelve $\frac{x^2}{x^2 + 1} = \frac{1}{2}$.

Multiplicando ambos miembros por $2(x^2 + 1)$ podemos obtener un enunciado libre de fracciones. ¿Produce esta operación un enunciado equivalente? Sí, porque para todo valor de x, $2(x^2 + 1)$ es un número real distinto de cero. De modo que, el enunciado es equivalente a

$$\frac{x^2}{x^2 + 1}\cdot 2(x^2 + 1) = \frac{1}{2}\cdot 2(x^2 + 1),$$

esto es, a

$$2x^2 = x^2 + 1.$$

Este enunciado es equivalente a

$$x^2 - 1 = 0, \qquad \text{(¿Por qué?)}$$

esto es, a

$$(x - 1)(x + 1) = 0.$$

Finalmente, este enunciado es equivalente a

$$x - 1 = 0 \quad \text{ó} \quad x + 1 = 0, \qquad \text{(¿Por qué?)}$$

y obtenemos que el conjunto de validez deseado es $\{1, -1\}$.

Conjunto de problemas 13-1a

1. Para cada uno de los siguientes pares de enunciados, determina si los enunciados son o no equivalentes. Puedes demostrar que son equivalentes empezando con cualquiera de

los dos enunciados y aplicándole las operaciones que lo transforman en enunciados equivalentes, hasta que llegues a obtener el otro enunciado del par a que pertenece. Si crees que no son equivalentes, trata de demostrarlo buscando un número que esté en el conjunto de validez de uno de los enunciados, pero que no pertenezca al del otro.

(a) $2s = 12$; $s = 6$

(b) $5s = 3s + 12$; $2s = 12$

(c) $5y - 4 = 3y + 8$; $y = 6$

(d) $7s - 5s = 12$; $s = 6$

(e) $2x^2 + 4 = 10$; $x^2 = 4$

(f) $3x + 9 - 2x = 7x - 12$; $\frac{7}{3} = x$

(g) $x^2 = x - 1$; $1 = x - x^2$

(h) $\frac{y - 1}{|y| + 2} = 3$; $y - 1 = 3(|y| + 2)$

(Sugerencia: ¿Es $(|y| + 2)$ un número real distinto de cero para todo valor de y?)

(i) $x^2 + 1 = 2x$; $(x - 1)^2 = 0$

(j) $x^2 - 1 = x - 1$; $x + 1 = 1$

(k) $\frac{x^2 + 5}{x^2 + 5} = 0$; $x^2 + 5 = 0$

(l) $\frac{x^2 + 5}{x^2 + 5} = 1$; $x^2 + 5 = 1$

(m) $v^2 + 1 = 0$; $|v + 1| = 0$

2. Decide para cada par de enunciados si son o no equivalentes:

(a) $4 - 2x = 10$; $x = -3$

(b) $12x + 5 = 10 - 3x$; $x = \frac{1}{3}$

(c) $x^2 - 4 = 0$; $x = 2$ ó $x = -2$

(d) $x = 3$; $x(x - 3) = 0$

(e) $x - 1 = 0$; $x^2 - 1 = 0$

(f) $|x| = 1$; $x^2 = 1$

3. Transforma cada una de las siguientes ecuaciones en otra equivalente pero más sencilla:

(a) $y + 23 = 35$

(b) $\frac{19}{20}x = 19$

(c) $6 - t = 7$

(d) $\frac{1}{7}s = \frac{1}{105}$

(e) $x(x^2 + 1) = 2x^2 + 2$
(Sugerencia: ¿Es $\frac{1}{x^2 + 1}$ un número real distinto de cero para todo valor de x?)

(f) $y(|y| + 1) = |y| + 1$

4. Resuelve (esto es, determina el conjunto de validez) si es posible:

(a) $11t + 21 = 32$

(b) $\frac{4}{3} - \frac{y}{5} = \frac{1}{2}$

(c) $\frac{5}{8}x - 17 = 33$

(d) $6 - s = s + 6$

(e) $s - 6 = 6 - s$

(f) $s - 6 = s + 6$

(g) $\frac{y}{3} + \frac{2}{3} = \frac{y}{2} + \frac{3}{2}$

(h) $4x + \frac{3}{2} = x + 6$

(i) $x^4 + x^2 + 1 = x^2$

(j) $y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 = y^4 - y^3 + y^2 - y + 1$

(k) $x^2 + 3x = x - \frac{x^2}{2}$

5. Con frecuencia podemos simplificar uno o ambos miembros de un enunciado. ¿Qué tipos de simplificación algebraica garantizarán que la forma simplificada es equivalente a la original? Considera la reducción de términos:

¿Son $3x - 2 - 4x + 6 = 0$ y $-x + 4 = 0$ equivalentes?

Considera la factorización:

¿Son $x^2 - 5x + 6 = 0$ y $(x - 3)(x - 2) = 0$ equivalentes?

¿Son $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$ y $x + 2 = 4$ equivalentes?

6. En cada uno de los siguientes pares de enunciados, di por qué son equivalentes o por qué no lo son:

(a) $2a + 5 - a = 17$; $a + 5 = 17$

(b) $3x^2 - 6x = 0$; $3x(x - 2) = 0$

(c) $3x^2 = 6x$; $3x = 6$

(d) $3x^2 = 6x$; $3x^2 - 6x = 0$

(e) $6y^2 + 3 - 2y^2 = 5 + y + 2$; $4y^2 + 3 = y + 7$

(f) $b + 3 = 0$; $0 = b + 3$

(g) $2 = \frac{y^2 + 2y}{y}$; $2 = y + 2$

(h) $2(h + 2) + 2(h + 3) = 27$; $4h + 10 = 27$

Hemos tenido cuidado de sumar sólo números reales o de multiplicar siempre por números reales distintos de cero, porque tenemos la seguridad de que tales operaciones dan lugar a enunciados equivalentes. ¿Será posible obtener también enunciados equivalentes empleando otras operaciones? Veamos otro ejemplo.

Ejemplo 3. Resuelve $x(x - 3) = 2(x - 3)$.

Sin efectuar ninguna operación formal, podemos sospechar que 2 y 3 son soluciones de esta ecuación. ¿Habrá otras además? Si deseamos obtener un enunciado más simple, podemos intentar el multiplicar ambos miembros por $\frac{1}{x - 3}$. Entonces obtenemos el nuevo enunciado

$$x(x - 3) \cdot \frac{1}{x - 3} = 2(x - 3) \cdot \frac{1}{x - 3},$$

cuya forma más simple es

$$x = 2.$$

Ciertamente 2 es la única solución de este enunciado. Esto significa que la operación de multiplicar por $\frac{1}{x - 3}$ dio lugar a un nuevo enunciado con un conjunto de validez <u>más pequeño</u>. De modo que, tal operación no dará necesariamente un enunciado equivalente. Probablemente te has dado cuenta de dónde está la dificultad: para $x = 3$, $\frac{1}{x - 3}$ <u>no es un número</u> y la operación de multiplicar por $\frac{1}{x - 3}$ sólo es efectiva para los valores de x diferentes de 3.

El <u>ejemplo 3</u>, sugiere, pues, que nunca debemos sumar o multiplicar ambos miembros de un enunciado por una expresión que para algunos valores de la variable <u>no es un número</u>.

<u>Ejemplo 4</u>. Resuelve $\frac{x - 2}{x - 1} = 2 - \frac{1}{x - 1}$.

En primer lugar observamos que el dominio de x no puede incluir al número 1. (¿Por qué?) Así que realmente tenemos que resolver el enunciado

$$\frac{x - 2}{x - 1} = 2 - \frac{1}{x - 1} \text{ y } x \neq 1.$$

Es natural multiplicar ambos miembros de la ecuación por $(x - 1)$. ¿Es $(x - 1)$ un número real para todo valor de x perteneciente a su dominio? ¿Es $(x - 1)$ distinto de cero? (Recuerda que $x \neq 1$.) Por consiguiente, obtenemos un enunciado equivalente al multiplicar por $(x - 1)$.

$$\frac{x-2}{x-1}\cdot(x-1) = 2(x-1) - \frac{1}{x-1}\cdot(x-1) \ \underline{y} \ x \neq 1,$$

$$x - 2 = 2x - 2 - 1 \ \underline{y} \ x \neq 1,$$

$$1 = x \ \underline{y} \ x \neq 1.$$

Este último enunciado tiene un conjunto de validez vacío. Por tanto, el enunciado original no tiene soluciones.

El problema del ejemplo 4 nos indica que debemos tener el cuidado de fijarnos en todo momento en cuál es el dominio de la variable. Así, podemos multiplicar siempre por una expresión que para todos los valores en el dominio de la variable, es un número real distinto de cero.

Conjunto de problemas 13-1b

1. Para cada una de las frases siguientes decide si es
   (i) un número real para todo valor de la variable,
   (ii) un número real distinto de cero para todo valor de la variable.

(a) $x^2 - 4x + 3$

(b) $\frac{3-4y}{y+4}$

(c) $3 + r + \frac{1}{r}$

(d) $\sqrt{t+1}$

(e) $|y + 1|$

(f) $|y| + 1$

(g) $\frac{x^2}{x^2+1}$

(h) $\frac{x^2+1}{x^2+1}$

(i) $\sqrt{v^2+1}$

(j) -3

(k) $\frac{x}{x}$

(l) $\frac{q^2-1}{q+1}$

2. Resuelve:

(a) $\frac{y}{y - 2} = 3$

(b) $\frac{x}{x^2 + 1} = x$

(c) $\frac{1}{x} + 3 = \frac{2}{x}$

(d) $\frac{1}{x - 2} + \frac{x - 3}{x - 2} = 2$

(e) $\frac{1}{x + 1} + 1 = \frac{x}{x + 1}$

(f) $x(x^2 + 1) = 2x^2 + 2$

3. Determina las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro tiene 30 pulgadas y cuya área es de 54 pulgadas cuadradas.

4. Determina tres números enteros sucesivos tales que la suma de sus cuadrados sea 61.

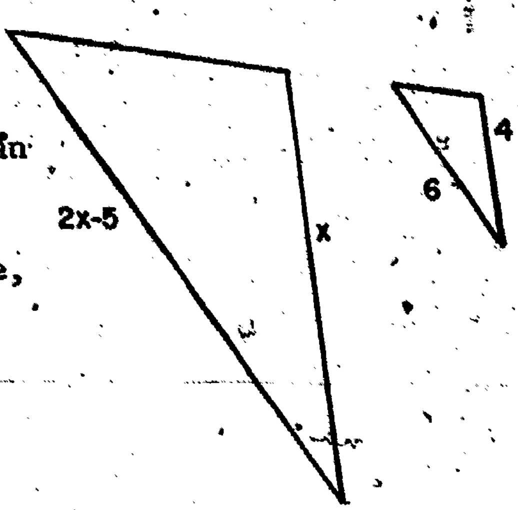
5. La suma de dos números es 8 y la suma de sus recíprocos es $\frac{2}{3}$. ¿Cuáles son esos números?

6. En cierta escuela la razón del número de niños al de niñas es $\frac{7}{6}$. Si hay 2600 alumnos en la escuela, ¿cuántas niñas habrá?

7. Muestra que cualquier par de números (x, y) para el cual una de las dos ecuaciones $3x + 18 = y + 23$, $y = 3x - 5$ es verdadera, también hace verdadera a la otra. Entonces, ¿cuál es la relación entre el conjunto de todos los pares que resuelven la primera ecuación y el de todos los pares que resuelven la segunda?

8. Muestra que las ecuaciones $4x - \frac{2}{3}y = 6$ y $y = 6x - 9$ son equivalentes.

9. Los lados cuyas longitudes son x y $2x - 5$, del primer triángulo están en la misma razón que los lados de longitudes 4 y 6, respectivamente, del segundo triángulo. ¿Cuáles son las longitudes de los dos lados del primer triángulo?



10. Se necesita hacer una mezcla para eliminar malas yerbas en la proporción de 3 partes de yerbicida por cada 17 partes de agua. ¿Cuántos cuartillos de yerbicida hay que poner en un tanque de 10 galones, que luego se llenará con agua, para obtener 10 galones de la mezcla deseada?

13-2. Desigualdades equivalentes

En el capítulo 8 resolvimos algunas desigualdades mediante otras equivalentes más sencillas. Recuerda que con frecuencia hicimos uso de las propiedades:

Para números reales a, b, c, $a < b$ si y sólo si $a + c < b + c$,

y

para c positivo, $a < b$ si y sólo si $ac < bc$,

para c negativo, $a < b$ si y sólo si $ac > bc$.

Resulta así que las operaciones que podemos efectuar sobre una desigualdad para obtener otra equivalente son en cierto modo parecidas a las de las ecuaciones. La única diferencia es que cuando multiplicamos ambos miembros de una desigualdad por un número real distinto de cero, tenemos que asegurarnos de si es positivo o negativo. Por ejemplo, $x^2 + 1$ es siempre positivo para todo valor de x; $-\frac{1}{x^2 + 2}$ es siempre negativo para todo valor de x; pero $x^2 - 1$ es negativo para algunos valores, positivo para otros y 0 para otros, de donde se deduce que no debemos utilizar $x^2 - 1$ como un multiplicador.

Resumiendo, algunas de las operaciones que dan lugar a desigualdades equivalentes son las siguientes:

(1) Sumar un número real a ambos miembros,

(2) Multiplicar ambos miembros por un número <u>positivo</u>, en cuyo caso el sentido de la desigualdad para los productos obtenidos no cambia,

(3) Multiplicar ambos miembros por un número <u>negativo</u>, en cuyo caso el sentido de la desigualdad para los productos obtenidos resulta invertido.

<u>Ejemplo 1</u>. Resuelve $\frac{4}{5}y - 6 < \frac{2}{3}y + \frac{5}{6}$.

Podemos primero multiplicar ambos miembros por el número real positivo 30 para obtener así un enunciado libre de fracciones:

$$24y - 180 < 20y + 25.$$

Ahora sumamos el número real $-20y + 180$ a los dos miembros:

$$4y < 205,$$

Finalmente, multiplicamos por el número real positivo $\frac{1}{4}$:

$$y < \frac{205}{4}.$$

¿Cuál es el conjunto de validez de la inecuación original? Explica por qué todos estos enunciados son equivalentes.

<u>Ejemplo 2</u>. Resuelve $-\frac{1}{x^2 + 1} > -1$.

Puesto que $-(x^2 + 1)$ es un número real negativo para cada valor de x, podemos multiplicar ambos miembros por $-(x^2 + 1)$ para obtener el enunciado equivalente

$$1 < x^2 + 1.$$

Sumando -1 a los dos miembros, tenemos el enunciado equivalente

$$0 < x^2.$$

El conjunto de validez de este último enunciado es el conjunto de todos los números reales distintos de cero. Éste es también el conjunto de validez de la inecuación original.

Conjunto de problemas 13-2

1. Resuelve las inecuaciones siguientes, transformándolas en inecuaciones más sencillas:

(a) $x + 12 < 39$

(b) $\frac{5}{7}x < 36 - x$

(c) $\sqrt{2} + 2x > 3\sqrt{2}$

(d) $t\sqrt{3} < 3$

(e) $8y - 3 > 3y + 7$

(f) $\frac{t}{3} < 4 + \frac{t}{6} - 2$

(g) $x^2 + 5 \geq 4$

(h) $\frac{3}{x^2 + 4} < -2$

(i) $-\frac{2}{x^2 + 2} \geq -1$

2. Resuelve los enunciados siguientes:

(a) $1 < 4x + 1 < 2$
(Esto es equivalente a "$1 < 4x + 1$ y $4x + 1 < 2$").

(b) $4t - 4 < 0$ y $1 - 3t < 0$

(c) $-1 < 2t < 1$

(d) $6t + 3 < 0$ ó $6t - 3 > 0$

(e) $|x - 1| < 2$

(f) $|2t| < 1$

(g) $|x + 2| < \frac{1}{2}$

(h) $|y + 2| > 1$

3. Construye las gráficas de los conjuntos de validez de los enunciados de los problemas 2(a), (c), (e) y (h).

4. Determina cuáles de los siguientes son números reales negativos para todo valor de x:

(a) x

(b) $-x$

(c) $\dfrac{1}{-x^2 - 1}$

(d) $|-x - 1|$

(e) $-|x + 1|$

(f) -5

5. Resuelve $3y - x + 7 < 0$ respecto de y; esto es, obtén un enunciado equivalente con y solo en el miembro de la izquierda. ¿Cuál es el conjunto de validez para y cuando $x = 1$? Ahora resuelve $3y - x + 7 < 0$ respecto de x. ¿Cuál es el conjunto de validez para x si $y = -2$?

6. Si el área de un rectángulo es de 12 pulgadas cuadradas y su longitud es menor que 5 pulgadas, ¿cuál será su anchura?

7. Formula un enunciado abierto que exprese que un cierto número negativo es menor que su recíproco. Resuelve el enunciado.

13-3. Ecuaciones que contienen expresiones factorizadas

Cuando en el capítulo 12 resolviste ecuaciones cuadráticas de la forma

$$(x - 3)(x + 2) = 0,$$

necesitaste la importante propiedad de los números (Teorema 7-8e):

> Para números reales a, b, $ab = 0$
> si y sólo si $a = 0$ ó $b = 0$.

Enuncia esta propiedad para los a y b particulares de la ecuación anterior. Interpreta por ti mismo el "si y sólo si".

Es esta propiedad, y el que $x - 3$ y $x + 2$ sean números reales para todo valor real de x, lo que garantiza la equivalencia del enunciado "$(x - 3)(x + 2) = 0$" y el enunciado "$x - 3 = 0$ ó $x + 2 = 0$". De manera que el conjunto de validez es $\{3, -2\}$.

¿Cómo extenderías esta propiedad a ecuaciones tales como $abcd = 0$? Establece una propiedad general para cualquier número de factores. ¿Cuál es el conjunto de validez de

$$(x + 1)(x - 3)(2x + 3)(3x - 2) = 0?$$

Conjunto de problemas 13-3a

1. Determina los conjuntos de validez de:

   (a) $(a + 2)(a - 5) = 0$

   (b) $(x + 3)(x + 1)(x - 2)(x) = 0$

   (c) $(3y - 1)(2y + 1)(4y - 3) = 0$

2. Resuelve:

   (a) $x^2 + x - 2 = 0$

   (b) $0 = x^2 - 121$

   (c) $(x^2 - 1)(x^2 + 5x + 6) = 0$

   (d) $(x^2 - 5)(x^2 - 24) = 0$

   (e) $x^3 = 25x$

   (f) $2x^2 - 5x = 3$

   (g) $x^3 + x = 2x^2$

   (h) $x^2 + 2 = 0$

   (i) $3x^2 = 21x - 18$

   (j) $x^2 - 4x + 2 = 0$

   (k) $x^2 + 6x = 1$

3. Resuelve $x^3 = 8$ ensayando una solución por conjetura y mostrando que es la única solución real argumentando sobre el "tamaño" de x. (Si $x < 2$, ¿qué pasa con x^3? Si $x > 2$; ¿qué pasa con x^3?)
4. Resuelve $x^4 = 1$ escribiéndolo como $(x^2)^2 - 1 = 0$, y factorizando.
5. Determina un polinomio que tenga el valor 0 cuando x toma valores pertenecientes al conjunto $\{1, -1, 0\}$.
6. Determina el conjunto de validez del enunciado

$$(x - 3)(x - 1)(x + 1) = 0 \ \underline{y} \ |x - 2| < 2.$$

Hemos tenido buen cuidado de evitar el sumar y el multiplicar por una expresión que para algún valor de la variable no sea un número real. Veamos otro ejemplo que pone de manifiesto este peligro.

Consideremos este ejemplo: Resuelve $(x - 3)(x^2 - 1) = 4(x^2 - 1)$.

Nuestro primer impulso es multiplicar ambos miembros por $\frac{1}{x^2 - 1}$. Pero para algunos valores de x, $\frac{1}{x^2 - 1}$ no es un número real. ¿Qué valores? En cambio, puesto que $4(x^2 - 1)$ es un número real para todo x, sumemos $-4(x^2 - 1)$ a ambos miembros, con lo cual resulta

$$(x - 3)(x^2 - 1) - 4(x^2 - 1) = 0$$

$$(x - 3 - 4)(x^2 - 1) = 0 \qquad \text{(¿Por qué?)}$$

$$(x - 7)(x - 1)(x + 1) = 0$$

Cada uno de estos enunciados es equivalente a cualquiera de los otros. ¿Cuál es el conjunto de validez resultante? Si hubiésemos multiplicado los dos miembros (impensadamente) por $\frac{1}{x^2 - 1}$, ¿cuál hubiera sido el conjunto de validez del enunciado resultante?

Este ejemplo nos advierte que "$ac = bc$" y "$a = b$" no son equivalentes. En cambio, tenemos a continuación una sucesión de enunciados equivalentes:

$$ac = bc$$
$$ac - bc = 0$$
$$(a - b)c = 0$$
$$a - b = 0 \text{ ó } c = 0$$

Esto nos dice que el enunciado

$$ac = bc$$

es equivalente al enunciado

$$a - b = 0 \text{ ó } c = 0,$$

cuando a, b, y c son números reales.

Conjunto de problemas 13-3b

1. Resuelve:

   (a) $x(2x - 5) = 7x$

   (b) $(3 + x)(x^2 + 1) = 5(3 + x)$

   (c) $(x - 2)(3x + 1) = (x - 2)(x - 5)$

   (d) $3(x^2 - 4) = (4x + 3)(x^2 - 4)$

   (e) $5x - 15 = x^2 - 3x$

2. Multiplica los dos miembros de la ecuación "$x^2 = 3$" por $(x - 1)$. ¿Son los mismos el nuevo conjunto de validez y el original? ¿Es $x - 1$ igual a cero para algún valor de x?

3. Multiplica los dos miembros de la ecuación "$t^2 = 1$" por $(t + 1)$. Compara el conjunto de validez nuevo con el original. Explica las diferencias que las dos multiplicaciones producen en los conjuntos de validez de los problemas 2 y 3.

13-4. Ecuaciones fraccionarias

La expresión $\frac{1}{x}$ no es un número real cuando x es 0. Por consiguiente, cuando tratamos de resolver la ecuación

$$\frac{1}{x} = 2$$

tenemos que limitarnos a números diferentes de 0. Con otras palabras, tenemos que resolver el enunciado

$$\frac{1}{x} = 2 \ \underline{y} \ x \neq 0.$$

Sabiendo que x no puede ser 0, podemos entonces multiplicar por el número x, distinto de cero, para obtener

$$\frac{1}{x} \cdot x = 2x \ \underline{y} \ x \neq 0,$$

$$1 = 2x \ \underline{y} \ x \neq 0.$$

Luego, "$\frac{1}{x} = 2$ $\underline{y}$ $x \neq 0$" y "$1 = 2x$ $\underline{y}$ $x \neq 0$" son enunciados equivalentes. El último tiene el conjunto de validez $\{\frac{1}{2}\}$. Así que $\frac{1}{2}$ es la solución.

Otra manera de tratar este mismo problema es añadir -2 a los dos miembros de "$\frac{1}{x} = 2$", resultando

$$\frac{1}{x} - 2 = 0$$

$$\frac{1 - 2x}{x} = 0 \qquad \text{(¿Por qué?)}$$

¿Qué requisitos deben cumplir a $\underline{y}$ c para que el número $\frac{a}{c}$ sea 0? Son, primero, que $c \neq 0$ (¿por qué?) y segundo, que $a = 0$ (¿por qué?). De modo que el enunciado "$\frac{a}{c} = 0$" es equivalente al enunciado "$a = 0$ $\underline{y}$ $c \neq 0$".

Entonces, ¿a qué enunciado es equivalente "$\frac{1 - 2x}{x} = 0$"? Tu respuesta deberá ser "$1 - 2x = 0$ $\underline{y}$ $x \neq 0$", que es el mismo enunciado que obtuvimos antes. ¿Puedes determinar del mismo modo el conjunto de validez de "$\frac{x + 1}{x - 2} = 0$"?

Las mismas dos maneras pueden utilizarse con ecuaciones fraccionarias más complicadas. Así, podemos resolver la ecuación

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1 - x}$$

o bien multiplicando ambos miembros por un polinomio conveniente (¿cuál?), o bien escribiéndola primero en la forma $\frac{1}{x} - \frac{1}{1 - x} = 0$ y luego simplificando por reducción a una sola fracción. En cualquiera de los dos casos tenemos que reconocer dos "valores ilegales" de x: 0 y 1. La solución está sometida a la restricción de que x no sea ninguno de esos valores. Empleando el segundo método, obtenemos "$\frac{(1 - x) - x}{x(1 - x)} = 0$" que es equivalente a "$1 - 2x = 0$ y $x \neq 0$ y $x \neq 1$". La solución de este enunciado es $\frac{1}{2}$, que es, por tanto, la solución del enunciado original.

Como último ejemplo, resuelve

$$\frac{x}{x - 2} = \frac{2}{x - 2}.$$

Puesto que $x \neq 2$, después de multiplicar ambos miembros por $x - 2$, obtenemos

$$\frac{x}{x - 2} \cdot (x - 2) = \frac{2}{x - 2} \cdot (x - 2) \ \underline{y} \ x \neq 2,$$

$$x = 2 \ \underline{y} \ x \neq 2.$$

Luego el enunciado "$\frac{x}{x - 2} = \frac{2}{x - 2}$" es equivalente a "$x = 2$ y $x \neq 2$". ¿Cuál es el conjunto de validez de este enunciado?

Conjunto de problemas 13-4

Resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $\frac{2}{x} - \frac{3}{x} = 10$

2. $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 10$

3. $x + \frac{1}{x} = 2$

4. $y - \frac{2}{y} = 1$

5. $\frac{s - 2}{5s} + \frac{3}{s^2} = 1$

6. $\frac{3}{2y} - \frac{2 + 5y}{y} = \frac{1}{3}$

7. $\frac{1}{y} - \frac{1}{y - 4} = 1$

8. $\frac{1}{t} = \frac{1}{t - 1}$

9. $\left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)^2 = 4$

10. $\frac{-2}{x - 2} + \frac{x}{x - 2} = 1$

11. $\left(\frac{x}{x + 1}\right)(x^2 - 1) = 0$

12. $\frac{t}{1 + t} + \frac{t}{t - 1} = 0$

13. $\frac{1 - y}{1 + y} + \frac{1 + y}{1 - y} = 0$

14. $\frac{1 - y}{1 + y} - \frac{1 + y}{1 - y} = 0$

*15. $\frac{1}{y} + \frac{2}{1 - y} + \frac{1}{1 + y} = 0$

*16. $\frac{1}{x} + \frac{1}{1 - x} + \frac{-1}{1 + x} = 0$

17. La suma de un número y su recíproco es -2. ¿Cuál es el número?

18. (a) La imprenta A puede hacer una cierta tarea en 3 horas y la imprenta B puede hacer la misma tarea en 2 horas. Si ambas trabajan a la vez en dicha tarea, ¿en cuántas horas pueden acabarla?

(b) Si las imprentas A y C trabajan juntas en la tarea considerada y la acaban en 2 horas, ¿cuánto tiempo hubiera empleado la imprenta C para realizar la tarea sola?

(c) Las imprentas A y B empiezan la tarea, pero al cabo de la primera hora la imprenta B deja de trabajar. Si A termina sola la tarea, ¿cuánto tiempo tiene que trabajar A después del cese de B?

19. En cada uno de los ejemplos siguientes, expresa la variable indicada en términos de las otras.

<u>Ejemplo</u>: $V = \frac{1}{3}Bh$; B.

Esto es equivalente a

$$V\left(\frac{3}{h}\right) = \frac{1}{3}Bh\left(\frac{3}{h}\right) \ \underline{y} \ \ h \neq 0,$$

es decir, a

$$\frac{3V}{h} = B \ \underline{y} \ \ h \neq 0.$$

(a) $A = \frac{1}{2}bh$; h

(b) $T = \frac{D}{R}$; R

(c) $A = \frac{1}{2}h(x + y)$; h

(d) $S = \frac{n}{2}(a + \ell)$; ℓ

(e) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$; b

13-5. <u>Elevación al cuadrado</u>

Si $a = b$, entonces desde luego $a^2 = b^2$. ¿Por qué? ¿Piensas que, al contrario, si $a^2 = b^2$ entonces $a = b$? Puedes darte cuenta inmediatamente que esto no es así. Da un ejemplo. Luego "$a^2 = b^2$" y "$a = b$" <u>no</u> son enunciados equivalentes.

Por otra parte, podemos transformar $a^2 = b^2$ mediante una cadena de enunciados equivalentes como sigue:

$$a^2 = b^2$$

$$a^2 - b^2 = 0$$

$$(a - b)(a + b) = 0$$

$$a - b = 0 \text{ ó } a + b = 0$$

$$a = b \text{ ó } a = -b$$

Explica por qué cada uno de estos enunciados es equivalente al que le sigue. Así, "$a^2 = b^2$" y "$a = b$ ó $a = -b$" son enunciados equivalentes.

Si elevamos al cuadrado los dos miembros del enunciado "$x = 3$", obtenemos "$x^2 = 9$", que es equivalente a "$x = 3$ ó $x = -3$". De modo que, la elevación al cuadrado de los miembros de un enunciado amplía algunas veces el conjunto de validez.

Conjunto de problemas 13-5a

Explica el efecto que produce en los conjuntos de validez de las siguientes ecuaciones, la elevación al cuadrado de sus dos miembros:

1. $x = 2$
2. $x - 1 = 1$
3. $x + 2 = 0$
4. $x - 1 = 2$

En los problemas anteriores es obvio cuál es el conjunto de validez original, y no hemos necesitado emplear el nuevo conjunto de validez para obtener el original. Sin embargo, a veces cuadramos ambos miembros de una ecuación con el fin de simplificar en situaciones en las que todavía no conocemos el conjunto de validez. Sabemos, como en los problemas anteriores, que cualquier solución de la ecuación original es una solución de la ecuación obtenida cuadrando. Pero también sabemos que el nuevo conjunto de validez puede ser más amplio que el original. Por lo tanto, cada solución de la nueva ecuación tiene que ser comprobada en la ecuación original con el fin de eliminar cualquier posible solución extraña introducida durante el proceso de la elevación al cuadrado.

Ejemplo 1. Resuelve $\sqrt{x + 3} = 1$.

Si $\sqrt{x + 3} = 1$ es cierto para algún x,

entonces $(\sqrt{x + 3})^2 = (1)^2$ es cierto para el mismo x;

$$x + 3 = 1,$$

$$x = -2.$$

Si $x = -2$, entonces $\sqrt{x + 3} = \sqrt{-2 + 3} = \sqrt{1} = 1$.

Luego, -2 es la solución.

Ejemplo 2. Resuelve $\sqrt{x} + x = 2$.

Nuestro objetivo es cuadrar ambos miembros y obtener una ecuación libre de radicales. Tratémoslo.

$$(\sqrt{x} + x)^2 = 2^2$$

$$(\sqrt{x})^2 + 2(\sqrt{x})(x) + x^2 = 2^2$$

$$x + 2x\sqrt{x} + x^2 = 4.$$

Aparentemente, hemos llegado a un enunciado más complicado, que contiene todavía un radical. En cambio, antes de cuadrar escribimos el enunciado en la forma equivalente

$$\sqrt{x} = 2 - x .$$

Entonces obtenemos

$$(\sqrt{x})^2 = (2 - x)^2$$

$$x = 4 - 4x + x^2$$

$$0 = 4 - 5x + x^2$$

$$0 = (x - 4)(x - 1)$$

$$x = 4 \text{ ó } x = 1.$$

Con otras palabras, si hay soluciones del enunciado tienen que pertenecer al conjunto $\{1, 4\}$. Ensayando cada una de estas posibilidades, encontramos que 4 no verifica el enunciado original, mientras que 1 sí. La solución es, por tanto, 1.

Ejemplo 3. Resuelve $|x| - x = 1$.

Otra vez podemos obtener un enunciado más sencillo cuadrando. Aquí utilizamos una propiedad de los valores absolutos que deberás demostrar en el problema 11: $|x|^2 = x^2$ para todo número real x. Entonces tenemos la sucesión de enunciados:

$$|x| = x + 1$$
$$(|x|)^2 = (x + 1)^2$$
$$x^2 = x^2 + 2x + 1$$
$$2x + 1 = 0$$
$$x = -\frac{1}{2}$$

Por comprobación, encontramos que $-\frac{1}{2}$ verifica la ecuación original y es, por consiguiente, su solución.

Conjunto de problemas 13-5b

Resuelve las ecuaciones siguientes, cuadrando:

1. $\sqrt{2x} = 1 + x$
2. $\sqrt{2x + 1} = x + 1$
3. $\sqrt{x + 1} - 1 = x$
4. $\sqrt{4x} - x + 3 = 0$
5. $3\sqrt{x + 13} = x + 9$
6. $|2x| = x + 1$
7. $2x = |x| + 1$
8. $x = |2x| + 1$
9. $x - |x| = 1$
10. $|x - 2| = 3$

11. Demuestra que: Para todo número real x,
$$|x|^2 = x^2.$$

12. La distancia entre x y 3 sobre la recta numérica es 2 más que x. Resuelve respecto de x.

13. Un cateto de un triángulo rectángulo tiene 8 pulgadas de longitud y la hipotenusa tiene 4 pulgadas menos que la suma de los dos catetos. Determina el otro cateto.

14. El tiempo t en segundos que un cuerpo tarda en caer, desde su posición inicial en reposo, una distancia de s pies, viene dado por la fórmula $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$. Calcula s si $t = 6.25$ segundos y $g = 32$.

15. Utilizando la fórmula del problema 14, determina una fórmula que da g en términos de t y s.

16. Determina si cada uno de los siguientes pares de enunciados con dos variables son o no equivalentes:

(a) $x^2 + y^2 = 1$, $y = \sqrt{1 - x^2}$

(b) $x^2 + y^2 = 1$, $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$

(c) $x^2 = xy$, $x = 0$ ó $x = y$

7

13-6. *Inecuaciones polinómicas

¿Es $(-4)(3)(5)(-6)(-8)$ un número positivo? ¿Un número negativo? ¿Tuviste que efectuar la multiplicación para saberlo?

Cuando multiplicamos varios números distintos de cero, su producto es positivo si el número de factores negativos es par, y su producto es negativo si el número de factores negativos es impar.

Esto significa que podemos decir inmediatamente si un polinomio factorizado, tal como

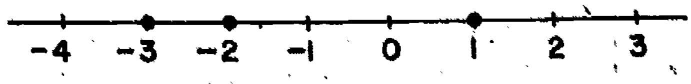
$$(x + 3)(x + 2)(x - 1),$$

es positivo, negativo ó 0 para cualquier x dado. ¿Qué sucede con este polinomio para $x = 2$? ¿para $x = 0$? ¿para $x = -1$? ¿para $x = -\frac{5}{2}$? ¿Y para $x = -4$? No necesitas calcular el valor del polinomio; solamente contar cuántos factores negativos contiene

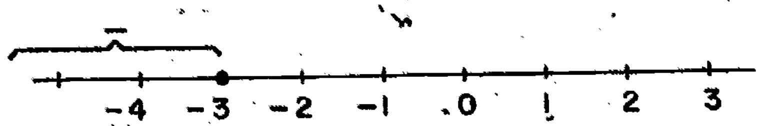
Podemos hacer algo mejor que elegir unos pocos puntos al azar. Podemos determinar primero el conjunto de valores x para los cuales

$(x + 3)(x + 2)(x - 1)$ es 0

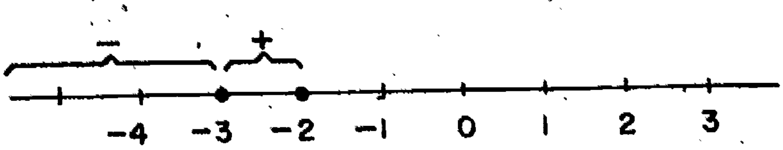
(el conjunto de validez de $(x + 3)(x + 2)(x - 1) = 0$). ¿Cuál es este conjunto? Entonces hacemos la gráfica de este conjunto sobre la recta numérica.



¿Qué podemos decir acerca de cada uno de los factores $(x + 3)$, $(x + 2)$, $(x - 1)$ para cualquier x menor que -3? Ensaya con $x = -4$. Encontramos que los tres factores son números negativos, y por consiguiente, su producto es negativo. Indicamos esto en la recta numérica como sigue:

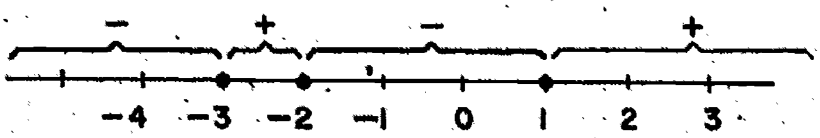


¿Qué sucede con estos factores cuando x está entre -3 y -2? Ensaya con $x = -\frac{5}{2}$. Ahora el factor $(x + 3)$ es positivo, mientras que los otros dos permanecen negativos. Nos podemos imaginar a $(x + 3)$ como "cambiando" de negativo a positivo cuando x cruza -3. El producto es ahora positivo para x entre -3 y -2. Indicamos esto con la marca "+" sobre el intervalo.



Probablemente te das cuenta de lo que va a suceder cuando x cruce -2 y finalmente 1. Cuando x cruza -2, el factor $(x + 2)$ cambia de negativo a positivo, de modo que para cualquier x entre -2 y 1 hay dos factores positivos y uno negativo, o sea, que el producto ahora es negativo. Finalmente, cuando x

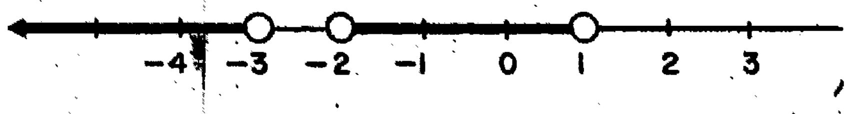
cruza 1, el factor $(x - 1)$ cambia de negativo a positivo, de manera que para x mayor que 1, todos los factores son positivos.



Empleando este diagrama final, podemos leer los conjuntos de validez de ciertas inecuaciones relacionadas con el polinomio. Por ejemplo, la gráfica del conjunto de validez del enunciado

$$(x + 3)(x + 2)(x - 1) < 0$$

aparece a continuación. Es el conjunto de todos los números x,



para los cuales el producto de los factores es negativo; a saber, el conjunto de todos los x tales que

$$x < -3 \quad ó \quad -2 < x < 1.$$

¿Cuál es el conjunto de validez del enunciado $(x + 3)(x + 2)(x - 1) > 0$ Dibuja su gráfica. ¿Y del enunciado $(x + 3)(x + 2)(x - 1) \geq 0$?

Para determinar el conjunto de validez de

$$x^2 - 3 \leq 2x ,$$

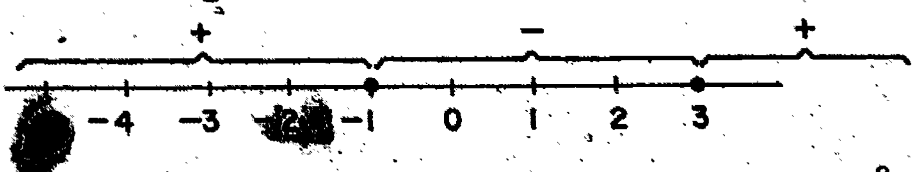
primero pasamos a la inecuación equivalente con 0 en el lado derecho:

$$x^2 - 2x - 3 \leq 0.$$

Luego factorizamos el miembro de la izquierda en factores polinómicos de <u>primer grado</u>:

$$(x + 1)(x - 3) \leq 0.$$

Procediendo como antes, obtendremos el diagrama:



Así que, el conjunto de validez de la inecuación $x^2 - 3 \leq 2x$, tiene la gráfica siguiente (puesto que el producto de los factores $(x + 1)(x - 3)$ tiene que ser negativo o cero):

Este es el conjunto de todos los x tales que $-1 \leq x \leq 3$.

Conjunto de problemas 13-6a

1. Utilizando la discusión anterior como modelo, dibuja las gráficas y describe los conjuntos de validez de las inecuaciones siguientes:

   (a) $(x - 1)(x + 2) > 0$

   (b) $y^2 < 1$

   (c) $t^2 + 5t \leq 6$

   (d) $x^2 + 2 \geq 3x$

   (e) $(s + 5)(s + 4)(s + 2)(s)(s - 3) < 0$

   (f) $2 - x^2 < x$

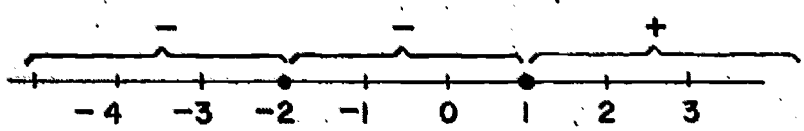
2. ¿Cuál es el conjunto de validez del enunciado

$$(x + 2)(x - 1) > 0 \ \underline{y} \ x < 3?$$

*3. ¿Habrá una sola inecuación polinómica equivalente al enunciado del problema 2?

Hay un punto peligroso que debemos señalar.

Supón que un factor esté repetido en un polinomio una o más veces, como en $(x + 2)^2(x - 1)$. Cuando x cruza -2, hay <u>dos</u> factores del polinomio que cambian de negativos a positivos. El número de factores negativos baja de 3 a 1, y el producto <u>permanece</u> <u>negativo</u> al cruzar x por -2. El diagrama es entonces



¿Cuál es el conjunto de validez de

$$(x + 2)^2(x - 1) > 0?$$

(esto es, ¿para qué valores de x es positivo el producto de los factores?) Observa que el conjunto de validez de

$$(x + 2)^2(x - 1) \geq 0$$

es el conjunto de todos los x tales que $x \geq 1$ <u>ó</u> $x = -2$.

