DOCUMENT RESUME

ED 186 220 SE 030 432

AUTHOR Allen, Frank B.; And Others
TITLE Matematica Para La Escuela Secundaria, Primer Curso de Algebra (Parte 1), Comentario. Traduccion Preliminar de la Edicion en Ingles Revisada. (Mathematics for High School, First Course in Algebra, Part 1, Teacher's Commentary. Translation of the Revised English Edition).
INSTITUTION Stanford Univ., Calif. School Mathematics Study Group.
SPONS AGENCY National Science Foundation, Washington, D.C.
PUB DATE 64
NOTE 328p.; For related documents in Spanish, see SE 030 431-434. Contains occasional light and broken type.
LANGUAGE Spanish

EDRS PRICE MF01/PC14 Plus Postage.
DESCRIPTORS *Algebra; *Bilingual Education; Instructional Materials; *Mathematics Curriculum; *Mathematics Instruction; *Secondary Education; *Secondary School Mathematics; Teaching Guides
IDENTIFIERS *School Mathematics Study Group

ABSTRACT

This is the teacher's commentary for part one of a three-part SMSG algebra text for high school students. The principal objective of the text is to help the student develop an understanding and appreciation of some of the algebraic structure as a basis for the techniques of algebra. Chapter topics include congruence; numbers and variables; operations; real numbers; and properties of addition, multiplication, and division. (RH)

ED186220

GRUPO DE ESTUDIO DE LA MATEMATICA ESCOLAR

MATEMATICA PARA LA ESCUELA SECUNDARIA

PRIMER CURSO DE ALGEBRA (Parte 1)

Comentario

(Traducción preliminar de la edición en inglés revisada)

SE 030 432

SMSG

MATEMATICA PARA AL ESCUELA SECUNDARIA

Primer Curso de Algebra (Parte 1)

Comentario

(Traducción preliminar de la edición en inglés revisada)

Texto preparado bajo la supervisión del personal para las muestras de libros de texto, del Grupo de Estudio de la Matemática Escolar:

Frank B. Allen, Escuela Secundaria del Pueblo de Lyons

Edwin C. Douglas, Escuela Taft

Donald E. Richmond, Colegio Williams

Charles E. Rickart, Universidad de Yale

Henry Swain, Escuela Secundaria del Pueblo de New Trier

Robert J. Walker, Universidad de Cornell

El apoyo financiero para el Grupo de Estudio de la Matemática Escolar provino de la Fundación Nacional de Ciencias.

A continuación se da la lista de nombres de todos los que participaron en alguna o algunas sesiones de redacción y en las cuales los siguientes textos del SMSG fueron preparados: Primer Curso de Algebra, Geometría, Matemáticas Intermedias, Funciones Elementales e Introducción al Algebra de las Matrices.

H.W. Alexander, Colegio Earlham
F.B. Allen, Escuela Secundaria Lyons Township, La Grande, Illinois
Alexander Beck, Escuela Secundaria Olney, Filadelfia, Pensilvania
E.F. Beckenbach, Universidad de California en Los Angeles
E.G. Begle, Grupo de Estudio de la Matemática Escolar, Universidad de Yale
Paul Berg, Universidad de Stanford
Emil Berger, Escuela Secundaria Monroe, St. Paul Minnesota
Arthur Bernhart, Universidad de Oklahoma
R.H. Bing, Universidad de Wisconsin
A.L. Blakers, Universidad del Oeste de Australia
A.A. Blank, Universidad de Nueva York
Shirley Boselly, Escuela Secundaria Franklin, Seattle, Washington
K.E. Brown, Departamento de Salubridad, Educación y Asistencia Pública, Washington, D.C.
J.M. Calloway, Colegio Carleton
Hope Chipman, Escuela Secundaria de la Universidad de Ann Arbor, Michigan
R.R. Christian, Universidad de British Columbia
R.J. Clark, Escuela de St. Paul, Concord, Nueva Hampshire
P.H. Daus, Universidad de California en Los Angeles
R.B. Davis, Universidad de Siracusa
Charles DePrima, Instituto Tecnológico de California
Mary Dolciani, Colegio Hunter
Edwin C. Douglas, Escuela The Taft, Watertown, Connecticut
Floyd Downs, Escuela Secundaria del Este, Denver, Colorado
E.A. Dudley, Escuela Secundaria de North Haven, North Haven, Conn.
Lincoln Durst, Instituto The Rice
Florence Elder, Escuela Secundaria de West Hempstead, West Hempstead, Nueva York
W.E. Ferguson, Escuela Secundaria Newton, Newtonville, Massachusetts
N.J. Fine, Universidad de Pensilvania
Joyce D. Fontaine, Escuela Secundaria de North Haven, North Haven, Conn.
F.L. Friedman, Instituto Tecnológico de Massachusetts
Esther Gassett, Escuela Secundaria de Claremore, Claremore, Oklahoma
R.K. Getoor, Universidad de Washington
V.H. Haag, Colegio Franklin y Marshall
R.R. Hartman, Escuela Edina-Morningside de Ultimo Ciclo Secundario, Edina, Minnesota
M.H. Heins, Universidad de Illinois
Edwin Hewitt, Universidad de Washington
Martha Hildebrandt, Escuela Secundaria Proviso Township, Maywood, Illinois
R.C. Jurgensen, Academia Militar de Culver, Culver, Indiana
Joseph Lehner, Universidad del Estado de Michigan
Marguerite Lehr, Colegio Bryan Mawr
Kenneth Leisenring, Universidad de Michigan
Howard Levi, Universidad de Columbia
Eunice Lewis, Escuela Secundaria de Laboratorio de la Universidad de Oklahoma
M.A. Linton, Escuela William Penn Charter, Filadelfia, Pensilvania
A.E. Livingston, Universidad de Washington
L.H. Loomis, Universidad de Harvard
R.V. Lynch, Academia Phillips Exeter, Exeter, Nueva Hampshire
W.K. McNabb, Escuela Hockaday, Dallas, Texas
K.G. Michaels, Escuela Secundaria de North Haven, North Haven, Conn.
E.E. Moise, Universidad de Michigan

- E.P. Northrop, Universidad de Chicago
- O.J. Peterson, Colegio para Maestros del Estado de Kansas, Emporia, Kansas
- B.J. Pettis, Universidad de Carolina del Norte
- R.S. Pieters, Academia Phillips, Andover, Massachusetts
- H.O. Pollak, Laboratorios Bell Telephone
- Walter Prenowits, Colegio Brooklyn
- G.B. Price, Universidad de Kansas
- A.L. Putnam, Universidad de Chicago
- Persis O. Redgrave, Academia Libre de Norwich, Norwich, Connecticut
- Mina Rees, Colegio Hunter
- D.E. Richmond, Colegio Williams
- C.E. Rickart, Universidad de Yale
- Harry Ruderman, Escuela Secundaria del Colegio Hunter, Ciudad de Nueva York
- J.T. Schwartz, Universidad de Nueva York
- O.E. Stanaitis, Colegio St. Olaf
- Robert Starkey, Escuelas Secundarias Cubberly, Palo Alto, California
- Phillip Stucky, Escuela Secundaria Roosevelt, Seattle, Washington
- Henry Swain, Escuela Secundaria New Trier, Township, Winnetka, Ill.
- Henry Syer, Escuela de Kent, Kent, Connecticut
- G.B. Thomas, Instituto Tecnológico de Massachusetts
- A.W. Tucker, Universidad de Princeton
- H.E. Vaughan, Universidad de Illinois
- John Wagner, Universidad de Texas
- R.J. Walker, Universidad de Cornell
- A.D. Wallace, Universidad de Tulane
- E.L. Walters, Escuela William Penn de Ultimo Ciclo Secundario, York, Pensilvania
- Warren White, Escuela Secundaria del Norte, Sheboygan, Wisconsin
- D.V. Widder, Universidad de Harvard
- William Wooton, Colegio Pierce de Primer Ciclo Universitario, Woodland Hills, California
- J.H. Zant, Universidad del Estado de Oklahoma

Proyecto de Traducción al Español

Comisión Consultiva

Edward G. Begle, Universidad de Stánford

Howard F. Fehr, Universidad de Columbia

Mariano García, Universidad de Puerto Rico

Max Kramer, San Jose State College

TABLA DE MATERIAS

Capítulo

PREFACIO

El objetivo principal de este Primer curso de álgebra es ayudar al estudiante a desarrollar una comprensión y aprecio de parte de la estructura algebraica del sistema de los números reales, y el empleo de esta estructura como base para las técnicas del álgebra. Más específicamente, nos interesa una exploración de las propiedades de la suma y la multiplicación de los números reales y sus propiedades de ordenación. Más adelante en el curso tendremos la ocasión de considerar polinomios, los que, como una clase, también manifiestan una estructura algebraica derivada de la circunstancia de que poseen algunas propiedades (pero no todas) de las del conjunto anterior.

Instamos al maestro a permanecer alerta sobre estas propiedades a medida que aparezcan y reaparezcan a lo largo del curso, y a tener en cuenta que forman la base de toda la estructura algebraica que esperamos descubrir en el sistema de los números reales.

El objetivo principal de este Comentario para el maestro es ofrecerle al maestro toda la ayuda posible mientras dirige al estudiante hacia el objetivo expuesto anteriormente. Al igual que instamos al estudiante a que lea su texto cuidadosamente, también sugerimos al maestro un uso amplio de este comentario.

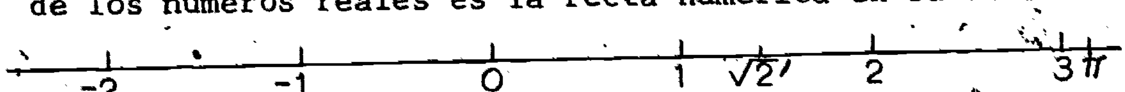
El texto se ha escrito de manera especial con el fin de dar igual ayuda al maestro que al estudiante. En primer término, está trazado, por decirlo así, en forma "espiral", de manera que virtualmente todo concepto presentado se repite más adelante en forma más amplia, con un significado más profundo en cada repetición. Incidentalmente, la forma espiral sugiere que el maestro no necesita esperar de su clase el dominio absoluto de todos los detalles de un tema para poder proseguir, ya que hallará la oportunidad de ayudar a su clase a limar las asperezas cuando el tema surja de nuevo. Su interés principal debe ser más bien que el estudiante tenga la confianza suficiente para proseguir su tarea sin inquietud alguna, lo cual puede señalarle el ritmo que debe seguir el curso.

Segundo, el texto y los ejercicios están correlacionados de una manera complementaria, por lo que a menudo los ejercicios continúan el desarrollo de ideas presentadas en los comienzos del texto y también insinúan los conceptos nuevos expuestos más adelante. De lo anterior se desprende que el estudiante tendrá necesidad de leer el texto regularmente y con entendimiento considerable. Creemos que es razonable esperar esto de los estudiantes para los cuales se proyectó este curso--aquellos "con aptitud para estudios universitarios" (no necesariamente los que se proponen cursar estudios universitarios) o, es decir, el grupo académico comprendido en la mitad a la tercera parte superior de la población escolar.

Quizás la manera más deseable de estudiar cualquier sistema algebraico por una persona que tenga la madurez matemática suficiente, sería comenzar con un conjunto de axiomas que describa el sistema y entonces sistemáticamente desarrollar el sistema mediante la formulación de definiciones, la demostración de teoremas, la construcción de ejemplos, etc. hasta donde lo permita la habilidad del individuo. Este es el punto de vista puramente deductivo. La dificultad de este enfoque consiste en que el estudiante debe poseer los conocimientos y la experiencia suficientes para construir un modelo provisional del sistema de axiomas o por lo menos pueda construirlo con alguna ayuda. Sin esto, trabajar con los axiomas degenera en excesivo formalismo. El estudiante de la geometría euclídea puede lograr mayor éxito con un enfoque puramente deductivo, debido a que ya tiene una intuición geométrica bastante desarrollada obtenida por su familiaridad con el espacio tridimensional. Sin embargo, es bastante evidente que la intuición que posee el estudiante de noveno grado acerca de los números reales no es adecuada para soportar un tratamiento axiomático. Por este motivo, intentamos ser bastante informales e intuitivos, pero <u>no</u> incorrectos.

Conviene establecer, tan explícitamente como sea posible, exactamente lo que se supone en relación con el conocimiento sobre el sistema de los números reales poseído por el estudiante cuando se inicia en el noveno grado. Las suposiciones siguientes parecen ajustarse suficientemente a la realidad y nos proporcionan un punto de partida:

<u>Suposiciones</u>: El estudiante conoce más o menos el <u>tipo</u> de objetos llamados números reales. Esto incluye los reales negativos (a base de experiencias tales como las referentes a ganancias y pérdidas, grados bajo cero en un termómetro, etc.) a la vez que algunos irracionales tales como $\sqrt{2}$ y π. La representación adecuada para la clase de los números reales es la recta numérica en su totalidad,



en la que se supone que hay un número para cada punto y recíprocamente. Observemos que la relación de ordenación está implícita en esta representación, a pesar de que las operaciones de suma y multiplicación están ausentes virtualmente.

Probablemente, de su estudio de la aritmética, el estudiante tiene algunas nociones vagas relacionadas con la estructura algebraica. Esto, desde luego, se refiere principalmente a los números no negativos. Sin embargo, el estudiante tiene también alguna noción acerca de sumar números negativos y de multiplicar números negativos por un número positivo (sumando pérdidas, perdiendo cierta cantidad cada día durante un número dado de días, etc.)

Algunos estudiantes que han estudiado el texto del Grupo de Estudio de la Matemática Escolar para el grado 7 ó el 8 ó ambos, sabrán más acerca de los números reales y de la estructura algebraica que lo descrito anteriormente. Tales estudiantes podrán estudiar algunas partes de este curso en menos tiempo. Sin embargo, no encontrarán parte alguna del material lo suficientemente reiterativa como para justificar su omisión.

Con las suposiciones establecidas anteriormente como punto de partida, se pone de manifiesto que es necesario hacer dos cosas:

(1) Extender las operaciones de suma y multiplicación a la clase de los números reales en su totalidad. (Es necesario hacer hincapié de nuevo en nuestro punto de vista de que ya tenemos la clase de todos los números reales y de que ya tenemos las operaciones de suma y multiplicación definidas para los números reales no negativos, ya que estos números no son ni más ni menos que los llamados "números de la aritmética". Este punto de vista evita muchas de las dificultades con que se tropieza generalmente al "presentar" los números negativos, etc.)

(2) Estudiar con detalle el sistema de los números reales a fin de destacar su estructura algebraica. Aquí la guía siempre es el uso de las propiedades fundamentales de la suma y la multiplicación y de la ordenación. Es necesario examinar de nuevo las operaciones de la aritmética con el propósito de preparar el camino para "descubrir" que cada propiedad es válida para los números reales. Después de haber obtenido algunas propiedades, podemos entonces demostrar algunos teoremas sencillos y así trabajar gradualmente hacia el enfoque deductivo.

Resulta deseable efectuar una parte de (2) antes que (1) ya que un conocimiento de las propiedades que deben tener la suma y la multiplicación hace considerablemente más sencillo el motivar la extensión de estas operaciones a los números negativos. Así, pues, decidimos comenzar con un estudio detallado de la estructura algebraica de los <u>números reales no negativos</u>, basándonos en el conocimiento que ya tenemos de la aritmética. De esta manera podemos descubrir y enunciar en forma precisa las propiedades conmutativa, asociativa, y distributiva usuales para la suma y la multiplicación, al igual que las propiedades de los números 0 y 1, antes de considerar en detalle la aritmética de los números negativos.

Hasta ahora hemos hablado de la estructura algebraica. No debemos perder de vista la circunstancia de que la destreza técnica, que no es un fin en sí misma, <u>es</u> importante. Un gran número de ejercicios es esencial para lograr las técnicas necesarias con el simbolismo algebraico, pero estas técnicas deben estar ligadas a las ideas de las que se deduce su validez. De esta manera, el estudiante no tendrá que desaprender sus conceptos ni sus actitudes en el futuro.

Juzgamos que es posible relacionar las técnicas necesarias con los conceptos de nuestro sistema numérico en torno al cual estamos construyendo el curso. Nos proponemos conservar una íntima relación entre las técnicas y los conceptos.

A continuación aparece un bosquejo de los detalles sobresalientes del curso:

1. Se comienza con una introducción informal a conjuntos de números y manipulaciones con ellos. Los ejemplos muestran, a la vez, algunas propiedades interesantes y quizás sorprendentes de conjuntos de números de la aritmética. Otro aspecto de estos números se obtiene asociándolos con puntos de una recta. Utilizamos este artificio de "representar" conjuntos de números para ilustrar o justificar muchos conceptos a lo largo del curso.

2. Luego se invita al estudiante a recordar los diversos nombres distintos (numerales) que pueden darse a un número, y aprende él a redactar enunciados que expresan la circunstancia de que dos numerales sirven de nombre para el mismo número. Entonces de sus experiencias con números se extraen la propiedad asociativa y la propiedad distributiva, que conecta las operaciones de suma y multiplicación. También, obtiene las propiedades de los números 0 y 1 como las identidades respectivas para estas operaciones. Observemos que en esta etapa, estas propiedades se consideran para los números no negativos solamente. A este nivel se introducen las variables como numerales para representar números no especificados.

3. Se aprende el lenguaje de los enunciados--igualdades, desigualdades y enunciados compuestos, y se definen los enunciados abiertos. Se presenta la idea del conjunto de validez de un enunciado abierto, es decir, el conjunto de los valores de la variable para los cuales el enunciado es cierto, y se construye la gráfica del conjunto de validez. Entonces se enuncian formalmente las propiedades fundamentales de los números como enunciados abiertos.

4. El estudiante aprende a traducir del español al álgebra y vice versa, y así comienza a relacionarse con los "problemas verbales", que incluyen tanto ecuaciones como inecuaciones.

5. Ahora se considera la mitad negativa de la recta numérica. Se dan nombres a los puntos a la izquierda del cero, y definimos los opuestos, el valor absoluto, y las relaciones de ordenación. El conjunto de números asignados a los puntos de la recta numérica en su totalidad se llama el conjunto de los <u>números</u> <u>reales</u>.

6. La suma para los números reales se fundamentará en los principios siguientes: Debe ser consistente con la suma para los números positivos, debe continuar satisfaciendo a las leyes fundamentales mencionadas anteriormente en 2, y debe estar en conformidad con nuestra intuición de la suma. Vemos que $a + (-a) = 0$, y demostramos nuestro primer teorema: Si $x + y = 0$, entonces $y = -x$. Nos atrae la idea de tener teoremas en el primer curso de álgebra, pero ciertamente esperamos que el énfasis en ellos varíe de clase en clase.

7. La multiplicación se introduce en conformidad con los mismos principios que se usaron para la suma. Si deseamos que la propiedad distributiva continúe siendo

16

válida, entonces el producto de dos números negativos tiene que ser positivo; este es el fundamento más sólido que conocemos para la definición de la multiplicación de los números reales.

8. La relación $a < b$ se definió anteriormente en la recta numérica para los números positivos, y se extendió en 5 a todos los números reales. La propiedad de comparación y la transitiva se enunciaron para la ordenación. Ahora se enuncia la propiedad aditiva de la ordenación, y se demuestran algunas consecuencias de esta propiedad fundamental: $a < b$ si y sólo si existe un número positivo c tal que $a + c = b$; si $a < b$ y además $0 < c$, entonces $ac < bc$; si $a < b$ y además $c < 0$, entonces $bc < ac$. En esta etapa, se resumen las propiedades fundamentales de las operaciones con los números reales. La estructura del álgebra descansa en estas propiedades.

9. La resta y la división no son operaciones nuevas con propiedades independientes, sino que se definen como sumar el opuesto, y multiplicar por el recíproco. A propósito, no hay una sección separada acerca de las fracciones. Se practican mucho a lo largo del curso, con una dosis concentrada de ejercicios en esta etapa cuando ya la técnica calculatoria está completa.

10. Una definición cuidadosa de "factor" requiere que se establezca lo que se desea aceptar como un factor - es decir, "sobre qué" se está factorizando. Primero factorizamos enteros positivos sobre enteros positivos, y demostramos algunos teoremas acerca de los factores. Aquí encajan naturalmente las leyes sencillas de los exponentes.

11. Ahora el estudiante está preparado para una definición de "raíz" y una demostración de que $\sqrt{2}$ no es un

17

número racional. Entonces el trabajo ulterior con radicales conduce a las operaciones conocidas con ellos. Empleamos el método de aproximación para extraer raíces cuadradas.

12. Podemos factorizar polinomios en otros polinomios con coeficientes enteros o bien con coeficientes reales arbitrarios; se debe dejar abierta la posibilidad de coeficientes que no sean reales. Un polinomio se piensa como el resultado de aplicar repetidamente la suma y la multiplicación a números reales y a un cierto número de variables. La factorización de polinomios tiene un gran parecido con la factorización anterior de enteros y conduce a las soluciones de ciertas ecuaciones cuadráticas.

13. La solución de ecuaciones e inecuaciones con una variable se basa en buscar maneras de transformar tales ecuaciones e inecuaciones, mediante operaciones que dejen invariantes los conjuntos de soluciones, en ecuaciones o inecuaciones cuyos conjuntos de soluciones sean obvios. Este proceso se inició en 7 para las ecuaciones y ahora se extiende a todos los enunciados. Cuando una operación no da lugar a un enunciado equivalente, entonces debemos permitir que los conjuntos de soluciones aumenten, y pueden resultar soluciones "extrañas". El concepto de valor absoluto proporciona algunos buenos ejemplos.

14. Se introducen las coordenadas y las gráficas.

15. Se aplican las gráficas para hallar conjuntos de soluciones de ecuaciones e inecuaciones con dos variables lo mismo que en los casos anteriores.

16. Se utiliza un sistema de coordenadas para estudiar los polinomios cuadráticos. Entonces las ecuaciones cuadráticas se resuelven cuando los polinomios cuadráticos

correspondientes se pueden factorizar sobre el conjunto de los números reales.

17. Hay muchas maneras de definir una asociación de un conjunto de números con otro. Por ejemplo, una gráfica, una tabla de pares, una fórmula, una descripción verbal nos ofrecen una tal asociación. Lo que es importante es la asociación, no la forma en que se define; y una asociación tal es lo que queremos decir cuando hablamos de una función. Así, pues, el concepto de función unifica todos los conceptos de operaciones, correspondencias, ecuaciones y expresiones algebraicas.

Hemos tratado de presentar un panorama sucinto de la naturaleza de este curso. Ahora desearíamos hacer algunos comentarios acerca de la manera de usar el texto y el comentario para el maestro.

El prefacio que acompaña el texto del estudiante tiene como propósito prevenir al estudiante de la necesidad de una lectura cuidadosa de ese libro. El maestro debe estimular a sus estudiantes a leer dicho prefacio, y de vez en cuando durante el año, mencionar la importancia de la comprensión en lectura y los diferentes medios que pueden emplearse para lograr una interpretación más eficaz.

Los conjuntos de problemas no son todos de la misma extensión, de modo que no se espera que el maestro pueda asignar exactamente un conjunto de problemas cada día para el trabajo en la casa. Hay muchas diferencias en cuanto a la habilidad de las clases, al tipo de material, al tiempo disponible, a los modelos de asignaciones, etc. Algunos maestros prefieren asignar cada día unos pocos ejercicios escogidos en dos o tres conjuntos sucesivos de problemas.

19

Ellos deberán usar su propio criterio al elegir los problemas para las asignaciones. Deben estar seguros de incluir aquellos problemas que sean indispensables para el desarrollo de las ideas, y también cualesquiera otros adaptados a la habilidad de los estudiantes.

A lo largo del libro en muchos conjuntos de problemas se incluyen problemas precedidos por un asterisco*. Estos son más estimulantes e interesantes que otros en el mismo conjunto de problemas y se incluyen principalmente para los estudiantes más destacados y curiosos. La discusión de estos problemas con toda la clase consumiría tiempo necesario para completar el trabajo básico del curso. El maestro decidirá cuando aparezca uno de estos problemas si el tiempo y la habilidad de sus estudiantes le permiten tratar el problema con la clase en su totalidad.

Se desea que este Comentario para el maestro sea algo más que un libro de respuestas. Hallarán en él comentarios en torno a lo que estamos haciendo, al por qué presentar un tema de cierta manera, y a lo que viene después relacionado con ese tema.

Al final de algunos capítulos del Comentario aparecen unas sugerencias para exámenes. Se debe entender claramente que estas listas no son exámenes, sino meramente algunos ejemplos de problemas de los cuales se pueden seleccionar preguntas o que podrían sugerir otras preguntas para exámenes.

Se hace difícil sugerir el número de días que necesitaría una clase para tratar un capítulo específico. La habilidad de los estudiantes varía y las condiciones locales de cada escuela varían grandemente. Se sabe de distintas clases que han tardado de 8 a 32 días en estudiar un mismo capítulo. Quizás el mejor consejo es éste: traten de completar los capítulos del 1 al 6, inclusive, en el primer tercio del año escolar. El uso efectivo de este Comentario podría ayudarles a evitar el empleo de más tiempo del que deben en cualquier tema.

Ofrecemos las estimaciones siguientes para los maestros que deseen saber aproximadamente el tiempo que deberán emplear en cada capítulo. Es de esperarse, naturalmente, que surjan variaciones de estas estimaciones.

Capítulo 1	6 días
Capítulo 2	8 días
Capítulo 3	18 días
Capítulo 4	10 días
Capítulo 5	10 días
Capítulo 6	10 días

El maestro puede conseguir un libro escrito especialmente para explicar el pensamiento matemático que sirve de fondo a este curso. Esta útil referencia es el libro de Haag, <u>Studies in Mathematics, Volume III, Structure of Elementary Algebra</u>, que se puede conseguir del School Mathematics Study Group, Drawer 2502 A, Yale Station, New Haven, Conn. En los comentarios siguientes, frecuentemente se hacen referencias a capítulos y secciones de ese libro.

Capítulo 1

CONJUNTOS Y LA RECTA NUMERICA

En este capítulo utilizamos los números de la aritmética y las operaciones fundamentales con ellos como una base conocida para la presentación de conceptos y procedimientos que pueden ser nuevos para el alumno. Consideramos brevemente dos de los instrumentos indispensables para nuestro estudio de la estructura del sistema de los números reales: los conjuntos y la recta numérica.

Uno de los grandes conceptos que unifican y simplifican toda la matemática, el concepto de conjunto, es importante en muchos aspectos a lo largo del curso: en la clasificación de los números con los que trabajamos, en el examen de las propiedades de las operaciones con estos números, en la solución de ecuaciones e inecuaciones, en la factorización de polinomios, en el estudio de las funciones, etc. También, el curso para décimo grado y los cursos posteriores del SMSG utilizan las ideas de la teoría de los conjuntos para formular definiciones, postulados y teoremas.

Puesto que la mayoría de los alumnos no han estudiado nada acerca de conjuntos antes de empezar este curso, y puesto que las nociones fundamentales acerca de los conjuntos generalmente se comprenden prontamente, a veces con entusiasmo, parece un tema apropiado, desde el punto de vista pedagógico, con el cual iniciar el curso. Sin embargo, concluimos rápidamente esta consideración inicial de los conjuntos, dejando para más adelante mucha labor referente a las operaciones con miembros de conjuntos y con la clausura, para dedicarnos inmediatamente a la presentación del concepto de variable (en el Capítulo 2). Esto se hace principalmente debido a que (1) los maestros y los estudiantes por igual esperan la introducción temprana del concepto de variable en un curso de álgebra, y (2) una vez establecido el concepto de variable, puede comenzar en serio nuestro estudio de la estructura del sistema numérico.

Después presentamos la recta numérica al estudiante. Aquí tenemos otro concepto de gran utilidad a lo largo del curso, es el artificio utilizado para representar muchas de las ideas acerca de los números y las operaciones que se efectúan con ellos. Esto se hace evidente inmediatamente en cuanto se presenta la construcción de las gráficas de conjuntos, y luego, en la sección final del capítulo, la suma y la multiplicación en la recta numérica.

Sin embargo, la suma y la multiplicación en la recta numérica no se estudian de lleno, puesto que en los Capítulos 6 y 7 se tratan a fondo dichas operaciones; más bien se desea que esta sección establezca los fundamentos, en distintas formas, de la propiedad conmutativa de la suma y la multiplicación. Primero, se aclara al estudiante que, por ejemplo, 3 + 5 y 5 + 3 son símbolos diferentes; que a pesar de que ambos nombran el número 8, éste se halla de distinta manera en cada caso, porque la suma es una operación ordenada. Así, pues, la propiedad conmutativa de la suma tiene significado. De la misma manera, esta sección prepara al estudiante para la propiedad conmutativa de la multiplicación. La suma y la multiplicación en la recta numérica también ilustran las propiedades conmutativas mediante ejemplos, tales como aquellos en los que intervienen los números racionales, para los cuales la circunstancia de que las propiedades son válidas no es del todo obvia.

Remitimos al maestro al libro de Haag, Studies in Mathematics, Volume III, Structure of Elementary Algebra, Capítulo 2, sección 1.

Los alumnos que han estudiado Matemática para el primer ciclo secundario del SMSG, habrán tenido alguna experiencia con los conjuntos y la recta numérica. Podrán estudiar algunas partes de este capítulo en menos tiempo que otros estudiantes, pero el enfoque es lo suficientemente distinto como para sugerir que no se debe omitir ninguna de las ideas.

1-1. Conjuntos y subconjuntos

Página 1. Aunque los primeros conjuntos presentados al comienzo del capítulo no son ejemplos de conjuntos de números, pasamos rápidamente a la consideración de tales conjuntos. A pesar del hecho de que los conjuntos no numéricos pueden ser de interés, un estudio prolongado de ellos constituiría una divagación, para la cual probablemente no haya tiempo disponible, desde el punto de vista del propósito básico del curso.

Alabama, Arkansas, Alaska, y Arizona son todos los estados cuyos nombres comienzan con la letra A.

Lunes, martes, miércoles, jueves, viernes son todos los "días de clases" de la semana. Otra descripción sería "todos los días laborables", aunque algunos podrían incluir el sábado entre los "días laborables".

Estos seis y el domingo constituyen todos los días de la semana.

Los números 1, 2, 3, 4, 5 son los primeros cinco números naturales, o bien los números cardinales mayores que 0 y menores que 6.

Los números 2, 3, 5, 7, 8 constituyen un conjunto de números cardinales menores que 9. Sin embargo, ésta no es una descripción adecuada, ya que describe otros conjuntos igualmente que el especificado. En contraste con el conjunto anterior, {1, 2, 3, 4, 5}, el conjunto {2, 3, 5, 7, 8} no se describe fácilmente con palabras, sino solamente haciendo una lista de los elementos. En el otro extremo está el conjunto vacío, para el cual no se puede hacer una lista de sus elementos y el que se debe describir de alguna otra manera.

No introducimos toda la notación corriente utilizada en la teoría de los conjuntos, tal como la notación constructiva de conjuntos, $\in$, $\supset$, $\subset$, $\cup$, $\cap$, debido a que consideramos que no hay uso suficiente de ella que justifique su estudio en esta etapa. Sin embargo, no hay objeción a que el maestro utilice cualquiera de estos símbolos, si así lo desea.

Página 2. Aunque definimos y distinguimos entre el conjunto de los números cardinales y el conjunto de los números naturales, no se debe insistir demasiado en el último conjunto, pues se emplea más el conjunto de los números cardinales. En el estudio de los números reales en el Capítulo 5, el término enteros se introducirá para designar los números cardinales y sus opuestos (los negativos).

El maestro debe estar prevenido frente a tres errores corrientes que cometen los estudiantes al tratar el conjunto vacío. El error más importante es la confusión de los símbolos {0} y Ø, contra el cual se les previene en el texto. Sin embargo, este asunto podría necesitar que el maestro haga más hincapié en él. Un error menos importante consiste en usar las palabras "<u>un</u> conjunto vacío" o "<u>un</u> conjunto nulo" en vez de "<u>el</u> conjunto vacío". Hay solamente un conjunto vacío, aunque admite muchas descripciones. Un tercer error consiste en usar el símbolo {Ø}, en vez de Ø solamente.

Incidentalmente, el símbolo empleado para representar el conjunto vacío es el mismo que se emplea para representar una vocal en el alfabeto danés.

<u>Página 3</u>. T es un subconjunto de S.

<u>Respuestas al Conjunto de problemas 1-1a</u>; páginas 3-4:

1. (a) {1, 3, 5, 7, 9, 11}
   (b) {0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49}
   (c) {12, 24, 36, 48}
   (d) {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
   (e) Esta pregunta se debe cotejar anualmente en el Almanaque Mundial.
   (f) {0, 1, 4, 9}
   (g) {0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81}
   (h) No se puede hacer una lista de los elementos del conjunto vacío.
2. (a) Los elementos de cada uno de los conjuntos son los mismos: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
   (b) El conjunto S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} es el conjunto de los seis primeros números naturales. Son posibles muchas otras descripciones.
   (c) El mismo conjunto puede tener muchas descripciones.

3. U = {1, 2, 3, 4}

T = {1, 4, 9, 16}

V = {1, 4}; sí, V es un subconjunto de U; sí, V es un subconjunto de T; no, U no es un subconjunto de T, ya que 2 no es un elemento de T.

4. K = {1, 2, 3, 4, 9, 16}

K no es un subconjunto de U; U es un subconjunto de K; T es un subconjunto de K; U es un subconjunto de U (por la definición de subconjunto).

Los problemas precedidos por un asterisco * son más estimulantes e interesantes que otros en el mismo conjunto de ejercicios. Tales problemas se incluyen principalmente para los estudiantes más destacados y curiosos; y la discusión de estos problemas con toda la clase podría consumir tiempo necesario más adelante en el año para completar el trabajo básico del curso. El maestro decidirá cuando aparezca cada uno de estos problemas si el tiempo y la habilidad de sus estudiantes le permiten tratar el problema con la clase en su totalidad.

*5. Del conjunto ∅ se puede construir un subconjunto, ∅.

Del conjunto A = {0}, se pueden construir dos subconjuntos, {0} y ∅.

Del conjunto B = {0, 1}, se pueden construir cuatro subconjuntos: {0}, {1}, {0, 1}, y ∅.

Del conjunto C = {0, 1, 2}, se pueden construir ocho subconjuntos: {0}, {1}, {2}, {0, 1}, {0, 2}, {1, 2}, {0, 1, 2} y ∅.

Del conjunto D = {0, 1, 2, 3}, se pueden construir 2^4, ó, es decir, 16 subconjuntos.

El estudiante puede enunciar la regla de la manera siguiente:

Un conjunto de cuatro elementos tendrá el doble de subconjuntos que un conjunto de tres elementos, y así sucesivamente,

o bien

Un conjunto de un elemento tiene 2 subconjuntos.

Un conjunto de dos elementos tiene 2×2 subconjuntos.

Un conjunto de tres elementos tiene $2 \times 2 \times 2$ subconjuntos.

Un conjunto de cuatro elementos tiene $2 \times 2 \times 2 \times 2$ subconjuntos.

etc.

<u>Página 5</u>. Hay 50 números impares entre 0 y 100. Se pueden contar, pero no es necesario hacerlo. Una manera de determinar cuántos hay sin contarlos sería observar que hay 100 números cardinales desde 1 hasta 100, la mitad de los cuales son impares, y la otra mitad pares.

Otra manera sería darse cuenta de que hay 5 números impares en cada decena, y hay 10 decenas desde 1 hasta 100; por consiguiente, hay 50 números impares. El alumno puede construir una tabla de éstos.

El conjunto de todos los múltiplos de 5 es infinito y el proceso de contar sus elementos no puede terminar.

El empleo del término "una infinidad" por parte del estudiante y el maestro debe ayudar al estudiante a evitar el nombre "infinito", y con ello la tentación de llamar a "infinito" un numeral para un número grande.

<u>Respuestas al Conjunto de problemas 1-1b</u>; páginas 5-6:

1. (a) 18
   (b) 25
   (c) Una infinidad
   (d) 34
   (e) 100
2. (a) Infinito
   (b) Infinito
   (c) Finito

(d) Finito

(e) Infinito

3. (a) K = {0}; K es un subconjunto de S; K es un subconjunto de T; S, T, y K son finitos.

(b) M = {0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}; M no es un subconjunto de S; T es un subconjunto de M; M es finito.

(c) R = {5, 7, 9}; R es un subconjunto de ambos S y M.

(d) No se puede hacer una lista de los elementos de A; es el conjunto vacío.

(e) Los conjuntos A y K no son el mismo. El conjunto A <u>no</u> tiene elemento alguno, mientras que K tiene un elemento, 0.

(f) Sí. Un subconjunto de un conjunto no puede tener elemento alguno que no esté en el conjunto, de manera que el número de elementos en un subconjunto no es mayor que el número de elementos en el conjunto. Por lo tanto, cualquier subconjunto de un conjunto finito es finito.

4. Un número cardinal par es uno que es un múltiplo de 2, es decir, el producto de un número cardinal multiplicado por 2. Siendo 0 el producto del número cardinal 0 por 2, es, por definición, un número par.

1-2. <u>La recta numérica</u>

<u>Página 7</u>. La recta numérica se emplea como un artificio ilustrativo y sugestivo, y nuestra consideración de ella es bastante intuitiva. De igual modo que en la sección anterior, surgen más preguntas que las que se pueden contestar inmediatamente.

En la recta numérica están presentes implícitamente puntos correspondientes a los números negativos, según lo sugiere la consideración de la escala de un termómetro y la presencia en las ilustraciones, del lado izquierdo de la recta numérica. Sin embargo, puesto que el plan del curso es dirigirnos directamente a la consideración de las propiedades de las operaciones con los números no negativos, cualquier cosa que no sea un simple reconocimiento casual de la existencia de los números negativos en esta etapa constituiría una distracción para el estudiante.

Página 7. El concepto de sucesor es importante. Supongamos que se empieza con el número natural uno. El sucesor es "uno más", o sea, 1 + 1, que es 2. Así, pues, el sucesor de 5 es 5 + 1, ó sea, 6; el de 105 es 105 + 1, es decir, 106; y el de 100,000,005 es 100,000,006. Esto implica que cuando se piense en un número cardinal, no importa cuan grande sea, tendrá siempre un sucesor. El estudiante debe darse cuenta de que no hay un último número. Una referencia interesante para el estudiante es el libro Number, the Language of Science, de Tobias Dantzig, págs. 61-64.

Página 9. Aquí se hace hincapié en que la coordenada es el número que se asocia con un punto de la recta. "Coordenada", "asociado" y "correspondiente a" deben venir a formar parte del vocabulario del alumno. Este no debe confundir la coordenada con el punto, ni la coordenada con el nombre del número.

Aquí surge por primera vez la distinción entre número y el nombre de un número. No debe hacerse de esto un tema de discusión en esta etapa, ya que lo trataremos explícitamente al comienzo del Capítulo 2.

Obsérvese que el enunciado general en la página 9 relacionado con los números racionales no es una definición, pues hasta este momento no hemos incluido los números racionales negativos. No debe insistirse en este asunto con el estudiante. Este tendrá una definición de los números racionales después que hayamos presentado los números negativos en el Capítulo 5. Por ahora queremos que tenga la idea de que estos números se incluyen entre los racionales.

También se puede decir que un número representado por una fracción que indica el cociente de un número cardinal por un número natural es un número racional. Este enunciado puede ser de interés, puesto que se expresa mediante estos conjuntos definidos recientemente, pero el enunciado en el texto tiene la ventaja de que la exclusión de la división por cero está explícita.

$\frac{10}{3}$, $\frac{14}{2}$, $\frac{35}{10}$, $\frac{0}{7}$ son nombres posibles para estos números.

Se puede representar un número racional por una fracción, pero algunos números racionales también se pueden representar por otros numerales. La ilustración de la recta numérica en la página 9 da el nombre "2" lo mismo que las fracciones "$\frac{4}{2}$", "$\frac{6}{3}$", "$\frac{8}{4}$" para el número 2. El mismo diagrama muestra con claridad que no todos los números racionales son números cardinales. Puede que el estudiante haya visto fracciones que no representen números racionales, tales como, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{4\pi}{3}$, etc. Se le tendrá que recordar que las llamadas "fracciones decimales" no son fracciones en el sentido de esta definición.

Es necesario distinguir cuidadosamente los términos "número racional" y "fracción". Más adelante en el curso, (en el Capítulo 9) se verá que el significado del término "fracción" incluye cualquier expresión, incluso una expresión con variables, que esté en la forma de un cociente indicado.

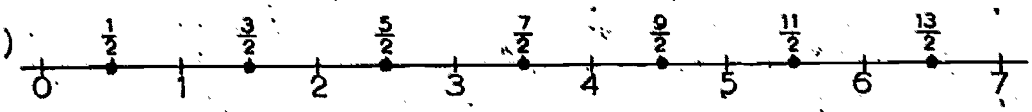
Páginas 10-11. Aquí se introduce el concepto de "densidad" de los números. Por "densidad" de los números queremos decir que entre dos números cualesquiera siempre hay otro, y, por lo tanto, que entre dos números cualesquiera hay una infinidad de números. Esto sugiere que, en la recta numérica, entre dos puntos cualesquiera siempre hay otro punto, y, en realidad, una infinidad de puntos. Aquí nos referimos a los "puntos" más bien en el sentido matemático que en el físico, a saber, puntos que no tienen dimensión. Puede que por no estar pensando en los puntos de esta manera, el estudiante no concluya intuitivamente que entre dos puntos cualesquiera de la recta numérica se pueden localizar otros puntos. Por consiguiente, primero se le muestra el concepto de "interposición" para los números, y entonces, considerando estos números como coordenadas, podrá inferir la "interposición" de puntos de la recta numérica.

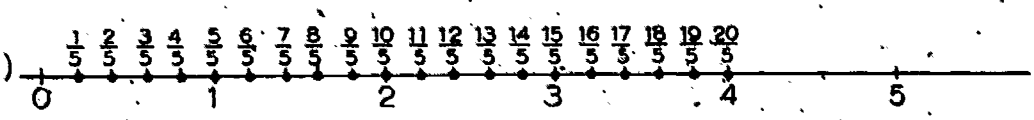
La introducción de otros números positivos además de los números racionales se hace gradualmente. Un ejercicio en el Capítulo 3 sugiere que $\sqrt{2}$ podría ser irracional; en el Capítulo 5 se afirma definitivamente que algunos radicales y también π son números irracionales, y en el Capítulo 11 se ofrece la discusión detallada de la irracionalidad de varios radicales y sus sumas, luego de un entrenamiento apropiado en los métodos de factorización.

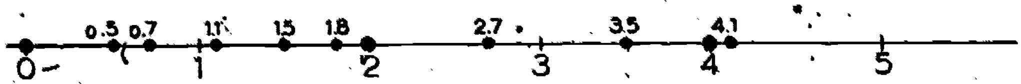
En esta etapa del curso, es de esperar que el estudiante acepte el hecho de que a cada punto de la recta numérica a la derecha del 0 se le puede asignar un número. Puede no aceptar el hecho de que no todo punto de la recta numérica tiene como coordenada un número racional, pero hasta el Capítulo 11 no es necesario destacar este dato. También el estudiante puede estar impaciente por asignar números a los puntos a la izquierda del 0. Por el momento, hasta el Capítulo 5, concentraremos en los números reales no negativos. Este conjunto de números, incluyendo el 0 y todos los números que sean las coordenadas de puntos a la derecha del 0, lo llamamos el conjunto de los <u>números de la aritmética</u>. Después que establezcamos las propiedades de las operaciones con estos números (en el Capítulo 3), consideraremos el conjunto de todos los números reales, que incluye los números negativos (en el Capítulo 5). Entonces en los Capítulos 6, 7 y 8, explicaremos detalladamente las propiedades de las operaciones con todos los números reales.

<u>Respuestas al Conjunto de problemas 1-2a</u>; páginas 11-12:

1. Entre 2 y 3 hay una infinidad de números; entre $\frac{2}{500}$ y $\frac{3}{500}$ hay una infinidad de números.

2. (a) 

(b) 

(c) 

Tres de éstos son números cardinales: 0, 2, 4. 2 y 4 son números naturales.

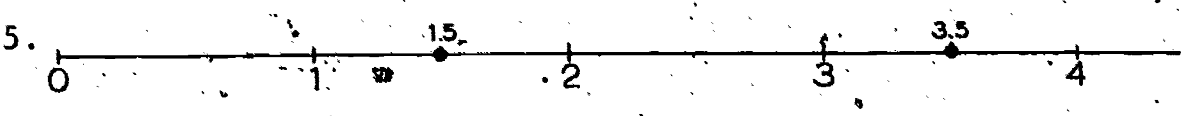
(d) Ninguno de los nombres para los números en (c) es una fracción. Todos los nombres para los números en (a) y en (c) representan números racionales.

Si el estudiante no sabe con certeza qué aspecto tendrá la gráfica, puede mirar las ilustraciones de la página 13 del texto. Sin embargo, esperamos que no necesite esta ayuda, sino que más bien el ejercicio le oriente hacia la construcción de las gráficas de los conjuntos que siguen.

3. $\frac{20}{5}$ es otro nombre para el número natural 4. Otros nombres que se sugieren para la coordenada de este punto son $\frac{8}{2}$, $\frac{100}{25}$, $\frac{12.4}{3.1}$, 4.0.

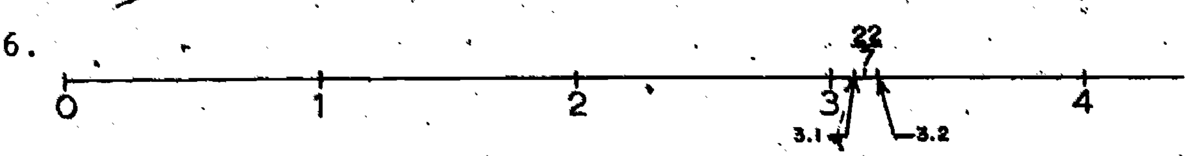
4. Los numerales sugeridos incluyen $\frac{6}{8}$, $\frac{12}{16}$, $\frac{3000}{4000}$, $\frac{1.5}{2}$, $\frac{3.6}{4.8}$, 0.75.

5.



El punto cuya coordenada es 3.5 está a la derecha del punto cuya coordenada es 2. El número 3.5 es mayor que el número 2. El punto cuya coordenada es 1.5 está situado a la izquierda del punto cuya coordenada es 2. El número 2 es mayor que el número 1.5. (Obsérvese que este problema está dirigido a tratar con la relación de ordenación de los números y los puntos asociados.)

6.



El número $\frac{22}{7}$ está entre los números cardinales 3 y 4. $\frac{22}{7}$ es mayor que 3.1. $\frac{22}{7}$ está a la izquierda de 3.2. $\frac{22}{7}$ está entre 3.1 y 3.2. Pídase al estudiante que divida 22 por 7; obtendrá el resultado 3.14285714...; de aquí puede decidir que $\frac{22}{7}$ está entre 3.1 y 3.2; entre 3.14 y 3.15; entre 3.142 y 3.143.

*7. El conjunto S es uno de estos tres conjuntos:

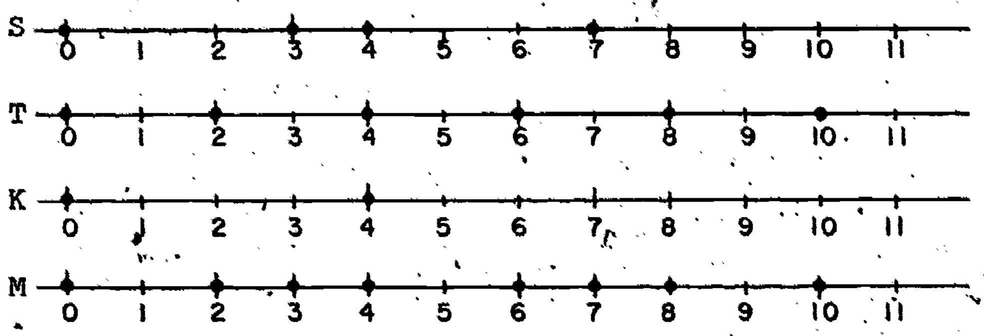
(1) El conjunto de los números cardinales mayores que 1.

(2) El conjunto de todos los números naturales.
(3) El conjunto de todos los números cardinales.

Respuestas al Conjunto de problemas 1-2b; páginas 13-14:

1. (a) K = {0, 4}; M ={0, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10}

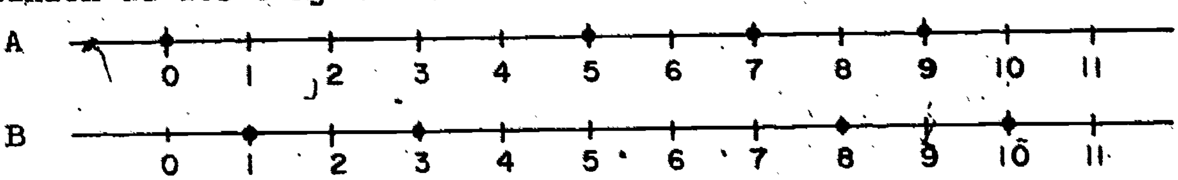
(b)



(c) Cualquier punto de las gráficas de ambos conjuntos S y T está en la gráfica de K. Cualquier punto de la gráfica de S, o de T, o de ambos, es un punto de la gráfica de M.

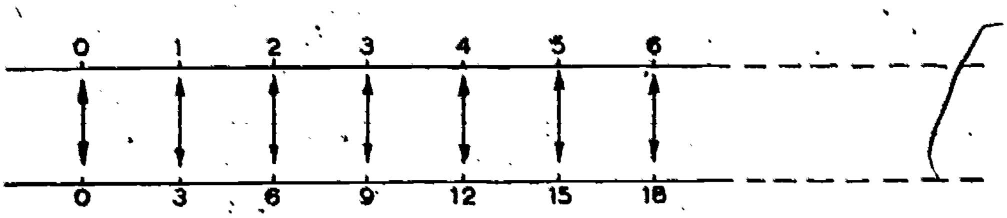
Este ejercicio sugiere que algunas veces convendrá comparar las gráficas de dos conjuntos para obtener conjuntos importantes que se conocerán luego como la intersección y la reunión de los conjuntos.

2



Puesto que ningún punto de ambas gráficas tiene la misma coordenada, el conjunto C es el conjunto vacío, $\emptyset$.

*3.

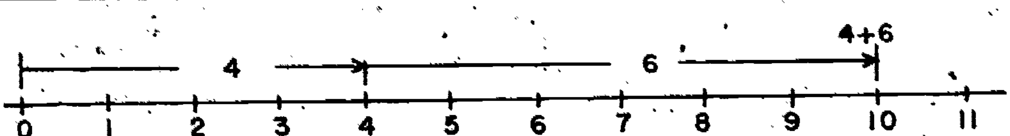


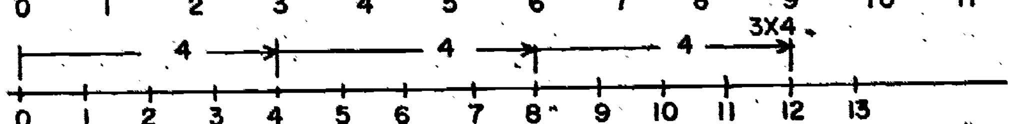
El estudiante que resuelva este problema puede obtener de él un medio de caracterizar un conjunto infinito, ya que sólo un conjunto infinito tiene la propiedad de que sus elementos se pueden aparear de manera biunívoca con los elementos de algún subconjunto propio de sí mismo.

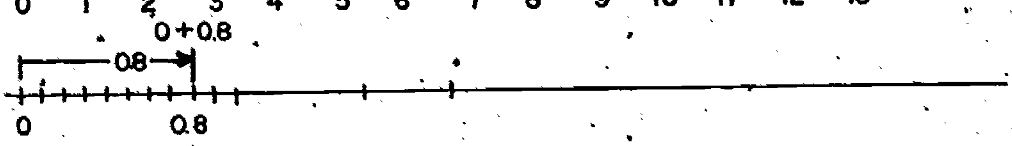
1-3. Suma y multiplicación en la recta numérica

Página 14. La suma de dos números racionales es siempre un número racional. La propiedad de clausura para la suma de números racionales se considera más ampliamente en el Capítulo 3; por ahora confiamos en la intuición del estudiante, con la ayuda de algunas sumas de ensayo con números racionales, para encaminarlo correctamente.

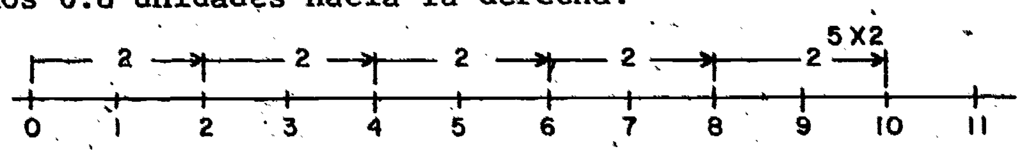
Respuestas al Conjunto de problemas 1-3; páginas 16-18:

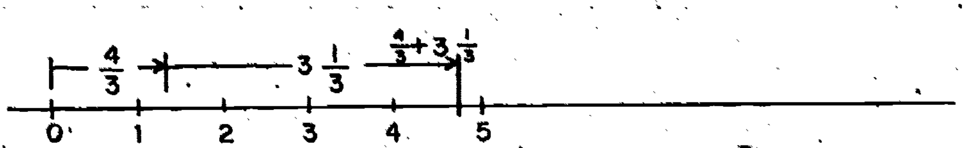
1. (a) 

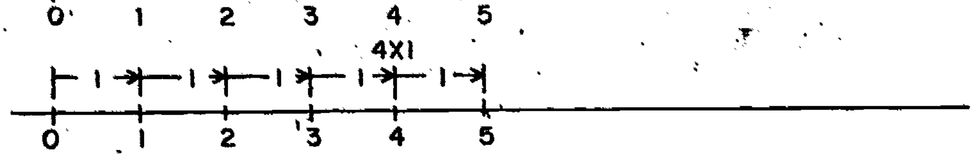
(b) 

(c) 

Este problema se puede interpretar como si nos moviéramos en la recta numérica desde 0 hasta 0 y luego nos moviéramos 0.8 unidades hacia la derecha.

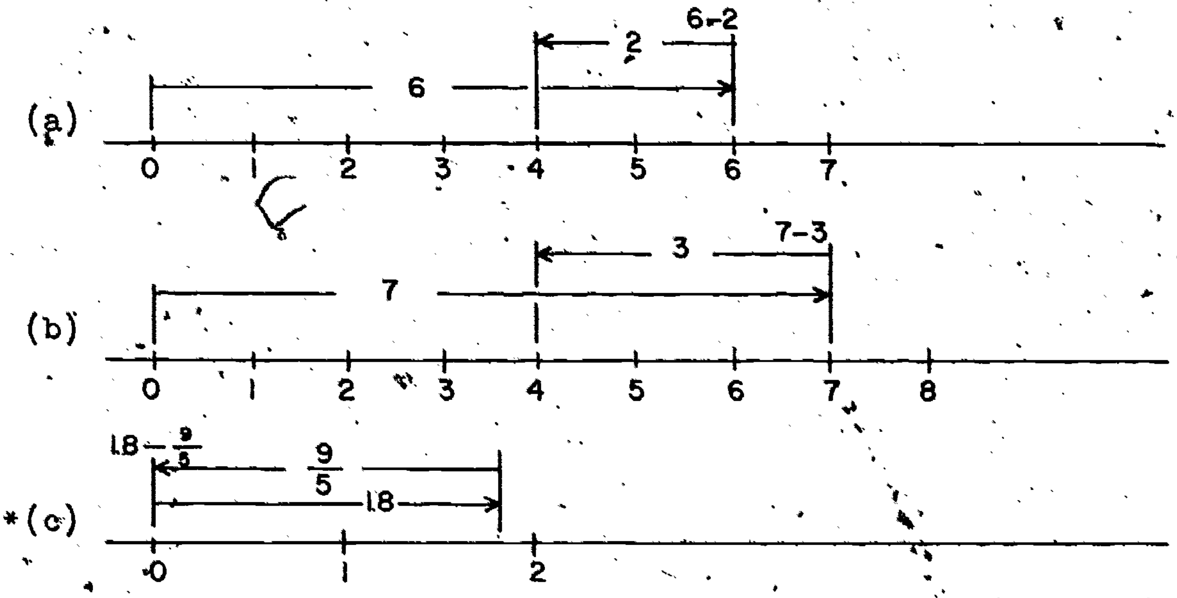
(d) 

(e) 

(f) 

Otro modo aceptable para iniciar el procedimiento de sumar en la recta numérica sería localizar directamente el punto cuya coordenada sea el primer número, en vez de moverse desde 0 hasta ese número en la recta numérica.

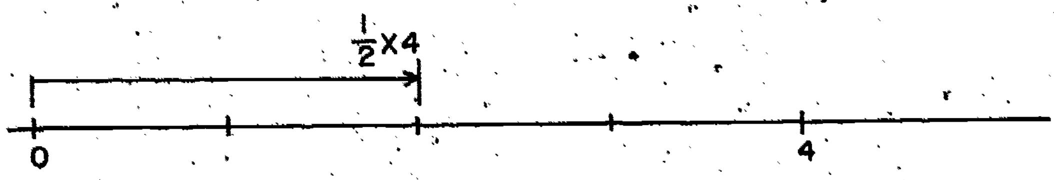
2. Un procedimiento para restar dos números en la recta numérica es el siguiente: movernos en la recta numérica desde 0 hasta el primer número, y entonces movernos desde este punto hacia la izquierda el número de unidades indicadas por el segundo número, localizando así el punto cuya coordenada es el resultado.



Aplicando este procedimiento a otros problemas puede dar lugar a que algunos estudiantes piensen en los números negativos. La consideración de esta pregunta se debe limitar a lo que sea indispensable para aplacar al estudiante, ya que la resta se trata ampliamente en el Capítulo 9 para todos los números reales. No es nuestra intención olvidar que el estudiante sabe restar números positivos hasta entonces, mas utilizaremos de modo casual la sustracción en muchos ejercicios de los primeros capítulos sin considerar, sin embargo, sus propiedades operacionales.

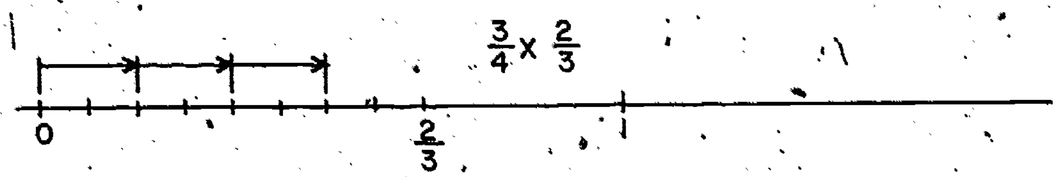
*3.

(a)



El segmento desde 0 hasta 4 está dividido en dos partes iguales, y en el extremo de la derecha del primer segmento está el punto requerido.

(b)



El segmento desde 0 hasta $\frac{2}{3}$ está dividido en cuatro partes iguales, y en el extremo de la derecha del tercer segmento está el punto requerido.

El estudiante puede usar la fracción $\frac{8}{12}$ en lugar de $\frac{2}{3}$, y así encontrar nombres más sencillos para la coordenada del punto en el extremo de la derecha del tercer segmento, tal como $\frac{6}{12}$ ó $\frac{1}{2}$.

4. (a) La suma de dos números impares cualesquiera es un número par.

$5 + 13 = 18$

(b) El producto de dos números impares cualesquiera es un número impar.

$5 \times 13 = 65$

Este problema se incluye en los ejercicios para ayudar a mantener informalmente ante el estudiante el concepto de clausura. La definición formal de clausura se encuentra en el problema *7 de estos ejercicios y de nuevo en el Capítulo 3 del texto.

5. S = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

S no es un subconjunto de T.

Si el estudiante tiene dificultad en determinar la suma de todos los pares de elementos del conjunto en un problema de este tipo, el uso de una tabla de adición podría ayudársele a sistematizar su trabajo:

+	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

En una tabla tal, un número de la columna vertical a la izquierda es el primer número de cada par, mientras que un número de la fila horizontal superior es el segundo número del par.

El estudiante notará que en la lista de los elementos del conjunto no se repite elemento alguno.

6. P = {0, 1}

P es un subconjunto de Q.

Al igual que en el problema 5 anterior, una tabla podría ser de ayuda:

×	0	1
0	0	0
1	0	1

*7. (a) Q no es cerrado respecto de la suma.

(b) Sí.

No, $\frac{2 + 4}{2} \stackrel{?}{=} 3$.

(c) Sí.

Sí.

(d) Sí.

Sí.

*8. (a) El conjunto de todos los números pares es cerrado respecto de la operación "dos veces el producto". Otros conjuntos infinitos de números pares también son cerrados respecto de esta operación, por ejemplo,

{0, 2, 4, 8, 16, . . .}

{0, 4, 8, 16, . . .}

{8, 16, 32, . . .}

al igual que los conjuntos {0} y Ø.

(b) El conjunto de todos los números impares es cerrado respecto de la operación "dos veces el producto más uno" al igual que otros conjuntos infinitos de números impares, por ejemplo,

{3, 5, 7, 9, . . .}

{9, 11, 13, . . .}.

9. Los siguientes parecen ser los conceptos importantes del capítulo. Se puede hacer una lista de ellos en cualquier orden; aquí aparecen en el orden en que se presentan por primera vez en el texto.

Sección 1-1.

1. Un <u>conjunto</u> es una colección de elementos o miembros con alguna característica común.

2. El conjunto que no contiene elemento alguno se llama el <u>conjunto vacío</u>, o bien el <u>conjunto nulo</u>, y se denota por el símbolo Ø.

3. Si todo elemento del conjunto A pertenece al conjunto B, entonces A es un <u>subconjunto</u> de B.

4. Si los elementos de un conjunto se pueden contar, el conjunto es <u>finito</u>. De lo contrario, es un conjunto <u>infinito</u>. La única excepción a esta regla es el conjunto Ø, que no se puede contar, pero no obstante es finito.

Sección 1-2.

5. Todo número cardinal y todo número natural tiene un <u>sucesor</u>, de modo que el conjunto de todos los números cardinales y el de todos los números naturales son conjuntos infinitos.

6. Una <u>fracción</u> es un símbolo que indica el cociente de dos números.

7. Un número que <u>se puede</u> representar por una fracción que indica el cociente de dos números cardinales, excluyendo la división por cero, es un <u>número racional</u>.

8. Hay muchos nombres posibles para el mismo número.

9. Cada número racional se puede <u>asociar</u> con un punto de la recta numérica.

10. El conjunto de todos los números cardinales es un subconjunto del conjunto de todos los números racionales.

11. La coordenada de un punto es el número asociado con el punto en la recta numérica.

12. Todo número se puede asociar con un punto de la recta numérica, y todo punto de la recta numérica corresponde a un número--aunque no necesariamente un número racional.

13. Hay una infinidad de puntos en la recta numérica; hay una infinidad de puntos entre cada par de puntos de la recta numérica.

14. La <u>gráfica</u> de un conjunto es el conjunto de puntos cuyas coordenadas son elementos del conjunto.

15. Al representar la suma en la recta numérica, se pone de manifiesto que sumar el segundo de dos números al primero es un proceso distinto al de sumar el primero al segundo, a pesar de que ambos procesos terminan en el mismo punto de la recta.

16. Al representar la multiplicación en la recta numérica, se pone de manifiesto que multiplicar el segundo de dos números por el primero es un proceso distinto al de multiplicar el primero por el segundo, a pesar de que ambos procesos terminan en el mismo punto de la recta.

Capítulo 1

Sugerencias para exámenes

(No se pretende que las siguientes "sugerencias para exámenes" constituyan un examen equilibrado o completo, pero son, como lo implica el título, preguntas que parecen apropiadas para incluirlas en un examen acerca de este capítulo.)

1. ¿Son los conjuntos siguientes finitos o infinitos? Si es posible, haz una lista de los miembros de cada uno.
   (a) El número de personas que hay hoy en este salón de clases.
   (b) Todos los múltiplos de 3.
   (c) Todos los números naturales menores que 7.
   (d) Todos los números cardinales que no son múltiplos de 5.
   (e) Todos los números entre 0 y $\frac{1}{4}$.
2. (a) Se da el conjunto $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Determina el conjunto T de los productos de cada elemento del conjunto S y 1. ¿Es T un subconjunto de S?
   (b) Se da el conjunto $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Determina el conjunto B de los productos de cada elemento del conjunto A y 0. ¿Es B un subconjunto de A?

3. Haz una lista de todos los subconjuntos del conjunto $Z = \{1, 3, 4, 5\}$. ¿Cuántos de ellos tienen 3 elementos?
4. Se da el conjunto $N = \{1, 2, 3, 4, 8, 9, 12, 16\}$.
   (a) Determina el subconjunto R constituido por todos los miembros de N que son cuadrados de números cardinales.
   (b) Determina el conjunto K de todos los números impares del conjunto N.
   (c) Determina el conjunto A de los cuadrados de los miembros de N.
   (d) Determina el conjunto B cuyos miembros son cada uno 3 más que dos veces el número correspondiente de N.
   (e) Determina el conjunto C de todos los números que son elementos de ambos N y B.
   (f) Determina el conjunto D de todos los números que son elementos de N, de B, o de ambos.
5. Considera cada uno de los conjuntos siguientes, y haz una lista de los elementos para aquellos que sean finitos:
   (a) Todos los números naturales menores que 1.
   (b) Todos los números cardinales menores que 1.
   (c) Todos los números menores que 1.
   (d) Todos los números naturales tales que 10 veces el número es mayor que el número mismo.
   (e) Todos los números cardinales tales que 10 veces el número es igual al número multiplicado por sí mismo.
6. En la recta numérica, sitúa los puntos cuyas coordenadas son:
   (a) $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}, \frac{9}{3}$.
   (b) 0, 0.6, 1.2, 1.5, 1.8, 2, 3.5, 4.

   ¿Cuáles de éstos son números naturales? ¿Cuáles números cardinales? ¿Cuáles números racionales? En la recta numérica, ¿cómo está situado el punto cuya coordenada es 5.4 con respecto al punto cuya coordenada es 4?; ¿y con respecto al punto cuya coordenada es 6.2?

7. (a) ¿Está $\frac{3}{7}$ a la izquierda de $\frac{15}{21}$ en la recta numérica?
   (b) Presenta la gráfica del conjunto K = {0, 3, 7}.
   (c) Escribe otros 3 nombres que podrían usarse para la coordenada 3.

8. Si A es el conjunto de todos los números cardinales menores que 20 que no son múltiplos de 2, de 3, ó de 5,
   (a) haz una lista de los elementos del conjunto A.
   (b) dibuja la gráfica del conjunto A.

9. Escribe dos números entre $\frac{1}{8}$ y $\frac{2}{8}$. ¿Cómo sabes que están entre $\frac{1}{8}$ y $\frac{2}{8}$?

10. Efectúa las operaciones siguientes en la recta numérica:

(a) $4 + 2$	(c) 1×5	(e) 3×0.5
(b) 4×2	(d) $1\frac{1}{2} + \frac{5}{2}$	

*11. Sea S el conjunto de todos los números cardinales.
   (a) ¿Es S finito o infinito?
   (b) ¿Es S cerrado respecto de la suma? Explica por qué.
   (c) ¿Es S cerrado respecto de la multiplicación? Explica por qué.
   (d) ¿Es S cerrado respecto de la operación de hallar la media aritmética? Muestra por qué.

   Si T es el conjunto de todos los números impares, contesta las preguntas (a) a (d).

   Si R es el conjunto de todos los números impares menores que 8, contesta las preguntas (a) a (d).

Capítulo 2

NUMERALES Y VARIABLES

Como obra de consulta para los temas incluidos en este capítulo, remitimos al maestro al libro de Haag, <u>Studies in Mathematics, Volume III, Structure of Elementary Algebra</u>, Capítulo 3, secciones 1 y 2, y Capítulo 6, sección 1.

Los alumnos que han estudiado el material del S.M.S.G. para el séptimo grado habrán aprendido las propiedades de la suma y de la multiplicación de números cardinales y de números racionales. Si han estudiado el material del S.M.S.G. para el octavo grado, habrán visto las propiedades de los números reales.

Probablemente dichos estudiantes considerarán las secciones 2-2 y 2-3 como un repaso fácil. A la vez el maestro debe evitar en los alumnos la excesiva confianza que les impida captar el significado más profundo de estos conceptos. Asimismo, debe mantenerlos alertas ante cualquier concepto que no hayan aprendido en sus estudios anteriores.

A pesar de que estos estudiantes del S.M.S.G. han estado usando variables en los grados séptimo y octavo, lo han hecho sólo de un modo casual. El tratamiento detallado de variable en la sección [illegible] debe estudiarse muy bien con objeto de lograr una clara comprensión de este concepto.

2-1. <u>Numerales y frases numéricas</u>

El propósito de esta sección es establecer la distinción entre los números mismos y los nombres de ellos y también introducir el concepto de frase. En el transcurso de la sección se señalan varios convenios importantes usados en el álgebra.

Página 19. No deseamos enunciar una definición precisa de "nombre corriente". El término tiene un sentido relativo y se debe usar bastante informalmente. Obsérvese que algunos números, tales como $\pi\sqrt{2}$, no tienen lo que en esta etapa desearíamos llamar un nombre corriente, mientras que otros pueden tener varios nombres corrientes (ejemplos: $\frac{1}{2}$, 0.5 y $2\frac{1}{2}$, $\frac{5}{2}$, etc.)

Los conceptos de suma indicada y producto indicado son muy útiles, particularmente al estudiar la propiedad distributiva, y se usarán frecuentemente. También son útiles para contrarrestar la tendencia, alentada en la aritmética, a considerar una expresión tal como "4 + 2", no como el nombre de un número, sino más bien como una orden para sumar 2 a 4 y así obtener el número 6. Este punto de vista hace difícil que el estudiante acepte tales expresiones como nombres de algo. De paso, puede que el maestro desee mencionar a la clase los cocientes indicados y las diferencias indicadas. Es posible que algunos alumnos ya estén familiarizados con el término "cociente indicado" como un sinónimo para "fracción".

Obsérvese el empleo de comillas para indicar cuando la referencia es al numeral o a la expresión, más bien que al número representado. Al principio es importante tener cuidado con esto. Sin embargo, ya que en buen español no siempre se exige este tipo de distinción, sino que se deja que el contexto sugiera el significado, más adelante tendemos a expresarnos con mayor libertad en cuanto a ello y utilizamos formas tales como "la expresión 3x - 4y + 7" en vez de "la expresión '3x - 4y + 7' ".

<u>Página</u> <u>20</u>. El convenio acerca de la preferencia de la multiplicación sobre la suma se hace para facilitar la labor con expresiones y <u>no</u> como un fin en sí. En ciertos tipos de expresiones este convenio también se debe aplicar a la división lo mismo que a la multiplicación, por ejemplo, cuando la división se escribe en la forma 2/3 ó $2 \div 3$ en vez de $\frac{2}{3}$. Preferimos evitar estas formas y, en particular, disuadir del empleo del símbolo "÷".

El uso de paréntesis se podría comparar con el uso de los signos de puntuación en la escritura del español. Se debe hacer hincapié en el uso del paréntesis como un medio que nos permite leer expresiones sin ambigüedad y no en la mera técnica de manipular paréntesis.

<u>Respuestas al Conjunto de problemas 2-1a</u>; página 21:

1. (a) Otros numerales para 8 incluyen $\frac{16}{2}$, $3\cdot\frac{8}{3}$, $2(2 + 2)$, $5 + 3$, $\frac{8}{1}$, $8\cdot 1$, $4(7 - 5)$, $\frac{10(3 - 1)}{2.5}$, $3 + 5$, $1\cdot 8$.

   Los distintos numerales dados como respuestas a este problema apuntarán hacia algunas de las propiedades de la suma y la multiplicación que se estudiarán más adelante. Sin embargo, no se les debe dar mucha importancia en esta etapa.

   (b) Hay una infinidad de numerales para 8.

2. (a) Sí (c) No (e) No (g) Sí

   (b) Sí (d) Sí (f) Sí (h) Sí

   Obsérvese que los ejercicios (f) y (h) apuntan a la propiedad asociativa de la suma, que se estudia en la próxima sección.

3. (a) 17 (e) 34 (i) $\frac{20}{7}$

   (b) 24 (f) 39 (j) $\frac{4}{3}$

   (c) 133 (g) 13 (k) 2

   (d) 20 (h) 23 (l) 3.

Las palabras "numeral" y "frase numérica" denotan casi la misma cosa. Una frase puede ser una expresión más complicada que comprende algunas operaciones; el término "numeral" incluye todo esto y también los nombres corrientes de los números. No debemos preocuparnos con esta distinción, y nos sentiremos satisfechos si el estudiante aprende a usar las palabras de esta manera a lo largo del curso con solamente observar su uso por otras personas. Introducimos las dos, porque la gente usa ambas, y también porque un término para un numeral que sugiere algunas operaciones indicadas es muchas veces útil.

En el término "frase numérica", la palabra "numérica" no tiene mucha importancia, y se usa no tanto para distinguir la frase de una frase lingüística como para distinguirla de una abierta (con una o más variables), que se estudiará más adelante.

En esta etapa, se quiere que la palabra "operaciones" sugiera las operaciones fundamentales de la aritmética (multiplicación, división, suma y resta). En algunos contextos puede ser conveniente admitir operaciones, tales como extraer la raíz cuadrada, tomar el valor absoluto, etc.

Página 22. Las palabras "cierto" y "falso" para los enunciados parecen preferibles a "bien" y "malo" o "correcto" e "incorrecto", debido a que las últimas tienen implicaciones morales para muchas personas. No hay nada ilegal, inmoral, o "mal" en el sentido usual de la palabra cuando nos referimos a un enunciado falso. Se debe estimular al estudiante a emplear solamente "cierto" y "falso" en este contexto.

Hemos estado haciendo dos tipos de cosas con nuestros enunciados: hablamos acerca de enunciados, y usamos enunciados. Cuando escribimos

"3 + 5 = 8" es un enunciado cierto,

hablamos acerca de nuestro lenguaje; cuando, en el curso de una serie de etapas, escribimos

$$3 + 5 = 8,$$

usamos nuestro lenguaje. Cuando hablamos acerca del lenguaje, podemos hablar de un enunciado falso, si lo creemos útil. Así, pues, es completamente correcto decir

"3 + 5 = 10" es un enunciado falso;

pero está muy lejos de ser correcto el uso del enunciado

$$3 + 5 = 10$$

en el curso de una demostración. Cuando realmente usamos el lenguaje, los enunciados falsos no tienen lugar; cuando hablamos acerca de nuestro lenguaje, a menudo son muy útiles.

Respuestas al Conjunto de problemas 2-1b; páginas 22-23:

1. (a) Falso (g) Cierto
   (b) Cierto (h) Falso
   (c) Cierto (i) Cierto
   (d) Falso (j) Falso
   (e) Falso (k) Falso
   (f) Cierto

   Obsérvese que las partes (b) y (c) apuntan a la propiedad distributiva y la parte (g) a la propiedad conmutativa para la multiplicación, las cuales se consideran en la próxima sección.

2. (a) 13 (d) 4
   (b) 58 (e) 16
   (c) $\frac{32}{5}$ (f) 15

3. (a) $(\frac{1}{2} \times 6) + 3$
   (b) $(2\cdot5) + (6\cdot2)$; ó $(2\cdot5) + 6\cdot2$; ó $2\cdot5 + (6\cdot2)$
   (c) $(2 \times 3) + (4 \times 3)$; ó $(2 \times 3) + 4 \times 3$; ó $2 \times 3 + (4 \times 3)$
   (d) $(3 \times 8) - 4$

4. (a) $10 - (7 - 3) = 6$
   (b) $3\cdot(5 + 7) = 36$
   (c) $(3\cdot 5) + 7 = 22$
   (d) $3\cdot(5 - 4) = 3$
   (e) $(3\cdot 5) - 4 = 11$
   (f) $(3 \times 5) + (2 \times 4) = 23$
   (g) $3 \times (5 + 2) \times 4 = 84$
   (h) $(3 \times 5 + 2) \times 4 = 68$; or $\left((3 \times 5) + 2\right) \times 4 = 68$
   (i) $3 \times (5 - 2) \times 4 = 36$
   (j) $(3 \times 5) - (2 \times 4) = 7$
   (k) $(3 \times 5 - 2) \times 4 = 52$; or $\left((3 \times 5) - 2\right) \times 4 = 52$
   (l) $(12 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{3}) \times 9 = 51$; or $\left((12 \times \frac{1}{2}) - \frac{1}{3}\right) \times 9 = 51$
   (m) $(12 \times \frac{1}{2}) - (\frac{1}{3} \times 9) = 3$
   (n) $12 \times (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) \times 9 = 18$
   (o) $(3 + 4)(6 + 1) = 49$
   (p) $3 + 4(6 + 1) = 31$
   (q) $(3 + 4)6 + 1 = 43$
   (r) $(3 + 4\cdot 6) + 1 = 28$; or $3 + (4\cdot 6 + 1) = 28$

2-2. Algunas propiedades de la suma y la multiplicación

El objetivo de esta y la próxima sección es examinar las propiedades fundamentales de la suma y de la multiplicación para números particulares. Llegamos hasta redactar un enunciado lingüístico general de las propiedades, pero éstas no deben enunciarse todavía utilizando variables. En este momento, no necesitamos estos enunciados, y preferimos introducir las variables de un modo diferente en la sección 2-4. Es importante recalcar aquí el concepto de modelo y para ello, cuando se estudie, por ejemplo, la propiedad asociativa de la suma, tal vez el maestro quiera escribir en la pizarra algo así:

(primer número + segundo número) + tercer número =
primer número + (segundo número + tercer número).

El uso de las propiedades de la suma y de la multiplicación como una ayuda para efectuar los cálculos en ciertos tipos de problemas aritméticos es a la vez interesante e importante, pero no constituye el asunto principal de estas propiedades. Estas jugarán un papel más fundamental en este curso, y constituyen la base sobre la cual está construida toda el álgebra.

Volveremos a estas propiedades en el Capítulo 3, donde se darán enunciados generales con variables. Las estudiamos aquí, no sólo como una parte del "método espiral", sino porque necesitamos la propiedad distributiva para introducir el concepto de variable.

Páginas 24-25. (1.2 + 1.8) + 2.6 conduce a una segunda suma más fácil:

$$3.0 + 2.6$$

Cuando se efectuaron las operaciones 5 + 3 y 3 + 5 en la recta numérica, vimos que ambos procedimientos terminaban en el mismo punto de la recta numérica. Luego, 5 + 3 y 3 + 5 son nombres para la misma coordenada, y numerales para el mismo número. En el Capítulo 1 quizás el maestro prefirió considerar 5 + 3 partiendo de 5 y moviéndose 3 unidades hacia la derecha. Este punto de vista es también correcto.

Respuestas al Conjunto de problemas 2-2a; página 26:

Uno de los propósitos de este conjunto de problemas es ayudar a los estudiantes a acostumbrarse a descubrir rápidamente las combinaciones de sumas indicadas que faciliten los cálculos. Un propósito más inmediato es ayudar al estudiante a darse cuenta de que estas manipulaciones, que para ellos pueden ser obvias, están basadas en las propiedades asociativa y conmutativa de la suma.

En estos problemas no se pregunta sobre las propiedades empleadas en el paso de una etapa a otra. Con frecuencia esto resulta tedioso, particularmente en las últimas etapas del cálculo. No insistimos en que se haga esto ahora, pues en esta etapa nos interesa más que el estudiante reconozca la utilidad de las propiedades y no que pueda seguir un proceso de razonamiento riguroso desde el principio hasta el final del cálculo.

En varias partes de este problema hay variaciones en cuanto a "la manera más sencilla" de efectuar las sumas. La comparación de algunas de ellas en la clase debe ser de ayuda para lograr el propósito de la pregunta.

1. (a) El estudiante puede expresar su respuesta así: "Sumamos el 6 y el 4 para obtener 10, y luego 10 y 8 para obtener 18". Este cálculo se puede desarrollar paso por paso de varias maneras, por ejemplo:

$$\begin{aligned} &6 + (8 + 4) \\ &= 6 + (4 + 8) \\ &= (6 + 4) + 8 \\ &= 10 + 8 \\ &= 18 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} &6 + (8 + 4) \\ &= (8 + 4) + 6 \\ &= 8 + (4 + 6) \\ &= 8 + 10 \\ &= 18 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} &\tfrac{2}{5} + \tfrac{2}{3} + 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{8}{5} \\ &= \tfrac{2}{5} + \tfrac{8}{5} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3} + 1 \\ &= (\tfrac{2}{5} + \tfrac{8}{5}) + (\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}) + 1 \\ &= 2 + 1 + 1 \\ &= 2 + (1 + 1) \\ &= 2 + 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

(c) $5\frac{4}{7} + 6 + 14\frac{3}{7}$

$= 5\frac{4}{7} + 14\frac{3}{7} + 6$

$= (5\frac{4}{7} + 14\frac{3}{7}) + 6$

$= 20 + 6$

$= 26$

(d) $\frac{3}{4} + \frac{1}{3}$. En este caso no hay una manera "más sencilla". Ninguna de las dos propiedades sirve de ayuda para efectuar el cálculo, aunque varias de las propiedades que estudiaremos más adelante, especialmente la propiedad distributiva, intervienen tácitamente en los cálculos del estudiante.

$\frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{13}{12}$

(e) $2\frac{1}{5} + 3\frac{2}{3} + 6 + 7\frac{4}{5}$

$= 2\frac{1}{5} + 7\frac{4}{5} + 6 + 3\frac{2}{3}$

$= (2\frac{1}{5} + 7\frac{4}{5}) + 6 + 3\frac{2}{3}$

$= 10 + 6 + 3\frac{2}{3}$

$= (10 + 6) + 3\frac{2}{3}$

$= 16 + 3\frac{2}{3}$

$= 19\frac{2}{3}$ ó $\frac{59}{3}$

(f) He aquí otro caso en el cual ninguna de las dos propiedades facilita los cálculos: $\frac{10}{3} + \frac{6}{5} = \frac{68}{15}$

(g) $(1.8 + 2.1) + (1.6 + .9) + 1.2$

$= 1.2 + (1.8 + 2.1) + (.9 + 1.6)$

$= (1.2 + 1.8) + (2.1 + .9) + 1.6$

$= 3.0 + 3.0 + 1.6$

$= (3.0 + 3.0) + 1.6$

$= 6.0 + 1.6$

$= 7.6$

(h) $(8 + 7) + 4 + (3 + 6)$
$= (8 + 7) + (3 + 6) + 4$
$= 8 + (7 + 3) + (6 + 4)$
$= 8 + 10 + 10$
$= 8 + (10 + 10)$
$= 8 + 20$
$= 28$

2. 179 milímetros

   Sí

   Aunque es muy fácil contestar esta pregunta, el que la respuesta sea "sí" depende de dos propiedades estudiadas en esta sección que dicen al estudiante que los números se pueden sumar en cualquier orden. Así,

$$32 + 71 + 76 = 76 + 71 + 32.$$

<u>Página 27</u>. Es más fácil calcular la frase $(4 \times 1.5) \times 3$, porque la primera multiplicación da un número entero, lo cual simplifica la siguiente etapa.

La palabra "seguidos" en la línea 1 de la página 28 es una que nos interesaría que el estudiante aprendiera.

Otro intercambio sería conmutar 7×4 a 4×7 en la frase de la derecha, que entonces aparecería como $\frac{3}{4}(4 \times 7)$. Ahora el ejemplo está en la forma

$$(7 \times \frac{3}{4}) \times 4 = \frac{3}{4} \times (4 \times 7)$$

Aplicando la propiedad asociativa, tenemos

$$7 \times (\frac{3}{4} \times 4) = (\frac{3}{4} \times 4) \times 7$$

$$7 \times 3 = 3 \times 7$$

Aplicando la propiedad conmutativa otra vez, tenemos

$$7 \times 3 = 7 \times 3$$

Respuestas al Conjunto de problemas 2-2b; página 28:

1. El propósito de este problema en relación con las propiedades de la multiplicación es el mismo que el del problema 1 del Conjunto de problemas 2-2a en relación con las propiedades de la suma.

(a) $4 \times 7 \times 25$
$= 4 \times 25 \times 7$
$= (4 \times 25) \times 7$
$= 100 \times 7$
$= 700$

(b) $\frac{1}{5} \times (26 \times 5)$
$= \frac{1}{5} \times (5 \times 26)$
$= (\frac{1}{5} \times 5) \times 26$
$= 1 \times 26$
$= 26$

$\frac{1}{5} \times (26 \times 5)$
$= (26 \times 5) \times \frac{1}{5}$
$= 26 \times (5 \times \frac{1}{5})$
$= 26 \times 1$
$= 26$

(c) $73 + 62 + 27$
$= 73 + 27 + 62$
$= (73 + 27) + 62$
$= 100 + 62$
$= 162$

Este problema es un recordatorio de que no se deben olvidar las propiedades de la suma aun cuando el centro de la atención esté en las propiedades de la multiplicación.

(d) $(3 \times 4) \times (7 \times 25)$
$= 3 \times (4 \times (7 \times 25))$
$= 3 \times ((7 \times 25) \times 4)$
$= 3 \times (7 \times (25 \times 4))$
$= 3 \times (7 \times 100)$
$= (3 \times 7) \times 100$
$= 21 \times 100$
$= 2100$

Probablemente el estudiante dará la respuesta: "Multiplicamos 25 por 4 que da 100; luego multiplicamos 3 por 7 que da 21; finalmente multiplicamos 100 por 21 para obtener 2100".

(e) He aquí un ejercicio en el cual no hay "una manera más fácil", es decir, no hay que reagrupar.

$12 \times 14 = 168$

(f) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{5}{6}$

$= (\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}) \times \frac{5}{6}$

$= \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$

$= \frac{5}{36}$

Preferimos esta manera de efectuar los cálculos sólo porque se trabaja con números de un solo dígito hasta que se llega a la

(g) $6 \times 8 \times 125$

$= 6 \times (8 \times 125)$

$= 6 \times 1000$

$= 6000$

(h) $(1.25) \times 5.5 \times 8$

$= 5.5 \times 8 \times 1.25$

$= 5.5 \times (8 \times 1.25)$

$= 5.5 \times 10$

$= 55$

(i) $(2 \times 5) \times 1.97$

$= 10 \times 1.97$

$= 19.7$

Obsérvese que en este caso es mejor trabajar partiendo de la forma original del problema.

(j) $\frac{5}{4} \times 6 \times \frac{4}{3} \times \frac{1}{5}$

$= 6 \times \frac{4}{3} \times \frac{1}{5} \times \frac{5}{4}$

$= 6 \times \frac{4}{3} \times (\frac{1}{5} \times \frac{5}{4})$

$= 6 \times \frac{4}{3} \times \frac{1}{4}$

$= 6 \times (\frac{4}{3} \times \frac{1}{4})$

$= 6 \times \frac{1}{3}$

$= 2$

2. Es más fácil calcular la primera forma de cada una de las partes del problema, porque contiene la repetición de un producto parcial. Así, pues, los productos parciales repetidos se pueden copiar de los ya escritos.

Página 31. El propósito de estos ejercicios, en los casos en que los enunciados son ciertos, es que el estudiante se dé cuenta de la veracidad de los mismos, no porque se puedan reducir los dos miembros al mismo nombre corriente, sino porque el enunciado es un ejemplo de un modelo válido. Tal vez sea necesario recordarle esto a los estudiantes. Por ejemplo, en el ejercicio 1(b), la mejor respuesta que el estudiante puede dar sería: "Sé que 15 = 7 + 8, y además el enunciado sigue el modelo de la propiedad distributiva. Por lo tanto, el enunciado es cierto". Si se trabaja de la manera que se muestra a continuación, también se obtiene el mismo resultado. El propósito de los enunciados falsos es identificar los errores que puedan cometer los estudiantes al escribir incorrectamente la propiedad distributiva, (d), o debido al mal uso de la notación de las fracciones mixtas, (f).

Respuestas al Conjunto de problemas 2-3a; página 31:

1. (a) $2 \times 4 + 5 \times 4 = 7 \times 4$

$= (2 + 5)4$

$= (7)(4)$ Cierto

(b) $15 \times 2 = 7 \times 2 + 8 \times 2$

$= (7 + 8)2$

$= (15)2$ Cierto

(c) $25(40 + 3) = 25(40) + 25(3)$

$25(40) + 25(3) = 25(40) + 25\ (3)$ Cierto

(d) $3(2) + 6(3) = 9(6)$

$3(2) + 3(6) = 9(6)$

$3(2 + 6) = 9(6)$

$3(8) = 9(6)$

$24 = 54$ Falso

(e) $13(19 + 1) = 13(19) + 13(1)$

$13(19) + 13(1) = 13(19) + 13(1)$ Cierto

(f) $2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) = 2\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4}$

$2(\frac{1}{2}) + 2(\frac{1}{4}) = 2\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4}$ $1\frac{1}{2} = 2\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4}$

$1 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4}$ Cierto

Este problema deberá servir de repaso del estudio de la multiplicación indicada y recordar al estudiante que el "número mixto" $2\frac{1}{2}$ no representa $2(\frac{1}{2})$.

(g) $12(\frac{2}{3} + \frac{3}{4}) = 12(\frac{2}{3}) + 12(\frac{3}{4})$

$12(\frac{2}{3}) + 12(\frac{3}{4}) = 12(\frac{2}{3}) + 12(\frac{3}{4})$ Cierto

(h) $3(2.5) + 3(1.5) = 3(2.5 + 1.5)$

$3(2.5 + 1.5) = 3(2.5 + 1.5)$ Cierto

En el resto del curso, no usaremos con mucha frecuencia las palabras subrayadas en la expresión "propiedad distributiva <u>de la multiplicación con respecto a la suma</u>"; sin embargo, podrán servir de referencia cuando los estudiantes lleven a cabo manipulaciones incorrectas. No es necesario que el estudiante comprenda el significado inmediatamente.

En el tercer ejemplo, es más fácil calcular el producto indicado. Lo mismo sucede en los ejercicios 1(a), 1(b), 1(d), 1(e) y 1(h) de la página 31. La suma indicada facilita los cálculos en los ejercicios 1(c), 1(f) y 1(g).

Páginas 32-33. $(\frac{1}{3} + \frac{1}{4})12 = 12(\frac{1}{3} + \frac{1}{4})$, por la propiedad conmutativa de la multiplicación.

El análisis detallado de

$$(\frac{1}{3} + \frac{1}{4})12 = (\frac{1}{3})12 + (\frac{1}{4})12$$

es realmente, entre otras cosas, una preparación para las demostraciones que estudiaremos más adelante en el curso. No nos conformamos con sólo cotejar la veracidad de este enunciado mediante operaciones aritméticas; averiguamos también que este enunciado es cierto, utilizando un argumento tomado de una corta serie de enunciados que ya sabemos ciertos de antemano. Por ahora, no es necesario hacer hincapié en este desarrollo. Es el primero de los muchos que estudiaremos.

Para enunciar la ley se sugiere el siguiente modelo: Dados tres números, el producto del primero y el segundo más el producto del tercero y el segundo es igual al producto obtenido cuando la suma del primero y el tercero se multiplica por el segundo.

Respuestas al Conjunto de problemas 2-3b; páginas 33-35:

1. (a) $12(3 + 4) = 12(3) + 12(4)$
   (b) $3(5) + 3(7) = 3(5 + 7)$
   (c) $(2.5 + 4.5)4 = (2.5)4 + (4.5)4$
   (d) $24(\frac{1}{8}) + 24(\frac{1}{6}) = 24(\frac{1}{8} + \frac{1}{6})$
   (e) $7(17) + 6(17) = 13(17)$
   (f) $(3 + 11)2 = 3(2) + 11(2)$

Este enunciado es cierto, no importa los números utilizados. Esto prepara el camino para el enunciado preciso de la propiedad distributiva en el próximo capítulo. Por ahora, no se deben utilizar variables al presentar este análisis a los estudiantes.

---

2. (a) $27(\frac{7}{8}) + 27(\frac{1}{8}) = 27(\frac{7}{8} + \frac{1}{8})$
$= 27(1)$
$= 27$

(b) $\frac{1}{3}(12) + \frac{1}{4}(12) = (\frac{1}{3} + \frac{1}{4})12$
$= 4 + 3$
$= 7$

(c) $(.36 + .14).6 = .36(.6) + .14(.6)$
$= (.50).6$
$= .30$

(d) $12(5 + 5) = 12(5) + 12(5)$
$= 12(10)$
$= 120$

(e) $(2.3 + 4.6) + 7.7 = (2.3 + 7.7) + 4.6$
$= 10 + 4.6$
$= 14.6$

(f) $6(\frac{3}{2} + \frac{2}{3}) = 6(\frac{3}{2}) + 6(\frac{2}{3})$
$= 9 + 4$
$= 13$

(g) $0.71(0.8) + 0.2(0.71) = 0.71(0.8) + 0.71(0.2)$
$= 0.71(0.8 + 0.2)$
$= 0.71(1.0)$
$= 0.71$

(h) $3(2 + 7 + 6 + 5) = 3(2) + 3(7) + 3(6) + 3(5)$
$= 3(20)$
$= 60$

3. El área del triángulo ACD es igual al área del triángulo EFI más el área del triángulo FGH. Aprendimos que el número de unidades cuadradas del área de un triángulo es igual a la mitad del producto del número de unidades de la base por el número de unidades de la altura. Los tres triángulos de la figura tienen la misma altura, 2.

$$\text{Area del triángulo ACD} = \frac{1}{2}(4)(2)$$

$$\text{Area del triángulo EFI} = \frac{1}{2}(3)(2)$$

$$\text{Area del triángulo FGH} = \frac{1}{2}(1)(2)$$

$$\frac{1}{2}(4)(2) = \frac{1}{2}(3)(2) + \frac{1}{2}(1)(2)$$

se convierte en

$$\frac{1}{2}(2)(4) = \frac{1}{2}(2)(3) + \frac{1}{2}(2)(1) \quad \text{(propiedad conmutativa de la multiplicación)}$$

$$\frac{1}{2}(2)(4) = \frac{1}{2}(2)(3 + 1) \quad \text{(propiedad distributiva)}$$

De este enunciado se deduce que si dos triángulos tienen alturas iguales, sus respectivas áreas dependen de sus bases.

4. $$\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right)11 + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right)7 = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right)(11 + 7)$$
$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right)18$$
$$= \frac{1}{2}(18) + \frac{2}{3}(18)$$
$$= 9 + 12$$
$$= 21$$

Aplicando la propiedad distributiva dos veces, el estudiante puede eliminar sumas inconvenientes. Este problema no debe omitirse, pues es una preparación importante para el estudio de la propiedad distributiva en el próximo capítulo.

5. (a) $8(\frac{3}{5} + \frac{2}{3}) + (\frac{2}{3} + \frac{3}{5})7 = 8(\frac{3}{5} + \frac{2}{3}) + 7(\frac{3}{5} + \frac{2}{3})$

$= (8 + 7)(\frac{3}{5} + \frac{2}{3})$

$= 15(\frac{3}{5} + \frac{2}{3})$

$= 15(\frac{3}{5}) + 15(\frac{2}{3})$

$= 9 + 10$

$= 19$

(b) $7(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{3}{4}) + 5(\frac{5}{6} + \frac{3}{4}) = 7\left((\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + \frac{3}{4}\right) + 5(\frac{5}{6} + \frac{3}{4})$

$= 7(\frac{5}{6} + \frac{3}{4}) + 5(\frac{5}{6} + \frac{3}{4})$

$= (7 + 5)(\frac{5}{6} + \frac{3}{4})$

$= 12(\frac{5}{6} + \frac{3}{4})$

$= 12(\frac{5}{6}) + 12(\frac{3}{4})$

$= 10 + 9$

$= 19$

(c) $5(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}) + 7(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = 5\left((\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + \frac{1}{5}\right) + 7(\frac{1}{2} + \frac{1}{3})$

$= 5(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + 5(\frac{1}{5}) + 7(\frac{1}{2} + \frac{1}{3})$

$= 5(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + 7(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + 5(\frac{1}{5})$

$= (5 + 7)(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + 5(\frac{1}{5})$

$= 12(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + 1$

$= 12(\frac{1}{2}) + 12(\frac{1}{3}) + 1$

$= 6 + 4 + 1$

$= (6 + 4) + 1$

$= 11$

6. (a) $3 \times (17 + 4) \times \frac{1}{3} = (3 \times \frac{1}{3})(17 + 4)$
$= 21$

(b) $\frac{3(17 + 4)}{3} = 17 + 4$
$= 21$

(c) $\frac{1}{5}(3 + 8)10 = (\frac{1}{5})(10)(3 + 8)$
$= 2(3 + 8)$
$= 22$

(d) $3(7) + 3(11) = 3(7 + 11)$
$= 3(18)$
$= 54$

(e) $3(7) + 3(2) = 3(7 + 2)$
$= 27$

(f) $3(7) + 6 = 21 + 6$
$= 27$

(g) $7(4) + 42 = 7(4) + 7(6)$
$= 7(4 + 6)$
$= 70$

(h) $3(\frac{1}{5}) + \frac{2}{5} = 3(\frac{1}{5}) + 2(\frac{1}{5})$
$= 5(\frac{1}{5})$
$= 1$

(i) $3(17) + 12 = 3(17) + 3(4)$
$= 3(17 + 4)$
$= 63$

(j) $6(19) + 19 = (6 + 1)19$
$= 133$

(k) $(10 + 2) \times 4 \times \frac{1}{2} = (10 + 2) \times (4 \times \frac{1}{2})$
$= 12 \times 2$
$= 24$

(l) $\frac{(10 + 2) \times 4}{2} = \frac{12 \times 4}{2}$
$= \frac{48}{2}$
$= 24$

Los problemas 6(a), 6(b) y 6(g) constituyen una preparación muy especial para el estudio de la sección 2-4, por lo cual no deben omitirse.

Páginas 35-40. El objetivo de esta sección es familiarizar al estudiante con el significado de la palabra variable. Aquí, insistimos en que se considere a "n" o a "x", o a cualquier letra que se use como variable, como el nombre de un número definido, aunque no tengamos mucha información acerca de dicho número. En algunos casos, como en el ejercicio del texto, el número puede estar no especificado, porque lo que es cierto para él también lo es para todo número de un conjunto dado. Esto sucede en todos los casos en que nos interesa principalmente el modelo o la forma de un problema, más bien que el resultado. En otros casos, el número puede no estar especificado, debido a que al principio no sabemos cuál es el número en cuestión, pero se averiguará más tarde. Las variables según se utilizan en este contexto se llaman frecuentemente "incógnitas". De todos modos, hay que tratar de evitar que se interprete el concepto de variable como algo que varía sobre un conjunto de números.

El conjunto de números que incluye todos los valores de una variable se llama el "dominio" o a veces, el "campo de variabilidad", dependiendo mayormente del punto de vista desde el cual se consideren la variable y su conjunto. Hay puntos de vista que justifican el escoger uno u otro de los dos términos. Para muchos maestros la conexión más natural entre una variable y su conjunto de valores es considerar la variable como la variable "independiente" en uná relación funcional, por lo tanto, para nombrar el conjunto se les ocurre más fácilmente el término "dominio". Sin embargo, se debe recalcar que no es necesario considerar la variable como la variable "independiente" en una relación funcional, sino que, en efecto, puede considerarse también como variable "dependiente".

Los pasos en el ejercicio propuesto son:

$$7$$
$$3\cdot 7$$
$$3\cdot 7 + 3$$
$$2(3\cdot 7 + 3)$$
$$\frac{2(3\cdot 7 + 3)}{12}$$

La última frase es un numeral para 4.

Página 36. El estudiante puede preguntarse por qué insistimos en escribir $3(17) + 12 = 3(17 + 4)$ en lugar de $3(17) + 12 = 51 + 12 = 63$. Desde luego, cualquier método da el mismo resultado. Sin embargo, el primero nos pone en disposición de efectuar los cálculos que siguen más adelante, utilizando la letra "n" en lugar de "17". Quizás quedarán satisfechos casi todos los estudiantes que planteen la cuestión si se les indica que el primer método pone de manifiesto la estructura, mientras que el segundo método tiende a ocultarla.

No habría cambio significativo alguno en el tratamiento del ejercicio si hubiéramos decidido usar alguna otra letra distinta de n para indicar el número elegido en S.

Para introducir el concepto de variable a los estudiantes, algunos maestros consideran provechoso organizar en la clase un juego con números, además de utilizar el material presentado en el texto. Se les puede "estimular" oralmente con algunos juegos "para escoger un número" que ellos no puedan manejar con medios puramente aritméticos; después de participar en esos juegos apreciarán fácilmente el uso de una variable. Otro método que ha dado buenos resultados es organizar el juego utilizando la pizarra.

Ejemplo: "Escoge un número de algún conjunto S, como, por ejemplo, el conjunto de todos los números cardinales entre 1 y 30, súmale 3, multiplica por 2, y resta el duplo del número escogido".

Distintos alumnos pueden ir a la pizarra, ensayar con números diferentes y siempre obtener el resultado 6. A otros se les puede pedir que dejen los numerales indicados, otros pueden usar la palabra "número" en lugar de un numeral particular, y aún otros pueden utilizar una variable como "n" o "x" desde el principio. La pizarra puede aparecer así:

4	5	número	n
7	$5 + 3$	número + 3	$n + 3$
14	$2(5 + 3)$	2(número + 3)	$2(n + 3)$
14	$2\cdot 5 + 6$	2(número) + 6	$2n + 6$
6	$2\cdot 5 + 6 - 2\cdot 5$	2(número) + 6 - 2(número)	$2n + 6 - 2n$
6	6	6	6

En este ejemplo se utiliza la propiedad distributiva, que los estudiantes ya han visto, pero también se utiliza la propiedad asociativa con una resta, lo cual no han visto. Sin embargo, las operaciones con números son bastante sencillas, y, por lo tanto, no tendrán dificultades con "2n - 2n". Ciertamente, no es necesario preocuparse por ello. Si por alguna razón hay alguna probabilidad de que la resta cause dificultades, siempre se podrá presentar el juego con un ejemplo como el del texto, en el cual no interviene la resta.

<u>Respuestas al Conjunto de problemas 2-4</u>; páginas 38-40:

1. $2(t + 3)$
2. $\dfrac{2n + 5}{3}$
3. Las dos formas son correctas. La segunda se obtiene de la primera mediante la aplicación de la propiedad asociativa de la multiplicación.
4. $4y$

5. Ninguna de las formas es correcta. Las formas correctas son $2(a + b)$ y $2a + 2b$.

6. (a) $\frac{39}{2}$ (f) 0

(b) 15 (g) 13

(c) 27 (h) 0

(d) $\frac{9}{4}$ (i) 9

(e) $\frac{3}{2}$ (j) 10

7. (a) $\frac{9}{5}c + 32 = \frac{9}{5}(85) + 32$

$= 153 + 32$

$= 185$

(b) $\frac{h(a + b)}{2} = \frac{4(3 + 5)}{2}$

$= 2(8)$

$= 16$

(c) $p(1 + rt) = 500\left(1 + 0.04(3)\right)$

$= 500(1 + .12)$

$= 500 + 60$

$= 560$

(d) $\frac{r\ell - a}{r - 1}$ $\frac{2(48) - 4}{2 - 1} = 96 - 4$

$= 92$

(e) $\ell wh = 18(10)(6)$

$= 1080$

8. (a) $\frac{(3a + 4b) - 2c}{3} = \frac{(3 \cdot 3 + 4 \cdot 2) - 2 \cdot 4}{3}$

$= 3$

(b) $\frac{(6a - 4b) + 5c}{5} = \frac{(6 \cdot 3 - 4 \cdot 2) + 5 \cdot 4}{5}$

$= \frac{10 + 20}{5}$

$= 6$

(c) $$\frac{\left(\frac{7a}{2}+\frac{3b}{2}\right)-\frac{5c}{2}}{2}=\frac{\left(\frac{7\cdot 3}{2}+\frac{3\cdot 2}{2}\right)-\frac{5\cdot 4}{2}}{2}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(21+6)-\frac{20}{2}}{2}$$

$$=\frac{\frac{7}{2}}{2}$$

$$=\frac{7}{4}$$

(d) $$\frac{\left(1.5(3)+3.7(2)\right)-2.1(4)}{7}=\frac{(4.5+7.4)-8.4}{7}$$

$$=\frac{11.9-8.4}{7}$$

$$=\frac{3.5}{7}$$

$$=.5$$

9. A continuación se da una lista de algunas de las ideas importantes de este capítulo en el orden en que han ido apareciendo en el mismo:

<u>Sección 2-1</u>

1. Los <u>numerales</u> son nombres de los números y se distinguen de los números mismos.
2. La presencia de un signo de igualdad entre dos numerales indica que los numerales representan el mismo número.
3. Para evitar toda duda en cuanto al significado de un numeral, convenimos en que, cuando no se indique otra cosa, se efectúa primero la operación de multiplicación, y luego las operaciones de suma y resta, en las expresiones en que intervengan dichas operaciones.
4. Se pueden utilizar paréntesis para encerrar aquellas partes de una expresión que han de tomarse como un numeral.
5. Una frase numérica es un numeral dado mediante una expresión que comprende otros numerales, así como también signos de operaciones.

6. Las frases numéricas se pueden combinar para formar enunciados numéricos, cada uno de los cuales puede ser cierto o falso, pero no ambas cosas.

Sección 2-2

7.- Una propiedad de una operación es "algo que esa operación posee", es decir, una de sus características.

8. Una operación binaria es una que siempre se efectúa con dos números. La suma es un ejemplo de una operación binaria.

9. La propiedad asociativa de la suma.

10. La propiedad conmutativa de la suma.

11. La propiedad asociativa de la multiplicación.

12. La propiedad conmutativa de la multiplicación.

Sección 2-3

13. La propiedad distributiva (de la multiplicación con respecto a la suma).

14. La propiedad distributiva tiene una forma alternativa que se ilustra así: $2(3 + 4) = 2(3) + 2(4)$ ó $(3 + 4)2 = (3)2 + (4)2$.

Sección 2-4

15. Una variable es un numeral que representa un número definido, pero no especificado, de un conjunto dado de números admisibles.

16. Todo número que una variable dada puede representar se llama un valor de la variable.

17. Llamamos dominio o campo de variabilidad de una variable al conjunto de valores de la misma.

Capítulo 2

Sugerencias para exámenes

1. Coloca paréntesis en cada una de las siguientes expresiones de manera que obtengas enunciados ciertos:

   (a) $5 \times 4 + 3 = 35$ (d) $5 \times 4 + 3 \times 6 = 110$

   (b) $5 \times 4 + 3 = 23$ (e) $5 \times 4 + 3 \times 6 = 38$

   (c) $5 \times 4 + 3 \times 6 = 210$ (f) $5 \times 4 + 3 \times 6 = 138$

2. Determina cuáles de los siguientes enunciados son ciertos:

   (a) $\frac{1}{2} + \frac{5}{8} = 1 + \frac{1}{8}$ (c) $8(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) = 8(\frac{1}{2}) + \frac{1}{4}$

   (b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$ (d) $8(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) = 4 + 2$

3. Copia las siguientes frases e indica los pasos que seguiste para hallar el nombre más sencillo de cada uno de los números representados:

   (a) $\frac{3(5 + 2) - 6}{5}$ (b) $\frac{8(4 + 3)}{4} - 3$

4. ¿Cuáles de los numerales que siguen son nombres para 6?

   (a) $\frac{6 + 12}{6}$ (c) $\frac{1 + (1 + 1) + 15}{6}$

   (b) $3(1 + 1)$ (d) $\frac{1 + (3 - 3)}{\frac{1}{6}}$

5. Escribe otros tres nombres para el número 7.

6. Muestra la manera de calcular el valor de cada una de las siguientes frases:

   (a) $\frac{3}{4} + (\frac{1}{3})(6) + \frac{2}{3}$

   (b) $1 + (2 + \frac{1}{3})3 + 1$

7. Utilizando los miembros del conjunto $\{2, 5, 7\}$, ilustra cada una de las siguientes propiedades:
   (a) la propiedad conmutativa de la suma
   (b) la propiedad asociativa de la multiplicación
   (c) la propiedad distributiva
8. Determina la propiedad ilustrada por cada uno de los siguientes enunciados ciertos:

   (a) $3 + 8 + 7 = 3 + 7 + 8$
   (b) $3(8 + 7) = 24 + 21$
   (c) $(5)(8)(9) = (8)(5)(9)$
   (d) $35 + 42 = 7(5 + 6)$
   (e) $(3 + 2) + 5 = 3 + (2 + 5)$
   (f) $\frac{2}{3}\left(\left(\frac{9}{4}\right)(7)\right) = \left(\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{9}{4}\right)\right)(7)$

9. Muestra la manera de utilizar las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva para efectuar cada uno de los siguientes cálculos en la forma más sencilla posible:
   (a) $6\frac{2}{5} + (17 + 3\frac{3}{5}) + 53$
   (b) $\dfrac{5 \times 13 + 6 \times 13}{2 \times 11 + 9 \times 11}$
   (c) $34.3(356) + 34.3(644)$
   (d) $(3 \times 4)(7 \times 25)$
   (e) $\frac{1}{5}(\frac{7}{8}) + \frac{1}{5}(\frac{1}{8})$
   (f) $16(\frac{3}{8} + \frac{1}{4})$
   (g) $42(5) + 40$
10. Una manera de sumar $24 + 66$ es:

$$
\begin{aligned}
24 + 66 &= 24 + (6 + 60) \\
&= (24 + 6) + 60 \\
&= 30 + 60 \\
&= 90
\end{aligned}
$$

   (a) ¿Qué propiedad se utilizó?
   (b) Suma $24 + 66$ de la manera indicada a continuación y señala las propiedades utilizadas:

$$
\begin{aligned}
24 + 66 &= (20 + 4) + (60 + 6) \\
&= (\text{etc.})
\end{aligned}
$$

11. Ilustra la manera de usar las propiedades asociativa y conmutativa para escribir fácilmente los nombres corrientes de los siguientes numerales:

(a) $(5 \times 37) \times 20$
(b) $54 + 17 + 46$
(c) $3\frac{2}{3} + 4\frac{1}{7} + 6\frac{1}{3}$

12. Muestra los pasos del proceso para hallar el nombre corriente de $\frac{9(x + 3y) - z}{3}$ cuando x es 2, y es 0 y z es 1.