¿Qué ocurre si un factor entra tres veces, como en $x(x - 1)^3$? ¿Cuál es el conjunto de validez de

$$x(x - 1)^3 < 0?$$

¿Y de

$$x(x - 1)^3 \geq 0?$$

Algunas veces tenemos un factor cuadrático, tal como $x^2 + 2$, que no puede ser factorizado y que es <u>siempre</u> positivo para todos los valores de x. ¿Tienen tales factores alguna influencia en el modo de cambiar el producto de positivo a negativo? ¿Cuál es el conjunto de validez de

$$(x^2 + 2)(x - 3) < 0?$$

¿Y de

$$(x^2 + 2)(x - 3) \geq 0?$$

Conjunto de problemas 13-6b

Resuelve y dibuja las gráficas:

1. $x^2 + 1 > 2x$
2. $x^2 + 1 < 0$
3. $(t^2 + 1)(t^2 - 1) \geq 0$
4. $4s - s^2 > 4$
5. $(x - 1)^2(x - 2)^2 > 0$
6. $(y^2 - 7y + 6) \leq 0$
7. $(x + 2)(x^2 + 3x + 2) < 0$
8. $3y + 12 \leq y^2 - 16$
9. $x^2 + 5x > 24$
10. $|x|(x - 2)(x + 4) < 0$

Problemas de repaso

Para cada par de enunciados en los problemas 1 - 6, determina si los dos enunciados son equivalentes:

1. $x(x^2 + 1) - 3(x^2 + 1) = 0$, $\quad x - 3 = 0$
2. $(x - 3)\cdot\frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} = 2$, $\quad x - 3 = 2$
3. $(x - 3)(x^2 + 4) = 2(x^2 + 4)$, $\quad x - 3 = 2$
4. $\frac{x}{x - 3} - \frac{3}{x - 3} = 0$, $\quad x = 3$
5. $\frac{x + 2}{x - 2} = 0$, $\quad |x| = 2$
6. $\frac{|x|}{2} = 1$, $\quad x^2 = 4$

En los problemas 7 - 20, determina el conjunto de validez de cada una de las ecuaciones:

7. $\frac{x}{x - 3} - \frac{3}{x - 3} = 0$

8. $\frac{x}{x - 3} + \frac{3}{x - 3} = 0$

9. $(x + 1)(x - 3) = 7(x - 3)$

10. $(x + 1)(x^2 - 2) = -(x + 1)$

11. $x(x - 1)(x - 2) = 0$

12. $\frac{2}{x - 8} = \frac{1}{x - 2}$

13. $\frac{1}{x} - 3 + \frac{2x - 1}{x} = 0$

14. $\sqrt{x + 2} + 2 = 0$

15. $\sqrt{x + 2} - 2 = 0$

16. $|x + 1| = 3$

17. $|x| + x = 1$

18. $|x| + 1 = x$

19. $\frac{x + 1}{x + 1} = 1$

20. $\frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} = 1$

21. Resuelve cada uno de los siguientes enunciados y construye su gráfica:

(a) $\frac{x + 2}{x - 2} = 0$

(b) $\frac{x + 2}{x - 2} > 0$

(c) $x^2 - 4 > 0$

(d) $|x| > 2$

22. Resuelve la inecuación

$$\sqrt{1 + 2x} < x - 1$$

y construye su gráfica.

23. Construye la gráfica del conjunto de validez de cada uno de los siguientes enunciados:

(a) $(x - 3)(x - 1)(x + 1) > 0$

(b) $(x - 3)(x - 1)(x + 1) > 0$ y $x \geq 0$

(c) $(x - 3)(x - 1)(x + 1) > 0$ ó $x \geq 0$

Capítulo 14

GRAFICAS DE ENUNCIADOS ABIERTOS CON DOS VARIABLES

14-1. El plano numérico real

La recta numérica real nos ha ayudado a tomar decisiones acerca de relaciones entre números reales. (Da ejemplos de algunos casos en los cuales la hemos utilizado.) Quizás un plano numérico real sea aún más útil.

Hemos asociado números con puntos de una recta. ¿Cómo podremos asociar números con puntos de un plano? Considera cualquier punto P de un plano. Si este punto está situado en la recta numérica y a la distancia x unidades del punto cero, entonces hay un número x asociado con P. Si P no está en la recta numérica, como en la figura 1, entonces hay un número, en este

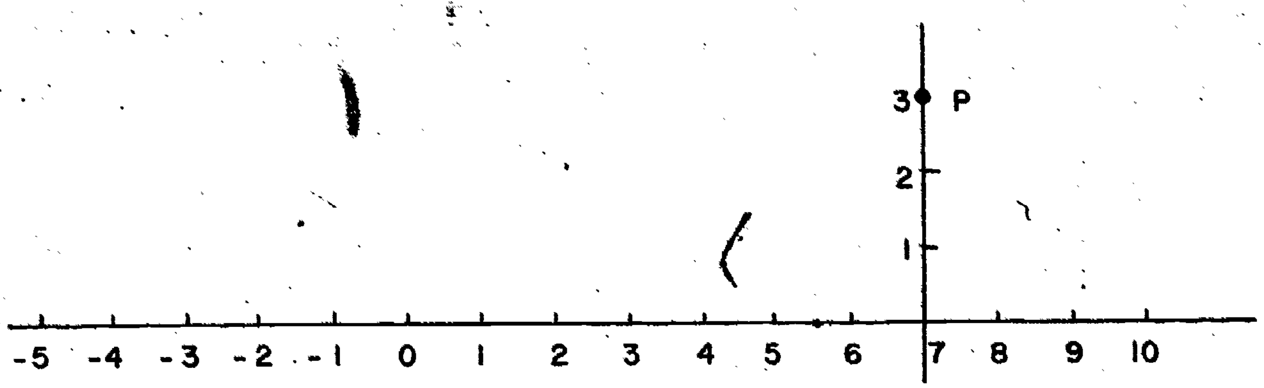


Figura 1

caso 7, asociado con P en el sentido de que es el número en la recta numérica directamente debajo de P (estaría directamente por encima de P si P estuviera por debajo de la recta numérica). Este número no basta por sí solo para localizar a P, ya que 7 está en la recta numérica y P está a 3 unidades por encima de esta recta. Quizás necesitemos dos números para nombrar el punto; 7 será el primero de ellos, porque está en la recta numérica que ya conocemos. Desde 7 podríamos trazar una segunda recta numérica hasta P, una recta vertical con su punto cero localizado en la primera recta. En esta recta vertical encontramos el punto P en el número 3, que consideramos como el segundo número asociado con P. Así, al punto P le hemos asociado el par de números (7, 3). Escribimos éstos en la forma indicada, poniendo primero el número localizado en la recta horizontal, y después el que está localizado en la recta vertical; luego se encierran ambos entre paréntesis. Hemos asignado entonces a P un primer número, 7, y un segundo número, 3, los que consideramos como un par ordenado de números, (7, 3) pertenecientes a P y llamados las <u>coordenadas</u> de P. El primer número se llama la <u>abscisa</u> de P y el segundo la <u>ordenada</u> de P.

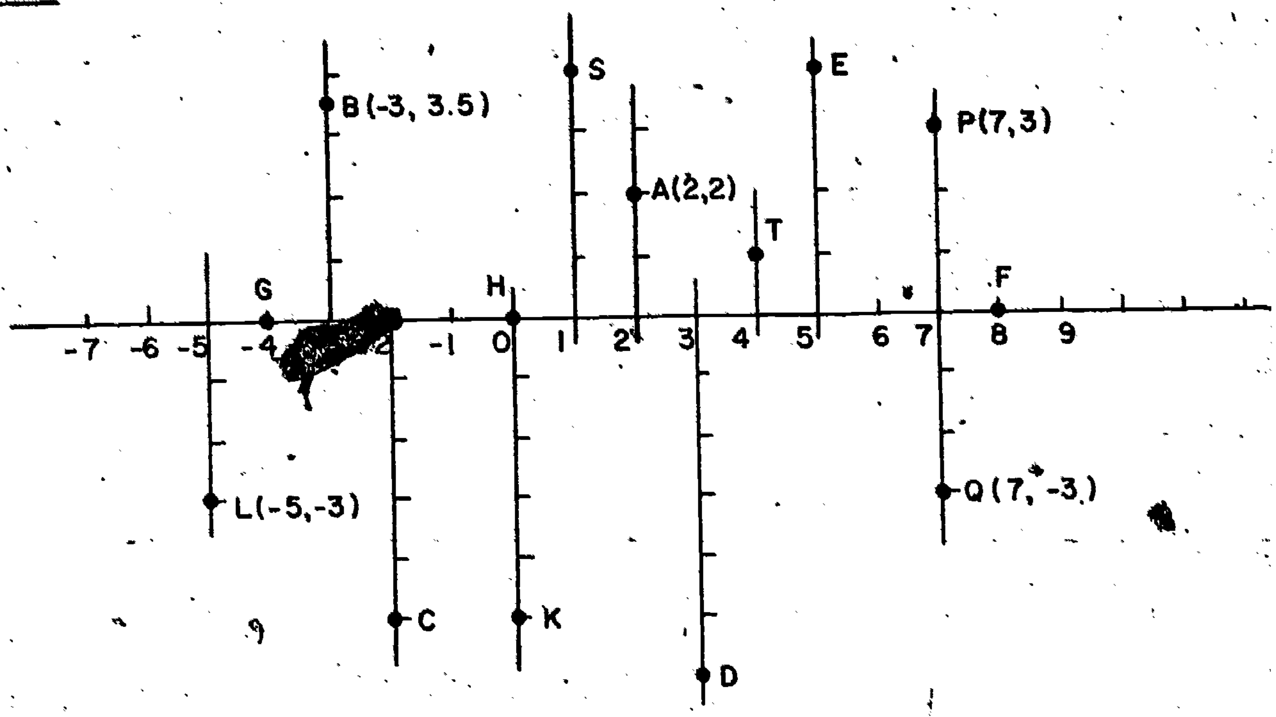


Figura 2

En la figura 2, verifica que los pares ordenados de números escritos para los puntos P, A, B, L y Q son correctos. ¿Qué número aparece primero en cada caso?, ¿cuál aparece segundo? El orden es esencial; por consiguiente, consideramos solamente pares ordenados. Observa que el par ordenado (1, 4) no es idéntico al par ordenado (4, 1). ¿Cómo difiere el par ordenado de Q del de P? ¿Por qué es negativo el segundo número de Q?

En la figura 2, ¿qué pares ordenados de números están asociados con los puntos E, C, K, y D? ¿Qué par ordenado está asociado con el punto H de la recta numérica? Este punto se llama el origen y está asociado con (0, 0). Podemos considerar que el segundo número del par ordenado indica la distancia por encima o por debajo de la recta numérica. ¿Qué pares ordenados están asociados con los puntos F y G? Propón una afirmación general acerca del segundo número del par ordenado asociado con un punto cualquiera localizado en la recta numérica horizontal.

Si tenemos varios puntos de un plano, y una sola recta numérica horizontal, ¿habrá algún modo de disponer nuestra figura de manera que podamos determinar los pares ordenados de números asociados con los puntos sin tener que dibujar un segmento (de recta) vertical desde cada punto hasta la recta numérica horizontal? Para este propósito utilizaremos papel cuadriculado y dibujaremos sólo una segunda recta numérica, pasando por el origen y perpendicular a la primera recta numérica. Si marcamos las unidades de medida en estas dos rectas, cada una de las cuales se llama un eje de coordenadas, la red del papel cuadriculado nos permitirá elegir rápidamente los números apropiados de un par ordenado.

En la figura 2, observa que S y T no tienen las mismas coordenadas; la primera coordenada de S es 1, mientras que la de T es 4. Las coordenadas de S son el par ordenado de números (1, 4), mientras que las de T son el par ordenado (4, 1). En cada par aparecen los mismos números, pero como el orden es diferente, los pares ordenados son diferentes.

¿Crees que es siempre cierto que dos puntos diferentes de un plano no pueden tener las mismas coordenadas?

Conjunto de problemas 14-1a

1. Escribe los pares ordenados de números asociados con los puntos A a M que aparecen en la siguiente figura:

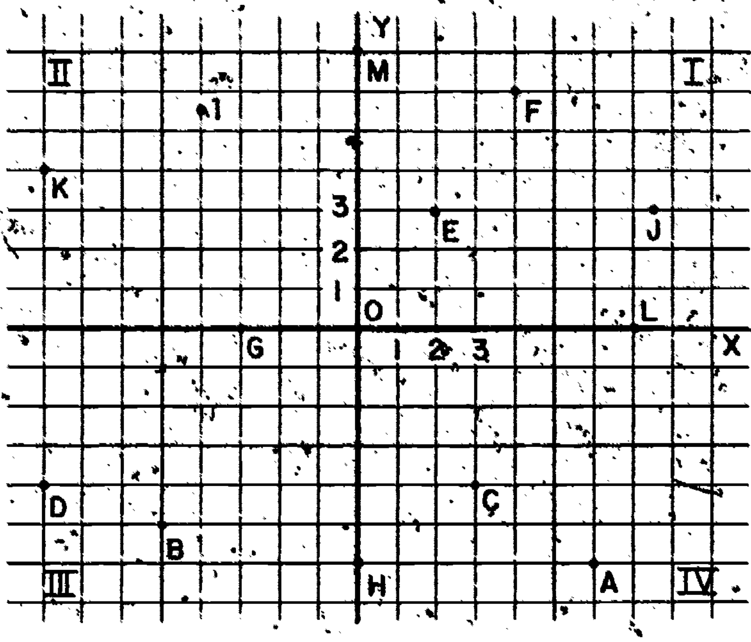


Figura para el problema 1

2. Las cuatro partes en las cuales las rectas numéricas dividen el plano se llaman cuadrantes. Estos cuadrantes se numeran en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, como en la figura del problema 1, empezando con el cuadrante en la esquina superior derecha donde ambas coordenadas son positivas. ¿En qué cuadrantes estarán localizados los puntos que tienen sus dos coordenadas iguales?

3. Localiza cuatro puntos cuyos pares ordenados tienen ordenada igual a -3. Considera todos esos puntos; ¿qué figura forman?

4. ¿Dónde están situados todos los puntos cuyos pares ordenados tienen abscisa $\frac{3}{2}$? Describe este conjunto de puntos.

Fijemos nuestra atención ahora en los números más bien que en los puntos. Elige cualquier número real como el primer número de un par y luego elige cualquier número real como el segundo. ¿Podremos asociar con cada par ordenado así elegido, un punto del plano? Dado el par ordenado $(-3, \frac{2}{3})$, ¿podrás encontrar un punto del plano que tenga estas coordenadas? Explica cómo localizas el punto. ¿Corresponde todo par ordenado a un punto por lo menos? ¿A un punto solamente?

¿Está claro que para cada punto del plano hay sólo un par ordenado de números reales y que para cada par ordenado hay sólo un punto?

Conjunto de problemas 14-1b

1. Utilizando los ejes de coordenadas que desees, localiza los puntos asociados con los siguientes pares ordenados de números:

$A(1, -3)$	$G(5, \frac{3}{2})$
$B(-6, 4)$	$H(\frac{3}{2}, 5)$
$C(0, \frac{8}{3})$	$I(-4, -6)$
$D(-7, -1)$	$J(-6, -4)$
$E(-4, 0)$	$K(0, -\frac{5}{3})$
$F(0, 0)$	$L(-\frac{5}{3}, 0)$

2. En la figura que dibujaste para el problema 1, ¿serán idénticos los puntos G y H? ¿Por qué? ¿Serán idénticos los puntos I y J? ¿Y K y L?

3. Con referencia a un sistema de ejes coordenados, marca los puntos con coordenadas: $(2, 3)$, $(2, 1)$, $(2, \frac{1}{2})$, $(2, 0)$, $(2, -5.5)$, $(2, -\frac{7}{2})$. ¿Qué podrías decir acerca de todos estos pares ordenados de números? Describe el conjunto de todos los puntos cuyos pares ordenados tienen abscisa igual a 2.

4. Si localizaras varios puntos cuyos pares ordenados tengan ordenada igual a 5, ¿dónde estarían todos esos puntos?

5. Con referencia a un sistema de ejes coordenados, localiza ocho puntos que tengan su primera coordenada igual a la segunda Si pudieras localizar todos los puntos con esa propiedad, ¿qué figura formarían?

*6. Consideremos el movimiento siguiente de todos los puntos de un plano: Movemos cada punto con coordenadas (c, d) hasta el punto con coordenadas $(-c, d)$. Describe esto en términos de tomar opuestos. Otra manera de ver esto es considerar que se hacen girar los puntos del plano media vuelta alrededor del eje y, como indica la figura para el problema. Contesta las siguientes preguntas y localiza los puntos a que se refieren las partes (a) y (b):

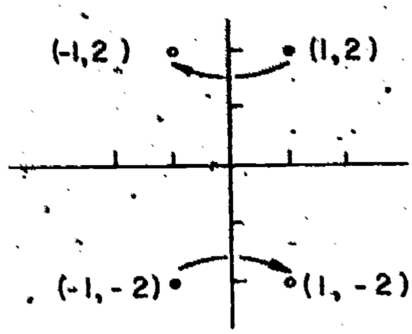


Figura para el problema 6

(a) ¿A qué puntos van los puntos con las siguientes coordenada $(2, 1)$, $(2, -1)$, $(-\frac{1}{2}, 2)$, $(-1, -1)$, $(3, 0)$, $(-5, 0)$, $(0, 2)$, $(0, -2)$?

(b) ¿Qué puntos van a los puntos indicados en (a)?

(c) ¿A dónde va el punto $(c, -d)$?

(d) ¿A dónde va el punto $(-c, d)$?

(e) ¿Qué punto va a (c, d)?

(f) ¿Qué puntos no cambian de posición?

*7. Suponte que movemos un punto con coordenadas (c, d) hasta el punto $(c + 2, d)$. Esto puede considerarse como un movimiento de todos los puntos del plano 2 unidades hacia la derecha. Contesta las siguientes preguntas y localiza todos los puntos mencionados en las partes (a) y (b):

(a) ¿A qué puntos van los puntos con las siguientes coordenadas?

$(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-2, 2)$, $(0, -3)$, $(3, 0)$

(b) ¿Qué puntos van a los puntos indicados en (a)?

(c) ¿A qué punto va $(c - 2, d)$?

(d) ¿Qué punto va a $(-c, d)$?

(e) ¿Qué puntos no cambian de posición?

14-2. Gráficas de enunciados abiertos con dos variables

¿Si asignamos los valores 0 y -2 a las variables del enunciado abierto

$$3y - 2x + 6 = 0,$$

obtendremos entonces un enunciado cierto? ¿A cuál de las variables le asignaste 0? ¿A cuál -2? ¿Habrá dos maneras diferentes de asignar estos valores?

Para evitar este tipo de confusión, vamos a convenir en que siempre que se escriba un enunciado abierto con dos variables se indique cuál de las variables se ha de considerar primero. Cuando las variables son x, y, como en el ejemplo anterior, siempre se considerará primero la x.

Con este acuerdo, estamos preparados para examinar la relación que hay entre un enunciado abierto con dos variables ordenadas y un par ordenado de números reales. En el conjunto de los pares ordenados de números reales, cada par tiene un primer número que asociamos con la primera variable y un segundo número que asociamos con la segunda. De este modo, un enunciado abierto con dos variables ordenadas se comporta como una criba: separa el conjunto de todos los pares ordenados de números reales en dos subconjuntos:

(1) el conjunto de los pares ordenados que hacen cierto el enunciado

y (2) el conjunto de los pares ordenados que hacen falso el enunciado.

Como antes, llamaremos el primer conjunto el <u>conjunto de validez</u> del enunciado.

Ahora podemos contestar la pregunta del primer párrafo, si especificamos el par ordenado $(0, -2)$. ¿Pertenece este par ordenado al conjunto de los pares ordenados que hacen cierto el enunciado

$$3y - 2x + 6 = 0 \text{ ?}$$

¿Pertenece el par ordenado $(-2, 0)$ al conjunto de validez?

Un par ordenado perteneciente al conjunto de validez de un enunciado con dos variables se llama una <u>solución</u> del enunciado y se dice que el par ordenado <u>satisface</u> al enunciado. Si tomamos a r como la primera variable, ¿cuáles son algunas soluciones de

$$s = r + 1 ?$$

¿Satisface a este enunciado el par ordenado $(-2, -3)$? ¿Es $(-3, -2)$ una solución?

Si tomamos a u como la primera variable, ¿cuáles son algunos de los pares ordenados del conjunto de validez de

$$v = 2u^2?$$

¿Es (-1, 2) una solución de este enunciado? ¿Satisface a este enunciado el par ordenado (2,-1)?

En todo este capítulo sólo utilizaremos como variables a x y a y, para así poder concentrar nuestra atención en las propiedades de los enunciados con dos variables en un cierto orden. Pero con frecuencia en el futuro verás que se emplean otras variables, y entonces tendrás que decidir siempre cuál se toma primero.

Hay otro detalle importante que debemos señalar. El enunciado "$y = 4$" puede considerarse como un enunciado en una variable, y, o como un enunciado en dos variables ordenadas x, y. Decir que "$y = 4$" es un enunciado con dos variables significa que "$y = 4$" es una forma abreviada de

$$(0)x + (1)y = 4.$$

¿Cuáles son algunas de las soluciones de este enunciado? ¿Qué podrías decir de todo par ordenado que satisfaga a este enunciado? Si "$x = -2$" es un enunciado con dos variables, entonces "$x = -2$" es una forma abreviada de

$$(1)x + (0)y = -2.$$

¿Qué podrías decir acerca de todo par ordenado que satisfaga a este enunciado?

Conjunto de problemas 14-2a

1. Describe el conjunto de validez de cada uno de los siguientes enunciados abiertos en dos variables ordenadas x, y:

   (a) $y = 5$

   (b) $x = 0$

   (c) $y = -3x$

   (d) $x = 3$

2. Halla cuatro soluciones de cada uno de los siguientes enunciados abiertos:

   (a) $y = 3x - 2$ (c) $y = x^2 + 1$

   (b) $y = 2 + x$ (d) $y = |x|$

3. Para cada uno de los enunciados del problema 2, halla dos pares ordenados que no satisfagan a dicho enunciado.

4. Para cada uno de los enunciados del problema 2, localiza con referencia a un sistema de ejes coordenados los puntos cuyas coordenadas son las soluciones que hallaste. Utiliza un sistema de ejes coordenados distinto para cada parte.

Recuerda que todo punto del plano tiene asociado con él un par de números llamados sus coordenadas. Vemos ahora que un enunciado abierto con dos variables ordenadas no sólo separa el conjunto de pares ordenados de números en dos subconjuntos, sino que también separa los puntos del plano en dos subconjuntos:

(1) El conjunto de todos los puntos cuyas coordenadas satisfacen al enunciado, y

(2) todos los demás puntos.

Como antes, llamamos al primer conjunto de puntos la gráfica del enunciado.

Nos interesará aprender qué figura en el plano será la gráfica de cualquier enunciado dado. Como un ejemplo, ensayemos con el enunciado

$$2x - 3y - 6 = 0.$$

Podemos ver con facilidad varias soluciones, tales como $(3, 0)$ y $(0, -2)$. Trata de obtener algunas otras soluciones. Observa que sería más fácil determinar soluciones escribiendo una ecuación equivalente en la que la y figure sola en el miembro izquierdo:

$$2x - 3y - 6 = 0,$$
$$-3y = -2x + 6,$$
$$3y = 2x - 6,$$
$$y = \frac{2}{3}x - 2.$$

A este último enunciado le llamamos la forma en y del enunciado original. Ahora vemos que podemos traducir "$y = \frac{2}{3}x - 2$" en un enunciado lingüístico en términos de las abscisas y las ordenadas de los puntos de su gráfica: "La ordenada es 2 menos que $\frac{2}{3}$ de la abscisa".

Como tomaremos $\frac{2}{3}$ de la abscisa, es más fácil calcular ordenadas correspondientes a abscisas que sean múltiplos de 3. Si la abscisa es 3, la ordenada deberá ser 0, para que así tengamos una solución. ¿Por qué? Si la abscisa es -6, ¿cuál será la ordenada? Prosiguiendo, podemos hacer una tabla de pares ordenados que satisfagan al enunciado:

x	-9	-6	-3	0		5	
y		-6		-2	0		9

Llena los cuadros vacíos.

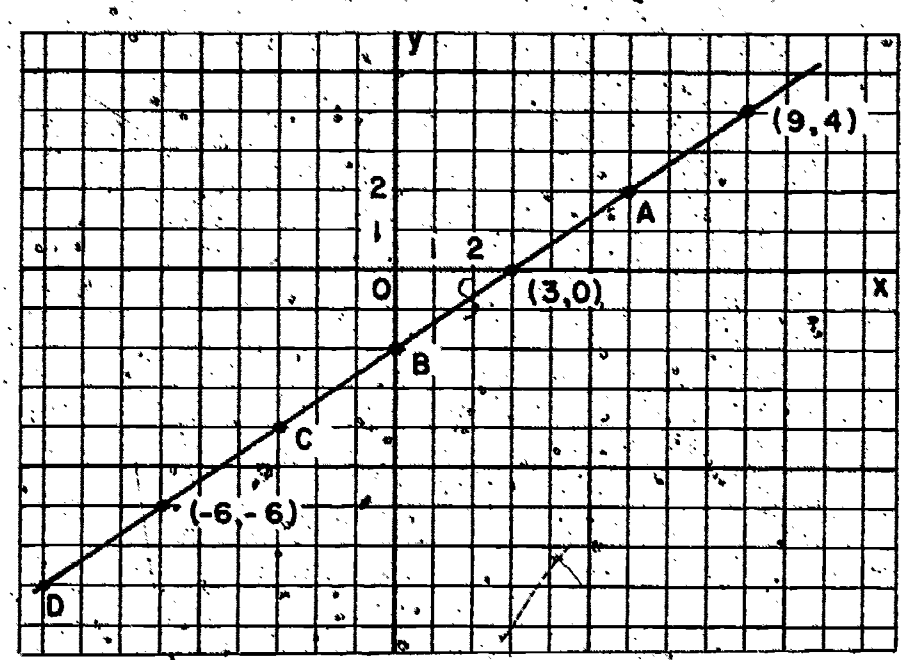


Figura 3.

En la figura 3, los puntos $(-6, -6)$, $(3, 0)$ y $(9, 4)$ parecen estar en una recta. ¿Parecen también estar en esta recta los demás puntos cuyas coordenadas encontraste en la tabla de soluciones? De aquí surge una pregunta: Si dibujamos una recta pasando por estos puntos, ¿encontraremos en ella todos los puntos "cuya ordenada sea igual a 2 menos que $\frac{2}{3}$ de su abscisa"? Además debemos preguntar: ¿ Es todo punto de esta recta un punto con "ordenada igual a 2 menos que $\frac{2}{3}$ de la abscisa"?

Suponte que tomamos un punto que parezca estar en la recta, tal como el punto A en la figura 3. Las coordenadas de ese punto son $(6, 2)$: ¿Satisfacen estas coordenadas a la ecuación $2x - 3y - 6 = 0$?

Resulta en efecto, que las coordenadas de todo punto de esta recta satisfacen a la ecuación $2x - 3y - 6 = 0$.

Cuando decimos que una recta específica es la gráfica de un enunciado abierto particular, queremos decir que las dos preguntas anteriores se contestan afirmativamente:

(1) si dos números en un cierto orden satisfacen a un enunciado, entonces son las coordenadas de un punto de la recta;

(2) si un punto está en la recta, sus coordenadas satisfacen al enunciado abierto.

Así, pues, la recta que muestra la figura 3 es la gráfica del enunciado

$$2x - 3y - 6 = 0.$$

Podemos hacer lo mismo con enunciados abiertos, tales como $3y + 5x - 11 = 0$, $2x + 5 = 0$, $-8y + 1 = 0$, etc., y en cada caso llegar a la conclusión de que la gráfica es una recta.

Esto sugiere que el siguiente enunciado general es cierto:

> Si un enunciado abierto es de la forma
>
> $$Ax + By + C = 0,$$
>
> donde A, B, C son números reales, y por lo menos uno de los dos, A ó B, es distinto de 0, entonces su gráfica es una <u>recta</u>; toda recta del plano es la gráfica de un enunciado abierto de esta forma.

Sabemos que <u>todo</u> enunciado abierto tiene una gráfica y sospechamos que toda gráfica está asociada con un enunciado abierto. Desde luego, algunos enunciados abiertos pueden tener gráficas que no contengan punto alguno (gráficas <u>vacías</u>) y otros pueden tener gráficas que cubran regiones del plano. Más adelante estudiaremos tales enunciados.

Conjunto de problemas 14-2b

1. ¿Dónde están localizados todos los puntos del plano con ordenada -3?

2. Con referencia a un sistema de ejes coordenados, localiza el conjunto de puntos cuyas coordenadas <u>satisfacen</u> a cada una de las siguientes ecuaciones; es decir, los puntos cuyos pares de coordenadas pertenecen a los conjuntos de validez de las ecuaciones:

   (a) $y = 5$ (c) $x = 0$

   (b) $y = 0$ (d) $x = -2$

   ¿Cuál es una ecuación cuya gráfica es el eje horizontal? ¿Cuál es una ecuación cuya gráfica es el eje vertical?

3. Con referencia a un sistema de ejes coordenados, halla los puntos para los cuales

   (a) la abscisa de cada uno es igual al opuesto de la ordenada. Utiliza todos los pares de números reales posibles que tengan sentido dentro del alcance de tu gráfica. Con referencia a los mismos ejes, localiza

   (b) los puntos para los cuales la ordenada es igual al doble de la abscisa;

   (c) los puntos para los cuales la ordenada es el opuesto del doble de la abscisa.

   ¿Qué enunciados generales concernientes a estas gráficas puedes proponer? Escribe enunciados abiertos para cada una de las gráficas construidas.

4. Con referencia a un sistema de ejes coordenados, construye la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones:

   (a) $y = 3x$ (d) $y = -3x$

   (b) $y = 6x$ (e) $y = -6x$

   (c) $y = \frac{1}{2}x$ (f) $y = -\frac{1}{2}x$

¿Qué característica tienen todas en común? ¿Cómo difieren las gráficas de (a) y de (d)? ¿Tienen las gráficas de (b) y (e) el mismo carácter?; ¿y las gráficas de (c) y (f)?

5. Con referencia a un sistema de ejes coordenados, construye e identifica la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones:

(a) $y = x + 5$
(b) $y = x - 3$
(c) $y = 2x + 5$
(d) $y = 2x - 5$
(e) $y = \frac{1}{3}x + 2$
(f) $y = -\frac{1}{3}x - 2$

¿Cómo difieren las gráficas de (a) y de (b)?; ¿y las gráficas de (c) y de (d)?; ¿y las de (e) y (f)? ¿Qué podrías decir acerca de las gráficas de (a) y de (b), y también de las gráficas de (c) y de (d), que no sea cierto para las gráficas de (e) y de (f)?

Con referencia a un sistema de ejes coordenados, localiza los puntos cuyas abscisas son

$$-2, -1, 0, 1, 2, 3$$

respectivamente, y para cada uno de los cuales la ordenada es <u>igual</u> a 3 veces la abscisa. ¿Están estos puntos en una recta?

Localiza ahora los puntos que tienen estas mismas abscisas, pero para cada uno de los cuales la ordenada es <u>mayor</u> que 3 veces la abscisa. ¿Están en una recta estos nuevos puntos? ¿Está cada uno de ellos <u>por encima del</u> punto correspondiente del primer conjunto?

Los puntos en el primer conjunto satisfacen al enunciado

$$y = 3x$$

mientras que los del segundo conjunto satisfacen al enunciado

$$y > 3x.$$

El enunciado "$y = 3x$" es la ecuación de una recta, y la gráfica de "$y > 3x$" es el conjunto de todos los puntos por encima de esta recta, como muestra la porción sombreada de la figura 5. Así, la gráfica de un enunciado tal como "$y > 3x$" es el conjunto de todos los puntos del plano que hacen cierto el enunciado. Si el símbolo es el de la relación "mayor que o igual a", es decir "$\geq$", marcamos una recta marginal sólida, como en la figura 4; el símbolo de "mayor que" se indica marcando una recta quebrada entre el área sombreada y la que no lo está, como en la figura 5. En estas dos figuras la recta es la gráfica del enunciado $y = 3x$. Esta recta separa el plano en dos semiplanos. La gráfica de $y < 3x$ es el semiplano en el cual toda ordenada es menor que tres veces la abscisa; es el conjunto de puntos por debajo de la recta $y = 3x$. La gráfica de $y \leq 3x$ es el semiplano inferior incluyendo la recta $y = 3x$.

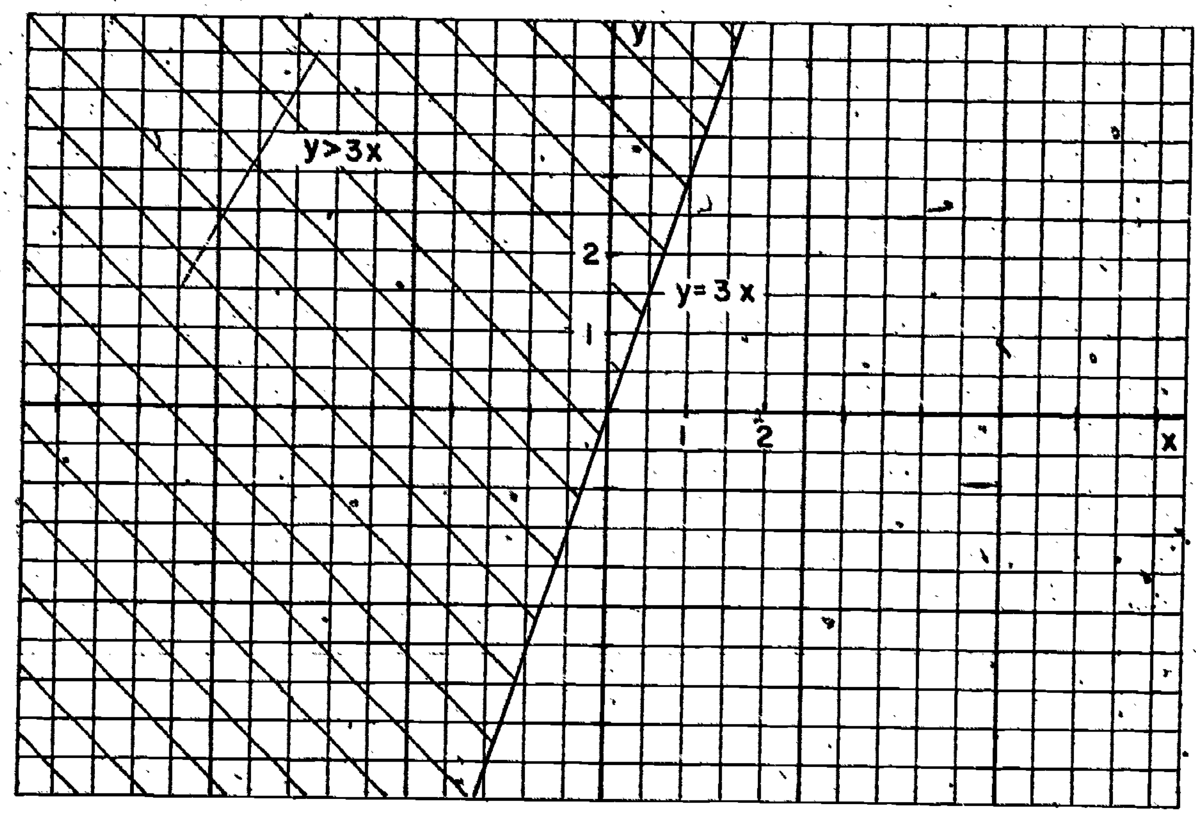


Figura 4: $y \geq 3x$

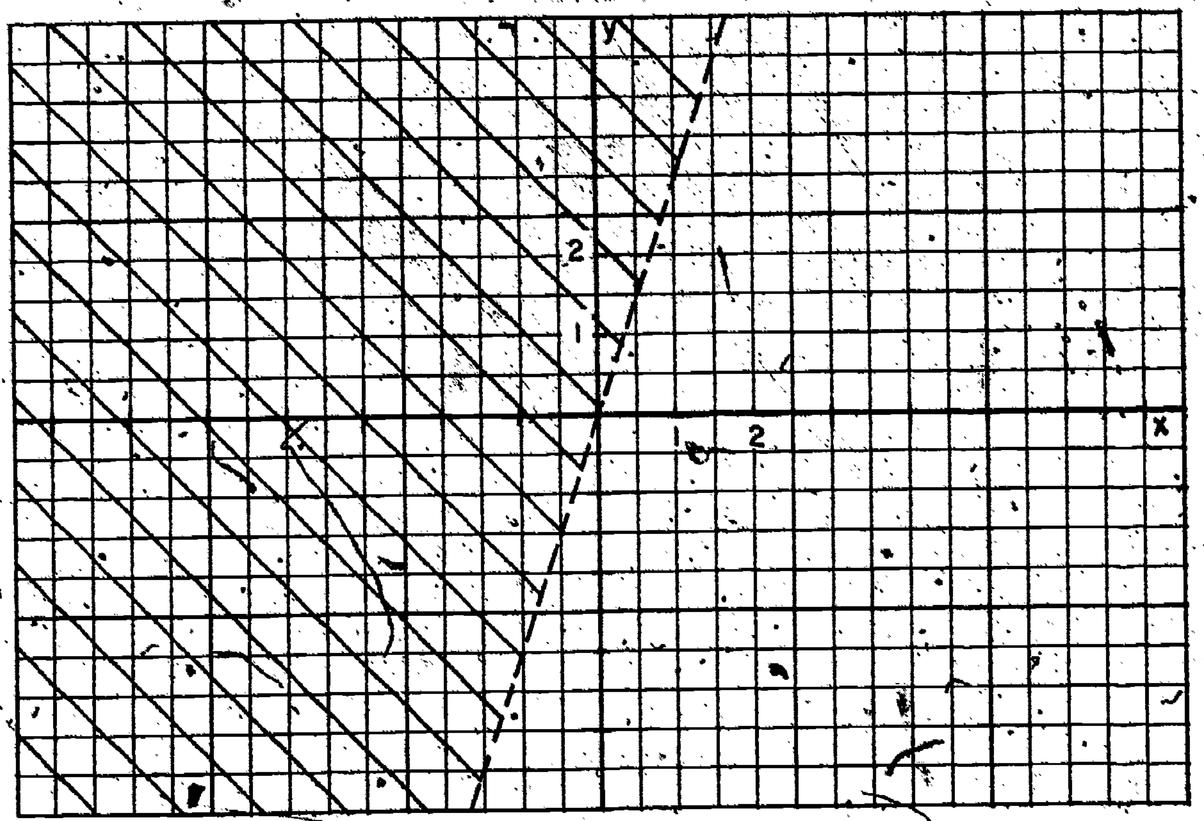


Figura 5: $y > 3x$

Conjunto de problemas 14-2c

1. Con referencia a un sistema de ejes coordenados, indica el conjunto de puntos asociados con los pares ordenados de números para los cuales la ordenada es igual a dos unidades más que la abscisa. ¿Qué enunciado abierto puede escribirse para este conjunto? Construye ahora la gráfica de los siguientes enunciados abiertos:

   (a) $y > x + 2$; (b) $y \geq x + 2$.

   ¿Será posible construir las dos gráficas con referencia al mismo sistema de ejes coordenados?

2. Dado $y = |x|$. En este enunciado, ¿podrá y ser negativa? Escribe las soluciones para las cuales las abscisas son: -3, -1, 0, $1\frac{1}{2}$, 2, 4. Dentro de los márgenes de tu papel cuadriculado construye la gráfica del enunciado abierto $y = |x|$.

En los problemas 3 y 4,

(i) Escribe cada enunciado en la forma en y.

(ii) Para cada ecuación halla por lo menos tres pares ordenados de números que la satisfagan. (¿Por qué no necesitamos más de dos puntos para representar gráficamente la recta? Como comprobación, conviene obtener otro punto.)

(iii) Construye la gráfica prolongándola tanto como sea posible.

3. Con referencia a un sistema de ejes coordenados, construye la gráfica de cada uno de los siguientes enunciados:

   (a) $2x - y = 0$ (d) $x + 3y = 0$

   (b) $3x - y = 0$ (e) $x - y = 0$

   (c) $x - 2y = 0$ (f) $x + y = 0$

   ¿Qué podrías decir acerca de las gráficas de todos estos enunciados abiertos?

4. Con referencia a un sistema de ejes coordenados, construye la gráfica de cada uno de los siguientes enunciados:

(a) $3x - 2y = 0$
(b) $3x - 2y = 6$
(c) $3x - 2y = 12$
(d) $3x - 2y = -6$
(e) $3x - 2y = -12$

¿Qué podrías decir acerca de las gráficas de todos estos enunciados abiertos?