13. Halla el valor de $\frac{3(k + m) - p}{2m}$ si k es 5, m es 2 y p es 7.

14. Un cierto número n se multiplica por 5, luego se aumenta en 5 y el resultado se duplica. ¿Cuál de las siguientes expresiones describe mejor el enunciado anterior?

(a) $2 \times 5(n + 5)$
(b) $2(5n + 5)$
(c) $2n(5 + 5)$
(d) $2(5n + 25)$

15. Redacta instrucciones verbales que se describan mediante la frase $\frac{3n(n + 3)}{8}$.

16. Un ejercicio comienza así: "Escoge un número del 1 al 10, inclusive ...". Si la variable en este problema es n,

(a) dibuja una gráfica del dominio de n;
(b) determina cuáles de los números siguientes nunca podrían tomarse como valores de n: 2, $\frac{9}{4}$, $\frac{21}{2}$, π, $\frac{1}{3}$, 4π, 1.

Capítulo 3

ENUNCIADOS Y PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES

Este curso comprende un estudio sistemático de los números y sus propiedades. A primera vista parece que la aritmética tiene este mismo propósito, y, por eso, al introducir este capítulo, debemos distinguir entre la aritmética y el álgebra. La aritmética consiste, primariamente, en la aplicación más bien mecánica de un gran número de reglas para calcular correctamente y, en general, se hace muy poco esfuerzo para entender estas reglas y los números a los cuales se aplican. Por otra parte, en el álgebra nos interesa entender cabalmente el porqué los números y las operaciones con ellos se comportan de una cierta manera. Aquí buscamos las propiedades generales interesantes de los números y de las operaciones aritméticas conocidas ya por el estudiante. En pocas palabras, nos interesa lo que los matemáticos algunas veces llaman "estructura" del "sistema" de los números. Otras palabras que conllevan el mismo significado que "estructura" son, "modelo", "forma" y "organización".

Es inevitable que muchas de las propiedades generales de los números y de las operaciones con ellos sean conocidas por los estudiantes como resultado de su estudio de la aritmética. Sin embargo, no se conocen las propiedades en cuanto a principios explícitos. En el capítulo anterior, tuvimos el propósito de que los estudiantes descubrieran algunas de estas propiedades mediante preguntas y ejemplos.

En este capítulo, se hace un estudio ulterior de las propiedades y éstas se formalizan. Las propiedades que de este modo hemos procurado que el estudiante descubra, son las propiedades conmutativa y asociativa de la suma y la multiplicación, la propiedad distributiva, y lo que llamamos la propiedad aditiva del 0 y la propiedad multiplicativa del 1. Hemos incluido también la propiedad multiplicativa del 0, aunque ésta se podría deducir de las otras propiedades. Más adelante, en los Capítulos 6 y 7, vemos que todas estas propiedades de las operaciones son válidas para todos los números reales. Aquí, consideramos solamente los números reales no negativos.

El estudiante, acostumbrado a la aritmética, podrá cuestionar el porqué de todo esto. Confiamos en que el uso de ejercicios estimulantes pueda evitar esta pregunta, pero la contestación auténtica es importante, y consiste principalmente en lo que hemos dicho acerca de nuestro interés en la estructura.

Un segundo propósito de este capítulo es el desarrollo de una gran parte de la técnica para la simplificación de expresiones algebraicas. Hacemos esto aquí, porque uno de los aspectos esenciales de este curso es que los múltiples ejercicios necesarios para lograr destreza técnica vayan unidos a las ideas de los cuales se deriva la validez de las técnicas. Practicamos las simplificaciones algebraicas cuando los principios en los cuales se basan dichas simplificaciones se desarrollan por primera vez, y en muchas otras ocasiones de ahí en adelante. Además, estos principios son precisamente las propiedades de los números que el estudiante debe descubrir en este capítulo.

Como preparación para formalizar estas propiedades, primeramente enriquecemos nuestro vocabulario. El concepto de un enunciado, que estudiamos en el Capítulo 2, se amplía de tres maneras: (1) Aumentamos la variedad de las relaciones que nuestros enunciados pueden expresar, para incluir las inecuaciones juntamente con las ecuaciones, (2) Redactamos enunciados abiertos que contienen variables, y para los cuales es importante la noción del conjunto de validez. Es necesario que el estudiante considere las ecuaciones y las inecuaciones como enunciados, como objetos del álgebra a los cuales debemos prestar la misma atención, y como tipos de enunciados igualmente interesantes y útiles, (3) Consideramos enunciados compuestos y enunciados simples.

No todos estos conceptos son de necesidad inmediata para enunciar las propiedades de las operaciones con números de la aritmética, pero conviene introducirlos todos a la vez. Se emplearán muchas veces en todo el curso.

Como referencia general para el trabajo de este capítulo, el maestro puede leer, Haag, Studies in Mathematics, Volume III, Structure of Elementary Algebra: Capítulo 2, sección 2, para el trabajo relacionado con los enunciados; Capítulo 1, sección 3 y Capítulo 3, sección 2, como base para el estudio de la estructura.

Los alumnos que ya estudiaron el capítulo acerca de las ecuaciones en el material del SMSG para octavo grado notarán que nuestro Capítulo 3 presenta un enfoque diferente y considerablemente más extenso. Probablemente se prefiera tratar las secciones 3-1 a 3-9 como si los estudiantes tuvieran poca o ninguna experiencia en el estudio de los enunciados.

El empleo de variables en el Capítulo 3 para formular las propiedades de la suma y la multiplicación será familiar para los que ya han estudiado el material del SMSG. No obstante, las aplicaciones de estas propiedades son más extensas que las estudiadas en los grados séptimo y octavo y deben llevarse a cabo cuidadosamente.

Página 41. Los símbolos "=", "≠", "<", "≥", etc. denotan realmente verbos que expresan una relación entre dos números. Sin embargo, como "es mayor que" o "no es igual a" no forman una sola palabra, las llamaremos "formas verbales".

Respuestas al Conjunto de problemas 3-1; página 41:

1.	Falso	6.	Falso	11.	Cierto
2.	Cierto	7.	Cierto	12.	Falso
3.	Cierto	8.	Falso	13.	Falso
4.	Falso	9.	Cierto	14.	Cierto
5.	Cierto	10.	Cierto	15.	Falso

Página 42. Una frase abierta también es "abierta" en el sentido de que no podemos determinar de modo preciso qué número representa hasta que no sepamos justamente qué números representan las variables.

Respuestas al Conjunto de problemas 3-2a; páginas 42-43:

1. Cierto cuando x es igual a 5.
2. Falso cuando x es igual a 5.
3. Cierto cuando x es igual a 6.
4. Falso cuando x es igual a 6.
5. Cierto cuando x es igual a 3.

   Falso cuando x es igual a 4.
6. Falso cuando x es igual a 4 e y es igual a 3.

   Cierto cuando x es igual a 3 e y es igual a 4.
7. Falso cuando a es igual a 9 y b es igual a 9.

   Falso cuando a es igual a 3 y b es igual a 9.
8. No sabemos hasta tanto sepamos el valor de m.

En los problemas 7 y 8, es necesario recalcar que el valor dado de "a" debe utilizarse en todas las ocasiones en que aparezca "a".

Página 43. Se supone que el experimento con el ejemplo "$2x - 11 = 6$" sugiera una manera sistemática de ensayar valores de la variable que hagan cierto el enunciado. El método puede sugerir también cómo se podría decidir si se han hallado o no todos esos valores. Por ejemplo, un valor de x mayor que $8\frac{1}{2}$ dará un número mayor que $2(8\frac{1}{2}) - 11$, y un valor menor que $8\frac{1}{2}$ dará un número menor que $2(8\frac{1}{2}) - 11$. Más adelante, en el Capítulo 8, estudiaremos las propiedades de ordenación sugeridas aquí.

Respuestas al Conjunto de problemas 3-2b; página 44:

1.	4	6.	14
2.	10	7.	Ningún número
3.	4	8.	Todos los números
4.	$\frac{17}{3}$	9.	Todos los números
5.	2	10.	Ningún número

En los problemas 1 al 6, el estudiante deberá asegurarse que todos los valores de la variable hayan sido determinados mediante un procedimiento análogo al que expusimos anteriormente y con el cual decidimos que $\{8\frac{1}{2}\}$ es el conjunto de validez de $2x - 11 = 6$.

Respuestas al Conjunto de problemas 3-2c; página 44:

1.	(a)	3	(e)	7
	(b)	2	(f)	3
	(c)	1 y 0	(g)	ningún valor
	(d)	2	(h)	0

2. $\frac{3}{4}$

3. 1.4

Página 45. Un enunciado abierto que comprende una variable tiene un "conjunto de validez" definido como el conjunto de los números que hacen cierto el enunciado. Por ahora, no necesitamos introducir un nombre para el conjunto que hace falso el enunciado. La frase "conjunto de soluciones" también se usa para "conjunto de validez", particularmente para los enunciados que aparecen en forma de ecuaciones. Más adelante usaremos "conjunto de soluciones", pero deseamos que el estudiante emplee la frase "conjunto de validez" lo bastante para entender completamente su significado.

Respuestas al Conjunto de problemas 3-3a; páginas 45-46:

1. (a) Como $7 + 5 = 12$ es un enunciado cierto, 5 pertenece al conjunto de validez.

   (b) Como $6 + 9 \neq 11$ es un enunciado cierto, 6 pertenece al conjunto de validez.

   (c) Como $\frac{5(3) + 1}{7} \neq 3$ es un enunciado cierto, 3 pertenece al conjunto de validez.

   (d) Como $2(3) + 1 = 2(3 + 1)$ es un enunciado falso, 3 no pertenece al conjunto de validez.

   (e) Como $3 + \frac{1}{3} = 2$ es un enunciado falso, 3 no pertenece al conjunto de validez.

   (f) Como $3(5) = 5 + 2(5)$ es un enunciado cierto, 5 pertenece al conjunto de validez.

   (g) Como $(3)^2 + 2(3) \neq 3(3 + 2)$ es un enunciado falso, 3 no pertenece al conjunto de validez.

2. (a) $\{\frac{2}{3}\}$ (e) $\{0, 2\}$

(b) $\{1, 3\}$ (f) $\{4\}$

(c) $\{1, \frac{1}{6}\}$ (g) $\{\frac{1}{2}\}$

(d) $\{1\}$ (h) $\emptyset$

3. Esto requiere el análisis de por lo menos varios de los enunciados expuestos. Una posibilidad es $x = x + 1$.

Página 46. Obsérvese que tenemos el cuidado de leer una fórmula, por ejemplo la $V = \frac{1}{3}Bh$, como un enunciado acerca de números y no acerca de unidades cuadradas o unidades cúbicas. El uso corriente no es tan preciso, pero es importante, por lo menos al principio, asegurarse de que el estudiante entienda que las operaciones suma y multiplicación se aplican a los números y no a las pulgadas, a las manzanas, a las rectas, a los segmentos, etc.

Página 47. Conjunto de problemas 3-3b. Estos problemas contienen fórmulas importantes de aplicaciones que pueden ser conocidas o no por algunos estudiantes. Sin embargo, esto no debe producir dificultades, puesto que nuestro uso de las fórmulas es independiente de las aplicaciones. En capítulos posteriores, continuaremos ofreciendo prácticas con fórmulas.

Respuestas al Conjunto de problemas 3-3b; páginas 47-48:

1. $C = \frac{5}{9}(86 - 32)$

$C = \frac{5}{9}(54)$

$C = 30$

C es igual a 30.

2. $i = prt$

$120 = 1000(0.04)t$

$120 = 40t$

t es igual a 3.

3. $pv = PV$

$(15)(600) = 75(V)$

$(15)(5)(120) = 75(V)$

$(75)(120) = 75(V)$

V es igual a 120.

*4. $A = \frac{1}{2}(B + b)h$

$20 = \frac{1}{2}(B + 4)4$

$20 = \frac{1}{2}(4)(B + 4)$

$20 = 2(B + 4)$

B es igual a 6.

Página 48. Pronto empezaremos a decir (página 55) "gráfica del enunciado abierto" en vez de lo que es menos cómodo pero más preciso, "gráfica del conjunto de validez del enunciado abierto".

En el ejemplo (f) no hay que inquietarse por la "representación gráfica" del conjunto vacío. El hacerlo con ninguna gráfica o con una recta numérica sin puntos marcados es correcto.

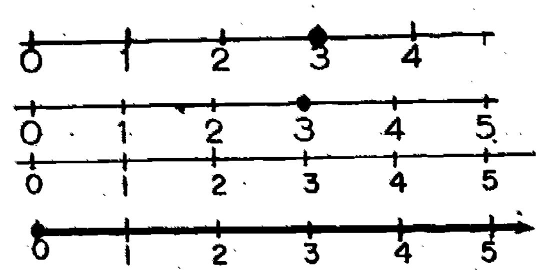
Para mayor conveniencia al hacer problemas que se refieran a la recta numérica, ~~puede~~ resultar cómodo el disponer de varias copias, en hojas distintas, de representaciones de la recta numérica, para el uso de los estudiantes.

En cualquiera de los conjuntos de problemas en que se pide al estudiante determinar el conjunto de validez, trátese de que verifique sus resultados para estar seguro de que ha encontrado todos los números que hacen cierto el enunciado.

Respuestas al Conjunto de problemas 3-4; páginas 48-49:

	Conjunto de Validez
1.	$\{3\}$
2.	$\{3\}$
3.	$\emptyset$
4.	Todos los números.

Gráfica



Conjunto de Validez | Gráfica

5. $\{0\}$

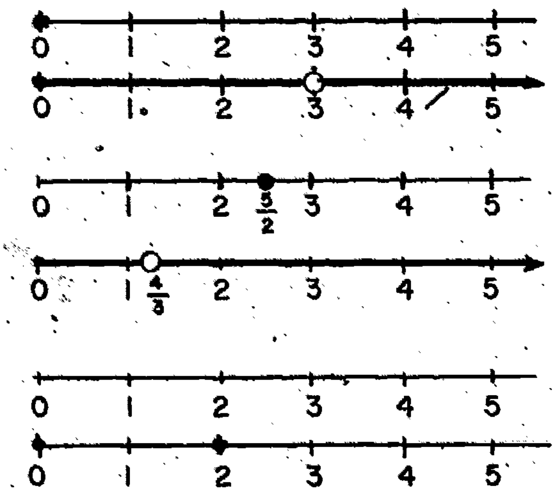
6. Todos los números excepto 3.

7. $\{\frac{5}{2}\}$

8. Todos los números excepto $\frac{4}{3}$.

9. $\emptyset$

10. $\{0, 2\}$



<u>Respuestas al Conjunto de problemas 3-5</u>; página 49:

1.	Falso	7.	Cierto
2.	Cierto	8.	Falso
3.	Falso	9.	Cierto
4.	Cierto	10.	Falso
5.	Cierto	11.	Falso
6.	Cierto	12.	Falso

<u>Respuestas al Conjunto de problemas 3-6</u>; páginas 50-52:

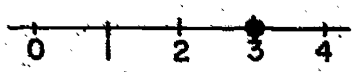
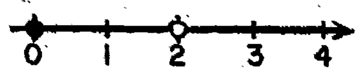
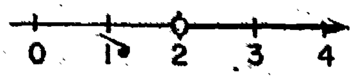
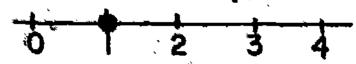
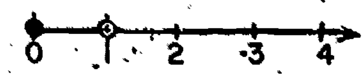
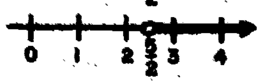
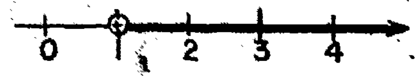
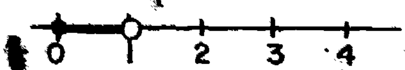
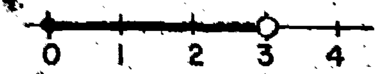
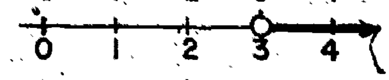
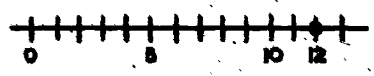
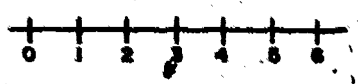
1. (a) La gráfica es la gráfica del conjunto de validez de $2 + x = 4$.

   (b) La gráfica no es la gráfica del conjunto de validez de $3x=5$, porque $3(2) = 5$ es falso.

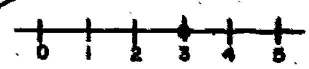
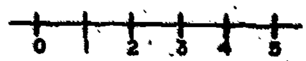
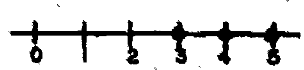
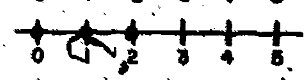
   (c) La gráfica es la gráfica del conjunto de validez de $2y = 7$.

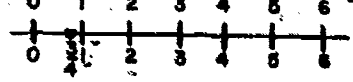
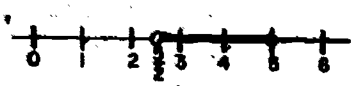
   (d) La gráfica no es la gráfica del conjunto de validez de $x > 1$, porque el conjunto de validez consiste en todos <u>los números mayores que 1</u>.

(e) La gráfica no es la gráfica del conjunto de validez de $2x > 5$, porque $2(\frac{5}{2}) > 5$ es falso, por lo tanto, $\frac{5}{2}$ no debe ser incluido.

2. (a) 
(b) 
(c) 
(d) 
(e) 
(f) 
(g) 
(h) 
(i) 
(j) 
(k) 
(l) 
(m) 
(n) 

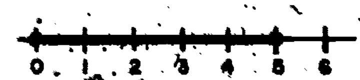
3. (a) $x = 2$
(b) $x < 2$
(c) $x \nless 4$
(d) $x > 1$
(e) $x \neq 1$

4. (a) $\{3\}$ 
(b) $\emptyset$ 
(c) $\{3, 4, 5\}$ 
(d) $\{0, 1, 2\}$ 
(e) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 

5. (a) $\{3\}$ 
(b) $\{\frac{3}{4}\}$ 
(c) 5 y todos los números mayores que $\frac{5}{2}$ y menores que 5. 

(d) Todos los números menores que 3.

(e) 0, 5, y todos los números mayores que 0 y menores que 5.



6. En 4, todos los conjuntos de validez son finitos. En 5, los conjuntos de validez de los enunciados en (a) y (b) son finitos.

Página 52. Utilizamos la palabra "cláusula" para denotar un enunciado que es parte de un enunciado compuesto, justamente como en la situación lingüística correspondiente. La palabra es conveniente, pero no muy importante.

Respuestas al Conjunto de problemas 3-7a; página 52:

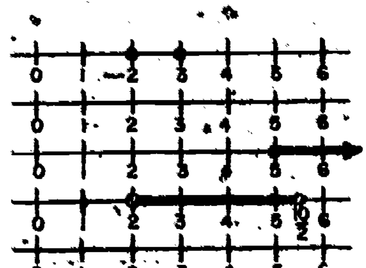
1. Cierto
2. Falso
3. Falso
4. Cierto
5. Falso
6. Cierto

Respuestas al Conjunto de problemas 3-7b; página 53:

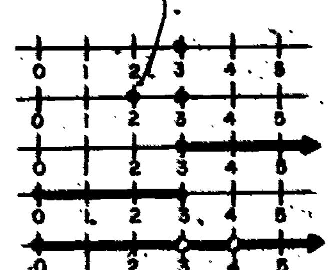
1. Cierto
2. Cierto
3. Falso
4. Falso
5. Falso
6. Falso

Respuestas al Conjunto de problemas 3-8; páginas 55-56:

1.
2.
3.
4.
5.

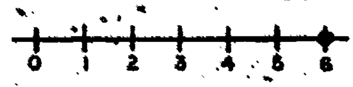


6.
7.
8.
9.
10.

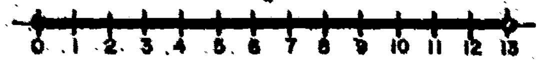


Respuestas al Conjunto de problemas 3-9; páginas 56-57:

1. {6}

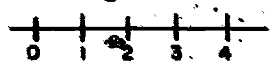


2. Todos los números menores que 13.



3. $\{\frac{3}{2}\}$

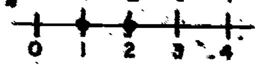
4. ∅



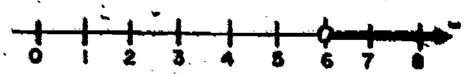
5. Todos los números.

6. {0, 1}

7. {1, 2}

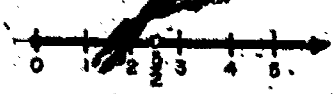


8. Todos los números mayores que 6.



9. Todos los números, excepto 0.

10. Todos los números, excepto $\frac{5}{2}$.

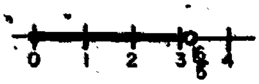


11. {2}

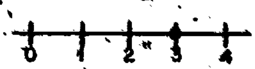
12. {2}

13. Todos los números menores que 3.

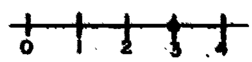
14. Todos los números menores que $3\frac{1}{5}$.



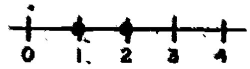
15. {3}



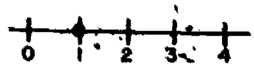
16. {3}



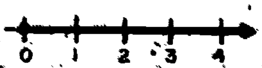
17. {1, 2}



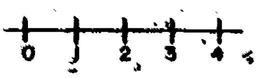
18. {1}



19. Todos los números.



20. ∅



<u>Página 57</u>. El orden en que se presentan las secciones 3-10, 3-11, y 3-12 puede parecer extraño, con los elementos neutrales en primer término, las propiedades de clausura en segundo término, y las propiedades asociativa y conmutativa en tercer término. Se escogió este orden, porque para enunciar las propiedades del 1 y del 0 se requiere solamente una variable en cada caso, mientras que para enunciar las propiedades de clausura se requieren dos y para las propiedades asociativas, tres. De este modo, las propiedades que son más fáciles de enunciar vienen primero.

<u>Página 58</u>. Obsérvese que un enunciado abierto que expresa una de las propiedades fundamentales es cierto para <u>todos</u> los valores de las variables. Tales enunciados proporcionan información de "estructura" o de "modelo" acerca del sistema numérico.

La propiedad multiplicativa del 0 no es, como las otras, una propiedad fundamental del sistema de los números reales (no aparecería, por ejemplo, entre los axiomas de un cuerpo ordenado), pero puede deducirse de las otras propiedades, y se incluye aquí porque deseamos que el estudiante la utilice.

<u>Página 60</u>. Conjunto de problemas 3-10. Si se desea, pueden darse a los estudiantes instrucciones adicionales, algo así como ésta: Antes de efectuar cálculos realmente complicados, examina de nuevo el problema y trata de ver si hay alguna manera más fácil.

Respuestas al Conjunto de problemas 3-10; páginas 60-61:

1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}(\frac{3}{3}) + \frac{1}{3}(\frac{2}{2})$

$= \frac{3}{6} + \frac{2}{6}$

$= \frac{5}{6}$

2. $\frac{7}{12} + \frac{5}{18} = \frac{7}{12}(\frac{3}{3}) + \frac{5}{18}(\frac{2}{2})$

$= \frac{21}{36} + \frac{10}{36}$

$= \frac{31}{36}$

3. $\dfrac{7 + \frac{2}{3}}{\frac{5}{6}} = \dfrac{7 + \frac{2}{3}}{\frac{5}{6}}(\frac{6}{6})$

$= \dfrac{(7 + \frac{2}{3})(6)}{(\frac{5}{6})(6)}$

$= \dfrac{42 + 4}{5}$

$= \dfrac{46}{5}$

4. $\dfrac{\frac{1}{2} + \frac{3}{5}}{\frac{3}{20}} = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{3}{5}}{\frac{3}{20}}(\frac{20}{20})$

$= \dfrac{(\frac{1}{2} + \frac{3}{5})(20)}{(\frac{3}{20})(20)}$

$= \dfrac{10 + 12}{3}$

$= \dfrac{22}{3}$

5. $27 + (15\frac{2}{3} + 2\frac{1}{3}) - 18 = 27 + 18 - 18$

$= 27 + 0$

$= 27$

6. $\frac{7}{8}\left((3.7 + 0.3) - 4\right) = \frac{7}{8}(4 - 4)$

$= \frac{7}{8}(0)$

$= 0$

7. $163\left(\frac{7}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) = 163\left(\frac{7}{12} + \frac{1}{6}\left(\frac{2}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{3}\right)\right)$

$= 163\left(\frac{7}{12} + \frac{2}{12} + \frac{3}{12}\right)$

$= 163\left(\frac{12}{12}\right)$

$= 163$

8. $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}(2)\right) + 17 = \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right) + 17$

$= 0 + 17$

$= 17$

9. $(6 - 6)(46)(36)\left(17 - \frac{2}{3}(12)\right) = 0(46)(36)\left(17 - \frac{2}{3}(12)\right)$

10. $\left(\frac{16}{3} - 5\right)(3)(5280) = \left(\frac{1}{3}\right)(3)(5280)$

$= (1)(5280)$

$= 5280$

*11. (a) El otro debe ser cero.

(b) Por lo menos uno de los números es 0.

(c) La otra propiedad implicada aquí es la inversa:

si ab = 0, entonces a es 0 ó b es 0.

Volvemos a esta propiedad del 0 en el Capítulo 7.

<u>Página 61</u>. Las propiedades de clausura del conjunto de los números de la aritmética están implicadas en el significado de las operaciones de suma y multiplicación. Al estudiante debe recordársele una y otra vez que "a + b" es un numeral (más bien que una orden para efectuar una operación aritmética), y la referencia a la propiedad de clausura es una manera conveniente de recalcar este detalle.

<u>Página 62</u>. Encerramos "a + b" entre paréntesis, porque ahora añadimos c <u>a la suma</u>, y, por lo tanto, deseamos recalcar que "a + b" es una suma indicada.

Lo que hemos hecho es traducir el enunciado lingüístico de la propiedad asociativa obtenido en la sección 2-3 al lenguaje del álgebra. Este es un ejemplo de un tipo de problema que se considera más sistemáticamente en el Capítulo 4. Algunos estudiantes encontrarán fácil obviar el enunciado lingüístico e ir directamente de los ejemplos numéricos al enunciado algebraico de la propiedad. Esto pudo haberse hecho en la sección 2-3, salvo que entonces no teníamos variables, y por ello teníamos que depender de un enunciado lingüístico. La comparación del enunciado lingüístico con el enunciado algebraico muestra la ventaja del último, tanto en claridad como en simplicidad.

Página 63. La propiedad asociativa de la multiplicación, enunciada en el lenguaje del álgebra, es:

Para todo número a, todo número b, y todo número c,

$$(ab)c = a(bc).$$

Página 63. Al escribir frases en "otras formas", nos gustaría utilizar la expresión "forma más sencilla" para describir el resultado final. Aunque en la mayor parte de los casos es bastante obvio cuándo una forma es más sencilla que otra, parece ser virtualmente imposible dar una buena definición de "sencilla". Por lo tanto, nos conformaremos con usar la expresión en situaciones concretas en las que no haya posibilidad de confusión y no trataremos de dar una definición general. La idea importante aquí es que, cuando utilizamos las propiedades fundamentales para escribir una frase en otra forma (más sencilla, más concisa, más útil, más fácil de escribir, más fácil de leer, mejor para efectuar el cálculo, etc.), el resultado es una frase que representa el mismo número que la frase dada.

Página 63. La idea aquí es recalcar que existen operaciones binarias muy corrientes que no son ni conmutativas ni asociativas. (Obsérvese que $(12 \div 6) \div 2 = 1$, mientras que $12 \div (6 \div 2) = 4$; y (2 ** 3) ** 2 = 64, mientras que 2 ** (3 ** 2) = 512.) Se considera que ejemplos tales como estos son necesarios, puesto que es bien obvio que las operaciones de suma y multiplicación tienen esas propiedades. Sin embargo, no se debe emplear mucho tiempo con estos ejemplos (o con los problemas *6 a *8 del Conjunto de problemas 3-12), porque no constituyen un fin en sí mismos.

Página 64. Conjunto de problemas 3-12. Los primeros dos problemas constituyen una preparación para el trabajo con la propiedad distributiva. En el problema 1, conviene decir "forma más sencilla".

Problema 3. Este problema destaca lo que es ahora un segundo modo de considerar los conjuntos de validez de enunciados abiertos. Al principio del capítulo, conjeturamos tales conjuntos de validez; ahora vemos que para ciertas clases de enunciados su verdad para todos los valores de las variables comprendidas es una consecuencia de las propiedades fundamentales de las operaciones.

Respuestas al Conjunto de problemas 3-12; páginas 64-66:

1. (a) $2m^2n$ (d) $3abc$
   (b) $15p^2q$ (e) $100ab$
   (c) $6n^2m$ (f) $36x$
   (ó $6mn^2$)

2. (Aquí sugerimos tres formas para cada uno. Sin embargo, habrá otras que sean aceptables, que pueden ser verificadas fácilmente por el maestro.)

(a) $(2a)(4b^2)$
$(8)(ab^2)$
$(4ab)(2b)$

(b) $(7)(ab^2)$
$(7a)(b^2)$
$(7ab)(b)$

(c) $(5m)(2n)$
$(2m)(5n)$
$(2mn)(5)$

(d) $(x)(xy^2)$
$(xy)(xy)$
$(x^2y)(y)$

(e) $(64a)(abc^2)$
$(4a^2)(16bc^2)$
$(8abc)(8ac)$

(f) $(2c)(1)$
$(2)(c)$
$(1)(2c)$

3. (a) Cierto para todo número m--propiedad conmutativa de la multiplicación.
   (b) No es cierto para todo número m.
   (c) Cierto para todo número a, todo número b, y todo número y.
   (d) Cierto para todo número x, y todo número y--propiedad conmutativa de la suma.
   (e) No es cierto para todo número a, todo número b, y todo número c.
   (f) Cierto para todo número c--propiedad conmutativa de la suma.
   (g) Cierto para todo número b--propiedad conmutativa de la multiplicación.
   (h) Cierto para todo número n, todo número v, y todo número z--propiedad asociativa de la multiplicación.
   (i) Cierto para todo número m, todo número n, y todo número s--propiedad asociativa de la suma.
   (j) No es cierto para todo número x, y todo número y.
4. (a) A no es cerrado respecto de la suma.
   (b) A es cerrado respecto de la multiplicación.
5. (a) S es cerrado respecto de la suma.
   (b) S es cerrado respecto de la multiplicación.

*6.

Si $a \circ b$ es	$2 \circ 6$ es	$\frac{1}{2} \circ 6$ es	$6 \circ 2$ es	$(3 \circ 2) \circ 4$ es
$2a+b$	$2(2)+6$	$2(\frac{1}{2})+6$	$2(6)+2$	$2(2(3)+2)+4$
$\frac{a+b}{2}$	$\frac{2+6}{2}$	$\frac{\frac{1}{2}+6}{2}$	$\frac{6+2}{2}$	$\frac{\frac{3+2}{2}+4}{2}$
$(a-a)b$	$(2-2)6$	$(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})6$	$(6-6)2$	$((3-3)2-(3-3)2)4$
$a+\frac{1}{3}b$	$2+\frac{1}{3}(b)$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}(3)$	$6+\frac{1}{3}(2)$	$(3+\frac{1}{3}(2))+\frac{1}{3}(4)$
$(a+1)(b+1)$	$(2+1)(6+1)$	$(\frac{1}{2}+1)(6+1)$	$(6+1)(2+1)$	$((3+1)(2+1)+1)(4+1)$

*7. (a) Si $a \circ b$ significa $\frac{a+b}{2}$, entonces $b \circ a = \frac{b+a}{2}$.

$a + b = b + a$ propiedad conmutativa de la suma

$$\frac{a+b}{2} = \frac{b+a}{2}$$

$$a \circ b = b \circ a$$

La operación definida aquí es conmutativa.

(b) Si $a \circ b$ significa $(a-a)b$, entonces $b \circ a$ significa $(b-b)a$.

$$0 = 0$$

$$(a-a) = (b-b)$$

$$(a-a)b = (b-b)a$$

La operación definida aquí es conmutativa.

(c) Si $a \circ b$ significa $a + \frac{1}{3}b$, entonces $b \circ a$ significa $b + \frac{1}{3}a$.

Entonces $3 \circ 6 = 3 + \frac{1}{3}(6)$

$6 \circ 3 = 6 + \frac{1}{3}(3)$

Pero el enunciado $3 + \frac{1}{3}(6) = 6 + \frac{1}{3}(3)$ es falso, por tanto, la operación que se define aquí no es conmutativa.

(d) Si $a \circ b$ significa $(a+1)(b+1)$, entonces $b \circ a$ significa $(b+1)(a+1)$.

$(a+1)(b+1) = (b+1)(a+1)$ propiedad conmutativa de la multiplicación

$$a \circ b = b \circ a$$

La operación definida aquí es conmutativa.

*8. (a) Si para todo número a, y todo número b, $a \circ b = \frac{a+b}{2}$, ¿es $(4 \circ 2) \circ 5 = 4 \circ (2 \circ 5)$ un enunciado cierto?

$$(4 \circ 2) \circ 5 = \frac{\frac{4+2}{2} + 5}{2}$$
$$= \frac{3+5}{2}$$
$$4 \circ (2 \circ 5) = \frac{4 + \frac{2+5}{2}}{2}$$
$$= \frac{4 + \frac{7}{2}}{2}$$
$$= \frac{8+7}{4}$$

Puesto que el enunciado $\frac{3+5}{2} = \frac{8+7}{4}$ es falso, la operación no es asociativa.

(b) Si para todo número a, y todo número b, $a \circ b = (a-a)b$, ¿es $(4 \circ 2) \circ 5 = 4 \circ (2 \circ 5)$ un enunciado cierto?

$$(4 \circ 2) \circ 5 = ((4-4)2 - (4-4)2)5$$
$$= 0$$
$$4 \circ (2 \circ 5) = (4-4)((2-2)5)$$
$$= 0$$

Puesto que $0 = 0$, la operación es asociativa para estos números particulares.

Observamos, además, que

$$(a \circ b) \circ c = \big((a-a)b - (a-a)b\big)c$$
$$= 0$$
$$a \circ (b \circ c) = (a-a)\big((b-b)c\big)$$
$$= 0$$

Así, llegamos a la conclusión de que la operación es asociativa.

(c) Si para todo número a, y todo número b, $a \circ b = a + \frac{1}{3}b$, ¿es $(4 \circ 2) \circ 5 = 4 \circ (2 \circ 5)$ un enunciado cierto?

$$(4 \circ 2) \circ 5 = (4 + \tfrac{2}{3}) + \tfrac{5}{3}$$
$$= \tfrac{19}{3}$$
$$4 \circ (2 \circ 5) = 4 + (\tfrac{1}{3})(2 + \tfrac{5}{3})$$
$$= 4 + \tfrac{1}{3}(\tfrac{11}{3})$$
$$= 4 + \tfrac{11}{9}$$

Puesto que el enunciado $\frac{19}{3} = 4 + \frac{11}{9}$ es falso, la operación no es asociativa.

(d) Si para todo número a, y todo número b, $a \circ b = (a + 1)(b + 1)$, ¿es $(4 \circ 2) \circ 5 = 4 \circ (2 \circ 5)$ un enunciado cierto?

$$(4 \circ 2) \circ 5 = \big((4 + 1)(2 + 1) + 1\big)(5+1)$$
$$= (16)(6)$$
$$4 \circ (2 \circ 5) = (4+1)\big((2+1)(5+1) + 1\big)$$
$$= (5)(19)$$

Puesto que el enunciado $(16)(6) = (5)(19)$ es falso, la operación no es asociativa.

Página 67. Debe hacerse hincapié en que no hay cuatro propiedades distributivas distintas. La propiedad distributiva es la que se enunció primero y las otras tres propiedades son sencillamente formas distintas de la primera y se obtienen utilizando la definición de igualdad y la propiedad conmutativa de la multiplicación.

Respuestas al Conjunto de problemas 3-13a; página 68:

1. (a) $6r + 6s$ (d) $7x + x^2$
   (b) $ba + 3a$ (e) $48 + 30$
   (c) $x^2 + xz$ (f) $ab + b^2$

2. (a) $3(x + y)$ (d) $\frac{1}{2}(x + y)$
   (b) $a(m + n)$ (e) $(2 + a)a$
   (c) $(1 + b)x$ (f) $x(x + y)$

3. (a) $14x + 3x = (14 + 3)x$
   $= 17x$

   (b) $\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}x = (\frac{3}{4} + \frac{3}{2})x$
   $= (\frac{3}{4} + \frac{6}{4})x$
   $= \frac{9}{4}x$

   (c) $\frac{2}{3}a + 3b + \frac{1}{3}a = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}a + 3b$
   $= (\frac{2}{3} + \frac{1}{3})a + 3b$
   $= 1a + 3b$
   $= a + 3b$

   (d) $7x + 13y + 2x + 3y = 7x + 2x + 13y + 3y$
   $= (7 + 2)x + (13 + 3)y$
   $= 9x + 16y$

(e) $4x + 2y + 2 + 3x = 4x + 3x + 2y + 2$
$= (4 + 3)x + 2y + 2$
$= 7x + 2y + 2$

(f) $1.3x + 3.7y + 6.2 + 7.7x = 1.3x + 7.7x + 3.7y + 6.2$
$= (1.3 + 7.7)x + 3.7y + 6.2$
$= 9.0x + 3.7y + 6.2$

(g) $2a + \frac{1}{3}b + 5$--No hay forma alguna más sencilla.

<u>Página 69</u>. En el estudio de las aplicaciones de la propiedad distributiva, un uso libre de los paréntesis ayudará a destacar los tres numerales que intervienen en la propiedad.

<u>Página 69</u>. Ejemplo 3. No hemos explicado detenidamente los detalles en este ejemplo, porque pueden parecer demasiado formales al estudiante en esta etapa. Creemos que aceptará esta versión ligeramente ampliada de la propiedad distributiva sin protesta. Si no la acepta, aquí están los detalles: En el preciso momento de escribir $3(x + y + z)$, hemos utilizado la propiedad asociativa para poder prescindir de símbolos de agrupación dentro del paréntesis. Para aplicar la propiedad distributiva como la hemos enunciado, sin embargo, tenemos que poner nuevamente los símbolos de agrupación. Así, el primer paso se convierte en

$$3(x + y + z) = 3\big(x + (y + z)\big).$$

o algún otro agrupamiento, si se prefiere. Entonces, por la propiedad distributiva aplicada dos veces, tenemos

$$= 3x + 3(y + z)$$
$$= 3x + (3y + 3z).$$

Finalmente, aplicamos la propiedad asociativa una vez más para permitirnos escribir, sin paréntesis,

$$= 3x + 3y + 3z.$$

Respuestas al Conjunto de problemas 3-13b; página 70:

1. (a) $6m + 3pm$ (d) $2x^2 + x^2y$
   (b) $2k^2 + 2k$ (e) $eh + fh + gh$
   (c) $12s + 18r + 42q$ (f) $6p^2q + 6pq^2$

2. (a) Es falso para todo número a, y todo número b.
   (b) Es cierto para todo número x, y todo número y.
   (c) Es cierto para todo número a, todo número b, y todo número c.
   (d) No es cierto para todo número a, todo número b, y todo número c.
   (e) No es cierto para todo número x.
   (f) Es cierto para todo número x, y todo número y.

3. (a) $(3u + v)v$ (d) $(1 + 2d)(2c)$
   (b) $7q(p + r)$ (e) $(1 + 2x)(3x)$
   (c) $(1 + x)3x$ (f) $xz(z + 2)$

Páginas 70-71: Ejemplos 1 y 2. Realmente, hay paréntesis en la segunda línea de cada ejemplo, como en $(x^2 + 2x) + (3x + 6)$ en el ejemplo 1 que son entonces suprimidos mediante la propiedad asociativa.

Respuestas al Conjunto de problemas 3-13c, página 71:

1. $$\begin{aligned}(x + 4)(x + 2) &= (x + 4)x + (x + 4)2\\ &= x^2 + 4x + 2x + 8\\ &= x^2 + (4 + 2)x + 8\\ &= x^2 + 6x + 8\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}(x + 1)(x + 5) &= (x + 1)x + (x + 1)5\\ &= x^2 + 1x + 5x + 5\\ &= x^2 + (1 + 5)x + 5\\ &= x^2 + 6x + 5\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}(x + a)(x + 3) &= (x + a)x + (x + a)3\\ &= x^2 + ax + 3x + 3a\end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned}(x + 2)(y + 7) &= (x + 2)y + (x + 2)7\\ &= xy + 2y + 7x + 14\end{aligned}$$

5. $(m + n)(m + n) = (m + n)m + (m + n)n$
$= m^2 + mn + mn + n^2$
$= m^2 + 1mn + 1mn + n^2$
$= m^2 + (1 + 1)mn + n^2$
$= m^2 + 2mn + n^2$

6. $(2p + q)(p + 2q) = (2p + q)p + (2p + q)2q$
$= 2p^2 + pq + 4pq + 2q^2$
$= 2p^2 + (1 + 4)pq + 2q^2$
$= 2p^2 + 5pq + 2q^2$

<u>Páginas 71-72</u>. Este resumen de propiedades es muy importante. Deseamos que el estudiante empiece a considerar el sistema de los números más y más a menudo en términos de las propiedades fundamentales, de modo que eventualmente casi todo lo que haga con números lo hará con estas propiedades en la mente. Esto no lo lograrán muy rápidamente muchos estudiantes, pero, hacia el fin del curso, es de esperar que la mayoría habrá progresado hasta el punto de poder tener la meta a la vista.

La lista de propiedades obtenida hasta este punto no está completa. Todavía debemos introducir los números negativos y obtener las propiedades de la ordenación. La lista estará completa para nuestros propósitos al final del Capítulo 8.

<u>Respuestas al Conjunto de problemas 3-14</u>; páginas 72-73:

1.

$(8 \times 3) + 2 = 26$	$8 + (3 + 2) = 13$	$8 - (3 \times 2) = 2$
$8 \times (3 + 2) = 40$	$(8 + 3) + 2 = 13$	$(8 - 3) \times 2 = 10$
$(8 \times 3) - 2 = 22$	$8 + (3 \times 2) = 14$	$8 - (3 + 2) = 3$
$8 \times (3 - 2) = 8$	$(8 + 3) \times 2 = 22$	$(8 - 3) + 2 = 7$
$8 \times (3 \times 2) = 48$	$8 + (3 - 2) = 9$	$8 - (3 - 2) = 7$
$(8 \times 3) \times 2 = 48$	$(8 + 3) - 2 = 9$	$(8 - 3) - 2 = 3$

Este es un estudio interesante sobre disposiciones. El 8, 3 y 2 son fijos. El primero de los signos puede ser $\times$, $+$ ó $-$, y por cada uno de éstos, el segundo de los signos puede ser $\times$, $+$ ó $-$. Entonces se pueden insertar los paréntesis de dos maneras: agrupando los dos primeros términos o los dos últimos. Después de hecho todo esto, es interesante observar las expresiones que son nombres para el mismo número. Por ejemplo:

$8 - (3 + 2) \neq (8 - 3) - 2$, y en el Capítulo 7,

$8 + (3 + 2) = (8 + 3) + 2$ mostramos por qué

$8 \times (3 \times 2) = (8 \times 3) \times 2$ esto es así.

2. (a) $5 + 5x$
   (b) $\frac{1}{4}a(3 + 2)$ ó $a(\frac{3}{4} + \frac{2}{4})$
   (c) $11(3(95) + 15)$
   ó $5(33(19) + 3(11))$
   ó $15(11(19) + 11)$
   ó $165(19 + 1)$
   (d) $(1 + 2)c$
   $\frac{1}{2}y + \frac{1}{3}y$
   (f) $xy + x$
   (g) $x(y + 1)$
   (h) $a(3x + 2y)$
   (i) $(5 + y + 2)y$
   ó $(7 + y)y$
   (j) $(2 + a)(b + 3)$
   (k) $(1 + 3a)b$
   (l) $2a^2 + 2ab + 2ac$
   (m) $(u + 2v)u + (u + 2v)v$
   $= u^2 + 2uv + uv + 2v^2$
   $= u^2 + 3uv + 2v^2$
   (n) $(a + 1)a + (a + 1)1$
   $= a^2 + 1a + 1a + 1$
   $= a^2 + 2a + 1$

3. (a) $17x + x = (17 + 1)x$
   $= 18x$
   (b) $2x + y + 3x + y = 2x + 3x + 1y + 1y$
   $= (2 + 3)x + (1 + 1)y$
   $= 5x + 2y$

(c) $3(x + 1) + 2x + 7 = 3x + 3 + 2x + 7$
$= 3x + 2x + 3 + 7$
$= (3 + 2)x + 10$
$= 5x + 10$

(d) $1.6a + 0.7 + 0.4a + 0.3b = 1.6a + 0.4a + 0.7 + 0.3b$
$= 2.0a + 0.7 + 0.3b$

(e) $by + 2by = (1 + 2)by$
$= 3by$

(f) $9x + 3 + x + 2 + 11x = 9x + 1x + 11x + 3 + 2$
$= (9 + 1 + 11)x + 5$
$= 21x + 5$

*4. Puesto que (2 + 3 + 5 + 7) no es divisible por 9, no podemos usar la propiedad distributiva para escribir 2357 como el producto de 9 y un número cardinal, así encontramos que 2357 no es divisible por 9.

$35874 = 3(10,000) + 5(1000) + 8(100) + 7(10) + 4(1)$
$= 3(9999+1) + 5(999+1) + 8(99+1) + 7(9+1) + 4(1)$
$= 3(9999) + 3(1) + 5(999) + 5(1) + 8(99) + 8(1) + 7(9) + 7(1) + 4(1)$
$= \big(3(9999) + 5(999) + 8(99) + 7(9)\big) + 3(1) + 5(1) + 8(1) + 7(1) + 4(1)$
$= \big(3(1111) + 5(111) + 8(11) + 7(1)\big)9 + (3 + 5 + 8 + 7 + 4)$
$= (3333 + 555 + 88 + 7)9 + (27)$
$= (3333 + 555 + 88 + 7 + 3)9$

Por lo tanto, 35874 es divisible por 9.

La regla, que revela esto, es que si la suma de las cifras de un número es divisible por 9, el número es divisible por 9.

*5. $19 \times 13 = 19(10 + 3)$

$= 19(10) + 19(3)$ - propiedad distributiva

$= 19(10) + (10 + 9)3$

$= 19(10) + \big(10(3) + 9(3)\big)$ - propiedad distributiva

$= \big(19(10) + 10(3)\big) + 9(3)$ - propiedad asociativa de la suma

$= (19 + 3)10 + 9(3)$ - propiedad distributiva

$15 \times 14 = (15 + 4)10 + 20$
$13 \times 17 = (13 + 7)10 + 21$
$11 \times 12 = (11 + 2)10 + 2$

<u>Respuestas a los Problemas de repaso</u>; páginas 73-76:

1. (a) H es el conjunto de los enteros impares mayores que 19 y menores que 51, ó el conjunto de los enteros impares del 21 al 49, inclusive.

   (b) H es un subconjunto de A, pero A no es un subconjunto de H.

   (c) El conjunto H es finito; el conjunto A es infinito.

2. Puesto que $\frac{3}{4}$ es equivalente a $\frac{18}{24}$ y $\frac{5}{6}$ es equivalente a $\frac{20}{24}$, la coordenada de un punto entre los dos es $\frac{19}{24}$. Hay una infinidad de puntos entre $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{6}$.

3. El conjunto T es cerrado respecto de la operación de sumar, puesto que la suma de dos elementos da un múltiplo entero de 3. El conjunto T no es cerrado respecto de la operación de "calcular la media aritmética", puesto que la media aritmética de dos elementos (tales como 3 y 6) no es necesariamente un entero.

4. (a) 

(b) $\frac{3}{2}$ no es un valor admisible de t.

π es un valor admisible de t.

$\frac{17}{4}$ es un valor admisible de t.

$4\frac{1}{3}$ es un valor admisible de t.

$\frac{11}{2}$ no es un valor admisible de t.

$\sqrt{2}$ no es un valor admisible de t.

5.

$$\begin{aligned}(3+1)^2 &= (3+1)(3+1)\\ &= (3+1)3 + (3+1)1\\ &= 3^2 + (3)(1) + (3)(1) + 1^2\\ &= 3^2 + 2(3)(1) + 1^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(5+2)^2 &= (5+2)(5+2)\\ &= (5+2)5 + (5+2)2\\ &= 5^2 + (5)(2) + (5)(2) + 2^2\\ &= 5^2 + 2(5)(2) + 2^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{3}\right)^2 &= \left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{3}\right)^2\\ &= \left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{3}\right)\left(\tfrac{1}{3}\right) + \left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{3}\right)\left(\tfrac{2}{3}\right)\\ &= \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{3}\right)\left(\tfrac{2}{3}\right) + \left(\tfrac{1}{3}\right)\left(\tfrac{2}{3}\right) + \left(\tfrac{2}{3}\right)^2\\ &= \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 + 2\left(\tfrac{1}{3}\right)\left(\tfrac{2}{3}\right) + \left(\tfrac{2}{3}\right)^2\end{aligned}$$

Para todo a, y todo b,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Demostración:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= (a+b)a + (a+b)b\\ &= a^2 + (b)(a) + (a)(b) + b^2\\ &= a^2 + (1)(a)(b) + (1)(a)(b) + b^2\\ &= a^2 + (1+1)(a)(b) + b^2\\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

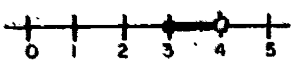
6. (c)

7. (a) {12} (d) {3}
   (b) {6} (e) {2}
   (c) {4} (f) {1}

8. Si m es un número de la aritmética, los conjuntos de validez son:
   (a) {1}
   (b) El conjunto de todos los números de la aritmética.
   (c) {0}
   (d) Ø

   El conjunto de validez de (d) es un subconjunto de todos los otros.
   El conjunto de validez de (b) es un subconjunto solamente de sí mismo.
   Si el dominio de m es el conjunto de los números naturales, los conjuntos de validez son:
   (a) {1}
   (b) El conjunto de todos los números naturales.
   (c) Ø
   (d) Ø

9. (a) 3 es un elemento de T.
   (b) 2 es un elemento de T.
   (c) Ø es un subconjunto de T (Ø es un subconjunto de <u>todo</u> conjunto.)

10. 

11. (a) Ø
    (b) {0}
    (c) 0, $\frac{1}{2}$, y todos los números entre el 0 y $\frac{1}{2}$.

12. (a) El enunciado es cierto.

(b) Todo lo que se necesita es observar que $(8 + 1)$ y $(4 + 5)$ son nombres para el mismo número.

13. (a) Cierto (d) Cierto

(b) Falso (e) Cierto

(c) Cierto (f) Cierto

14. $$\frac{\frac{3}{5}+\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{3}{5}+\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}}\left(\frac{60}{60}\right)$$
$$= \frac{(\frac{3}{5}+\frac{2}{3})(60)}{(\frac{3}{4})(60)}$$
$$= \frac{36 + 40}{45}$$
$$= \frac{76}{45}$$

15. $3x + y + 2x + 3y = (3x + 2x) + (y + 3y)$ por las propiedades asociativa y conmutativa de la suma

$= (3 + 2)x + (1 + 3)y$ por la propiedad distributiva

$= 5x + 4y$

Puesto que las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva son ciertas para todos los números,

$$3x + y + 2x + 3y = 5x + 4y$$

para todos los números.

16. (a) $(x+1)(x+1) = (x+1)x + (x+1)1$ distributiva

$= x^2 + x + x + 1$ distributiva

$= x^2 + (1+1)x + 1$ distributiva

$= x^2 + 2x + 1$

$(x+2)(x+2) = x^2 + 4x + 4$ como arriba

$$\begin{aligned}
\text{(b)}\quad x^2 + 6x + 9 &= x^2 + (3 + 3)x + 9 & \\
&= x^2 + 3x + 3x + 9 & \text{distributiva} \\
&= (x + 3)x + (x + 3)3 & \text{distributiva}
\end{aligned}$$

Puesto que $x + 3$ es un número por la propiedad de clausura

$$= (x + 3)(x + 3) \qquad \text{distributiva}$$

El estudiante, está más inclinado a pensar que como $(x + 1)(x + 1)$ y $(x + 2)(x + 2)$ fueron los dos primeros productos, $(x + 3)(x + 3)$ sería un producto probable para obtener $x^2 + 6x + 9$. Si demuestra que $(x + 3)(x + 3) = x^2 + 6x + 9$, consideraríamos este procedimiento adecuado.

Capítulo 3

Sugerencias para exámenes

1. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son ciertos y cuáles son falsos?
   (a) $5 \leq 6 + 1$
   (b) $9 + 11 \not> 5$
   (c) $8 + 2 > 3$
   (d) $5 + 3 \neq 7$.
2. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son ciertos y cuáles son falsos?
   (a) $\frac{6 - 3}{3 -} > \frac{3}{2}$ y $6 \not> 2 - 1$
   (b) $6 \neq 5 + 1$ ó $4 \leq 3$
   (c) $6 + 1 = 4 + 3$ [illegible] $6 \not< 7$
   (d) $\frac{4}{7} + \frac{3}{4} > \frac{3}{5} + \frac{5}{7}$ y $4 \not< 5.3$

3. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son ciertos y cuáles son falsos?

   (a) $(18 - 10) - 4 = 18 - (10 - 4)$

   (b) $(18 - 10) - 4 \neq 18 - (10 + 4)$

   (c) $3 + 4 < 8$ ó $6 + 5 > 5 + 6$

   (d) $7 + 0 = 7$ y $7(0) = 7$

   (e) $4 > 6$ ó $5 + 2 = 10$

   (f) $7 \not< 3$ ó $17.813 + 0.529 = 8.777 + 18.442$

4. Determina si cada enunciado es cierto para el valor dado de la variable.

   (a) $3t + 4 = 15$; 2

   (b) $4x - 3 < 7$; 7

   (c) $20 - 2x \not< 10$; 5

   (d) $\frac{x}{2} + \frac{1}{3} \neq \frac{6x}{12} + \frac{3}{9}$; 1

5. Si las variables tienen los valores dados, determina en cada caso si el enunciado es cierto o no.

   (a) $3x = 4 + y$, x es 2 e y es 2.

   (b) $5x < 2 + y$, x es 3 e y es 8.

6. Determina el conjunto de validez de cada uno de los siguientes enunciados abiertos. Ensaya con los números sugeridos, como ayuda para descubrir cada conjunto de validez.