5. Con referencia a sistemas diferentes de ejes coordenados, construye la gráfica de cada uno de los siguientes enunciados abiertos:

(a) $2x - 7y = 14$
(b) $2x - 7y > 14$
(c) $2x - 7y < 14$
(d) $2x - 7y \geq 14$

6. Con referencia a un sistema de ejes coordenados, construye la gráfica de cada uno de los siguientes enunciados:

(a) $5x - 2y = 10$
(b) $2x + 5y = 10$
(c) $5x + y = 10$
(d) $3x - 4y = 6$

¿Qué punto parece estar en tres de estas rectas? ¿Satisfacen sus coordenadas a los enunciados abiertos asociados con estas tres rectas?

7. Con referencia a un sistema de ejes coordenados, construye la gráfica de cada uno de los siguientes enunciados:

(a) $2x - 3y = 10$
(b) $-x + 2y = \frac{1}{2}$
(c) $3x + 2y = 5$
(d) $\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y = 12$

8. Construye las gráficas de los siguientes enunciados abiertos: (Halla por lo menos diez pares ordenados que satisfagan a cada ecuación.)

(a) $y = x^2$ (c) $y = x^2 + 1$

(b) $y = -x^2$ (d) $y = \frac{1}{x}$

¿Son rectas las gráficas de estos enunciados abiertos? ¿Cómo difieren estos enunciados abiertos de los que consideramos en problemas anteriores en este capítulo? ¿Podremos decir que la gráfica de todo enunciado abierto es una recta?

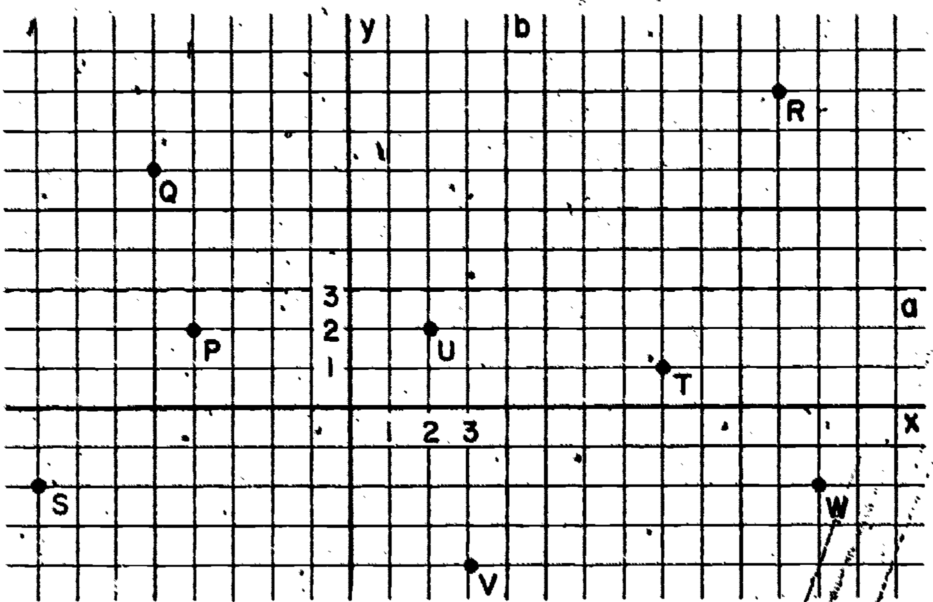


Figura 6

*9. En la figura 6 se construyeron dos sistemas de ejes coordenados, como se indica: los ejes (x, y) y los ejes (a, b).

(a) Para cada uno de los puntos P a W, da las coordenadas con respecto a cada sistema de ejes, como se indica a continuación para el punto P:

Punto	(x, y)	(a, b)
P	(-4, 2)	(-8, -1)
Q		

etc.

(b) Halla las coordenadas con respecto a los ejes (a, b) de los puntos cuyas coordenadas con respecto a los ejes (x, y) son: (5, -5); (-3, -4); (-1, 0); (3, 5).

14-3. Pendientes e intersecciones con los ejes coordenados

Con referencia a un sistema de ejes coordenados, construye las gráficas descritas a continuación en las partes (a) a (k):

(a) Los pares ordenados de números para los cuales la ordenada es igual a la abscisa.
Completa la siguiente tabla de manera que todos los pares cumplan la condición propuesta:

x	-6		$-2\frac{1}{2}$		3		6
y	-6	-3		0		5.1	6

Ahora une mediante rectas los puntos sucesivos. ¿Qué parece ser cierto acerca de todas estas rectas? ¿Cuáles de los puntos dados en la tabla no están en la recta que pasa por los puntos (-6, -6) y (6, 6)? ¿Está el punto (8, 8) en esa recta? Prolonga la recta en ambas direcciones, todo lo posible.

¿Cuál es el enunciado abierto que describe esta gráfica para todos los puntos del plano? ¿Qué relación hay entre los ángulos formados por esta recta y los ejes vertical y horizontal?

(b) Los pares ordenados de números para los cuales el segundo es el opuesto del primero. Completa la siguiente tabla:

x	-6		-4.3		2.5		6.1
y		5.1		0		-4	

¿Podrías determinar, sin tener que hacer la tabla, algunos pares que cumplan la condición? Si puedes hacer esto mentalmente, no necesitarás la tabla siempre. ¿Podrás dibujar una recta pasando por todos esos puntos? Prolóngala en ambas direcciones, todo lo posible.

¿Cuál es el enunciado abierto que describe esta recta? ¿Cómo difiere del enunciado abierto de la recta en (a)?

(c) Los pares ordenados para los cuales la ordenada es dos veces la abscisa. Trata de construir la gráfica sin emplear una tabla de pares de números.

Para dibujar esta gráfica y cada una de las que siguen, construye una tabla si es necesario. En cada caso dibuja una recta prolongándola todo lo posible, de modo que incluya los puntos que cumplan la condición, y escribe un enunciado abierto que describa la gráfica.

(d) Los pares ordenados para los cuales la ordenada es seis veces la abscisa.

(e) Los pares ordenados para los cuales la ordenada es tres veces la abscisa.

(f) Los pares ordenados para los cuales la ordenada es igua a la abscisa multiplicada por -6.

(g) Los pares ordenados para los cuales la ordenada es igua a la abscisa multiplicada por -3.

(h) Los pares ordenados para los cuales la ordenada es la mitad de la abscisa.

(i) Los pares ordenados para los cuales la ordenada es el opuesto de la mitad de la abscisa.

(j) Los pares ordenados para los cuales la ordenada es un sexto de la abscisa.

(k) Los pares ordenados para los cuales la ordenada es el opuesto de un quinto de la abscisa.

Conjunto de problemas 14-3a

Refiérete a las once gráficas que acabas de construir y a sus correspondientes enunciados para contestar las siguientes preguntas: (Ten en cuenta que cada uno de los enunciados que escribiste está en la forma en y.)

1. Haz una lista de los coeficientes de x en los enunciados abiertos para los cuales las rectas están entre las gráficas de "$y = x$", "$x = 0$". ¿Qué observas acerca de estos coeficientes?

2. Haz una lista de los coeficientes de x en los enunciados abiertos para los cuales las rectas están entre las gráficas de "$y = 0$", "$y = x$". ¿Qué puedes decir acerca de estos coeficientes?

3. Haz una lista de los coeficientes de x en los enunciados abiertos para los cuales las rectas están entre las gráficas de "$y = 0$", "$y = -x$". ¿Qué puedes decir acerca de estos coeficientes?

4. Haz una lista de los coeficientes de x en los enunciados abiertos para los cuales las rectas están entre las gráficas de "$y = -x$", "$x = 0$". ¿Qué puedes decir acerca de estos coeficientes?

5. ¿Cuál crees que sería la posición de la gráfica de cada uno de los siguientes enunciados abiertos: $y = .01x$, $y = -100x$, $y = .56x$, $y = -\frac{5}{6}x$, $y = \frac{5x}{12}$, $y = \frac{24x}{25}$, $y = -\frac{25x}{24}$?

6. Haz una lista de datos acerca de un conjunto de rectas que contienen el origen, exponiendo en ella la relación que hay entre la posición de cada una de las rectas y el correspondiente coeficiente de x. (Nota : un punto está en una recta y <u>una recta contiene un punto si la recta pasa por dicho punto</u>.)

7. ¿Qué podrías decir acerca de las gráficas de las ecuaciones de la forma "$y = kx$", donde <u>k</u> es un número real?

   ¿Qué sabes acerca de la gráfica de "$y = kx$" cuando k es positivo? ¿Cuándo k es negativo? ¿Cuándo k está entre 0 <u>y</u> 1? ¿Cuándo $k > 1$? ¿Cuándo $k < -1$? ¿Cuándo $|k| > 1$? ¿Cuándo $|k| < 1$? ¿Cuándo k es 0?

En los problemas anteriores hemos considerado enunciados abiertos cuyas gráficas son rectas que pasan por el origen, y en el problema 7 vimos que la dirección de una recta tal se determina a base del coeficiente de x. Consideremos ahora algunas rectas que posiblemente no pasen por el origen. Con referencia al mismo sistema de ejes coordenados, construye la gráfica de cada uno de los siguientes enunciados abiertos:

(a) $y = \frac{2}{3}x$ (b) $y = \frac{2}{3}x + 4$ (c) $y = \frac{2}{3}x - 3$

Para construir la primera de estas gráficas no debería ser necesario hacer una tabla de valores. Simplemente basta notar que la ordenada debe ser $\frac{2}{3}$ de la abscisa. A fin de obtener puntos fáciles de localizar, podríamos elegir múltiplos de 3 para los valores de x. Al construir la gráfica del segundo enunciado debemos darnos cuenta de que para ello sólo hay que sumarle 4 a cada una de las ordenadas de la primera gráfica. ¿Cómo podríamos hallar las ordenadas de los puntos de la gráfica del tercer enunciado?

¿Cuáles son las coordenadas de los puntos en que las rectas (a), (b), y (c) intersecan el eje vertical? ¿Ves alguna relación entre esos puntos y las ecuaciones (a), (b) y (c)? Diremos que 0, 4 y -3 son las <u>ordenadas en el origen</u> de sus respectivas ecuaciones. Los puntos (0, 0), (0, 4) y (0, -3) son las <u>intersecciones con el eje y</u> de las respectivas rectas. Explica cómo se podrían obtener las gráficas de "$y = \frac{2}{3}x + 4$" y de "$y = \frac{2}{3}x - 3$" con sólo mover la gráfica de "$y = \frac{2}{3}x$". Observa que de nuevo el coeficiente de x determina la dirección de las rectas, mientras que las ordenadas en el origen determinan sus posiciones.

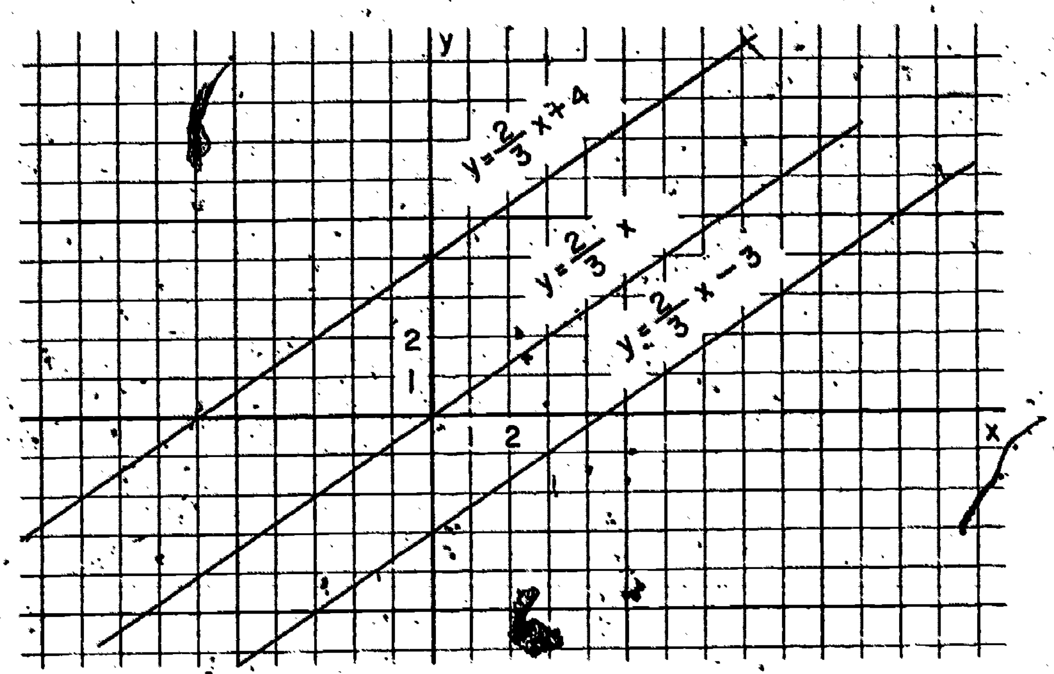


Figura 7

Escribe dos enunciados abiertos tales que el valor absoluto de la ordenada en el origen sea igual a 6, y el coeficiente de x sea $\frac{2}{3}$. Construye las gráficas de estos enunciados abiertos.

En las figuras que construiste en la primera parte de esta sección, todas las rectas tenían el mismo punto de intersección con el eje y, y diferentes direcciones. Decimos que:

> La pendiente de una recta es el coeficiente de x en el enunciado correspondiente puesto en la forma, en y. Es el número que determina la dirección de la recta.

La pendiente puede ser positiva, negativa ó 0. ¿Para qué posiciones de la recta es negativa la pendiente?, ¿igual a 0? ¿Cuál es la pendiente de la recta $x = 2$? ¿Podrá escribirse en la forma en y la ecuación $x = 2$? Recuerda que sólo las rectas no verticales tienen pendientes.

En la figura 8 tenemos una recta que es la gráfica de "$y = \frac{5}{2}x - 3$". ¿Cuál es la pendiente de esta recta? La recta pasa por los puntos (2, 2) y (4, 7). Verifícalo. Las ordenadas de estos puntos son 2 y 7, respectivamente, y la diferencia entre estas ordenadas es $7 - 2$, o sea, 5. Las abscisas de los puntos son 2 y 4, respectivamente, y la diferencia entre ellas es $4 - 2$, es decir, 2. Si dividimos la diferencia entre las ordenadas por la diferencia entre las abscisas, obtenemos el número

$$\frac{7-2}{4-2} = \frac{5}{2}.$$

¡Pero $\frac{5}{2}$ es la pendiente de la recta! Consideramos la diferencia entre las ordenadas como variación vertical, y la diferencia entre las abscisas como variación horizontal al pasar del punto (2, 2) al punto (4, 7). Así,

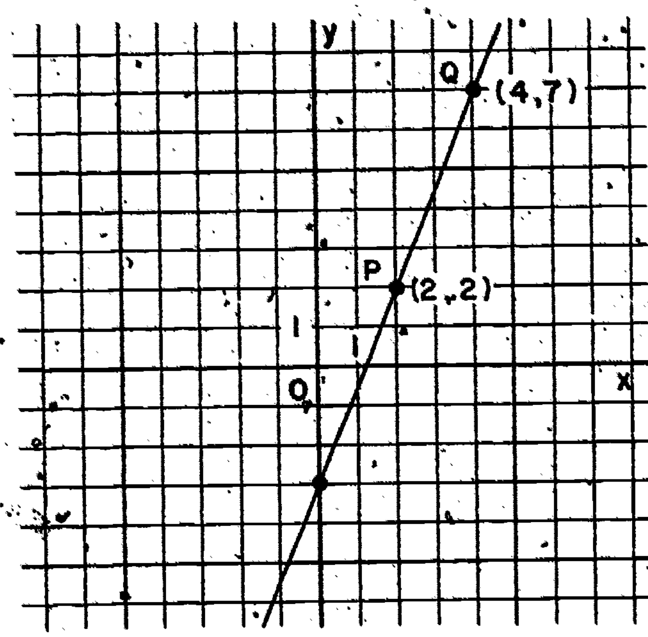


Figura 8

$$\frac{\text{variación vertical}}{\text{variación horizontal}} = \frac{7-2}{4-2} = \frac{5}{2}.$$

Fíjate en el orden observado al hallar esas diferencias: Si el primer número en el numerador es la ordenada 7 del punto (4, 7), el primer número en el denominador tiene que ser la abscisa 4 del mismo punto. ¿Qué valor hallaríamos para la pendiente si empleáramos la ordenada y la abscisa del punto (2, 2) como el primer número del numerador y el primer número del denominador, respectivamente? ¿Cómo se relacionaría este valor con el que acabamos de encontrar?

Ahora podemos demostrar que la razón de la variación vertical a la variación horizontal al pasar de un punto a otro sobre una recta será siempre la pendiente de la recta.

<u>Teorema 14-3</u>. Dados dos puntos P y Q de una recta no vertical, la razón de la variación vertical a la variación horizontal, al pasar de P a Q, es la pendiente de la recta.

*Demostración: Considera la recta no vertical cuya ecuación es

$$Ax + By + C = 0, \quad B \neq 0 .$$

(¿Por qué debemos hacer la restricción $B \neq 0$?) Escribamos la ecuación en la forma en y:

$$y = -\frac{A}{B}x + -\frac{C}{B} .$$

Tenemos que, por definición, la pendiente de esta recta es $-\frac{A}{B}$. Ahora, consideremos dos puntos P y Q de esta recta con coordenadas (c, d) y (a, b), respectivamente. Como estos dos puntos están en la recta, sus coordenadas satisfacen a la ecuación de la misma, dando los enunciados ciertos

$$Aa + Bb + C = 0,$$

$$Ac + Bd + C = 0 .$$

Si restamos los miembros de estas dos ecuaciones, obtenemos el enunciado cierto

$$A(a - c) + B(b - d) = 0.$$

Esto puede escribirse como

$$\frac{b - d}{a - c} = -\frac{A}{B} . \qquad (¿Por qué?)$$

Pero $b - d$ es la variación vertical y $a - c$ es la variación horizontal al pasar de P a Q. Con esto queda demostrado el teorema.

¿Cuál es la pendiente de la recta que contiene los puntos $(6, 5)$ y $(-2, -3)$?, ¿y la que contiene $(2, 7)$ y $(7, 3)$?

Conjunto de problemas 14-3b

1. Halla la pendiente de la recta que pasa por cada uno de los siguientes pares de puntos:

   (a) (-7, -3) y (6, 2)

   (b) (-7, 3) y (8, 3)

   (c) (8, 6) y (-4, -1)

   (d) (3, -12) y (-8, 10)

   (e) (4, 11) y (-1, -2)

   (f) (6, 5) y (6, 0)

   (g) (0, 0) y (-6, -2)

   (h) (0, 0) y (-7, 4)

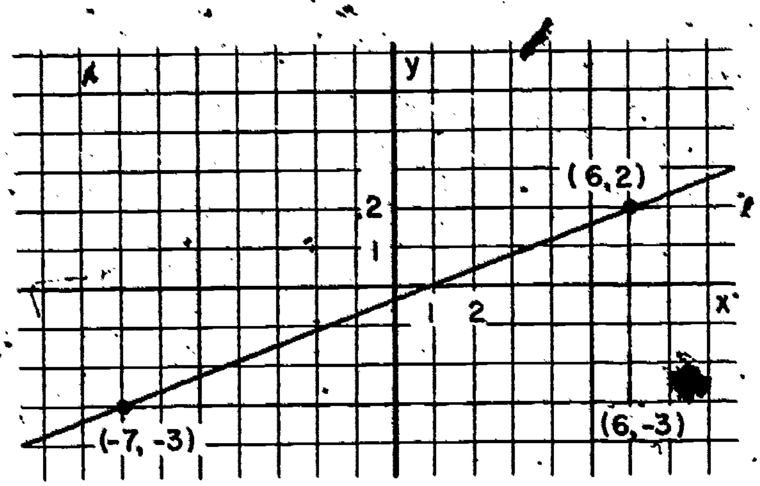


Figura 9

En la figura 9 observamos que la pendiente de la recta es $\frac{2-(-3)}{6-(-7)}$, o sea, $\frac{5}{13}$. Podemos comprobarlo contando los cuadritos, y así encontramos que desde (-7, -3) hasta (6, 2) hay 5 unidades de variación vertical y 13 de variación horizontal. Si tuviéramos más información, esto es, si supiéramos cuál es la ordenada en el origen, sería posible escribir el enunciado abierto de esta recta.

En la figura 10 observamos que la recta contiene los puntos (-6, 6) y (0, -2). Con esta información podemos determinar que la pendiente es $\frac{6-(-2)}{(-6)-0} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$. Entonces sabemos que $y = -\frac{4}{3}x$ es la ecuación de una recta con la misma pendiente de la figura 10, pero que contiene el origen. Vemos que la ordenada en el origen de la recta de la figura 10 es -2; por lo tanto, su ecuación es "$y = -\frac{4}{3}x - 2$". ¿Cuál es la ecuación de una recta paralela a la de la figura 10, pero que contiene el punto (0, 6)?

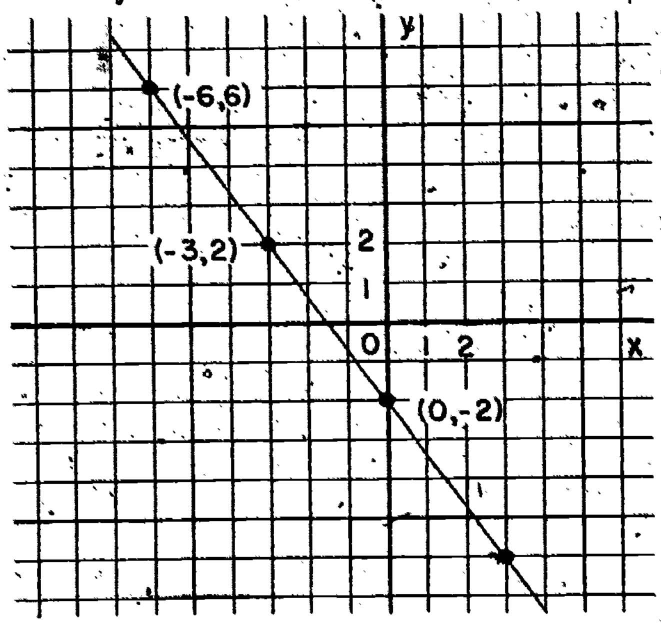


Figura 10

Conjunto de problemas 14-3c

1. ¿Cuál es la ecuación de una recta que pasa por el punto $(0, 6)$ y que es paralela a la recta cuya ecuación es $y = \frac{4}{3}x - 2$?
2. ¿Cuál es la ecuación de una recta paralela a $y = \frac{4}{3}x - 2$ y que contiene el punto $(0, -12)$?
3. ¿Cuál es la pendiente de todas las rectas paralelas a $y = -\frac{4}{3}x$?
4. ¿Cuál es la pendiente de todas las rectas paralelas a $y = -\frac{2}{3}x$?
5. ¿Cuál es la ecuación de una recta cuya pendiente es $-\frac{5}{6}$ y cuya ordenada en el origen es -3?
6. ¿Cuál es el enunciado abierto de una recta que pasa por $(4, 11)$ y $(2, 4)$ y que corta al eje y en $(0, -3)$?
7. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por $(5, 6)$ y $(-5, -4)$ y cuya ordenada en el origen es igual a 0?

Veamos ahora cómo la pendiente y la intersección con el eje y pueden ayudarnos a trazar rectas. Supongamos que una recta tiene pendiente $-\frac{2}{3}$ y ordenada en el origen igual a 6. Tracemos la recta y además escribamos su enunciado abierto. Para construir la gráfica empezamos en el punto $(0, 6)$ en que la recta corta el eje y. Entonces utilizamos la pendiente para localizar otros puntos de la recta.

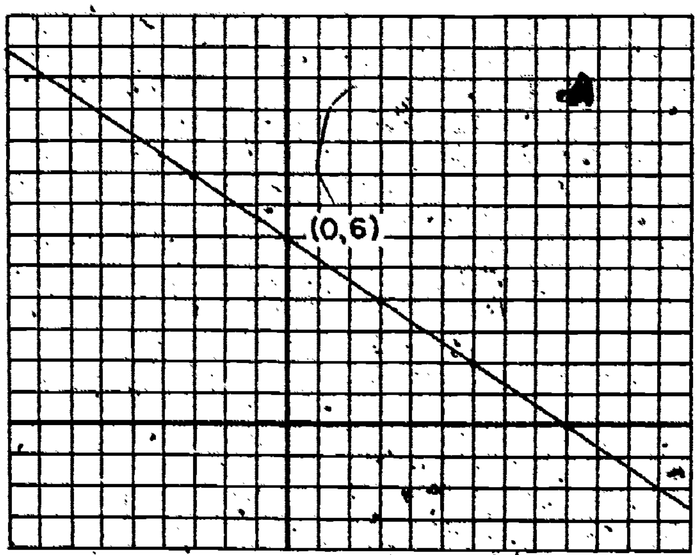


Figura 11

El hecho de que la pendiente sea $-\frac{2}{3}$ nos dice que elegidos dos puntos particulares de la recta, si la variación vertical entre ellos es -2, la variación horizontal es 3; entre dos puntos particulares de la recta, si la variación vertical es 4, la variación horizontal es -6, etc. A continuación aparece una lista de algunas de las posibilidades:

Variación vertical	Variación horizontal
-2	3
2	-3
4	-6
-10	15

En todos los casos la razón es $-\frac{2}{3}$. Si tomamos como uno de los dos puntos el punto (0, 6), que sabemos está en la recta, podemos hallar otro punto moviéndonos 3 unidades a la derecha y 2 unidades hacia abajo; otro punto se encuentra 3 unidades a la izquierda y 2 unidades hacia arriba. Este procedimiento se puede repetir tantas veces como se desee, obteniendo así rápidamente varios puntos por los cuales podemos trazar la recta. Escribe el enunciado abierto para esta recta. ¿Cómo hubiéramos elegido los puntos con respecto a (0, 6) si la pendiente fuera $\frac{2}{3}$? ¿Cuál es el enunciado abierto para esta recta?

¿Cuál será la forma de la ecuación de una recta que no tiene pendiente? ¿Cuál es la pendiente de la recta "$x = 2$"? ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por (-3, 4) y que no tiene pendiente?

Conjunto de problemas 14-3d

1. Con referencia a un sistema de ejes coordenados, elige el punto (-6, -3) y pasando por dicho punto,
   (a) construye la recta cuya pendiente es $\frac{5}{6}$. ¿Cuál es la ecuación de esta recta?
   (b) construye la recta que pasa por (-6, -3) y que no tiene pendiente. ¿Cuál es la ecuación de esta recta?
2. Construye cada una de las siguientes rectas:
   (a) Pasando por el punto (-1, 5) y con pendiente igual a $\frac{1}{2}$.
   (b) Pasando por el punto (2, 1) y con pendiente igual a $-\frac{1}{2}$.
   (c) Pasando por el punto (3, 4) y con pendiente igual a 0.
   (d) Pasando por el punto (-3, 4) y con pendiente igual a 2.
   (e) Pasando por el punto (-3, -4) y sin pendiente. (¿Qué tipo de recta no tiene pendiente?)
3. Considera la recta que contiene los puntos (1, -1) y (3, 3). ¿Estará en esta recta el punto (-3, -9)? (Sugerencia: Determina la pendiente de la recta que contiene los puntos (1, -1) y (3, 3); luego determina la pendiente de la recta que contiene los puntos (1, -1) y (-3, -9).)

4. (a) ¿Qué tienen en común las rectas cuyos enunciados abiertos son "$y = x$", "$y = 5x$", "$y = -6x$", "$y = \frac{x}{2}$"?

   (b) ¿Qué tienen en común las rectas cuyos enunciados abiertos son "$y = \frac{1}{2}x - 3$", "$y = \frac{1}{2}x + 4$", "$y = \frac{2x}{4} - 7$"?

   (c) ¿Qué tienen en común las rectas cuyos enunciados abiertos son "$y = \frac{1}{2}x - 3$", "$y = \frac{3x}{4} - 3$", "$y = \frac{7x}{6} - 3$"?

   (d) ¿Qué tienen en común las rectas cuyos enunciados abiertos son "$x + 2y = 7$", "$\frac{1}{2}x + y = 3$", "$2x + 4y = 12$"?

   Para mostrar que tu respuesta es correcta, traza las gráficas de las tres rectas.

5. Dadas las ecuaciones,

   (a) $3x + 4y = 12$ (b) $2x - 3y = 6$

   ¿Cuál es la ordenada en el origen de cada una? Construye sus gráficas. Escribe cada una de las ecuaciones en la forma en y. ¿Cuál es la pendiente de cada recta? Compruébalo con su gráfica.

6. Escribe cada una de las siguientes ecuaciones en la forma en y. Utilizando la pendiente y la intersección con el eje y, constru la gráfica de cada una de las rectas.

   (a) $2x - y = 7$ (c) $4x + 3y = 12$

   (b) $3x - 4y = 12$ (d) $3x - 6y = 12$

   ¿Estás seguro de que las gráficas de estos enunciados abiertos son rectas? ¿Por qué?

7. Escribe la ecuación de cada una de las siguientes rectas:

   (a) La pendiente es $\frac{2}{3}$ y la ordenada en el origen es 0.

   (b) La pendiente es $\frac{3}{4}$ y la ordenada en el origen es -2.

   (c) La pendiente es -2 y la ordenada en el origen es $\frac{4}{3}$.

(d) La pendiente es -7 y la ordenada en el origen es -5.

(e) La pendiente es m y la ordenada en el origen es b. ¿Podrá escribirse en esa forma la ecuación de toda recta? ¿Qué sucederá en el caso de las ecuaciones de los ejes coordenados?

8. Dados los puntos $(0, 0)$ y $(3, 4)$ y la recta que los contiene, ¿cuál es la pendiente de la recta?, ¿Cuál es su ordenada en el origen? Escribe la ecuación de la recta.

9. Escribe la ecuación de la recta cuya ordenada en el origen es 7 y que contiene el punto $(6, 8)$. ¿Cuál es la pendiente de la recta? ¿Puedes escribir la pendiente como $\frac{8 - 7}{6 - 0}$?

10. ¿Cuál es la ecuación de la recta que contiene los puntos $(-3, 2)$ y $(3, -4)$? Si (x, y) es un punto de la misma recta, verifica que la pendiente también es $\frac{y - 2}{x - (-3)}$. Verifica también que $\frac{y - (-4)}{x - 3}$ es la pendiente. Si -1 y $\frac{y - 2}{x - (-3)}$ son nombres diferentes para la pendiente, demuestra que la ecuación de la recta es "$y - 2 = (-1)(x + 3)$". Demuestra que también puede escribirse como "$y + 4 = (-1)(x - 3)$".

11. Escribe las ecuaciones de las rectas que pasan por cada uno de los siguientes pares de puntos: (Trata de utilizar el método del problema 10 para las partes (e) a (h).)

(a) $(0, 3)$ y $(-5, 2)$	(e) $(-3, 3)$ y $(6, 0)$
(b) $(5, 8)$ y $(0, -4)$	(f) $(-3, 3)$ y $(-5, 3)$
(c) $(0, -2)$ y $(-3, -7)$	(g) $(-3, 3)$ y $(-3, 5)$
(d) $(5, -2)$ y $(0, 6)$	(h) $(4, 2)$ y $(-3, 1)$

12. Todo polinomio de primer grado en una variable x, de la forma "$kx + n$", donde k y n son números reales, se dice ser <u>lineal en x</u>. Se llama <u>lineal</u> porque la gráfica del enunciado abierto "$y = kx + n$" es una recta. La gráfica de "$y = kx + n$"

se llama también la gráfica del polinomio "kx + n". Construy la gráfica de cada uno de los siguientes polinomios lineales:

(a) $2x - 5$ (c) $\frac{2}{3}x - 1$

(b) $-2x + \frac{1}{2}$ (d) $-\frac{3}{2}x + 2$

*13. Considera un rectángulo cuya longitud es 3 unidades mayor que su anchura w.

(a) Escribe una expresión en w cuyo valor para cada valor de w es igual al perímetro del rectángulo. ¿Es ésta una expresión lineal en w?

(b) Escribe una expresión en w para el área del rectángulo. ¿Es ésta una expresión lineal en w?

*14. Considera un círculo de diámetro d.

(a) Escribe una expresión en d para la longitud de la circunferencia. ¿Es ésta una expresión lineal en d? ¿Qué sucederá a la circunferencia si se duplica el diámet ¿Y si se reduce a la mitad? Si c es la longitud de la circunferencia, ¿qué podrás decir acerca de la razón $\frac{c}{d}$? ¿Cómo cambia el valor de $\frac{c}{d}$ cuando se altera el valor de d?

(b) Escribe una expresión en d para el área de la región circular o del disco. ¿Es esta expresión lineal en d? ¿Será lineal en d^2? Si A es el área del disco, ¿qué puedes decir acerca de la razón $\frac{A}{d}$? ¿Y acerca de la razón $\frac{A}{d^2}$? ¿Cambiará el valor de la razón $\frac{A}{d}$ cuando se altera el valor de d? ¿Cambiará el valor de $\frac{A}{d^2}$ cuando se altera el valor de d?

*15. En el caso de la expresión lineal particular "kx", se dice que el valor de la expresión varía de manera directamente proporcional al valor de la variable x. El coeficiente k se llama la constante de proporcionalidad. El valor de la expresión kx^2 se dice que varía de manera directamente proporcional al cuadrado del valor de x.

(a) ¿Varía en proporción directa con el diámetro la longitud de una circunferencia? ¿Cuál será la constante de proporcionalidad en este caso? ¿Varía en proporción directa con el diámetro el área de un disco? ¿Y con el cuadrado del diámetro? ¿Cuál será la constante de proporcionalidad?

(b) Con respecto a una gráfica, si y varía proporcionalmente a x, ¿qué significa la constante de proporcionalidad?

(c) Si la constante de proporcionalidad es negativa, ¿qué puedes decir acerca de la manera como varía el valor de la expresión cuando se cambia el valor de la variable?

(d) ¿Cuál sería la forma de una expresión en una variable x tal que el valor de la expresión varíe de modo directamente proporcional a la raíz cuadrada de x?

16. Un automóvil viaja con velocidad constante en una carretera recta. Si t es el tiempo en horas transcurrido desde la salida, escribe una expresión en t cuyo valor sea la distancia recorrida en millas. ¿Es esta expresión lineal en t? ¿Varía de modo directamente proporcional al tiempo la distancia recorrida? ¿Cómo puedes interpretar la constante de proporcionalidad en este ejemplo? Si sabemos que el automóvil ha recorrido 25 millas al cabo de 20 minutos, ¿cuál es la constante de proporcionalidad?

7. En el caso de una expresión de la forma $\frac{k}{x}$, se dice que el valor de la expresión varía de modo inversamente proporcional al valor de x. El número k es la constante de proporcionalidad.

(a) Construye las gráficas de los enunciados abiertos:

$$y = \frac{1}{x}; \quad y = -\frac{1}{x}; \quad y = \frac{2}{x}.$$

(b) Si asignamos a la variable x valores positivos crecientes, ¿qué podrías decir acerca de los valores de $\frac{k}{x}$? ¿Serán crecientes o decrecientes? ¿Es importante el que k sea positiva o negativa?

*18. Un rectángulo tiene área de 25 unidades cuadradas, y la longitud de uno de sus lados es w unidades.

(a) Escribe una expresión en w para la longitud del otro lado.

(b) ¿Es éste un caso de variación inversa? ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

(c) Construye la gráfica de la expresión en la parte (a).

---

*14-4. Gráficas de enunciados abiertos que contienen solamente enteros

Al construir las gráficas de enunciados abiertos, debemos tener en cuenta que todo punto de una gráfica está asociado con algún par de números reales. Suponte que consideramos un enunciado en el cual los valores de las variables están restringidos a números enteros, de manera que las coordenadas de los puntos de la gráfica tienen que ser enteros. ¿Qué forma tendría tal gráfica?

Primero consideremos los ejes coordenados. ¿Serían aún rectas? Parecen ser conjuntos de puntos tales como (0, 1), (0, 2), (0, 3), etc., ya que los valores de las variables están restringidos a enteros, y tal vez quisiéramos distinguir los ejes para tales casos de los ejes coordenados para todos los números reales. Sin embargo, una serie de marcas redondas podría confundirse con la gráfica misma; por lo tanto, utilizamos una serie de rayitas para cada eje.

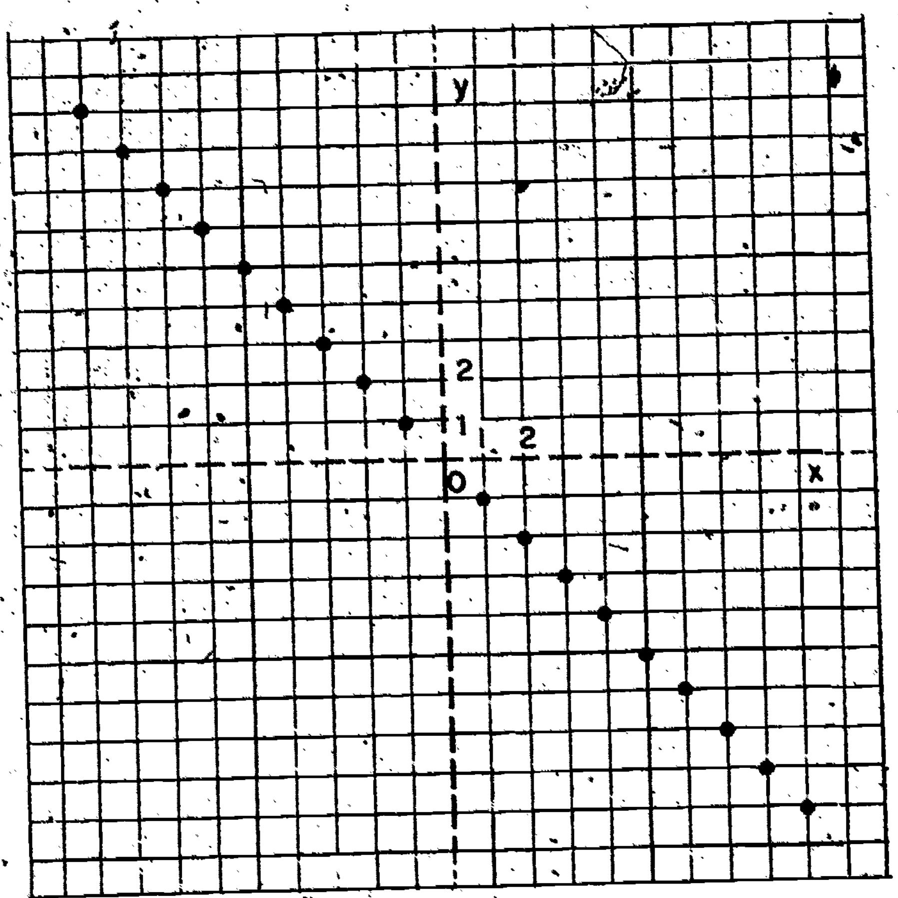


Figura 12

¿Cuál es el enunciado abierto asociado con la gráfica de la figura 12? Para determinarlo, primero observamos que la gráfica solamente incluye puntos cuyas coordenadas son enteros, y segundo que cada ordenada es el opuesto de la abscisa correspondiente. Esto lo podemos enunciar así: "$y = -x$, donde x, y son enteros tales que $-10 < x < 10$, $-10 < y < 10$".

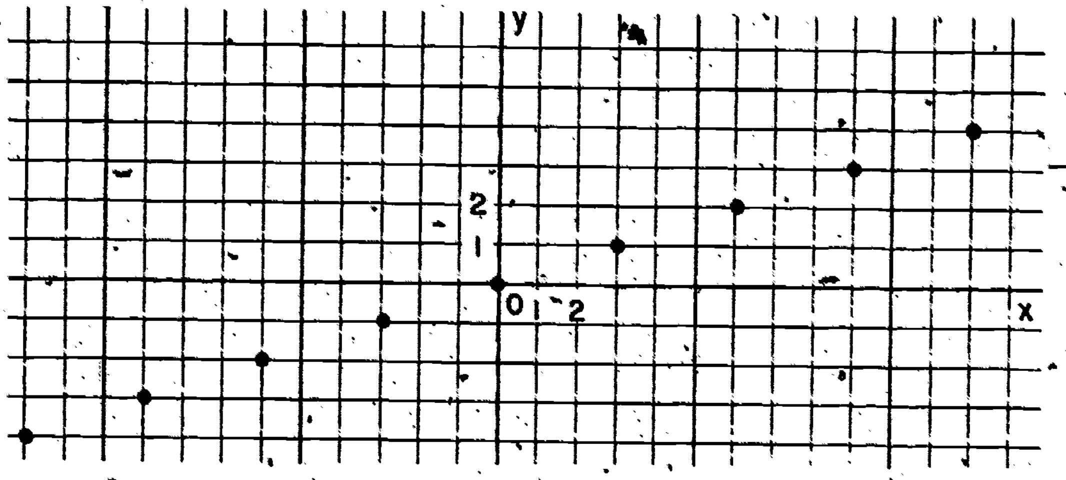


Figura 13

En la figura 13, los puntos se extienden más allá de los límites del diagrama. Observa que no hay puntos para $x = 1$, $x = 2$, $x = 4$, $x = -1$, ni para algunos otros valores de x. Si suponemos que todos los puntos están en una recta, como estos puntos parecen indicar, ¿qué observas acerca de la ordenada correspondiente a cada abscisa? Escribiríamos el enunciado abierto: "$y = \frac{x}{3}$, donde x, y son enteros". ¿Por qué no puede ser la abscisa igual a 1 ó 2?