   (a) $x + 3 = 3x - 5$; $\{2, 4, 6\}$

   (b) $x^2 - 3x + 2 = 0$; $\{0, 1, 2, 3\}$

7. Determina los conjuntos de validez de los siguientes enunciados abiertos:

   (a) $3x + 4 = 25$

   (b) $2x + 1 < 3$

   (c) $2x + 3 = 2x + 5$

   (d) $4 + x \not> 2x + 1$

8. Construye las gráficas de los conjuntos de validez de los siguientes enunciados abiertos:

(a) $x + 5 = 6$ (c) $2x \leq 7$

(b) $x + 1 > 3$ (d) $x \ngtr 4$

9. Construye las gráficas de los conjuntos de validez de los siguientes enunciados abiertos compuestos:

(a) $x > 3$ y $x < 4$ (c) $x = 5$ ó $x < 4$

(b) $x \leq 5$ y $x \geq 4$ (d) $x < 3$ y $x > 4$

10. Un número llamado n debe cumplir la condición siguiente: "si el producto de 6 y el número n se aumenta en 4, el resultado es 40".

(a) Redacta la condición como un enunciado abierto.

(b) ¿Cuál es su conjunto de validez?

(c) Construye la gráfica del conjunto de validez.

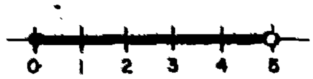
11. ¿Cuáles de los enunciados abiertos A, B, C, D, y E a continuación tienen el mismo conjunto de validez que el enunciado abierto "$p \geq 7$"?

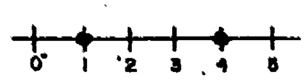
A. $p > 7$ ó $p = 7$ D. $p \nless 7$

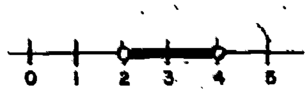
B. $p > 7$ y $p = 7$ E. $p \neq 7$

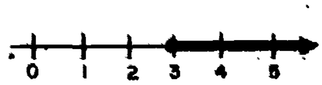
C. $p \ngtr 7$

12. Redacta los enunciados abiertos cuyos conjuntos de validez son los conjuntos cuyas gráficas aparecen a continuación:

(a) 

(c) 

(b) 

(d) 

13. Para cada uno de los enunciados en la columna I, elige la gráfica apropiada de su conjunto de validez en la columna II.

I

(a) $6x = 18$

(b) $y < 3$

(c) $b \neq 2$

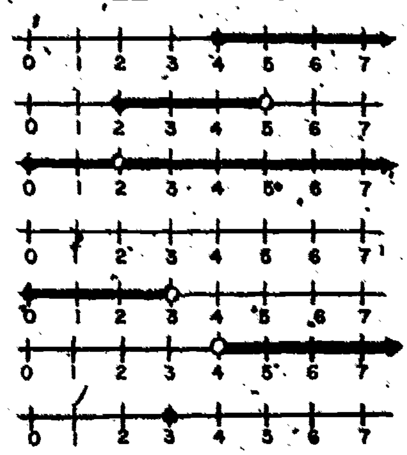
(d) $t > 4$

(e) $d \geq 2$ y $d < 5$

(f) $x \geq 4$

(g) $w < 2$ y $w > 4$

II



14. Si el dominio de la variable es el conjunto $U = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, determina los conjuntos de validez de los siguientes enunciados abiertos:

(a) $3x + 1 = 13$

(b) $2x = 10$

(c) $2x < 20$ y $x + 4 = 4 + x$

(d) $2x + 1 = 7$ ó $2x - 1 = 3$

15. La fórmula utilizada para pasar de una temperatura C medida en grados Centígrados a la temperatura correspondiente F en grados Fahrenheit es

$$F = \frac{9}{5}C + 32.$$

Determina el valor de F cuando C es 90.

16. La fórmula para el área de un triángulo es

$$A = \frac{1}{2}bh,$$

donde A es el número de unidades cuadradas en el área, b es el número de unidades en la base, y h es el número de [illegible]dades en la altura. Determina el valor de h cuando A es [illegible]5 y b es 10.

17. Cada uno de los enunciados que aparecen a continuación es cierto para todo valor de las variables. En cada uno de los casos, determina las propiedades que se emplean para demostrar que el enunciado es cierto.

(a) $x(y + z) = xy + xz$
(b) $xy + (ay + c) = (xy + ay) + c$
(c) $abcd = ab(cd)$
(d) $xy + xz = yx + zx$
(e) $(ab)(cd) = (dc)(ba)$
(f) $x + 0 = x$
(g) $0(x) = 0$
(h) $1(x) = x$

18. Demuestra la manera de utilizar la propiedad multiplicativa del 1 para hallar los nombres corrientes de:

(a) $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$
(b) $\frac{2 + \frac{1}{3}}{5}$

19. Determina cuáles de los siguientes enunciados son ciertos para todo valor de las variables:

(a) $x(2 + 3) = (2 + 3)x$
(b) $b(a + 2) = a(b + 2)$
(c) $a^2b^2 = b^2a^2$
(d) $(4x + y)3 = 4x(y + 3)$
(e) $(3a + c) + d = (c + d) + 3a$
(f) $(2x)y = 2(xy)$
(g) $a(b - b) = a$
(h) $a + (b - b) = a$

20. Muestra cómo podrías utilizar la propiedad distributiva para efectuar más fácilmente los siguientes cálculos:

(a) $(324)(102)$
(b) $(37)(2\frac{2}{3}) + (37)(3\frac{1}{3})$
(c) $60(\frac{5}{6} + \frac{3}{5})$
(d) $(13)(29)$

21. En cada uno de los pasos en la siguiente secuencia, enuncia la propiedad de las operaciones utilizada para deducirlo del paso precedente:

$$
\begin{aligned}
3(2x + y) + 5x &= (6x + 3y) + 5x \\
&= (3y + 6x) + 5x \\
&= 3y + (6x + 5x) \\
&= 3y + (6 + 5)x \\
&= 3y + 11x
\end{aligned}
$$

22. Utiliza las propiedades de las operaciones para escribir las siguientes frases abiertas en forma más sencilla:

(a) $6x + 3x$

(b) $\frac{5}{4} + \frac{2}{7}x + 3\frac{1}{5}y + \frac{5}{7}x + \frac{4}{5}y$

(c) $414a + 37b + 86a + 63b$

(d) $3x + 4y + 7x + z + 2y$

23. Escribe cada una de las siguientes frases abiertas como un producto indicado:

(a) $2x + xy$

(b) $(2p + q)u + (2p + q)v$

(c) $7(x + 2yz) + xy(x + 2yz)$

(d) $y(x + 1) + 7y$

(e) $a(b + 3) + 3(b + 3)$

24. Escribe cada uno de los siguientes productos indicados como una suma indicada sin paréntesis:

(a) $7a(3b + 2c)$

(b) $5x(2x + 3y)$

(c) $(2a + 3b)(4c + 5d)$

(d) $(a + b)^2$

(e) $(3x + 2y)(3x + 2y)$

25. Demuestra que

$$ab + (cb + st) = b(a + c) + st$$

es cierto para todos los valores de las variables. (Escribe el proceso paso por paso, dando la propiedad utilizada en cada paso.)

*26. Si para todo número a, y todo número b, $a \circ b$ significa $a + 3b$, contesta las siguientes preguntas:

(a) Determina los valores de: $3 \circ 4$; $2 \circ (3 \circ 4)$; $(2 \circ 3) \circ 4$; $4 \circ 3$.

(b) ¿Es la operación conmutativa?

(c) ¿Es la operación asociativa?

Capítulo 4

ENUNCIADOS ABIERTOS Y ENUNCIADOS LINGUISTICOS

El objetivo de este capítulo es ayudar a desarrollar cierta habilidad para redactar o escribir enunciados abiertos para problemas lingüísticos. Primero tratamos solamente con frases. Al comienzo, escribimos algunas frases lingüísticas ajustadas a las frases abiertas con el propósito de ofrecer un cuadro más completo de la traducción de nuestro idioma al lenguaje algebraico y viceversa. Luego traducimos de un lenguaje al otro enunciados que contienen ecuaciones o inecuaciones.

Para concentrar la atención en el proceso de traducción, preferimos, por ahora, no empeñarnos en la tarea de hallar conjuntos de validez de los enunciados abiertos. No obstante, hemos planteado cuestiones en los problemas lingüísticos. Esto parece necesario para apuntar claramente a una variable, relacionar la experiencia más íntimamente con la solución del problema al cual se aplicará este procedimiento de traducción, y poner de manifiesto el enunciado o los enunciados acerca de los cuales nos interesa realmente que el estudiante piense. Así, en el ejemplo 1 de la página 82, si en vez de decir: "¿Cuál debe ser el largo de cada pieza?", dijéramos: "Escribe un enunciado abierto acerca de las longitudes de las piezas", el estudiante podría responder: "Si una pieza mide n pulgadas, entonces $n < 44$", o podría hasta responder: "$n > 0$". Estos son enunciados ciertos, pero no ofrecen al estudiante la experiencia deseada.

Algunos estudiantes pueden sentir la urgencia de seguir adelante y "encontrar la respuesta". En ese caso, debe permitírseles que lo traten, pero el "encontrar la respuesta" no debe ser motivo de distracción en esta etapa. Puede decirse a los estudiantes que más tarde desarrollaremos métodos más eficaces para determinar conjuntos de validez de enunciados, pero que, por el momento, no iremos más allá de escribir el enunciado abierto.

En algunos de los problemas de este curso hay información superflua no necesaria en la solución del problema. Esto es intencional. Esperamos que la experiencia ocasional con ese material irrelevante ayudará al estudiante a darse cuenta con más facilidad de la información que <u>es</u> relevante.

4-1. <u>Frases abiertas y frases lingüísticas</u>

<u>Página 77</u>. Al traducir frases abiertas a frases lingüísticas, es posible obtener muchas frases lingüísticas. Estimúlese al estudiante a usar la imaginación para lograr una variedad de traducciones tan amplia como sea posible.

Las traducciones posibles de "-" incluyen "menos que", "la diferencia de", "más corto que", etc. Deberá prevenirse a los estudiantes de que, al no ser la resta conmutativa, deben estar alertas sobre cuál es el primer número al utilizar "menos que".

Tarde o temprano se encontrará un estudiante confundido acerca de la diferencia entre "mayor que" o "más que", la cual demanda el símbolo "+" y "es mayor que" o "es más que", la cual demanda el símbolo ">". Debemos estar preparados para aclarar esta distinción. De este modo, "Este pavo pesa cinco libras más que aquel otro" podría requerir la frase "$t + 5$", mientras que "Este pavo pesa más de veinte libras" podría requerir el enunciado "$p > 20$".

Obsérvese cuidadosamente en los siguientes problemas que al describir la variable, <u>w</u> no representa el ancho, sino el "<u>número</u> de pies en el ancho", <u>x</u> no representa los "libros", sino el <u>número</u> de libros que tiene María", <u>b</u> no representa "el niño", sino "el <u>número</u> de años de edad del niño". Obsérvese también que una manera clara, correcta y sencilla de decir la última frase es: "el niño tiene b años de edad".

Algunos de los problemas en este capítulo pueden comprender más de una variable o pueden sugerir el uso de más de una variable. Podría permitirse que esto sucediera espontáneamente. En el caso de enunciados abiertos, quizás haya la oportunidad de demostrar la posibilidad de un enunciado compuesto. Es muy temprano para demostrar la necesidad de un enunciado compuesto para una solución única. Puesto que no estamos en este momento buscando respuestas, no será necesario preocuparse todavía acerca de cómo hallaremos el conjunto de validez.

<u>Respuestas al Conjunto de problemas 4-1</u>; páginas 78-81:

Las frases lingüísticas en los problemas 1-6 y 18-25 son solamente sugerencias. Se debería estimular tanta variedad como sea posible por parte de la clase.

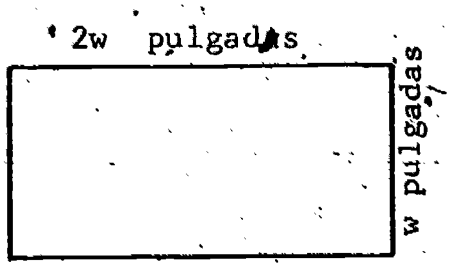
Para muchos de los siguientes problemas, hay restricciones implícitas en el dominio de la variable. Corrientemente permitimos que tales restricciones continúen implícitas, porque parecen bastante obvias, sin embargo, sería conveniente considerar ocasionalmente con los alumnos cuáles son, en realidad, las restricciones impuestas.

Por ejemplo, en este Conjunto de problemas, el dominio está limitado a números cardinales en los problemas 11, 14, 15, 30, 31, 34, y algunas de las traducciones sugeridas más adelante, de frases abiertas a frases lingüísticas, imponen la misma limitación en el dominio. Cuando la variable representa un número de dólares, el dominio no puede incluir números como $\frac{3}{7}$. En el problema 12, n no puede ser cero. En el problema 31, hay probablemente una limitación adicional en el dominio de la variable impuesta por la capacidad del anfiteatro.

Desde luego, en esta parte del curso nos limitamos a los números de la aritmética, pero, de todos modos, en la mayor parte de los problemas, por su naturaleza, el dominio consiste solamente en números no negativos.

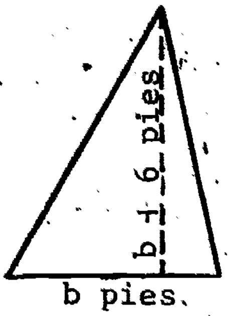
1. Véase el texto.
2. Si Juan pesa n libras, la frase es: El número de libras que pesa un niño 7 libras más pesado que Juan.
3. Si yo tengo n años de edad ahora, la frase es: El número de años que tenía hace 7 años.
4. Si hay y estudiantes en la clase, la frase es: La mitad de los estudiantes que hay en la clase.
5. Si las naranjas cuestan r centavos por docena y una bolsa de compra cuesta 5 centavos, la frase es: El costo en centavos de dos docenas de naranjas y una bolsa de compra para llevarlas.
6. Si una mina produjo a toneladas de carbón en un día y b toneladas de carbón el día siguiente, la frase es: El número de toneladas de carbón producidas en los dos días. (Obsérvese que usamos aquí dos variables. Aunque pasará algún tiempo antes de que los estudiantes traten con más de una variable, no necesitamos cerrar los ojos a ellas.)
7. Véase el texto.

8. Si f es el número de pies, entonces la frase es 12f.
9. Si k es el número de cuartillos, entonces la frase es 2k.
10. Si k es el número de pies, entonces la frase es $\frac{k}{5280}$.
11. Si n es el número cardinal, entonces la frase es n + 1.
12. Si n es el número, entonces la frase es $\frac{1}{n}$.
13. Si hay k libras y t onzas, entonces la frase es 16k + t.
14. Si hay d dólares y k monedas de veinticinco centavos, entonces la frase es 100d + 25k.
15. Si hay m dólares, k monedas de veinticinco centavos, m monedas de diez centavos, y n monedas de cinco centavos, entonces la frase es 100m + 25k + 10m + 5n. (Obsérvese que m representa el número de monedas de diez centavos así como el número de dólares. Esto significa que tenemos el mismo número de monedas de diez centavos que de dólares, puesto que una variable no puede representar dos números diferentes a la vez. La frase abierta podría escribirse: 110m + 25k + 5n.)
16.



Si el rectángulo tiene w pulgadas de ancho, entonces la frase es 2w.

17. Si la base del triángulo tiene b pies de largo, entonces la frase es b + 6.



18. Si compré n brazaletes, entonces la frase es: El costo total en dólares de los brazaletes que compré a $1.00 cada uno y el mismo número de collares a $7.00 cada uno.

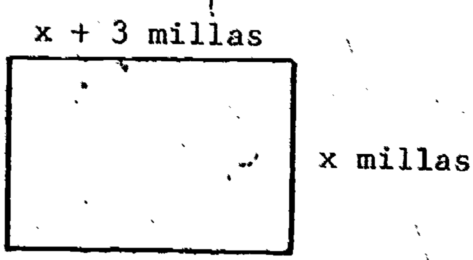
19. Si hay r presillas en cada caja, entonces la frase es: El número de presillas que tengo ahora, si tenía 2 cajas de ellas y mi compañero de cuarto cogió cinco presillas y luego trajo siete.

20. Si el primer lado de un triángulo tiene x pulgadas de largo, entonces la frase es: El número de pulgadas en el perímetro de un triángulo, si el segundo lado es tres veces el primero y el tercer lado es una pulgada más largo que dos veces el primero.

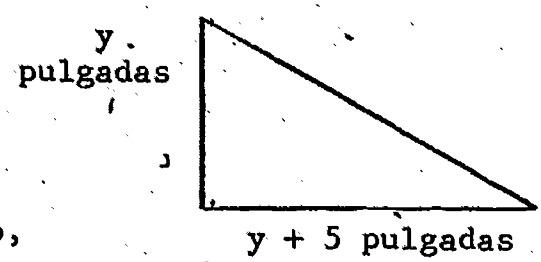
21. Si y es el número de personas en cada una de las nuevas familias, entonces la frase es: La población de una aldea de 5,000 personas después de mudarse allí cuatro familias más.

22. Si pongo y dólares en el banco, entonces la frase es: El número de dólares en el banco después de agregarse el interés simple de 4% por un año.

*23. Si un bosque nacional rectangular tiene x millas de ancho, entonces la frase es: El número de millas cuadradas del área del bosque, si éste tiene 3 millas más de largo que de ancho.



*24. Si la altura de un triángulo es y pulgadas, entonces la frase es: El número de pulgadas cuadradas del área del triángulo, si su base es 5 pulgadas más larga que su altura.



*25. Si un salón tiene w pies de alto, entonces la frase es: El número de pies cúbicos del volumen del salón, si su ancho es 3 pies más que su altura y su largo es 5 pies más que dos veces la altura.

26. Si un lado del cuadrado mide q pies de largo, entonces la frase es $4q$.

27. Si la altura de la cabeza de un hombre es h pulgadas, entonces la frase es $(7\frac{1}{2})h$ ó $\frac{15}{2}h$.

28. Si el primer lado de un triángulo mide f pulgadas, entonces la frase es $f + 3$.

29. (a) $x + y + \frac{1}{2}(x + y)$

(b) $\frac{1}{2}(x + y)$

30. Si hay b niños, entonces la frase es $\frac{6}{5}b$. Los estudiantes pueden necesitar una pequeña aclaración de las palabras "en términos de". Puede explicárseles que ésta es otra manera, usada frecuentemente, de señalar la variable.

31. Si a personas compraron boletos, entonces la frase es $2a$.

32. $\frac{1}{d}$. Un enfoque inductivo puede ayudar al estudiante. Aquí responderá probablemente a la pregunta: "¿Qué parte de la casa pintará en un día, si puede pintar toda la casa en 8 días?".

33. $x \cdot \frac{1}{5}$ ó $\frac{x}{5}$

34. $r + 12$

*35. Si la planta crece g pulgadas por semana, entonces la frase es $20 + 5g$.

Nota: Ayúdesele al estudiante a darse cuenta de que cuando la variable se da en el problema no es necesario que lo especifique, pero si el problema no da la variable, es de la incumbencia del estudiante escoger una letra y decir lo que ella representa.

*36. Si t es el número de minutos transcurridos después de haber puesto sus brazos dentro del agua, y $t \geq 10$, entonces la frase es $t - 10$.

37. Si x es el número de dólares en la herencia, entonces la frase es:

(a) $\frac{1}{2}x$ ó $\frac{x}{2}$

(b) $\frac{1}{10}x + 50$ ó $\frac{x}{10} + 50$

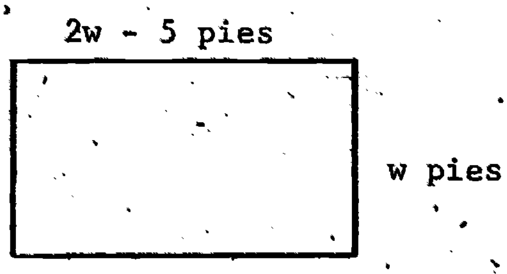
(c) $x - \left(\frac{1}{2}x + (\frac{1}{10}x + 50)\right)$ ó $x - \left(\frac{x}{2} + (\frac{x}{10} + 50)\right)$

(d) x

Desde luego, en (d) el estudiante podría escribir

$(\frac{1}{2}x) + (\frac{1}{10}x + 50) + \left(x - \left(\frac{1}{2}x + (\frac{1}{10}x + 50)\right)\right)$. Podría entretenerse demostrando que esta frase representa el mismo número que x.

38. Si el rectángulo tiene w pies de ancho, entonces la frase es:



(a) $2w - 5$

(b) $w + (2w - 5) + w + (2w - 5)$
ó $2w + 2(2w - 5)$

(c) $w(2w - 5)$

En la primera parte de nuestro trabajo con traducciones, hemos tratado de recalcar la idea de que la variable representa un número, mediante el uso de lenguaje razonablemente preciso. Así, hemos dicho: "el número de pies del ancho", "el número de pulgadas de la base", etc. A medida que avanzamos, nos despreocupamos más acerca de esta forma de hablar para poder hacerlo con más soltura. Así, en el problema 38, en cuanto la unidad de longitud y la unidad de área quedan establecidas claramente en otra parte del problema, nos permitimos hablar de "perímetro" y "área" en vez de "número de pies en el perímetro" y "número de pies cuadrados del área".

4-2. Enunciados abiertos y enunciados lingüísticos

Aquí sugerimos traducciones para los enunciados abiertos. Asignárselos a los estudiantes producirá una gran variedad de traducciones. Una manera de probar la corrección de esas traducciones podría ser distribuirlas entre los miembros de la clase y hacer que los estudiantes traten de traducirlas a enunciados abiertos. Esto serviría también para darles un punto de partida para el trabajo siguiente, haciendo que primero traduzcan enunciados lingüísticos redactados por ellos mismos a enunciados abiertos.

Respuestas al Conjunto de problemas 4-2a; página 82:

1. Samuel, que pesa 7 libras más que Juan, pesa 82 libras.
2. Para comprar 500 sobres, tuve que comprar dos cajas de sobres.
3. Diecisiete de los estudiantes hicieron proyectos suplementarios. Esto representa la mitad de la clase.
4. Un campo rectangular es 4 varas más largo que ancho y su área es 480 varas cuadradas.
5. Tengo tres pedazos de cadena. El segundo pedazo tiene dos veces el número de eslabones que tiene el primero, y el tercer pedazo tiene tres veces el número de eslabones que tiene el primero. Puedo obtener una sola cadena con el mismo número de eslabones, bien uniendo los pedazos segundo y tercero y luego uniendo éstos al primero, o uniendo el primero y el segundo y entonces el tercero a los anteriores.
6. Jaime compró algunos sellos de 4 centavos y el mismo número de sellos de 7 centavos. El costo total fue 44 centavos.
7. Un contratista pidió 4 sacos de clavos y más tarde ordenó 7 sacos más de la misma clase de clavos. El peso total de los sacos fue 47 libras.

   Nota: La diferencia entre el problema 6 y el problema 7 es que en el 6 se puede restringir el dominio de la variable a números cardinales y habrá un solo número cardinal, a saber, 4, que hará el enunciado cierto. En el problema 7 esto no es verdad, de modo que sería incorrecto construir un enunciado que requiera que la variable represente un número cardinal. <u>Si es posible, hágase que los estudiantes descubran este hecho por sí mismos</u>.

8. El perímetro de un cuadrado es 100 pies.
9. Tengo que recorrer la misma distancia; si viajo desde aquí a San José y luego las cinco millas hasta San Cristóbal, o si viajo primero de San Cristóbal a San José y luego vengo acá.
10. Recibimos 6 galones de leche, una parte en botellas de un litro y otra en botellas de medio galón.

<u>Página</u> 82. Hay varios puntos importantes que observar aquí.

1. ¿Qué pregunta plantea el problema? La respuesta a esta pregunta debería enunciarse en términos de un <u>número</u>. No se debe permitir al estudiante escribir, "x = el costo" o "y = el largo". Ayúdesele a darse cuenta del hecho de que la variable representa un <u>número</u>. Debería decir: "x es el número de dólares del costo de la casa", o más sencillamente, "la casa cuesta x dólares".

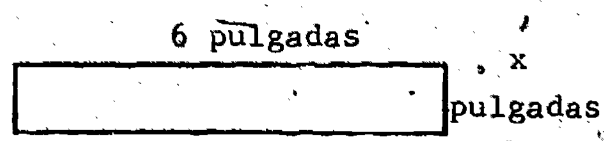
2. Cualesquiera <u>otros</u> números en los problemas deben expresarse en términos del número que la variable representa. Así decimos: "Si el largo del pedazo más corto es x pulgadas, el pedazo más largo mide (x + 3) pulgadas". Desde luego, que algunas situaciones pueden naturalmente prestarse al uso de dos variables. Como hemos dicho antes, no hay objeción en este capítulo a incluir un ejemplo casual de este tipo.

3. Debe hacerse una traducción directa a un enunciado abierto. Así para el ejemplo 1 en la página 82 aunque <u>podríamos</u> cambiar el enunciado a $2K + 3 = 44$, tal enunciado no es una traducción directa del problema, pues no revela realmente toda la historia. Una buena prueba de una traducción directa es ver si, con la descripción de la variable, el enunciado puede traducirse inmediatamente al problema original.

4. Repetimos que, por el presente, la atención principal está en la traducción y no esperamos que los estudiantes sigan adelante y "obtengan la respuesta" en este capítulo. Debemos advertir que los ejemplos 1, 2 y 3 en las páginas 82-84 no tienen respuestas obvias. Esto fue planeado así para tratar de evitar la distracción de "conseguir las respuestas".

<u>Respuestas al Conjunto de problemas 4-2b; páginas 84-86:</u>

1. Si Carlos recibió c votos, entonces Enrique recibió $c + 30$ votos, y $c + (c + 30) = 516$.
   Si Carlos recibió c votos, entonces Enrique recibió $516 - c$ votos, y $516 - c = c + 30$.
2. Si el rectángulo mide x pulgadas de ancho, entonces mide $6x$ pulgadas de largo, y

   $x + 6x + x + 6x = 144$

   6

   $2x + 2(6x) = 144$.
3. Si el ángulo más pequeño mide s grados, entonces el ángulo más grande mide $2s + 20$ grados, y
   $s + (2s + 20) + 70 = 180$.
4. Si y es el número de pies en una de las secciones más cortas, entonces la sección larga mide $y + 100$ pies de largo, e $y + y + (y + 100) = 2500$.
5. Si había y estudiantes en la clase de la Srta. López, entonces había $y + 5$ estudiantes en la clase del Sr. Pérez, e $y + (y + 5) = 43$.
   Si había y estudiantes en la clase de la Srta. López, entonces había $43 - y$ estudiantes en la clase del Sr. Pérez, y $43 - y = y + 5$.

(Conviene llamar la atención del estudiante hacia el segundo de estos métodos. Es un enfoque útil, pero algunos estudiantes tienen dificultad con él al principio.)

6. Si el rectángulo mide w pulgadas de ancho, entonces mide $w + 5$ pulgadas de largo, y $w(w + 5) = 594$.
7. Si Ricardo tiene ahora x años de edad, entonces Juan tiene $3x$ años de edad. Ricardo tenía $x - 3$ años de edad hace 3 años, Juan tenía $3x - 3$ años hace 3 años, y $(x - 3) + (3x - 3) = 22$.
8. Si Juan tiene d monedas de diez centavos, entonces tiene $d + 1$ monedas de veinticinco centavos y $2d + 1$ monedas de cinco centavos; las monedas de diez centavos tienen un valor de $10d$ centavos, las de veinticinco tienen un valor de $25(d + 1)$ centavos, y las de cinco tienen un valor de $5(2d + 1)$ centavos. Luego, $10d + 25(d + 1) + 5(2d + 1) = 165$.
9. Si compré f sellos de cuatro centavos, entonces compré $23-f$ sellos de siete centavos; los sellos de cuatro centavos cuestan $4f$ centavos, los sellos de siete centavos cuestan $7(23-f)$ centavos, y $4f + 7(23 - f) = 119$.
(V. nota del problema 5)
10. Si el tren de carga viajaba a z millas por hora, entonces el tren de pasajeros viajaba a $z + 20$ millas por hora, el tren de carga recorrió $5z$ millas, el tren de pasajeros recorrió $5(z + 20)$ millas, y $5(z + 20) = 5z + 100$.
11. Si hay h envases de media pinta, entonces hay $6h$ envases de una pinta, y

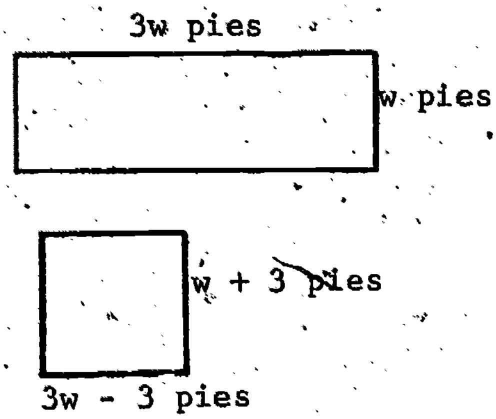
$h\frac{1}{4} + (6h)\frac{1}{2} = 39$ (enunciado acerca de los cuartillos)

6 $h \cdot \frac{1}{2} + (6h) = 78$ (enunciado acerca de las pintas)

6 $h + 2(6h) = 156$ (enunciado acerca de las medias pintas)

12. Si y es el número de años que pasarán antes de que los dos hombres ganen el mismo sueldo, entonces el Sr. Vélez ganará $3600 + 300y$ dólares, el Sr. Sánchez ganará $4500 + 200y$ dólares, y $3600 + 300y = 4500 + 200y$.

13. Si la tabla mide w pies de ancho, entonces mide $3w$ pies de largo, el cuadrado tendría $w + 3$ pies de ancho y $3w - 3$ pies de largo, y $w + 3 = 3w - 3$.



14. Los siguientes problemas son, desde luego, solamente sugerencias:

(a) Tengo $4.80 repartidos en monedas, de las cuales hay dos monedas más de diez centavos que de cinco centavos y dos veces más monedas de cincuenta centavos que de cinco centavos. ¿Cuántas monedas de cada clase tengo?

(b) ¿Cuál será el ancho de un rectángulo que es tres veces más largo que ancho y que tiene un área de 300 pulgadas cuadradas?

(c) Una escuela pidió 85 folletos, algunos de los cuales costaron $0.60 cada uno y el resto costó $1.10 cada uno. La factura total fue de $78.50. ¿Cuántos folletos de cada clase se pidieron?

(d) Se va a cortar un listón de madera de 69 pulgadas de largo en tres pedazos, de tal manera que el segundo pedazo sea 3 pulgadas más largo que el primero y el tercer pedazo sea 6 pulgadas más largo que el primero. ¿Cuál debe ser el largo del pedazo más corto?

(e) Dos muchachos atraparon 18 pescados. Como la familia de uno de los muchachos era dos veces más numerosa que la del otro, decidieron repartir los 18 pescados, de manera que uno de los muchachos llevara a su casa dos veces lo que llevara el otro. ¿Cuántos pescados llevó cada uno?

(f) Una tuerca y un tornillo pesan juntos 5 onzas. Si un montón de 30 tuercas y 4 tornillos pesa 59 onzas, ¿cuánto pesa un tornillo?

(Obsérvese que para hacer cierto el enunciado abierto, h no puede ser un número cardinal. Así, un problema en el cual h representa un número de personas, por ejemplo, no sería apropiado.)

(g) Si José cortó $\frac{1}{4}$ de la grama y Jaime $\frac{1}{3}$ de la grama, ¿qué parte debe cortar Raúl para terminar de cortar toda la grama?

15. Si el bote más pequeño puede llevar n pasajeros, entonces el bote más grande puede llevar $n + 80$ pasajeros, y $n + (n + 80) = 300$.
    La familia Colón viajó hasta la casa de su primo. Al regresar, tomaron una nueva ruta que aumentó en 80 millas la distancia. Cuando llegaron a su casa habían recorrido un total de 300 millas. ¿A qué distancia de la casa de la familia Colón estaba localizada la casa del primo?

4-3. Enunciados abiertos que contienen desigualdades

Página 86. Aquí aumentamos la experiencia de los estudiantes con traducciones a enunciados que contienen desigualdades. Aunque todavía no estamos tratando de hallar el conjunto de validez del enunciado abierto, podemos observar la manera en que el conjunto de validez de una desigualdad puede contener muchos números en lugar de solamente uno.

Respuestas al Conjunto de problemas 4-3a; página 87:

1. Teodoro tiene más de 3 años de edad. ¿Qué edad tiene?
2. Si Isabel fuera un año mayor, todavía tendría menos de 17 años. ¿Qué edad tiene Isabel?
3. Las monedas de veinticinco centavos que hay en mi bolsillo a lo más suman $1.75. ¿Cuántas monedas de veinticinco centavos hay en mi bolsillo?
4. Si fuéramos a comprar tres libros más a $5.00 cada uno, el costo sería menos de $100.00. ¿Cuántos libros podemos comprar?
5. Si la población de Metrópolis aumenta en 10,000, la población será más de 160,000. ¿Cuál es la población actual de Metrópolis?

6. El Sr. Alvarez tiene una caja de tachuelas, el Sr. Matos tiene dos cajas, y la Srta. Gómez tiene tres. Juntos tienen por lo menos 48 tachuelas. ¿Cuántas tachuelas hay en cada caja?
7. El guía recorrió el sendero una vez el viernes, dos veces el sábado y tres veces el domingo. Recorrió un total de 50 millas. ¿Cuál es el largo del sendero? (Obsérvese que el enunciado abierto no será cierto para un número cardinal. Obsérvese también en los problemas 6 y 7, que a, 2a, y 3a no pueden representar lados de un triángulo, puesto que la suma de dos de ellos no es mayor que el tercero. Si es posible, trátese de llamar la atención de los estudiantes hacia restricciones de este tipo.)

*8. Si tres muchachos más se unen al club, el club tendrá más de 5 y menos de 10 miembros. ¿Cuántos miembros tiene el club ahora?

9. Si el grupo completo de muchachos se divide en dos equipos iguales, cada equipo será menor que un equipo completo de pelota. ¿Cuántos muchachos había en el grupo completo?

*10. Un lote de terreno de 12 acres se repartió entre dos hijos de tal manera que un hijo recibió más de tres veces lo que recibió el otro. ¿Cuántos acres recibió cada hijo?

<u>Página 87</u>. Ejemplo 2: Una clase de estudiantes capacitados puede disfrutar con una discusión del hecho de que este problema se describe más completamente mediante el enunciado compuesto

$$d > 0 \quad \text{y} \quad (d - 32) + d \leq 48.$$

Puesto que la frase $d - 32$ no tiene significado para $d < 32$, el dominio es el conjunto de números mayores que o iguales a 32.

Página 88. Ejemplo 3: Hay, desde luego, una tercera condición:

$$5 < n + 6.$$

Puesto que este enunciado es cierto para todos los valores positivos de n, no agrega nada a la información acerca de los lados del triángulo. Lo mencionamos aquí, por si un estudiante pregunta acerca de él.

Algún estudiante puede preguntar también la manera de hallar el conjunto de validez de

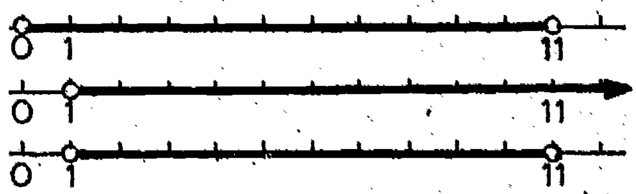
$$n < 5 + 6 \quad y \quad 6 < n + 5.$$

Aun cuando no nos ocupamos ahora de los conjuntos de validez, se puede demostrar al estudiante interesado la manera posible de usar gráficas para determinar este conjunto de validez.

$n < 5 + 6$

$6 < n + 5$

$n < 5 + 6$ y $n + 5 > 6$



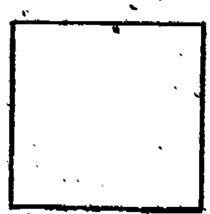
Por lo tanto, el largo del tercer lado es menor de 11 pulgadas y mayor de una pulgada.

La dificultad principal para el estudiante en este caso podría ser la gráfica de $6 < n + 5$. Sin embargo, puede observar naturalmente, que esa inecuación es equivalente a $n > 1$.

Respuestas al Conjunto de problemas 4-3b; páginas 88-89:

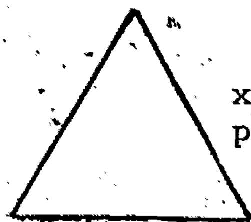
1. Si el número es n, entonces $\frac{3}{4}n + \frac{1}{3}n \geq 26$.

2. Si Raúl tiene y años de edad, entonces Guillermo tiene $y + 5$ años de edad, e $y + (y + 5) < 23$.
3. Si un lado del cuadrado mide x pulgadas, entonces un lado del triángulo mide $x + 5$ pulgadas, y $4x = 3(x + 5)$.



x pulgadas

Cuadrado



x + 5 pulgadas

Triángulo Equilátero

4. Si la velocidad de la corriente es c millas por hora, entonces $c + 12$ es la velocidad del bote viajando a favor de la corriente, y $c + 12 < 30$.
5. Si Juan puede tardar x horas en el trabajo, entonces $x > 2$ y $x \leq 4$.
6. Si se dedican c minutos a anuncios comerciales, entonces $c \geq 3$ y $c < 12$.

   El tiempo T para asuntos que no sean de publicidad es $30 - c$. Otra manera de expresar la última idea es $T \leq 30 - 3$ y $T > 30 - 12$.
7. Si hay t estudiantes en la clase, entonces $3t \geq t + 26$.
8. Si Enrique recibe d dólares, entonces Ricardo recibirá $d + 15$ dólares, y Tomás $2(d + 15)$ dólares. Luego, $d + (d + 15) + 2(d + 15)$ [illegible] 205.
9. Si Enrique recibe d dólares, entonces Ricardo recibirá $d + 15$ dólares, y Tomás $2(d + 15)$ dólares. Luego,

   $d + (d + 15) + 2(d + 15) \leq 225$ y $d + (d + 15) + 2(d + 15) \geq 205$.

*10. Si su puntuación en la tercera prueba es t, entonces

$$\frac{75 + 82 + t}{3} \geq 88$$

$$\frac{75 + 82 + 100}{3} = \frac{257}{3} = 85\frac{2}{3}$$

$$\frac{75 + 82 + 0}{3} = \frac{157}{3} = 52\frac{1}{3}$$

11. Si hay s estudiantes en la Escuela Central y m estudiantes en la Escuela Vocacional, entonces

(a) $s > m$

(b) $s = m + 500$

Página 89. Esta lista de problemas repasa las ideas de este capítulo e indirectamente muchas de las ideas de los capítulos anteriores. El maestro debe usar su propio criterio respecto a cuántos de éstos deben estudiarse y cuándo deben estudiarse. Algunos de ellos deberían ser asignados uno o dos a la vez junto con asignaciones posteriores a medida que la clase vaya estudiando el próximo capítulo. Examínese la lista completa para ver qué variedad de problemas conviene que la clase domine.

Respuestas a los Problemas de repaso; páginas 89-96:

Según se presente la oportunidad, discútanse con los estudiantes las restricciones sobre el dominio de la variable que se imponen en algunos de los problemas por la naturaleza de la situación.

1. (a) Si x es el número de centavos en la colecta antes de aportar mi contribución, entonces la frase es: El número total de centavos en la colecta después de dar mis quince centavos. Con esta traducción, el dominio es el conjunto de los números cardinales.

(b) Si p es el número de dólares en el precio de catálogo de un libro, entonces la frase es: El número de dólares pagados por cinco ejemplares del mismo libro, tres comprados a precio de catálogo y dos comprados con una rebaja de un dólar en el precio de catálogo.

(c) Si el bote ha viajado t horas a diez millas por hora, entonces la frase es: El número de millas restantes de un viaje en bote de 60 millas al término de t horas.

(d) Si r es el número de barquillos de helado de 15 centavos, entonces la frase es: El número total de centavos gastados por un grupo de 9 estudiantes en el parque de recreo, donde cada estudiante compró r barquillos y cada uno compró 25 centavos de rosetas.

(e) Si b es el número de pulgadas de largo de la base de un triángulo, entonces la frase es: El número de pulgadas cuadradas del área del triángulo, donde la altura es 4 pulgadas menor que 3 veces el largo de la base.

2. (a) Si n es el número, entonces la frase es n - 3.

(b) Si Samuel tiene ahora y años de edad, entonces la frase es y + 7.

(c) Si María tiene ahora x años de edad, entonces la frase es x - 10.

(d) Si t es el número de grados de la temperatura actual, entonces la frase es t + 20.

(e) La frase es 5n.

3. (a) La frase es $10x + 5y + 6$.
   (b) Si el número es n, entonces la frase es $n + 2n$.
   (c) Si el primer número es x y el segundo es y, entonces la frase es $x + 2y$.
   (d) La frase es $7w$.
   (e) Si x es la población de una ciudad de Kansas, entonces la frase es $2x + 1{,}000{,}000$.
   (f) La frase es $12x$.
4. (a) Si b es el número de dólares en la asignación de Isabel, entonces la frase es $2b + 1$.
   (b) La frase es $40h$.
   (c) La frase es $\frac{y}{1000}(25)$.
   (d) Si Gerardo pesa e libras, entonces la frase es $e + 40$.
   (e) Si el rectángulo mide n pulgadas de ancho, entonces la frase es $n(n + 3)$.
5. (a) La frase es $1.59x$.
   (b) La frase es $0.75z$.
   (c) La frase es $33.2g$.
   (d) La frase es $29x + 59y$.
   (e) La frase es $10t + u$.
6. (a) Si x es el número de años que él tiene, entonces tiene menos de 80 años de edad.
   (b) Si él gana y dólares en un año, su sueldo anual es 3600 dólares.
   (c) Si z es el número de dólares de los recursos de un banco, entonces los recursos montan más de 100 millones de dólares.
   (d) Si u, v, w son los números de grados de los ángulos de un triángulo, la suma de los ángulos es 180 grados.

(e) Si el lado más corto de un rectángulo es de z pulgadas, y el lado más largo es 18 pulgadas más largo que el primero, entonces el área del rectángulo es 360 pulgadas cuadradas.

7. (a) Si la hermana de María tiene t años de edad, entonces

$$16 = t + 4.$$

(b) Si Guillermo compró b plátanos, entonces

$$9b = 54.$$

(c) Si el número es n, entonces

$$2n + n < 39.$$

(d) Si la asignación de Isabel es b dólares, entonces la asignación de Arturo es $2b + 1$ dólares, y

$$2b + 1 = 3b - 2.$$

(e) $40t = 260$

(f) $\frac{300}{t} \leq 50$

8. (a) Si la montaña Pike tiene h pies de altura, entonces

$$h > 14{,}000.$$

(b) $1.4 = 0.003n + 2(0.1)$

(c) Si p es el número de personas en una ciudad de Colorado, entonces $2{,}000{,}000 > 2p$.

(d) $x^2 > (x - 1)(x + 1)$

(e) Si y es el número de dólares del valor de la propiedad, entonces $\frac{y}{1000}(24) = 348$.

(f) Si Gerardo pesa w libras, entonces

$$w + 40 \leq 152.$$

9. (a) Si el número cardinal es n, entonces su sucesor es $n + 1$, y $n + (n + 1) = 575$.

(b) Si el número cardinal es n, entonces su sucesor es $n + 1$, y $n + (n + 1) = 576$.

Este enunciado es falso para todos los números cardinales. Si un número es impar, su sucesor es par; si el número es par, su sucesor es impar. Por lo tanto, la suma de ambos no puede ser par.

(c) Si el primer número es n, entonces el segundo número es $n + 1$, y $n + (n + 1) = 576$.

Hay un número para el cual este enunciado es cierto, puesto que el dominio de la variable no está restringido a números cardinales.

(d) Si un pedazo de la tabla mide f pies de largo, entonces el otro mide $2f + 1$ pies de largo, y $f + (2f + 1) = 16$.

(e) $3x = 225$

10. Si el dígito de las decenas es t, y el de las unidades es u, entonces el número es $10t + u$, y $10t + u = 3(t + u) + 7$.

11. $42 - n$

12. (a) Si n es el número, entonces $3(n + 17) = 192$.

(b) Si n es el número, entonces $3(n + 17) < 192$.

13. Si el primer número es x, entonces el segundo número es $5x$, y $x + 5x = 4x + 15$.

14. Si Sara tiene K libros, entonces Susana tiene $K + 16$ libros, y $K + (K + 16) > 28$.

15. En una hora se puede arar $\frac{1}{7}$ del terreno con el primer tractor. En dos horas, usando ambos tractores, se puede arar $\frac{2}{7} + \frac{2}{5}$ del terreno. La parte del terreno que se quedó sin arar es $1 - (\frac{2}{7} + \frac{2}{5})$. El enunciado abierto es $\frac{x}{7} + \frac{x}{5} = 1$.

*16. Si t es el número de la hora en que sales de Nueva York, entonces $t + h$ será el número de la hora, hora de Nueva York, en que llegas a Los Angeles. $t + h - 3$ es el número de la hora de llegada, hora de Los Angeles, y $t + h - 3 < 12$.

17. El peso del Sr. Rivera hace m meses era $175 + 5m$. $175 + 5m = 200$.

18. (a) Si n es un número cardinal, entonces $n + 1$ es su sucesor, y $n + (n + 1) = 45$.

(b) Si n es un número impar, entonces $n + 2$ es el más próximo número impar consecutivo, y $n + (n + 2) = 75$. Véase si los estudiantes se dan cuenta de que esto nunca puede ser cierto para un número impar cualquiera, puesto que la suma de dos números impares es par.

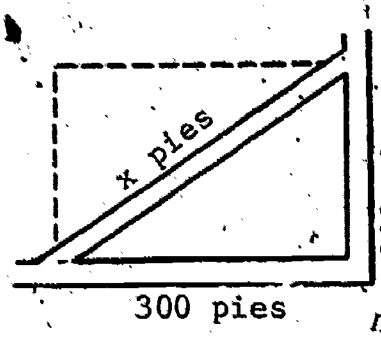
19. Si el precio estipulado era m dólares, entonces $176 = m - \frac{12}{100} m$.

20. Si x es el número de dólares por una hora de trabajo a la razón corriente, entonces $\frac{3}{2}x$ es el número de dólares por una hora de trabajo a razón de tiempo y medio, y $40x + 8(\frac{3}{2}x) = 166.40$.

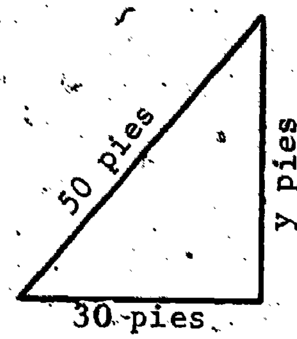
21. Si el blanco está a d pies de distancia, entonces la bala tardó $\frac{d}{1700}$ segundos en alcanzar el blanco, y el sonido tardó $\frac{d}{1100}$ segundos en regresar, y $\frac{d}{1700} + \frac{d}{1100} = 2$. Una solución alternativa que tiene la ventaja de proporcionar un enunciado más sencillo, pero la desventaja de que la variable representa un número distinto del que se pidió, es: Si t es el tiempo en segundos que tarda la bala en

llegar al blanco y $2 - t$ es el tiempo en segundos que tarda el sonido en regresar, entonces $1100(2 - t) = 1700t$.

22. Si el atajo tiene x pies de largo, entonces $(200)^2 + (300)^2 = x^2$.



23. Si y es el número de pies de altura del poste, entonces, por el teorema de Pitágoras, $(30)^2 + y^2 = (50)^2$.



24. (a) $35 + 20t$
    (b) $h - 1$ es el número de períodos de una hora después de la primera hora, y la frase es $35 + 20(h - 1)$.

25. Si el radiador contenía originalmente w cuartillos de agua, contiene $w + 2$ cuartillos de la mezcla después de añadir el alcohol. Como el 20% de esta mezcla es alcohol, hay $\frac{20}{100}(w + 2)$ cuartillos de alcohol en la mezcla.

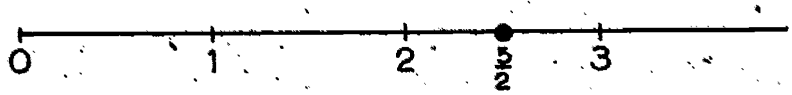
$$2 = \frac{20}{100}(w + 2)$$

26. (a) $100x + 40y$
    (b) $100(2 \times 60) + 40y$
    (c) $100x + 40y = 20,000$

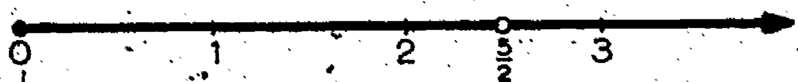
27. (a) $20 + 2w$
(b) $12 + 3w$
(c) $20 + 2w = 12 + 3w$

28. (a) $20 + \frac{h}{1500}$
(b) $20 + \frac{y}{1500} = 24$

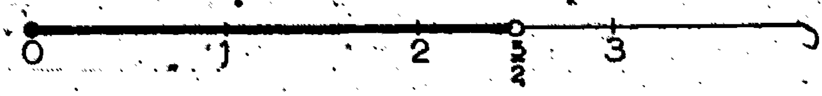
29. $x = \frac{5}{2}$



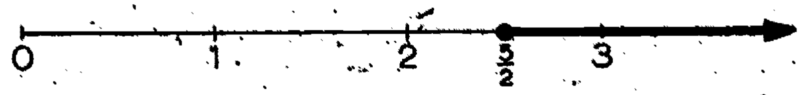
$x \neq \frac{5}{2}$



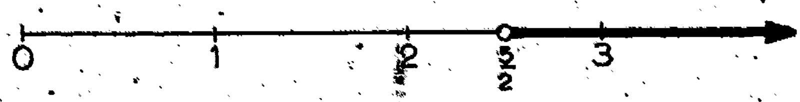
$x < \frac{5}{2}$



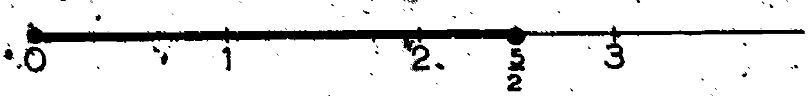
$x \not< \frac{5}{2}$



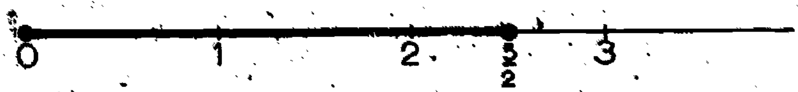
$x > \frac{5}{2}$



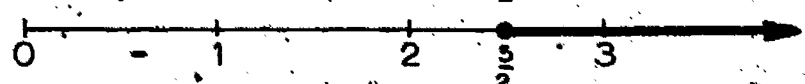
$x \not> \frac{5}{2}$



$x \leq \frac{5}{2}$

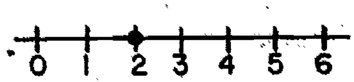


$x \geq \frac{5}{2}$

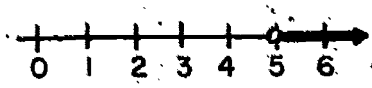


30. (a) $x > 2$
(b) $x \leq 6$
(c) $x > 2$ y $x \leq 6$

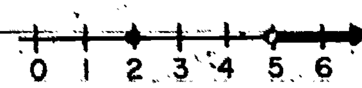
31. (a) $x = 2$



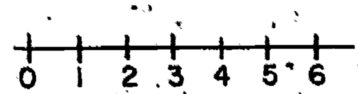
$x > 5$



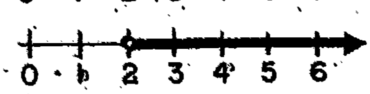
$x = 2$ ó $x > 5$



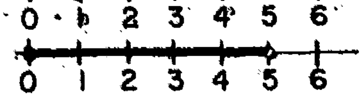
(b) $x = 2$ y $x > 5$



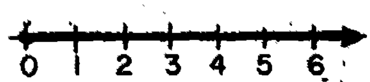
(c) $x > 2$



$x < 5$



$x > 2$ ó $x < 5$



(d) $x < 2$ y $x < 5$

32. $(x \geq 1$ y $x < 3)$ ó $(x > \frac{7}{2})$

33. Este problema repasa las sumas de pares de miembros de un conjunto; no es un problema propuesto principalmente para lograr una respuesta. El estudiante que trate de escribir un enunciado abierto encontrará que está perdiendo su tiempo. En vez de esto deberá observar que el hombre tiene un conjunto de cuatro miembros: $\{1.69, 1.95, 2.65, 3.15\}$ y que tendrá que examinar el conjunto de todas las posibles sumas de pares de elementos del conjunto.

+	1.69	1.95	2.65	3.15
1.69	3.38	3.64	4.34	4.84
1.95	3.64	3.90	4.60	5.10
2.65	4.34	4.60	5.30	5.80
3.15	4.84	5.10	5.80	6.30

Este es el conjunto: $\{3.38, 3.64, 3.90, 4.34, 4.60, 4.84, 5.10, 5.30, 5.80, 6.30\}$

De aquí vemos que: (a) La cantidad mínima de dinero que le puede haber sobrado es 5.00 - 4.84, ó 16 centavos.

(b) La cantidad máxima de dinero que le puede haber sobrado es 5.00 - 3.38, ó \$1.62.

(c) Hay cuatro combinaciones de dos cajas que él no puede comprar: una de \$1.95 y una de \$3.15; una de \$2.65 y una de \$3.15; dos de \$2.65; dos de \$3.15.

*34. Si a es el dígito de las unidades de un número, entonces $10 + a$ es el número. Si b es el dígito de las unidades del otro número, entonces $10 + b$ es el otro número. Si p es el producto de los dos números, entonces $p = \big((10 + a) + b\big)10 + ab$.

Podemos verificar el enunciado anterior, mostrando que $p = (10 + a)(10 + b)$.

De este modo, recordando que podemos considerar a $10 + a$ como un solo número,

$p = \big((10 + a) + b\big)10 + ab$	
$= (10 + a)10 + b(10) + ab$	distributiva
$= (10 + a)10 + 10b + ab$	conmutativa de la multiplicación
$= (10 + a)10 + (10 + a)b$	distributiva
$= (10 + a)(10 + b)$	distributiva

Capítulo 4

Sugerencias para exámenes

Escribe una frase abierta o un enunciado abierto para cada uno de los siguientes:

1. El volumen V en pies cúbicos de un sólido rectangular cuyas dimensiones son x yardas, w pies, y z pies.

2. Si un muchacho tiene 250 yardas de alambre de cerca para un corral de pollos, ¿cuán largo y cuán ancho podría hacer un corral, si quisiera que éste tuviera 25 yardas más de largo que de ancho?

3. En un huerto que contiene 2800 árboles, el número de árboles en cada fila es 10 menos que dos veces el número de filas. ¿Cuántas filas hay?

4. Pablo tiene d monedas de diez centavos y tres veces más monedas de veinticinco centavos que de las primeras. Escribe una frase abierta para el número de centavos que tiene Pablo.

5. Si h es el tercero de cinco números cardinales consecutivos, entonces

   el quinto número es ______,

   el segundo número es _____,

   la suma del primero y el quinto número es____.

6. Jorge es 3 años mayor que Ana, y la suma de sus edades es menor de 27 años. ¿Qué edad tiene Ana?

7. Hay cinco paquetes grandes y tres pequeños. Cada paquete grande pesa 4 veces más que cada paquete pequeño; y los ocho, atados juntos, pesan 34 libras 8 onzas. ¿Cuál es el peso de cada paquete?