Considera la figura 14. Para este conjunto de doce puntos no parece haber enunciado abierto simple alguno. ¿Podrás describir las limitaciones impuestas a las abscisas? ¿Qué afirmación podrás hacer acerca de las ordenadas?

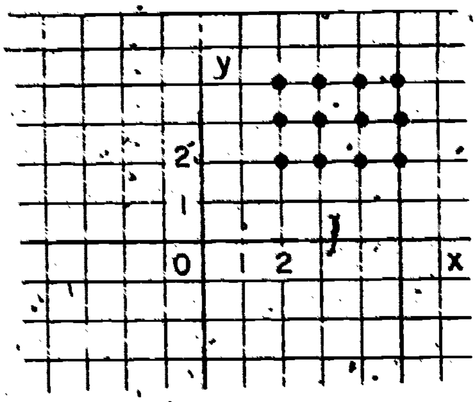


Figura 14

Estas propiedades se pueden exponer en un enunciado abierto compuesto así: "$1 < x < 6$ y $1 < y < 5$, donde x, y son enteros".

Observa que en este caso la conjunción del enunciado compuesto es y; observa también que los puntos cuyas coordenadas verifican el enunciado son sólo aquellos que pertenecen a los conjuntos de validez de las dos partes del enunciado compuesto.

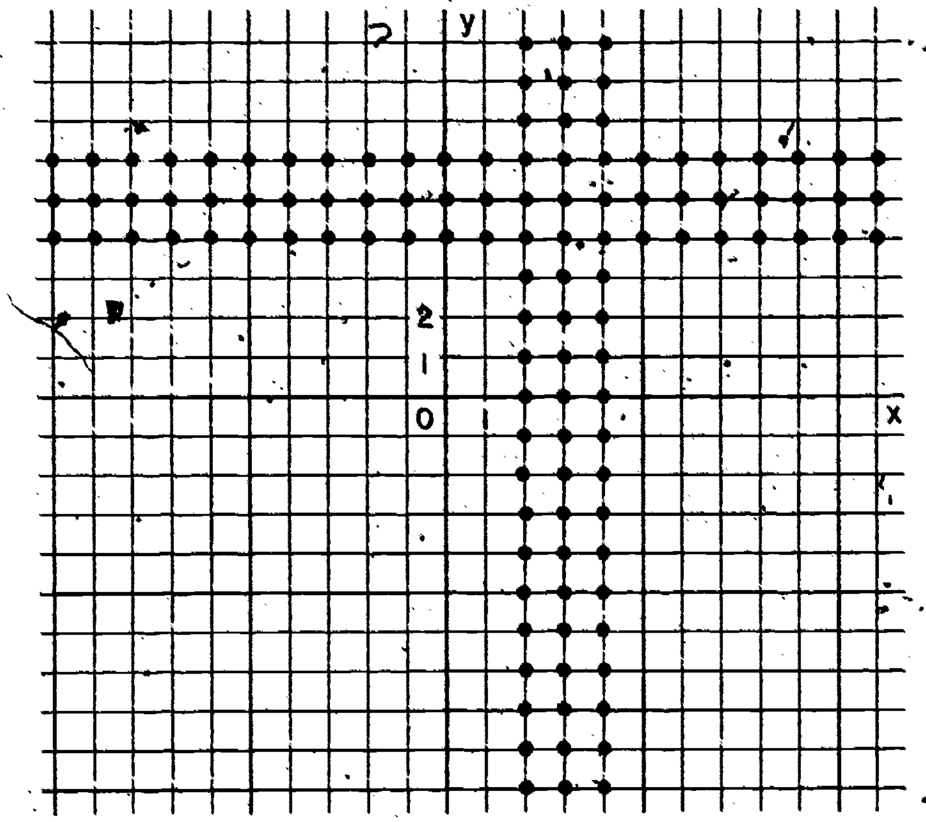


Figura 15

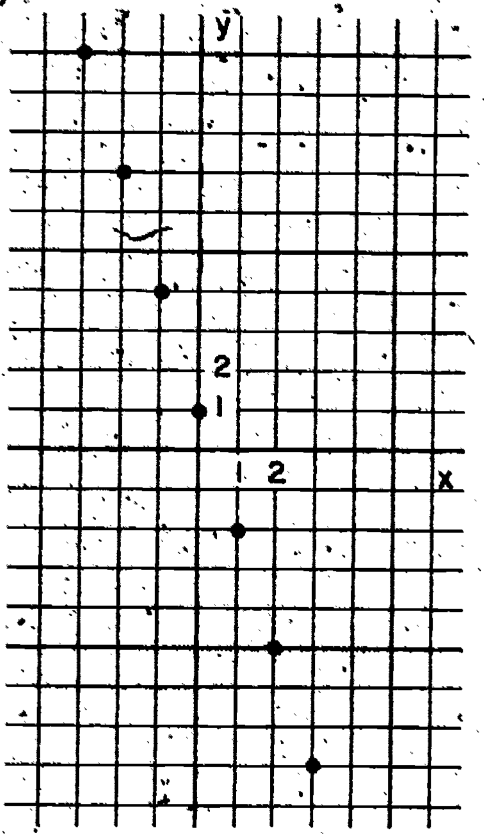
En la figura 15, la situación es diferente. Veamos qué enunciado abierto describe esta gráfica. Las tres filas horizontales de marcas redondas podrían ser la gráfica del enunciado: "$3 < y < 7$, donde x, y son enteros". Entonces escribimos un enunciado que describa las tres columnas verticales de marcas: "$1 < x < 5$, donde x, y son enteros". El enunciado abierto que describe el conjunto total de puntos es "$1 < x < 5$ ó $3 < y < 7$, donde x, y son enteros". Otra manera de enunciar esto sería: "$2 \leq x \leq 4$ ó $4 \leq y \leq 6$, donde x, y son enteros". Observa que en este caso la conjunción es o, y que la gráfica incluye todos los puntos pertenecientes al conjunto de validez de cualquiera de las dos partes del enunciado compuesto, o a ambos conjuntos.

Conjunto de problemas 14-4

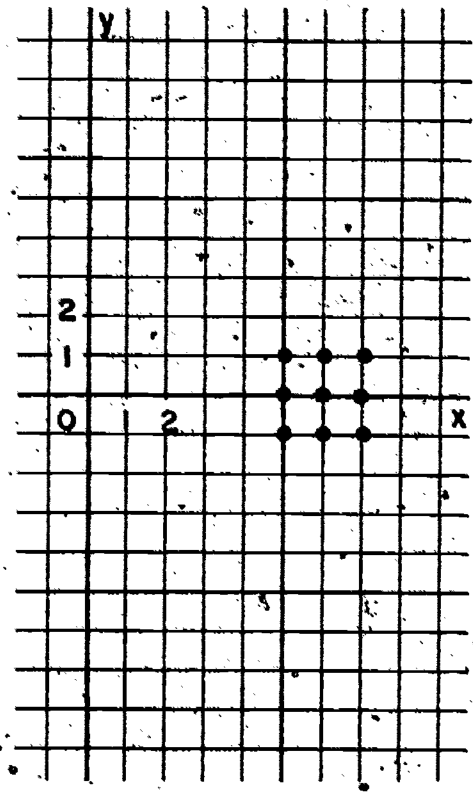
1. Con referencia a sistemas diferentes de ejes coordenados, y para x, y enteros, construye la gráfica de cada uno de los siguientes:
   (a) $y = \frac{x}{2}$, donde $-6 < x < 6$
   (b) $y = 3x - 2$
   (c) $y = 2x + 4$
2. Con referencia a sistemas diferentes de ejes coordenados, construye las gráficas de cada uno de los siguientes:
   (a) $-3 < x < 2$ y $-2 < y < 1$, donde x, y son enteros.
   (b) $-3 < x < 2$ ó $-2 < y < 1$, donde x, y son enteros.
   (c) $5 \leq x \leq 6$ ó $1 \leq y \leq 3$, donde x, y son enteros.
   (d) $5 \leq x \leq 6$ y $y = 0$, donde x, y son enteros.
3. Escribe un enunciado abierto compuesto cuyo conjunto de validez sea $\{(-1, 3)\}$.

4. Escribe enunciados abiertos cuyos conjuntos de validez sean los siguientes conjuntos de puntos:

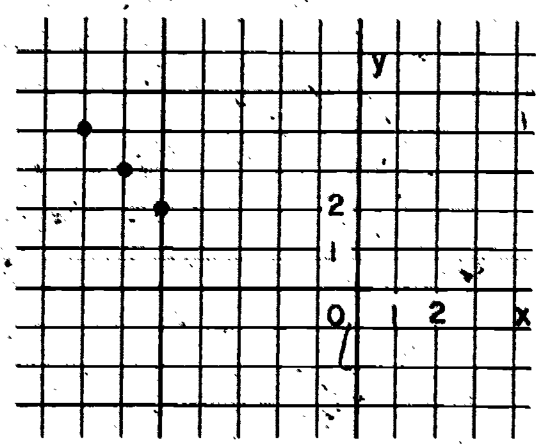
(a)



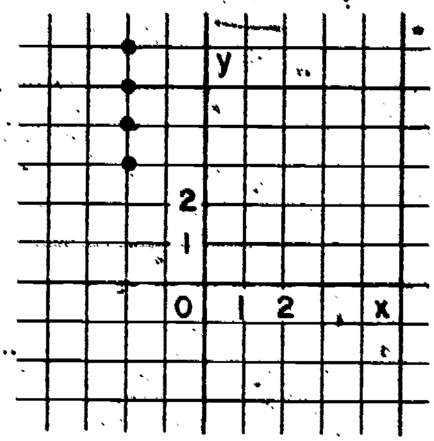
(b)



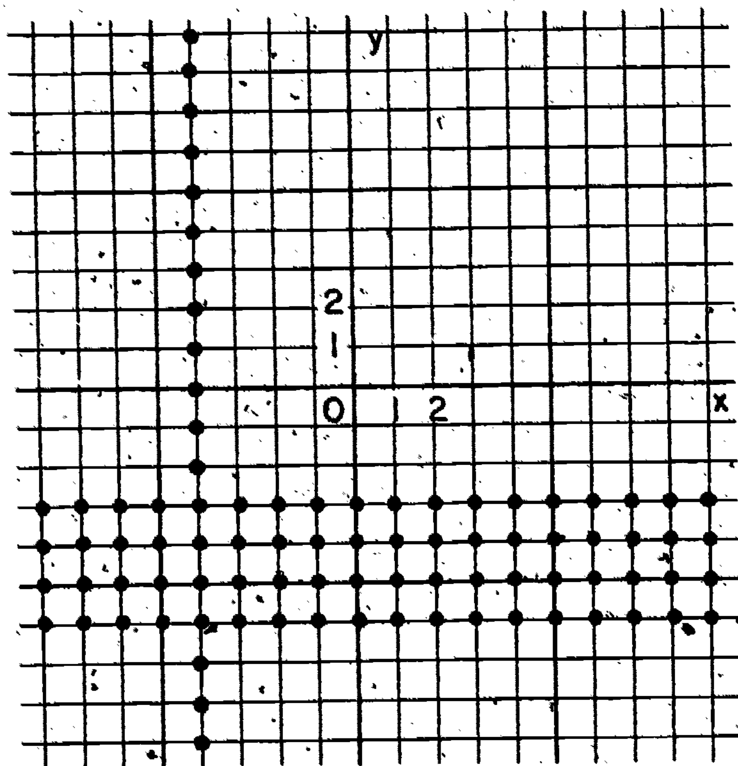
(c)



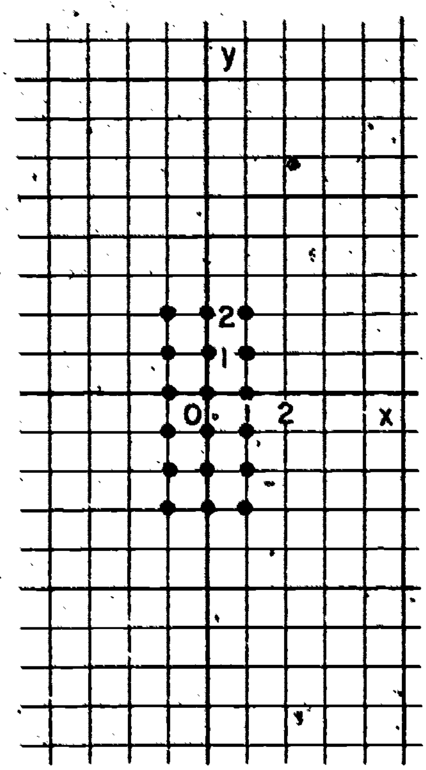
(d)



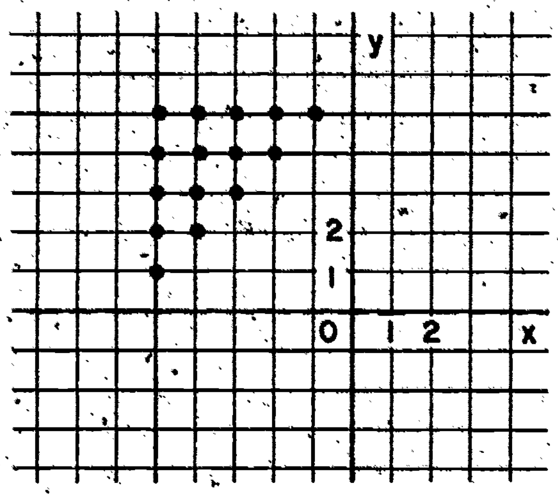
(e)



(f)



(g)



5. Con referencia a sistemas diferentes de ejes coordenados, construye las gráficas de los siguientes:

(a) $x + 5y = 15$, donde x, y son enteros.

(b) $x + 5y = 15$, donde x, y son números reales.

¿En qué difieren las gráficas de (a) y de (b)? Nombra algunos puntos que estén en una de las gráficas pero no en la otra.

(c) $x + 5y = 15$, donde x, y son números racionales. ¿En qué difiere esta gráfica de las demás? Si (x, y) es un punto de la recta $x + 5y = 15$ y si además x es racional, ¿qué puedes decir acerca de y?

14-5. Gráficas de enunciados abiertos que contienen el valor absoluto

Considera la ecuación "$|x| = 3$". Este enunciado es equivalente al enunciado "$x = 3$ ó $-x = 3$". ¿Qué forma tendría su gráfica? Primero considera la gráfica de "$x = 3$". La gráfica de este enunciado abierto es una recta paralela al eje vertical y a tres unidades a la derecha del mismo. La gráfica de "$-x = 3$" es una segunda recta paralela al eje vertical y a tres unidades a la izquierda del mismo. Por lo tanto, la gráfica completa de $|x| = 3$ consiste en dos rectas que son las gráficas de "$x = 3$", "$-x = 3$", como muestra la figura 16. Describe y construye las gráficas de:

(a) $|x| = 5$ (b) $|x| = 7$ (c) $|y| = 2$ (d) $|y| = 3$

¿Para qué valor de k será la gráfica de $|x| = k$ una sola recta?

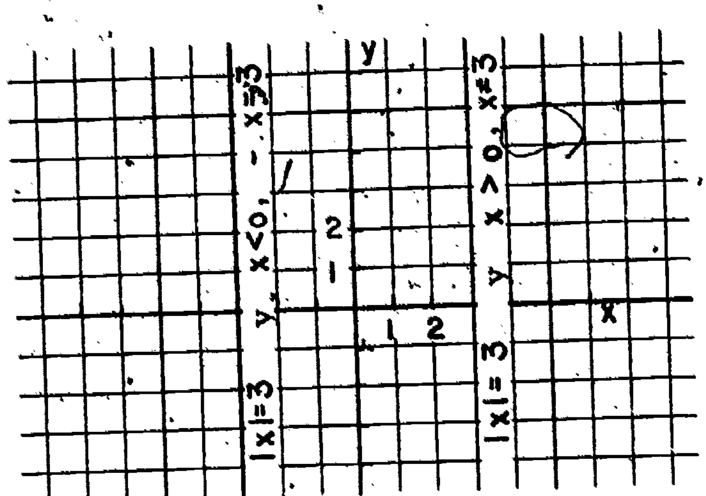


Figura 16

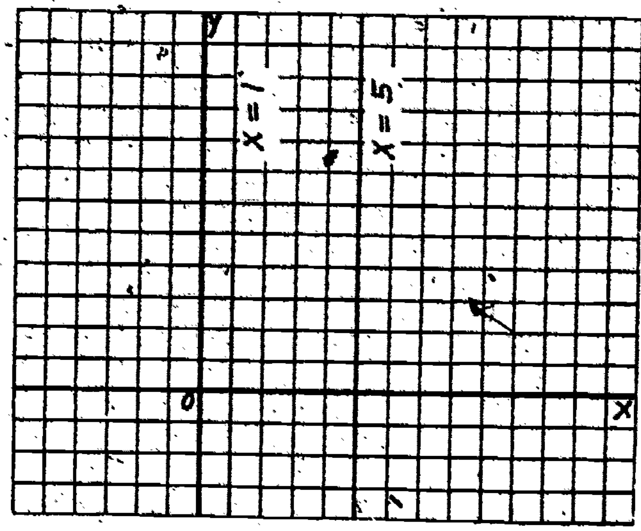


Figura 17

Considera la gráfica del enunciado abierto "$|x - 3| = 2$".

Este enunciado es equivalente a "$x - 3 = 2$ ó $-(x - 3) = 2$". ¿Qué forma tendría su gráfica? Primero consideremos el enunciado abierto $x - 3 = 2$, cuya gráfica es una recta paralela al eje vertical y a cinco unidades a la derecha del mismo. Luego, observa que la gráfica de "$-(x - 3) = 2$", es decir, de "$x = 1$", es una recta paralela al eje vertical y a 1 unidad a la derecha del mismo. Por lo tanto, la gráfica completa de "$|x - 3| = 2$" consiste en dos rectas, una que es la gráfica de "$x = 5$" y la otra la de "$x = 1$", como muestra la figura 17. En el dibujo, comprueba que una de estas rectas está a dos unidades a la derecha de $x = 3$, y que la otra está a dos unidades a la izquierda de $x = 3$. Recuerda que en la recta numérica, "$|x - 3| = 2$" significa que la distancia entre x y 3 es 2.

Conjunto de problemas 14-5a

1. Con referencia a sistemas diferentes de ejes coordenados, construye la gráfica de cada uno de los siguientes enunciados abiertos:

(a) $|x - 4| = 2$ (d) $|x + 1| = 2$

(b) $|y - 2| = 3$ (e) $|x + 3| = 1$

(c) $|y| = 5$ (f) $|y + 2| = 3$

2. Con referencia a sistemas diferentes de ejes coordenados, construye la gráfica de cada uno de los siguientes enunciados abiertos:

(a) $|x| > 2$

(b) $|x| \geq 2$

(c) $|x| < 5$

3. Con referencia a sistemas diferentes de ejes coordenados, construye la gráfica de cada uno de los siguientes:

(a) $y > 2x + 4$ (c) $y \geq \frac{3x}{4} - 1$

(b) $y < \frac{2x}{3} + 7$ (d) $y \leq 2x - 1$

4. Con referencia a sistemas diferentes de ejes coordenados, construye la gráfica de cada uno de los siguientes:

(a) $2x + y > 3$ (c) $x - 2y \leq 4$

(b) $x + 2y \geq 4$ (d) $2x - y \leq 3$

5. Escribe los enunciados abiertos correspondientes a las rectas (1), (2), (3) y (4) que aparecen en la figura siguiente. Observa que (4) es realmente un par de rectas.

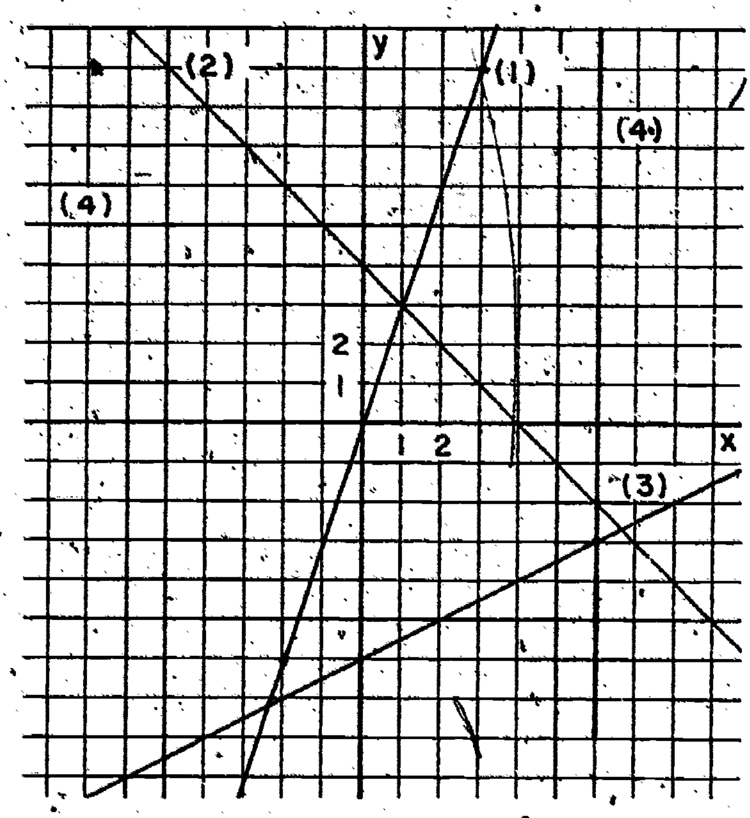


Figura para el problema 5

6. Construye un par de ejes coordenados. Con referencia a esos ejes, localiza tres puntos pertenecientes a cada uno de los conjuntos descritos a continuación. En cada caso traza una recta pasando por los tres puntos.

(a) La segunda coordenada del par ordenado es dos veces la primera.

(b) La segunda coordenada del par ordenado es 5 más que la mitad de la primera.

(c) La segunda coordenada del par ordenado es la mitad de la primera.

(d) La segunda coordenada del par ordenado es el opuesto de la primera.

Consideremos el enunciado abierto "$y = |x|$". Sea x positivo o negativo, ¿qué es cierto acerca del valor absoluto de x? Entonces, para todo valor de x, excepto 0, ¿qué es cierto acerca de y? Para $x = 0$, ¿cuál es el valor de y?

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\lvert x\rvert$	3	2	1	0	1	2	3

En la figura 18 observamos algo nuevo para nosotros: la gráfica del enunciado simple "$y = |x|$" resulta ser los dos lados de un ángulo recto. ¿Sabes por qué es éste un ángulo recto? ¿Hay alguna ecuación simple cuya gráfica consiste en dos rectas que no formen un ángulo recto? Sugiere una.

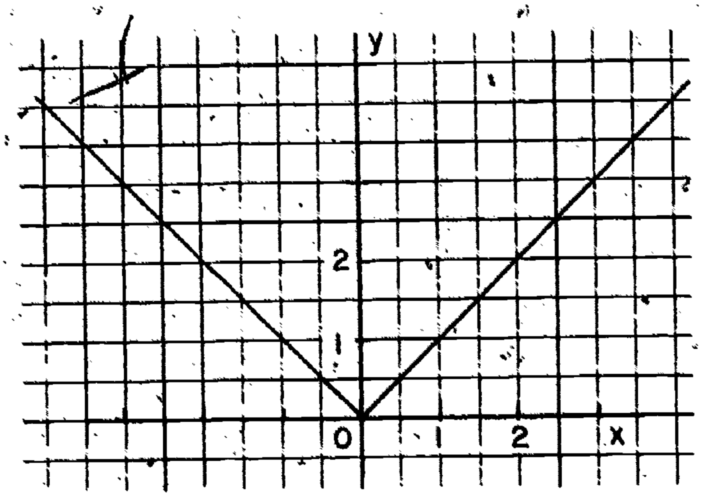


Figura 18

Conjunto de problemas 14-5b

1. Con referencia a sistemas diferentes de ejes coordenados, construye la gráfica de cada uno de los siguientes:

(a) $y = 2|x|$ (d) $y = -2|x|$

(b) $y = \frac{1}{2}|x|$ (e) $x = -|y|$

(c) $y = -|x|$ (f) $x = |-2y|$

2. Con referencia a sistemas diferentes de ejes coordenados, construye la gráfica de cada uno de los siguientes:

(a) $y = |x| + 3$ (d) $x = |y| + 3$

(b) $y = |x| - 7$ (e) $x = 2|y| - 1$

(c) $y = 2|x| + 1$ (f) $y = -|x| - 1$

3. Con referencia a sistemas diferentes de ejes coordenados, construye la gráfica de cada uno de los siguientes:

(a) $y = |x - 2|$ (d) $y = |x + 3| - 5$

(b) $y = |x + 3|$ (e) $y = \frac{1}{2}|x - 1| + 3$

(c) $y = 2|x + 3|$

4. ¿Cómo podrías obtener cada una de las gráficas en los problemas 1 (c), (e), 2 (a), (b), (d), (f), 3 (a), (b), (d) mediante la rotación o la traslación de las gráficas de $y = |x|$ ó de $x = |y|$? Ejemplos: La gráfica de "$y = |x - 2|$" puede obtenerse trasladando la gráfica de "$y = |x|$" dos unidades hacia la derecha. La gráfica de "$x = -|y|$" puede obtenerse haciendo girar la gráfica de "$x = |y|$" alrededor del eje y. La gráfica de "$y = |x| - 7$" puede obtenerse trasladando la gráfica de "$y = |x|$" 7 unidades hacia abajo.

*5. ¿Qué forma tendrá la gráfica de $|x| + |y| = 5$? Primero hagamos una tabla. Suponte que empezamos con las intersecciones con los ejes. Sea $y = 0$ y hallemos algunos posibles valores de x que hagan cierto el enunciado. Luego asignemos a x el valor 0, y obtengamos algunos valores de y. Ahora hallemos otros posibles valores. Supón que $x = 6$, ¿qué podrías decir acerca de los posibles valores de y? Si $x = 3$, entonces $|x| = 3$, $|y| = 2$; ¿qué posibles valores podría tener y? Completa la tabla que aparece a continuación y después construye la gráfica. ¿Cómo describirías la figura?

x	-5	-3	-3	-1	-1	0	0	1	1	3	3	5
|x|	5	3	3	1		0	0					5
|y|	0		2	4		5	5					0
y	0		-2	4		5	-5					0

Podríamos escribir cuatro enunciados abiertos que tengan la misma gráfica, siempre y cuando limitemos los valores de x:

$$x + y = 5, \quad y \quad 0 \leq x \leq 5,$$
$$x - y = 5, \quad y \quad 0 \leq x \leq 5,$$
$$-x + y = 5, \quad y \quad -5 \leq x \leq 0,$$
$$-x - y = 5, \quad y \quad -5 \leq x \leq 0.$$

Con referencia a un sistema de ejes coordenados, construye las gráficas de los cuatro enunciados anteriores. ¿Por qué fue necesario restringir los valores de x?

*5. Con referencia a sistemas diferentes de ejes coordenados, construye la gráfica de cada uno de los siguientes:

(a) $|x| + |y| > 5$ (c) $|x| + |y| \leq 5$

(b) $|x| + |y| < 5$ (d) $|x| + |y| \not< 5$

*7. Haz una tabla de algunos valores que hagan cierto el enunciado abierto

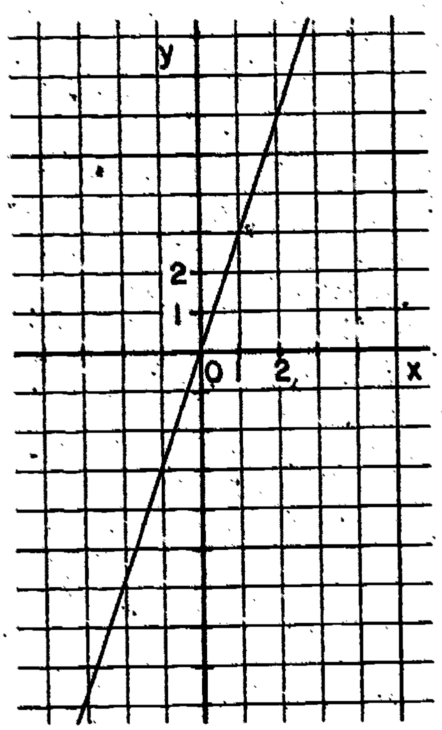
$$|x| - |y| = 3$$

y construye la gráfica del mismo. Como en el problema 5, escribe cuatro enunciados abiertos que tengan la misma gráfica.

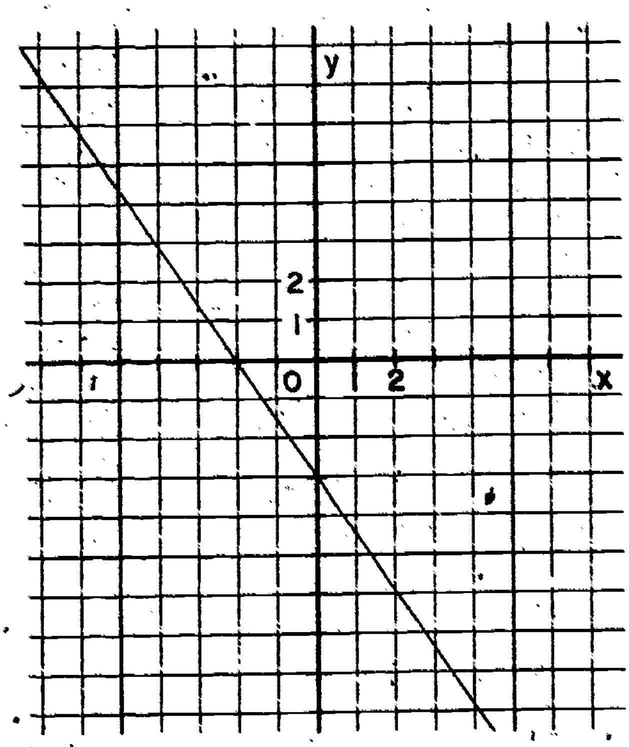
Problemas de repaso

1. Para cada una de las siguientes gráficas escribe su enunciado abierto:

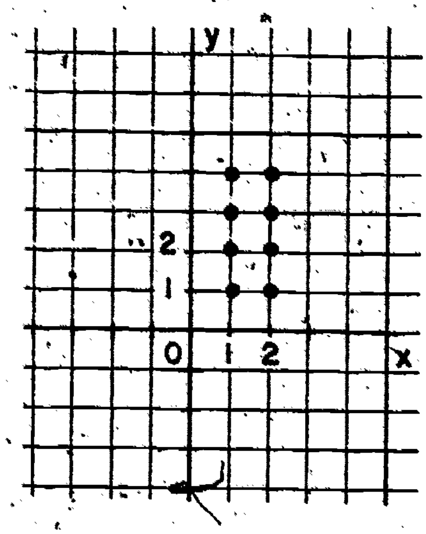
(a)



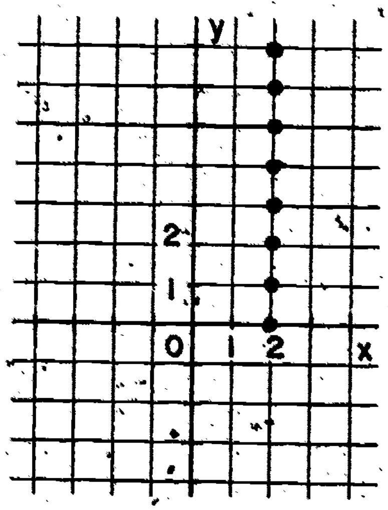
(b)



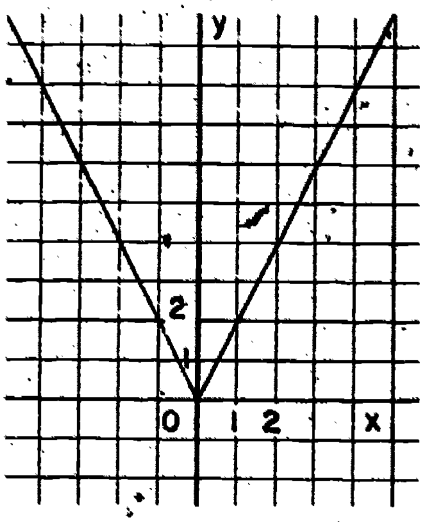
*(c)



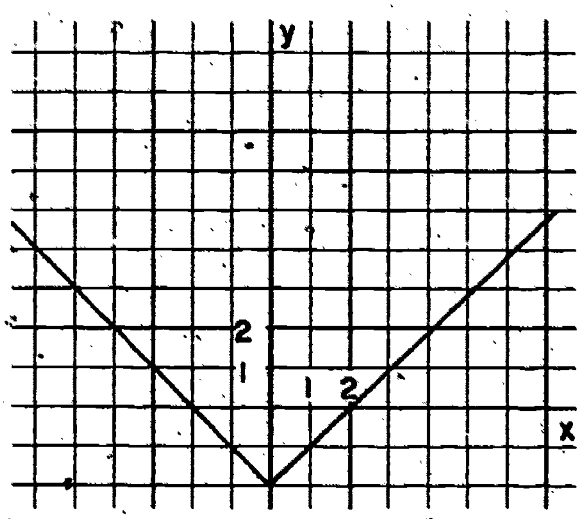
*(d)



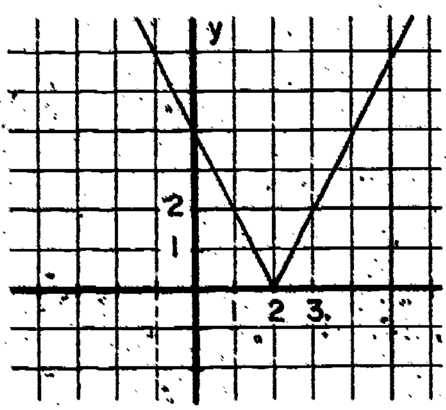
(e)



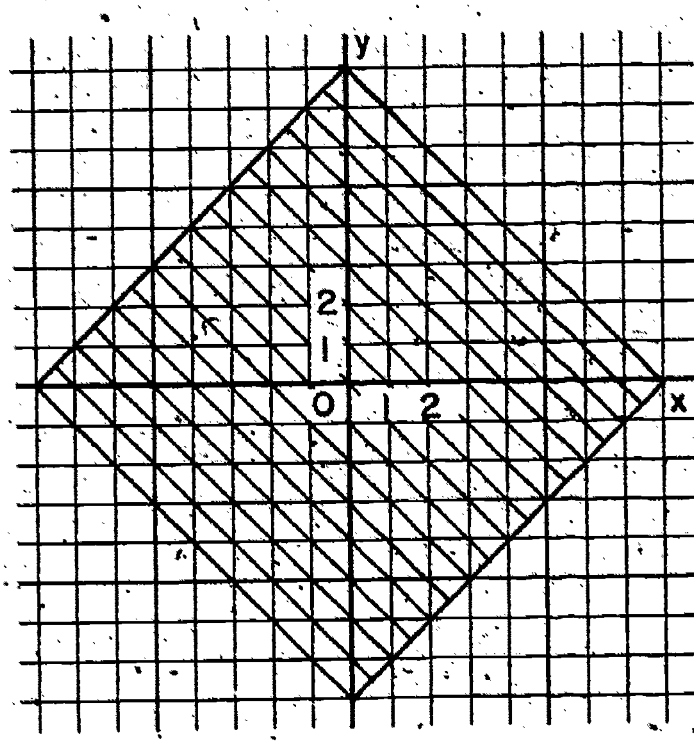
(f)



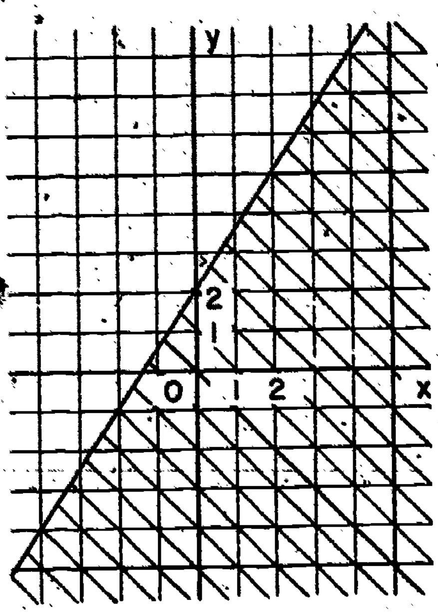
(g)



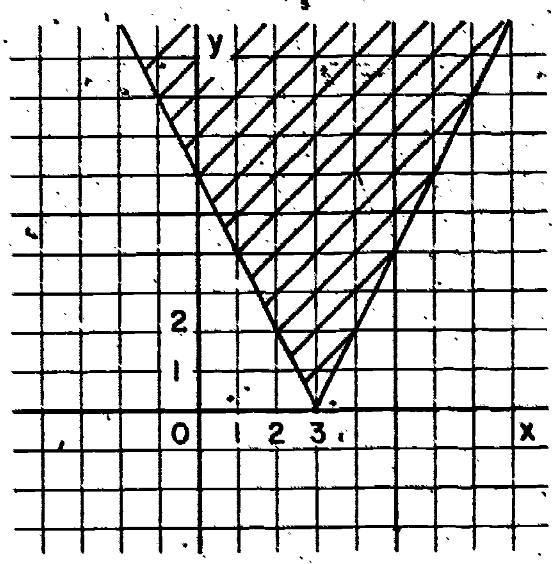
(h)

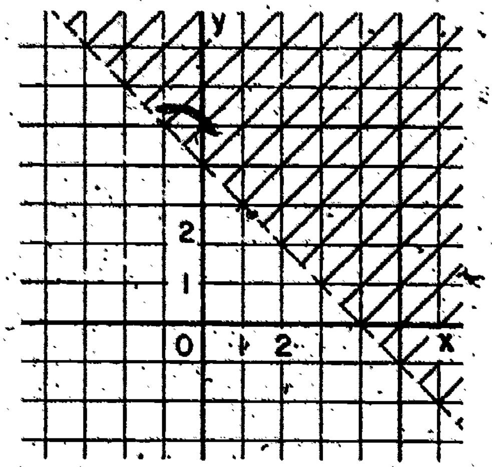


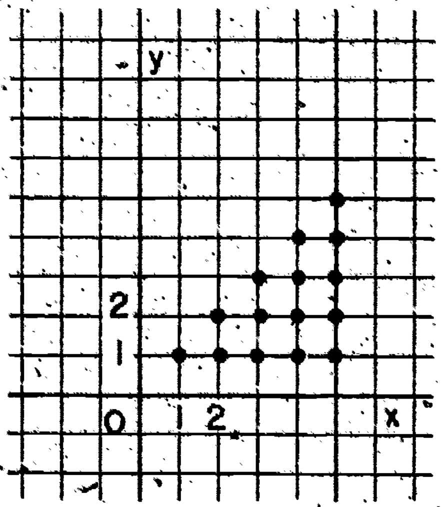
(i)



(j)



(k) 

*(l) 

2. Construye la gráfica de cada uno de los siguientes enunciados abiertos:

(a) $y \leq 3x$

(b) $y = \frac{x}{2} + 7$

(c) $y < \frac{x}{2} - 5$

(d) $y > 3$

(e) $x < 1.5$

(f) $x + y = 0$

(g) $|x| + |y| = -2$

(h) $3y \geq 2x - 1$

(i) $x = 3$ y $y = -1$

(j) $x + y \leq -2$

(k) $3y - 12 = 0$

*3. Dibuja un sistema de ejes coordenados y desígnalos (x, y). Pasando por el punto (2, -1), dibuja otro par de ejes (a, b) de manera que el eje a sea paralelo al eje x, y el eje b sea paralelo al eje y. Con referencia a los ejes (x, y), localiza los siguientes puntos: A(3, -5), B(-5, 3), C(-2, -5) D(0, 3), E(0, -3), F(-5, -1), G(-4, 3), H(6, 0), I(-6, 0), J(2, 6). Haz una tabla de los valores de las coordenadas de cada uno de estos puntos respecto a los ejes (a, b).

(a) $y = 3(-x) + 4$

(b) $y = -(3x + 4)$

(c) $y = (3x + 4) - 3$

(d) $y = 3(x - 2) + 4$

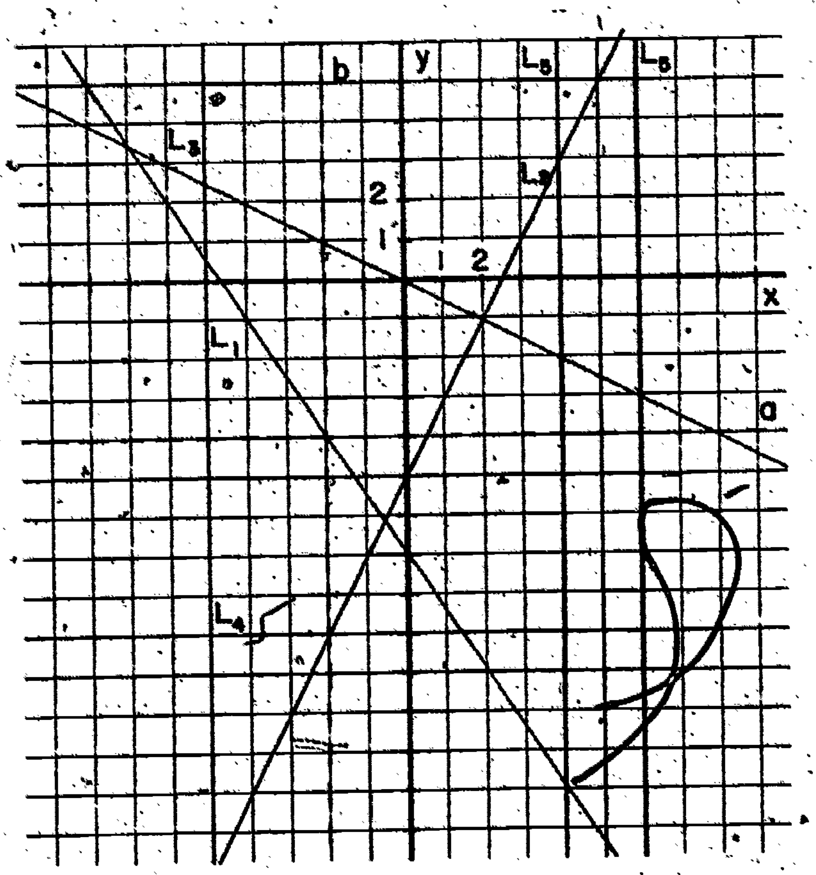


Figura para el problema 4

*4. Determina dos ecuaciones para cada una de las rectas de la figura anterior, una con referencia a los ejes (x, y) y la otra con referencia a los ejes (a, b). (Observa que L_5 consiste en un par de rectas.)

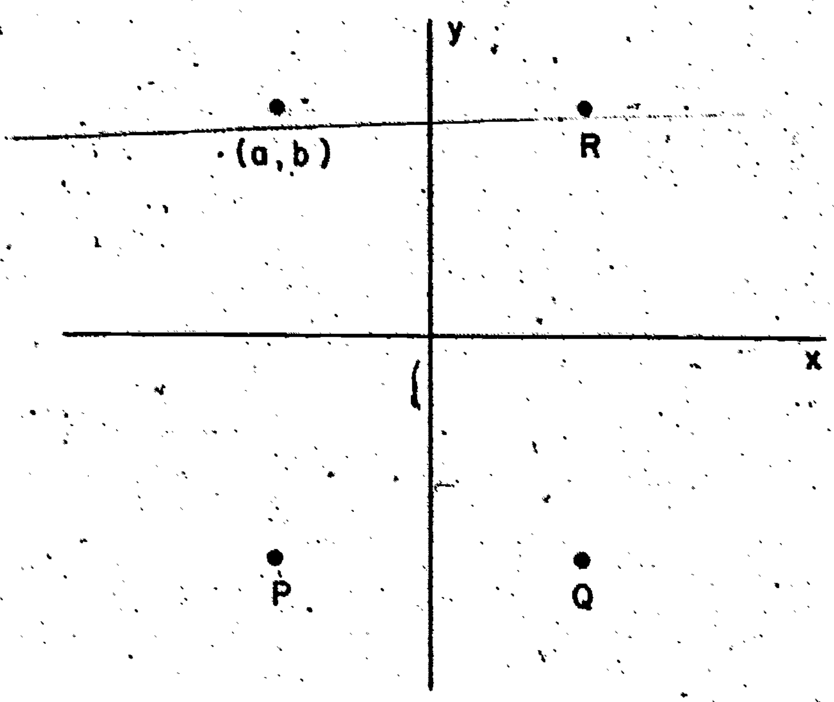


Figura para el problema 5

5. Si el punto (a, b) está situado en el segundo cuadrante,
   (a) ¿es a positiva?
   (b) ¿es b positiva?
   (c) Si las coordenadas de P, Q y R tienen los mismos valores absolutos que la abscisa y la ordenada de (a, b), halla las coordenadas de P, Q y R en términos de a y b.
6. Si (c, d) es un punto en el tercer cuadrante, ¿en qué cuadrante estará el punto (c, -d)?; ¿el punto (-c, d)?; ¿el punto (-c, -d)?

*7. Construye la gráfica de "y = 3x + 4". ¿Qué le sucede a esta gráfica cuando su ecuación se transforma como sigue?

*8. Construye la gráfica de "$y = 2|x|$". Determina la ecuación de la gráfica resultante de cada una de las siguientes transformaciones:

(a) Se hace girar la gráfica media vuelta alrededor del eje x.

(b) Se traslada la gráfica 3 unidades hacia la derecha.

(c) Se traslada la gráfica 2 unidades hacia la izquierda.

(d) Se traslada la gráfica 5 unidades hacia arriba.

(e) Se traslada la gráfica 2 unidades hacía la derecha y 4 unidades hacia abajo.

9. (a) Con referencia a un sistema de ejes, construye las gráficas de:

$$2x + y - 5 = 0$$

$$6x + 3y - 15 = 0.$$

¿Qué podrías decir acerca de estas dos gráficas? Ahora examina las ecuaciones. ¿Cómo podrías obtener la segunda ecuación de la primera?

(b) Para cualquier número k, distinto de cero, ¿qué podrías decir acerca de las gráficas de

$$Ax + By + C = 0$$

y

$$kAx + kBy + kC = 0?$$

(c) ¿Con qué condiciones serán las gráficas de

$$Ax + By + C = 0$$

y

$$Dx + Ey + F = 0$$

una misma recta? Si las gráficas consisten en la misma recta, ¿qué podrías decir acerca de las razones

$$\frac{A}{D}, \ \frac{B}{E} \ y \ \frac{C}{F} \ ?$$

10. (a) Con referencia a un sistema de ejes, construye las gráficas de

$$3x - 4y - 12 = 0,$$
$$12x - 16y - 32 = 0.$$

¿Qué podrías decir acerca de estas dos gráficas? ¿Y acerca de los coeficientes de x, y en estas ecuaciones?

(b) ¿Qué podrías decir acerca de las gráficas de

$$Ax + By + C = 0$$

y

$$kAx + kBy + D = 0$$

para cualquier número k distinto de cero?

(c) ¿Con qué condiciones serán rectas paralelas las gráficas de

$$Ax + By + C = 0$$

y

$$Dx + Ey + F = 0?$$

Si las gráficas son rectas paralelas, ¿qué razones iguales hay entre los coeficientes?

11. Construye las gráficas de las ecuaciones:

(a) $7u + 3t - 4 = 0$

(b) $2s - 5v - 1 = 0$

¿Dependen las gráficas de la elección que hiciste para la primera variable? Explica por qué hablamos acerca de enunciados con dos variables <u>ordenadas</u>.

*12. Suponte que movemos el punto con coordenadas (a, b) hasta el punto $(a, -b)$. Describe esto en términos de opuestos. Descríbelo en términos de una rotación. Contesta las siguientes preguntas, y localiza los puntos a que se refieren las partes (a) y (b).

(a) ¿A qué puntos van los siguientes:

(2, 1), (2, -1), $(-\frac{1}{2}, 2)$, (-2, -3), (3, 0),

(-5, 0), (0, 5), (0, -5) ?

(b) ¿Qué puntos van a los puntos indicados en (a) ?

(c) ¿A qué punto va (a, -b)?

(d) ¿A qué punto va (-a, b)?

(e) ¿Qué punto va a (a, b)?

(f) ¿Qué puntos no cambian de posición?

*13. Supónte que movemos el punto con coordenadas (a, b) hasta el punto (a - 3, b + 2). ¿Cómo podrías obtener esto moviendo todos los puntos del plano? Contesta las siguientes preguntas y localiza los puntos:

(a) ¿A qué puntos van los siguientes:

(1, 1), (-1, -1), (-2, 2), (0, -3), (3, 0)?

(b) ¿Qué puntos van a los puntos indicados en (a)?

(c) ¿A qué punto va (a, b - 2)?

(d) ¿Qué punto va a (-a, -b)?

(e) ¿Qué puntos no cambian de posición?

(f) Describe cómo se moverían los puntos si el punto (a, b) se mueve hasta el punto (a, b - 2).

Capítulo 15

SISTEMAS DE ECUACIONES Y DE INECUACIONES

15-1. Sistemas de ecuaciones

En el capítulo 3 comenzamos un estudio de enunciados compuestos. ¿Qué conjunciones se utilizan en estos enunciados? Primero consideremos un enunciado con dos cláusulas en dos variables, conectadas por la conjunción "o"; por ejemplo,

$$x + 2y - 5 = 0 \quad ó \quad 2x + y - 1 = 0.$$

¿Cuándo es cierto un enunciado que lleva la conjunción "o"? El conjunto de validez de este enunciado incluye todos los pares ordenados de números que satisfacen a la ecuación "$x + 2y - 5 = 0$", así como también todos los pares ordenados que satisfacen a la ecuación "$2x + y - 1 = 0$", y la gráfica de su conjunto de validez es el par de rectas que muestra la figura 1.

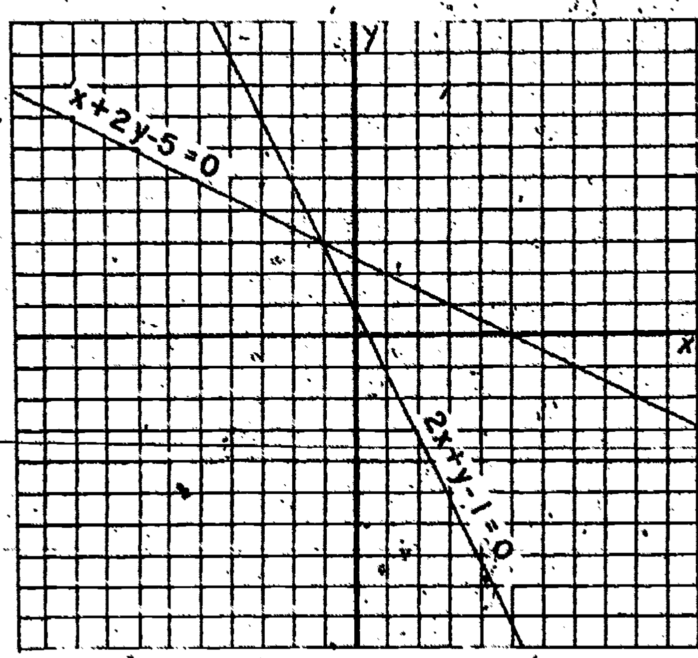


Figura 1

Determina tres pares ordenados de números que pertenezcan al conjunto de validez de

$$x + 2y - 5 = 0.$$

Determina cuatro pares ordenados que pertenezcan al conjunto de validez de

$$2x + y - 1 = 0.$$

¿Cuáles de estos pares ordenados de números son elementos del conjunto de validez del enunciado abierto compuesto

$$x + 2y - 5 = 0 \quad ó \quad 2x + y - 1 = 0?$$

Si recordamos que los enunciados "$ab = 0$" y "$a = 0$" son equivalentes cuando a y b son números reales, vemos que otra manera de escribir este enunciado compuesto sería

$$(x + 2y - 5)(2x + y - 1) = 0.$$

Consideremos ahora un enunciado compuesto que lleva la conjunción "y" en lugar de la conjunción "o". ¿Qué pares ordenados son elementos del conjunto de validez del enunciado abierto compuesto "$x + 2y - 5 = 0$ y $2x + y - 1 = 0$"? Observa que sólo un par ordenado, $(-1, 3)$, satisface a ambas cláusulas de este enunciado y por consiguiente la gráfica del conjunto de validez del enunciado abierto "$x + 2y - 5 = 0$ y $2x + y - 1 = 0$" es la intersección del par de rectas en la figura 1.

En este capítulo dedicaremos gran parte de nuestra atención a enunciados abiertos compuestos que contienen dos cláusulas enlazadas por la conjunción y. Este tipo de enunciado abierto, que lleva la conjunción "y", frecuentemente se escribe

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0. \end{cases}$$

Esto se llama un sistema de ecuaciones con dos variables. Cuando hablamos acerca del conjunto de validez de un sistema de ecuacion nos referimos al conjunto de elementos comunes a los conjuntos de validez de las ecuaciones. ~~Como hemos visto, el conjunto de~~ validez de

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases}$$

es $\{(-1, 3)\}$.

Conjunto de problemas 15-1a

1. Halla los conjuntos de validez de los siguientes sistemas de ecuaciones, construyendo las gráficas de cada par de enunciados abiertos y obteniendo por inspección las coordenadas de los puntos de intersección: (En cada caso, verifica que dichas coordenadas satisfacen al enunciado.)

   (a) $\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ 3x + y - 3 = 0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x - 3 = 0 \\ 2x + 3y - 9 = 0 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} 2x + 3y - 3 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} 5x + y - 10 = 0 \\ 2x + 2y - 8 = 0 \end{cases}$

   (e) $\begin{cases} 5x - y + 13 = 0 \\ x - 2y - 12 = 0 \end{cases}$

2. Construye la gráfica del conjunto de validez de cada uno de los siguientes enunciados;

   (a) $x + 2y - 6 = 0$ ó $2x + y - 5 = 0$

   (b) $(2x - 3y + 9)(3x + y - 2) = 0$

¿Se te hizo difícil obtener por inspección las coordenadas de los puntos de intersección en los problemas 1 (d) y (e)? Veamos si podemos encontrar una manera sistemática de obtener el par ordenado sin tener que recurrir a esa inspección.

Volviendo al enunciado compuesto "$x + 2y - 5 = 0$ y $2x + y - 1 = 0$", examinando la figura 2, vemos que hay muchos enunciados abiertos compuestos con conjunto de validez $\{(-1, 3)\}$;

por ejemplo, "$2x + y - 1 = 0$ y $y - 3 = 0$", "$x + 2y - 5 = 0$ y $x + 1 = 0$" son dos enunciados equivalentes tales, puesto que sus gráficas son pares de rectas que se intersecan en $(-1, 3)$. Escribe por lo menos otros dos enunciados compuestos con conjunto de validez $\{(-1, 3)\}$. ¿Cuál es el conjunto de validez de

$$x + 1 = 0 \text{ y } y - 3 = 0?$$

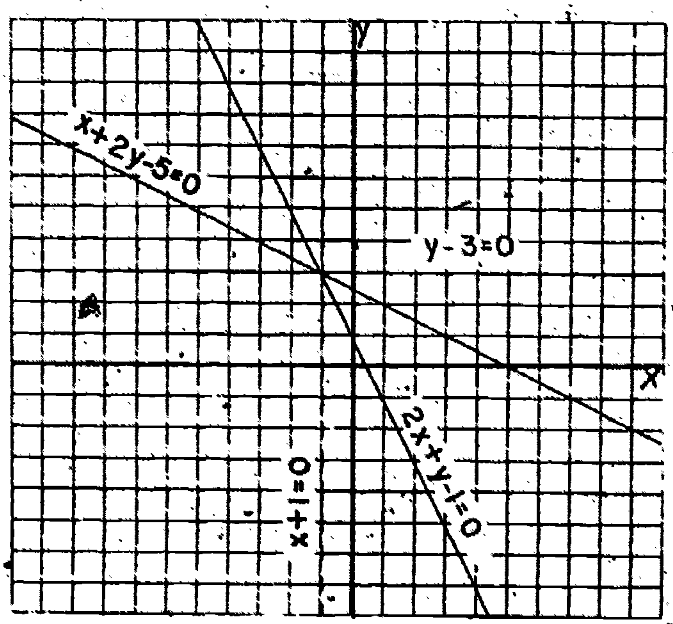


Figura 2

De aquí se desprende que podríamos encontrar fácilmente el conjunto de validez de cualquier enunciado abierto compuesto del tipo

$$2x + y - 1 = 0 \quad \text{y} \quad x + 2y - 5 = 0,$$

si tuviéramos un método para obtener las ecuaciones de las rectas horizontal y vertical que pasan por el punto de intersección de las gráficas de las dos cláusulas.

Por un punto pasan muchas rectas. He aquí un método que, como veremos, nos dará la ecuación de cualquier recta que pase por el punto de intersección de dos rectas dadas, siempre y cuando las rectas se intersequen en un solo punto. Para ilustrarlo utilizaremos otra vez el sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 . \end{cases}$$

Multiplicamos el miembro de la izquierda en la primera ecuación por cualquier número, digamos 3, y el miembro de la izquierda en la segunda ecuación por cualquier número, digamos 7, y formemos el enunciado

$$3(x + 2y - 5) + 7(2x + y - 1) = 0 .$$

Vemos que:

(1) Las coordenadas del punto de intersección (-1, 3) de las dos rectas satisfacen a este nuevo enunciado:

$$3\left(-1 + 2(3) - 5\right) + 7\left(2(-1) + 3 - 1\right) = 3(0) + 7(0) = 0.$$

En general, sabemos que un punto pertenece a la gráfica de un enunciado si sus coordenadas satisfacen al enunciado. De modo que la gráfica de nuestro nuevo enunciado abierto

"$3(x + 2y - 5) + 7(2x + y - 1) = 0$"

contiene el punto de intersección de las dos rectas

"$x + 2y - 5 = 0$" y "$2x + y - 1 = 0$".

(2) La gráfica del nuevo enunciado es una recta, porque:

$$3(x + 2y - 5) + 7(2x + y - 1) = 0$$
$$3x + 6y - 15 + 14x + 7y - 7 = 0$$
$$17x + 13y - 22 = 0$$

y en el capítulo 14 vimos que la gráfica de cualquier ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$ es una recta, cuando por lo menos uno de los coeficientes A ó B es distinto de cero.

Supongamos que empleamos este método para hallar la ecuación de una recta que pasa por el punt~~o de intersección~~ de las gráficas de las dos ecuaciones en el problema 1(e) del Conjunto de problemas 15-1a:

$$\begin{cases} 5x - y + 13 = 0 \\ x - 2y - 12 = 0 . \end{cases}$$

Si no se interesa alguna recta en particular, podemos multiplicar por números arbitrarios. Si escogemos 3 y -2 como multiplicadores, obtenemos la ecuación:

$$3(5x - y + 13) + (-2)(x - 2y - 12) = 0.$$

Supongamos que el punto (c, d) es el punto de intersección de las gráficas de las dos ecuaciones dadas. Como el punto (c, d) está en <u>ambas</u> gráficas, sabes que

$$5c - d + 13 = 0 \quad \underline{y} \quad c - 2d - 12 = 0$$

es un enunciado cierto. ¿Por qué?

Sustituyendo en el miembro izquierdo de nuestra nueva ecuació las variables x, y por c <u>y</u> d, respectivamente, obtenemos

$$3(5c - d + 13) + (-2)(c - 2d - 12) = 3(0) + (-2)(0) = 0.$$

Por consiguiente, sabemos que si las gráficas de las dos ecuaciones originales se intersecan en el punto (c, d), la nueva rec también pasa por (c, d), aun cuando no sepamos qué punto es (c, d).

En general, podemos decir:

> Si $Ax + By + C = 0$ y $Dx + Ey + F = 0$ son las ecuaciones de dos rectas que se intersecan en un solo punto, y si además a, b son números reales, entonces
>
> $$a(Ax + By + C) + b(Dx + Ey + F) = 0$$
>
> es la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección de las dos rectas originales.

Ahora que disponemos de un método para hallar las ecuaciones de rectas que pasan por el punto de intersección de dos rectas dadas, veamos si podemos escoger más cuidadosamente nuestros multiplicadores a y b, de manera que podamos obtener las ecuaciones de rectas paralelas a los ejes coordenados.

Tuvimos dificultad al tratar de determinar el conjunto de validez del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 5x - y + 13 = 0 \\ x - 2y - 12 = 0 \end{cases}$$

mediante la inspección de la gráfica. Veamos si este nuevo enfoque nos ofrece alguna ayuda. Escribe el enunciado

$$a(5x - y + 13) + b(x - 2y - 12) = 0.$$

Seleccionemos a igual a 2 y b igual a -1, de manera que los coeficientes de y resulten opuestos:

$$(2)(5x - y + 13) + (-1)(x - 2y - 12) = 0$$
$$10x - 2y + 26 - x + 2y + 12 = 0$$
$$9x + 38 = 0$$
$$x + 4\frac{2}{9} = 0$$

Esta última ecuación representa la recta que pasa por el punto de intersección de las gráficas de las dos ecuaciones dadas y es paralela al eje y. Volvamos atrás y escojamos nuevos multiplicadores que nos den la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección y es paralela al eje x. ¿Qué multiplicadores emplearemos? Puesto que deseamos que los coeficientes de x sean opuestos, escogemos $a = 1$ y $b = -5$:

$$(1)(5x - y + 13) + (-5)(x - 2y - 12) = 0$$
$$5x - y + 13 - 5x + 10y + 60 = 0$$
$$9y + 73 = 0$$
$$y + 8\frac{1}{9} = 0$$

Ahora tenemos las ecuaciones de dos nuevas rectas, "$x + 4\frac{2}{9} = 0$", "$y + 8\frac{1}{9} = 0$", cada una de las cuales pasa por el punto de intersección de las gráficas de las dos ecuaciones originales. ¿Por qué? Esto reduce nuestro problema original al de hallar el punto de intersección de estas nuevas rectas. ¿Te das cuenta de qué punto es? Entonces vemos que el conjunto de validez del sistema

$$\begin{cases} 5x - y + 13 = 0 \\ x - 2y - 12 = 0 \end{cases}$$

es $\left\{\left(-4\frac{2}{9}, -8\frac{1}{9}\right)\right\}$. Verifícalo comprobando que estas coordenadas satisfacen a ambas ecuaciones.

Ahora disponemos de un procedimiento para resolver cualquier sistema de dos ecuaciones lineales. Escogemos los multiplicadores de manera tal que obtengamos un sistema equivalente de rectas que sean una vertical y la otra horizontal. Con la práctica, la elección de los multiplicadores se nos hará fácil.

Considera otro ejemplo: Tres veces el más pequeño de dos números es 6 unidades mayor que el doble del más grande, y tres veces el más grande de los números es 7 unidades mayor que cuatro veces el más pequeño. ¿Cuáles son los números?

El número menor x y el mayor y deben satisfacer al enunciado abierto

$$3x = 2y + 6 \quad \underline{y} \quad 3y = 4x + 7 .$$

Este enunciado es equivalente a

$$3x - 2y - 6 = 0 \quad \underline{y} \quad 4x - 3y + 7 = 0.$$

Escoge multiplicadores de manera tal que los coeficientes de x sean opuestos. Para ello sirven 4 y -3.

$$4(3x - 2y - 6) + (-3)(4x - 3y + 7) = 0$$

$$12x - 8y - 24 - 12x + 9y - 21 = 0$$

$$y - 45 = 0$$

Ahora podríamos escoger multiplicadores de manera que los coeficientes de y fueran opuestos. Otro modo de hallar la recta que pasa por el punto de intersección y es paralela al eje y es el siguiente: En la recta "$y - 45 = 0$" todo punto tiene ordenada igual a 45. Así, pues, la ordenada del punto de intersección es 45. La solución del enunciado "$3x - 2y - 6 = 0$" con ordenada igual a 45 se obtiene resolviendo el enunciado "$3x - 2(45) - 6 = 0$" ó su equivalente, "$x - 32 = 0$". Por consiguiente, el enunciado "$3x - 2y - 6 = 0$ y $4x - 3y + 7 = 0$" es equivalente al enunciado "$y - 45 = 0$ y $x - 32 = 0$". Ahora es fácil leer sin más la solución del sistema como (32, 45).

En el ejemplo anterior, ¿cuál será la solución del enunciado "$4x - 3y + 7 = 0$" con ordenada 45? ¿Importa algo en qué enunciado asignamos a y el valor de 45?

Ejemplo 1. Halla el conjunto de validez de:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 6 \\ 2x + 5y = 16 . \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 3y - 6 = 0 \\ 2x + 5y - 16 = 0 \end{cases}$$

$$1(4x - 3y - 6) - 2(2x + 5y - 16) = 0$$
$$4x - 3y - 6 - 4x - 10y + 32 = 0$$
$$-13y + 26 = 0$$
$$26 = 13y$$
$$2 = y$$

Cuando $y = 2$,

$$4x - 3 \cdot 2 = 6$$
$$4x = 12$$
$$x = 3$$

Por lo tanto, el enunciado "$x = 3$ y $y = 2$" es equivalente al enunciado original.

El conjunto de validez es $\{(3, 2)\}$.

Verificación:	Izquierda	Derecha
Primera cláusula:	$4 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 12 - 6$	
	$= 6$	6
Segunda cláusula:	$2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 6 + 10$	
	$= 16$	16

Ejemplo 2. Resuelve:

$$\begin{cases} 3x = 5y + 2 \\ 2x = 6y + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 5y - 2 = 0 \\ 2x - 6y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 6(3x - 5y - 2) - 5(2x - 6y - 3) &= 0 \\ 18x - 30y - 12 - 10x + 30y + 15 &= 0 \\ 8x + 3 &= 0 \\ 8x &= -3 \\ x &= -\frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(3x - 5y - 2) - 3(2x - 6y - 3) &= 0 \\ 6x - 10y - 4 - 6x + 18y + 9 &= 0 \\ 8y + 5 &= 0 \\ 8y &= -5 \\ y &= -\frac{5}{8} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el enunciado "$x = -\frac{3}{8}$ y $y = -\frac{5}{8}$" es equivalente al enunciado original.

La solución es $\left(-\frac{3}{8}, -\frac{5}{8}\right)$.

Verificación: Izquierda Derecha

Primera cláusula: $3\left(-\frac{3}{8}\right) = -\frac{9}{8}$ $\quad 5\left(-\frac{5}{8}\right) + 2 = -\frac{25}{8} + \frac{16}{8}$

$$= -\frac{9}{8}$$

Segunda cláusula: $2\left(-\frac{3}{8}\right) = -\frac{3}{4}$ $\quad 6\left(-\frac{5}{8}\right) + 3 = -\frac{15}{4} + \frac{12}{4}$

$$= -\frac{3}{4}$$

Conjunto de problemas 15-1b

1. Por el método que acabamos de desarrollar, halla el conjunto de validez de cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones. Con referencia a sistemas diferentes de ejes, construye las gráficas de cada par de ecuaciones en (a) y (b).

(a) $\begin{cases} 3x - 2y - 14 = 0 \\ 2x + 3y + 8 = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 5x - y = 32 \\ x - 2y - 19 = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 3x - 2y = 27 \\ 2x - 7y = -50 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x + y - 30 = 0 \\ x - y + 7 = 0 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} y = 7x + 5 \\ 4x = y - 3 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} 3 - 5x = 0 \\ 3y = x - 6 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + y = 2 \\ y - \frac{1}{3}x = 1 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} 7x - 6y = 9 \\ 9x - 8y = 7 \end{cases}$

2. Para resolver un sistema de ecuaciones, también podemos emplear las operaciones con ecuaciones expuestas en el capítulo 13. El método resultante es esencialmente el mismo que el empleado en los casos que acabamos de ver. Por ejemplo, considera el sistema:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 5 = 0 \\ x + 3y - 8 = 0 \end{cases}$$

y supón que (c, d) es la solución del mismo. Entonces, cada una de las siguientes ecuaciones es cierta:

$$\begin{aligned} 3c - 2d - 5 &= 0 \\ c + 3d - 8 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3(3c - 2d - 5) &= 3(0) \\ 2(c + 3d - 8) &= 2(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9c - 6d - 15 &= 0 \\ 2c + 6d - 16 &= 0 \end{aligned}$$

$$11c - 31 = 0$$

$$c = \frac{31}{11}$$

También,

$$\begin{aligned} 3c - 2d - 5 &= 0 \\ -3(c + 3d - 8) &= -3(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3c - 2d - 5 &= 0 \\ -3c - 9d + 24 &= 0 \end{aligned}$$

$$-11d + 19 = 0$$

$$d = \frac{19}{11}$$

De modo que si hay una solución para el sistema

$$\begin{cases} 3x - 2y - 5 = 0 \\ x + 3y - 8 = 0 \end{cases}$$

entonces esa solución será $(\frac{31}{11}, \frac{19}{11})$. Debemos verificar que en efecto ésta es una solución.

$$3(\frac{31}{11}) - 2(\frac{19}{11}) - 5 = 0$$

$$\frac{31}{11} + 3(\frac{19}{11}) - 8 = 0$$

¿Son ciertos esos enunciados?

A menudo a este método de resolver sistemas de ecuaciones se le llama método de reducción o también método de combinación lineal con coeficientes determinados. Utilízalo para hallar el conjunto de validez de cada uno de los sistemas siguientes:

(a) $\begin{cases} [illegible]x - 4y - 15 = 0 \\ 3x + 5y - 11 = 0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 2x = 3 - 2y \\ 3y = 4 - 2y \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x = 3 - 2y \\ 3y = 4 - 2x \end{cases}$ (d) $\begin{cases} 2x = 3 - 2y \\ 3y = 4 - 3x \end{cases}$

3. Traduce en enunciados abiertos con dos variables cada uno de los siguientes. En cada caso, halla el conjunto de validez.
   (a) Para un juego de baloncesto se vendieron tresciento once boletos, algunos para estudiantes y otros para adultos. Los boletos de estudiantes se vendían a 25 centavos cada uno y los de adultos a 75 centavos cada uno. El total de dinero recibido fue \$108.75. ¿Cuántos boletos de estudiantes y cuántos de adultos se vendieron?
   (b) La familia Alvarez vendrá de visita, y nadie sabe cuántos hijos tienen. Elsa, una de las hijas, dice que tiene tantos hermanos como hermanas; su hermano Jaime dice que tiene dos veces tantas hermanas como hermanos. ¿Cuántos hijos y cuántas hijas hay en la familia Alvarez?
   (c) Los alumnos de cierta escuela compraron sellos de tres y de cuatro centavos para enviar por correo boletines a sus padres. Si compraron 352 sellos a un costo total de \$12.67, ¿cuántos sellos compraron de cada clase?
   (d) Un pagador de un banco tiene 154 billetes, algunos de un dólar, otros de cinco dólares. El cree que el valor total de los billetes es de \$465. ¿Habrá contado correctamente su dinero?
4. Halla el conjunto de validez de cada uno de los siguientes enunciados abiertos compuestos. En cada caso construye las gráficas. ¿Te son éstas de ayuda en las partes (b) y (c)?

(a) $x + 2y + 6 = 0$ y $2x + 3y + 5 = 0$;
(b) $2x - y - 5 = 0$ y $4x - 2y - 10 = 0$
(c) $2x + y - 4 = 0$ y $2x + y - 2 = 0$

5. Halla la ecuación de la recta que pasa por el origen y por el punto de intersección de las rectas $5x - 7y - 3 = 0$ y $3x - 6y + 5 = 0$. (Sugerencia: ¿Qué valor deberá tener C para que $Ax + By + C = 0$ sea una recta que pase por el origen?)

En el problema 4 encontraste algunos enunciados abiertos compuestos cuyos conjuntos de validez no consistían en cada caso en un solo par ordenado de números. ¿Cuáles eran tales enunciados? Examinemos en detalle cada uno de ellos.

En el enunciado abierto

$$"2x - y - 5 = 0 \text{ y } 4x - 2y - 10 = 0",$$

observamos que "$4x - 2y - 10 = 0$" es equivalente a

$$2(2x - y - 5) = 2(0);$$

de modo que tenemos que las gráficas de ambas cláusulas son idénticas, como muestra la figura 3, y las rectas tienen muchos puntos en común.

Di cuáles son algunos de los pares de números del conjunto de validez del enunciado compuesto. ¿Es el conjunto de validez un conjunto finito? ¿Qué sucedería si trataras de resolver algebraicamente el enunciado abierto? ¿Por qué falla el método?

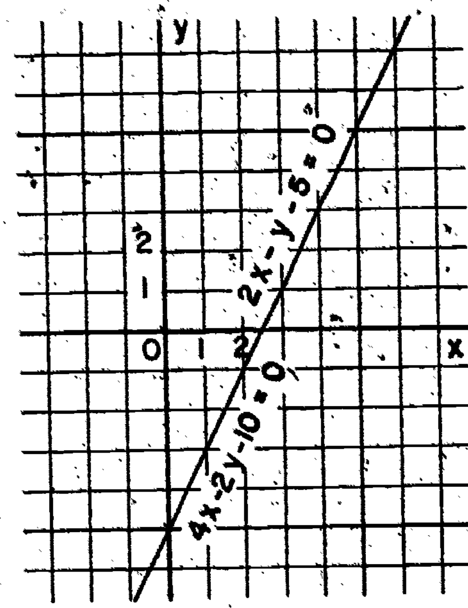


Figura 3

El enunciado compuesto "$2x + y - 4 = 0$ y $2x + y - 2 = 0$" presenta una condición un tanto diferente. Expresando cada cláusula en la forma en y, tenemos

$$y = -2x + 4 \quad \text{y} \quad y = -2x + 2 .$$

¿Cuál es la pendiente de la gráfica de cada una de estas ecuaciones? ¿Cuál es la ordenada en el origen? Vemos que las gráficas son dos rectas paralelas, como muestra la figura 4, y no hay punto de intersección. En tal caso, el conjunto de validez del enunciado compuesto es el conjunto vacío. ¿Qué sucede si tratamos de resolver algebraicamente el enunciado? ¿Por qué?

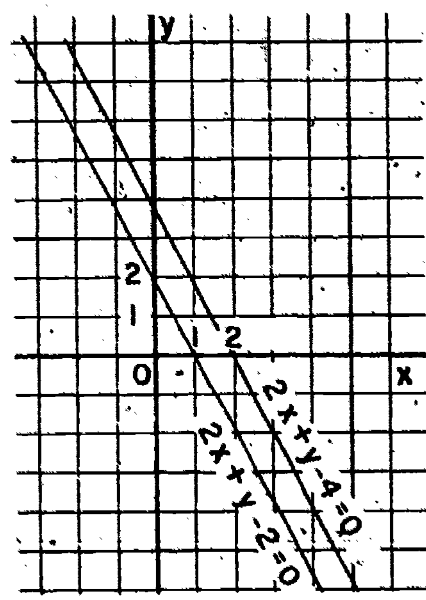


Figura 4

Tratemos de resumir lo que hemos observado: El conjunto de validez de un enunciado abierto compuesto en dos variables, que lleva la conjunción "y", puede consistir en un par ordenado, en muchos pares ordenados, o en ningún par ordenado. Correspondientemente, las gráficas de las dos cláusulas del enunciado abierto pueden tener un punto de intersección, muchos puntos de intersección o ningún punto de intersección.

Ejemplo 1.

Ecuaciones	Gráficas
$2x - 3y = 4$ y $x + y = 7$ $y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$ y $y = -x + 7$ El conjunto de validez es $\{(5, 2)\}$.	Las dos rectas que constituyen las gráficas de las cláusulas tienen un punto de intersección, ya que las pendientes de las rectas no son iguales. La gráfica del conjun de validez es un solo punto, $(5, 2)$.

Ejemplo 2.

$2x - 3y = 7$ y $4x - 6y = 14$ $y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$ y $y = \frac{4}{6}x - \frac{14}{6}$ El conjunto de validez consiste en todos los pares ordenados cuyas coordenadas satisfacen a la primera ecuación. (Observa que la segunda cláusula se obtiene si se multiplica por 2 cada miembro de la primera cláusula del enunciado abierto original.)	Las gráficas de las dos cláusulas del enunciado abierto coinciden, ya que las rectas tienen la misma pendiente y la misma ordenada en el origen. La recta completa constituye la gráfica del conjunto de validez.

Ejemplo 3.

Ecuaciones

$2x - 3y = 7$ y $4x - 6y = 3$

$y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$ y $y = \frac{4}{6}x - \frac{3}{6}$

El conjunto de validez es $\emptyset$.

Gráficas

Las gráficas de las dos cláusulas del enunciado abierto son rectas paralelas, porque tienen la misma pendiente pero sus ordenadas en el origen son diferentes. La gráfica del conjunto de validez no contiene punto alguno.

En el ejemplo 3, observa que los coeficientes de x, y, en la ecuación $2x - 3y = 7$ están relacionados de manera simple con los coeficientes en la ecuación $4x - 6y = 3$:

$$2 = \frac{1}{2}(4) \quad \text{y} \quad -3 = \frac{1}{2}(-6).$$

En general, se dice que los números reales A y B son proporcionales a los números reales C y D si existe un número real k, distinto de cero, tal que

$$A = kC \quad \text{y} \quad B = kD.$$

Así, pues, los números 2 y -3 son proporcionales a 4 y -6, siendo k igual a $\frac{1}{2}$. Si dos rectas son paralelas, ¿qué podrías decir acerca de los coeficientes de x, y en sus respectivas ecuaciones?

Otro modo de expresar que A y B son proporcionales a C y D es decir que las razones

$$\frac{A}{C} \quad \text{y} \quad \frac{B}{D}$$

son iguales, o que

$$\frac{A}{C} = \frac{B}{D}.$$

Conjunto de problemas 15-1c

1. Construye las gráficas de los enunciados abiertos en los ejemplos 1 al 3 de la página - . Halla algebraicamente el conjunto de validez del sistema en el ejemplo 1.

2. Resuelve los siguientes enunciados abiertos compuestos. En (a) y (b), construye las gráficas.

(a) $3x + 4y - 13 = 0$ y $5x - 2y + 13 = 0$

(b) $x + 5y - 17 = 0$ y $2x - 3y - 8 = 0$

(c) $5x - 4y + 2 = 0$ y $10x - 8y + 4 = 0$

(d) $12x - 4y - 5 = 0$ y $6x + 8y - 5 = 0$

(e) $x - 2y - 5 = 0$ y $3x - 6y - 12 = 0$

(f) $\frac{1}{3}(\frac{6x}{7} - \frac{3y}{5}) - 1 = 0$ y $\frac{2}{3}(\frac{4x}{7} + \frac{y}{10}) - \frac{7}{3} = 0$

3. Considera el sistema,

$$\begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ 5x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$$

Supón que escribimos en la forma en y cada una de las ecuaciones y que construimos su gráfica,

$$y = 2x - 7 \quad \underline{y} \quad y = -\frac{5}{2}x + 2.$$

¿En qué punto de la gráfica de este sistema son iguales los valores de y? ¿Cuál es el valor de x en este punto? Si igualamos los valores de y en los dos enunciados, obtenemos el enunciado abierto en una variable,

$$2x - 7 = -\frac{5}{2}x + 2.$$

El conjunto de validez de este enunciado es $\{2\}$. Utilizando este valor para x en cada uno de los enunciados abiertos escritos ya en la forma en y obtenemos:

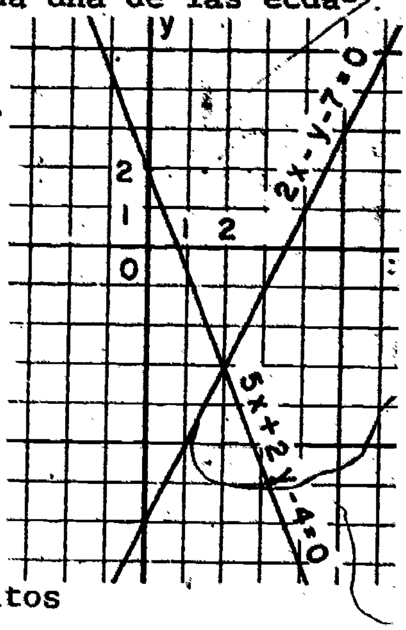


Figura 5

$y = 2(2) - 7$ $\qquad\qquad$ $y = -\frac{5}{2}(2) + 2$

$y = -3$ $\qquad\qquad$ $y = -3$

¿Por qué obtenemos en ambos casos "$y = -3$"? Por lo tanto, si el enunciado abierto compuesto "$2x - y - 7 = 0$ y $5x + 2y - 4 = 0$" tiene una solución, ésta deberá ser $(2, -3)$. Verifica que $(2, -3)$ es la solución.

Supón que acortamos un poco nuestro trabajo escribiendo en la forma en y la primera ecuación solamente:

$$y = 2x - 7 .$$

Entonces reemplazamos a y en la segunda ecuación por la expresión "$2x - 7$".

$$5x + 2(2x - 7) - 4 = 0.$$

Procedemos a resolver este enunciado abierto en una variable

$$5x + 4x - 14 - 4 = 0$$

$$9x - 18 = 0$$

$$x = 2.$$

Entonces,

$$y = 2x - 7 = 2(2) - 7 = -3$$

de modo que $(2, -3)$ es la posible solución del sistema

$$\begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ 5x + 2y - 4 = 0. \end{cases}$$

El método que acabamos de describir en el que "se despeja en una de las ecuaciones la variable y", sustituyéndose luego su valor en términos de x en la otra ecuación, se llama método de sustitución. Resuelve cada uno de los siguientes sistemas empleando aquél de los métodos anteriores que parezca más apropiado:

(a) $\begin{cases} 3x + y + 18 = 0 \\ 2x - 7y - 34 = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y = \frac{2}{3}x + 2 \\ y = -\frac{5}{2}x + 40 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 5x + 2y - 4 = 0 \\ 10x + 4y - 8 = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 5x + 2y - 5 = 0 \\ x - 3y - 18 = 0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x + 7y = 11 \\ x - 3y = -4 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x = \frac{3}{2}y - 4 \\ y = -\frac{2}{3}x \end{cases}$

4. Como hemos visto, el conjunto de validez del enunciado abierto compuesto

$$Ax + By + C = 0 \quad y \quad Dx + Ey + F = 0$$

puede consistir en un par ordenado de números, muchos pares ordenados o ningún par ordenado.

(a) Si el conjunto de validez consiste en un par ordenado, ¿qué podrías decir acerca de las gráficas de las cláusulas?

(b) Si el conjunto de validez consiste en muchos pares ordenados, ¿qué podrías decir acerca de las gráficas de las dos cláusulas? ¿Serán equivalentes las dos cláusulas del enunciado compuesto?

(c) Si el conjunto de validez es $\emptyset$, ¿cómo estarán relacionados los coeficientes de x, y en las dos cláusulas? ¿Qué podrías decir acerca de las gráficas de estas cláusulas?