8. Jaime tiene cuatro veces más dinero que Carlos. Si le da 39 centavos a éste, los dos tendrán entonces cantidades iguales. ¿Cuánto tiene Carlos ahora?

9. Un padre gana por hora el doble de lo que gana su hijo. Si el padre trabaja 8 horas y el hijo 5, ganan menos de $30.00. ¿Cuánto gana el hijo por hora?

10. Separa $38.00 en dos partes de tal manera que una parte sea $19.00 más que la otra.

11. Una canasta llena de melocotones cuesta $2.10. Los melocotones cuestan dos dólares más que la canasta. ¿Cuánto cuesta la canasta?

12. El espesor de un cierto número de páginas de un libro, si cada página tiene un espesor de $\frac{1}{400}$ de pulgada.
13. El producto de un número cardinal y su sucesor es 342. ¿Cuál es el número?
14. El peso de Guillermo, 193 libras, es por lo menos 10 libras más que el de David. ¿Cuánto pesa David?
15. Un vendedor insiste en que debe tener por lo menos \$12.00 al día en su cuenta de gastos, y su jefe iniste en que se le debe dar menos de \$30.00 al día. Expresa esto como un enunciado abierto.
16. Completa el siguiente problema de manera que corresponda al enunciado abierto dado.
    Problema: Juan encontró una caja que contenía \$2.40.

    Enunciado abierto: $5(x + 4) + 10(4x) + 25x = 240$
17. En cada uno de los casos siguientes, traduce a una frase abierta o a un enunciado que contenga una sola variable.
    (a) \$30 más que el sueldo semanal de Tomás.
    (b) El sueldo semanal de Tomás es más de \$30.
    (c) El sueldo semanal de Tomás es \$30 más que el de Jaime. Juntos ganan \$140 por semana.
    (d) El sueldo semanal de Tomás es \$30 más que el de Jaime. Juntos ganan más de \$140 por semana.

(e) El sueldo semanal de Tomás es $30 más que el de Jaime. La suma de sus sueldos semanales está entre $140 y $200.

18. Escribe cada una de las frases abiertas que resulta de seguir las siguientes instrucciones:

(a) Escoge un número y añádele 4 para obtener un segundo número.

(b) Resta 3 del segundo número para obtener un tercer número.

(c) Halla la media aritmética de los números segundo y tercero.

Capítulo 5

LOS NUMEROS REALES

5-1. La recta de los números reales

En los capítulos del 1 al 4, el estudiante ha estado descubriendo y aplicando propiedades de operaciones en un conjunto de números que llamamos los números de la aritmética. Este conjunto consiste en el 0 y en los números asociados con puntos situados a la derecha del 0 en la recta numérica. Su trabajo con números familiares le dio seguridad en tales conceptos como las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva (ACD), enunciados abiertos, conjuntos de validez, etc.

Con esta preparación, está ahora listo para dar nombres a los números que asignaremos a puntos situados a la izquierda del 0. El conjunto total de los números correspondientes a todos los puntos de la recta, esto es, el conjunto de los números reales, es ahora su campo de actividad.

Conviene mencionarse que en este curso hemos preferido enfocar los números negativos de una manera diferente a la de algunos autores. En vez de presentar un conjunto nuevo de números (los números reales) y entonces identificar un subconjunto particular de éstos (los números no negativos) con el conjunto original (los números de la aritmética); hemos preferido el punto de vista siguiente: Extendemos los números de la aritmética al conjunto de los números reales, añadiendo los números negativos a los números familiares de la aritmética. Esto tiene varias ventajas: Primero, no necesitamos distinguir entre números "con signo" y números "sin signo"; para nosotros los números reales no negativos son los números de la aritmética. Segundo, no es necesario demostrar que las propiedades familiares son válidas para los números no negativos, pues estas propiedades se conservan intactas al extender los números de la aritmética. De esta manera, evitamos la confusión de establecer un "isomorfismo" entre números positivos y "números sin signo". Obsérvese que no tenemos necesidad alguna de usar la palabra ambigua "signo".

En general, hemos tomado el punto de vista de que un estudiante de noveno grado realmente tiene alguna experiencia con números negativos. Está en condiciones de marcar los puntos a la izquierda del 0, y al hacer esto, efectuar la extensión a que nos referimos.

Una referencia general para el maestro en relación con este capítulo es Haag, Studies in Mathematics, Volume III, Structure of Elementary Algebra, Capítulo 3, pág. 3.16, páginas 3.23-3.26.

En este capítulo, familiarizamos al estudiante con el conjunto total de los números reales. Incluimos la ordenación y la comparación de números reales, y la operación de determinar el opuesto de un número real. Otra sección se dedica a una definición y al estudio del valor absoluto de un número real. Aquí debe señalarse que se aplica la técnica espiral. Esta introducción del concepto del valor absoluto va seguida en cada uno de los capítulos que siguen por usos y grados de abstracción, cada vez mayores, del concepto de valor absoluto. El maestro no necesita agotar todo lo que se presenta aquí sobre valor absoluto, porque el tema reaparece regularmente.

Más adelante, en los Capítulos 6 y 7, definiremos la suma y la multiplicación de números reales, teniendo cuidado de escoger nuestras definiciones para que las propiedades familiares ACD de las operaciones sean válidas para todos los números reales. En lo restante del curso, las operaciones con números reales nos conducirán a muchos temas considerados habitualmente en los cursos de álgebra elemental.

Página 97. Introducimos los números negativos de manera parecida a la que empleamos para identificar los puntos del lado derecho de la recta numérica correspondientes a los números de la aritmética. Nuestra notación para el cuatro negativo, por ejemplo, es $^-4$, y definitivamente queremos que la raya "$^-$" se escriba en la parte superior izquierda. En esta etapa no deseamos que el estudiante piense que algo se ha hecho al número 4 para obtener el número $^-4$, sino que en verdad $^-4$ es un nombre del número asignado al punto situado cuatro unidades a la izquierda del 0 en la recta numérica. Con otras palabras, la raya superior no es el símbolo de una operación, sino solamente una marca de identificación para números a la izquierda del 0.

En la sección 5-3, el estudiante estará preparado para considerar a $^-4$ como el número obtenido del 4 mediante una operación llamada "tomar el opuesto". El opuesto de 4 que allí se introduce será representado por el símbolo $^-4$. Ahora la raya se escribe un poco más abajo que en el caso de los números a la izquierda del 0, y -4 resultará ser un nombre más conveniente para $^-4$.

Cada número de la aritmética tiene muchos nombres y así sucede con cada número negativo. Por ejemplo, el número $^-7$ tiene los nombres

$$^-\frac{14}{2}, \quad ^-(7 \times 1), \quad ^-(\frac{3+2}{8} \times \frac{56}{5}), \quad \text{etc.}$$

Al construir gráficas de números reales, el estudiante deberá saber que la recta numérica que dibuja es solamente una aproximación a la verdadera situación de la recta numérica. Consecuentemente, cualquier información que dedujese de esta representación de la recta numérica es sólo tan exacta como su dibujo.

Página 98. Una vez que se han introducido los números negativos, tenemos los objetos con los cuales el estudiante estará principalmente ocupado durante los próximos cuatro años de su educación matemática. Es muy inconveniente tener que referirse a "los números que corresponden a todos los puntos en la recta numérica" o a "los números de la aritmética y sus negativos", y así solemos usar el nombre los números reales. No se debe permitir que los estudiantes den importancia a la significación de la palabra "real". Es simplemente el nombre de este conjunto de números.

No es conveniente ahora estudiar detalladamente los números irracionales. La demostración de que $\sqrt{2}$ no es racional se dará en el Capítulo 11. Mientras tanto, simplemente deseamos que el estudiante vea un ejemplo de un número irracional tal como $\sqrt{2}$ ó π, y que se le informe que hay muchos más.

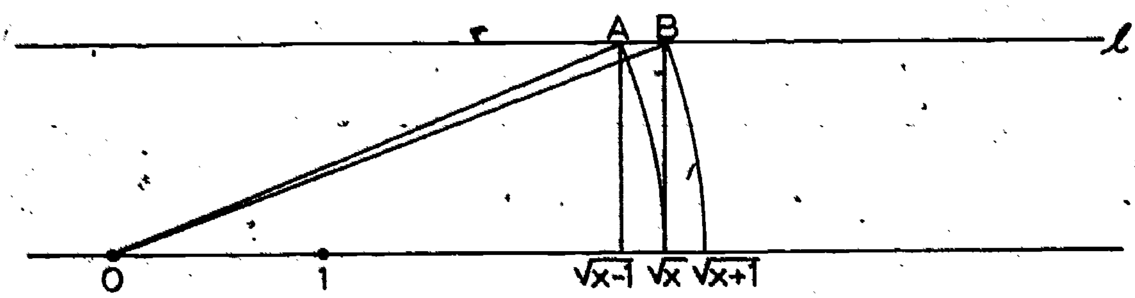
Página 98.

- Números Reales
  - Números Racionales
    - Enteros
      - Enteros Negativos
      - 0
      - Enteros Positivos
    - Números Racionales que no son Enteros
  - Números Irracionales

Una equivocación corriente es creer que algunos números en la recta son reales y otros son irracionales. Debe estimularse al estudiante a decir, por lo menos por ahora, que "-2 es un número real el cual es un número racional y un entero negativo; $\frac{3}{2}$ es un número real y también un número racional; $-\sqrt{2}$ es un número real y también un número negativo irracional". Lo importante es que cada entero es también un número racional y un número real; cada número racional es un número real; y cada número irracional es un número real.

<u>Página 99</u>. El método de situar $\sqrt{2}$ en la recta numérica depende de la comprensión por el estudiante del teorema de Pitágoras. De nuevo, insistimos en que no se permita distraer la atención de las ideas principales de la sección. Si esto puede convertirse en una lección completa acerca del teorema de Pitágoras, sería mejor omitir la construcción.

Para el estudiante más capacitado, el diagrama dado en el texto para hacer la gráfica de $\sqrt{2}$ puede ampliarse fácilmente para obtener un método de determinar sucesivamente $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, etc. (El maestro no está obligado a seguir esta sugerencia.) Dado el segmento unidad, de 0 a 1 en la recta numérica, sea ℓ una recta paralela a dicha recta numérica y distante una unidad de la misma. Supóngase que x es un número mayor que o igual a 1, para el cual hemos podido localizar $\sqrt{x}$ en la recta numérica. La perpendicular a la recta numérica en $\sqrt{x}$ corta a ℓ en un punto B, y el círculo



con centro en O y radio OB corta entonces a la recta de los números de la aritmética en $\sqrt{x+1}$. Aplicando la misma técnica a $\sqrt{x+1}$, podemos localizar $\sqrt{x+2}$. Este proceso se puede continuar indefinidamente. En particular, si $x = 1$, podemos determinar sucesivamente $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, etc.

De igual manera, el círculo con centro en 0 y radio $\sqrt{x}$ corta a ℓ en un punto A, y entonces la perpendicular a ℓ en A corta a la recta numérica aritmética en $\sqrt{x-1}$. Si $x \geq 2$, el proceso se puede repetir para obtener $\sqrt{x-2}$, y así sucesivamente.

Como un ejemplo, supóngase que $x = 16$. Puesto que podemos situar fácilmente $\sqrt{16} = 4$ en la recta numérica, el esquema anterior nos permite situar $\sqrt{15}$ y $\sqrt{17}$. Aplicando el método a cada uno de éstos, podemos localizar $\sqrt{14}$ y $\sqrt{18}$, y así sucesivamente.

<u>Página 99</u>. El estudiante puede haber creído en algún momento que $\sqrt{2}$ es un número racional, y esperamos borrar esta idea haciendo que calcule los cuadrados de varios números racionales que haya llegado a asociar con $\sqrt{2}$. Esperamos que se dé cuenta de que $\sqrt{2}$ es un número <u>entre</u> 1 y 2, <u>entre</u> 1.4 y 1.5, <u>entre</u> 1.41 y 1.42, <u>entre</u> 1.414 y 1.415, y así sucesivamente. En el Capítulo 11, demostraremos que $\sqrt{2}$ no es un número racional.

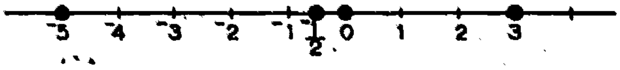
<u>Página 100</u>. ¿Es $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ un número racional? ¿Y $3 + \sqrt{2}$? En el caso de $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, ayúdesele al estudiante a razonar como sigue: Si $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ fuera un número racional, entonces $2 \times \frac{1}{2}\sqrt{2}$ sería un número racional; con otras palabras, $\sqrt{2}$ sería un número racional. Pero $\sqrt{2}$ <u>no</u> es un número racional. Por lo tanto, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ no puede ser un número racional. De igual manera, debe confirmar que $3 + \sqrt{2}$ no es un número

racional, puesto que si lo fuera, entonces $\sqrt{2} = (3 + \sqrt{2}) - 3$ sería un número racional. No se debe insistir en este punto, pero aquí introducimos por primera vez la idea de demostración indirecta (o demostración por contradicción). En la sección 7-8, se dará un análisis más detallado.

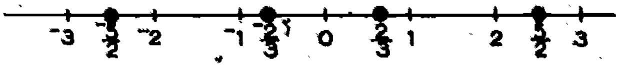
Deseamos que el estudiante vea que hay muchos puntos en la recta numérica sin coordenadas racionales. Aprenderá eventualmente la manera de nombrar algunos de éstos, pero no debe preocuparse de esto por el momento. Para un análisis de la representación de los números racionales e irracionales mediante expresiones decimales, consúltese Haag, Studies in Mathematics, Vol. III, SMSG, Capítulo 4 y Apéndice A.

Respuestas al Conjunto de problemas 5-1; páginas 100-101:

1. (a) $\{0, 3, {}^{-}5, {}^{-}(\frac{1}{2})\}$

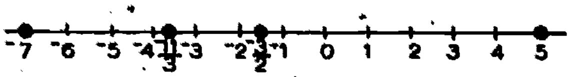


(b) $\{{}^{-}(\frac{2}{3}), \frac{2}{3}, \frac{5}{2}, {}^{-}(\frac{5}{2})\}$

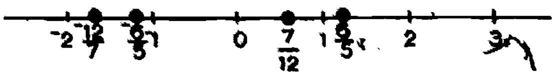


Desde luego, los puntos localizados serán sólo aproximaciones. Sin embargo, los estudiantes deben habituarse a la idea de que hay puntos en la recta correspondientes a los números utilizados en los ejercicios, y que las representaciones que dibujan en la recta numérica son aproximaciones razonables de las gráficas de los números.

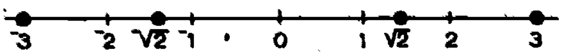
(c) $\{{}^{-}(\frac{3}{2}), 5, {}^{-}7, {}^{-}(\frac{11}{3})\}$



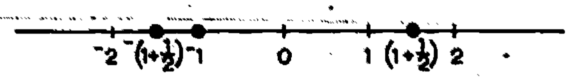
(d) $\{{}^{-}(\frac{12}{7}), {}^{-}(\frac{6}{5}), \frac{6}{5}, \frac{7}{12}\}$



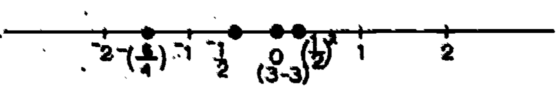
(e) $\{\sqrt{2}, {}^{-}\sqrt{2}, 3, {}^{-}3\}$



(f) $\{{}^{-}1, {}^{-}(1 + \frac{1}{2}), (1 + \frac{1}{2})\}$



(g) $\{{}^{-}(\frac{1}{2}), (\frac{1}{2})^2, {}^{-}(\frac{6}{4}), (3 - 3)\}$



2. (a), (b), (d), (e), (g), (h) y (j) se deducen del hecho de que cada número positivo está a la derecha del 0 y cada número negativo está a la izquierda del 0 en la recta de los números reales.

(a) 3 está a la derecha de $^{-}4$.

(b) 5 está a la derecha de $^{-}4$.

(c) $^{-}2$ está a la derecha de $^{-}4$.

(d) 1 está a la derecha de $^{-}\sqrt{2}$.

(e) 0 está a la derecha de $^{-}(\frac{5}{2})$

(f) $^{-}(\frac{5}{2})$ y $^{-}(\frac{10}{4})$ son nombres para el mismo número y, así, representan el mismo punto en la recta numérica.

(g) 3 está a la derecha del 0.

(h) $\sqrt{2}$ está a la derecha de $^{-}4$.

(i) $^{-}(\frac{21}{4})$ está a la derecha de $^{-}(\frac{16}{3})$.

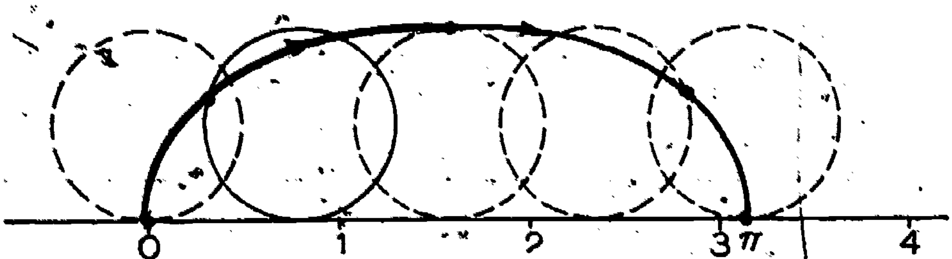
$$^{-}(\frac{21}{4} \times \frac{3}{3}) = {}^{-}(\frac{63}{12}) \quad \text{y} \quad {}^{-}(\frac{16}{3} \times \frac{4}{4}) = {}^{-}(\frac{64}{12}).$$

$^{-}(\frac{63}{12})$ está a la derecha de $^{-}(\frac{64}{12})$.

Por la manera de construir los números negativos en la recta numérica, el número negativo $^{-}(\frac{63}{12})$, correspondiente al menor de los dos números de la aritmética, está a la derecha de $^{-}(\frac{64}{12})$.

(j) $\frac{1}{2}$ está a la derecha de $^{-}(\frac{1}{2})$.

3.



Puesto que al "rodar el círculo" se marca en la recta numérica una longitud igual a la circunferencia del círculo, éste viene a detenerse en un punto de la recta π unidades a la derecha del 0. Si el círculo se rueda hacia la izquierda una revolución, vendrá a detenerse en un punto de la recta numérica cuya coordenada es $^-\pi$.

4. (a) $^-2$ es un entero, un número racional, un número real.

   (b) $^-(\frac{10}{3})$ es un número racional y un número real.

   (c) $^-\sqrt{2}$ es un número real.

5.
$$A = \{0, 1, 2, 3, . . .\}$$
$$B = \{1, 2, 3, 4, . . .\}$$
$$C = \{0, 1, 2, 3, . . .\}$$
$$I = \{. . . , ^-3, ^-2, ^-1, 0, 1, 2, 3, . . .\}$$
$$N = \{1, 2, 3, . . .\}$$

A, el conjunto de los números cardinales, y C, el conjunto de los enteros no negativos, son lo mismo, puesto que ambos consisten en los enteros positivos y el 0. B, el conjunto de los enteros positivos, y N, el conjunto de los números naturales, son lo mismo, puesto que ambos consisten en los números naturales 1, 2, 3, ...

5-2. Orden en la recta de los números reales

Suponemos que el estudiante esperará que la relación "es menor que" para los números reales tenga el mismo significado que tuvo para lo que ahora llamamos los números reales no negativos.

Es posible que algunos estudiantes se pregunten si hay alguna otra definición para "es menor que" que pudiera haberse escogido. Si plantean la cuestión, el siguiente análisis de una interpretación, razonable a primera vista, puede ser útil. Aunque "es menor que" se definió para los números de la aritmética como "está a la izquierda de" en la recta numérica, también podría claramente interpretarse como "está más cerca del 0 que". Es entonces plausible que "$<$" para los números reales bien pudiera tener este último significado. Por otra parte, el ejemplo del termómetro no concuerda con esta interpretación, ni concordarían otras cosas familiares, como la variación en altura de las mareas o las elevaciones sobre y bajo el nivel del mar.

Hay también una buena razón matemática para rechazar esta interpretación. El matemático nunca está realmente interesado en una relación como tal, sino más bien en las propiedades que tiene. No importa el significado que se dé a "es menor que", sólo deseamos poder decir, por ejemplo, que exactamente uno de los enunciados "$3 < {}^-3$" y "${}^-3 < 3$" es cierto. La interpretación plausible no permite esta comparación, puesto que ninguno de los números $^-3$ y 3 está más cerca del 0 que el otro.

<u>Página 102</u>. Esperamos que el estudiante diga que:

> $<$ significa "está a la izquierda de",
>
> $\leq$ significa "está a la izquierda de o es el mismo número que",
>
> $\geq$ significa "está a la derecha de o es el mismo número que",
>
> $\nless$ significa "no está a la izquierda de",
>
> $\ngtr$ significa "no está a la derecha de",

en la recta de los números reales. Debe tener definitivamente una noción del significado de "$<$", puesto que gran parte del análisis posterior del concepto de la ordenación está basada en "es menor que".

Al comparar números racionales negativos, los estudiantes deben darse cuenta de que la propiedad multiplicativa del 1 puede aplicarse a convertirlos en números racionales representados por fracciones con el mismo denominador. Así, para comparar $^{-}(\frac{7}{13})$ y $^{-}(\frac{9}{17})$, tenemos

$$^{-}(\frac{7}{13}) = {}^{-}(\frac{7}{13} \times \frac{17}{17}) = {}^{-}\left(\frac{119}{13 \times 17}\right),$$

$$^{-}(\frac{9}{17}) = {}^{-}(\frac{9}{17} \times \frac{13}{13}) = {}^{-}\left(\frac{117}{17 \times 13}\right).$$

Puesto que $13 \times 17 = 17 \times 13$, por la propiedad conmutativa de la multiplicación, es fácil comparar los números

$$^{-}\left(\frac{119}{13 \times 17}\right) \quad \text{y} \quad {}^{-}\left(\frac{117}{17 \times 13}\right)$$

<u>Respuestas al Conjunto de problemas 5-2a</u>; páginas 102-104:

1. (a) $3 \leq {}^{-}1$ es falso, puesto que 3 está a la derecha de $^{-}1$ en la recta numérica, y es, por tanto, mayor que $^{-}1$. Obsérvese una vez más la comparación fácil de un número positivo y un número negativo.

   (b) $2 < {}^{-}(\frac{7}{2})$ es falso, puesto que 2 está a la derecha de $^{-}(\frac{7}{2})$, y es, por tanto, mayor que $^{-}(\frac{7}{2})$.

   (c) $^{-}4 \nless 3.5$ es falso.

   (d) $^{-}(\frac{12}{5}) < {}^{-}2.2$ es cierto. Transformando la fracción decimal en una fracción ordinaria, el enunciado puede escribirse en la forma $^{-}(\frac{12}{5}) < {}^{-}(\frac{22}{10})$. Ahora, $^{-}(\frac{12}{5}) = {}^{-}(\frac{24}{10})$ y, así, está a la izquierda de $^{-}(\frac{22}{10})$ en la recta numérica. Por tanto, $^{-}(\frac{12}{5})$ está a la izquierda de $^{-}2.2$.

(e) $^-(\frac{3}{5}) \geq {}^-(\frac{3+0}{5})$ es cierto, puesto que $^-(\frac{3}{5})$ y $^-(\frac{3+0}{5})$ son nombres para el mismo número, y corresponden al mismo punto en la recta numérica. ¡Pero cualquier número real es mayor que o igual a sí mismo!

La veracidad de los enunciados (f) - (j) puede determinarse del mismo modo que (a) y (b) anteriores; en consecuencia, simplemente escribimos los resultados.

(f) $^-4 \neq 3.5$ es cierto.

(g) $^-6 > {}^-3$ es falso.

(h) $3.5 < {}^-4$ es falso.

(i) $^-3 < {}^-2.8$ es cierto.

(j) $^-\pi \nless {}^-2.8$ es falso.

2. El objetivo de este ejercicio es dirigir al estudiante a comparar dos números. Cuando el estudiante complete el ejercicio, verá que hay solamente un enunciado cierto en cada uno de los grupos de tres enunciados.

(a) $^-3.14 < {}^-3$ es cierto.

$^-3.14 = {}^-3$ es falso.

$^-3.14 > {}^-3$ es falso.

$^-3.14$ está a la izquierda de $^-3$ en la recta numérica, y es, por lo tanto, menor que $^-3$.

(b) $2 < {}^-2$ es falso.

$2 = {}^-2$ es falso.

$2 > {}^-2$ es cierto.

(c) Simplificando los nombres de los números $\frac{5+3}{2}$ y 2×2, tenemos el par 4 y 4.

$4 < 4$ es falso, ó $\frac{5 + 3}{2} < 2 \times 2$ es falso.

$4 = 4$ es cierto, ó $\frac{5 + 3}{2} = 2 \times 2$ es cierto.

$4 > 4$ es falso, ó $\frac{5 + 3}{2} > 2 \times 2$ es falso.

(d) Si escribimos $^{-}0.001$ y $^{-}(\frac{1}{1000})$ como fracciones ordinarias, tenemos el mismo número dos veces en el par, en vez de dos números distintos. De este modo,

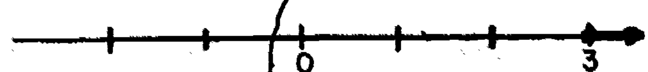
$^{-}(\frac{1}{1000}) < {}^{-}(\frac{1}{1000})$ es falso.

$^{-}(\frac{1}{1000}) = {}^{-}(\frac{1}{1000})$ es cierto.

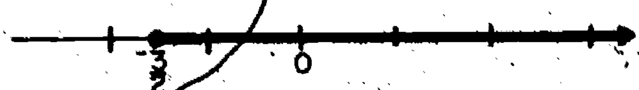
$^{-}(\frac{1}{1000}) > {}^{-}(\frac{1}{1000})$ es falso.

3. (a) $y < 2$

(b) $u \nless 3$



(c) $v \geq {}^{-}(\frac{3}{2})$

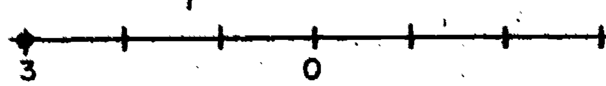


(d) $r \neq {}^{-}2$

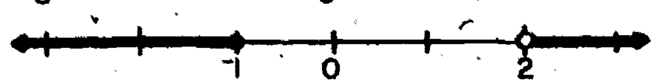
(e) $x = 3$ ó $x < {}^{-}1$

(f) $c < 2$ y $c > {}^{-}2$

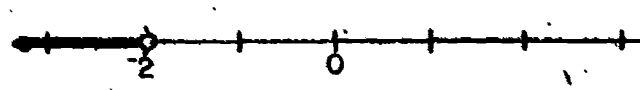
(g) $a \leq {}^{-}3$ y $a \geq {}^{-}3$



(h) $d \leq {}^{-}1$ ó $d > 2$



(i) $a < 6$ y $a < {}^{-}2$



(j) $u > 2$ y $u < {}^-3$. El conjunto de validez en este caso es el conjunto vacío, $\emptyset$, y, por lo tanto, no tiene gráfica. El estudiante deberá observar que no hay número alguno menor que $^-3$ y mayor que 2. El ejercicio puede servir para recordarle que debe observar cuidadosamente si la conjunción en el enunciado es "y" u "o" e interpretar el enunciado de acuerdo con ésto.

4. (a) Un enunciado cuyo conjunto de validez es el conjunto de todos los números reales que no son iguales a 3 es: $y \neq 3$. Otro es: $y > 3$ ó $y < 3$. Obsérvese que aunque los enunciados anteriores son equivalentes matemáticamente, sus traducciones lingüísticas difieren, y es el enunciado anterior el que describe directamente el conjunto requerido.

(b) Un enunciado cuyo conjunto de validez es el conjunto de todos los números reales menores que o iguales a $^-2$ es $v \leq {}^-2$. Otro es: $v \ngtr {}^-2$.

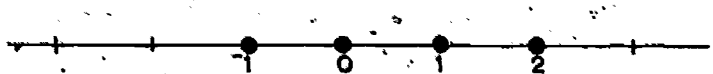
(c) Un enunciado cuyo conjunto de validez es el conjunto de todos los números reales no menores que $^-(\frac{5}{2})$ es $x \nless {}^-(\frac{5}{2})$. Otro es: $x \geq {}^-(\frac{5}{2})$. Obsérvese aquí que la forma alternativa es más fácil de entender. Esto puede sugerir al estudiante una descripción lingüística más clara para el conjunto requerido.

5. Si p es un número real positivo cualquiera, y n es un número real negativo cualquiera, entonces n está a la izquierda del 0, y p está a la derecha del 0; así, n está a la izquierda de p. (Recuérdese que este principio se usó para facilitar la comparación de números en muchos

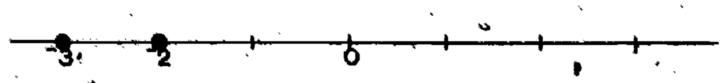
de los ejercicios anteriores.) Se deduce que "$n < p$" y "$n \neq p$" son enunciados ciertos, y que "$p < n$" es falso. El enunciado "$n \leq p$" es cierto, puesto que significa $n < p$ o $n = p$, y, aunque el segundo enunciado es falso, el primero es cierto.

6. Si p es un número cualquiera del conjunto de los enteros, el conjunto de validez de

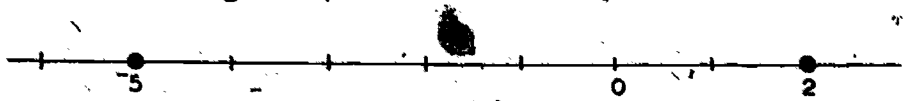
(a) $^-2 < p$ y $p < 3$ es $\{^-1, 0, 1, 2\}$. Expresado con palabras, este es el conjunto de todos los enteros mayores que $^-2$ y también menores que 3. En la recta numérica, el conjunto se representaría mediante la siguiente gráfica:



(b) $p \leq {}^-2$ y $^-4 < p$ es $\{^-2, {}^-3\}$. Este es el conjunto de todos los enteros menores que $^-4$ y mayores que o iguales a $^-2$. Su gráfica es:



(c) $p = 2$ ó $p = {}^-5$ es $\{^-5, 2\}$. Expresado con palabras, tenemos la siguiente descripción directa de este conjunto: el conjunto de los enteros iguales a 2 ó a $^-5$. Su gráfica es:



7. (a) Una elevación de temperatura de diez grados a partir de $^-5$ significa que la temperatura ha subido de $^-5$ a 0, un aumento de cinco grados, y entonces ha subido cinco grados más, haciendo que la lectura final de la temperatura sea 5 grados sobre 0.

(b) Al haber un aumento en temperatura de cinco grados desde la lectura inicial de $^-10$ grados, el marcador se mueve cinco grados hacia el cero, haciendo la lectura final $^-5$ grados.

(c) Un aumento en temperatura de $^-15°$ a $35°$ sobre cero lleva consigo un cambio de $^-15$ a 0, esto es, un aumento de quince grados, y luego otro cambio de 0 a 35 sobre cero, un aumento de treinta y cinco grados. El aumento total es, entonces, de cincuenta grados.

8. Usese $=$, $<$, o $>$ para relacionar cada uno de los pares, de manera que resulte un enunciado cierto.

(a) $\frac{3}{5} > {}^-\left(\frac{6}{10}\right)$

Obsérvese que en éste y en la mayoría de los siguientes ejercicios, la propiedad multiplicativa del 1 puede emplearse para facilitar la comparación.

(b) $\frac{3}{5} > \frac{3}{6}$

(c) $\frac{9}{12} > \frac{8}{12}$

(d) $^-\left(\frac{173}{29}\right) > {}^-\left(\frac{183}{29}\right)$

(e) $^-\left(\frac{3}{5}\right) < \frac{3}{6}$

(f) $^-\left(\frac{3}{5}\right) < {}^-\left(\frac{3}{6}\right)$

<u>Página 105</u>. Al enunciar la <u>propiedad de comparación</u>, y más adelante la <u>propiedad transitiva</u>, seguimos el convenio establecido en el Capítulo 2 de que cuando escribimos un enunciado acerca de números, afirmamos tácitamente la validez de aquel enunciado.

La propiedad de comparación dada aquí se llama también la <u>propiedad de tricotomía</u> de la ordenación. Obsérvese que ésta es una propiedad de $<$; esto es, dados dos números diferentes cualesquiera, se pueden ordenar de manera que uno sea menor que el otro. Cuando la propiedad es enunciada, debemos incluir la tercera posibilidad de que los numerales sean nombres del mismo número. De aquí el origen del término "tricotomía".

Aunque "$a < b$" y "$b > a$" comprenden ordenaciones diferentes, estos enunciados dicen exactamente la misma cosa acerca de los números a y b. De este modo, podemos enunciar una propiedad de tricotomía de la ordenación que contiene a "$>$", así:

> Para un número cualquiera a, y un número cualquiera b, solamente uno de los siguientes es cierto:
>
> $a > b, \quad a = b, \quad b > a.$

Si, en vez de concentrar en la relación de ordenación, lo hacemos en los dos números, entonces "$a < b$" o "$a > b$" es cierto, pero no ambos son ciertos. Aquí fijamos los números a y b, y luego decidimos sobre la relación de ordenación aplicable. Se trata de decidir en qué estamos interesados: los números o la ordenación. La propiedad de comparación concierne a una <u>ordenación</u>.

<u>Respuestas al Conjunto de problemas 5-2b</u>; páginas 105-106:

1. (a) $^-2 < {}^-1.6$

   (b) $^-2 < 0$

   Aquí los estudiantes deberán recordar que si un número es negativo será situado a la izquierda del 0 en la recta numérica real; si es positivo, a la derecha del 0. En consecuencia, un número negativo es siempre menor que un número positivo o cero. Utilizando esto resulta más fácil resolver el problema 1(c) y otros de este mismo conjunto de problemas.

(c) $^{-}(\frac{2 \times 3 \times 4}{5}) < (\frac{2 \times 3 \times 4}{5})$

(d) $^{-}16 = {}^{-}(\frac{32}{2})$

(e) $12 = (5 + 2)(\frac{1}{7} \times \frac{36}{3})$

Obsérvese el uso de la propiedad asociativa al simplificar el segundo número:

$(5 + 2)(\frac{1}{7} \times \frac{36}{3}) =$

$7(\frac{1}{7} \times 12) =$

$7(\frac{1}{7})(12) =$

12

(f) $^{-}2 < 2$

2. Utilícese solamente "<" para hacer enunciados ciertos.

(a) $^{-}3 < 2$.

(b) $\frac{^{-}5}{2} < \frac{4}{2}$.

(c) $\frac{^{-}6}{5} < \frac{^{-}4}{5}$.

(d) $\frac{4}{5} < \frac{11}{10}$.

(e) $\frac{^{-}4}{50} < \frac{11}{100}$.

(f) $\frac{205}{26} < \frac{103}{13}$. Nótese que $\frac{103}{13} = \frac{206}{26}$.

(g) $\frac{2}{3} < \frac{13}{15}$. $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ y $\frac{10}{15} < \frac{13}{15}$.

(h) $^{-}(\frac{25}{238}) < \frac{12}{119}$

(i) $^{-}1.5 < {}^{-}\sqrt{2}$. Recuérdese que $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$.

*(j) $1.5 + 3 < \sqrt{2} + \pi$.

Aquí el estudiante puede escribir $1.5 + 3 = 1.4 + 3.1$ y emplear las desigualdades $1.4 < \sqrt{2}$ y $3.1 < \pi$ para demostrar que $1.4 + 3.1 < \sqrt{2} + \pi$. Finalmente, por la propiedad transitiva, $1.5 + 3 < \sqrt{2} + \pi$. Aquí se ha anticipado la propiedad "si a, b, c y d son números reales para los cuales $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$", que se estudia en el Capítulo 8.

3. Si a es un número real y b es un número real, entonces exactamente uno de los siguientes es cierto:

$$a = b, \quad a > b, \quad b > a.$$

Redactando de otro modo el ejercicio 1 y utilizando los pares de números dados:

(a) En 1(a) o bien $^-2 > {}^-1.6$ ó $^-1.6 > {}^-2$. Puesto que $^-1.6$ está a la derecha de $^-2$, $^-1.6 > {}^-2$ es el enunciado cierto.

(b) $0 > {}^-2$

(c) $(\frac{2 \times 3 \times 5}{5}) > {}^-(\frac{2 \times 3 \times 4}{5})$

(d) $^-16 = {}^-(\frac{32}{2})$

(e) $12 = (5 + 2)(\frac{1}{7} \times \frac{36}{3})$

(f) $2 > {}^-2$

4. La mejor enunciación sería: "Si a es un número real y b es un número real, entonces exactamente uno de los siguientes es cierto: $a \geq b$ o $a < b$.

Algunos pueden decir: "Para dos números reales cualesquiera a y b, $a \geq b$ o $a \leq b$. Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$". El último enunciado es razonable y pueril en apariencia. ¡Sorprendentemente resulta ser uno de los criterios más útiles para determinar si dos variables tienen el mismo valor! En muchas ocasiones en el análisis matemático, por ejemplo, se puede demostrar con un argumento que $a \leq b$ y con otro que $b \leq a$. Así se puede deducir entonces que $a = b$. Dados dos <u>numerales</u>, es cosa trivial verificar si representan o no el mismo número. En el caso de dos números, desde luego, tenemos la información <u>completa</u>. Es solamente cuando nuestra información acerca de dos "numerales" es <u>incompleta</u> que un enunciado como, "Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$", puede posiblemente ser de utilidad como un instrumento.

Página 106. Cualquier intento para dar ejemplos de la aplicación de la propiedad transitiva de $<$ con ternas de enteros, puede ser recibido con un "¡Y qué!" por parte de los estudiantes. Por otra parte, no sólo se pueden dar ejemplos de esta propiedad utilizando fracciones, como en el texto, sino que el estudiante puede también apreciar su utilidad y quizás se incline a decir "¡Y qué!" en una voz más imperceptible.

El estudiante verá en el curso de su entrenamiento matemático muchas otras relaciones que tienen la propiedad transitiva: "es igual a" para números, "es un factor de" para enteros positivos, "es congruente a" para varias figuras geométricas, etc.

¿Cuál es una manera fácil de decir $\frac{337}{113} < 3$? Por la propiedad multiplicativa del 1, $3 = 3 \times \frac{113}{113} = \frac{339}{113}$, así que $\frac{337}{113} < 3$. De igual manera, $3 = 3 \times \frac{55}{55} = \frac{165}{55}$, así que $3 < \frac{167}{55}$.

Respuestas al Conjunto de problemas 5-2c, páginas 106-107:

1. (a) $^{-}(\frac{1}{5}) < \frac{3}{2}$, $\frac{3}{2} < 12$, $^{-}(\frac{1}{5}) < 12$

   (b) $^{-}\pi < {}^{-}\sqrt{2}$, $^{-}\sqrt{2} < \pi$, $^{-}\pi < \pi$

   (c) $^{-}1.7 < 0$, $0 < 1.7$, $^{-}1.7 < 1.7$

   (d) $^{-}(\frac{27}{15}) < {}^{-}(\frac{3}{15})$, $^{-}(\frac{3}{15}) < {}^{-}(\frac{2}{15})$, $^{-}(\frac{27}{15}) < {}^{-}(\frac{2}{15})$

   (e) $$\frac{12(\frac{1}{2} + \frac{1}{3})}{3} = \frac{12\cdot\frac{1}{2} + 12\cdot\frac{1}{3}}{3} = \frac{6 + 4}{3} = \frac{10}{3}$$

   Entonces la ordenación es

   $$^{-}(\tfrac{5}{3}) < \frac{6}{3},\quad \frac{6}{3} < \frac{12(\frac{1}{2} + \frac{1}{3})}{3},\quad {}^{-}(\tfrac{5}{3}) < \frac{12(\frac{1}{2} + \frac{1}{3})}{3}$$

(f) $\frac{3 \times (27 + 6)}{9} = \frac{3 \times 33}{9}$

$= 11$ ó $\frac{22}{2}$

$\frac{(2 \times 3) + (7 \times 9)}{6} = \frac{6 + 63}{6}$

$= \frac{69}{6}$

$= \frac{23}{2}$

$\frac{(99 \times 3)\frac{1}{3}}{2} = \frac{99 \times (3 \times \frac{1}{3})}{2}$

$= \frac{99}{2}$

Puesto que $\frac{22}{2} < \frac{23}{2}$, $\frac{23}{2} < \frac{99}{2}$, y $\frac{22}{2} < \frac{99}{2}$, encontramos que

$\frac{3 \times 27 + 6}{9} < \frac{(2 \times 3) + (7 \times 9)}{6}$

$\frac{(2 \times 3) + (7 \times 9)}{6} < \frac{(99 \times 3)\frac{1}{3}}{2}$

$\frac{3 \times (27 + 6)}{9} < \frac{(99 \times 3)\frac{1}{3}}{2}$

(g) $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, y $(3 + 4)^2 = 49$. Por tanto, $3^2 < 4^2$, $4^2 < (3 + 4)^2$, $3^2 < (3 + 4)^2$.

(h) $^-(\frac{1}{2}) = {}^-(\frac{6}{12})$, $^-(\frac{1}{3}) = {}^-(\frac{4}{12})$, $^-(\frac{1}{4}) = {}^-(\frac{3}{12})$. Así

$^-(\frac{6}{12}) < {}^-(\frac{4}{12})$, $^-(\frac{4}{12}) < {}^-(\frac{3}{12})$, $^-(\frac{6}{12}) < {}^-(\frac{3}{12})$, y

$^-(\frac{1}{2}) < {}^-(\frac{1}{3})$, $^-(\frac{1}{3}) < {}^-(\frac{1}{4})$, $^-(\frac{1}{2}) < {}^-(\frac{1}{4})$.

(i) $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ó $\frac{6}{4}$.

$1 + (\frac{1}{2})^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.

$(1 + \frac{1}{2})^2 = (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$, ó

$\frac{5}{4} < \frac{6}{4}$, $\frac{6}{4} < \frac{9}{4}$, $\frac{5}{4} < \frac{9}{4}$, ó

$1 + (\frac{1}{2})^2 < 1 + \frac{1}{2}$, $1 + \frac{1}{2} < (1 + \frac{1}{2})^2$, $1 + (\frac{1}{2})^2 < (1 + \frac{1}{2})^2$.

2. De tres números reales a, b, y c, si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.

Ilustraciones del problema 1:

1(a) $^{-}(\frac{1}{5}), \frac{3}{2}, 12$: $12 > \frac{3}{2}, \frac{3}{2} > {^{-}(\frac{1}{5})}, 12 > {^{-}(\frac{1}{5})}$

1(g) $3^2, 4^2, (3 + 4)^2$: $(3 + 4)^2 > 4^2, 4^2 > 3^2, (3 + 4)^2 > 3^2$.

3. Arturo es más pesado que Roberto.

Roberto es más pesado que Carlos.

Conclusión: Arturo es más pesado que Carlos. Sean a, b y c los pesos de Arturo, Roberto y Carlos, respectivamente.

Del primer enunciado, $a > b$.

Del segundo enunciado, $b > c$.

De la propiedad transitiva, según está expresada en el problema 2, $a > c$, esto es, Arturo es más pesado que Carlos.

4. La propiedad transitiva para "=" es: Para todos los números reales a, b y c, si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.

Si Arturo pesa lo mismo que Roberto y Roberto y Carlos tienen el mismo peso, sabemos que Arturo y Carlos tienen que pesar lo mismo. Si $3 + 4 = 7$ y $7 = 5 + 2$, entonces $3 + 4 = 5 + 2$.

5. La propiedad transitiva para $\geq$ sería: Para todos los números reales a, b y c, si $a \geq b$ y $b \geq c$, entonces $a \geq c$. Si $\pi \geq 3.14$ y $3.14 \geq 2$, entonces $\pi \geq 2$.

6. (a) Los números reales no positivos constituyen el conjunto de números menores que o iguales a 0; con otras palabras, el conjunto consistente en el 0 y todos los números negativos.

(b) Los números reales no negativos constituyen el conjunto de números mayores que o iguales a 0; con otras palabras, el conjunto consistente en el cero y todos los números positivos.

7. (a) $^{-}(\frac{15}{8})$ y $^{-}(\frac{25}{12})$. Algunos estudiantes pueden observar que $^{-}(\frac{15}{8}) = {}^{-}(1\frac{7}{8})$ y $^{-}(\frac{25}{12}) = {}^{-}(2\frac{1}{12})$. Refiriéndose a la recta numérica, verán que $^{-}(\frac{25}{12}) < {}^{-}(\frac{15}{8})$.

Algunos pueden razonar de la manera siguiente:

$^{-}(\frac{15}{8}) > {}^{-}(\frac{16}{8})$ ó $^{-}2$.

$^{-}2$ ó $^{-}(\frac{24}{12}) > {}^{-}(\frac{25}{12})$.

Si $^{-}(\frac{15}{8}) > {}^{-}2$ y $^{-}2 > {}^{-}(\frac{25}{12})$, entonces $^{-}(\frac{15}{8}) > {}^{-}(\frac{25}{12})$.

(b) $^{-}(\frac{17}{35})$ y $^{-}(\frac{7}{13})$.

Obsérvese que $^{-}(\frac{17}{35}) > {}^{-}(\frac{1}{2})$ ó $^{-}(\frac{17}{34})$, y $^{-}(\frac{1}{2})$ ó $^{-}(\frac{7}{14}) > {}^{-}(\frac{7}{13})$.

Si $^{-}(\frac{17}{35}) > {}^{-}(\frac{1}{2})$ y $^{-}(\frac{1}{2}) > {}^{-}(\frac{7}{13})$, entonces $^{-}(\frac{17}{35}) > {}^{-}(\frac{7}{13})$.

(c) $^{-}(\frac{145}{28})$ y $^{-}(\frac{104}{21})$.

Usando números mixtos, $^{-}(\frac{145}{28}) = {}^{-}(5\frac{5}{28})$ y $^{-}(\frac{104}{21}) = {}^{-}(4\frac{20}{21})$.

Si $^{-}(5\frac{5}{28}) < {}^{-}5$ y $^{-}5 < {}^{-}(4\frac{20}{21})$, entonces $^{-}(5\frac{5}{28}) < {}^{-}(4\frac{20}{21})$ y $^{-}(\frac{145}{28}) < {}^{-}(\frac{104}{21})$.

Alternativamente, si $^{-}(\frac{145}{28}) < {}^{-}(\frac{140}{28})$ ó $^{-}5$, y $^{-}(\frac{105}{21})$ ó $^{-}5 < {}^{-}(\frac{104}{21})$, entonces $^{-}(\frac{145}{28}) < {}^{-}(\frac{104}{21})$.

(d) $^{-}(\frac{192}{46})$ y $^{-}(\frac{173}{44})$.

Si $^{-}(\frac{192}{46}) < {}^{-}(\frac{184}{46})$ ó $^{-}4$, y $^{-}(\frac{176}{44})$ ó $^{-}4 < {}^{-}(\frac{173}{44})$,

entonces $^{-}(\frac{192}{46}) < {}^{-}(\frac{173}{44})$.

5-3. Opuestos

Los estudiantes han observado desde luego ya, que con la excepción del 0, los números reales ocurren en pares tales que los dos números de cada par equidistan del 0 en la recta numérica real. Cada número de dicho par se llama el <u>opuesto</u> del otro. Para completar el cuadro, 0 se define como el opuesto de sí mismo.

<u>Página 108</u>. Al localizar el opuesto de un número dado en la recta numérica, puede que se desee usar un compás para destacar que el número y su opuesto equidistan del 0.

<u>Página 109</u>. Habiendo observado que cada número negativo es también el opuesto de un número positivo, es evidente que no tenemos necesidad de dos simbolismos para denotar los números negativos. Puesto que la raya escrita un poco más abajo "-", es aplicable a <u>todos</u> los numerales para números reales, mientras que la escrita arriba "$^{-}$" sólo tiene significado cuando se aplica a numerales para números positivos, retenemos naturalmente la raya escrita más abajo. Hay otras razones menos importantes para desechar la raya escrita arriba en favor de la otra: más cuidado hay que tener al denotar fracciones negativas con la raya escrita arriba que con la escrita más abajo; además esta última se usa universalmente, etc. De aquí en adelante, entonces, los números negativos como $^{-}5$, $^{-}(\frac{3}{7})$, $^{-}\sqrt{2}$, y así sucesivamente se escribirán -5, $-\frac{3}{7}$, $-\sqrt{2}$, etc. Así, leemos "-5" como "negativo 5" ó el "opuesto de 5". Obsérvese que no tiene

significado decir "$\frac{1}{2}$ es igual al negativo de negativo $\frac{1}{2}$";
en lugar decimos "$\frac{1}{2}$ es igual al opuesto de negativo $\frac{1}{2}$",
ó "$\frac{1}{2}$ es igual al opuesto del opuesto de $\frac{1}{2}$".

El estudiante debe aprender a designar el opuesto de un número especificado por medio de la definición. No se debe decir ni permitir que el estudiante diga: "Para hallar el opuesto de un número, cambie su signo". Esto es muy impreciso (en efecto, nunca hemos añadido un "signo" a los números positivos), y conduce a un álgebra puramente manipuladora que deseamos evitar a toda costa.

El opuesto del opuesto del opuesto de un número es el opuesto de ese número. ¿Cuál es el opuesto del opuesto de un número negativo? ¡El número mismo, por supuesto!

El estudiante sabe bien que la raya escrita un poco abajo "-" se lee "menos" en el caso de la resta. Preferimos reservar la palabra "menos" para la operación de resta y no usarla como una palabra alternativa para "opuesto de". Así, al añadir una raya a una variable, tal como "-x", se leerá "opuesto de".

Si x es un número positivo, entonces -x es un número negativo. El opuesto de cualquier número negativo x es el número positivo -x, y -0 = 0. Así, el estudiante no debe precipitarse a la conclusión de que cuando n es un número real, entonces -n es un número negativo; esto es cierto solamente cuando n es un número positivo.

No nos agrada leer "-x" como "negativo x". Un número negativo es el opuesto de sólo un número positivo. Leer "-x" como "negativo x" implica que x es positivo, y deseamos que los estudiantes consideren a x como un número real cualquiera. Algunos maestros leen "$-x$" como el negativo de x. En este sentido el "negativo de x" es sinónimo de "el opuesto de x". Preferimos lo último.

Respuestas al Conjunto de problemas 5-3a; página 110.

1. (a) El opuesto de 2.3 es -2.3.
   (b) El opuesto de -2.3 es 2.3.
   (c) El opuesto de -(-2.3) es -2.3. Obsérvese aquí que el opuesto del opuesto de un número es el número mismo.
   (d) El opuesto de -(3.6 - 2.4) es 3.6 - 2.4, o más sencillamente, 1.2.
   (e) El opuesto de $-(42 \times 0)$ es (42×0), o más sencillamente, 0.
   (f) El opuesto de $-(42 + 0)$ es $(42 + 0)$, o más sencillamente, 42.
   Los ejercicios (e) y (f) ofrecen una oportunidad para ver si las propiedades aditiva y multiplicativa del 0 están bien afianzadas en la mente de los estudiantes.
2. (a) Si x es positivo, entonces el opuesto de x es negativo.
   (b) Si x es negativo, entonces el opuesto de x es positivo.
   (c) Si x es cero, entonces el opuesto de x es cero.
3. (a) Si el opuesto de x es un número positivo, entonces el número x es negativo.
   (b) Si el opuesto de x es un número negativo, entonces el número x es positivo.
   (c) Si el opuesto de x es 0, entonces el número x es 0, pues 0 es el opuesto de sí mismo.

4. (a) Puesto que todo número real tiene un opuesto, se deduce que todo número real es el opuesto de algún número real.
   (b) Sí. Véase 4(a).
   (c) Todo número negativo es el opuesto de algún número real (positivo); por lo tanto, el conjunto de los números negativos es un subconjunto del conjunto de todos los opuestos.
   (d) Algunos opuestos, a saber, los opuestos de números negativos, no son números negativos. Por lo tanto, el conjunto de los opuestos no es un subconjunto del conjunto de los números negativos.
   (e) No. Véase 4(d).

Página 110. Para justificar el estudio de la "propiedad de los opuestos", sería conveniente considerar aquí varios otros pares de números; por ejemplo, un par de diferentes números positivos, un par de diferentes números negativos, 0 y un número positivo, y 0 y un número negativo.

Respuestas al Conjunto de problemas 5-3b; páginas 110-112:

1. Recuérdese que un número es menor que un segundo número, si está a la izquierda de éste en la recta numérica. Además, un número positivo es mayor que un número negativo.

   (a) $2.97 > -2.97$
   (b) $2 > -12$
   (c) $-358 > -762$
   (d) $1 > -1$
   (e) $-121 > -370$
   (f) $0.24 > 0.12$

(g) $0 = -0$. -0 es el opuesto de 0 y ambos corresponden al mismo punto en la recta numérica.

(h) $-0.01 > -0.1$.

(i) $0.1 > 0.01$.

2. (a) $-\frac{1}{6} < \frac{2}{7}$ y $-\frac{2}{7} < \frac{1}{6}$

(b) $-\pi < \sqrt{2}$ y $-\sqrt{2} < \pi$

(c) $\pi < \frac{22}{7}$ y $-\frac{22}{7} < -\pi$

Tal vez sea necesario decir a los estudiantes que $\pi = 3.1416$ con la aproximación de una diezmilésima y por otra parte pueden determinar $\frac{22}{7} = 3.1428$ con la aproximación de una diezmilésima.

(d) $3(\frac{4}{3} + 2) = 3 \times \frac{4}{3} + 3 \times 2$ por la propiedad distributiva

$= 4 + 6$

$= 10$

$\frac{5}{4}(20 + 8) = (\frac{5}{4})(20) + (\frac{5}{4})8$ por la propiedad distributiva

$= 25 + 10$

$= 35$

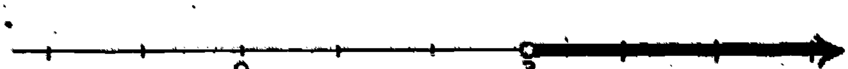
Puesto que $10 < 35$ y $-35 < -10$, tenemos que $3(\frac{4}{3} + 2) < \frac{5}{4}(20 + 8)$ y $-\frac{5}{4}(20 + 8) < -3(\frac{3}{4} + 2)$.

(e) $-(\frac{8 + 6}{7}) = -\frac{14}{7} = -2$.

Entonces, $-(\frac{8+6}{7})$ y -2 son nombres para el mismo número.

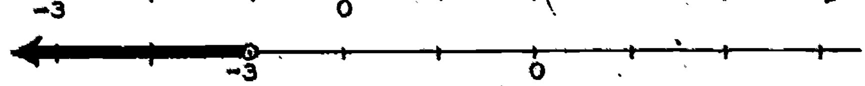
(f) $-((3+17)0) = -0=0$; $-((5+0)3) = -15$. Puesto que $-15<0$, el segundo de los dos números dados es menor que el primero, y por tanto, el opuesto del primero es menor que el opuesto del segundo.