5. Considera el sistema

$$\begin{cases} 4x + 2y - 11 = 0 \\ 3x - y - 2 = 0 \end{cases}$$

Determina su conjunto de validez de <u>cuatro</u> maneras diferente.

6. Resuelve de una manera <u>cualquiera</u> los sistemas siguientes. En cada caso explica por qué escogiste ese método en particular.

(a) $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x - 3y = 18 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x = 2y - \frac{1}{6} \\ 2x + y = \frac{4}{3} \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 3x - 4y - 1 = 0 \\ 7x + 4y - 9 = 0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 1 \\ x + y = 7 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} 6y + (2 - 4x) = 3 \\ 4x - 2(3y - 1) = 2 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} 5 - (x + y) = 2y \\ 2x - (3y + 1) = 1 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} 7x - y = 28 \\ 3x + 11y = 92 \end{cases}$

En los problemas 7-17, traduce en enunciados abiertos, halla el conjunto de validez y contesta la pregunta correspondiente.

7. Halla dos números cuya suma es 56 y cuya diferencia es 18.

8. La suma de las edades de Sara y de José es 30 años. De aquí a cinco años la diferencia entre sus edades será 4 años. ¿Qué edad tiene cada uno ahora?

9. Un comerciante tiene para la venta anacardos a $1.20 la libra y almendras a $1.50 la libra. ¿Cuántas libras de cada clase deberá utilizar para obtener una mezcla de 200 libras para venderla a $1.32 la libra?

10. En cierto número de dos dígitos la cifra de las unidades es uno más que dos veces la de las decenas. Si al número le sumamos la cifra de las unidades, el resultado será 35 más que tres veces la cifra de las decenas. Halla el número.

11. Héctor pesa 80 libras y Federico 100 libras y juegan en un balancín de 9 pies de largo, cada uno sentado en un extremo. ¿A qué distancia del punto de apoyo se encuentra cada uno de los muchachos?

12. Dos muchachos juegan en un balancín. Uno está a 5 pies del fulcro (punto de apoyo) y el otro a 6 pies del mismo. Si la suma de los pesos de los muchachos es 209, ¿cuánto pesa cada uno?

13. Un bote tarda $1\frac{1}{2}$ horas en navegar 12 millas a favor de la corriente y 6 horas en regresar. Halla la velocidad de la corriente y la velocidad del bote en agua estacionaria.

14. Tres libras de manzanas y cuatro libras de guineos cuestan $1.08, mientras que cuatro libras de manzanas y tres libras de guineos cuestan $1.02. ¿Cuál es el precio por libra de las manzanas? ¿Y de los guineos?

15. A y B se encuentran 30 millas distantes entre sí. Si salen al mismo tiempo y caminan en la misma dirección, al

cabo de 60 horas A alcanza a B. Si caminaran el uno hacia el otro, se encontrarían en 5 horas. ¿Cuál es la velocidad de cada uno?

16. Se va a mezclar una solución que contiene 90% de alcohol con una que contiene 75% para obtener 20 cuartillos de una solución al 78%. ¿Cuántos cuartillos de la solución al 90% se deberán utilizar?

17. En una carrera de automóviles de 300 millas, el conductor del automóvil A le dio al conductor del automóvil B una ventaja inicial de 25 millas y aún así terminó la carrera media hora antes que su rival. En una segunda prueba, el conductor de A le dio al conductor de B una ventaja inicial de 60 millas y esta vez perdió la carrera por 12 minutos. ¿Cuál fue la velocidad media en millas por hora de cada uno de los dos automóviles?

15-2. Sistemas de inecuaciones

En la sección 15-1 definimos un sistema de ecuaciones como un enunciado abierto compuesto en el cual dos ecuaciones están conectadas por la conjunción "y". También introdujimos una notación para esto. Extendiendo la idea a las inecuaciones, consideremos sistemas como los siguientes:

(a) $\begin{cases} x + 2y - 4 > 0 \\ 2x - y - 3 > 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 3x - 2y - 5 = 0 \\ x + 3y - 9 \leq 0 \end{cases}$

(c) ¿Cuál sería la gráfica de $x + 2y - 4 > 0$? Recordarás que primero construimos la gráfica de

$$x + 2y - 4 = 0,$$

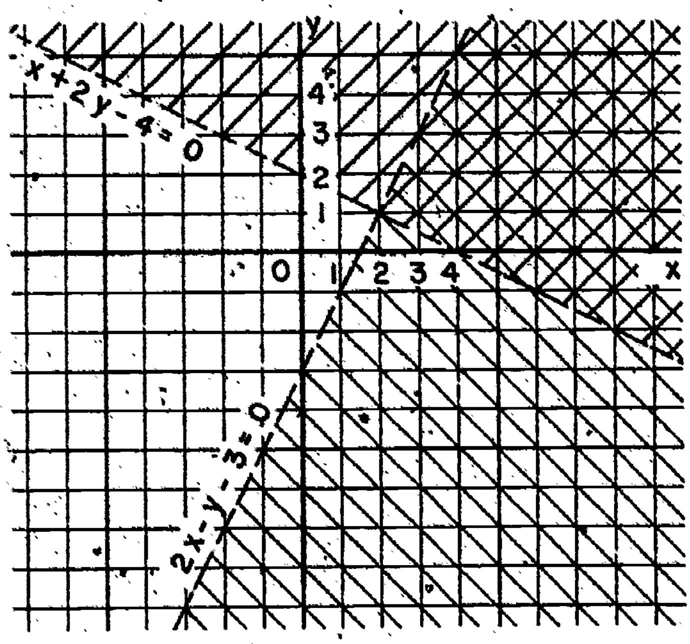


Figura 6

dibujando una recta de trazos a lo largo del borde. ¿Por qué? Luego sombreamos la región <u>por encima de</u> la recta, ya que la gráfica de "$x + 2y - 4 > 0$", es decir, de "$y > -\frac{1}{2}x + 2$", consiste en todos aquellos puntos para los cuales la ordenada es mayor que "dos más que el producto de $-\frac{1}{2}$ y la abscisa". Análogamente, sombreamos la región donde "$y < 2x - 3$". Esta es la región <u>por debajo de</u> la recta cuya ecuación es "$2x - y - 3 = 0$". ¿Por qué también en este caso se dibuja una recta de trazos? ¿Cuándo se deberá dibujar una recta llena como borde?

Toda vez que el conjunto de validez de un enunciado abierto compuesto que lleva la conjunción *y* es el conjunto de elementos comunes a los conjuntos de validez de las dos cláusulas, se deduce que el conjunto de validez del sistema (a) es la región doblemente sombreada en la figura 6.

(d) ¿Cuál sería la gráfica de un sistema que consiste en una ecuación y una inecuación, como es el caso en el ejemplo (b)? ¿Cuál es la gráfica de "$3x - 2y - 5 = 0$"?

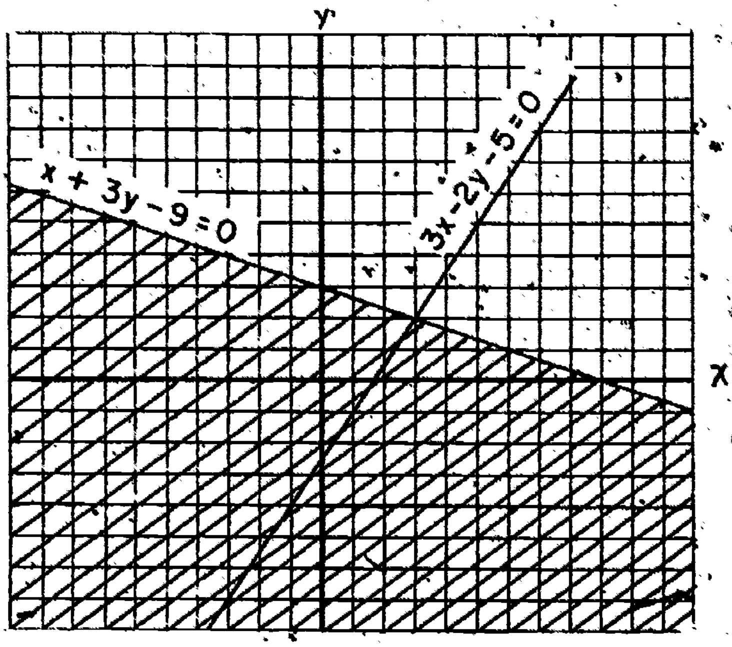


Figura 7

¿Será la gráfica de "$x + 3y - 9 \leq 0$" la región por encima de, o la región por debajo de la recta

$$x + 3y - 9 = 0?$$

¿Estará incluida la recta? Estudia cuidadosamente la figura 7 y describe la gráfica del sistema

$$\begin{cases} 3x - 2y - 5 = 0 \\ x + 3y - 9 \leq 0 \end{cases}$$

Conjunto de problemas 15-2a

Construye las gráficas de los conjuntos de validez de los siguientes sistemas:

1. $\begin{cases} 2x + y > 8 \\ 4x - 2y \leq 4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 6x + 3y < 0 \\ 4x - y < 6 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 5x + 2y + 1 > 0 \\ 3x - y - 6 = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4x + 2y = -1 \\ y - x \geq 4 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x + y < 4 \\ 2x + y > 6 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x + y > 4 \\ 2x + y < 6 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x - y \leq 4 \\ 4x - 2y < 8 \end{cases}$

Consideremos la gráfica del enunciado abierto compuesto

$$x - y - 2 > 0 \quad ó \quad x + y - 2 \geq 0.$$

Primero dibujamos las gráficas de las cláusulas "$x - y - 2 > 0$" y "$x + y - 2 > 0$".

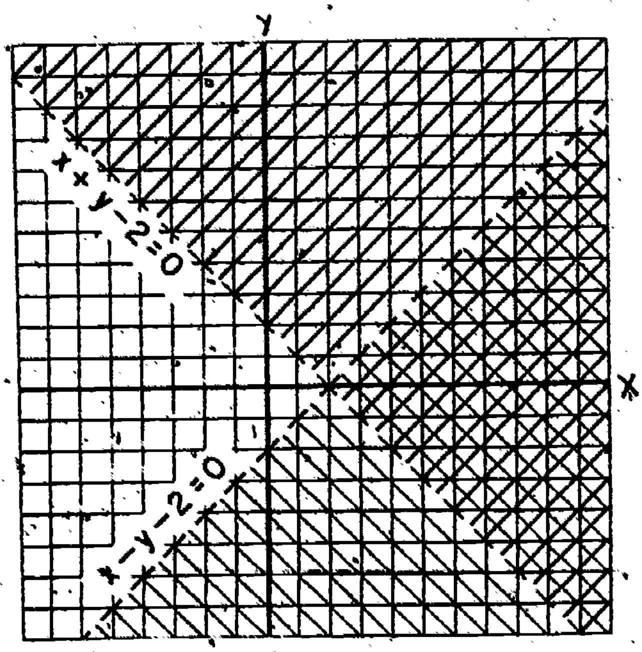


Figura 8

Luego, recordamos que el conjunto de validez del enunciado abierto compuesto que lleva la conjunción <u>o</u> es el conjunto de todos los elementos de cualquiera de los conjuntos de validez de las dos cláusulas del enunciado. Por lo tanto, la gráfica del enunciado abierto compuesto en consideración incluye toda la región sombreada en la figura 8.

<u>Conjunto de problemas 15-2b</u>

Construye las gráficas de los conjuntos de validez de los siguientes enunciados:

1. $2x + y + 3 > 0$ ó $3x + y + 1 < 0$
2. $2x + y + 3 < 0$ ó $3x - y + 1 < 0$
3. $2x + y + 3 \leq 0$ ó $3x + y + 1 \geq 0$
4. $2x + y + 3 > 0$ y $3x - y + 1 < 0$

7

Para completar el cuadro, consideremos el enunciado abierto compuesto:

$$(x - y - 2)(x + y - 2) > 0.$$

Recuerda que "$ab > 0$" significa que "el producto de a <u>y</u> b es un número positivo". ¿Qué podemos decir acerca de a y de b si $ab > 0$? Así, pues, tenemos dos posibilidades:

$$x - y - 2 > 0 \quad \underline{y} \quad x + y - 2 > 0,$$

<u>o también</u>

$$x - y - 2 < 0 \quad \underline{y} \quad x + y - 2 < 0.$$

En la figura 8, la gráfica de "$x - y - 2 > 0$ <u>y</u> $x + y - 2 > 0$" es la región doblemente sombreada, mientras que la gráfica de "$x - y - 2 < 0$ <u>y</u> $x + y - 2 < 0$" es la región sin sombrear. De modo que la gráfica de

$$(x - y - 2)(x + y - 2) > 0$$

consiste en todos los puntos contenidos en estas dos regiones del plano.

¿Qué áreas constituyen la gráfica del enunciado abierto

$$(x - y - 2)(x + y - 2) < 0?$$

(Si $ab < 0$, ¿qué puede decirse acerca de a y de b?)

Para resumir, hacemos una lista de los siguientes pares de enunciados equivalentes (a y b son números reales):

$ab = 0$: $a = 0$ ó $b = 0$.
$ab > 0$: $a > 0$ y $b > 0$, ó $a < 0$ y $b < 0$.
$ab < 0$: $a > 0$ y $b < 0$, ó $a < 0$ y $b > 0$.

Verifica estas equivalencias refiriéndote a la definición del producto de números reales.

Conjunto de problemas 15-2c

1. Construye las gráficas de los conjuntos de validez de los siguientes enunciados abiertos:

   (a) $(2x - y - 2)(3x + y - 3) > 0$

   (b) $(x + 2y - 4)(2x - y - 3) < 0$

   (c) $(x + 2y - 6)(2x + 4y + 4) > 0$

   (d) $(x - y - 3)(3x - 3y - 9) < 0$

2. Construye las gráficas de los conjuntos de validez de los siguientes enunciados abiertos:

   (a) $x - 3y - 6 = 0$ y $3x + y + 2 = 0$

   (b) $(x - 3y - 6)(3x + y + 2) = 0$

   (c) $x - 3y - 6 > 0$ y $3x + y + 2 > 0$

   (d) $x - 3y - 6 < 0$ y $3x + y + 2 < 0$

   (e) $x - 3y - 6 > 0$ y $3x + y + 2 = 0$

   (f) $x - 3y - 6 < 0$ ó $3x + y + 2 < 0$

(g) $x - 3y - 6 = 0$ ó $3x + y + 2 \geq 0$

(h) $(x - 3y - 6)(3x + y + 2) > 0$

(i) $(x - 3y - 6)(3x + y + 2) < 0$

3. Construye la gráfica del conjunto de validez de cada uno de los siguientes sistemas de inecuaciones: (De nuevo, la llave indica un enunciado compuesto que lleva la conjunción y).

(a) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + 4y \leq 12 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} -4 < x < 4 \\ -3 < y < 3 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y \geq 2 \\ 4y \leq 3x + 8 \\ 4y + 5x \leq 40 \end{cases}$

*4. Un equipo de fútbol se encuentra en la marca de las 40 yardas en su propio territorio; está en posesión de la pelota, y quedan cinco minutos de juego. La puntuación es 3 a 0 a favor del equipo contrario. El capitán sabe que su equipo tendría que ganar 3 yardas cada vez que se corra con la pelota, empleándose en cada jugada 30 segundos. Puede ganar 20 yardas con un buen pase, lo que tardaría 15 segundos. Sin embargo, por lo general, sólo completa uno de cada tres pases. ¿Qué combinación de jugadas permitiría asegurar una victoria, o cuál deberá ser la estrategia del capitán?

Problemas de repaso

1. Halla el conjunto de validez de "$2x - 3 = 0$" y construye su gráfica si se considera como una ecuación con:
(a) una variable, (b) dos variables.

2. Halla el conjunto de validez de "$|y| < 3$" y construye su gráfica si se considera como un enunciado con:
(a) una variable, (b) dos variables.

3. Para cada uno de los siguientes pares de ecuaciones o inecuaciones, decide si las dos son equivalentes, y explica por qué.

(a) $x^2 = 3x - 2$; $x - 2 = 0$ y $x - 1 = 0$

(b) $\dfrac{2x}{x^2 + 1} = 1$; $x^2 - 2x + 1 = 0$

(c) $xy > 0$; $x > 0$ ó $y > 0$

(d) $\dfrac{y - 1}{x - 1} = 2$; $y - 1 = 2(x - 1)$

(e) $x + y = 3$ y $\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = 4$; $x - 6 = 0$ y $y + 3 = 0$.

4. Dadas las rectas cuyas ecuaciones son $3x - 5y - 4 = 0$ y $2x + 3y + 4 = 0$, ¿cuáles son las ecuaciones de dos rectas cada una de las cuales contiene el punto de intersección de las dos rectas dadas, de modo que una de ellas sea vertical y la otra horizontal?

5. Resuelve los siguientes sistemas y en cada caso indica por qué escogiste un método en particular:

(a) $\begin{cases} 2x = 3y + 1 \\ 4x - 3y = 11 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} .01x - .02y = 0 \\ x - 10y = 8 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y = 2x - 4 \\ x - \frac{1}{2}y - 2 = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x = 9y \\ \frac{1}{3}x = 3y + 2 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} .5x = .2y + 4 \\ y - x = -11 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} \frac{1}{8}x - \frac{1}{3}y = 0 \\ \frac{1}{6}x - \frac{1}{9}y = 3 \end{cases}$

6. (a) Explica la relación que hay entre los coeficientes de las ecuaciones de dos rectas paralelas.

(b) Describe las posiciones de dos rectas si sus ecuaciones son $Ax + By + C = 0$ y $Dx + Ey + F = 0$, y además

$$\frac{A}{D} = \frac{B}{E} = \frac{C}{F}.$$

(c) Describe las condiciones que deben cumplir las pendientes de dos rectas para garantizar que éstas tengan exactamente un punto en común.

7. Construye las gráficas de los siguientes enunciados:

(a) $y + 3x - 2 > 0$

(b) $2x - 3y + 3 \geq 0$

(c) $y + 3x - 2 > 0$ y $2x - 3y + 3 > 0$

(d) $(y + 3x - 2)(2x - 3y + 3) < 0$

(e) $|y + 3x| > 2$

8. Traduce los siguientes enunciados lingüísticos en enunciados abiertos y resuélvelos:

(a) Determina dos enteros consecutivos cuya suma es 57.

(b) Determina dos enteros tales que su suma sea 16, y el duplo del primero sea tres unidades menor que el segundo.

(c) La suma de dos números es 45. Si el mayor se divide por el menor, el cociente será 4 y el resto será 5. Determina los números.

(d) Se van a mezclar dos clases de tabaco, una que se vende a $4.80 la libra y la otra a $6.00 la libra. ¿Cuántas libras de cada clase deberán mezclarse para obtener 20 libras que se venderán a $5.50 la libra?

Capítulo 16

POLINOMIOS CUADRATICOS

16-1. Gráficas de polinomios cuadráticos

En el capítulo 12 estudiamos por vez primera los polinomios cuadráticos, esto es, polinomios con una variable que contienen el cuadrado, pero no potencias superiores, de dicha variable. Todo polinomio de esta clase se puede escribir en la forma:

$$Ax^2 + Bx + C,$$

donde A, B, y C son números reales y además $A \neq 0$. ¿Es "$-2(x + 1)^2 + 3$" un polinomio cuadrático? Por gráfica del polinomio $Ax^2 + Bx + C$ entendemos la gráfica del enunciado abierto

$$y = Ax^2 + Bx + C.$$

Podemos dibujar la gráfica de un polinomio cuadrático marcando algunos de los puntos de la gráfica.

Ejemplo 1. Dibuja la gráfica del polinomio

$$x^2 - 2x - 3.$$

Hagamos primero una lista de algunos pares ordenados que satisfacen a la ecuación

$$y = x^2 - 2x - 3.$$

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{4}{3}$		$\frac{5}{2}$	3	4
y	5	$\frac{9}{4}$			-3		-4		3	$-\frac{7}{4}$		

Llena las casillas vacías de esta tabla y marca luego los puntos correspondientes con respecto a un sistema de ejes coordenados. La disposición de los puntos sugiere que la gráfica tiene un aspecto parecido a la dibujada en la figura 1.

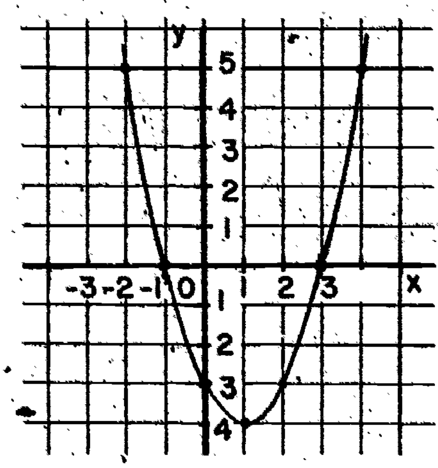


Figura 1

Marcando más puntos cuyas coordenadas satisfagan a la ecuación puedes convencerte por ti mismo de que la gráfica efectivamente tiene la forma indicada. Una discusión más sistemática de las formas de esas gráficas se explicará en el capítulo 17.

Conjunto de problemas 16-1a

Dibuja las gráficas de los polinomios siguientes:

1. $2x^2$, para x entre -2 y 2.
2. $x^2 - 2$, para x entre -3 y 3.
3. $-\frac{1}{2}x^2 + x$, para x entre -3 y 3.
4. $x^2 + x + 1$, para x entre -3 y 2.
5. $x^2 - 4x + 4$, para x entre -1 y 5.
6. $2x^2 - 3x - 5$, para x entre -2 y 3.

Habrás observado que los problemas anteriores te requirieron bastante tiempo y esfuerzo. Aún así, sólo lograste obtener el aspecto general de las gráficas. Tratemos de desarrollar un método más preciso para dibujar tales gráficas.

Empecemos con el polinomio cuadrático más sencillo, "x^2". (En secciones anteriores ya hemos localizado algunos puntos de la gráfica de "$y = x^2$".) Entonces veamos en lo que difiere

esta gráfica de las de "$y = \frac{1}{2}x^2$", de "$y = 2x^2$", de "$y = -\frac{1}{2}x^2$".
En general, ¿cuál será la forma de la gráfica de

$$y = ax^2,$$

donde a es un número real distinto de cero? Si dibujamos todas esas gráficas con respecto a un sistema de ejes, podremos compararlas entre sí. A continuación tenemos una tabla que contiene una lista de valores de dichos polinomios para valores dados de x:

x	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	-0.1	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	2	
x^2		4		1	$\frac{1}{4}$		0		1		4	
$2x^2$		8		2	$\frac{1}{2}$		0		2		8	18
$\frac{1}{2}x^2$		2		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$		0		$\frac{1}{2}$		2	
$-\frac{1}{2}x^2$		-2		$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$		0		$-\frac{1}{2}$		-2	

Llena las casillas vacías. Las gráficas de la figura 2 se han dibujado mediante esta tabla.

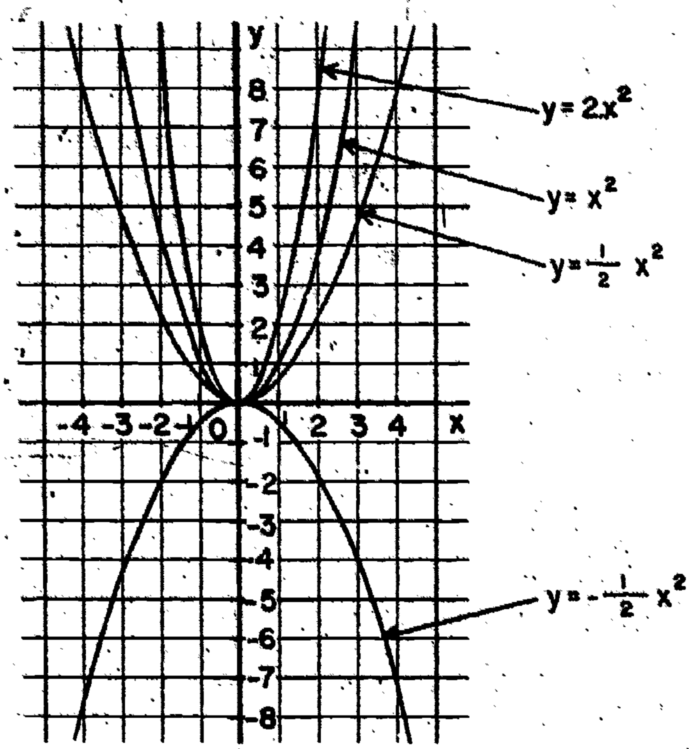


Figura 2

Conjunto de problemas 16-1b

1. ¿Cómo puedes obtener la gráfica de "$2x^2$" de la gráfica de "x^2"?

2. ¿Cómo puedes obtener la gráfica de "$-\frac{1}{2}x^2$" de la gráfica de "$\frac{1}{2}x^2$"?

3. Dibuja la gráfica de "$5x^2$" para x entre -1 y 1.

4. Dibuja la gráfica de "$\frac{1}{5}x^2$" para x entre -10 y 10.

5. ¿Cómo puedes obtener la gráfica de "$-5x^2$" de la gráfica de "$5x^2$"?

6. Explica cómo puedes obtener la gráfica de "$-ax^2$" de la gráfica de "ax^2", si a es un número real distinto de cero

Ahora que ya tenemos una gráfica del polinomio "ax^2", para cualquier número a distinto de cero, movamos horizontalmente esta gráfica para obtener gráficas de otros polinomios cuadrátic

Como un ejemplo, dibujemos la gráfica de

$$\frac{1}{2}(x - 3)^2$$

y veamos cómo puede deducirse de la gráfica de "$\frac{1}{2}x^2$". Hagamos una lista de coordenadas que satisfagan a la ecuación

$$y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 .$$

Llena las casillas vacías. En la figura 3 se muestra la relación entre dicha gráfica y la de "$y = \frac{1}{2}x^2$".

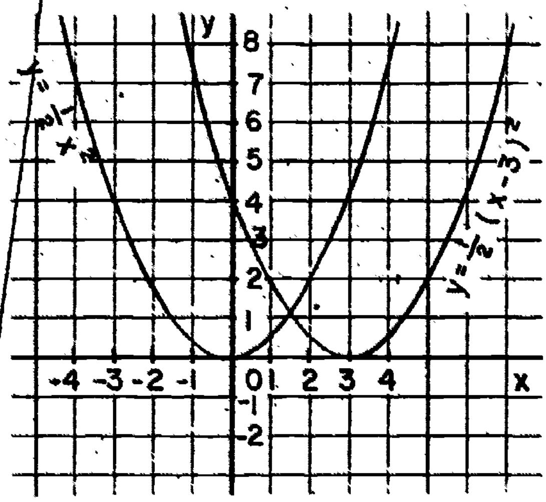


Figura 3

Observemos que la gráfica de $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2$ tiene exactamente la misma forma que la gráfica de

$$y = \frac{1}{2}x^2 ,$$

pero que está situada 3 unidades a la derecha. Del mismo modo podríamos verificar que la gráfica de "$y = 2(x + 2)^2$" está situada 2 unidades a la izquierda de la gráfica de "$y = 2x^2$"

y tiene la misma forma que ésta. ¿Cómo obtendríamos la gráfica de

$$y = -(x + 3)^2 ,$$

partiendo de la gráfica de

$$y = -x^2?$$

Conjunto de problemas 16-1c

1. Después de construir una tabla de coordenadas de puntos, dibuja cuidadosamente la gráfica de

$$y = 2(x + 2)^2 ;$$

con respecto al mismo sistema de ejes, dibuja la gráfica de

$$y = 2x^2.$$

De la figura deduce cómo puede obtenerse la gráfica de "$y = 2(x + 2)^2$", partiendo de la gráfica de "$y = 2x^2$".

2. En cada uno de los casos siguientes, describe cómo puede obtenerse la gráfica de la primera ecuación, partiendo de la gráfica de la segunda:

(a) $y = 3(x + 4)^2$; $y = 3x^2$

(b) $y = -2(x - 3)^2$; $y = -2x^2$

(c) $y = -\frac{1}{2}(x + 1)^2$; $y = -\frac{1}{2}x^2$

(d) $y = \frac{1}{3}(x + \frac{1}{2})^2$; $y = \frac{1}{3}x^2$

3. Da una regla general para obtener la gráfica de "$y = a(x - h)^2$" partiendo de la gráfica de "$y = ax^2$", donde a y h son números reales, $a \neq 0$.

Ahora, movamos verticalmente las gráficas de los polinomios. Considera el polinomio cuadrático,

$$\frac{1}{2}(x - 3)^2 + 2,$$

y compáralo con la gráfica, que ya hemos obtenido, de "$\frac{1}{2}(x - 3)^2$". A continuación tienes una tabla de coordenadas que satisfacen a "$y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 + 2$":

x	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	2	2.5	3	$\frac{13}{4}$	4	5
y		$\frac{50}{9}$		$\frac{25}{8}$			2	$\frac{65}{32}$		4

(Probablemente habrás notado que cada ordenada en esta tabla es 2 unidades mayor que la ordenada correspondiente de la tabla anterior.)

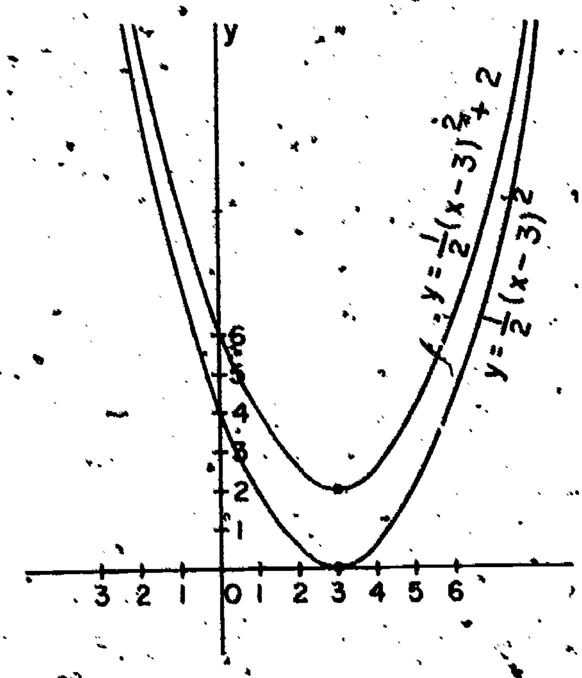


Figura 4

Una vez más observamos que la forma de la gráfica no ha cambiado, pero que la gráfica de

$$y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 + 2$$

se obtiene moviendo la gráfica de

$$y = \frac{1}{2}(x - 3)^2$$

dos unidades hacia arriba. Análogamente, podemos mostrar que la gráfica de "$y = 2(x + 2)^2 - 3$" puede obtenerse moviendo la gráfica de "$y = 2(x + 2)^2$" 3 unidades hacia abajo.

Finalmente, notamos que las gráficas en las figuras 3 y 4 tienen exactamente la misma forma, y que podemos obtener la gráfica de "$y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 + 2$" moviendo la gráfica de "$y = \frac{1}{2}x^2$" 3 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba.

Veremos en el capítulo 17 que siempre es posible obtener la gráfica de

$$y = a(x - h)^2 + k ,$$

partiendo de la gráfica de

$$y = ax^2,$$

moviendo la gráfica de "$y = ax^2$" horizontalmente h unidades y verticalmente k unidades.

Esas gráficas (de polinomios cuadráticos) se llaman parábolas. El punto más bajo (o el más alto) de la gráfica se llama vértice, y la recta vertical que pasa por el vértice se llama eje. Así, el vértice de la parábola cuya ecuación es

$$y = 2x^2$$

es $(0, 0)$ y su eje es la recta de ecuación $x = 0$. ¿Cuáles son el vértice y el eje de la parábola cuya ecuación es

$$y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 + 2 \text{ ?}$$

Conjunto de problemas 16-1d

1. Describe cómo las gráficas de "$y = x^2 - 3$" y "$y = x^2 + 3$" pueden ser deducidas de la gráfica de "$y = x^2$". Dibuja las tres gráficas referidas al mismo sistema de ejes.
2. ¿Cómo se puede obtener la gráfica de "$y = 2(x - 2)^2 + 3$" de la gráfica de "$y = 2x^2$"? Dibuja ambas gráficas referidas al mismo sistema de ejes.
3. Dibuja la parábola cuya ecuación es "$y = (x + 1)^2 - \frac{1}{2}$".

   Describe cómo se puede deducir esta gráfica de la de "$y = x^2$". ¿Cuáles son las coordenadas de su vértice y cuál es la ecuación de su eje?
4. Dibuja la parábola cuya ecuación es "$y = -2(x + \frac{1}{2})^2 + 3$".

   ¿Cómo se puede obtener esta parábola de la gráfica de "$y = -2x^2$"?
5. Determina las ecuaciones de las parábolas siguientes:
   (a) La gráfica de "$y = x^2$" movida 5 unidades a la izquierda y 2 unidades hacia abajo.
   (b) La gráfica de "$y = -x^2$" movida 2 unidades a la izquierda y 3 unidades hacia arriba.
   (c) La gráfica de "$y = \frac{1}{3}x^2$" movida $\frac{1}{2}$ unidad a la derecha y 1 unidad hacia abajo.
   (d) La gráfica de "$y = \frac{1}{2}(x + 7)^2 - 4$" movida 7 unidades a la derecha y 4 unidades hacia arriba.
6. Describe, sin dibujarla, la gráfica de cada una de las ecuaciones siguientes:
   (a) $y = 3(x - 2)^2 - 4$
   (b) $y = -(x + 3)^2 + 1$
   (c) $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 2$
   (d) $y = -2(x + 1)^2 + 2$

16-2. Forma canónica

Hemos aprendido a obtener rápidamente la gráfica de "$y = (x - 1)^2 - 4$". Se trata de la parábola que se obtiene al mover la gráfica de "$y = x^2$" 1 unidad a la derecha y 4 unidades hacia abajo. También observamos que $(x - 1)^2 - 4 = x^2 - 2x - 3$, para todo número real x. Por consiguiente, hemos obtenido la gráfica de la ecuación

$$y = x^2 - 2x - 3.$$

Supongamos que se nos da la ecuación en la forma "$y = x^2 - 2x - 3$" en vez de "$y = (x - 1)^2 - 4$". ¿Cómo lograríamos llegar a esta segunda forma? Lo que hay que notar es que en la segunda forma, x entra sólo en una expresión que es un cuadrado perfecto. Luego nos podemos plantear la cuestión siguient ¿Cómo podemos transformar $x^2 - 2x - 3$ en una forma tal que x entre solamente en un cuadrado perfecto? ¿Recuerdas este problema del capítulo 12 en relación con la factorización?

Podemos hacer esto "retrocediendo" a partir de "$x^2 - 2x - 3$", del modo siguiente:

$$x^2 - 2x - 3 = (x^2 - 2x \quad) - 3.$$

Ahora preguntamos: ¿Qué es lo que falta en el paréntesis para lograr un cuadrado perfecto? Evidentemente lo que necesitamos es un "1". ¿Por qué? Entonces tendremos

$$x^2 - 2x - 3 = (x^2 - 2x + 1) - 3 - 1,$$
$$= (x - 1)^2 - 4.$$

¿Por qué sumamos también "-1" al añadir "1"?

Sigamos el mismo procedimiento con el polinomio "$3x^2 - 12x + 5$" Tenemos

$$3x^2 - 12x + 5 = 3(x^2 - 4x \quad) + 5,$$
$$= 3(x^2 - 4x + 4) + 5 - (3)(4),$$
$$= 3(x - 2)^2 - 7.$$

Por tanto, la gráfica de

$$y = 3x^2 - 12x + 5$$

es una parábola con vértice (2, -7) y eje $x = 2$. Se obtiene moviendo la gráfica de "$y = 3x^2$" 2 unidades a la derecha y 7 unidades hacia abajo.

Como ya puedes haber recordado del capítulo 12, este método para escribir un polinomio cuadrático en una forma en la cual la variable entre solamente en un cuadrado perfecto es lo que llamamos <u>compleción del cuadrado</u>. La forma resultante se llama <u>forma canónica</u> del polinomio cuadrático.

<u>Conjunto de problemas 16-2</u>

1. Reduce cada uno de los siguientes polinomios cuadráticos a la forma canónica:

   (a) $x^2 - 2x$

   (b) $x^2 + x + 1$

   (c) $x^2 + 6x$

   (d) $x^2 - 3x - 2$

   (e) $x^2 - 3x + 2$

   (f) $5x^2 - 10x - 5$

   (g) $4x^2 + 4$

   (h) $x^2 + kx$, k es un número real

   (i) $x^2 + \sqrt{2}x - 1$

   (j) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 2$

2. Reduce cada uno de los siguientes polinomios cuadráticos a la forma canónica:

   (a) $x^2 - x + 2$

   (b) $x^2 + 3x + 1$

   (c) $3x^2 - 2x$

   (d) $(x + 5)(x - 5)$

   (e) $6x^2 - x - 15$

   (f) $(x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2})$

3. Describe, sin dibujar las gráficas, las parábolas representadas por los polinomios del problema 2.

4. Dibuja la gráfica de

$$y = x^2 + 6x + 5 .$$

¿En cuántos puntos corta el eje x? ¿Qué puntos son?

5. Dibuja la gráfica de

$$y = x^2 + 6x + 9 .$$

¿En cuántos puntos corta el eje x? ¿Qué puntos son?

6. Dibuja la gráfica de

$$y = x^2 + 6x + 13 .$$

¿En cuántos puntos corta el eje x?

7. Resuelve las ecuaciones que se obtienen en los problemas 4 y 5 cuando se asigna a y el valor cero. Compara los conjuntos de validez de esas ecuaciones con los conjuntos de puntos en los que las parábolas cortan el eje x. Idea una regla para determinar los puntos en los que una parábola interseca el eje x.

8. Considera las formas canónicas de los polinomios cuadráticos de los problemas 4, 5 y 6. ¿Cuáles de esos polinomios pueden factorizarse como diferencia de dos cuadrados?

16-3. Ecuaciones cuadráticas

En el problema 7 aprendimos que la gráfica de la parábola

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

corta el eje x en los puntos cuyas abscisas satisfacen a la ecuación

$$Ax^2 + Bx + C = 0 .$$

Esta ecuación se llama <u>ecuación cuadrática</u> si $A \neq 0$.

Hemos resuelto tales ecuaciones antes en los casos en que "$Ax^2 + Bx + C$" pueda factorizarse como un polinomio sobre los enteros. ¿Puede "$2x^2 - 3x + 1$" ser factorizado como un polinomio sobre los enteros? Si es así, revisa el procedimiento que empleaste para resolver la ecuación

$$2x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Ahora podemos ir un poco más lejos, pues podemos escribir cualquier polinomio cuadrático en la forma canónica.

<u>Ejemplo 1</u>. Resuelve la ecuación

$$x^2 - 2x - 2 = 0 .$$

Primero escribimos el polinomio en forma canónica:

$$x^2 - 2x - 2 = (x - 1)^2 - 3 .$$

Puesto que $3 = (\sqrt{3})^2$, podemos considerar el polinomio como la diferencia de dos cuadrados:

$$x^2 - 2x - 2 = (x - 1)^2 - (\sqrt{3})^2 .$$

Luego, recordemos cómo se factoriza la diferencia de dos cuadrados:

$$(x - 1)^2 - (\sqrt{3})^2 = \left((x - 1) + \sqrt{3}\right)\left((x - 1) - \sqrt{3}\right).$$

Y ahora ya tenemos factorizado el polinomio <u>sobre los números reales</u>:

$$x^2 - 2x - 2 = \left(x - 1 + \sqrt{3}\right)\left(x - 1 - \sqrt{3}\right) .$$

Multiplica estos factores y comprueba el producto. El paso final para la solución es el procedimiento familiar de escribir la ecuación "$ab = 0$" en su forma equivalente

"$a = 0$ ó $b = 0$", donde a y b son números reales. Entonces los enunciados

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\left(x - 1 + \sqrt{3}\right)\left(x - 1 - \sqrt{3}\right) = 0$$

$$x - 1 + \sqrt{3} = 0 \quad ó \quad x - 1 - \sqrt{3} = 0$$

$$x = 1 - \sqrt{3} \quad ó \quad x = 1 + \sqrt{3}$$

son todos equivalentes. Por consiguiente, el conjunto de validez de la ecuación es $\{1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\}$.

Ves así que el resolver una ecuación cuadrática depende de nuestra capacidad para factorizar el polinomio cuadrático. Además, esa capacidad depende a su vez de la forma canónica del polinomio. Si la forma canónica es la diferencia de dos cuadrados, entonces podemos efectuar la factorización.

Ejemplo 2. Resuelve la ecuación

$$x^2 - 2x + 2 = 0 .$$

Escribiéndola en forma canónica, tenemos

$$x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 .$$

Pero ésta no es diferencia de dos cuadrados, y por tanto, no podemos factorizar "$x^2 - 2x + 2$" como polinomio sobre los números reales. La ecuación

$$(x - 1)^2 + 1 = 0$$

no puede tener soluciones reales, porque $(x - 1)^2$ es siempre mayor que o igual a 0 para todo número real x. ¿Por qué? Luego, $(x - 1)^2 + 1$ es mayor que 0 para todo número real x.

Conjunto de problemas 16-3

1. Factoriza los siguientes polinomios sobre los números reales, si ello es posible:

(a) $6x^2 - x - 15$

(b) $x^2 + 4$

(c) $x^2 + 8x + 3$

(d) $3(x - 2)^2 + 1$

(e) $x^2 - 3$

(f) $9x^2 - 12x + 4$

(g) $2(x - 1)^2 - 5$

(h) $3x - 2x^2$

2. Resuelve las ecuaciones cuadráticas siguientes:

(a) $x^2 + 6x + 4 = 0$

(b) $2x^2 - 5x = 12$

(c) $x^2 + 4x + 6 = 0$

(d) $x^2 = 2x + 4$

(e) $2x^2 = 4x - 11$

(f) $12x^2 - 8x = 15$

3. Determina las coordenadas del vértice de la parábola cuya ecuación es

$$y = -3x^2 + 6x - 5 .$$

¿Cuál es el mayor valor que puede tomar el polinomio "$-3x^2 + 6x - 5$" ?

4. El polinomio "$x^2 - 8x + 21$" nunca puede tomar un valor menor que ciertos enteros positivos. ¿Cuál es el mayor de éstos? ¿Puede tomar valores mayores que este entero? ¿Son enteros todos los valores del polinomio?

5. Considera el polinomio

$$2x^2 - 4x - 1$$

y su forma canónica

$$2(x - 1)^2 - 3 .$$

Puesto que $2 = (\sqrt{2})^2$ y $3 = (\sqrt{3})^2$, "$2(x - 1)^2 - 3$" es la diferencia de dos cuadrados y puede, por tanto, factorizarse como un polinomio sobre los números reales:

$$2(x - 1)^2 - 3 = \left(\sqrt{2}(x - 1) + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}(x - 1) - \sqrt{3}\right)$$

¿Cuál es el conjunto de validez de la ecuación

$$2x^2 - 4x - 1 = 0 ?$$

6. El perímetro de un rectángulo es de 94 pies y su área es de 496 pies cuadrados. ¿Cuáles son sus dimensiones?

7. Se construye una caja abierta de una lámina metálica rectangular que tiene 8 pulgadas de largo más de lo que tiene de ancho, de la manera siguiente: se quita de cada esquina mediante cortes un cuadrado de 2 pulgadas de lado y luego se doblan hacia arriba los lados libres. El volumen de la caja que así se obtiene es de 256 pulgadas cúbicas. ¿Cuáles eran las dimensiones de la lámina metálica original?

8. Dibuja las gráficas de los siguientes enunciados abiertos:

   (a) $y < x^2 + 6x + 5$

   (b) $y = 4$ y $y = 3x^2 - 12x + 13$

   (c) $y > 3x - 2x^2$

   (d) $y = x^2 - 6|x| + 5$.

9. Un cateto de un triángulo rectángulo tiene 1 pie más de largo que el otro y es 8 pies más corto que la hipotenusa. Determina las longitudes de los lados del triángulo rectángulo.

10. Una cuerda cuelga de la ventana de un edificio. Si se mantiene tensa verticalmente hasta la base del edificio, quedan 8 pies de cuerda tendidos en el suelo. Si se mantiene tensa de manera que el extremo de la cuerda justamente toque el suelo, este punto dista 28 pies del edificio. ¿A qué altura del suelo está la ventana?

11. La hipotenusa de un triángulo rectángulo tiene 3 unidades y los catetos son de la misma longitud. Determina la longitud de un cateto del triángulo.

12. Determina la longitud de una diagonal de un cuadrado si la diagonal es 2 pulgadas más larga que un lado.

13. La longitud de una lámina metálica rectangular es 3 pies más que el ancho. Si el área es de $46\frac{3}{4}$ pies cuadrados, determina la longitud.

14. La suma de dos números es 9 y la diferencia de sus cuadrados es 25. Determina los números.

15. La suma de 14 veces un número y el cuadrado del número es 11. Determina el número.

16. Juan recorre 336 millas hasta Chicago, compra un nuevo automóvil y regresa al día siguiente por el mismo camino. En el viaje de vuelta, su velocidad media ha sido 6 millas por hora menos que a la ida y tardó 1 hora más que al ir. Determina la velocidad media en cada viaje.

17.* La suma de un número y de su recíproco es 4. Determina el número.

Problemas de repaso

1. Dibuja las gráficas de los polinomios siguientes:
   (a) $3x^2$
   (b) $3x^2 + 3$
   (c) $3(x - 3)^2$
   (d) $3x(x - 3)$
   (e)* Explica cómo puede deducirse la gráfica de (d), partiendo de la de (a).

2. Dada la gráfica de $y = x^2$,
   (a) Escribe una ecuación de la gráfica que se obtiene al girar la gráfica de $y = x^2$ media revolución alrededor del eje x.
   (b) Escribe la ecuación de la gráfica obtenida al mover la de $y = x^2$ verticalmente, 3 unidades hacia arriba.
   (c) Escribe la ecuación de la gráfica obtenida al mover la de $y = x^2$ horizontalmente, 2 unidades a la izquierda.
   (d) Escribe la ecuación de la gráfica obtenida al mover la gráfica de $y = x^2$ una unidad hacia la derecha y dos unidades hacia abajo.

3. Nombra las gráficas de las ecuaciones siguientes, cuando sea posible; es decir "parábola", "recta", "par de rectas", "punto", etc.

(a) $y = x$
(b) $y = x^2$
(c) $y^2 = x^2$
(d) $y = 0 \cdot x^2$
(e) $x - y = 4$
(f) $x^2 - y = 4$
(g) $y = (x - 3)^2$
(h) $0 = (x - 3)^2$
(i) $x - 3 = y$ y $2x - y = 3$

4. En cada uno de los casos siguientes, determina:

(i) los puntos en los que la gráfica interseca el eje y,
(ii) los puntos en los que la gráfica interseca el eje x,
(iii) el mayor (o el menor) valor de la expresión, si es que hay alguno.

(a) $x^2 + 2x - 8$
(b) $x^2 + 2x + 3$
(c) $-x^2 + 4$
(d) $-x + 4$
(e) $12 + x - x^2$
(f) $|x|$

5. Resuelve :

(a) $x^2 + 21 = 10x$
(b) $x^2 = 2x + 1$
(c) $x + 6x^2 = 1$
(d) $35x^2 - 51x + 18 = 0$
(e) $x^2 + 1 = 4x$
(f) $x^2 + 2x + 2 > 0$

6. La suma de dos números es 9. Determina los números y su producto, si éste es el mayor posible.

7. Un fabricante de botes averigua que el costo en dólares de cada bote está relacionado con el número de botes fabricados cada día mediante la fórmula

$$c = n^2 - 10n + 175 .$$

Determina el número de botes que él debe construir cada día para que el costo de cada bote sea el menor posible.

Capítulo 17

FUNCIONES

17-1. El concepto de función

¿Tienes habilidad para explicar cosas con claridad a los demás? ¿Cómo explicarías a tu hermano menor la manera exacta de determinar el costo de enviar un paquete postal de primera clase?

Seguramente vas primero a la oficina de correos más cercana y allí te enteras de los siguientes datos relacionados con el correo clasificado como de primera clase: Un paquete de una onza o menos de peso lleva un franqueo postal de 4 centavos; de más de una onza pero no más de dos onzas, necesita franqueo de 8 centavos, etc. La Oficina de Correos no acepta paquetes que pesen más de 20 libras para enviarse por correo de primera clase.

Probablemente explicarías primero a tu hermano que tendrá que pesar su paquete cuidadosamente y calcular el número de onzas que representa su peso. ¿A qué conjunto de números pertenecerá dicho número? Describe con precisión tal conjunto. Luego explicarás cómo calcular el total del franqueo requerido. Este será un número que expresa centavos. ¿A qué conjunto de números pertenecerá este otro número? Descríbelo con precisión. Si el paquete de tu hermano pesa $3\frac{3}{4}$ onzas, ¿cuál será el costo del franqueo postal en centavos? ¿Cuánto valdrá si el peso es 20 libras con 15 onzas? (Recuerda la limitación impuesta al peso del paquete.)

En realidad, el problema de determinar el costo total del franqueo postal de primera clase es un problema de <u>aparear los números de dos conjuntos</u>. Los del primer conjunto son los números reales entre 0 y 320, que representan los pesos de los paquetes postales calculados en onzas. Los números del segundo conjunto son números enteros entre 0 y 1280, que representan los precios del franqueo en centavos. Y lo que realmente has estado explicando a tu hermano es la descripción de esos dos conjuntos y la <u>regla</u>

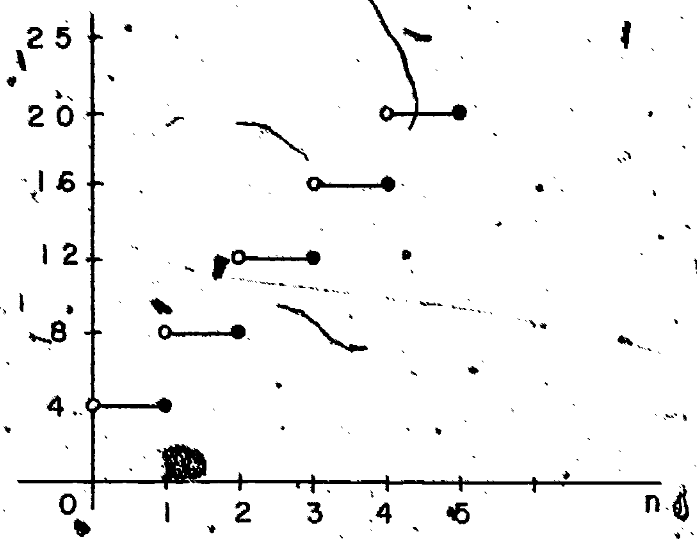
que le permitirá asociar a cada número dado del primer conjunto un cierto número del segundo conjunto.

Tu hermano puede preguntarte por una "fórmula" (lo cual, para ti significaría una "expresión con una variable") que le diera automáticamente el total del costo del franqueo postal para cada número n de onzas. ¿Puedes determinar dicha fórmula, que asigna a cada número real n entre 0 y 320 el número de centavos que requiere el franqueo? ¿Será

$$4n$$

la fórmula deseada? ¿Qué está mal en ella?

Si no puedes encontrar una formula adecuada, es posible que puedas complacer a tu hermano mediante una gráfica que le dirá a simple vista los costos del franqueo. Dibujemos una porción de dicha gráfica (para n en onzas desde $n = 0$ hasta $n = 5$):



Interpreta los significados de los puntos marcados con círculos y los puntos marcados en negro. ¿Cómo explicarías a tu hermano la manera de utilizar esta gráfica para averiguar el número de centavos asociado a $3\frac{1}{4}$ onzas? ¿Y el asociado a 4 onzas?

Quizás entendería mejor el problema del franqueo postal si se le construyes una tabla con pesos a intervalos de, digamos, $\frac{1}{4}$ onza. Llena los cuadros vacíos de la tabla.

Franqueo Postal de Primera Clase

onzas	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$	2	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$	3	$3\frac{1}{4}$	...
centavos														...

No tienes que sentirte desanimado por no poder determinar una fórmula precisa para esta asociación. Hay muchas asociaciones de números que no pueden ser descritas mediante una expresión en una variable. Lo importante es saber si la asociación puede ser descrita de algún modo, bien sea en términos verbales, o con una gráfica, o con una tabla, o bien mediante una expresión en una variable.

En los capítulos anteriores muchas veces hemos tenido ocasión, de un modo u otro, de asociar un número real con cada elemento de un conjunto dado. Cuando una idea así se presenta en tan variadas circunstancias, resulta deseable el separar dicha idea y estudiarla cuidadosamente. Por esto es que hacemos ahora un estudio especial de las asociaciones de números reales de la especie considerada en el problema anterior del franqueo postal. Primero examinemos algunas cuestiones adicionales que impliquen tales asociaciones.

Conjunto de problemas 17-1a

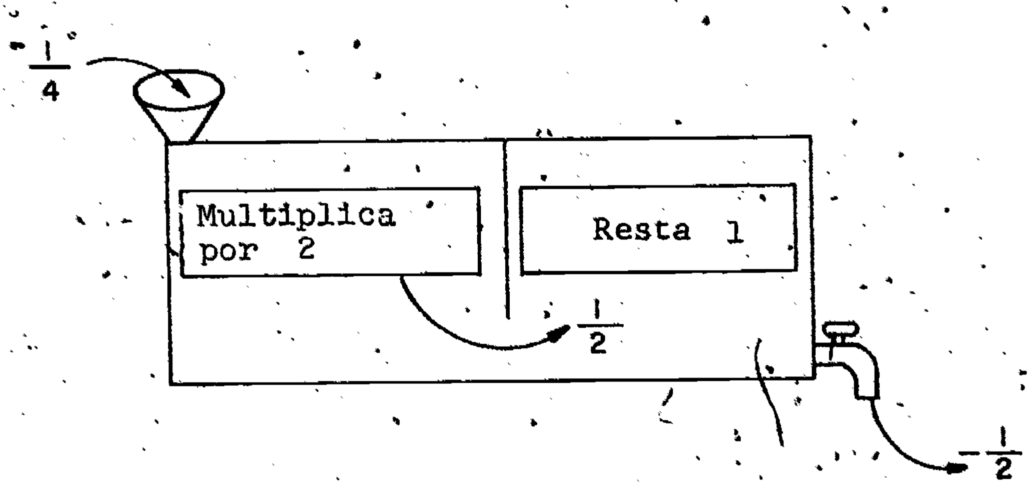
1. En cada uno de los casos siguientes, describe cuidadosamente los dos conjuntos y la regla que asocia cada elemento del primer conjunto con un elemento del segundo conjunto:

(a)

Entero positivo n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
enésimo entero impar	1	3	5	7	9						

(Llena las casillas vacías. ¿Qué número está asociado con 13? ¿Y con 1000?)

(b) Imagina una máquina calculadora especial, que admite cualquier número real positivo, lo multiplica por 2, luego resta 1 de ese producto, y nos da el resultado.



(Si das a esta máquina el número 17, ¿qué te dará como resultado?, ¿qué número asocia la máquina con el 0? ¿Y con -1?)

(c) Dibuja dos rectas numéricas reales paralelas y toma como unidad de medida en la recta superior un segmento el doble de la unidad de medida en la recta inferior. Después, desliza la recta inferior hasta que su punto 1 se coloque directamente debajo del punto 1 de la rect superior. Entonces para cada punto de la primera rect (la superior) hay un punto situado directamente debajo en la segunda recta. ¿Qué número está debajo de -13? ¿Y debajo de 13? ¿Cuál es el número que, mediante est coordinación, está asociado con 1000?

(d) Dibuja una recta respecto de un sistema de ejes coordenados, de tal modo que su pendiente sea 2 y su ordenad en el origen sea -1. Para cada número a en el eje hay un número b en el eje y, tal que (a, b) son las coordenadas de un punto de la recta dada. (Si tomamos el punto -1 en el eje x, ¿qué número en el eje y asocia la recta a -1? ¿Cuál es el número asociado con $-\frac{1}{2}$? ¿Y con 13?)

(e) Para cada número real t tal que $|t|<1$, utiliza la expresión lineal "$2t - 1$" para obtener un número asociado. (¿Qué número asocia esta expresión con $-\frac{2}{3}$? ¿Y con 2?)

(f) Dado un número real negativo cualquiera; multiplícalo por 2 y luego resta 1. (¿Qué número asocia esta regla verbal con -13? ¿Y con 0?).

2. En cada uno de los casos siguientes, describe los dos conjuntos implicados y enuncia verbalmente la regla que asocia los elementos de dichos conjuntos. Indica, en cada caso, cuántos elementos asocia la regla con cada elemento del primer conjunto.

(a) A cada número real c tal que $c < 1$, asígnale un número

$$2c - 5 .$$

(b) A cada número real d, asígnale un número e, tal que (d, e) es la solución del enunciado "$d = |e|$".

(c) A cada número real x, asígnale un número y tal que (x, y) sea solución de la ecuación

$$y = 3x + 7 .$$

(d) A cada entero p, asígnale un número q tal que (p, q) sea solución del enunciado "$p > q$".

(e) A cada número racional u, asígnale un número v tal que (u, v) sea solución de la ecuación

$$v^2 = u.$$

3. Da una descripción verbal precisa de la asociación entre el peso y el costo de un paquete postal de primera clase.

4. Describe el funcionamiento de una máquina que pesa el paquete y automáticamente marca sobre él, el franqueo de primera clase apropiado.

Algunas asociaciones, como las de los problemas *2(b), (d) y (e), asignan a cada número del primer conjunto más de un número del segundo conjunto. Observarás, sin embargo, que en todos los demás problemas y ejemplos tratados, cada número elegido en el primer conjunto venía asociado con exactamente un número del segundo conjunto.

Esta es la idea importante que deseamos estudiar. Llamamos a tal asociación una función.

> Dados un conjunto de números y una regla que asigna a cada número de este conjunto exactamente un número, entonces la asociación resultante de números se llama una función. El conjunto dado se llama el dominio de definición de la función, y el conjunto de los números asignados se llama el campo de valores de la función.

Es muy importante comprender que dos reglas diferentes dan lugar a la misma función si, y sólo si, tienen el mismo dominio de definición y determinan la misma asociación de números. Así, las funciones de los problemas 1(c) y (d) son las mismas, aunque están descritas de modo diferente. Pero las funciones de los problemas 1(a) y (b) son distintas, porque tienen dominios de definición diferentes.

Ahora vemos que una función puede ser descrita de varias maneras: Mediante una tabla, como en el problema 1(a); por una máquina, como en el problema 1(b); por un diagrama, como en el problema 1(c); mediante una gráfica, como en el problema 1(d); por medio de una expresión con una variable, tal como en el problema 1(e); o por una descripción verbal, como en el problema 1(f)

Para nuestro propósito, la manera más importante de describir una función es mediante una expresión que contiene una variable, puesto que entonces podemos utilizar métodos algebraicos para estudiar la función. Por otra parte, debemos darnos cuenta de que una función no necesita, y en muchos casos no puede, ser descrita por medio de una expresión con una variable. (Recuerda el ejemplo del franqueo postal de primera clase.) El método gráfico también es importante, porque nos permite visualizar ciertas propiedades de las funciones.

Conjunto de problemas 17-1b

1. ¿Cuáles entre las asociaciones descritas en el Conjunto de problemas 17-1a, representan funciones? Si para algunas de ellas no es así, explica por qué.
2. Para aquellas asociaciones contenidas en el problema 2 del Conjunto de problemas 17-1a, y que describen funciones, enuncia la regla, si es posible, mediante una expresión en x, donde x pertenece al dominio de definición. Por ejemplo, en el problema 2(a) la regla viene dada por $2x - 5$; donde x es un número real menor que 1.
3. En cada uno de los casos siguientes, describe (si es posible) la función de dos maneras: (i) mediante una tabla, y (ii) mediante una expresión en x. En cada caso describe el dominio de definición.
   (a) A cada día asocia el ingreso por la venta de helados del vendedor citado en el capítulo 6.
   (b) A cada entero positivo asocia su residuo al dividirlo por 5.
   (c) A cada número real positivo asígnale el producto de $\frac{1}{3}$ por 2 más que el número.
   (d) A cada entero positivo n asóciale el enésimo primo.
   (e) Asocia a cada día del año el número de días restantes del año (no bisiesto).
   (f) Asocia a cada número de dólares invertidos al 6% durante un año, el número de dólares obtenidos como interés.

(g) Asocia cada longitud del diámetro de una circunferencia con la longitud de ésta.

(h) Dibuja dos rectas numéricas paralelas e idénticas y desliza la de abajo hasta que su punto 0 caiga directamente debajo del punto 1 de la recta de arriba. Entonce haz girar la recta inferior media vuelta alrededor de su punto 0. Ahora asocia a cada número de la recta superior el número que cae directamente debajo en la recta inferior girada.

4. Con cada entero positivo mayor que 1 asocia el más pequeño factor (mayor que 1) del entero. Construye una tabla con diez de los pares asociados que nos da esta función. ¿Qué enteros resultan asociados consigo mismos?

5. El costo del franqueo postal de un paquete está determinado por el peso del paquete en libras por exceso. Esto puede describirse así: A cada número real positivo (peso en libras) se le asigna el entero más próximo a él, mayor o igual que él. ¿Define esto una función? ¿Puede representarse mediante una expresión con una variable? ¿Cuál es el dominio de definición (Observa que la Oficina de Correos no aceptará un paquete que pese más de 32 libras.) ¿Qué número asocia esta regla a 3.7? ¿Y a 5?

6. Asigna a cada número real x el número -1 si x es raciona y el número 1 si x es irracional. ¿Qué números resultan entonces asignados a los números $-\pi$, $-\frac{3}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$, $\frac{\pi}{2}$, 10^6? ¿Puedes representar esta función de otra manera que no sea por su descripción verbal?

7. Algunas veces el dominio de definición de una función no está enunciado explícitamente, pero se sobrentiende que es el mayor conjunto de números reales al cual puede aplicarse la regla que determina la función. Por ejemplo, si una función se define mediante la expresión $\frac{1}{x+2}$, entonces, a menos que

se diga otra cosa, su dominio de definición es el conjunto de todos los números reales distintos de -2. (¿Por qué?) Análogamente el dominio de definición de la función definida por $\sqrt{x+2}$ es el conjunto de todos los números reales iguales o mayores que -2. (¿Por qué?) Determina el dominio de definición de cada una de las funciones definidas por las expresiones siguientes:

(a) $\frac{x}{x-3}$ (c) $3-\frac{1}{x}$ (e) $\sqrt{x^2-1}$

(b) $\sqrt{2x-2}$ (d) $\sqrt{x^2}$ (f) $\frac{3}{x^2-4}$

8. En ciertas aplicaciones, el dominio de definición de una función puede automáticamente restringirse a aquellos números que conducen a resultados para los cuales el problema tenga sentido. Por ejemplo, el área A de un rectángulo de perímetro fijo de 10 se obtiene mediante $A = s(5 - s)$, donde s es la longitud de un lado en pies. Tal expresión $s(5 - s)$ define una función para todos los valores reales de s, pero en este problema concreto tenemos que limitarnos a considerar sólo los valores de s entre 0 y 5. (¿Por qué?) ¿Cuáles son los dominios de definición de las funciones presentadas en los problemas siguientes?

   (a) ¿Qué interés se obtiene invirtiendo x dólares durante un año al 4%?

   (b) Un triángulo tiene 12 pulgadas cuadradas de área y su base mide x pulgadas. ¿Cuál es su altura?

   (c) Se trata de hacer una caja rectangular abierta cortando un cuadrado de lado x de cada esquina de una lámina rectangular de latón que mide 10" por 8" y doblando luego hacia arriba las partes laterales. ¿Cuál es el volumen de la caja?

17-2. La notación funcional

Hemos estado usando letras como nombres de números y ocasionalmente como nombres de ciertas expresiones. Análogamente emplearemos letras para nombrar funciones. Si f es una función dada, y si x es un número perteneciente a su dominio de definición, entonces designaremos con $f(x)$ el número que f asigna a x. El símbolo "$f(x)$" se lee "f de x" (no es f veces x), y el número $f(x)$ se llama el valor de f en x.

La notación funcional es muy eficaz. Así, cuando queremos describir la función f: "A cada número real x le corresponde el número real $2x - 1$", podemos escribir

$$f(x) = 2x - 1, \text{ para cada número real } x.$$

Entonces,

$$f(\tfrac{1}{4}) = 2(\tfrac{1}{4}) - 1 = -\tfrac{1}{2}.$$

Esto es, f asigna a $\frac{1}{4}$ el número $-\frac{1}{2}$.

Análogamente,

$$f(0) = 2(0) - 1 = -1.$$

También, pues, $f(a) = 2a - 1$ para cualquier número real a.

¿Qué números reales están representados por

$$f(-\tfrac{4}{3}), \quad f(-\tfrac{1}{2}), \quad f(\tfrac{4}{3}), \quad f(s)$$

donde s es un número real? Si t es un número real, entonces

$$f(2t) = 2(2t) - 1 = 4t - 1.$$

¿Qué números reales están representados por

$$f(-t), \quad -f(t), \quad 2f(t), \quad f(t - 1), \quad f(t) - 1?$$

Algunas veces una función está definida en dos o más partes, tal como la siguiente función h, definida por

$$h(x) = x, \text{ para todo número } x \text{ tal que } x \geq 0,$$
$$h(x) = -x, \text{ para todo número } x \text{ tal que } x < 0.$$

A pesar de contener dos ecuaciones, esta definición es, en verdad, una sola regla y representa una sola función. Es costumbre abreviar el enunciado de esta regla, escribiéndola así:

$$h(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

¿Cuál es el dominio de definición de h? ¿Cuál es el campo de valores de h? Observa que $h(-3) = 3$ y $h(3) = 3$. En realidad, ya anteriormente hemos considerado esta función h, en la forma

$$h(x) = |x|, \text{ para todo valor real de } x.$$

Consideremos otra función g definida así:

$$\begin{cases} g(x) = -1, & \text{para todo número real } x \text{ tal que } x < 0, \\ g(x) = 0, & \text{para } x = 0, \\ g(x) = 1, & \text{para todo número real } x \text{ tal que } x > 0. \end{cases}$$

Es importante darse cuenta de que también es ésta una sola regla que define una sola función, regla que resulta descrita en tres partes. Para conveniencia de la escritura, abreviamos una vez más la descripción de esta función g, escribiendo:

$$g(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Observa que g asigna un número a todo número real; por consiguiente, el dominio de definición de g es el conjunto de todos los números reales. ¿Cuál es el campo de valores de la función? Vemos que $g(-5) = -1$ y $g(\pi) = 1$. ¿Qué números reales están representados por $g(-3.2)$, $g(0)$, $g(\frac{1}{2})$, $g(\sqrt{2})$? Si $a > 0$, ¿cuál es $g(a)$?, ¿cuál es $g(-a)$? Si a es un número real cualquiera, distinto de cero, ¿cuál es $g(|a|)$? ¿Será posible escribir g mediante una regla expresable con una sola ecuación, como hicimos para la función h en el ejemplo anterior?

Conjunto de problemas 17-2

1. Dada la función F definida como sigue:

$$F(x) = 2 - \frac{x}{2} \text{ para todo número real } x.$$

¿Qué números reales están representados por:

(a) $F(-2)$

(b) $-F(2)$

(c) $F(-\frac{1}{2})$

(d) $F(1) - 1$

(e) $F(0)$

(f) $|F(-6)|$

(g) $F(|-6|)$

(h) $F(t)$, para cualquier número real t

(i) $F(\frac{t}{2})$

(j) $F(2t)$

(k) $F(\frac{1}{t})$

2. Dada la función G definida por:

$$G(t) = |t|, \text{ para todo número real } t.$$

¿Cuál es el campo de valores de G? ¿Qué números reales están representados por los siguientes?

(a) $G(0)$

(b) $G(a) - G(-a)$, para cualquier número real a.

(c) $\frac{G(-3)}{3}$

3. Considera la función h definida por:

$$h(t) = \begin{cases} -1, & t < 0, \\ 0, & t = 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

¿En qué difiere esta función h de la función g definida en la sección 17-2? (Observa que la misma función puede nombrarse de distintas maneras y contener diferentes variables, con tal que la regla y el dominio de definición permanezcan los mismos.)

4. Considera la función k definida por:

$$k(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0\,, \\ 0, & x = 0\,. \end{cases}$$

Muestra que k es la misma función g definida en la sección 17-2.

5. Dada la función H definida por:

$$H(z) = z^2 - 1, \; -3 < z < 3\,.$$

¿Qué números reales son los representados por los siguientes?

(a) $H(2)$

(b) $H(\frac{1}{3})$

(c) $H(-\frac{1}{3})$

(d) $-H(-2)$

(e) $H(-1) + 1$

(f) $H(3)$

(g) $H(a)$, para cualquier número real a tal que $-3 < a < 3$.

(h) $H(t - 1)$, para cualquier número real t tal que $-2 < t < 4$.

(i) $H(t) - 1$, para cualquier número real t tal que $-3 < t < 3$.

6. Considera la función Q definida por:

$$Q(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0\,, \\ x, & 0 < x \leq 2\,. \end{cases}$$

(a) ¿Cuál es el dominio de definición de Q?

(b) ¿Cuál es el campo de valores de Q?

(c) ¿Qué números son los representados por:

$Q(-1)$, $Q(-\frac{1}{2})$, $Q(0)$, $Q(\frac{1}{2})$, $Q(\frac{3}{2})$, $Q(\pi)$?

(d) Si R está definida por

$$R(z) = \begin{cases} z, & 0 < z \leq 2\,, \\ -1, & -1 \leq z < 0\,, \end{cases}$$

¿es R una función diferente de Q?

7. Sea F la función definida en el problema 1. ¿Cuál es el conjunto de validez de cada uno de los siguientes enunciados?

(a) $F(x) = -1$ (c) $F(x) = -\frac{1}{2}$ (e) $F(x) > 2$

(b) $F(x) < 0$ (d) $F(x) = x$ (f) $F(x) \leq 1$

8. Sea G la función definida en el problema 2. Dibuja las gráficas de los conjuntos de validez de los enunciados siguientes:

(a) $G(x) = 1$ (c) $G(x) \leq 1$

(b) $G(x - 1) = 1$ (d) $G(x + 1) > 2$

9. Describe cómo difieren entre sí los siguientes pares de funciones:

(a) $f(x) = x - 2$; $F(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$

(b) $g(x) = x^2 - 1$; $G(t) = \dfrac{t^4 - 1}{t^2 + 1}$

17-3. Gráficas de funciones

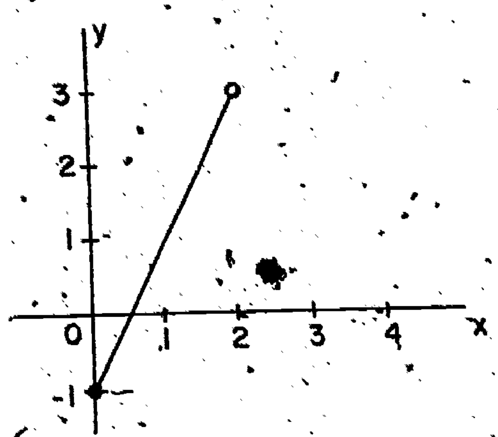
Una manera de representar una función es por medio de una gráfica, cómo ya hemos visto antes en este capítulo. Cuando una función f está definida, la gráfica de f es la gráfica del conjunto de validez de la ecuación

$$y = f(x).$$

Ejemplo 1. Dibuja la gráfica de la función f definida por:

$$f(x) = 2x - 1, \quad 0 \leq x < 2.$$

Esta es la gráfica de la ecuación $y = 2x - 1, \quad 0 \leq x < 2.$



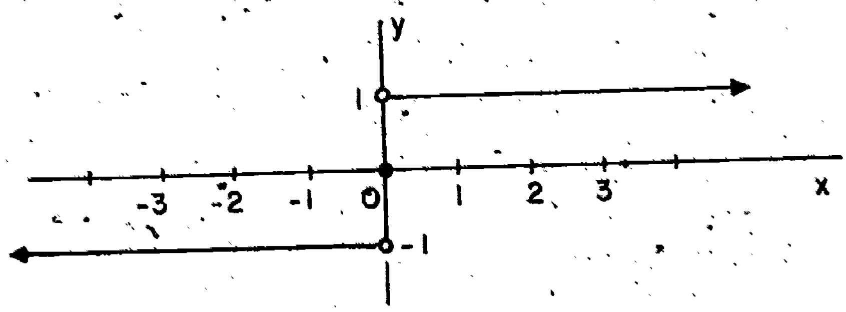
¿Es ésta igual que la gráfica de la función F definida por

$$F(x) = 2x - 1, \quad -2 < x < 2 \ ?$$

Ejemplo 2. Dibuja la gráfica de la función g definida por:

$$g(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

La gráfica de g es



Conjunto de problemas 17-3a

1. Dibuja las gráficas de las funciones definidas como sigue:

   (a) $T(s) = \frac{1}{3}s + 1, \quad -1 \leq s \leq 2$

   (b) $G(x) = |x|, \quad -3 \leq x \leq 3$

(c) $U(x) = \begin{cases} -x, & -3 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 3 \end{cases}$

(d) $V(t) = t^2 - 1, \ -2 < t \leq 1$

(e) $h(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

(f) $H(z) = \frac{|z|}{z}$

2. ¿Cuáles son los dominios de definición y los campos de valores de las funciones definidas en el problema 1?

3. Dibuja la gráfica de la función q definida por:

$$q(x) = \begin{cases} -1, & -5 \leq x < -1 , \\ x, & -1 \leq x < 1 , \\ x^2, & 1 < x \leq 2 . \end{cases}$$

4. Da una regla para definir la función cuya gráfica es la recta que va desde $(-2, 2)$ a $(4, -1)$, incluidos los extremos.

5. Da una regla para definir la función cuya gráfica consiste en dos segmentos rectilíneos, uno que va desde $(-1, 1)$ a $(0, 0)$, incluidos los extremos, y el otro que va desde $(0, 0)$ hasta $(2, 1)$, excluidos los extremos. ¿Cuáles son el dominio de definición y el campo de valores de esta función?

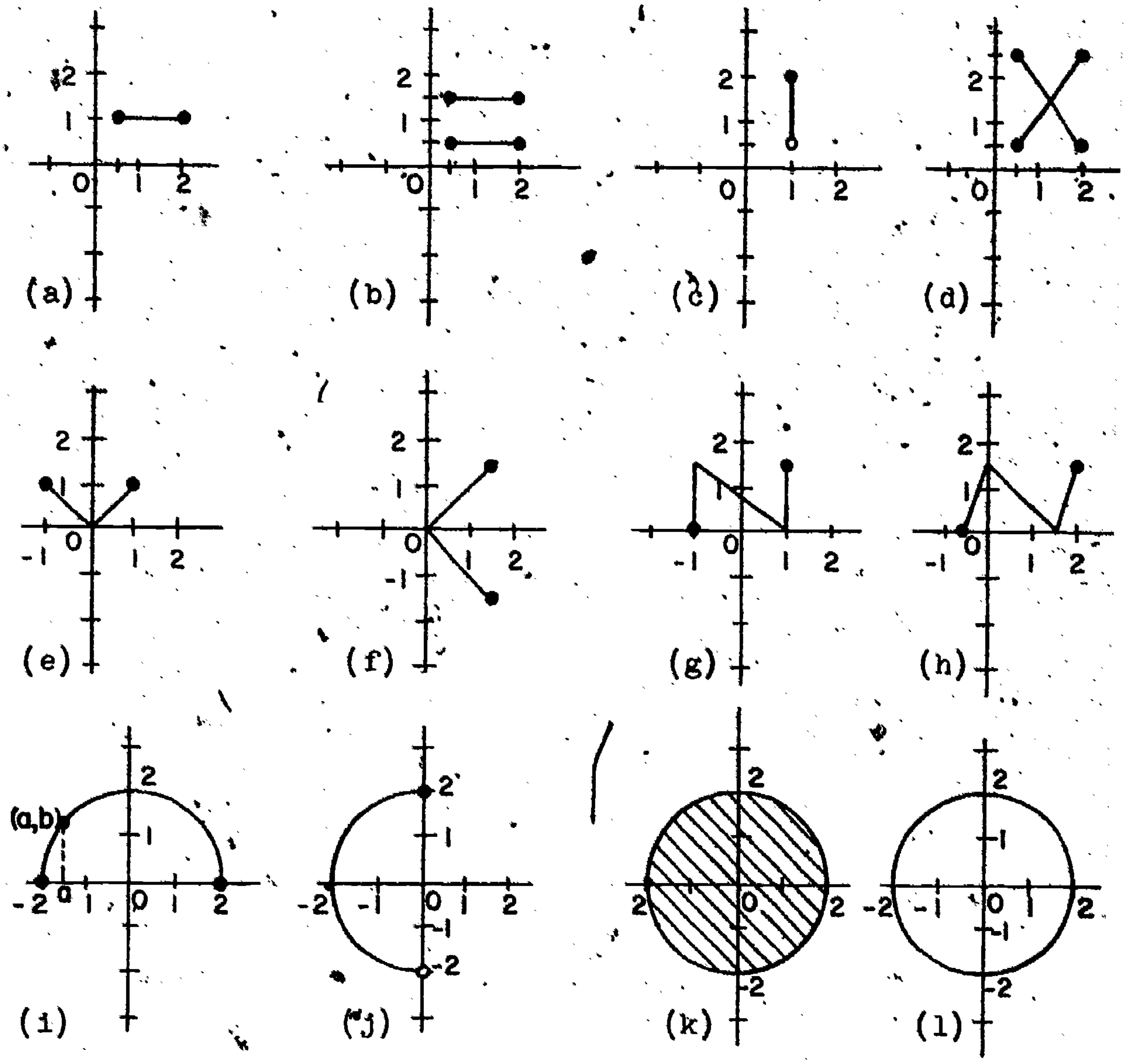
6. Dibuja la gráfica de la función f que satisface a todas las siguientes condiciones sobre el dominio de definición, $-2 \leq x \leq 2$:

$$f(-1) = 2 ,$$
$$f(0) = 0 ,$$
$$f(1) = 0 ,$$
$$f(2) = 2 ,$$
$$f(x) < 0 \text{ para } 0 < x < 1.$$

Ahora que sabemos cómo dibujar la gráfica de una función, es natural preguntar si un conjunto dado de puntos en el plano es la gráfica de alguna función. Dibuja varios conjuntos de puntos y pregúntate qué es lo que la definición de una función exige de su gráfica: Precisamente requiere que para cada abscisa en el dominio de definición haya exactamente una ordenada asignada por la función. Así que, para cada número a en el dominio de definición de la función, ¿cuántos puntos de su gráfica tienen dicho número como abscisa? Si se traza una recta vertical secante a la gráfica de la función, ¿en cuántos puntos esa recta cortará la gráfica? ¿Cómo formularías la regla correspondiente a una función a base de su gráfica?

Conjunto de problemas 17-3b

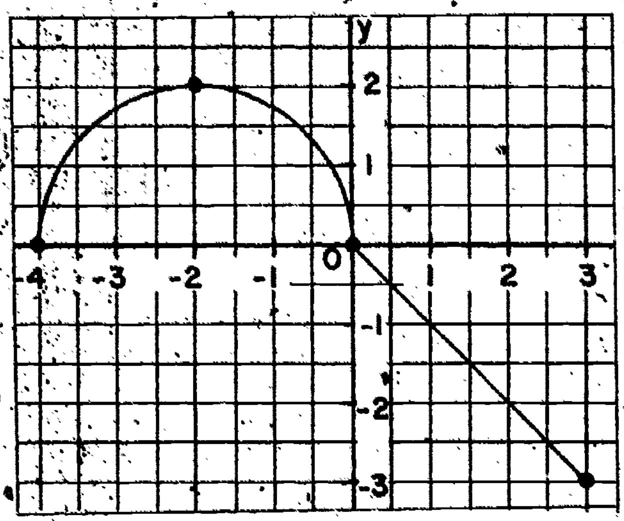
1. Considera los conjuntos de puntos, sin incluir los ejes coordenados, indicados en las figuras siguientes:



¿Cuáles de las anteriores figuras son gráficas de funciones? Explica la razón de tu respuesta en cada caso. Como ejemplo, considera la figura (i). Esta figura es la gráfica de una función f cuyo dominio de definición es el conjunto de todos los x tales que $-2 \leq x \leq 2$.

La regla correspondiente a la función puede establecerse del modo siguiente: Si $-2 \leq a \leq 2$, entonces $f(a) = b$, donde (a, b) es el (¡único!) punto de la gráfica cuya abscisa es a.

2. La figura adjunta es la gráfica de una función h. Deduce de la gráfica
   (a) $h(-3)$, $h(0)$, $h(2)$;
   (b) el dominio de definición de h;
   (c) el campo de valores de h.



3. Sea G un conjunto de puntos en el plano que es la gráfica de una cierta función g.
   (a) Para cada x en el dominio de definición de g, explica cómo debes utilizar la gráfica para obtener $g(x)$.
   (b) ¿Cómo obtienes el dominio de definición de g mediante la gráfica de G?
   (c) Muestra que si (a, b) y (c, d) son dos puntos distintos cualesquiera de la gráfica G, entonces $a \neq c$.

4. Sea G un conjunto cualquiera de puntos en el plano con la propiedad de que, si (a, b) y (c, d) son dos puntos distintos cualesquiera de G, entonces $a \neq c$. Muestra entonces que G es la gráfica de una función.

5. Dibuja la gráfica de la ecuación $y^2 = x$, para $0 \leq x < 4$. ¿Es ésta la gráfica de alguna función?

17-4. Funciones lineales

Una función cuya gráfica es una línea recta (o una porción de ella) se llama función lineal. Ya has trabajado con funciones lineales en el capítulo 14, pero entonces las estudiabas en la forma de expresiones lineales. ¿Puede considerarse cualquier línea recta en el plano como la gráfica de alguna función lineal? ¿Qué dices respecto de la recta cuya ecuación es $x = 2$? ¿Es posible representar toda función lineal mediante una expresión cc una variable? ¿Cuál es la forma general de tal expresión? (Recuerda la forma en y de la ecuación de una recta.)

Conjunto de problemas 17-4

1. Si f es una función lineal, entonces hay números reales A y B tales que $f(x) = Ax + B$ para todo x en el dominio de definición de f.
   (a) Describe la gráfica de f si $A = 0$.
   (b) Describe la gráfica de f si $A = 0$ y $B = 0$.
   (c) Determina A y B cuando la gráfica de f es el segmento rectilíneo que une $(-3, 0)$ con $(1, 2)$, incluidos los extremos.
   (d) ¿Cuál es el dominio de definición de la función considerada en la parte (c)?
   (e) Determina A y B cuando la gráfica de f es el segmento rectilíneo que une $(-1, 1)$ y $(3, 3)$, excluyendo los extremos.
   (f) ¿Cuál es la pendiente y el punto de intersección con el eje y de la gráfica de la función considerada en la parte (e)?
   (g) ¿Cuál es el dominio de definición de la función considerada en la parte (e)?