3. (a) $x > 3$



(b) $x > -3$

(c) $-x > 3$



El estudiante puede utilizar un método sencillo de tanteo en el ejercicio anterior, o puede razonar de un modo parecido al siguiente: El enunciado dice "el opuesto de x es mayor que 3". Por lo tanto, "el opuesto de x" representaría números como $\frac{13}{4}$, 4, 6.7, 10, 1000, etc. Si tales números son opuestos de miembros del conjunto que buscamos, el conjunto en sí incluye $-\frac{13}{4}$, -4, -6.7, -10, -1000, etc.

Sería muy satisfactorio si los estudiantes observaran que los enunciados abiertos "$-x > 3$" y "$x < -3$" tienen el mismo conjunto de validez antes de construir las gráficas de dichos enunciados.

(d) $-x > -3$ 

4. (a) El enunciado es el siguiente: "El opuesto de x no es igual a 3". Hay muchos números cuyos opuestos no son iguales a 3; de hecho, solamente hay un número cuyo opuesto sí es igual a 3, y éste es, desde luego, -3. Por lo tanto, el conjunto requerido es el conjunto de todos los números reales excepto -3.

(b) $-x \neq 3$

Por el razonamiento de la parte (a), el conjunto requerido aquí resulta ser el conjunto de todos los números reales excepto 3.

(c) $x < 0$

El conjunto de validez para este enunciado es el conjunto de todos los números reales menores que 0, es decir, el conjunto de los números negativos.

(d) $-x < 0$

Aquí el conjunto requerido es el conjunto de todos los números reales cuyos opuestos son menores que cero. Ahora, si los opuestos de todos los miembros de este conjunto son menores que cero, los miembros del conjunto deben ser mayores que cero; con otras palabras, "$-x < 0$" y "$x > 0$" tienen el mismo conjunto de validez. Así, el conjunto de validez es el conjunto de todos los números reales positivos.

(e) $-x \geq 0$

El enunciado estipula que el opuesto de x es mayor que o igual a cero, esto es, que el opuesto de x debe ser o cero o un número positivo. Por lo tanto, x tiene que ser cero o un número negativo, y el conjunto de validez consiste en tales miembros. Recuérdese que una descripción abreviada de este conjunto es el conjunto de los <u>números no positivos</u>.

(f) $-x \leq 0$

Aquí el razonamiento sería paralelo al (c) anterior: Cada miembro del conjunto de validez es cero o un número positivo. Una descripción abreviada de este conjunto es el conjunto de los <u>números no negativos</u>.

5. Aquí es posible una variedad de respuestas.

(a) A es el conjunto de todos los números reales no negativos.

$x \geq 0$, $-x \leq 0$, $x \not< 0$, $-x \not> 0$.

(b) B es el conjunto de todos los números reales que no son iguales a -2.

$x \neq -2$, $-x \neq 2$.

También, $x > -2$ ó $x < -2$.

(c) C es el conjunto de todos los números reales que no son mayores que -3.

$x \not> -3$, $-x \not< 3$.

También, $x \leq -3$, $-x \geq 3$.

(d) $\emptyset$

$x \geq 0$ y $x < 0$.

También, $-x \leq 0$, $-x > 0$.

(e) E es el conjunto de todos los números reales.

$x \geq 0$ ó $x < 0$.

También, $-x \leq 0$ ó $-x > 0$.

Hasta aquí el estudiante no ha efectuado operaciones de suma y multiplicación con los números reales, de modo que estos enunciados no deben comprender tales operaciones; o por lo menos, deberá advertírsele contra el peligro de efectuar operaciones con las cuales no está familiarizado.

6. (a) $x < 1$.

(b) $-2 < x$ y $x \leq 1$.

Este enunciado abierto puede escribirse mucho más sugestivamente así:

$-2 < x \leq 1$.

Leeríamos esto del modo siguiente: "x es mayor que -2 y menor que o igual a 1". Esta terminología destaca la representación de la recta numérica y sugiere enfáticamente que x es 1 o está entre -2 y 1.

<u>Nunca</u> escribimos, por ejemplo, "$-2 < x \geq 1$" como una forma abreviada de "$-2 < x$ ó $x \geq 1$". El estudiante se ve obligado a leer "$-2 < x \geq 1$" como "x es mayor que -2 y mayor que o igual a 1"; con otras palabras, leería "$-2 < x \geq 1$" como una conjunción, cuando lo que se necesita es una disyunción.

(c) $x \leq -1$ ó $x > 1$.

(d) $x > -2$ y $x < 2$ ó, más brevemente, $-2 < x < 2$.

7. (a) 7.2 es el opuesto de -7.2. El mayor es 7.2.

(b) -3 es el opuesto de 3. El mayor es 3.

(c) -0 es el opuesto de 0. Ambos representan el mismo número.

(d) $\sqrt{2}$ es el opuesto de $-\sqrt{2}$. El mayor es $\sqrt{2}$.

(e) -17 es el opuesto de 17. El mayor es 17.

(f) 0.01 es el opuesto de $-(0.01)$. El mayor es 0.01.

(g) -2 es el opuesto de $-(-2)$. El mayor es $-(-2)$.

(h) $-(1 - \frac{1}{4})^2$ es el opuesto de $(1 - \frac{1}{4})^2$. El mayor es $(1 - \frac{1}{4})^2$.

(i) $-\left(1 - (\frac{1}{4})^2\right)$ es el opuesto de $\left(1 - (\frac{1}{4})^2\right)$. El mayor es $\left(1 - (\frac{1}{4})^2\right)$.

(j) $(\frac{1}{2} - \frac{1}{3})$ es el opuesto de $-(\frac{1}{2} - \frac{1}{3})$. El mayor es $(\frac{1}{2} - \frac{1}{3})$.

Los opuestos de (a), (d), (f), (g) y (j) pueden darse en términos de los opuestos de los opuestos, por ejemplo,

(a) El opuesto de -7.2 es $-(-7.2)$.

(d) El opuesto de $-\sqrt{2}$ es $-(-\sqrt{2})$, etc.

*8. La relación "$\succ$" no tiene la propiedad de comparación. Por ejemplo, 2 y -2 son números reales diferentes, pero ninguno está más lejos del 0 que el otro; con otras palabras, ninguno de los enunciados "$-2 = 2$", "$-2 \succ 2$" y "$2 \succ -2$" es cierto.

La propiedad transitiva para "$\succ$" diría lo siguiente: Si a, b, y c son números reales, y si $a \succ b$ y $b \succ c$, entonces $a \succ c$. Este es, en efecto, un enunciado cierto, como se puede ver sustituyendo la frase "está más distante de 0 que" por el símbolo "$\succ$" dondequiera que ocurra.

Las relaciones "$\succ$" y "$>$" tienen el mismo significado para los números de la aritmética: "está más distante de 0 que" y "está a la derecha de" significan lo mismo en la recta numérica aritmética.

9. (a) $s > -100$; s es el número que representa la puntuación de Juan.

   (b) $n \leq 0$ y $n \geq -200$; n es el número que representa mi situación financiera en dólares.

   (c) $d - 10 > 25$; d es el número de dólares en la deuda original de Pablo. (Algunos estudiantes pueden observar que las variables s, n y d estarían ordinariamente restringidas a ser números racionales representados por fracciones cuyos denominadores son 100.)

10. Siguiendo la sugerencia:

$-\frac{13}{42}$ y $-\frac{15}{49}$ han de ser comparados.

$\frac{13}{42}\left(\frac{7}{7}\right) = \frac{91}{294}$ Propiedad multiplicativa del 1

$\frac{15}{49}\left(\frac{6}{6}\right) = \frac{90}{294}$

$\frac{91}{294} > \frac{90}{294}$ y $-\frac{91}{294} < -\frac{90}{294}$. Así, $-\frac{13}{42} < -\frac{15}{49}$.

Para comparar dos números racionales negativos, utilizamos la propiedad multiplicativa del 1 para comparar sus opuestos y luego utilizamos la propiedad de los opuestos: Para números reales a y b, si $a < b$, entonces $-b < -a$. Podemos describir esto brevemente así: Para comparar dos números racionales negativos (o positivos), los representamos mediante fracciones que tengan un mismo denominador y comparamos los números representados por sus numeradores.

5-4. Valor absoluto

El concepto del valor absoluto de un número es una de las ideas más útiles en la matemática. Encontraremos una aplicación inmediata del valor absoluto cuando definamos la suma y multiplicación de números reales en los Capítulos 6 y 7. En el Capítulo 9 se utiliza este concepto para definir la distancia entre dos puntos; en el Capítulo 11 definimos $\sqrt{x^2}$ como $|x|$; en el Capítulo 13 se presentará un buen ejemplo de una ecuación con soluciones extrañas. En los capítulos desde el 14 al 16 consideraremos enunciados abiertos con dos variables, que contienen valor absoluto, y en el Capítulo 17 este concepto nos dará ejemplos interesantes de funciones. En cursos más avanzados de matemáticas, en particular, en el análisis matemático y en la teoría de la aproximación, la idea del valor absoluto es indispensable.

Página 112. La definición corriente del valor absoluto del número real n consiste en que es el número $|n|$ para el cual

$$|n| = \begin{cases} n, & \text{si } n \geq 0 \\ -n, & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

También de esta manera es como más se usa corrientemente el concepto del valor absoluto. Por otra parte, puesto que los estudiantes parecen tener dificultad con definiciones de este tipo, preferimos definir el valor absoluto de un número de tal manera que pueda representarse claramente en la recta numérica. Debe evitarse a toda costa que el estudiante considere al valor absoluto como el número obtenido al "suprimir el signo". Esta manera de considerar el valor absoluto, aunque parece dar la "respuesta" correcta cuando se aplica a números particulares tales como -3 ó 3, nos conduce

~~a un sin fin de dificultades cuando tratamos con variables.~~
Otros términos menos corrientes para valor absoluto son <u>valor numérico</u>, <u>magnitud</u>, y <u>módulo</u>.

Observando que el "mayor" de un número y su opuesto es justamente la distancia entre el número y el cero en la recta de los números reales, podemos interpretar el valor absoluto "geométricamente".

El símbolo $\sqrt{2}$ <u>siempre</u> denota el número <u>positivo</u> cuyo cuadrado es 2. El número negativo cuyo cuadrado es 2 se escribe $-\sqrt{2}$.

<u>Respuestas al Conjunto de problemas 5-4a</u>; páginas 113-114:

1. (a) 7; el mayor de -7 y 7 es 7.
   (b) 3; el mayor de -(-3) y su opuesto, -3, es -(-3) ó 3.
   (c) 2; 6 - 4 es otro nombre para 2, y 2 es mayor que su opuesto, -2.
   (d) 0; por la propiedad multiplicativa del 0, (14×0) es 0, y el valor absoluto de 0 es 0.
   (e) 14; por la propiedad aditiva del 0, $(14 + 0)$ es 14, y 14 es mayor que su opuesto, -14.
   (f) 3; el opuesto del opuesto del opuesto de 3 es simplemente -3, y el opuesto de -3 es mayor que -3.
2. (a) Si x es un número no negativo, corresponde al punto 0 ó a un punto a la derecha del 0 en la recta de los números reales. Su opuesto, pues, está en 0 ó a la izquierda del 0. Así resulta que el mayor de x y su opuesto $-x$ es, en este caso, x. Por definición, entonces, $|x|$ es x, un número no negativo.
   (b) Si x es un número negativo, corresponde a un punto a la izquierda del 0 en la recta de los números

~~reales. Su opuesto, por lo tanto, está a la~~ derecha del 0. Así, pues, el mayor de x y -x es, en este caso, -x; con otras palabras, si x es un número negativo, $|x|$ es -x, el opuesto de x, y, por consiguiente, un número positivo.

(c) Para cada número real x, $|x|$ es un número no negativo. En las partes (a) y (b) todos los casos, $x < 0$, $x = 0$, $x > 0$, se han considerado, y en todos ellos se encontró que $|x|$ es no negativo.

3. Para el número negativo x, $|x|$ es mayor que x, puesto que, para x negativo, $|x|$ es positivo en virtud de 2(b). Toda vez que un número negativo cualquiera es menor que un número positivo cualquiera, $x < |x|$ para todos los x negativos.

4. El conjunto $\{-1, -2, 1, 2\}$ es cerrado respecto de la operación de tomar el valor absoluto de sus elementos. Tomando el valor absoluto de cada elemento del conjunto,

$$|-1| = 1$$
$$|-2| = 2$$
$$|1| = 1$$
$$|2| = 2,$$

encontramos que el conjunto de los valores absolutos de los números del conjunto original es $\{1, 2\}$. Puesto que $\{1, 2\}$ es un subconjunto de $\{-2, -1, 1, 2\}$, este último conjunto es cerrado respecto de la operación de tomar el valor absoluto de sus elementos.

<u>Página 114</u>. Está bien claro que en cada par formado por un número positivo y su opuesto, el mayor es precisamente el número mismo. Además, $|0|$ se define sin más como igual a 0. Estos dos enunciados pueden expresarse simbólicamente así:

Si $x \geq 0$, entonces $|x| = x$.

Para números negativos, la representación de la recta numérica debe convencer al estudiante de que en cada uno de los pares formados por ejemplo con -5, $-\frac{1}{2}$, -3.1, y -467 y sus opuestos 5, $\frac{1}{2}$, 3.1 y 467, los mayores son respectivamente, 5, $\frac{1}{2}$, 3.1 y 467. Esta misma representación no puede menos de decirles que en cada par formado por cualquier número negativo y su opuesto, el mayor es el opuesto del número (negativo). Simbólicamente, si $x < 0$, entonces $|x| = -x$.

Hemos llegado, por tanto, a la definición corriente del valor absoluto. Para todos los números reales x,

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Respuestas al Conjunto de problemas 5-4b; páginas 114-116:

(a)	$\lvert -7\rvert < 3$ ó $7 < 3$	Falso
(b)	$\lvert -2\rvert \leq \lvert -3\rvert$ ó $2 \leq 3$	Cierto
(c)	$\lvert 4\rvert < \lvert 1\rvert$ ó $4 < 1$	Falso
(d)	$2 \nless \lvert -3\rvert$ ó $2 \nless 3$	Falso
(e)	$\lvert -5\rvert \nless \lvert 2\rvert$ ó $5 \nless 2$	Cierto
(f)	$-3 < 17$	Cierto
(g)	$-2 < \lvert -3\rvert$ ó $-2 < 3$	Cierto
(h)	$\lvert \sqrt{16}\rvert > \lvert -4\rvert$ ó $4 > 4$	Falso
(i)	$\lvert -2\rvert^2 = 4$ ó $2^2 = 4$	Cierto

(b), (e), (f), (g) y (i) son ciertos.

(a) $|2| + |3| = 2 + 3 = 5$

(b) $|-2| + |3| = 2 + 3 = 5$

(c) $-(|2| + |3|) = -(2 + 3) = -5$

(d) $-(|-2| + |3|) = -(2 + 3) = -5$

(e) $|-7| - (7 - 5) = 7 - 2 = 5$

(f) $7 - |-3| = 7 - 3 = 4$

(g) $|-5| \times 2 = 5 \times 2 = 10.$

(h) $-(|-5| - 2) = -(5 - 2) = -3.$

(i) $|-3| - |2| = 3 - 2 = 1.$

(j) $|-2| + |-3| = 2 + 3 = 5.$

(k) $-(|-3| - 2) = -(3 - 2) = -1.$

(l) $-(|-2| + |-3|) = -(2 + 3) = -5.$

(m) $3 - |3 - 2| = 3 - 1 = 2.$

(n) $-(|-7| - 6) = -(7 - 6) = -1.$

(o) $|-5| \times |-2| = 5 \times 2 = 10.$

(p) $-(|-2| \times 5) = -(2 \times 5) = -10.$

(q) $-(|-5| \times |-2|) = -(5 \times 2) = -10.$

3. (a) $|x| = 1$. El conjunto de validez es $\{1, -1\}$.

   (b) $|x| = 3$. El conjunto de validez es $\{3, -3\}$.

   (c) $|x| + 1 = 4$. El conjunto de validez es $\{3, -3\}$, el mismo que el de $|x| = 3$.

   *(d) $5 - |x| = 2$. El conjunto de validez es $\{3, -3\}$.

Algunos estudiantes pueden ver esto a simple vista. Otros pueden pensar en que $|x|$ es la distancia entre el número x y el 0 en la recta numérica; así, en (a), por ejemplo, x debe estar 1 unidad distante del cero. Por lo tanto, $x = 1$ ó $x = -1$. Otros también pueden razonar como sigue, para (d):

Para hallar el conjunto de validez de $5 - |x| = 2$,

si $x \geq 0$, $|x| = x$, de modo que $5 - x = 2$ ó $x = 3$.

si $x < 0$, $|x| = -x$, de modo que $5 - (-x) = 2$ ó $x = -3$.

El conjunto de validez es $\{3, -3\}$.

Hágase que varios estudiantes expliquen su razonamiento, pues ésta es una oportunidad magnífica para comprobar si entienden el concepto de valor absoluto.

Para algunas clases aventajadas, tal vez el maestro desee considerar ecuaciones tales como las siguientes. Aunque el conjunto de validez es evidente, la aplicación del último método anterior es interesante.

$$5 + |x| = 2.$$

Si $x \geq 0$, $|x| = x$, así $5 + x = 2$ ó $x = -3$. $x \geq 0$ y $x = -3$ no proporciona solución alguna. Si $x < 0$, $|x| = -x$, de modo que $5 - x = 2$ ó $x = 3$. $x < 0$ y $x = 3$ no proporciona solución alguna. El conjunto de validez es $\emptyset$.

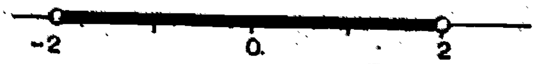
4. Aquí los estudiantes pueden tener dificultad en encontrar un punto de partida. Puede ser de ayuda para ellos el referirse al Conjunto de problemas 5-4a, problemas 2 y 3.
   (a) $|x| \geq 0$ es cierto para todos los números reales x.
      Si $x \geq 0$, $|x| \geq 0$. Véase el Conjunto de problemas 5-4a, problemas 2(b).
      Si $x < 0$, $|x| > 0$. Véase el Conjunto de problemas 5-4a, problema 3(b).
   (b) $x \leq |x|$ es cierto para todos los números reales x.
      Si $x \geq 0$, $x = |x|$. Si $x < 0$, $x < |x|$.
   (c) $-x \leq |x|$ es cierto para todos los números reales x.
      Si $x \geq 0$, $-x \leq |x|$. Si $x < 0$, $-x = |x|$.
   (d) $-|x| \leq x$ es cierto para todos los números reales x.
      Si $x \geq 0$, $-|x| \leq x$. Si $x < 0$, $-|x| = x$.

5. Si m es el número de dólares que yo tengo y j es el número de dólares que Juan tiene, la primera parte del primer enunciado del problema, "Juan tiene menos dinero que yo", puede traducirse en $j < m$, y la segunda parte del enunciado, "Yo tengo menos de \$20", en $m < 20$.

Ahora tenemos a nuestra disposición los dos enunciados $j < m$ y $m < 20$. Usando la propiedad transitiva, tenemos

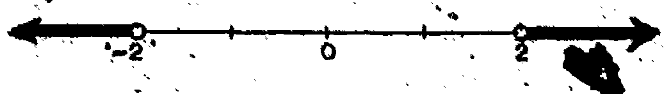
$$j < m < 20,$$
$$j < 20;$$

con otras palabras, Juan tiene menos de $20.

6. (a) $|x| < 2$ 

El estudiante puede construir la gráfica requerida, ensayando diferentes números como valor de x en el enunciado. En lugar de esto, puede razonar de manera análoga a la siguiente: El enunciado establece que "El valor absoluto de x es menor que 2". En la recta numérica, este enunciado se convierte en "x es menor que 2 unidades distantes del 0". Por lo tanto, la gráfica de "$|x| < 2$" es la presentada anteriormente.

(b) $x > -2$ y $x < 2$ 

(c) $|x| > 2$ 

Como en la parte (a), en ésta el estudiante puede encontrar el conjunto requerido bien por tanteo, o recordando la interpretación de valor absoluto como una distancia en la recta numérica, igual que en el caso (a) anterior.

(d) $x < -2$ ó $x > 2$ 

7. Las gráficas de los enunciados en 6(a) y 6(b) son las mismas.

Las gráficas de los enunciados en 6(c) y 6(d) son las mismas.

El estudiante debe empezar a darse cuenta de que los enunciados (a) y (b) dicen lo mismo, al igual que acontece con los enunciados (c) y (d).

8. Si x es negativo, el valor absoluto de x, siendo el mayor del par formado por el número y su opuesto, es el opuesto de x, esto es

$$|x| = -x \text{ ó } -x = |x|.$$

Puesto que $-x$ y $|x|$ son en este caso nombres para el mismo número, sus opuestos también serán nombres para el mismo número, así que $-(-x) = -|x|$. Como el opuesto del opuesto de x es x, podemos decir $-(-x) = x$, y finalmente,

$$x = -|x|.$$

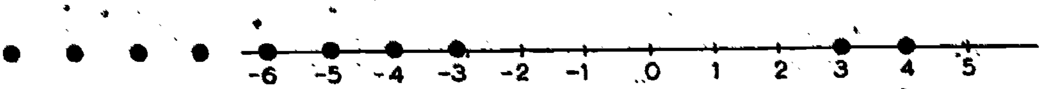
9. El conjunto de enteros menores que 5 es el conjunto

$$\{. . ., -1, 0, 1, 2, 3, 4\}.$$

El conjunto de enteros menores que 5 cuyos valores absolutos son mayores que 2 es

$$\{. . ., -5, -4, -3, 3, 4\}.$$

-5 y -10 son ambos elementos de este conjunto, pero 0 no lo es.



10. Tres números:

(a) En P pero no en I: Todos los números positivos con la excepción de los enteros, $\frac{3}{10}$, $\sqrt{2}$, π, 5.3, etc.

(b) En R pero no en P: Todos los números reales no positivos, -7, $-\pi$, 0, $-\sqrt{2}$, $-\frac{5}{3}$, etc.

(c) En R pero no en P ni en I: Todos los números reales no positivos, con la excepción de los enteros, $-\frac{17}{5}$, -2.74, $-\frac{\pi}{2}$, $-\sqrt{2}$, etc.

(d) En P pero no en R: Todos los números positivos no reales.
Puesto que no hay ninguno, éste es el conjunto vacío, $\emptyset$.

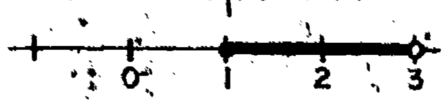
11. El número que representa los grados de temperatura es t. (En este ejercicio intepretamos "no más" para <u>excluir</u> los extremos -5 y 5.) Entonces

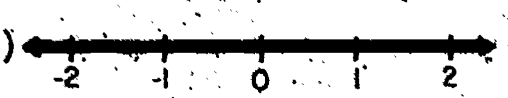
$$|t| < 5$$

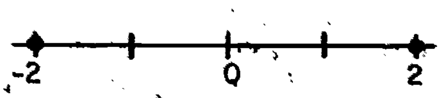
o $t > -5$ <u>y</u> $t < 5$ ó $-5 < t < 5$.

12. $|x| = 0$ tiene el conjunto de validez $\{0\}$.
$|x| = -1$ tiene el conjunto vacío, $\emptyset$, como su conjunto de validez. Los estudiantes deben recordar la diferencia entre $\{0\}$ y $\emptyset$.

<u>Respuestas a los problemas de repaso</u>; páginas 117-119:

1. Los enunciados (b), (d), (e), (f) son ciertos.
2. Los enunciados (a), (d), (f) son falsos.
3. (a) 

(c) 

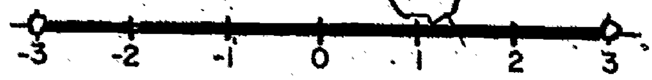
(b) 

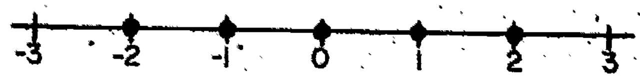
(d) 

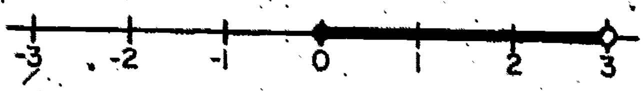
4. (a) $\emptyset$.
(b) El conjunto de todos los números reales.
(c) El conjunto de todos los números reales mayores que -3 y menores que 2.
(d) El conjunto de todos los números no positivos.

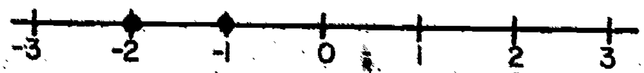
(e) $\emptyset$

(f) El conjunto de todos los números reales.

5. (a) 

(b) 

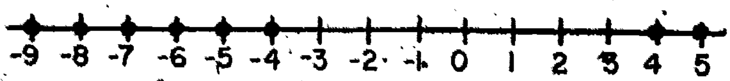
(c) 

(d) 

6. (a) Si t es el número de grados de temperatura media el jueves, entonces $t < (-10) - 4$; ó, si f es el número de grados de temperatura media el viernes, y t es como anteriormente, entonces $t < f - 4$, puesto que $f < -10$, $t < (-10) - 4$.

(b) Si s es el número de grados de temperatura media, y si interpretamos "no más" para excluir los extremos -11 y 1, entonces esto puede escribirse como un enunciado abierto compuesto: $s > -11$ y $s < 1$; ó $-11 < s < 1$; ó $|s + 5| < 6$.

7. (a), (b) y (e) son enunciados ciertos.

8. etc. 

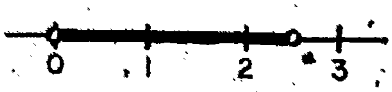
9. Si n es el entero, $n + 1$ es su sucesor, y

$$n + (n + 1) = n + 1$$

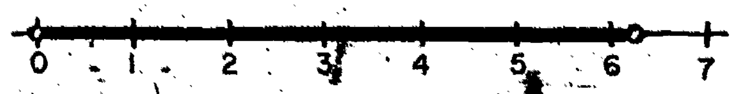
cuyo conjunto de validez es $\{0\}$.

10. (a) Si s es el número de unidades del lado de este cuadrado, s es positivo y $4s$ es el perímetro del cuadrado.

Un enunciado para esto es $s > 0$ y $4s < 10$.



(b) Si A es el número de unidades del área del cuadrado, entonces $A = s^2$, donde $s > 0$ y $4s < 10$, como en la parte (a). Puesto que A es s^2, y s es un número del conjunto de números entre 0 y 2.5, el conjunto de validez de A es el conjunto de números entre 0 y 6.25.



Capítulo 5

Sugerencias para exámenes

1. Determina cuáles de los siguientes enunciados son ciertos:

   (a) $-\frac{2}{3} \neq \frac{2}{3}$

   (b) $|-8| < 8$

   (c) $|2| \geq |-2|$

   (d) $(-1) = -(-(-1))$

   (e) $-(|-5| + |-7|) = 12$

2. Partiendo de R, conjunto de todos los números reales, describe tres conjuntos A, B, C, cada uno de los cuales sea un subconjunto de R; elige C de modo que sea un subconjunto de A, pero no de B.

3. Reordena los números siguientes en orden ascendente:

   $-\frac{1}{8}, -2, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{2}, -\frac{5}{2}$

4. Para cada uno de los siguientes pares, determina cuál número es el menor:

   (a) $2, -|-3|$

   (b) $-4, -7$

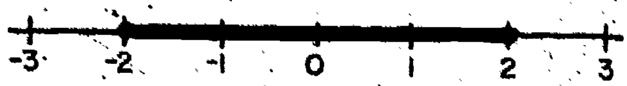
   (c) $|-5|, 2$

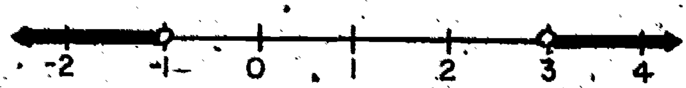
   (d) $-\frac{13}{11}, -\frac{13}{12}$

5. Si $a < b$, escribe un enunciado abierto que exprese la ordenación de $-a$ y $-b$.

6. Si $a < b$, ¿será posible escribir un enunciado abierto que exprese la ordenación de $-a$ y b? Explícalo.

7. Escribe un enunciado abierto cuya gráfica es:

(a) 

(b) 

8. Si b es un número negativo, indica si cada uno de los siguientes es positivo o negativo:

(a) $-b$ (c) $|-b|$ (e) $-(-b)$

(b) $|b|$ (d) $-|-b|$ (f) $-\left|-|-b|\right|$

9. Si $-17 = -\frac{612}{36}$ y $-17 = -\frac{323}{19}$, explica cómo se puede utilizar esta información para decidir cuál es el mayor de $-\frac{611}{36}$ y $-\frac{324}{19}$.

10. Dibuja la gráfica del conjunto de validez de cada uno de los siguientes enunciados abiertos:

(a) $|x| = 3$ (d) $|x| < 0$

(b) $|x| - 1 = 5$ (e) $x < 4$

(c) $|x| = 0$ (f) $-|x| < 0$

11. Describe el conjunto de validez de cada uno de los siguientes enunciados abiertos:

(a) $|x| > x$ (c) $|x| = x$

(b) $|x| < x$ (d) $|x| = -x$

12. Describe la variable y traduce cada uno de los enunciados lingüísticos en un enunciado abierto:

 (a) Pedro vive más cerca de la escuela que Rafael y está a más de $3\frac{1}{2}$ millas de la escuela. ¿A qué distancia está la escuela de la casa de Rafael?

 (b) La nota de Enrique es i y la nota de José es j, y la de Enrique es por lo menos 10 puntos más alta que la de José.

13. (a) Si $x > r$ y $x < n$, ¿cuál es la relación entre r y n? ¿Puede usarse aquí la propiedad transitiva?

14. ¿Es el valor absoluto de x siempre x? ¿Por qué o por qué no?

Capítulo 6

PROPIEDADES DE LA SUMA

Uno de los objetivos principales de este curso es estudiar la estructura del sistema de los números reales. Empezamos nuestro estudio del conjunto de todos los números reales en el Capítulo 5. Sin embargo, un sistema de números consiste en un conjunto de números y las operaciones con estos números. Por lo tanto, no tenemos realmente el sistema de los números reales hasta que definimos las operaciones de suma y multiplicación para números negativos.

El objeto de éste y los dos próximos capítulos es corregir esta deficiencia. Nuestro punto de vista es que las operaciones definidas para los números reales no negativos deben ser extendidas a todos los números reales. De manera que, las definiciones de suma y multiplicación para todos los números reales tendrán que ser formuladas exclusivamente en términos de los números no negativos y las operaciones con ellos (incluyendo la de tomar el opuesto). Desde luego, insistimos en conservar las propiedades fundamentales de las operaciones.

El presente capítulo se ocupa de la suma. Primero consideramos algunos ejemplos acerca de ganancias y pérdidas para sugerir la manera de definir la suma cuando intervienen números negativos. La recta numérica se usa también para ilustrar esto, y finalmente se formula una definición precisa, primero en nuestro idioma y luego en el lenguaje del álgebra.

El Capítulo 7 se ocupa de la multiplicación. Es más difícil ahora encontrar "situaciones de la vida real" que sugieran lo que debe ser la multiplicación cuando intervienen números negativos. No obstante, una vez lograda la suma, la misma propiedad distributiva sugiere la manera de definir la multiplicación.

La ordenación en los números reales se introdujo en el Capítulo 5. En el Capítulo 8, volvemos a la ordenación y obtenemos sus propiedades con respecto a la suma y a la multiplicación. En este capítulo hay un cambio importante en nuestro punto de vista acerca de la ordenación. Anteriormente nos hemos inclinado a usar la ordenación como una manera conveniente de estudiar ciertas propiedades de los números reales. En este sentido, "$<$" o "$>$" fueron apenas otra cosa que partes de nuestro lenguaje. En el Capítulo 8, tratamos "$<$" como una relación de ordenación. Un cambio análogo en el punto de vista tuvo que hacerse antes en el caso de la suma, por ejemplo. En aritmética, el signo "+" en la expresión "25 + 38" no es más que un recordatorio o una directiva para llevar a cabo un proceso aprendido anteriormente para obtener "63". La idea de "+" como una operación a estudiar por sí misma es en verdad una noción diferente de la suma de la aritmética. Así, en el Capítulo 8, la relación de ordenación llega a ser un objeto matemático por sí mismo.

Al final del Capítulo 8, hay un extenso resumen en el cual reunimos las diversas propiedades del sistema de los números reales obtenidas hasta ahora. Aquí se hace un intento para empezar a considerar el sistema de los números reales desde el punto de vista deductivo. Con otras palabras, dicho sistema es considerado como un conjunto indefinido de elementos dotado de una operación de sumar, una operación de multiplicar y una relación de ordenación sujetas a ciertas propiedades presupuestas de las cuales pueden deducirse mediante demostraciones todas las demás propiedades.

El estudiante deberá aprender muy rápidamente en el presente capítulo a encontrar sumas que contienen números negativos. Esto es fácil y lo sugieren completamente los mismos ejemplos de ganancias y pérdidas. Sin embargo, nuestro objetivo inmediato es más ambicioso que solamente enseñar la aritmética de números negativos. Deseamos presentar el hecho importante de que realmente se trata de una extensión de la operación de sumar para los números de la aritmética (donde la operación es familiar) a todos los números reales, de tal manera que se conserven las propiedades fundamentales de la suma. Esto significa que debemos dar una definición de la suma en términos de solamente números no negativos y las operaciones habituales con ellos. El resultado en el lenguaje del álgebra es una fórmula para $a + b$ que comprende las operaciones familiares de la suma, la resta y la toma de opuestos, aplicadas a los números no negativos $|a|$ y $|b|$. La fórmula completa parece impresionante por la variedad de casos. Sin embargo, la idea es sencilla y no es nada más que un enunciado general precisamente de lo que siempre hacemos al obtener la suma de números negativos.

El problema principal es llegar hasta la definición general de $a + b$ en una forma plausible. Hemos escogido el hacer uso constante de la recta numérica y especialmente de la interpretación del valor absoluto como una distancia a partir del cero. Por tanto, en la sección ~~6-1~~, la nueva $a + b$, según resultaba sugerida por las nociones de ganancias y pérdidas, primeramente se representa en la recta numérica. Se obtiene moviéndose una distancia $|b|$ hacia la derecha de a, si b es positivo, y hacia la izquierda de a, si b es negativo. En la sección 6-2, primeramente se considera el caso de la suma de dos números negativos con algún detalle. Luego los otros casos se consideran más brevemente hasta llegar a enunciar la definición general, primero en el lenguaje corriente y finalmente en el lenguaje del álgebra.

Los comentarios al principio del Capítulo 5 acerca de antiguos estudiantes del S.M.S.G. se aplican también a este capítulo. Además, observemos que el material de octavo grado del S.M.S.G. les ha incluido la propiedad aditiva de la igualdad y la propiedad multiplicativa de la igualdad. Estos estudiantes deberán considerar fáciles estas ideas cuando las encuentren en este capítulo, pero no se debe permitir que como una consecuencia de esto, hagan demasiado mecánicamente su trabajo con ecuaciones.

Una referencia sobre la extensión de las operaciones para los números de la aritmética a los números reales la tenemos en Haag, Studies in Mathematics, Vol. III, Structure of Elementary Algebra, Capítulo 3, sección 4.

6-1. Suma de números reales

El punto de vista basado en las nociones de ganancias y pérdidas al sumar números positivos y negativos parece natural. Lo único que puede parecer nuevo al estudiante es el formulario mediante números positivos y negativos.

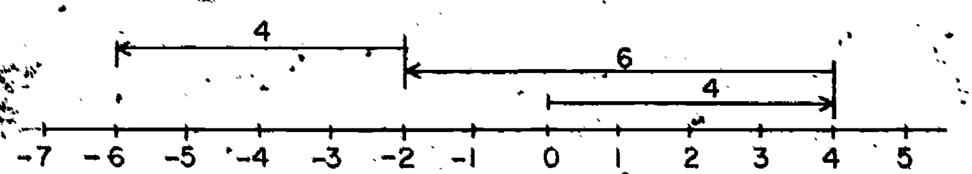
Página 122. Si sumamos 0, no resulta movimiento alguno.

Respuestas al Conjunto de problemas 6-1; página 123:

Si los estudiantes han aprendido a fondo la aritmética de números negativos; es decir, si no tienen dificultad en hallar sumas tales como (-7) + 5, entonces se podría omitir el problema 1.

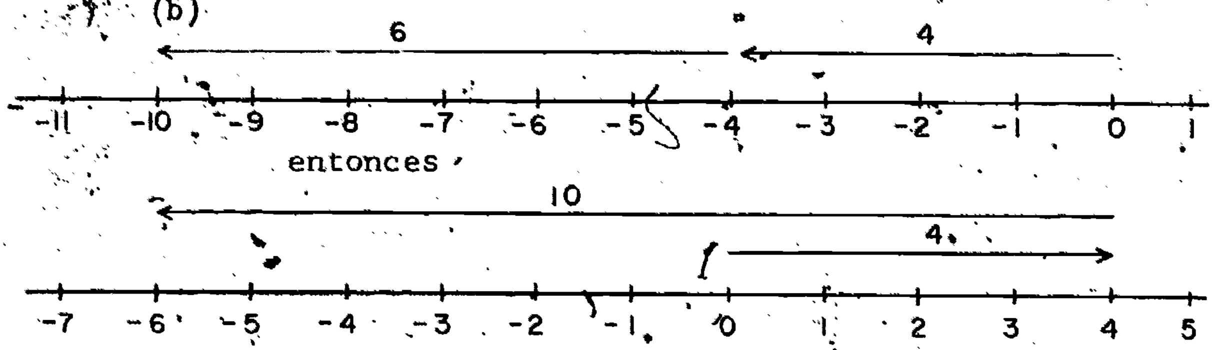
1. (a) (-6) + 8 = 2. Se ganaron 2 yardas.
   (b) (-60) + 50 = -10. Juan tuvo una pérdida neta de 10¢.
   (c) (-15) + 10 = - 5. Cinco grados bajo 0.
   (-15) + 30 = 15. Quince grados sobre 0.
   (d) (-6) + (-3) + 4 + 5 = 0. La ganancia neta fue de 0 libras.

2. (a)



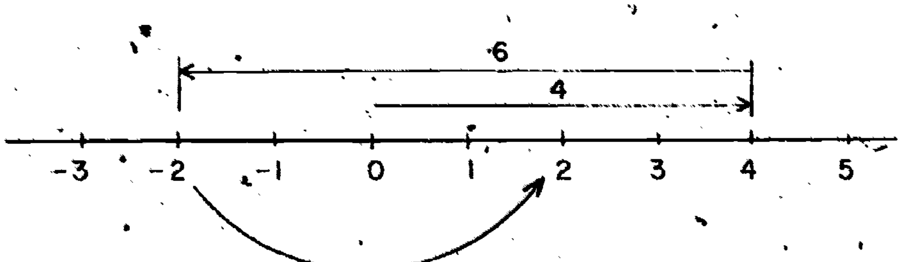
La suma es -6.

(b)



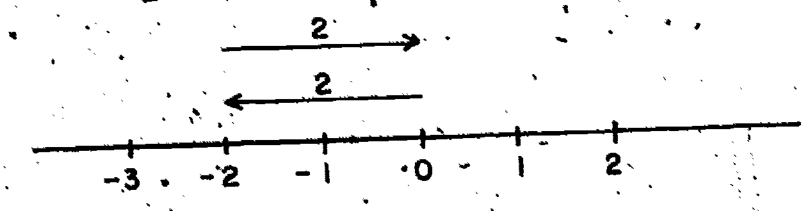
La suma es -6.

(c)

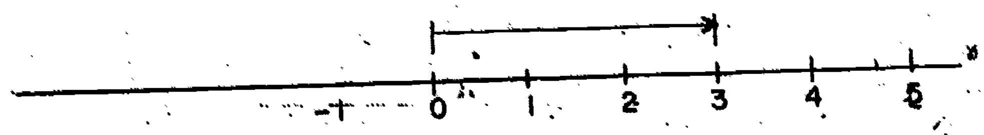


La suma es 2.

(d)

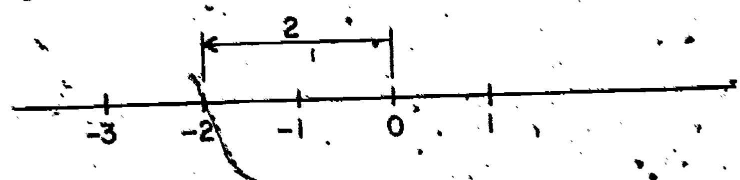


entónces

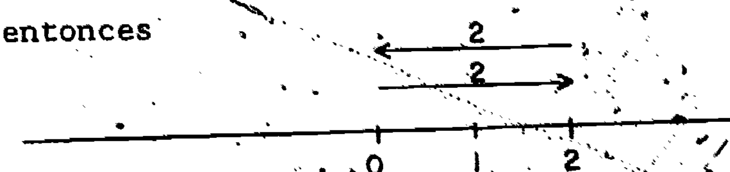


La suma es 3.

(e)

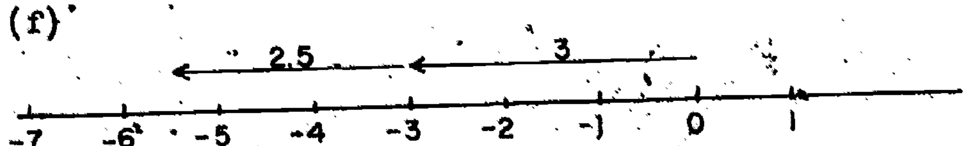


entónces



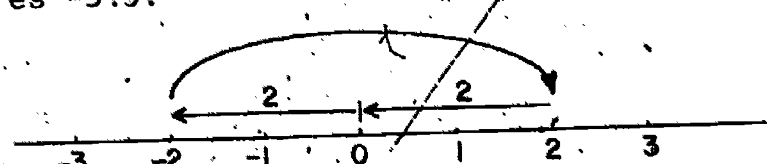
La suma es 0.

(f)



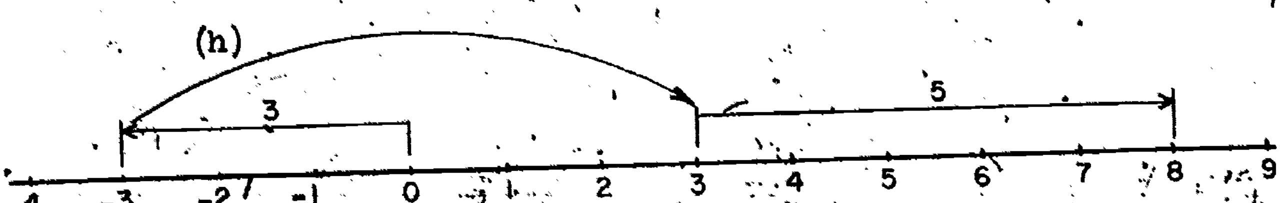
La suma es -5.5.

(g)

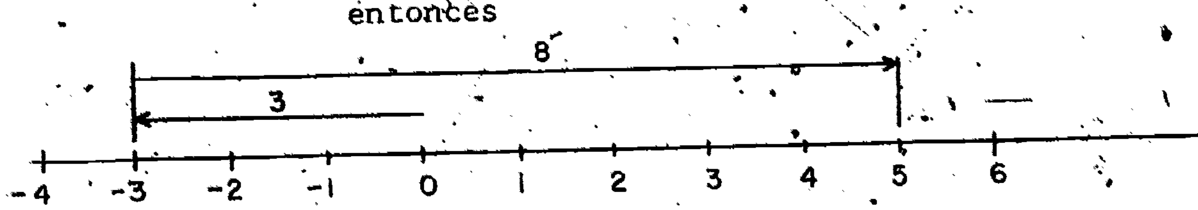


La suma es 0.

(h)



entonces



La suma es 5.

3. (a) Muévase desde el 0 hasta el 7 en la recta numérica, luego muévase 10 unidades hacia la derecha.
   (b) Muévase desde el 0 hasta el 7 en la recta numérica, luego muévase 10 unidades hacia la izquierda.
   (c) Muévase desde el 0 hasta el 10 en la recta numérica, luego muévase 7 unidades hacia la izquierda.
   (d) Muévase desde el 0 hasta el -10 en la recta numérica, luego muévase 7 unidades hacia la izquierda.
   (e) Muévase desde el 0 hasta el 10 en la recta numérica, luego muévase 7 unidades hacia la derecha.
   (f) Muévase desde el 0 hasta el -7 en la recta numérica, luego muévase 10 unidades hacia la izquierda.
   (g) Muévase desde el 0 hasta el -7 en la recta numérica, luego muévase 10 unidades hacia la derecha.
   (h) Muévase desde el 0 hasta el -10 en la recta numérica, luego muévase 7 unidades hacia la derecha.
   (i) Muévase desde el 0 hasta el -10 en la recta numérica, luego muévase 0 unidades.
   (j) Muévase desde el 0 hasta el 0 en la recta numérica, luego muévase 7 unidades hacia la derecha.
4. En (a), (e), y (j).
5. Cuando ambos números son negativos, la suma es negativa, y es el opuesto de la suma obtenida cuando ambos números son positivos.

Respuestas al Conjunto de problemas 6-2a; páginas 125-126:

1. (a) $(-2) + (-7) = -(|-2| + |-7|)$
$= -(2 + 7)$
$= -9$

Una pérdida de \$2 seguida de una pérdida de \$7 es una pérdida neta de \$9.

(b) $(-4.6) + (-1.6) = -(|-4.6| + |-1.6|)$
$= -(4.6 + 1.6)$
$= -6.2$

Muévase desde el 0 hasta el -4.6 en la recta numérica, luego muévase 1.6 unidades hacia la izquierda. Se llegará a -6.2.

(c) $(-3\frac{1}{3}) + (-2\frac{2}{3}) = -(|-3\frac{1}{3}| + |-2\frac{2}{3}|)$
$= -(3\frac{1}{3} + 2\frac{2}{3})$
$= -6$

Muévase desde el 0 hasta el $-3\frac{1}{3}$ en la recta numérica, luego muévase $2\frac{2}{3}$ unidades hacia la izquierda. Se llegará a -6.

(d) $(-25) + (-73) = -(|-25| + |-73|)$
$= -(25 + 73)$
$= -98$

Una pérdida de \$25 seguida de una pérdida de \$73 es una pérdida neta de \$98.

(e) $5\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = 8$

Aquí tenemos un problema en el que interviene sólo la suma de números positivos, así es que no puede utilizarse la definición de la suma de números negativos.

2.
(a) $(-6) + (-7) = -13$ (f) $|6| - |-4| = 6 - 4$
$= 2$
(b) $(-7) + (-6) = -13$
(c) $-(|-7| + |-6|) = -(7 + 6)$
$= -13$
(g) $0 + (-3) = -3$
(h) $-(|-3| - |0|) = -(3 - 0)$
$= -3$
(d) $6 + (-4) = 2$
(e) $(-4) + 6 = 2$
(i) $3 + \left((-2) + 2\right) = 3 + 0$
$= 3$

3.(a) $\{-3\}$ (c) $\{-3\}$
(b) $\{-3\}$ (d) $\{-3\}$

Si se utiliza la definición de la suma de dos números negativos, los conjuntos de validez de los enunciados se obtienen fácilmente.

4. La distancia a partir del 0 es (el valor absoluto de) la diferencia entre los valores absolutos de los números.

5. Desde el punto de vista de la recta numérica: Si la distancia que nos movemos hacia la derecha es mayor que la distancia que nos movemos hacia la izquierda, la suma es positiva; si la distancia que nos movemos hacia la izquierda es mayor, la suma es negativa.
En términos de valor absoluto: Si el número negativo tiene el mayor valor absoluto, la suma es negativa; si el número positivo tiene el mayor valor absoluto, la suma es positiva.

*6. El enunciado es cierto para todos los valores no negativos de x, puesto que:

Si x es positivo, $-x$ es negativo, y nuestra definición se aplica.

Si x es 0, tenemos: $(-1) + 0 = -(|-1| + 0)$
$= -1$

Si el dominio de x se extiende al conjunto de todos los números reales, el enunciado no es cierto; porque si x es negativo, $-x$ es positivo, y nuestra definición para la suma de dos números negativos no se aplica.

Respuestas al Conjunto de problemas 6-2b; páginas 127-129:

1. (a) $(-5) + 3 = -(|5| - |3|)$
$= -(5 - 3)$
$= -2$

(b) $(-11) + (-5) = -(|-11| + |-5|)$
$= -(11 + 5)$
$= -16$

(c) $(-\frac{8}{3}) + 0 = -(|-\frac{8}{3}| - |0|)$
$= -(\frac{8}{3} - 0)$
$= -\frac{8}{3}$

(d) $2 + (-2) = |2| - |-2|$
$= 2 - 2$
$= 0$

(e) $18 + (-14) = |18| - |-14|$
$= 18 - 14$
$= 4$

(f) $12 + 7.4 = 19.4$

(g) $(-\frac{2}{3}) + 5 = |5| - |-\frac{2}{3}|$
$= 5 - \frac{2}{3}$
$= \frac{15}{3} - \frac{2}{3}$
$= \frac{13}{3}$

(h) $(-35) + (-65) = -(|-35| + |-65|)$
$= -(35 + 65)$
$= -100$

2. Puesto que la suma de dos números reales es un número real, el conjunto de todos los números reales es cerrado respecto de la suma.
3. Puesto que la suma de dos números reales negativos es un número real negativo, el conjunto de todos los números reales negativos es cerrado respecto de la suma.
4. Las temperaturas medias diarias fueron:

$71 + (-7)$, ó 64	$71 + 9$, ó 80
$71 + 2$, ó 73	$71 + 12$, ó 83
$71 + (-3)$, ó 68	$71 + (-6)$, ó 65
$71 + 0$, ó 71	

La suma de las variaciones es
$(-7) + 2 + (-3) + 0 + 9 + 12 + (-6)$, ó 7.

5. (a) Si x es 5, entonces el enunciado $5 + 2 = 7$ es cierto.
   (b) Si y es -10, entonces el enunciado $3 + (-10) = -7$ es cierto.
   (c) Si a es -5, entonces el enunciado $(-5) + 5 = 0$ es cierto.
   (d) Si b es 10, entonces el enunciado $10 + (-7) = 3$ es cierto.
   (e) Si x es 0, entonces el enunciado $(-\frac{5}{6}) + 0 = -\frac{5}{6}$ es cierto.
   (f) Si c es -4, entonces el enunciado $(-4) + (-3) = -7$ es cierto.
   (g) Si y es $-\frac{9}{6}$, entonces el enunciado $(-\frac{9}{6}) + \frac{2}{3} = -\frac{5}{6}$ es cierto.
   (h) Si x es 20, entonces el enunciado $\frac{1}{2}(20) + (-4) = 6$ es cierto.

(i) Si y es 3, entonces el enunciado $(3 + (-2)) + 2 = 3$ es cierto.

(j) Si x es (-1), entonces el enunciado $(3 + (-1)) + (-3) = -1$ es cierto.

6. (a) Falso
(b) Cierto
(c) Cierto
(d) Cierto
(e) Falso
(f) Falso
(g) Falso
(h) Cierto
(i) Cierto

7. (a) Si x es la distancia desde el punto de partida (con el norte tomado como la dirección positiva), entonces

$$x = 40 + (-55).$$

(b) Si n es el tercer número, entonces

$$(-9) + 28 + n = (-52).$$

(c) Si c es la variación de temperatura entre las 4 P.M. y las 8 P.M., entonces

$$-2 + 15 + 6 + c = -9.$$

(d) Si g es el número de libras aumentadas en la tercera semana, entonces

$$200 + (-4) + (-6) + g = 195.$$

(e) Si s es el número de puntos que varió en las listas de valores de las acciones,

$$83 + (-5) + s = 86.$$

6-3. Propiedades de la suma

Hemos visto en la sección 6-1 que la definición de la suma de números reales satisface a dos de los tres requisitos que exigimos. Incluye como un caso especial la suma familiar de números de la aritmética, y coincide con nuestro sentido intuitivo de esta operación, como se muestra al tratar con ganancias y pérdidas y con la recta numérica. El tercer requisito es que la suma de números reales tenga las mismas propiedades fundamentales que vimos tiene la suma de números de la aritmética. Sería embarazoso, por ejemplo, que la suma de números de la aritmética sea conmutativa y la suma de números reales no lo sea.

Nótese que, aunque no las llamábamos así al hablar a los estudiantes, las propiedades conmutativa y asociativa fueron, para todos los propósitos, consideradas como axiomas para el sistema de los números de la aritmética, y la operación de suma fue considerada esencialmente como una operación indefinida. Para los números reales, no obstante, hemos dado una definición de la suma en términos de conceptos anteriores. Si nuestra definición ha sido adecuadamente escogida, debemos encontrar que las propiedades se pueden demostrar como teoremas. Aunque muchos de los estudiantes no comprenderán esto del todo, deberá tenerse en cuenta como referencia.

Hemos tratado de dar a los estudiantes un sentido intuitivo de la demostrabilidad de estas propiedades, pero muy pocos de ellos estarán en condiciones de seguir los detalles. Sin embargo, para el estudiante que sea hábil y esté interesado, hemos dejado abierto el camino para que se convenza por sí mismo completamente de que las propiedades se conservan en todos los casos, no solamente en algunos casos particulares que él podría tratar.

Página 129. Quizás se desee recordar a los estudiantes algo acerca de la propiedad de clausura: Para dos números reales cualesquiera a y b, $a + b$ es un número real único. Esta propiedad se incluye en el resumen al final del Capítulo 8.

Se han ilustrado tres casos de suma de números reales. Además del caso familiar de la suma de dos números positivos, quedan dos casos por ilustrar. Son:

(1) Si $a \geq 0$ y $b < 0$,
$a + b = -(|b| - |a|)$, si $|b| > |a|$
por ejemplo, $5 + (-8) = (-8) + 5$

(2) Si $b \geq 0$ y $a < 0$,
$a + b = -(|a| - |b|)$, si $|a| > |b|$
por ejemplo, $(-8) + 5 = 5 + (-8)$

<u>Páginas</u> <u>129-130</u>. Probablemente no es buena idea tratar de demostrar la conmutatividad en clase, y ciertamente no debería intentarse demostrar la asociatividad. Hay que considerar muchos casos y es difícil hacerlo sistemáticamente.. No obstante, a algunos buenos estudiantes les gusta este tipo de cuestiones y puede que disfruten tal experiencia. El estudiante dispuesto que desee redactar una demostración general de la propiedad conmutativa de la suma de números reales para todos los casos, podría hacerlo del modo siguiente:

Se trata de demostrar que $a + b = b + a$ para todos los números reales a y b.

Si $a \geq 0$ y $b \geq 0$, $a + b = b + a$, porque son números de la aritmética.

Si $a < 0$ y $b < 0$, $a + b = -(|a| + |b|)$,
$b + a = -(|b| + |a|)$.

Pero $|a|$ y $|b|$ son números de la aritmética,
así que $|a| + |b| = |b| + |a|$.
Por lo tanto, $a + b = b + a$.