2. Si L es la recta completa que contiene los dos puntos $(-3, 1)$ y $(1, -1)$, describe la función h cuya gráfica consiste en los puntos (x, y) de L tales que

$$-2 \leq y < 2 .$$

3. ¿Cuáles de las expresiones siguientes representan funciones lineales (es decir, tienen una gráfica rectilínea)?

(a) $-(x - 2)$ (d) $|x| - 2$

(b) $|x - 2|$ (e) $(-x) - 2$

(c) $\frac{1}{x - 2}$ (f) $x^2 - 2$

4. Sea f la función lineal definida por:

$$f(x) = x - 2, \text{ para todo número real } x.$$

Escribe cada expresión de las consideradas en el problema 3, como una función g en términos de la función dada f.

<u>Ejemplo</u>: La expresión (a) describe una función g tal que

$$g(x) = -f(x), \text{ para todo número real } x.$$

5. ¿De qué modo están relacionadas las gráficas de f <u>y</u> g en las partes (a) y (e) del problema 4? Dibuja cada par en un sistema diferente de ejes coordenados.

6. Si F y G son funciones lineales definidas para todo número real x por

$$F(x) = -3x + 2, \quad G(x) = 2x - 3 ,$$

explica qué relación hay entre la gráfica del enunciado

$$\bigl(y - F(x)\bigr)\bigl(y - G(x)\bigr) = 0$$

y las gráficas de F y G. (Haz esto <u>sin</u> dibujar las gráficas de F y G.)

17-5. Funciones cuadráticas

Hemos descrito una función lineal mediante una expresión lineal con una variable; ésto es, cualquier función lineal f puede definirse por

$$f(x) = Ax + B,$$

donde A, B son números reales. Es natural definir entonces una función cuadrática como una función que está expresada mediant un polinomio cuadrático en una variable,

$$Ax^2 + Bx + C,$$

donde A, B, C son números reales. Si $A = 0$ el polinomio cuadrático se reduce al caso lineal; por lo tanto, supondremos en lo que sigue de este capítulo, que $A \neq 0$.

Ejemplo 1. Define la función g mediante:

$$g(x) = 2x^2 - 3x + 1, \text{ para todo número real } x.$$

Entonces

$$g(0) = 1, \quad g(\tfrac{3}{2}) = 2(\tfrac{3}{2})^2 - 3(\tfrac{3}{2}) + 1 = 1,$$

$$g(t) = 2t^2 - 3t + 1, \quad g(2t) = 2(2t)^2 - 3(2t) + 1$$
$$= 8t^2 - 6t + 1,$$

$$g(t - 1) = 2(t - 1)^2 - 3(t - 1) + 1 = 2t^2 - 7t + 6.$$

Luego, como $g(x) = (2x - 1)(x - 1)$, se deduce que

$$g(\tfrac{1}{2}) = 0 \text{ y } g(1) = 0. \quad (\text{¿Por qué?})$$

Observa que

$$g(|-2|) = 2|-2|^2 - 3|-2| + 1 = 3,$$

mientras que

$$|g(-2)| = |2(-2)^2 - 3(-2) + 1| = 15.$$

Conjunto de problemas 17-5a

1. Sea f la función cuadrática definida por

$$f(x) = x^2 - 3x - 21, \text{ para todo número real } x,$$

y g la función cuadrática definida por

$$g(x) = 3x^2 - 2, \quad -3 < x < 3.$$

(a) Determina $f(-2)$, $f(-\frac{1}{2})$, $f(0)$, $f(\frac{3}{4})$, $f(3)$; $f(a)$, $f(\frac{a}{2})$, $f(a + 1)$, donde a es un número real cualquiera.

(b) Determina $g(-2)$, $g(-\frac{1}{2})$, $g(0)$, $g(3)$; $g(2t - 1)$, $-1 < t < 2$.

(c) Halla el conjunto de validez del enunciado "$f(x) = 0$".

(d) Dibuja la gráfica del enunciado "$f(x) < 0$".

(e) Determina $f(t) + g(t)$, $-3 < t < 3$.

(f) Determina para el número real a:
$f(a) + 3$, $f(a + 3)$, $3f(a)$, $f(3a)$.

(g) ¿Son polinomios cuadráticos en a todos los que resultan en la parte (f)?

(h) Determina $f(t)g(t)$, $-3 < t < 3$.

(i) ¿Es un polinomio cuadrático en t el polinomio que se obtiene en la parte (e)? ¿Y el que se obtiene en la parte (h)?

2. Describe las funciones que aparecen en los problemas siguientes, determina los dominios de definición, y resuelve los problemas:

(a) ¿Cuál es el área A de un triángulo cuya base tiene b pulgadas de longitud y cuya altura es 10 pulgadas más larga que la base?

(b) ¿Cuál es el producto P de dos números positivos si la suma del mayor y de dos veces el más pequeño, s, es 120?

(c) Se van a emplear 120 pies de alambre para construir un corral rectangular a lo largo de la pared de un granero, con ésta como uno de los lados del corral. Si L es la longitud del lado del corral paralelo a la pared del granero, determina el área A del corral.

3. Dibuja la gráfica de la función cuadrática f definida por:

(a) $f(x) = x^2 + x - 1$, $-3 \leq x \leq 2$

(b) $f(x) = 3x^2 - 3$, $-2 < x < 2$

(c) $f(x) = -x^2 + 1$, $-2 < x < 3$

En los problemas desde el 4 hasta el 8, refiérete a la figura 1 y a la gráfica de $y = x^2$, y también a la sección 16-1.

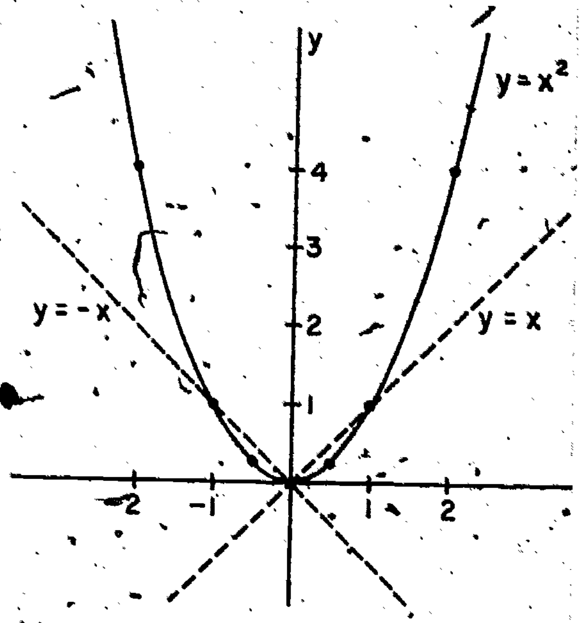


Figura 1

4. Para cualquier número real x, $x^2 \geq 0$. (¿Por qué?) Además, $x^2 = 0$ si y sólo si $x = 0$. Explica por qué la gráfica de $y = x^2$ está toda ella por encima del eje x y toca a éste sólo en el punto $(0, 0)$.

5. Para cualquier número real x,
$$(-x)^2 = x^2 .$$
Si (a, b) es un punto de la gráfica de $y = x^2$, demuestra que $(-a, b)$ está también en la gráfica. (Esto significa que la porción de la gráfica que está en el segundo cuadrante puede obtenerse girando la porción contenida en el primer cuadrante alrededor del eje y. Decimos entonces que "la gráfica de $y = x^2$" es <u>simétrica respecto del eje y</u>.)

6. Si x es cualquier número real tal que $0 < x < 1$, entonces $x^2 < x$. (¿Por qué?) Muestra que la porción de la gráfica de $y = x^2$, para $0 < x < 1$, está <u>por debajo de</u> la gráfica de $y = x$.

7. Si $1 < x$, entonces
$$x < x^2. \quad \text{(¿Por qué?)}$$
Muestra que la porción de la gráfica de $y = x^2$, para $1 < x$, está <u>por encima de</u> la recta $y = x$.

8. Si a <u>y</u> b son números reales tales que $0 < a < b$, entonces $a^2 < b^2$. (¿Por qué?)

Muestra que la gráfica de $y = x^2$ sube constantemente al movernos hacia la derecha, a partir de 0.

9. Muestra que una recta horizontal corta la gráfica de $y = x^2$ a lo más en dos puntos.

10. Elige cualquier punto (a, a^2) de la gráfica de $y = x^2$. ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por $(0, 0)$ y por (a, a^2)? A medida que elegimos puntos de la gráfica próximos al origen (a próximo a 0), ¿qué le sucede a la pendiente de esta recta? ¿Puedes explicar por qué la gráfica de $y = x^2$ es llana muy cerca del origen?

Los problemas desde el 4 al 10 justifican la gráfica de $y = x^2$ dibujada en la figura 1. Esta gráfica es un ejemplo de una <u>parábola</u>. El punto $(0, 0)$ se llama su <u>vértice</u> y la recta $x = 0$ su <u>eje</u>.

Con lo que sabemos acerca de la gráfica de $y = x^2$, podemos obtener gráficas de otras funciones cuadráticas. Ya se hizo esto en la sección 16-1 para funciones cuadráticas particulares. Comprobemos esas extensiones de la gráfica de $y = x^2$ a las de $y = Ax^2 + Bx + C$ para números reales A, B, C, con $A \neq 0$.

Conjunto de problemas 17-5b

1. Describe cómo difiere la gráfica de $y = ax^2$ de la de $y = x^2$ en cada uno de los casos siguientes:

   (a) $0 \leq a < 1$

   (b) $a > 1$

   (c) $-1 < a < 0$

   (d) $a < -1$

   (e) $|a|$ muy grande

   (Refiérete a la figura 2)

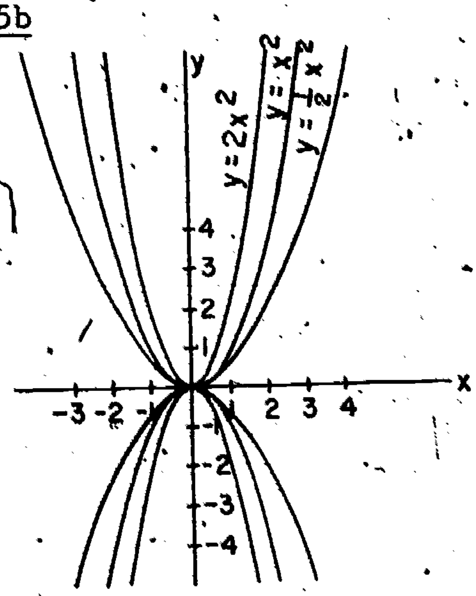


Figura 2

2. Describe cómo difiere la gráfica de $y = x^2 + k$ de la de $y = x^2$ en cada uno de los casos siguientes:

(a) $k > 0$

(b) $k < 0$

(Refiérete a la figura 3)

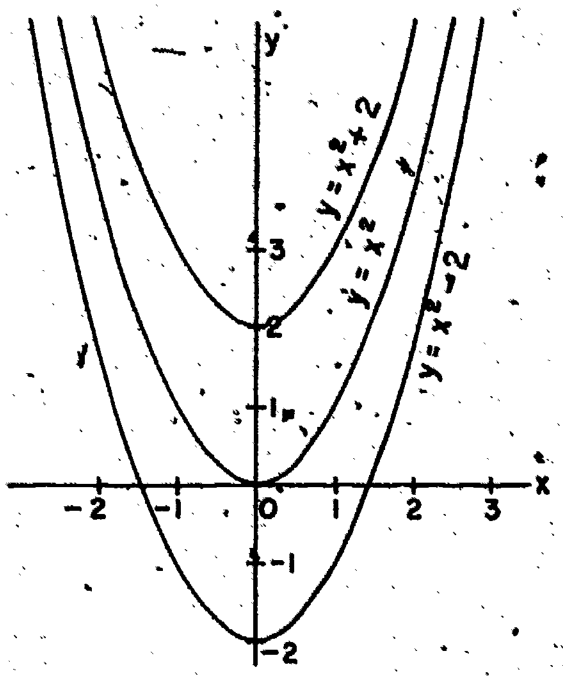


Figura 3

3. Describe cómo difiere la gráfica de $y = (x - h)^2$ de la de $y = x^2$ en los casos:

(a) $h > 0$, (b) $h < 0$.

(Refiérete a la figura 4)

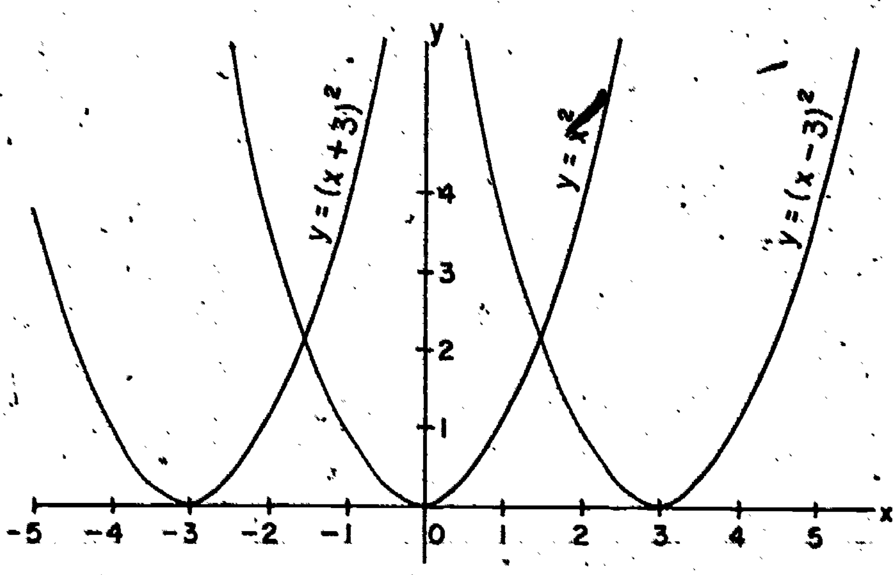


Figura 4

4. Utilizando los resultados de los problemas 1, 2 y 3, y sin dibujar las gráficas, describe las formas de las parábolas siguientes:

(a) $y = (x + 1)^2$ (e) $y = 2(x - 2)^2$

(b) $y = -3x^2$ (f) $y = (x + 1)^2 + 1$

(c) $y = x^2 - 3$ (g) $y = 2(x - 1)^2 - 1$

(d) $y = -(x - 1)^2$ (h) $y = -2(x + 1)^2 - 1$

5. Si a, h, k son números reales, di cómo la gráfica de $y = a(x - h)^2 + k$ puede obtenerse de la gráfica de $y = ax^2$. ¿Cuál es el vértice de la parábola $y = a(x - h)^2 + k$? ¿Cuál es la ecuación del eje de esta parábola?

6. ¿Cuál es la ecuación de una parábola cuyo vértice es $(-1, 1)$ y cuyo eje es la recta $y = 1$? ¿Cuántas parábolas cumplen esas condiciones?

17-6. La gráfica de $y = Ax^2 + Bx + C$

En la sección 16-2 aprendimos a poner un polinomio cuadrático $Ax^2 + Bx + C$ en la forma $a(x - h)^2 + k$. A ésta la llamamos la forma canónica del polinomio. En la sección anterior aprendimos a dibujar la gráfica de la ecuación $y = a(x - h)^2 + k$. De modo que tenemos un método para representar rápidamente la gráfica de cualquier función cuadrática.

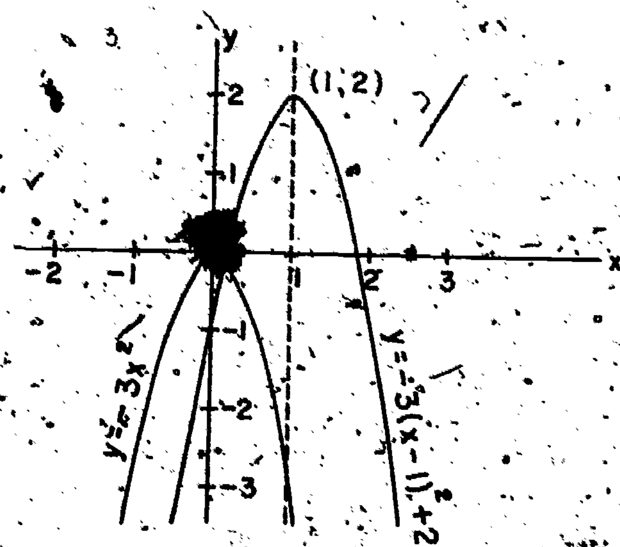
Ejemplo 1. Dibuja la gráfica de la función f definida por

$$f(x) = -3x^2 + 6x - 1.$$

Completando el cuadrado, obtenemos

$$-3x^2 + 6x - 1 = -3(x^2 - 2x + 1) - 1 + 3 = -3(x - 1)^2 + 2 .$$

La gráfica de $y = -3(x - 1)^2 + 2$ se obtiene de la de $y = -3x^2$ como se indica:



Para comprobar que el proceso de trasladar la gráfica de $y = -3x^2$, una unidad hacia la derecha y luego dos unidades hacia arriba, nos da realmente la gráfica de $y = -3(x - 1)^2 + 2$, podemos argumentar como sigue: Supongamos que (a, b) son las coordenadas de un punto de la gráfica cuya ecuación es

$$y = -3(x - 1)^2 + 2.$$

Entonces esas coordenadas deben satisfacer a la ecuación; es decir,

$$b = -3(a - 1)^2 + 2$$

es un enunciado cierto. Pero entonces

$$b - 2 = -3(a - 1)^2$$

es también un enunciado cierto. Este enunciado final afirma que el punto de coordenadas $(a - 1, b - 2)$ está en la gráfica de $y = -3x^2$. Pero, ¿cuáles son las posiciones relativas de los puntos $(a - 1, b - 2)$ y (a, b)? Partiendo de $(a - 1, b - 2)$, tenemos que trasladarnos 1 unidad hacia la derecha y 2 unidades hacia arriba para alcanzar el punto (a, b). Esto es precisamente lo que hicimos con cada punto de la gráfica de $y = -3x^2$ para llegar al punto correspondiente en la gráfica de $y = -3(x - 1)^2 + 2$.

Conjunto de problemas 17-6

1. Escribe la forma canónica y dibuja la gráfica de cada uno de los polinomios cuadráticos siguientes:

   (a) $x^2 - 6x + 10$ (d) $-x^2 - x + \frac{9}{4}$

   (b) $4x^2 + 4x - 9$ (e) $4x^2 + 4cx + c^2$

   (c) $5x^2 - 3$ (f) $5x^2 - 3x - \frac{11}{20}$

2. Para cada polinomio cuadrático del problema 1, determina los puntos (si los hay) en los que la gráfica cruza el eje x.

3. Demuestra el teorema siguiente: Dado cualquier polinomio cuadrático $Ax^2 + Bx + C$, existen números reales a, h, k tales que

   $$a(x - h)^2 + k = Ax^2 + Bx + C, \text{ para todo número real } x.$$

   Los números a, h, k están relacionados con los números A, B, C mediante los tres enunciados ciertos:

   $$a = A, \quad h = -\frac{B}{2A}, \quad k = \frac{4AC - B^2}{4A}.$$

*4. El problema de transformar un polinomio cuadrático, tal como $-2x^2 - 4x + 1$, en su forma canónica puede también tratarse del modo siguiente: Busquemos números a, h, k (si es posible) tales que

   $$a(x - h)^2 + k = -2x^2 - 4x + 1$$

   para todo número real x. Simplificando y agrupando los términos del miembro de la izquierda, se tiene

   $$ax^2 - 2ah\,x + (ah^2 + k) = -2x^2 - 4x + 1,$$

   para todo número real x. Ahora podemos ver que tenemos que determinar a, h, k de modo que

   $$a = -2, \quad -2ah = -4, \quad ah^2 + k = 1. \quad \text{(¿Por qué?)}$$

   Si $a = -2$, entonces "$-2ah = -4$" es equivalente a "$4h = -4$", es decir, a "$h = -1$". Además, si $a = -2$ y $h = -1$, entonces "$ah^2 + k = 1$" es equivalente a "$-2 + k = 1$", es decir, a "k = 3". Con $a = -2$, $h = -1$, y $k = 3$, tenemos

$$-2(x + 1)^2 + 3 = -2x^2 - 4x + 1,$$

para todo número real x.

Utilizando este método halla la forma canónica de cada uno de los siguientes polinomios:

(a) $3x^2 - 7x + 5$

(b) $5x^2 - 3x + \frac{13}{20}$

(c) $Ax^2 + Bx + C$, donde A, B, C, son números reales.

17-7. Soluciones de ecuaciones cuadráticas

Consideremos los tres polinomios cuadráticos

$$x^2 + 2x - 3,\ x^2 + 2x + 1,\ x^2 + 2x + 3,$$

y sus gráficas representadas en la figura 5.

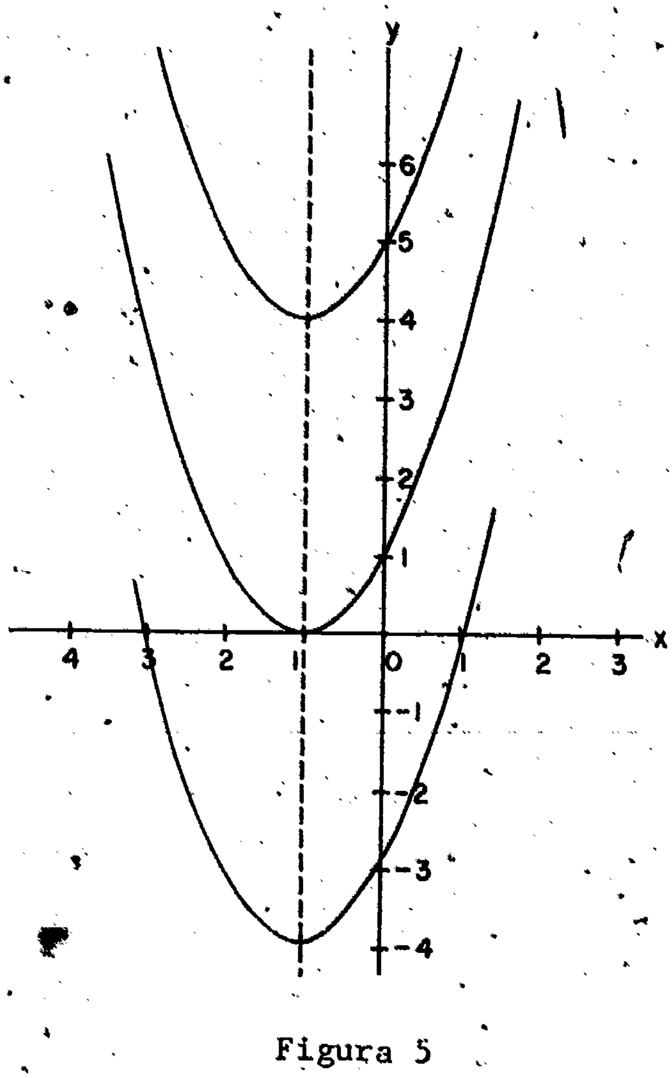


Figura 5

Observa que la gráfica de $y = x^2 + 2x - 3$ cruza el eje x en dos puntos; la de $y = x^2 + 2x + 1$, toca el eje x en un solo punto; y la gráfica de $y = x^2 + 2x + 3$ no interseca el eje x. ¿Cuál es la ordenada de cualquier punto del eje x? Otra manera de describir las intersecciones de esas gráficas con el eje x es: El conjunto de validez de

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \quad \text{es } \{-3, 1\},$$
$$\text{de} \quad x^2 + 2x + 1 = 0 \quad \text{es } \{-1\},$$
$$\text{de} \quad x^2 + 2x + 3 = 0 \quad \text{es } \emptyset.$$

En general, puesto que la gráfica de

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

es siempre una parábola (si $A \neq 0$), parece evidente que el conjunto de validez de la ecuación cuadrática

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

consistirá en ninguno, uno o dos números reales según que la parábola no interseque, toque o interseque el eje x.

Ya hemos aprendido a resolver una ecuación cuadrática cuyo miembro de la izquierda puede ser factorizado como un polinomio sobre los enteros. Ahora consideremos el polinomio cuadrático

$$x^2 + 2x - 1.$$

Sabemos que no puede factorizarse como polinomio sobre los enteros. (¿Por qué?) En el capítulo 12 aprendimos a escribirlo en esta otra forma:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 1 &= (x + 1)^2 - 2 \\ &= (x + 1)^2 - (\sqrt{2})^2, \end{aligned}$$

es decir, como diferencia de dos cuadrados. Por tanto, podemos factorizar $x^2 + 2x - 1$ como un polinomio sobre los números reales:

$$x^2 + 2x - 1 = \left((x + 1) + \sqrt{2}\right)\left((x + 1) - \sqrt{2}\right).$$

(Compruébalo efectuando la multiplicación)

Entonces

$$x^2 + 2x - 1 = 0 ,$$

$$(x + 1 + \sqrt{2})(x + 1 - \sqrt{2}) = 0 ,$$

$$x + 1 + \sqrt{2} = 0 \text{ ó } x + 1 - \sqrt{2} = 0 ,$$

$$x = -1 - \sqrt{2} \text{ ó } x = -1 + \sqrt{2} ,$$

son todos ellos enunciados equivalentes, y por tanto, el conjunto de validez de

$$x^2 + 2x - 1 = 0 \text{ es } \{-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}\}.$$

Este ejemplo nos sugiere un procedimiento general para decidir si una ecuación cuadrática tiene soluciones reales, y si es así, determinar las soluciones. Hemos mostrado que cualquier ecuación cuadrática

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

puede ser escrita en la forma canónica

$$a(x - h)^2 + k = 0.$$

Supongamos que a es positivo. Si así no fuera, podemos multiplicar ambos miembros por (-1). El caso en el cual k es un número positivo puede ser tratado rápidamente, porque sabemos que la gráfica de $a(x - h)^2 + k$ está toda ella por encima del eje x cuando a y k son positivos. Entonces no puede cruzar el eje x. Luego, no hay soluciones reales de la ecuación si $k > 0$.

Cuando $k = 0$, vemos que la gráfica de $a(x - h)^2$ toca el eje x en el punto $(h, 0)$. Luego, hay una solución real, si $k = 0$.

Queda, pues, el caso en que k es un número negativo. Entonces podemos escribir

$$a(x - h)^2 + k = a(x - h)^2 - (-k).$$

Si $k < 0$, ¿hay algún número real cuyo cuadrado sea $(-k)$? ¿Cómo factorizamos la diferencia de dos cuadrados? El resultado sería

$$a(x - h)^2 - (-k) = (\sqrt{a}(x - h) + \sqrt{-k})(\sqrt{a}(x - h) - \sqrt{-k})$$

así que, cuando k es negativo, el polinomio $a(x - h)^2 + k$ puede siempre factorizarse sobre los números reales, y la ecuación tiene dos soluciones reales.

Ejemplo 1. Factoriza (a) $2x^2 + 3x - 1$, (b) $x^2 + 3x + 4$.

$$\text{(a)} \quad 2x^2 + 3x - 1 = 2(x + \tfrac{3}{4})^2 - \tfrac{17}{8} \qquad \text{(Comprueba esto)}$$

$$= 2\left((x + \tfrac{3}{4})^2 - \tfrac{17}{16}\right)$$

$$= 2\left((x + \tfrac{3}{4})^2 - \left(\tfrac{\sqrt{17}}{4}\right)^2\right)$$

$$= 2\left(x + \tfrac{3}{4} + \tfrac{\sqrt{17}}{4}\right)\left(x + \tfrac{3}{4} - \tfrac{\sqrt{17}}{4}\right).$$

$$\text{(b)} \quad x^2 + 3x + 4 = (x + \tfrac{3}{2})^2 + \tfrac{7}{4}. \qquad \text{(Comprueba estó)}$$

Aquí k es un número positivo, y no podemos factorizar esta suma de dos cuadrados como polinomio sobre los números reales. En efecto, $x^2 + 3x + 4$ nunca puede tomar el valor 0 para ningún valor real de x, porque $x^2 + 3x + 4$ es la suma de un número no negativo $(x + \frac{3}{2})^2$ y un número positivo $\frac{7}{4}$.

Ejemplo 2. Resuelve la ecuación $x - 3x^2 + 7 = 0$.

Las ecuaciones $x - 3x^2 + 7 = 0$,

$$3x^2 - x - 7 = 0,$$

$$3(x - \tfrac{1}{6})^2 - \tfrac{85}{12} = 0, \qquad \text{(¿Por qué?)}$$

$$(x - \tfrac{1}{6})^2 - \tfrac{85}{36} = 0, \qquad \text{(¿Por qué?)}$$

$$\left(x - \tfrac{1}{6} + \tfrac{\sqrt{85}}{6}\right)\left(x - \tfrac{1}{6} - \tfrac{\sqrt{85}}{6}\right) = 0,$$

$$x - \tfrac{1}{6} + \tfrac{\sqrt{85}}{6} = 0 \quad \text{ó} \quad x - \tfrac{1}{6} - \tfrac{\sqrt{85}}{6} = 0,$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{85}}{6} \quad \text{ó} \quad x = \frac{1 + \sqrt{85}}{6},$$

son todas equivalentes. Por consiguiente, el conjunto de validez de

$$x - 3x^2 + 7 = 0 \quad \text{es} \quad \left\{\frac{1 - \sqrt{85}}{6}, \frac{1 + \sqrt{85}}{6}\right\}.$$

<u>Conjunto de problemas 17-7</u>

1. Factoriza los siguientes polinomios cuadráticos sobre los números reales, cuando sea posible:

   (a) $t^2 - 10t + 26$

   (b) $6x^2 - x - 12$

   (c) $\frac{1}{2}x^2 + 4x + 6$

   (d) $4y^2 + 2y + \frac{1}{4}$

   (e) $x^2 + 7x + 14$

   (f) $2 - 2z - z^2$

   (g) $1 - 5x^2$

   (h) $7x^2 - \frac{14}{3}x + \frac{25}{9}$

   (i) $5v^2 - 5v - \frac{11}{4}$

   (j) $x^2 + (a + b)x + ab$, a y números reales cualesquiei

2. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

   (a) $4 - 3x^2 = 0$

   (b) $4 - x - 3x^2 = 0$

   (c) $4 - x + 3x^2 = 0$

   (d) $s^2 - s - \frac{1}{2} = 0$

   (e) $\frac{4}{5}t^2 + \frac{4}{5}t + \frac{1}{5} = 0$

   (f) $\frac{1}{3}y^2 + 2y - 3 = 0$

   (g) $-2y^2 + y - \frac{1}{2} = 0$

   (h) $3n^2 = 7n$

3. Considera el polinomio cuadrático en su forma canónica, $a(x - h)^2 + k$, donde a, h, k son números reales y $a \neq 0$.

   (a) Establece una regla para decidir si este polinomio sob los números reales puede factorizarse o no.

   (b) Si a, h, k son enteros, ¿qué condiciones deben cumpl dichos números para garantizar que el polinomio sobre los enteros puede ser factorizado?

   (c) Establece una regla para decidir si el conjunto de validez de

$$a(x - h)^2 + k = 0$$

contiene ninguno, uno o dos números reales.

4. Traduce los siguientes en enunciados abiertos y resuelve:
   (a) El perímetro de un rectángulo es de 12 pulgadas y su área es de 7 pulgadas cuadradas. ¿Cuál es el número x de pulgadas de la longitud de su lado mayor?
   (b) Un lado de un triángulo rectángulo tiene x pulgadas y es una pulgada más largo que el segundo lado, pero es dos pulgadas más corto que la hipotenusa. Determina x.
   (c) La suma de dos números es 5 y su producto es 9. ¿Cuáles son dichos números?

5. Considera el polinomio cuadrático general $Ax^2 + Bx + C$. Demuestra que
   (a) $Ax^2 + Bx + C = A\left((x + \frac{B}{2A})^2 - \frac{B^2 - 4AC}{4A^2}\right)$
   (b) Si $B^2 - 4AC < 0$, entonces $Ax^2 + Bx + C = 0$ no tiene solución real.
   (c) Si $B^2 - 4AC = 0$, entonces $Ax^2 + Bx + C = 0$ tiene una solución real, $x = -\frac{B}{2A}$.
   (d) Si $B^2 - 4AC > 0$, entonces $Ax^2 + Bx + C = 0$ tiene dos soluciones reales:

$$x = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad x = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

(Este último enunciado se llama la <u>fórmula cuadrática</u> para calcular las soluciones de la ecuación cuadrática.)

INDICE ALFABETICO

Los números indican las páginas en el texto.

a cuadrado, 44
abscisa, 416
agrupación de términos, 323
aproximación, 299
    de $\sqrt{x}$, 306
asociativa
    propiedad
        de la multiplicación, 27, 71, 153, 202
        de la suma, 24, 71, 130, 141, 201
base, 265
campo de valores de una función, 532
cardinal, número, 2
cero
    exponentes cero, 272
    no tiene recíproco, 173
    propiedad aditiva del, 57, 72, 131, 141
    propiedad multiplicativa del, 58, 72, 146, 151, 178
clausura
    propiedad de, 17, 61, 71, 201
cociente, 364
cociente indicado, 234
coeficiente, 318
comparación
    propiedad de, 105, 116, 185, 202
compleción del cuadrado, 335, 373, 519
conjunto, 1
    de soluciones, 134
    de validez, 45, 56
        de un sistema, 480
    elemento de, 1
    finito, 5
    infinito, 5
    miembro de, 1
    nulo, 2
    vacío, 2
conmutativa
    propiedad
        de la multiplicación, 28, 71, 146, 151, 201
        de la suma, 26, 71, 130, 141, 201
constante, 318
constante de proporcionalidad, 450
contiene, 438
contradicción, 173
coordenada, 9, 416
correspondencia, 8
Criba de Eratóstenes, 252, 253
cuadrado, 265
    cuadrado de un número, 44
    cuadrado de un número distinto de cero es positivo, 197, 198
cuadrado perfecto o exacto, 287, 331, 373

cubo, 265
demostración, 137
    indirecta, 173
    por contradicción, 173, 288
denominador, 222
    racionalización de, 296
descomposición en factores primos, 253
descomposición sobre los enteros positivos, 250
desigualdades equivalentes, 392
diferencia de cuadrados, 326, 373
distancia desde b hasta a, 219
distancia entre, 113, 219
distributiva
    propiedad, 31, 66, 67, 71, 146, 155, 202, 298, 320, 373
dividendo, 364
divisible por, 246
división, 223, 240
    comprobación, 224
    de polinomios, 363, 364
    indicada, 234
divisor, 364
dominio, 38, 102
dominio de definición, 532
ecuación, 50
    cuadrática, 521, 556
ecuaciones fraccionarias, 399
ecuaciones que contienen expresiones factorizadas, 395
eje, 516
eje de coordenadas, 417
elemento de un conjunto, 1
elemento identidad
    para la multiplicación, 58, 162, 202
    para la suma, 57, 161, 201
elevación al cuadrado en una ecuación, 402
enteros, 98, 250
enunciado, 22, 41
    abierto, 42, 56, 82
    compuesto, 56
        con la conjunción o, 53
        con la conjunción y, 52
    numérico, 22
enunciados abiertos equivalentes, 383
enunciados equivalentes, 168, 169, 198
es aproximadamente igual a, 302
estructura, 201
existencia del inverso multiplicativo, 163
exponentes, 265
    cero, 272
    negativos, 272
expresión racional, 355

factor de un entero, 246
factor propio, 246
factores de sumas, 262
factores y divisibilidad, 245
factorización, 350
factorización de un polinomio, 316, 317
forma canónica, 519, 553
forma en y, 425
fórmula cuadrática, 561
fracciones, 9, 231
    resta de, 256
    suma de, 234, 256
frase, 21
    abierta, 42, 77
    numérica, 21
función, 532
    cuadrática, 548
    lineal, 546
grado de un polinomio, 318
gráfica, 12, 427
    de enunciados abiertos con dos variables, 421
    de enunciados abiertos que contienen el valor absoluto, 461
    de enunciados abiertos que contienen solamente enteros, 452
    de funciones, 540
    de polinomios cuadráticos, 509
    de un enunciado, 55, 56
    del conjunto de validez de un enunciado abierto, 48
    del polinomio, 450
igualdad
    propiedad aditiva de, 133, 141
    propiedades de, 205
    signo de, 19
inecuaciones polinómicas, 406
intersección con el eje y, 439
inverso, 180
    aditivo, 135, 201
    multiplicativo, 162, 163, 171, 202
lineal en x, 449
mayor que, 49, 185
mayor que o igual a, 54
menor que, 49, 102, 116, 185
menor que o igual a, 54
método de reducción, 491
método de sustitución, 497
miembro de un conjunto, 1
mínimo común denominador, 257
mínimo común múltiplo, 59, 256
monomio, 317

multiplicación
    de fracciones, 228
    de números reales, 145
    de un número real por -1, 155
    en la recta numérica, 14
múltiplo, 5
    mínimo común, 59, 256
nombre más sencillo para un número, 240
nombres corrientes, 19, 228
notación funcional, 536
numerador, 222
numerales, 19
número
    cardinal, 2
    de la aritmética, 11
    irracional, 98, 116, 287, 299
        $\sqrt{2}$ es irracional, 287
    natural, 2
    negativo, 116
    negativo real, 98
    positivo, 113
    positivo real, 98
    primo, 250, 252
    racional, 9, 98, 287
    real, 98, 116
operación binaria, 24, 109, 201
operaciones básicas, 180
opuestos, 107, 108, 110, 117, 209
    propiedad aditiva de, 131, 141
ordenación
    relación de, 185
ordenada, 416
ordenada en el origen, 439
par ordenado, 417
parábola, 516, 561
pendiente, 440
plano numérico, 415
polinomio
    cuadrático, 318, 336, 373, 509
    sobre los enteros, 314
    sobre los números racionales, 350
    sobre los números reales, 350
potencia, 265
producto de dos números reales (definición), 147
producto indicado, 19
propiedad, 23
    aditiva, 202, 205
        asociativa, 201
        conmutativa, 201
        de la igualdad, 133, 141

de la ordenación, 187, 188, 190
de los opuestos, 131, 141
del cero, 57, 72, 131, 141
elemento identidad, 162, 201
asociativa
de la multiplicación, 27, 71, 153, 202
de la suma, 24, 71, 130, 141, 201
conmutativa
de la multiplicación, 28, 71, 146, 151, 201
de la suma, 26, 71, 130, 141, 201
de clausura
de la multiplicación, 17, 61, 71, 201
de la suma, 61, 71, 201
de comparación, 105, 116, 185, 202
distributiva, 31, 66, 67, 74, 146, 154, 202, 298, 320, 373
multiplicativa, 202, 205
asociativa, 27, 71, 153
conmutativa, 28, 71, 146, 151, 201
de la igualdad, 167
de la ordenación, 195, 196
del cero, 58, 72, 146, 151, 178
del uno, 58, 72, 151, 235
elemento identidad, 58, 162, 202
usos de, 156
transitiva, 106, 118, 185, 202, 205
propiedades
de la comparación, 105, 116, 185, 202
de la igualdad, 205
de la multiplicación (V. propiedad multiplicativa)
de la suma (V. propiedad aditiva)
de los exponentes, 270, 271, 272
fundamentales, 200
proporcional, 495
racionalización del denominador, 296
radicales, 286, 290, 294
raíces, 283
raíz
cuadrada, 283, 284, 300
aproximar $\sqrt{x}$, 306
método de tanteos, 300
positiva, 283
$\sqrt{2}$ es irracional, 287
cuarta, 286
cúbica, 285
enésima, 286
razón, 232, 495
recíprocos, 172, 175
recta numérica, 7, 9, 97, 101
reduciendo términos, 158
reductio ad absurdum, 173

reflexividad, 205
relación binaria, 185
relación de ordenación, 185
resolver, 134
resta
    definición de, 209, 240
    de fracciones, 256
    en la recta numérica, 240
    en términos de distancia, 218
    no es asociativa, 213
resto, 364
satisfacer a un enunciado, 422
si y solamente si, 169
signo de igualdad, 19
símbolo " ≈ ", 302
sistemas de ecuaciones, 479
sistemas de inecuaciones, 500
solución de un enunciado, 422
soluciones, 134
    conjunto de, 134
    de ecuaciones, 166
subconjunto, 3
    propio, 14
sucesor, 7
suma
    de expresiones racionales, 359
    de fracciones, 256
    de números reales, 121, 124, 127, 140
    en la recta numérica, 14
    indicada, 19
sustracción (V. resta)
teorema, 138
Teorema Fundamental de la Aritmética, 256
términos de una frase, 157
traducción
    de la igualdad a la ordenación, 191
    de la ordenación a la igualdad, 191, 193
transitiva
    propiedad, 106, 116, 185, 202, 205
único, 137, 163
uno, propiedad multiplicativa del, 58, 72, 151
validez, conjunto de, 45, 56, 166, 167
    de un sistema, 480
valor absoluto, 112, 113, 114, 115, 117
valor de una función, 536
varía de manera directamente proporcional a, 450, 451
varía de manera inversamente proporcional a, 451
variable, 38, 77, 102
    valor de, 38
variación
    horizontal, 440
    vertical, 440
vértice, 516