Si $a \geq 0$ y $b < 0$, $\left.\begin{array}{l} a + b = (|a| - |b|) \\ b + a = (|a| - |b|) \end{array}\right\}$ si $|a| \geq |b|$

$\left.\begin{array}{l} a + b = -(|b| - |a|) \\ b + a = -(|b| - |a|) \end{array}\right\}$ si $|b| \geq |a|$

En cualquiera de los dos casos, $a + b = b + a$, puesto que los opuestos de números iguales son iguales.

Si $a < 0$ y $b \geq 0$,

$$\left.\begin{array}{l} a + b = -(|a| - |b|) \\ b + a = -(|a| - |b|) \end{array}\right\} \text{ si } |a| \geq |b|$$

$$\left.\begin{array}{l} a + b = (|b| - |a|) \\ b + a = (|b| - |a|) \end{array}\right\} \text{ si } |b| \geq |a|$$

En cualquiera de los dos casos, $a + b = b + a$.

Un examen cuidadoso comprobará que hemos considerado todos los casos posibles, y siempre hemos encontrado que

$$a + b = b + a.$$

Por lo tanto, esto es cierto para todos los números reales a y b.

Página 130 (línea 11). Cada par de numerales es el nombre del mismo número.

En el caso de la propiedad asociativa de la suma, es improbable que aún un buen estudiante deba tratar de demostrar todos los casos. La demostración es una tarea tediosa a causa del número de casos a considerar. Para calcular $(a + b) + c$, por ejemplo, hay que examinar dieciocho casos:

(1) $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$.
(2) $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$
(3) $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c < 0$, $a + b \geq |c|$
(4) $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c < 0$, $a + b < |c|$
(5) $a < 0$, $b < 0$, $c \geq 0$, $|a + b| \geq c$
(6) $a < 0$, $b < 0$, $c \geq 0$, $|a + b| < c$
(7) $a \geq 0$, $b < 0$, $c \geq 0$, $a \geq |b|$
(8) $a \geq 0$, $b < 0$, $c \geq 0$, $a < |b|$, $|a + b| \geq c$
(9) $a \geq 0$, $b < 0$, $c \geq 0$, $a < |b|$, $|a + b| < c$
(10) $a < 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, $|a| \geq b$, $|a + b| \geq c$
(11) $a < 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, $|a| \geq b$, $|a + b| < c$
(12) $a < 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, $|a| < b$,
(13) $a \geq 0$, $b < 0$, $c < 0$, $a \geq |b|$, $a + b \geq |c|$
(14) $a \geq 0$, $b < 0$, $c < 0$, $a \geq |b|$, $a + b < |c|$
(15) $a \geq 0$, $b < 0$, $c < 0$, $a < |b|$.

(16) $a < 0$, $b \geq 0$, $c < 0$, $|a| \geq b$.
(17) $a < 0$, $b \geq 0$, $c < 0$, $|a| < b$, $a + b \geq |c|$
(18) $a < 0$, $b \geq 0$, $c < 0$, $|a| < b$, $a + b < c$.

Además del (1) y el (2) anteriores, hay dieciséis casos más para $a + (b + c)$.

Si el estudiante es persistente, indúzcasele a hacer una lista de los casos para $(a + b) + c$, como la que acabamos de presentar. Tal examen de las posibilidades sería tan valioso como una demostración; si pudiera exponer todos los casos anteriores, podría ciertamente entender la suma de los números reales.

<u>Página 131</u>. La propiedad aditiva de los opuestos dice que la suma de a y $(-a)$ es cero. <u>No dice</u> que si la suma de a y otro número es cero, el otro número es $(-a)$. Esto se demuestra más tarde.

<u>Respuestas al Conjunto de problemas</u> 6-3; páginas 131-132:

1. (a) El numeral de la izquierda es

$$3 + \left((-3) + 4\right) = \left(3 + (-3)\right) + 4$$ Propiedad asociativa de la suma

$$= 0 + 4$$ Propiedad aditiva de los opuestos

El numeral de la derecha es

$$0 + 4.$$

(b) El numeral de la derecha es

$$\left((-3) + 5\right) + 7 = \left(5 + (-3)\right) + 7$$ Propiedad conmutativa de la suma

El numeral de la izquierda es

$$\left(5 + (-3)\right) + 7.$$

(c) El numeral de la izquierda es

$\left(7 + (-7)\right) + 6 = 0 + 6$ Propiedad aditiva de los opuestos

$= 6$ Propiedad aditiva del 0

El numeral de la derecha es 6.

(d) El numeral de la izquierda es

$|-1| + |-3| + (-3) = 1 + 3 + (-3)$ Definición de valor absoluto

$= 1 + \left(3 + (-3)\right)$ Propiedad asociativa de la suma

$= 1 + 0$ Propiedad aditiva de los opuestos

$= 1$ Propiedad aditiva del 0

El numeral de la derecha es 1.

(e) El numeral de la derecha es

$\left((-2) + 3\right) + (-4) = (-2) + \left(3 + (-4)\right)$ Propiedad asociativa de la suma

El numeral de la izquierda es

$(-2) + \left(3 + (-4)\right).$

(f) El numeral de la izquierda es

$(-|-5|) + 6 = (-5) + 6$ Definición de valor absoluto

$= 6 + (-5)$ Propiedad conmutativa de la suma

El numeral de la derecha es

$6 + (-5).$

2. (a) $\frac{5}{16} + 28 + (-\frac{5}{16}) = \left(\frac{5}{16} + (-\frac{5}{16})\right) + 28$
$= 28$

(b) $.27 + (-18) + 3 + .73 = (.27 + .73) + \left((-18) + 3\right)$
$= 1 + (-15)$
$= -14$

(c) $(-5) + 32 + 3 + (-8) = (-5) + \left(3 + (-8)\right) + 32$
$= (-5) + (-5) + 32$
$= (-10) + 32$
$= 22$

(d) $(-\frac{1}{2}) + 7 + (-2) + (-\frac{3}{2}) + 2$
$= \left((-\frac{1}{2}) + (-\frac{3}{2})\right) + \left((-2) + 2\right) + 7$
$= (-2) + 0 + 7$
$= 5$

(e) $\frac{5}{3} + (-3) + 6 + \frac{1}{3} + (-2)$
$= \left((\frac{5}{3} + \frac{1}{3}) + (-2)\right) + \left((-3) + 6\right)$
$= \left(2 + (-2)\right) + 3$
$= 0 + 3$
$= 3$

(f) $253 + (-67) + (-82) + (-133)$
$= 253 + \left((-67) + (-133)\right) + (-82)$
$= 253 + \left((-200) + (-82)\right)$
$= 253 + (-282)$
$= -29$

(g) $|-\frac{3}{2}| + \frac{5}{2} + (-7) + |-4| = \left((\frac{3}{2} + \frac{5}{2}) + 4\right) + (-7)$
$= 8 - 7$
$= 1$

(h) $(x + 2) + (-x) + (-3) = \left(x + (-x)\right) + \left(2 + (-3)\right)$
$= 0 + (-1)$
$= -1$

(i) $w + (w + 2) + (-w) + 1 + (-3)$
$= w + \left(w + (-w)\right) + \left((2 + 1) + (-3)\right)$
$= w + 0 + 0$
$= w$

3. (a)
$$x = x + (-x) + 3$$
$$x = (x + (-x)) + 3$$
$$x = 0 + 3$$
$$x = 3$$

(b)
$$m + 7 + (-m) = m$$
$$m + (-m) + 7 = m$$
$$(m + (-m)) + 7 = m$$
$$0 + 7 = m$$
$$7 = m$$

(c)
$$n + (n + 2) + (-n) + 1 + (-3) = 0$$
$$n + (-n) + (n + 2) + 1 + (-3) = 0$$
$$(n + (-n)) + n + (2 + 1) + (-3) = 0$$
$$0 + n + (3 + (-3)) = 0$$
$$n + 0 = 0$$
$$n = 0$$

(d)
$$(y + 4) + (-4) = 9 + (-4)$$
$$y + (4 + (-4)) = 9 + (-4)$$
$$y + 0 = 9 + (-4)$$
$$y = 9 + (-4)$$
$$y = 5$$

*4. Si $a < 0$ y $b < 0$, entonces

$a + b = -(\|a\| + \|b\|)$	Definición de la suma
$= -(\|b\| + \|a\|)$	Propiedad conmutativa de la suma para números de la aritmética
$= b + a$	Definición de la suma

*5. Si $a \geq 0$, entonces

$a + 0 = a$	Definición de la suma

Si $a < 0$, entonces

$a + 0 = -(\|a\| - \|0\|)$	Definición de la suma.
$= -(\|a\|)$	Resta como en la aritmética
$= -(-a)$	Definición de valor absoluto para un número negativo
$= a$	Para todo a, el opuesto del opuesto de a es a.

*6. Si $a = 0$,

$a + (-a) = 0 + (-0)$	
$= 0 + 0$	El opuesto de 0 es 0.
$= 0$	Propiedad aditiva del 0
Si $a \neq 0$,	
o bien a es positivo o a es negativo.	Propiedad de comparación
Si a es positivo, $-a$ es negativo. Si a es negativo, $-a$ es positivo.	Definición de los opuestos
$\lvert a\rvert = \lvert -a\rvert$	Definición de valor absoluto
Por lo tanto, $a + (-a) = 0$.	Definición de la suma

6-4. La propiedad aditiva de la igualdad

Se puede reconocer la "propiedad aditiva de la igualdad" en el enunciado tradicional, "Si números iguales se suman a números iguales, las sumas son iguales". Aunque tendremos ocasiones frecuentes de utilizar esta idea, preferimos no tratarla como una propiedad de los números reales, porque en realidad es sólo una consecuencia de dos nombres para el mismo número. El nombre "propiedad aditiva de la igualdad" será una manera conveniente de referirse a esta idea cuando necesitemos usarla.

Desde otro punto de vista, la propiedad aditiva de la igualdad se puede considerar como una manera de decir que la operación de la suma es unívoca, esto es, el resultado de sumar dos números dados es un sólo número. Con otras palabras, siempre que sumamos dos números dados, obtenemos el mismo resultado. Por lo tanto, si a, b y c son números reales, siendo $a = b$, entonces puede considerarse que el enunciado "a + c = b + c" nos dice que el resultado de sumar los dos números dados es el mismo cuando tienen los nombres "a" y "c" que cuando tienen los nombres "b" y "c".

Página 133. Aunque indicamos la suma por la derecha, la misma propiedad será válida, desde luego, para la suma indicada por la izquierda:

Si $a = b$, entonces $c + a = c + b$.

Estaremos en libertad de utilizar esta propiedad de la suma por la derecha o por la izquierda.

Página 134. Más tarde, en los Capítulos 7 y 13 nos ocuparemos de las ecuaciones equivalentes y las operaciones admisibles que mantienen equivalentes las ecuaciones. Por el momento, sin embargo, obsérvese que todo lo que reclamamos al aplicar la propiedad aditiva de la igualdad es que si un número hace cierta la ecuación original, hará también cierta la nueva ecuación. Tenemos entonces la oportunidad de comprobar si cada número del conjunto de validez de la nueva ecuación hace cierta la ecuación original. Es necesario hacer esta verificación en todos los casos, hasta que estudiemos el razonamiento más completo presentado en el Capítulo 7. Recomendamos la forma mostrada en el ejemplo 2. Cuando el estudiante esté más familiarizado con la propiedad aditiva de la igualdad, puede ser estimulado a pensar en la suma de $\frac{1}{2}$ a ambos miembros y no escribir ese paso. Se debe insistir, no obstante, en que la frase, "Si la ecuación es cierta para algún número x, entonces," sea escrita en todos los casos, destacando de esa manera el significado real de lo que hacemos. Veremos algunos problemas donde no hay ningún número x que haga cierto el enunciado, y esto justifica la necesidad de tener cuidado.

Respuestas al Conjunto de problemas 6-4; página 135:

El estudiante debe estar en condiciones de dar una razón para cada paso al resolver una ecuación. Quizás se desee que las dé por escrito; si es así, probablemente convendrá sugerir abreviaturas para hacer esto.

1. Si $x + 5 = 13$ es cierto para algún x,

entonces $x + 5 + (-5) = 13 + (-5)$ es cierto para el mismo x,

$x + 0 = 8$ es cierto para el mismo x,

$x = 8$ es cierto para el mismo x.

Si $x = 8$,

el miembro de la izquierda es $8 + 5 = 13$,

y el miembro de la derecha es 13.

Por lo tanto, el conjunto de validez es $\{8\}$;

la única solución es 8.

2. Si $(-6) + 7 = (-8) + x$ es cierto para algún x,

entonces $8 + (-6) + 7 = 8 + (-8) + x$ es cierto para el mismo x,

$9 = 0 + x$ es cierto para el mismo x,

$9 = x$ es cierto para el mismo x.

Si $x = 9$,

el miembro de la izquierda es $(-6) + 7 = 1$,

y el miembro de la derecha es $(-8) + 9 = 1$.

Por lo tanto, el conjunto de validez es $\{9\}$.

3. Si $(-1) + 2 + (-3) = 4 + x + (-5)$ es cierto para algún x,

entonces $(-2) = x + (-1)$ es cierto para el mismo x,

$(-2) + 1 = x + (-1) + 1$ es cierto para el mismo x,

$-1 = x$ es cierto para el mismo x.

Si $x = -1$,
el miembro de la izquierda es $(-1) + 2 + (-3) = (-2)$,
y el miembro de la derecha es $4 + (-1) + (-5) = (-2)$.
La solución es -1.

4. Si $(x + 2) + x = (-3) + x$ es cierto para algún x,
entonces $2x + 2 = (-3) + x$ es cierto para el mismo x,

$2x + 2 + (-x) + (-2)$
$= (-3) + x + (-x) + (-2)$ es cierto para el mismo x,

$x = -5$ es cierto para el mismo x.

Si $x = -5$,
el miembro de la izquierda es
$((-5) + 2) + (-5) = (-3) + (-5) = -8$,
y el miembro de la derecha es $(-3) + (-5) = -8$.
Por lo tanto, el conjunto de validez es $\{-5\}$.

5. Si $(-2) + x + (-3) = x + (-\frac{5}{2})$ es cierto para algún x,

entonces $x + (-5) = x + (-\frac{5}{2})$ es cierto para el mismo x,

$(-x) + x + (-5)$
$= (-x) + x + (-\frac{5}{2})$ es cierto para el mismo x,

$-5 = -\frac{5}{2}$ es cierto para el mismo x.

Pero $-5 = -\frac{5}{2}$ es falso, lo que contradice la suposición de que la ecuación era cierta para algún x.

Por lo tanto, el conjunto de validez es $\emptyset$.

6. Si $|x| + (-3) = |-2| + 5$ es cierto para algún x,
entonces $|x| + (-3) + 3 = 2 + 5 + 3$ es cierto para el mismo x,
$|x| = 10$ es cierto para el mismo x;
$x = 10$ ó $x = -10$ es cierto para el mismo x.

Si x = 10,
el miembro de la izquierda es $|10| + (-3) = 10 + (-3) = 7$,
y el miembro de la derecha es $|-2| + 5 = 2 + 5 = 7$.

Si x = -10,
el miembro de la izquierda es $|-10| + (-3) = 10 + (-3) = 7$,
y el miembro de la derecha es $|-2| + 5 = 2 + 5 = 7$.

Las soluciones son 10, -10.

7. Si $(-\frac{3}{8}) + |x| = (-\frac{3}{4}) + (-1)$ es cierto para algún x,
entonces $\frac{3}{8} + (-\frac{3}{8}) + |x| = \frac{3}{8} + (-\frac{3}{4}) + (-1)$ es cierto para el mismo x,
$|x| = \frac{3}{8} + (-\frac{6}{8}) + (-\frac{8}{8})$ es cierto para el mismo x,
$|x| = -\frac{11}{8}$ es cierto para el mismo x.

Pero $|x|$ es no negativo para todo x, lo que contradice la suposición de que la ecuación era cierta para algún x.

No hay solución.

8. Si $x + (-3) = |-4| + (-3)$ es cierto para algún x,

entonces $x + (-3) + 3 = 4 + (-3) + 3$ es cierto para el mismo x,

$x = 4$ es cierto para el mismo x.

Si $x = 4$,

el miembro de la izquierda es $4 + (-3) = 1$,

y el miembro de la derecha es $|-4| + (-3) = 4 + (-3) = 1$.

Por lo tanto, el conjunto de validez es $\{4\}$.

9. Si $(-\frac{4}{3})+(x+\frac{1}{2}) = x + (x+\frac{1}{2})$ es cierto para algún x,

entonces $x+(-\frac{8}{6}) + \frac{3}{6} = 2x + \frac{3}{6}$ es cierto para el mismo x,

$x+(-x)+(-\frac{3}{6}) + (-\frac{5}{6}) = 2x+(-x)+(-\frac{3}{6}) + \frac{3}{6}$ es cierto para el mismo x.

$$-\frac{8}{6} = x$$

$$-\frac{4}{3} = x$$

Si $x = -\frac{4}{3}$,

el miembro de la izquierda es

$$(-\frac{4}{3}) + (-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}) = (-\frac{8}{6}) + (-\frac{8}{6}) + \frac{3}{6}$$
$$= -\frac{13}{6},$$

y el miembro de la derecha es

$$-\frac{4}{3} + (-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}) = -\frac{8}{6} + (-\frac{8}{6}) + \frac{3}{6}$$
$$= -\frac{13}{6}.$$

La solución es $-\frac{4}{3}$.

Páginas 135-139. Esta es probablemente la primera experiencia del estudiante con algo que se asemeja a una demostración formal. Su principal dificultad aquí es ver la necesidad de tal demostración. Pedimos al estudiante extraer de su experiencia el hecho de que para cada número hay otro número tal que la suma de ambos es cero. Al mismo tiempo, puede muy bien obtener de su experiencia el que hay solamente un tal número. ¿Por qué, entonces, aceptamos la primera idea a base de la experiencia, pero demostramos la segunda? La razón es que podemos demostrar la segunda. Las dos ideas difieren en que una debe ser extraída de la experiencia, mientras la otra no. La existencia del inverso aditivo es en este sentido una idea más fundamental que la idea de que hay solamente un tal número. Expresado más formalmente, la existencia del inverso aditivo es una suposición; la unicidad del inverso aditivo es un teorema. Refiérase a Haag, Studies in Mathematics, Vol. III, Structure of Elementary Algebra, Capítulo 3, sección 2, páginas 3.2-3.7, para lectura complementaria.

Por el momento, hacemos las demostraciones de manera informal y tratamos de conducir al estudiante a este tipo de pensamiento gradual y cuidadosamente. En este curso, el punto de vista acerca de la demostración no consiste en demostrar rigurosamente todo lo que decimos, pues a estas alturas no podemos, sino que tratamos de dar al estudiante una iniciación, dentro de su capacidad, en el tipo de pensamiento que llamamos "demostración". No debemos impresionar al estudiante desfavorablemente dando demasiada importancia a esta cuestión, y no hay que desanimarse si algunos no dan en el clavo inmediatamente. Analícense las demostraciones ante ellos, tan clara y sencillamente como sea posible. Esperamos que al final del año tendrán ya alguna inclinación hacia el razonamiento deductivo, y con ello una mejor idea de la naturaleza de la matemática, y quizás un interés mayor en el álgebra, debido a la importancia de las demostraciones en la estructura. Para lectura fundamental acerca de la demostración, referimos al maestro a Haag, Studies in Mathematics, Vol. III, Structure of Elementary Algebra, Capítulo 2, sección 3.

Página 135. (-3) sumado a 3 da 0.
4 sumado a -4 da 0.

Página 136. Sumamos (-3) a fin de que pueda utilizarse la propiedad aditiva de los opuestos para escribir el miembro de la izquierda del enunciado de una manera más sencilla.

3, 5, -6.3 cada uno tiene un solo inverso aditivo. Puesto que el conjunto de los números reales es infinito, no podemos emplear la verificación individual para confirmar que el inverso aditivo de cada número real es único.

Página 137. Hemos utilizado la propiedad aditiva de la igualdad y la propiedad aditiva del cero. Las otras dos razones son la propiedad aditiva de los opuestos y la propiedad aditiva del cero.

Respuestas al Conjunto de problemas 6-5a; página 138:

1. En cada una de las partes de este problema, el número para el cual el enunciado es cierto se determina casi inmediatamente por la unicidad del inverso aditivo, esto es, si $x + z = 0$, entonces $z = -x$.

(a) -3 (f) $-\frac{2}{3}$

(b) 2 (g) $\frac{7}{3}$

(c) -8 (h) 3

(d) $\frac{1}{2}$ (i) 3

(e) -3

2. Sí, porque por el teorema 6-5a sólo hay un valor posible para la variable, el opuesto del número al cual se suma la variable para obtener 0.

Página 139. Demostración del teorema 6-5b.

$(a + b) + \left((-a) + (-b)\right)$	$= a + b + (-a) + (-b)$	Propiedad asociativa de la suma
	$= \left(a + (-a)\right) + \left(b + (-b)\right)$	Propiedades conmutativa y asociativa de la suma
	$= 0 + 0$	Propiedad aditiva de los opuestos
	$= 0$	Propiedad aditiva del cero
Así, $-(a + b) = (-a) + (-b)$.		$(a + b)$ tiene sólo un inverso aditivo.

Respuestas al Conjunto de problemas 6-5b; páginas 139-140:

1. (a) $-(x + y) = (-x) + (-y)$ Cierto; se demostró en la sección 6-5.

(b) $-x = -(-x)$ Puesto que $-(-x) = x$, esto es falso para todos los números reales x excepto cero.

(c) $-(-x) = x$ Cierto para todos los números reales x.

(d) $-\left(x + (-2)\right) = (-x) + 2$ Cierto; un caso especial de (a), donde $y = -2$, $-y = 2$.

(e) $-\left(a + (-b)\right) = (-a) + b$ Cierto; un caso especial de (a), donde $x = a$, $y = -b$, $(-x) = (-a)$, $(-y) = b$.

(f) Para $a = 2$, $b = 4$, el enunciado se convierte en

$$\left(2 + (-4)\right) + (-2) = 4$$
$$-4 = 4,$$

lo cual es falso. El enunciado no es cierto para todos los números reales.

Aunque esta demostración mediante un ejemplo contradictorio es suficiente, se puede razonar también de la siguiente manera: Mediante aplicación de las propiedades asociativa y conmutativa de la suma, la propiedad aditiva de los opuestos, y la propiedad aditiva del cero, obtenemos $-b = b$; con otras palabras, si "$\left(a + (-b)\right) + (-a) = b$" es cierto para todos los números reales a y b, entonces "$-b = b$" es cierto para todos los números reales a, b. Pero "$-b = b$" es cierto solamente para $b = 0$. Por lo tanto, el enunciado "$\left(a + (-b)\right) + (-a) = b$" no es cierto para todos los números reales a y b.

(g) $\left(-x + (-x)\right) = x + (-x)$. Cierto; un caso especial de (a), donde $x = x$, $y = (-x)$, $(-y) = x$.

2. $(-x) + \left(y + (-z)\right) = (-x) + \left((-z) + y\right)$ Propiedad conmutativa de la suma

$= \left((-x) + (-z)\right) + y$ Propiedad asociativa de la suma

$= \left(-(x + z)\right) + y$ $-(a+b)=(-a)+(-b)$

$= y + \left(-(x + z)\right)$ Propiedad conmutativa de la suma

3. $-\left(3 + 6 + (-4) + 5\right) = (-3) + (-6) + 4 + (-5)$ es cierto.

El opuesto de la suma de cualquier número de números es la suma de sus opuestos.

(a) Cierto

(b) Falso

(c) Cierto

(d) Falso

*4. Para demostrar que $-(a + b + c) = (-a) + (-b) + (-c)$, necesitamos demostrar que

$$(a + b + c) + \left((-a) + (-b) + (-c)\right) = 0,$$

pues un número es el opuesto de otro, si la suma de ellos es cero.

Demostración:

$(a+b+c)+\left((-a)+(-b)+(-c)\right)$	$= \left(a+(-a)\right) + \left(b+(-b)\right) + \left(c+(-c)\right)$	Propiedades asociativa y conmutativa de la suma
	$= 0 + 0 + 0$	Propiedad aditiva de los opuestos
	$= 0$	Propiedad aditiva del cero

Por lo tanto, $-(a+b+c) = (-a)+(-b)+(-c)$.

Esto podría razonarse de manera análoga para cualquier número de números.

*5. Para cualquier número real a, y cualquier número real b, y cualquier número real c,

si $a + c = b + c$,

entonces $(a + c) + (-c) = (b + c) + (-c)$ Propiedad aditiva de la igualdad

$a + \left(c + (-c)\right) = b + \left(c + (-c)\right)$ Propiedad asociativa de la suma.

$a + 0 = b + 0$ Propiedad aditiva de los opuestos

$a = b$ Propiedad aditiva del cero

<u>Respuestas a los Problemas de repaso</u>; páginas 142-144:

1. (a) $3\left(8+(-6)\right) = 3(2)$
$= 6$
(b) $-3+2\times 3 = -3+6$
$= 3$
(c) $2\times 7+(-14) = 14+(-14)$
$= 0$
(d) $(-\frac{2}{5}) + \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$
(e) $|-6|\cdot|3| + (-3) = (18)+(-3)$
$= 15$
(f) $6\,(1+|-4|) = 6(1+4)$
$= 6(5)$
$= 30$

2. (a) Cierto
(b) Cierto
(c) Falso
(d) Cierto
(e) Cierto
(f) Cierto
(g) Cierto

3. (a) El numeral de la izquierda es

$\frac{2}{3} + \left(7 + (-\frac{2}{3})\right) = \frac{2}{3} + \left((-\frac{2}{3}) + 7\right)$ Propiedad conmutativa de la suma

$= \left(\frac{2}{3} + (-\frac{2}{3})\right) + 7$ Propiedad asociativa de la suma

$= 0 + 7$ Propiedad aditiva de los opuestos

$= 7$ Propiedad aditiva del cero

El numeral de la derecha es 7.

Por lo tanto, el enunciado es cierto.

(b) El numeral de la izquierda es

$|-5| + (-.36) + |-.36| = 5+\left((-.36) + |-.36|\right)$ Propiedad asociativa de la suma

$= 5+\left((-.36) + (.36)\right)$ Definición de valor absoluto

$= 5 + 0$ Propiedad aditiva de los opuestos

$= 5$ Propiedad aditiva del cero

El numeral de la derecha es $10+\left(2 +(-7)\right) = 10+(-5)$

$= 5.$

Por lo tanto, el enunciado es cierto.

4. (a) Si $\frac{5}{9} + 32 = x+ \frac{5}{9}$ es cierto para algún x,

entonces $\frac{5}{9} + 32 + (-\frac{5}{9}) = x+ \frac{5}{9}+(-\frac{5}{9})$ es cierto para el mismo x,

$\left(\frac{5}{9} + (-\frac{5}{9})\right) + 32 = x + 0$ es cierto para el mismo x,

$0 + 32 = x$ es cierto para el mismo x,

$32 = x$ es cierto para el mismo x.

Si $x = 32$,

el miembro de la izquierda es $\frac{5}{9} + 32 = 32\frac{5}{9}$,

y el miembro de la derecha es $32 + \frac{5}{9} = 32\frac{5}{9}$.

Por lo tanto, el conjunto de validez es $\{32\}$.

(b) Si $x + 5 + (-x) = 12 + (-x) + (-3)$ es cierto para algún x,

entonces $x + 5 +(-x) + x = 9 + (-x) + x$ es cierto para el mismo x,

$x + 5 = 9$ es cierto para el mismo x,

$x + 5 + (-5) = 9 + (-5)$ es cierto para el mismo x,

$x = 4$ es cierto para el mismo x.

Si $x = 4$,
el miembro de la izquierda es $4 + 5 + (-4) = 5$,
y el miembro de la derecha es $12 + (-4) + (-3) = 5$.
Por lo tanto, el conjunto de validez es $\{4\}$.

(c) Si $3x + \frac{15}{2} + x = 10 + 3x + (-\frac{7}{2})$ es cierto para algún x,

entonces $3x + \frac{15}{2} + x + (-3x) = 10 + 3x + (-\frac{7}{2}) + (-3x)$ es cierto para el mismo x,

$\frac{15}{2} + x = 10 + (-\frac{7}{2})$ es cierto para el mismo x,

$\frac{15}{2} + x + (-\frac{15}{2}) = 10 + (-\frac{7}{2}) + (-\frac{15}{2})$ es cierto para el mismo x,

$x = 10 - 11$ es cierto para el mismo x,

$x = -1$ es cierto para el mismo x.

Si $x = -1$,
el miembro de la izquierda es $3(-1) + \frac{15}{2} + (-1)$

$$= (-3) + \frac{15}{2} + (-1)$$

$$= (-4) + \frac{15}{2}$$

$$= \frac{7}{2},$$

y el miembro de la derecha es

$$10 + 3(-1) + (-\frac{7}{2}) = 10 + (-3) + (-\frac{7}{2})$$

$$= 7 + (-\frac{7}{2})$$

$$= \frac{7}{2}.$$

Por lo tanto, el conjunto de validez es $\{-1\}$.

(d) Si $|x| + 3 = 5 + |x|$ es cierto para algún x,

entonces $|x| + 3 + (-|x|) = 5 + |x| + (-|x|)$ es cierto para el mismo x,

$3 = 5$ es cierto para el mismo x.

Pero $3 = 5$ es falso, lo cual contradice la suposición de que la ecuación era cierta para algún x. Por lo tanto, el conjunto de validez es $\emptyset$.

5. (a) $|3| + |a| > |-3|$ es cierto para el conjunto de todos los números excepto el 0.

   (b) $|3| + |a| = |-3|$ es cierto para $\{0\}$.

   (c) $|3| + |a| < |-3|$ es cierto para $\emptyset$.

6. (a) O ambos son negativos, o uno es negativo y el otro es positivo ó 0, y en este último caso, el número negativo tiene el mayor valor absoluto.

   (b) Uno es el opuesto del otro.

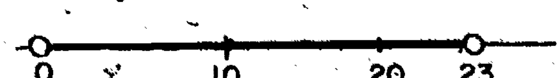
   (c) O ambos son positivos, o uno es positivo y el otro es negativo ó 0, y en este último caso, el número positivo tiene el mayor valor absoluto.

7. Si x es el número de dólares de las ventas de la semana,

   $80 + .03x = 116.$

8. (a) Si x es la longitud del cuarto lado,

   $x > 0$ y $x < 23.$

   (b) 

9. (a) $2ab + ac$
   (b) $2ab + 2ac$
   (c) $3(a+b)$
   (d) $5x(1+2a)$
   (e) $xy(x+1)$
   (f) $2ab(3a+b)$
   (g) $a^2bc + 3ab^2$
   (h) $3a^2 + 6ab + 9ac$

10. (a) Sí, el conjunto es cerrado respecto de la operación de "tomar el opuesto".

   (b) Sí, el conjunto es cerrado respecto de la operación de "tomar el valor absoluto".

   (c) Sí, si un conjunto es cerrado respecto de la operación de "tomar el opuesto", también es cerrado respecto de la operación de "tomar el valor absoluto", puesto que el número o su opuesto es el valor absoluto del número.

11. (a) Sí, el conjunto es cerrado respecto de la operación de "tomar el valor absoluto".
    (b) No, el conjunto no es cerrado respecto de la operación de "tomar el opuesto".
    (c) No, si un conjunto es cerrado respecto de la operación de "tomar el valor absoluto", no es necesariamente cerrado respecto de la operación de "tomar el opuesto", pues aunque el valor absoluto de un número esté en el conjunto, el opuesto del número puede no estarlo.

12. Puesto que en cada hora el automóvil más rápido recorre 10 millas más que el otro, estarán a m millas uno del otro en $\frac{m}{10}$ horas.

Capítulo 6

Sugerencias para exámenes

1. Busca un nombre corriente para cada uno de los siguientes:

(a) $(-7) + (-17)$
(b) $(-13) + 49 + (-24)$
(c) $(-3) + |(-3)| + |(-5)|$
(d) $(-3) + |(-3) + (-5)|$
(e) $(-47) + 18(0)$
(f) $n + (-n)$

2. Nombra un numeral corriente para cada uno de los siguientes números, sin usar papel para hacer los cálculos. En cada caso, indica las propiedades que utilizaste para facilitar tu trabajo.

(a) $(287) + (-287)$
(b) $(-17) + 30 + (-83)$
(c) $19 + 954 + (-19)$

3. Los siguientes enunciados son ciertos para todo a, todo b, y todo c:

A. $a + b = b + a$

B. $a + (-a) = 0$

C. $(a + b) + c = a + (b + c)$

D. Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$.

E. $-(a+b) = (-a) + (-b)$

F. $-(-a) = a$

G. $a + 0 = a$

Determina cuál de los enunciados expresa:

(a) la propiedad conmutativa de la multiplicación

(b) la propiedad aditiva del cero

(c) la propiedad aditiva de la igualdad

(d) el hecho de que el opuesto de la suma de dos números es la suma de los opuestos.

4. Si m y n son números negativos, ¿cuáles de los siguientes son enunciados ciertos?

(a) $m + n = -(|m| + |n|)$

(b) $|m| = |n|$

(c) $m + n < 0$

(d) $|m| + |n| > 0$

(e) $(-m) + (-n) \not< 0$

5. Determina el conjunto de validez de cada uno de los siguientes enunciados abiertos:

(a) $x + 2 = 7$

(b) $0 = 7 + n$

(c) $m + (-6) = 0$

(d) $(-6) + 7 = (-8) + a$

(e) $|x| + (-2) = 1$

(f) $(-3) + w = (-4) + (-3)$

(g) $|x + 3| = 7$

6. Se da el conjunto $K = \{0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -3, 3\}$.
   (a) ¿Es el conjunto K cerrado respecto de la operación de tomar el opuesto de cada elemento?
   (b) Escribe el conjunto S de todas las sumas de pares de elementos del conjunto K.
   (c) ¿Es el conjunto S un subconjunto del conjunto K? ¿Es K cerrado respecto de la suma de pares de elementos?
7. Cuando un número determinado se suma a 99 el resultado es 287.
   (a) Escribe un enunciado abierto para determinar el número.
   (b) Determina el número buscando el conjunto de validez del enunciado.
8. Una madre es 28 años mayor que su hijo. La edad de la madre es igual a la edad del hijo sumada a 10 años más que la edad del hijo.
   (a) Escribe un enunciado abierto para hallar la edad del hijo. (Sugerencia: Busca dos frases para la edad de la madre. ¿Son dichas frases nombres del mismo número?)
   (b) Determina el conjunto de validez de este enunciado.
9. Jaime dijo: "Cuando compre tres docenas más de bolitas, tendré tres más que trece docenas".
   (a) Escribe un enunciado abierto mediante el cual puedas hallar cuántas bolitas tenía Jaime.
   (b) Determina el conjunto de validez de este enunciado.
   (c) Demuestra la manera en que el uso de la propiedad distributiva ayuda a hacer más fácil la determinación de este conjunto de validez. (Sugerencia: Escribe el enunciado abierto dejando los números de docenas como productos indicados.)

Capítulo 7

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACION

Este es el segundo de tres capítulos en los cuales las operaciones con los números de la aritmética se extienden a los números reales y en los que se hace hincapié en las propiedades de estas operaciones. Tal vez se desee repasar otra vez el principio del comentario del Capítulo 6 donde se hace una exposición más detallada de estos tres capítulos.

Lecturas más a fondo sobre la matemática de este capítulo se logran en Studies in Mathematics, Volume III, Capítulo 2, sección 3 y Capítulo 3, sección 4.

7-1. Multiplicación de números reales

Hay varias maneras de lograr que la multiplicación de números reales parezca plausible. Al parecer, lo mejor es dejar que la definición de la multiplicación a elegir sea consecuencia de un deseo de conservar la propiedad distributiva para los números reales.

Página 145. Las propiedades presentadas son las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación, las propiedades multiplicativas del 1 y del 0, y la propiedad distributiva.

Se dan ejemplos de todos los casos posibles de multiplicación de pares de números positivos y negativos y cero.

Página 146. Se debe aclarar bien a los estudiantes que aquí no se hace una demostración. Nada podríamos demostrar acerca de algo que no ha sido definido. Sin embargo, para guiarnos en la elección de la definición, preguntamos: "Si tuviéramos una definición del producto ab para números negativos,

¿cómo se comportarían los números respecto de la propiedad distributiva? Encontramos que se comportarían de un modo tal que

$$0 = 6 + (2)(-3)$$

tendría que ser cierto. Pero si se ha de mantener la unicidad del inverso aditivo, (2)(-3) tendría entonces que ser el opuesto de 6.

Página 146. $|3|\,|2| = 6$ y $|-2|\,|-3| = 6$. Estos representan el mismo número que (3)(2) y (-2)(-3). (-3)(4) es el mismo número que $-(|-3|\,|4|)$; $(-5)(-3) = |-5|\,|-3|$; y (0)(-2) es $|0|\,|-2|$.

Página 147. Al igual que en el caso de la suma, se asume el punto de vista de extender la operación de multiplicación de los números de la aritmética a todos los números reales para conservar así las propiedades fundamentales. Esto nos obliga a definir la multiplicación en la forma ya hecha. Con otras palabras, eso no se hubiera podido hacer en ninguna otra forma sin que algunas de las propiedades dejaran de ser válidas.

La definición general de la multiplicación de números reales se expresa en términos de valores absolutos, porque $|a|$ y $|b|$ son números de la aritmética, y ya sabemos la manera de multiplicar números de la aritmética. La única dificultad en el caso de los números reales es determinar si el producto es positivo o negativo.

Hay diversos artificios disponibles para ayudar al maestro que siente la necesidad de hacer la definición de la multiplicación plausible a sus estudiantes. A continuación se exponen dos formas de un plan de este tipo, plan que lleva al estudiante a los mismos resultados que la definición de la multiplicación, y le pide darse cuenta de un cierto modelo en la sucesión de los productos. Sin embargo, al usar cualquier forma de este plan, el maestro debe tener presente que éste es un enfoque más débil que el del texto, porque mientras la definición del texto se basa en consideraciones referentes a la estructura matemática, los artificios aludidos requieren solamente una extensión implícita de la simetría de una tabla de multiplicar.

(En cualquiera de las formas siguientes el estudiante suplirá los productos que faltan.)

(1)

$(3)(2) = 6$	$(3)(-2) = -6$
$(2)(2) = 4$	$(2)(-2) = -4$
$(1)(2) = 2$	$(1)(-2) = -2$
$(0)(2) = 0$	$(0)(-2) = 0$
$(-1)(2) =$	$(-1)(-2) =$
$(-2)(2) =$	$(-2)(-2) =$

(2)

x	3	2	1	0	-1	-2	-3
3	9	6	3	0			
2	6	4	2	0			
1	3	2	1	0			
0	0	0	0	0			
-1							
-2							
-3							

<u>Respuestas al Conjunto de problemas 7-1</u>; páginas 147-150:

1. (a) $(-7)(-8) = |-7|\ |-8| = 56$

   (b) $(\frac{2}{3})(-12) = -(|\frac{2}{3}|\ |-12|) = -\left((\frac{2}{3})(12)\right) = -8$

(c) $|(-3)(2)|\ (-2) = \left|-(|-3|\ |2|)\right|\ (-2)$
$= |-6|\ (-2)$
$= (6)(-2)$
$= -(|6|\ |-2|)$
$= -12$

(d) $(-18)(\frac{3}{5}) = -(|-18|\ |\frac{3}{5}|)$
$= -\left((18)(\frac{3}{5})\right)$
$= -\frac{54}{5}$

(e) $(-\frac{3}{4})(-\frac{2}{5}) = |-\frac{3}{4}|\ |-\frac{2}{5}| = \frac{3}{10}$

(f) $|-2|\ \left((-3) + |-3|\right) = 2\left((-3) + 3\right)$
$= 2(0) = 0$

2. (a) $(-\frac{1}{2})(-4) = 2$

(b) $\left((-\frac{1}{2})(2)\right)(-5) = (-1)(-5) = 5$

(c) $(-\frac{1}{2})\left((2)(-5)\right) = (-\frac{1}{2})(-10) = 5$

(d) $(-3)(-4) + (-3)(7) = 12 + (-21) = -9$

(e) $(-3)\ \left((-4) + 7\right) = (-3)(3) = -9$

(f) $(-3)(-4) + 7 = 12 + 7 = 19$

(g) $|-3|(-4) + 7 = 3(-4) + 7 = (-12) + 7 = -5$

(h) $|-3|\ |-2| + (-6) = (3)(2) + (-6) = 6 + (-6) = 0$

(i) $(-3)\ |-2| + (-6) = (-3)(2) + (-6) = (-6) + (-6) = -12$

(j) $(-3)\ \left(|-2| + (-6)\right) = (-3)\left(2 + (-6)\right) = (-3)(-4) = +12$

(k) $(-0.5)\left(|-1.5| + (-4.2)\right) = (-0.5)(-2.7) = 1.35$

3. (a) $2(-2) + 7(3) = (-4) + 21 = 17$

(b) $3\left(-(-2)\right) + \left((-4)(3) + 7\left(-(-4)\right)\right) = 6 + \left((-12) + 28\right)$
$= 6 + 16 = 22$

(c) $(-2)^2 + 2\big((-2)(-4)\big) + (-4)^2 = 4 + 2(8) + 16$

$= 4 + 16 + 16 = 36$

(d) $\big((-2) + (-4)\big)^2 = (-6)^2 = 36$

(e) $(-2)^2 + \big(3|-4| + (-4)(3)\big) = 4 + \big(12 + (-12)\big) = 4 + 0 = 4$

(f) $|(-2) + 2| + (-5)|(-3) + (-4)| = 0 + (-5)(7) = -35$

4. (a) $2(-10) + 8 = 12$ Falso

(b) $2\big(-(-10)\big) + 8 = 28$ Cierto

(c) $(-3)\big((2)(-2)\big) + 8 \neq 20$

$(-3)(-4) + 8 \neq 20$ Falso

(d) $(-5)\big((-2)(-4) + 30\big) < 0$

$(-5)(8 + 30) < 0$ Cierto

5. (a) Si $x + (-3)(-4) = 8$ es cierto para algún x,

entonces $x + 12 = 8$ es cierto para el mismo x,

$x + 12 + (-12) = 8 + (-12)$ es cierto para el mismo x,

$x = -4$ es cierto para el mismo x.

Si $x = -4$,

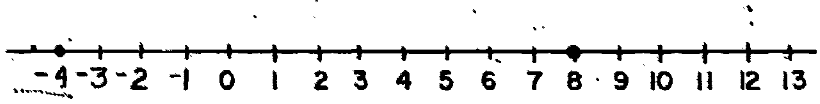
el miembro de la izquierda es

$(-4) + (-3)(-4) = (-4) + (12)$

$= 8$

El miembro de la derecha es 8.

Por consiguiente, el conjunto de validez es {8}.

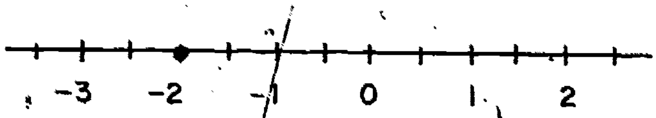


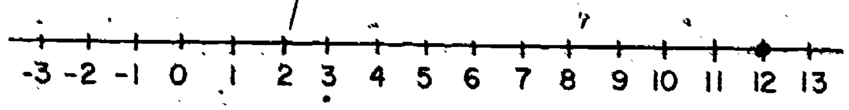
La forma sugerida aquí deberá usarse mientras sea útil a los estudiantes, pero no por más tiempo. Cuando, a juicio del maestro, escribir "es cierto para algún x" y "es cierto para el mismo x" ha cumplido su propósito, no debe utilizarse más.

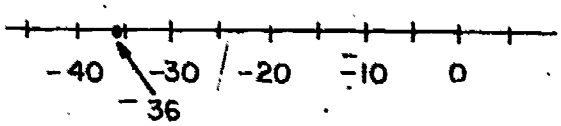
Lo importante es estar seguro de que los estudiantes no pierdan de vista las ideas empleadas aquí. De vez en cuando deben buscarse nuevas oportunidades para ayudar a los estudiantes a recordar por qué un número que hace cierto el primer enunciado hará necesariamente cierto el último enunciado.

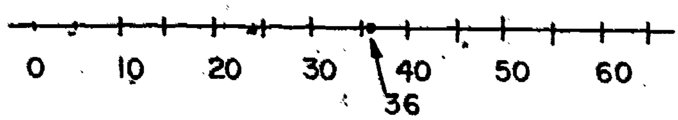
Algunos maestros se extrañarán de que no verifiquemos la solución "sustituyendo" x por -4 en el enunciado. En realidad, no hemos usado la palabra "sustituir" en este contexto por la razón siguiente: La variable x es un símbolo que representa un número no especificado de un conjunto dado. Decimos que el "valor de x es 3", cuando especificamos que x representa a 3. Si dijéramos: "sustituye x por 3", el estudiante podría tener la impresión de que el símbolo x se ha borrado en alguna forma y ha sido reemplazado por el símbolo 3. Deseamos que el estudiante comprenda que en tal caso, x es 3, no que es reemplazado por 3.

Los conjuntos de validez y las gráficas para las demás partes del problema son:

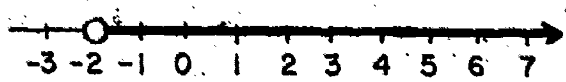
(b) {-2} 

(c) {12} 

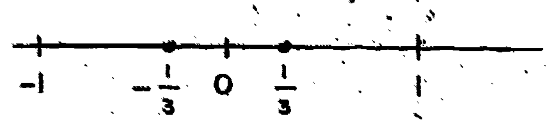
(d) {-36} 

(e) {36} 

(f) Todos los números mayores que -2.



(g) $\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\}$



6. P = {-12, -8, -3, -2, 1, 4, 6, 9, 16}. Construir una tabla de productos puede facilitar el trabajo del estudiante en este problema.

7. Q es el conjunto de todos los números reales. El conjunto de los números reales es cerrado respecto de la multiplicación.

8. T es el conjunto de todos los números reales positivos. El conjunto de los números reales negativos no es cerrado respecto de la multiplicación.

9. Refiriéndonos al problema 6, vemos que el subconjunto de P consistente en los números positivos de P, es K = {1, 4, 6, 9, 16}.

*10. Si $a = 0$ ó $b = 0$, entonces $ab = 0$, $|ab| = 0$, y $|a| = 0$ ó $|b| = 0$,

por tanto, $|ab| = |a| \cdot |b|$.

Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, exactamente uno de los siguientes es cierto:

$ab = |a| \cdot |b|$ Definición del producto de dos números reales

ó $ab = -(|a| \cdot |b|)$

(Nótese que los dos valores posibles de ab son opuestos.)

Entonces $|ab|$ es $|a| \cdot |b|$ ó $-(|a| \cdot |b|)$, el que sea mayor.

Definición de valor absoluto

Pero $\lvert a\rvert \cdot \lvert b\rvert$ es positivo,	Definición del producto de dos números reales
y $-(\lvert a\rvert \cdot \lvert b\rvert)$ es negativo.	Definición de opuestos
Por lo tanto, $\lvert ab\rvert = \lvert a\rvert \cdot \lvert b\rvert$.	Un número positivo es mayor que un número negativo.

11. (a) Ambos son positivos o ambos son negativos.
    (b) Uno es positivo y uno negativo.
    (c) b es positivo.
    (d) b es negativo.
    (e) b es negativo.
    (f) b ès positivo.

*12. 1. Propiedad de comparación
    2. Propiedad multiplicativa del 0
    3. Definición de la multiplicación
    4. Definición de opuestos - si un número es positivo, su opuesto es negativo.

Este es un ejemplo de una demostración por contradicción. A pesar de esto, la demostración es inmediata, y puede seguirse sin una discusión de la demostración formal por contradicción, lo cual se trata en la sección 7-8 de este capítulo.

7-2. Propiedades de la multiplicación

Una vez más debemos insistir en que la exigencia de que las propiedades conocidas deberán cumplirse, nos sugirió lo que debe ser la definición de la multiplicación. Por otra parte, pudimos haber dado la definición de la multiplicación al principio sin justificación alguna. Así, la definición en sí misma no contiene en realidad suposición alguna sobre las propiedades. Es hasta concebible que, a pesar de estar más o menos forzados a definir la multiplicación de este modo, podríamos encontrar que las propiedades no continúan ya siendo válidas. De aquí que todavía sea necesario demostrar que la multiplicación así definida tiene efectivamente las propiedades. Al hacer esto no hemos caído en la trampa lógica de argumentar en un círculo vicioso.

Páginas 150-152. En este punto, quizás el maestro desee mencionar la propiedad de clausura de la multiplicación.

La propiedad del 1, expresada en la forma $a \cdot 1 = a$, de igual manera podía haber sido enunciada en la forma $1 \cdot a = a$. A algunas personas les gusta combinar estas dos formas en el enunciado $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$. No hay objeción a que el maestro haga esto.

Las razones para la propiedad multiplicativa del 1 son las siguientes:

Si $a < 0$, $a \cdot 1 = -(\lvert a\rvert \cdot 1)$	Definición de multiplicación de números reales
$= -\lvert a\rvert$	Propiedad multiplicativa del 1 para $a > 0$
$= a.$	Definición de valor absoluto, y el opuesto del opuesto de un número es el número mismo.

Una demostración de la propiedad multiplicativa del 0 es la siguiente:

Para cualquier número real a,

si $a \geq 0$, $a \cdot 0 = \lvert a\rvert \cdot \lvert 0\rvert$	Definición de multiplicación de números reales
Pero si $a \geq 0$, $\lvert a\rvert = a$ y $\lvert 0\rvert = 0$.	Definición de valor absoluto

De este modo, $a \cdot 0$ es el producto de dos números de la aritmética,

$$y \; a \cdot 0 = 0.$$

Si $a < 0$, $a \cdot 0 = -(\lvert a\rvert \cdot \lvert 0\rvert)$	Definición de multiplicación de números reales
$= -(0)$	Producto de dos números de la aritmética
$= 0.$	El opuesto de 0 es 0.

Respuestas al Conjunto de problemas 7-2a; página 152:

1. (a) $\left((-\frac{3}{4})(-\frac{4}{3})\right)(-17) = (1)(-17) = -17$

   (b) $(-8)\left(5 + (-6)(\frac{2}{3})\right) = (-8)\left(5 + (-4)\right) = (-8)(1) = -8$

   (c) $(-4)\left((-\frac{3}{2})(4) + (-\frac{6}{5})(-5)\right) = (-4)\left((-6) + 6\right) = (-4)(0) = 0$

   (d) $\left((4)(-6) + (-8)(-3)\right)(-\frac{47}{13}) = \left((-24) + (24)\right)(-\frac{47}{3}) = (0)(-\frac{47}{3}) = 0$

2. (a) Hecho en el texto.

   (b) $(3)(-5) = -(|3|\ |-5|) = -15$

   $(-5)(3) = -(|-5|\ |3|) = -15$

   (c) $(-\frac{2}{3})(0) = -(|-\frac{2}{3}|\ |0|) = 0$

   $(0)(-\frac{2}{3}) = -(|0|\ |-\frac{2}{3}|) = 0$

   (d) $(3)(-4) = |-3|\ |-4| = 12$

   $(-4)(-3) = |-4|\ |-3| = 12$

   (e) $(-7)(\frac{5}{7}) = -(|-7|\ |\frac{5}{7}|) = -5$

   $(\frac{5}{7})(-7) = -(|\frac{5}{7}|\ |-7|) = -5$

Páginas 153-54. $|(ab)c| = |ab|\ |c|$. Se ha dicho en el texto y demostrado en el problema *10 del Conjunto de problemas 7-1 que $|ab| = |a|\ |b|$. Nótese que esta propiedad justifica también el próximo paso.

Si uno de los a, b, c es 0, entonces $(ab)c = 0$ y $a(bc) = 0$, por la propiedad multiplicativa del 0.

La prueba de la asociatividad es probablemente muy difícil para que pueda exigirse a todos los estudiantes. Sin embargo, la relativa dificultad de la idea podría gustarle a los mejores estudiantes.

Respuestas al Conjunto de problemas 7-2b; página 154:

1.

Si a es	+	+	+	+	-	-	-	-
y b es	+	+	-	-	+	+	-	-
y c es	+	-	+	-	+	-	+	-
entonces ab es	+	+	-	-	-	-	+	+
bc es	+	-	-	+	+	-	-	+
(ab)c es	+	-	-	+	-	+	+	-
a(bc) es	+	-	-	+	-	+	+	-

Hemos visto en el texto que para todos los números reales a, b y c,

$$|(ab)c| = |a(bc)|;$$

y que si uno de los a, b, c es 0, la propiedad asociativa de la multiplicación es válida.

Si

$$|(ab)c| = |a(bc)|,$$

o bien

$$(ab)c = a(bc)$$

ó

$$(ab)c = -a(bc)$$

es cierto, esto es, o los numerales deben representar el mismo número, o los números son opuestos. Puesto que la tabla revela que para todas las combinaciones posibles de valores positivos y negativos de a, b y c, (ab)c y a(bc) son ambos positivos o ambos negativos, es claro que (ab)c y a(bc) no son opuestos, y que (ab)c = a(bc).

2. (a) $\big((3)(2)\big)(-4) = (6)(-4) = -24$

$\quad (3)\big((2)(-4)\big) = (3)(-8) = -24$

(b) $\big((3)(-2)\big)(-4) = (-6)(-4) = 24$

$\quad (3)\big((-2)(-4)\big) = (3)(8) = 24$

(c) $\big((3)(-2)\big)(4) = (-6)(4) = -24$

$\quad (3)\big((-2)(4)\big) = (3)(-8) = -24$

(d) $\big((-3)(2)\big)(-4) = (-6)(-4) = 24$

$(-3)\big((2)(-4)\big) = (-3)(-8) = 24$

(e) $\big((-3)(-2)\big)(-4) = (6)(-4) = -24$

$(-3)\big((-2)(-4)\big) = (-3)(8) = -24$

(f) $\big((-3)(-2)\big)(0) = (-6)(0) = 0$

$(3)\big((-2)(0)\big) = (3)(0) = 0$

3. (a) $(-5)(17)(-20)(3) = \big((-5)(-20)\big)\big((17)(3)\big)$

$= (100)(51)$

$= 5100$

(b) $(\frac{2}{3})(\frac{7}{5})(-\frac{3}{4}) = \big((\frac{2}{3})(-\frac{3}{4})\big)(\frac{7}{5})$

$= (-\frac{1}{2})(\frac{7}{5})$

$= -\frac{7}{10}$

(c) $(\frac{1}{3})(\frac{6}{5})(-21) = \big((\frac{1}{3})(-21)\big)(\frac{6}{5})$

$= (-7)(\frac{6}{5})$

$= -\frac{42}{5}$

(d) $(-\frac{2}{3})(\frac{4}{5})(\frac{3}{2})(-\frac{5}{4}) = \big((-\frac{2}{3})(\frac{3}{2})\big)\big((\frac{4}{5})(-\frac{5}{4})\big)$

$= (-1)(-1)$

$= 1$

(e) $(\frac{1}{5})(-19)(-3)(50) = \big((\frac{1}{5})(50)\big)\big((-19)(-3)\big)$

$= (10)(57)$

$= 570$

(f) $(-7)(-25)(3)(-4) = \big((-7)(3)\big)\big((-25)(-4)\big)$

$= (-21)(100)$

$= -2100$

Página 155.

(5) $(2 + (-3))$ y $(5)(2) + 5(-3)$ son numerales para -5.

(5) $((-2) + (-3))$ y $(5)(-2) + (5)(-3)$ son numerales para -25.

y (-5) $((-2) + (-3))$ y $(-5)(-2) + (-5)(-3)$ son numerales para 25.

La discusión siguiente justifica la razón de no sugerir que se estimule al estudiante, aún al más interesado, a tratar de demostrar la propiedad distributiva.

Una verificación completa de la ley distributiva requiere un examen de doce casos para $a(b + c)$:

(1)	$a \geq 0$,	$b \geq 0$,	$c \geq 0$;	
(2)	$a < 0$,	$b < 0$,	$c < 0$;	
(3)	$a \geq 0$,	$b \geq 0$,	$c < 0$,	$b \geq \|c\|$;
(4)	$a \geq 0$,	$b \geq 0$,	$c < 0$,	$b < \|c\|$;
(5)	$a \geq 0$,	$b < 0$,	$c \geq 0$,	$\|b\| \geq c$;
(6)	$a \geq 0$,	$b < 0$,	$c \geq 0$,	$\|b\| < c$;
(7)	$a < 0$,	$b \geq 0$,	$c \geq 0$;	
(8)	$a \geq 0$,	$b < 0$,	$c < 0$;	
(9)	$a < 0$,	$b \geq 0$,	$c < 0$,	$b \geq \|c\|$;
(10)	$a < 0$,	$b \geq 0$,	$c < 0$,	$b < \|c\|$;
(11)	$a < 0$,	$b < 0$,	$c \geq 0$,	$\|b\| \geq c$;
(12)	$a < 0$,	$b < 0$,	$c \geq 0$,	$\|b\| < c$.

Hay ocho casos más a considerar para $ab + ac$.

Debe disuadirse al estudiante de tratar de probar esta propiedad distributiva. Como en la verificación de la ley asociativa para la suma, el número de casos posibles es un obstáculo. Aquí, sin embargo, hay una dificultad adicional: La demostración requiere que el estudiante distribuya la multiplicación con respecto a la resta, para números de la aritmética. En el caso (3), por ejemplo, $a(b + c)$ es, por definición, $a(b - |c|)$, y necesitamos saber que

$$a(b - |c|) = ab - a|c|$$

antes de seguir. Esta igualdad es válida a causa de la propiedad distributiva mencionada. En esta propiedad está implícito que $ab > a|c|$. Las definiciones de suma y multiplicación nos permiten entonces escribir

$$\begin{aligned} a(b - |c|) &= ab - a|c| \\ &= ab + (-a|c|) \\ &= ab + ac. \end{aligned}$$

Hemos apenas mencionado la resta para los números de la aritmética, de modo que difícilmente podemos esperar que el estudiante se percate propiamente de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la resta para tales números.

<u>Respuestas al Conjunto de problemas 7-2c</u>; página 155:

1. $(-9)(-92) + (-9)(-8) = -9\ \big((-92) + (-8)\big) = -9\ (-100) = 900$
2. $(.63)(6) + (-1.63)(6) = \big(.63 + (-1.63)\big)\ 6 = (-1)(6) = -6$
3. $-\frac{3}{2}\left((-4) + 6\right) = -\frac{3}{2}\ (2) = -3$
4. $(-7)(-\frac{3}{4}) + (-7)(\frac{1}{3}) = -7\ \left((-\frac{3}{4}) + (\frac{1}{3})\right) = -7\ (-\frac{5}{12}) = \frac{35}{12}$
5. $(-\frac{3}{4})\big((-93) + (-7)\big) = -\frac{3}{4}\ (-100) = 75$
6. $(-7)(\frac{2}{3}) + (-5)(\frac{2}{3}) = \big((-7) + (-5)\big)\ \frac{2}{3} = (-12)(\frac{2}{3}) = -8$

<u>Página 155</u>. Las razones para los pasos indicados en la demostración de que $(-1)a = -a$ son:

$a + (-1)a = 1(a) + (-1)a$	Propiedad multiplicativa del 1
$= \big(1 + (-1)\big)a$	Propiedad distributiva
$= (0)a$	Propiedad aditiva de los opuestos
$= 0$	Propiedad multiplicativa del 0

Respuestas al Conjunto de problemas 7-2d; página 156:

1. Teorema: Para dos números reales cualesquiera a y b, $(-a)(b) = -(ab)$.

$(-a)(b) = \big((-1)(a)\big)(b)$	$(-1)x = -x$
$= (-1)(ab)$	Propiedad asociativa de la multiplicación
$= -(ab)$	$(-1)x = -x$

2. Teorema: Para cualquier par de números reales a y b, $(-a)(-b) = ab$.

$(-a)(-b) = \big((-1)\cdot a\big)\big((-1)\cdot b\big)$	$(-1)x = -x$
$= \big((-1)(-1)\big)(ab)$	Propiedades asociativa y conmutativa de la multiplicación
$= (1)ab$	Definición de la multiplicación
$= ab$	Propiedad multiplicativa del 1

3. (a) $(-5)(ab) = -5ab$ (d) $(-5c)(\frac{3}{5}d) = -3cd$

(b) $(-2a)(-5c) = 10ac$ (e) $(\frac{2}{9}bc)(-6a) = -\frac{4}{3}abc$

(c) $(3x)(-7y) = -21xy$ (f) $(-0.5d)(1.2c) = -0.6cd$

7-3 y 7-4. Uso de las propiedades de la multiplicación

Estas secciones introducen algunas de las técnicas necesarias del álgebra. Deseamos proporcionar práctica suficiente con estas técnicas, pero queremos también mantenerlas estrechamente asociadas con las ideas de las cuales dependen. Tenemos que seguir un angosto sendero manteniendo el equilibrio entre dos peligros: por una parte, resultar enteramente mecánico, perdiendo de vista las ideas, o por otra, mantenernos en éstas hasta tal punto que el estudiante se vuelva lento y torpe en los cálculos algebraicos. Un buen lema de trabajo a seguir aquí es que la manipulación debe basarse en la comprensión. El estudiante debe ganarse el derecho de "empujar símbolos" (omitiendo pasos, calculando sin dar razones, etc.) consiguiendo primero dominar las ideas que hay detrás de la manipulación de los símbolos y dando significado a dicha manipulación.

Respuestas al Conjunto de problemas 7-3a; páginas 156-157:

1. (a) $3x + 15$
   (b) $7a + (-ak)$
   (c) $2a + 2b + 2c$
   (d) $(-9a) + (-9b)$
   (e) $3p + (-3q)$
   (f) $(-y) + z + (-5)$
   (g) $13y + xy$
   (h) $32 + 8m$
   (i) $(-gr) + (-g) + gs + gt$

2. (e), (f), (h), (i)

3. (a) $5(a + b)$
   (b) $(-9)(b + c)$
   (c) $6\ (2 + 3)$ or $6\ (5)$
   (d) $3(x + y + z)$
   (e) $k(m + p)$
   (f) $(a + b)(x + y)$
   (g) $(7 + 3)(\frac{1}{8})$ ó $10\ (\frac{1}{8})$
   (h) $(-6)\ (a^2 + b^2)$
   (i) $c(a + b + 1)$
   (j) $2(a + (-b))$

4. (a) $19t$
   (b) $-6a$
   (c) $9y$
   (d) $13z$
   (e) $(-11m)$
   (f) $2a$
   (g) $4.0b$
   (h) $8x$
   (i) $3a + 7y$
   (j) $16p$
   (k) 0
   (ℓ) $2a + 19b$

Página 158. Al reducir términos, deseamos que la aplicación directa de la propiedad distributiva sea la idea principal. No se debe dar la impresión de que reducir términos es un proceso nuevo. Tratamos de evitar las frases "términos iguales" y "términos semejantes", porque son innecesarias y tienden a estimular la manipulación sin comprensión.

Respuestas al Conjunto de problemas 7-3b; página 158:

1. (a) $13x$ (h) $2a$
   (b) $-13a$ (i) $17p$
   (c) $9k$ (j) 0
   (d) $3b$ (k) $12a + 3c + 3c^2$
   (e) n (ℓ) $6a + 4b + c$
   (f) $9x$ (m) $6p + 11q$
   (g) $-14a$ (n) $3x^2 + (-x) + 1$

2. En las partes (f) y (g), la propiedad multiplicativa del uno.
   En la parte (k), la propiedad asociativa de la suma.
   En la parte (m), las propiedades conmutativa y asociativa de la suma.

3. Puesto que no hemos introducido todavía la propiedad multiplicativa de la igualdad, el alumno tendrá que volver atrás "conjeturando" el conjunto de validez, después de reducir términos y usar la propiedad aditiva de la igualdad, cuando sea posible.
   (a) $\{2\}$ (f) El conjunto de todos los números reales.
   (b) $\{-4\}$ (g) $\{7\}$
   (c) $\emptyset$ (h) $\{11\}$
   (d) $\{-9\}$ (i) $\{1\}$
   (e) $\emptyset$ (j) $\{2\}$

Página 159. Las razones para los pasos del ejemplo son:

$(3x^2y)(7ax)$	$= 3\cdot x\cdot x\cdot y\cdot 7\cdot a\cdot x$	Propiedad asociativa de la multiplicación
	$= 3\cdot 7\cdot a\cdot x\cdot x\cdot x\cdot y$	Propiedad conmutativa de la multiplicación
	$= (3\cdot 7)\cdot a\cdot (x\cdot x\cdot x)\cdot y$	Propiedad asociativa de la multiplicación
	$= 21ax^3y$	Multiplicación

Respuestas al Conjunto de problemas 7-4a; página 159:

1. $-24b$
2. $-12c^2$
3. $-72b$
4. $42yz$
5. $18bc^2$
6. $-15w^4$
7. $-12ay^3$
8. $\frac{3}{8}ab^2c^2d$
9. $48p^2q^2$
10. $200b^3c^2d$
11. $(\frac{1}{3}ab)(9a^2) = \frac{1}{3}\cdot a\cdot b\cdot 9\cdot a\cdot a$

    $= (\frac{1}{3}\cdot 9)(a\cdot a\cdot a)\cdot b$

    $= 3a^3b$
12. $28abc$

Respuestas al Conjunto de problemas 7-4b; página 160:

1. $(-3c) + (-3d)$
2. $16 + (-6b) + 14b^2$
3. $18xy + 6xz$
4. $(-12b^3c^2) + (-21b^2c^3)$
5. $5x^2 + 30x$
6. $20b^3 + 70b^2 + (-40b)$
7. $(-p) + (-q) + (-r)$
8. $(-21a) + 35b$
9. $12x^2y + 18x^2y^2 + 24xy^2$
10. $(-a^2) + (-2ab) + (-b^2)$
11. $(-8ac) + 20bc + 4c^2$
12. $(-x^2) + x$

Respuestas al Conjunto de problemas 7-4c; página 161:

1. Estimule al estudiante a hacer cada uno de estos problemas de la manera indicada en (a).

   (a) $(x + 8)(x + 2) = (x + 8)x + (x + 8)2$
   $= x^2 + 8x + 2x + 16$
   $= x^2 + 10x + 16$

   (b) $y^2 + (-8y) + 15$
   (c) $6a^2 + (-17a) + 10$
   (d) $a^2 + 4a + 4$
   (e) $x^2 + (-36)$
   (f) $y^2 + (-9)$

2. Para números reales a, b, c, d,

   $(a + b)(c + d) = (a + b)c + (a + b)d$
   $= ac + bc + ad + bd$
   $= ac + (bc + ad) + bd$

   Cuando el alumno descubra que esto le da una fórmula para multiplicar expresiones de la forma $(a + b)(c + d)$, tal vez quiera usarla en vez de la forma más larga indicada en el problema 1. Debe estimularse a que lo haga así tan pronto como esté preparado para usarla con comprensión y con exactitud.

3. (a) $a^2 + 4a + 3$
   (b) $6x^2 + 17x + 12$
   (c) $ab + cb + ad + cd$
   (d) $y^3 + (-6y^2) + 9y + (-4)$
   (e) $m^2 + 6m + 9$
   (f) $14 + 9z + z^2$

4. (a) $3a^2 + 5a + 2$
   (b) $4x^2 + 23x + 15$
   (c) $8 + 13n + 5n^2$
   (d) $6p^2q^2 + (-10pq) + (-56)$
   (e) $16 + (-14y) + y^2 + y^3$
   (f) $15y^2 + (-11xy) + (2x^2)$

7-5. El inverso multiplicativo (página 161)

Un número real dado permanece inalterado cuando se le suma 0, en virtud de la propiedad aditiva del cero. Un número real dado permanece inalterado cuando se multiplica por 1, en virtud de la propiedad multiplicativa del uno.

Si d es un inverso multiplicativo de c, entonces cd = 1. Por la propiedad conmutativa de la multiplicación, dc = 1,y, por tanto, c es un inverso multiplicativo de d. Páginas 162-163. Para comprobar si dos números son realmente inversos multiplicativos, se pueden multiplicar, y si el producto es uno, son inversos multiplicativos.

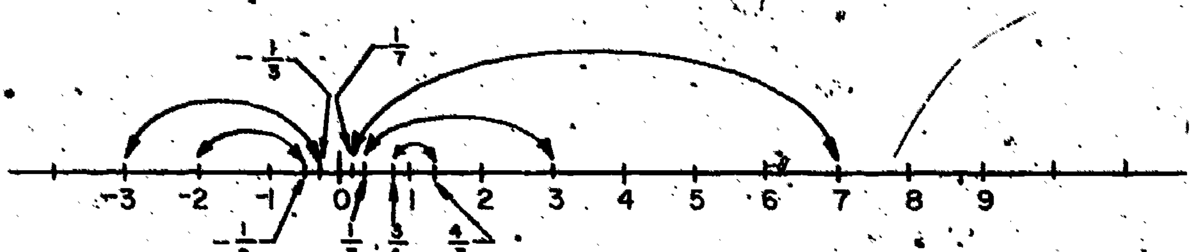
Cuando se aparean números sobre la recta numérica para formar pares de inversos, se ve que 0 no puede ser apareado con ningún número. A medida que el estudiante vaya escogiendo números positivos cada vez más próximos al 0, encuentra que los inversos multiplicativos son cada vez más grandes; en cambio, cuando elige números negativos mayores que -1, encuentra que los inversos multiplicativos se alejan cada vez más a la izquierda sobre la recta numérica. Por consiguiente, no hay indicación alguna de un posible inverso multiplicativo para 0 sobre la recta numérica. Además, la propiedad multiplicativa del 0 muestra que no hay ningún número b tal que $0 \times b = 1$. El estudiante puede llegar así a la conclusión de que no hay inverso multiplicativo del 0. Una demostración formal de esto se verá en la próxima sección.

Respuestas al Conjunto de problemas 7-5; página 164:

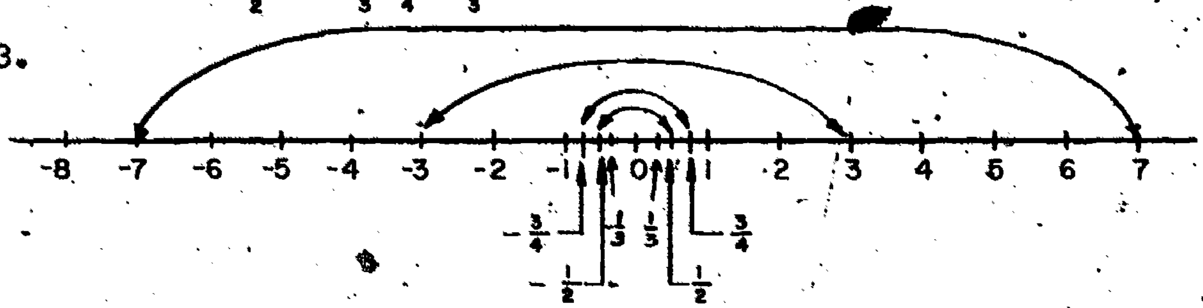
1.

Número	Inverso Multiplicativo	Número	Inverso Multiplicativo
3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{7}$	$-\frac{7}{3}$
$\frac{1}{2}$	2	-7	$-\frac{1}{7}$
-3	$-\frac{1}{3}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{10}{3}$
$-\frac{1}{2}$	-2	$\frac{1}{100}$	100
$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{100}$	-100
7	$\frac{1}{7}$	0,45	$\frac{100}{45}$ ó $\frac{20}{9}$
$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{5}$	-6.8	$-\frac{5}{34}$

2.



3.



En el problema 3, cada doble flecha une puntos a lados opuestos del 0, mientras que en el problema 2, los puntos unidos por una doble flecha están ambos al mismo lado del 0.

4. Si $a > 1$, entonces b está entre 0 y 1.

Si a está entre 0 y 1, entonces $b > 1$.

1 es un inverso multiplicativo de 1.

5. Si $a < -1$, entonces b está entre -1 y 0.

   Si $a < 0$ y $a > -1$, entonces $b < -1$.

   -1 es un inverso multiplicativo de -1.

6. Si a es positivo, el inverso b es positivo.

   Si a es negativo, el inverso b es negativo.

7-6. La propiedad multiplicativa de la igualdad

Véase el comentario sobre la propiedad aditiva de la igualdad en el Capítulo 6, páginas 133 y 134.

Respuestas al Conjunto de problemas 7-6; páginas 165-166:

1. $(-5)(-3)$ y 15 son nombres distintos para el mismo número. Cuando multiplicamos $(\frac{1}{3})$ por este número, obtenemos "$((-5)(-3))(\frac{1}{3})$" y "$(15)(\frac{1}{3})$" como nombres distintos de un nuevo número.

2. (a) Cierto (c) Falso (e) Cierto

   (b) Cierto (d) Cierto

3. (a) Si $12x = 6$ es cierto para algún x,

   entonces $(12x)(\frac{1}{12}) = 6(\frac{1}{12})$ es cierto para el mismo x,

   $(12\cdot\frac{1}{12})x = 6(\frac{1}{12})$ es cierto para el mismo x,

   $x = \frac{1}{2}$ es cierto para el mismo x.

   Si $x = \frac{1}{2}$,

   el miembro de la izquierda es $12(\frac{1}{2}) = 6$,

   el miembro de la derecha es 6,

   y, por lo tanto, el conjunto de validez es $\{\frac{1}{2}\}$.

   (b) $\{\frac{6}{7}\}$ (e) $\{1\}$ (h) $\{1\}$

   (c) $\{1\}$ (f) $\{\frac{2}{5}\}$ (i) $\{\frac{9}{4}\}$

   (d) $\{3\}$ (g) $\{\frac{3}{2}\}$

4. La forma utilizada en el problema 3 puede usarse aquí también.

   (a) $\{5\}$ (e) $\{15\}$

   (b) $\{35\}$ (f) $\{-\frac{9}{2}\}$

   (c) $\{\frac{5}{7}\}$ (g) $\{-4\}$

   (d) $\{-\frac{9}{2}\}$ (h) $\{0\}$

5. (a) Si V es 84 y h es 7, entonces $V = \frac{1}{3}Bh$ es $84 = \frac{1}{3}B(7)$.

   Si $84 = \frac{1}{3}B(7)$ es cierto para alguna B,

   entonces $84 = B(7)(\frac{1}{3})$ es cierto para la misma B,

   $84 = B\cdot\frac{7}{3}$ es cierto para la misma B,

   $84\cdot\frac{3}{7} = B\cdot\frac{7}{3}\cdot\frac{3}{7}$ es cierto para la misma B,

   $36 = B\cdot(\frac{7}{3}\cdot\frac{3}{7})$ es cierto para la misma B,

   $36 = B\cdot 1$ es cierto para la misma B,

   $36 = B$ es cierto para la misma B.

   Si B es 36,

   el miembro de la izquierda es 84,

   el miembro de la derecha es $\frac{1}{3}(36)(7)$ u 84.

   El conjunto de validez es $\{36\}$.

   (b) La forma de la parte (a) debe usarse aquí. El conjunto de validez es $\{13\}$.

7-7. <u>Soluciones de ecuaciones</u>

<u>Páginas 166-169</u>. Esta es la primera vez que empleamos el "si y solamente si". Lo presentamos aquí, porque la situación se evidencia fácilmente en términos de conjuntos de

validez. Aunque la idea no es difícil, "si y solamente si" a menudo da lugar a confusión. La forma es siempre "A si y solamente si B", donde A y B son enunciados. Tratamos en realidad con el enunciado compuesto "A <u>si</u> B y A <u>solamente si</u> B". El enunciado "A si B" es una forma abreviada de escribir "Si B, entonces A", y "A solamente si B" es una manera de escribir "Si A, entonces B". Estos enunciados condicionales a veces se escriben "B implica A" y "A implica B". La confusión con "si y solamente si" procede de tratar de recordar qué enunciado es el enunciado "si" y cuál es el enunciado "solamente si". Cada cual tiene esta dificultad, pero afortunadamente no es un asunto importante. Lo que <u>es</u> importante es que el enunciado compuesto "A si y solamente si B" <u>significa</u> "Si A, entonces B <u>y</u> si B, entonces A".

Los enunciados equivalentes se estudiarán con más detalle en el Capítulo 13. Puede que el maestro desee referirse a la explicación ulterior antes de introducirla en este momento. La idea se introduce aquí para ecuaciones lineales, porque el estudiante debe seguramente tener conocimiento de ella, y se sentirá impaciente por la rutina de comprobar. No es nuestra intención eliminar del todo la comprobación en el caso de estas ecuaciones, sino más bien situarla en su propia perspectiva como medio de detección de errores en la aritmética.

Es importante que el maestro observe, y ayude al alumno a darse cuenta de que en el proceso de resolver ecuaciones, no todos los pasos empleados implican directamente la equivalencia de dos ecuaciones. Aquellos pasos en los cuales se usan la propiedad aditiva y la propiedad multiplicativa de la igualdad, deben plantear la cuestión de la equivalencia, pero por otro lado, puede haber pasos utilizados con el único propósito de simplificar un miembro o ambos miembros de una ecuación.

Así al pasar de

$$3x + 7 = x + 15$$

a $(3x + 7) + \big((-x) + (-7)\big) = (x + 15) + \big((-x) + (-7)\big)$,

la equivalencia es un asunto a considerar porque, por ejemplo, la frase de la izquierda expresa un número distinto del expresado por el miembro de la izquierda de la ecuación original, debido a que se utilizó la propiedad aditiva de la igualdad. Pero al pasar de

$$(3x + 7) + \big((-x) + (-7)\big) = (x + 15) + \big((-x) + (-7)\big)$$

a $$2x = 8,$$

el asunto de la equivalencia no entra en juego, porque todo lo que hacemos es expresar cada miembro de la ecuación en forma más sencilla. Ambos tipos de pasos son importantes, desde luego, y los estudiantes deben saber explicarlos.

Una prolongada discusión en el texto, de la diferencia entre estos pasos, podía distraer de la idea principal, y así la tarea de destacar la distinción es propia principalmente del maestro. Esto es tal vez adecuado, porque muchas oportunidades apropiadas para señalarlo se presentarán en la discusión de la clase a lo largo del curso.

En conexión con el trabajo relacionado con ecuaciones equivalentes, algunos maestros informan que las clases han encontrado buena práctica y gusto en el proceso de construir ecuaciones complicadas, tomando como base ecuaciones simples, mediante el uso de ecuaciones equivalentes. Por ejemplo,

$$x = 3 \qquad\qquad 2x + 2 = 8$$
$$x + 1 = 4 \qquad\qquad 2x + 2 + 7 = 8 + 7$$
$$2(x + 1) = 8 \qquad\qquad 2x + 9 = 15$$

<u>Respuestas al Conjunto de problemas 7-7</u>; páginas 169-171:

1. Si x es una solución de $x + (-3) = 5$,
   entonces x es una solución de

	$x + (-3) + 3 = 5 + 3$	Propiedad aditiva de la igualdad
y	$x = 8.$	Propiedad aditiva de los opuestos y propiedad aditiva del 0

   Si x es una solución de $x = 8$,
   entonces x es una solución de

	$x + (-3) = 8 + (-3)$	Propiedad aditiva de la igualdad
y	$x + (-3) = 5.$	Suma

   Por lo tanto, las ecuaciones son equivalentes, porque los pasos utilizados al pasar de una ecuación a otra son invertibles.

   De una manera parecida, pueden efectuarse las partes 1(b) hasta 1(i). 1(b), (c), (d), (f), (g), (h), son pares de ecuaciones equivalentes. 1(c) no lo es, porque la multiplicación por cero no es una operación invertible, ya que cero no tiene inverso multiplicativo. En 1(i) tampoco son equivalentes las ecuaciones, porque el tomar el valor absoluto de cada miembro de una ecuación no es una operación invertible.

2. El ejemplo dado en el texto al comienzo de este problema indica la forma que debe usarse. Nótese que "es equivalente a" se dice entre ecuaciones, una de las cuales se

ha obtenido de la otra utilizando la propiedad aditiva o la propiedad multiplicativa de la igualdad. Nada se dice entre ecuaciones para las cuales hayamos escrito un numeral más sencillo en uno o ambos miembros de las ecuaciones. Se podrían exponer razones para ambas clases de procesos, y esperamos que el estudiante estará pensando en justificaciones adecuadas para todos los pasos. Aquí, sin embargo, el interés está en la equivalencia y las propiedades que producen enunciados equivalentes.

Hágase que el estudiante use esta forma solamente mientras el maestro lo crea necesario. Después que deje de escribir "este enunciado es equivalente a", el maestro deberá comprobar de vez en cuando con algunas preguntas, para estar seguro de que el estudiante está pensando claramente acerca de lo que está haciendo. Si no lo hace así, se debe procurar que vuelva temporalmente a emplear la forma completa.

(a) $2a + 5 = 17$

Este enunciado es equivalente a

$$2a + 5 + (-5) = 17 + (-5)$$

ó $$2a = 12,$$

y este enunciado es equivalente a

$$\frac{1}{2}(2a) = \frac{1}{2}(12)$$

ó $$a = 6.$$

Por consiguiente, el conjunto de validez es $\{6\}$.

(b) El conjunto de validez es el conjunto de todos los números reales.

(c) $\{6\}$

(d) $\{-3\}$

(e) $\emptyset$

(f) $\{0\}$

(g) $\{1\}$

(h) El conjunto de todos los números reales.

(i) $\{-\frac{7}{3}\}$

(j) $\{-3\}$

(k) $\{0\}$

(ℓ) $\emptyset$

(m) $\{1\}$

3. (a) Si x es el número de pulgadas de longitud del tercer lado,
entonces $2x + 3$ es el número de pulgadas de longitud del segundo lado,
y $x + 5$ es el número de pulgadas de longitud del primer lado.

$$(x + 5) + (2x + 3) + x = 44$$

El conjunto de validez es $\{9\}$, y las longitudes de los lados son 14, 21, y 9 pulgadas.

(b) Si m es el entero,

$m + 1$ es el sucesor.

$m + (m + 1) = 2m + 1$

El conjunto de validez es el conjunto de todos los números reales.

(c) Si x es el primer entero impar,
entonces $x + 2$ es el segundo entero impar,
y $x + (x + 2) = 11$. Siendo el dominio de x los enteros impares, el conjunto de validez es $\emptyset$, y, por tanto, no hay dos enteros impares consecutivos cuya suma sea 11.

(d) Si el alambre cuesta c centavos por pie, entonces el señor Colón pagó $(30c + 55c)$ centavos, y su vecino pagó $25c$ centavos.

$$30c + 55c = 25c + 420$$

El conjunto de validez es $\{7\}$.
El costo del alambre es 7 centavos por pie.

(e) Si el entero es n,
el sucesor es n + 1.

$4n = 2(n + 1) + 10$

El conjunto de validez es {6}, y el entero es 6.

(f) Si cada hombre estaba guiando a razón de r millas por hora, entonces:

5r es el número de millas que el primer hombre recorrió,

5r + 120 es el número de millas de longitud del recorrido total,

3r es el número de millas que el segundo hombre recorrió,

3r + 250 es el número de millas de longitud del recorrido total.

$$5r + 120 = 3r + 250$$

El conjunto de validez es {65}, y cada hombre conducía a razón de 65 millas por hora.

(g) Si x es el número de semanas a partir de hoy, entonces:

2x es el número de pulgadas de crecimiento de la planta A,

y 20 + 2x es el número de pulgadas de altura de la planta A, x semanas a partir de hoy.

3x es el número de pulgadas de crecimiento de la planta B,

y 12 + 3x es el número de pulgadas de altura de la planta B, x semanas a partir de hoy.

$20 + 2x = 12 + 3x$

{8}

A las ocho semanas las dos plantas tendrán la misma altura.

(h) Si x es el número,

$$3(x + 17) = 192$$

$$\{47\}$$

El número es 47.

(i) Si h es el número menor,

entonces $5h$ es el mayor.

$$h + 5h = 4h + 15$$

$$\{7\tfrac{1}{2}\}$$

El número menor es $7\frac{1}{2}$.

(j) Si x es el número de cuartillos de agua,

entonces $x + 2$ es el número de cuartillos de la mezcla,

y $0.20(x + 2)$ es el número de cuartillos de alcohol en el radiador.

$$2 = 0.20(x + 2)$$

$$\{8\}$$

Hay 8 cuartillos de agua en el radiador.

7-8. Recíprocos

Usamos ahora el símbolo "$\frac{1}{a}$" para representar el recíproco de a. Antes de esto, hemos usado el mismo símbolo como una fracción que indica un cociente. Para nuestro propósito actual, sería conveniente tener un símbolo que significara sólo "recíproco" y no pusiera de manifiesto ulteriores propiedades del recíproco. Consideramos el uso temporal de a' o a^* o a^{-1}, o algún símbolo parecido, correspondiente a nuestro uso del "negativo superior" a principios del Capítulo 5, pero decidimos que esto sería más confuso que provechoso. Además, creemos que el estudiante debe acostumbrarse a símbolos y palabras con más de un significado. El significado particular atribuido a tal símbolo debe determinarse por el contexto.

Respuestas al Conjunto de problemas 7-8a; página 172:

1. (a) $\frac{1}{15}$ (e) $\frac{1}{\frac{5}{3}}$

   (b) $\frac{1}{-8}$ (f) $\frac{1}{0.3}$

   (c) $\frac{1}{\frac{1}{5}}$ (g) $\frac{1}{-\frac{3}{4}}$

   (d) $\frac{1}{-\frac{1}{6}}$

2. (a) $\frac{1}{15}$ (e) $\frac{3}{5}$

   (b) $-\frac{1}{8}$ (f) $\frac{10}{3}$

   (c) 5 (g) $-\frac{4}{3}$

   (d) -6

   En (a) el nombre corriente para el inverso multiplicativo era el mismo que el recíproco expresado en el problema 1.

3. Para cada número real a, distinto de cero, hay sólo un inverso multiplicativo de a.

   Demostración: Supón que b y x son ambos inversos multiplicativos de a. Entonces,

ab = 1 y ax = 1.	Definición del inverso multiplicativo
Si ax = 1 para algún x,	
ax(b) = 1(b) para el mismo x.	Propiedad multiplicativa de la igualdad
(ab)x = b	Propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación
1(x) = b	Definición del recíproco
x = b	Propiedad multiplicativa del 1

Página 175. $\frac{1}{\frac{1}{a}}$ y a son ambos recíprocos de, $\frac{1}{a}$, porque cuando cualquiera de ellos se multiplica por $\frac{1}{a}$, el resultado es 1.

Respuestas al Conjunto de problemas 7-8b; páginas 175-176:

1. El recíproco de $\frac{3}{4}$ es $\frac{4}{3}$, de 0.3 es $\frac{10}{3}$, de -0.3 es $-\frac{10}{3}$, de 0.33 es $\frac{100}{33}$, de -0.33 es $-\frac{100}{33}$, de 1 es 1, de -1 es -1, de $\sqrt{2}$ es $\frac{1}{\sqrt{2}}$, de $\frac{1}{x^2 + 4}$ es $x^2 + 4$, de $y^2 + 1$ es $\frac{1}{y^2 + 1}$.

2. $a + (-1)$ no tiene recíproco si $a = 1$, puesto que $a + (-1) = 0$ cuando $a = 1$, y 0 no tiene recíproco.

   $a + 1$ no tiene recíproco cuando $a = -1$.

   $a^2 + (-1)$ no tiene recíproco cuando $a = 1$ ó $a = -1$. Puesto que $a^2 + (-1) = (a + 1)\left(a + (-1)\right)$, $a^2 - 1 = 0$ si y sólo si $a + 1 = 0$ ó $a + (-1) = 0$, esto es, si y sólo si $a = -1$ ó $a = 1$.

   $a(a + 1)$ no tiene recíproco para $a = 0$ ó $a = -1$.

   $\frac{a}{a + 1}$ no tiene recíproco para $a = 0$; no es un número si $a = -1$.

   $a^2 + 1$ tendrá un recíproco para cualquier número real a, puesto que $a^2 + 1 \geq 1$ para todos los números reales a.

   $\frac{1}{a^2 + 1}$ tendrá un recíproco para cualquier número real a.

3. $$\left(\left(a + (-3)\right)(a + 1)\right)\left(\frac{1}{a + (-3)}\right) = \left(a + (-3)\right)\left(\frac{1}{a + (-3)}\right)$$

   Propiedad multiplicativa de la igualdad

   $$(a + 1)\left(\left(a + (-3)\right)\frac{1}{a + (-3)}\right) = \left(a + (-3)\right)\frac{1}{a + (-3)}$$

   Propiedades asociativa y conmutativa de la multiplicación

$(a + 1)\cdot 1 = 1$ Definición de recíproco

$a + 1 = 1$ Propiedad multiplicativa del 1

Si $a = 3$, entonces $3 + 1 = 1$, y esto es falso.

No debemos esperar que el enunciado $a + 1 = 1$ tenga el mismo conjunto de validez que el enunciado original, puesto que nuestro "multiplicador" $\frac{1}{a + (-3)}$ no es un número cuando $a = 3$, y usamos la propiedad multiplicativa de la igualdad en el primer paso. Al manejar frases, como en este ejemplo, tenemos que estar constantemente en guardia para no ser dominados por el "manejo o juego de símbolos" hasta el punto de olvidarnos de la estructura algebraica. Mientras recordemos que aquí $\frac{1}{a + (-3)}$ se supone que representa un número, estamos seguros al usar propiedades algebraicas. Cuando consideramos a $\frac{1}{a + (-3)}$ como un símbolo solamente y aplicamos nuestras propiedades algebraicas, cualesquiera resultados obtenidos serán sólo simbólicos; para poder interpretarlos como resultados acerca de números, tenemos que verificar que usábamos realmente números (simbólicos) en cada paso del proceso seguido.

4. El teorema 7-8b dice: "El recíproco de un número positivo es positivo, y el recíproco de un número negativo es negativo".
   Puesto que el recíproco de un número real es el inverso multiplicativo de ese número y el inverso aditivo de un número es su opuesto, el enunciado correspondiente para opuestos sería: "El opuesto de un número positivo es un número negativo, y el opuesto de un número negativo es un número positivo".

   El teorema 7-8c dice: "El recíproco del recíproco de un número real a, distinto de cero, es a". El opuesto del opuesto de un número real a es el número a.

Puesto que 0 no tiene recíproco, el teorema 7-4 no es aplicable al caso $a = 0$. El opuesto de 0 es 0, y el opuesto del opuesto de 0 es también 0. Por tanto, la restricción a números reales distintos de cero no es necesaria en el enunciado concerniente a los opuestos.

5. Si $a = 2$, $b = 3$, entonces $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6} = \frac{1}{2\cdot 3}$.

Si $a = 4$, $b = -5$, entonces $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{-5} = \frac{1}{-20} = \frac{1}{4\,(-5)}$.

Si $a = -4$, $b = -7$, entonces $\frac{1}{-4}\cdot\frac{1}{-7} = \frac{1}{28} = \frac{1}{(-4)(-7)}$.

Así, el enunciado $\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b} = \frac{1}{ab}$ es cierto en los tres casos.

6. ¿Es $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ en los tres casos?

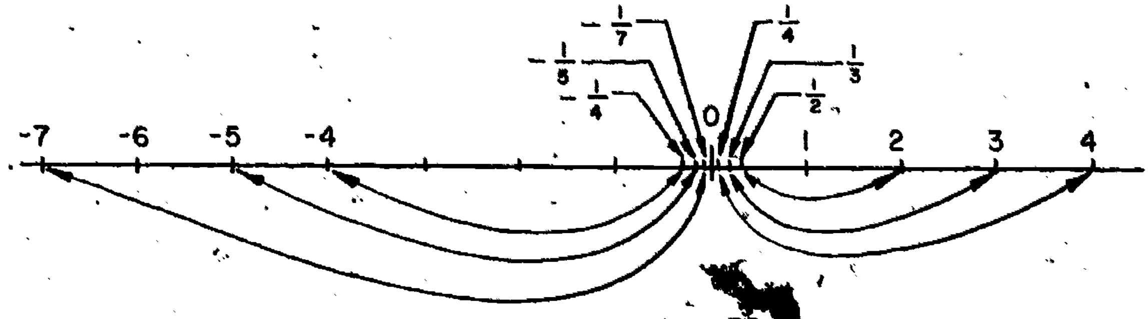
(a) $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ es cierto.

$\frac{3}{6} > \frac{2}{6}$.

(b) $\frac{1}{4} > \frac{1}{-5}$ es cierto. Uno es positivo, uno negativo.

(c) $\frac{1}{-4} > \frac{1}{-7}$ es falso, puesto que

$\frac{1}{-4}$, ó $-\frac{7}{28}$, está a la izquierda de $\frac{1}{-7}$, ó $-\frac{4}{28}$, en la recta numérica.



7. Si $a > b$, siendo a y b positivos, entonces $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$. Este es un enunciado cierto. Un ejemplo:

Si $a = 5$, $b = 2$, $(a > b)$

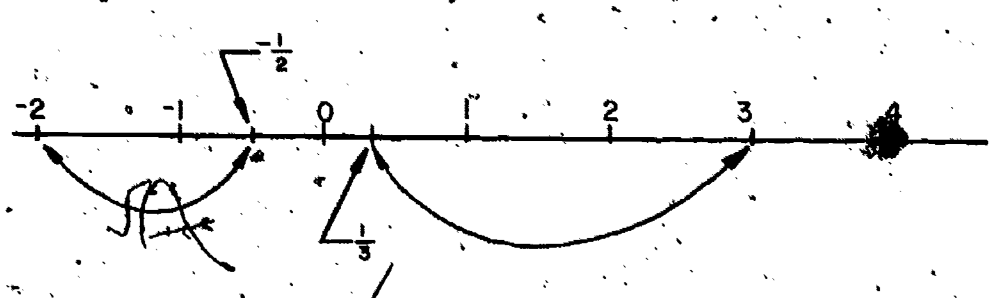
entonces $\frac{1}{2} > \frac{1}{5}$. $(\frac{1}{b} > \frac{1}{a})$

8. Si $a > b$, siendo a y b negativos, entonces $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$. Este es un enunciado cierto. Un ejemplo:

Si $a = -4$, $b = -8$, $(a > b)$

entonces $\frac{1}{-8} > \frac{1}{-4}$; por lo tanto, $\frac{-1}{8}$ está a la derecha de $\frac{-1}{4}$ en la recta numérica.

9. Si a es positivo y b es negativo, $a > b$, y entonces $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, puesto que el recíproco de un número positivo es un número positivo, y el recíproco de un número negativo es un número negativo. A continuación aparece una ilustración para el caso $a = 3$, $b = -2$:



*10. Sabemos que $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ y ahora suponemos que a es negativo. Entonces, por la propiedad de comparación, exactamente una de tres posibilidades debe ser cierta:

$$\frac{1}{a} < 0, \quad \frac{1}{a} = 0, \quad 0 < \frac{1}{a}.$$

Si $\frac{1}{a}$ es positivo, entonces $a \cdot \frac{1}{a}$ es negativo, por la definición de multiplicación de números reales. Esto contradice el hecho de que $a \cdot \frac{1}{a}$ es positivo. Si $\frac{1}{a}$ es 0, cuando a es negativo, entonces $a \cdot \frac{1}{a} = 0$, por la propiedad multiplicativa del cero. Esto de nuevo contradice el hecho de que $a \cdot \frac{1}{a}$ es positivo. De aquí que la única posibilidad restante es $\frac{1}{a} < 0$.

Páginas 176-177. Al tratar con un "sistema" que tiene "estructura", la inducción juega un papel importante, porque nos ayuda a descubrir propiedades que podrían ser ciertas en general. Nuestra confianza en la certeza de la propiedad sugerida depende del hecho de que estamos tratando con un sistema. La demostración de una propiedad sugerida por inducción se efectúa deduciéndola de otras propiedades que se sabe o se supone sean ciertas. Descubrimos muchas de las propiedades fundamentales de los números reales por inducción. Al principio tuvimos que suponer que en general las propiedades eran ciertas. Luego pudimos demostrar que algunas de nuestras propiedades descubiertas eran consecuencia de propiedades que ya habíamos demostrado claramente o habíamos supuesto ciertas. Así, todo nuestro trabajo descansa en la suposición de que ciertas propiedades de los números reales en general son ciertas. La realización de este hecho puede ser desconcertante al principio, pero realmente toda la matemática se desarrolla en esta forma. Cuando las propiedades supuestas son enunciadas explícitamente, se les suele llamar axiomas o postulados.

De vez en cuando señalamos informalmente la diferencia entre razonamiento inductivo y razonamiento deductivo. En algunas clases puede valer la pena un estudio más amplio de esto.

Una discusión del razonamiento deductivo y referencias bibliográficas correspondientes pueden verse en las páginas 112-113 de los Apéndices al "Report of the Commission on Mathematics". En los Problemas de repaso del Capítulo 14 se incluye la expresión $a^2 - a + 41$, que es prima para todos los valores enteros de a desde 1 hasta 40, pero no para $a = 41$. Esto proporciona una buena oportunidad para tratar de nuevo ante los estudiantes la cuestión inductiva-deductiva.

<u>Respuestas al Conjunto de problemas 7-8c</u>; páginas 177-178:

1. (a) $\frac{1}{6ab}$ (c) $\frac{1}{21yz}$ (e) $\frac{1}{6m^3n^3}$

   (b) $\frac{1}{3ax^2}$ (d) $\frac{1}{3a^3b}$ (f) 1

2. 0
3. No, porque $8 \cdot 17$ es 136, por lo tanto, $8 \cdot 17$ <u>no</u> es 0.
4. n es 0.
5. p puede ser cualquier número real.
6. p es 0 ó q es 0.
7. q es 0.

<u>Páginas</u> <u>178-179</u>. Incúlquese una vez más en los estudiantes que el enunciado "$a = 0$ ó $b = 0$" permite la posibilidad de que <u>ambos</u> a <u>y</u> b sean 0.

Cuando $a = 0$, el requisito de que $a = 0$ ó $b = 0$ se satisface, porque un enunciado compuesto cuyas cláusulas están conectadas por "o", esto es, una disyunción, es cierto si por lo menos una cláusula es cierta.

Las razones en la demostración del teorema 7-8e son:

$(\frac{1}{a})(ab) = \frac{1}{a} \cdot 0$	Propiedad multiplicativa de la igualdad
$(\frac{1}{a})(ab) = 0$	Propiedad multiplicativa del 0
$\left(\frac{1}{a} \cdot a\right) b = 0$	Propiedad asociativa de la multiplicación
$1 \cdot b = 0$	Definición del recíproco
$b = 0$	Propiedad multiplicativa del 0

Respuestas al Conjunto de problemas 7-8d; páginas 179-180:

1. Si $(x + (-5)) \cdot 7 = 0$, entonces $7 = 0$ ó $x + (-5) = 0$, por el teorema 7-6. Pero 7 no puede ser igual a 0, porque son nombres de distintos números.
   Así, pues, $x + (-5) = 0$.

2. Si $9 \times h \times 17 \times 3 = 0$, entonces por el teorema 7-8e, $9 = 0$ ó $h = 0$ ó $17 = 0$ ó $3 = 0$. Puesto que $9 \neq 0$, $17 \neq 0$, $3 \neq 0$, debemos tener $h = 0$.

*3. No. Por ejemplo, -2 está entre -3 y 1, pero $-\frac{1}{2}$ <u>no</u> está entre $-\frac{1}{3}$ y 1.

   Sin embargo, si a, p, y q son todos números positivos o todos negativos, y a está entre p y q, entonces $\frac{1}{a}$ está entre $\frac{1}{p}$ y $\frac{1}{q}$.

4. (a) Si $(x + (-20))(x + (-100)) = 0$ es cierto para algún x, entonces $x + (-20) = 0$ ó $x + (-100) = 0$ es cierto para el mismo x.

   $$x = 20 \quad \text{ó} \quad x = 100$$

   Si $x = 20$, $(20 + (-20))(20 + (-100)) = 0(20 + (-100)) = 0$.

   Si $x = 100$, $(100 + (-20))(100 + (-100)) = (100 + (-20))0 = 0$.

   Por tanto, el conjunto de validez es $\{20, 100\}$.

   (b) $\{-6, -9\}$ (e) $\{1, 2, 3\}$ (h) $\{6\}$

   (c) $\{0, 4\}$ (f) $\{\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\}$ (i) $\{2\}$

   (d) $\{\frac{5}{3}, \frac{1}{2}\}$ (g) $\{\frac{5}{3}, -\frac{1}{2}\}$

5. Teorema: Si a, b, c, son números reales, y si $ac = bc$ y $c \neq 0$, entonces $a = b$.

   Puesto que $ac = bc$ y $c \neq 0$,

entonces $ac(\frac{1}{c}) = bc(\frac{1}{c})$	Propiedad multiplicativa de la igualdad
$a(c(\frac{1}{c})) = b(c(\frac{1}{c}))$	Propiedad asociativa de la multiplicación
$a \cdot 1 = b \cdot 1$	Definición del recíproco
$a = b$	Propiedad multiplicativa del 1

Página 180. Si $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ fuera igual a $\frac{1}{a+b}$ para un par de números a y b, entonces tendríamos $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a + b \neq 0$, y

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}.$$

Si se multiplican ambos miembros de esta ecuación por $ab(a + b)$, se obtiene

$$b(a + b) + a(a + b) = ab$$
$$ab + b^2 + a^2 + ab = ab$$
$$a^2 + ab + b^2 = 0.$$

Podemos ahora "completar el cuadrado" para obtener

$$(a^2 + ab + \tfrac{1}{4}b^2) + \tfrac{3}{4}b^2 = 0$$
$$(a + \tfrac{1}{2}b)^2 + \tfrac{3}{4}b^2 = 0.$$

Puesto que $x^2 = x \cdot x \geq 0$ para todos los números reales x, y como la suma de dos números no negativos es no negativa, debemos tener $a + \frac{1}{2}b = 0$, y $b = 0$. Pero $b \neq 0$, y así tenemos una contradicción. Por tanto, no puede haber números reales a y b para los cuales $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$.

Página 181. Demostración del problema 6

$\frac{1}{a(-1)} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{-1}$	$\frac{1}{xy} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}$
$= \frac{1}{a}(-1)$	Definición del recíproco: $(-1)(-1) = 1$
$= (-1)\cdot\frac{1}{a}$	Propiedad conmutativa de la multiplicación
$= -(\frac{1}{a})$	$(-1)x = -x$

"El opuesto de la suma de dos números es la suma de sus opuestos" y "el recíproco del producto de dos números es el producto de sus recíprocos" son enunciados estrechamente paralelos.

Respuestas a los Problemas de repaso; páginas 181-183:

1. Resumen:

Hemos definido el producto de dos números reales a y b como sigue:

Si a y b son ambos negativos o ambos no negativos, entonces $ab = |a|\,|b|$.

Si uno de los números a y b es positivo o cero, y el otro es negativo, entonces $ab = -(|a||b|)$.

De esta definición y de las propiedades de las operaciones con los números de la aritmética, se pueden demostrar las siguientes propiedades de dichas operaciones:

1. Propiedad multiplicativa del 0: Para todo número real a,

$$(a)(0) = 0.$$

2. Propiedad multiplicativa del 1: Para todo número real a,

$$(a)(1) = a.$$

3. Propiedad conmutativa de la multiplicación: Para dos números reales cualesquiera a y b,

$$ab = ba.$$

4. Propiedad asociativa de la multiplicación: Para tres números reales cualesquiera a, b, c,

$$(ab)c = a(bc).$$

5. Propiedad distributiva: Para tres números reales cualesquiera a, b, c,

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Hemos definido un inverso multiplicativo como sigue:

Si c y d son números reales tales que

$$cd = 1,$$

entonces d es un inverso multiplicativo de c.

Hemos convenido en usar el nombre recíproco para el inverso multiplicativo, y en representar el recíproco de cualquier número a por el símbolo "$\frac{1}{a}$".

Hemos demostrado los siguientes teoremas:

1. El número 0 no tiene recíproco.
2. Para cada número real a, distinto de cero, existe solamente un inverso multiplicativo de a.
3. El recíproco de un número positivo es positivo, y el recíproco de un número negativo es negativo.
4. El recíproco del recíproco de un número real a, distinto de cero, es a.
5. Para dos números reales cualesquiera a y b, distintos de cero,

$$\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b} = \frac{1}{ab}.$$

6. Para dos números reales a y b, ab = 0 si y solamente si a = 0 ó b = 0.

Hemos expresado la propiedad multiplicativa de la igualdad así: Para tres números reales cualesquiera a, b, c, si a = b, entonces ac = bc.

2. (a) $3a^2 + (-6a)$
   (b) $x^2 + 7x + 6$
   (c) $a^2 + (-b^2)$
   (d) $m^2 + (-10m) + 25$
   (e) $2x^2 + (-5x) + (-12)$

3. (a) $2a(x + y)$
   (b) $c\left(a + (-b) + 1\right)$
   (c) $(a + b)(cx + y)$
   (d) $5\left(2x^2 + (-3x) + (-1)\right)$
   (e) $3x\left(3x^2 + 2x + (-1)\right)$

4. (a) $\{2\}$
   (b) $\{7\}$
   (c) El conjunto de todos los números reales.
   (d) $\{0\}$
   (e) $\{-1\}$

5. (a) $4a + 3b$
   (b) $4x + (-2b)$
   (c) $(-6a) + 4.6$
   (d) $|x| + |-x|$

*6. (a)

x	-2	-1	0	2
-2	4	2	0	-4
-1	2	1	0	-2
0	0	0	0	0
2	-4	-2	0	4

x	-4	-2	0	1	2	4
-2	8	4	0	-2	-4	-8
-1	4	2	0	-1	-2	-4
0	0	0	0	0	0	0
2	-8	-4	0	2	4	8

$P = \{-8, -4, -2, -1, 0, 2, 4, 8\}$

(b)

+	-2	-1	0	2
-2	-4	-3	-2	0
-1	-3	-2	-1	1
0	-2	-1	0	2
2	0	1	2	4

+	-4	-3	-2	-1	0	1	2	4
-2	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	2
-1	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	3
0	-4	-3	-2	-1	0	1	2	4
2	-2	-1	0	1	2	3	4	6

$R = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 6\}$

7. (a) Si yo pago x dólares, entonces Jaime paga $x + 2$ dólares.

$$x + (x + 2) = 11$$

$$\{4\tfrac{1}{2}\}$$

Jaime paga \$6.50.

(b) Si el primer entero impar es x, el próximo entero impar es $x + 2$.

$$x + (x + 2) = 41$$

$\emptyset$, puesto que el dominio de x es los enteros impares. No hay dos enteros impares consecutivos cuya suma sea 41.

(c) Si el número de yardas del ancho del rectángulo es w, entonces el número de yardas del largo del rectángulo es $w + 27$.

$$2w + 2(w + 27) = 398$$

$$\{86\}$$

El rectángulo tiene 113 yardas de largo y 86 yardas de ancho.

(d) Si la nota que obtuvo Jaime es x, entonces la nota que obtuvo María es x + 14.

$$x + (x + 14) = 170$$

[78]

La nota de Jaime era 78, y la de María era 92.

(e) Si el jornal del padre era x dólares por día, entonces el jornal del hijo era $(\frac{2}{5})x$ dólares por día.

El hijo ganó $2(\frac{2}{5})x$ dólares.

El padre ganó 4x dólares.

$$4x + 2(\frac{2}{5})x = 96$$

[20]

El padre ganaba 20 dólares por día y el hijo ganaba 8 dólares por día.

(f) Si x es el número de cerdos,

4x es el número de patas de cerdos,

x + 16 es el número de pollos,

2(x + 16) es el número de patas de pollos.

$$4x + 2(x + 16) = 74$$

[7]

Había 7 cerdos y 23 pollos.

(g) Si x es el número de aciertos,

x + 10 es el número de fallos.

$$10x + (-5)(x + 10) = -25$$

[5]

Tuvo 5 aciertos.

Capítulo 7

Sugerencias para exámenes.

1. Determina el valor de cada uno de los siguientes cuando x es -3, y es 2, a es -4, y b es $\frac{1}{2}$:

   (a) $2ax + 3by$

   (b) $2ab\left((-x) + y\right)$

   (c) $\left(a + x + (-y)\right)^2$

   (d) $2x + (-a) + (-y^2)$

2. Multiplica los siguientes:

   (a) $(-7)(3x + 4y)$

   (b) $3y\left(y^2 + (-2xy) + x^2\right)$

   (c) $(x + 6)(x + 7)$

   (d) $\left(5x + (-2)\right)(3x + 7)$

   (e) $\left(x + (-4)\right)\left(x^2 + 5x + (-3)\right)$

   (f) $(\frac{1}{2}x^2)(-6xy)$

   (g) $(\frac{1}{2a})(\frac{1}{5a^2b})$

3. Expresa cada uno de los siguientes como un producto indicado:

   (a) $7a + 7b$

   (b) $3m + 15n$

   (c) $4p + (-7px)$

   (d) $xy + (-xy) + (-x)$

   (e) $(-4)a^2 + (-4)x^2$

4. Reduce términos en las siguientes frases:

   (a) $z + 3z$

   (b) $(-15a) + a$

   (c) $4x + (-6y) + 6x + 12y$

   (d) $x + 3y + 7x + (-2y) + 4y$

5. ¿Para qué valores de b no tiene recíproco cada una de las siguientes expresiones?

   (a) $\frac{a}{b}$

   (b) $\frac{2a}{b - 1}$

   (c) $\frac{2a + b}{(b - 1)(b + 1)}$

   (d) $\frac{2a + b}{b^2 + 1}$

   (e) $\frac{2a + b}{b(b + 1)}$

6. Los siguientes enunciados son ciertos para todo a, todo b, y todo c:

   A. $ab = ba$

   B. $(ab)c = a(bc)$

   C. $a(1) = a$

   D. $a(0) = 0$

   E. $(-a)(-b) = ab$

   F. Si $a = b$, entonces $ac = bc$.

   G. $a(b + c) = ab + ac$

   ¿Cuál de los enunciados expresa:

   (a) la propiedad asociativa de la multiplicación?

   (b) la propiedad distributiva?

   (c) la propiedad multiplicativa de la ordenación?

   (d) la propiedad multiplicativa del uno?

7. Determina un número real x que haga cierto cada enunciado abierto:

   (a) $\frac{1}{3}x + (-8) = 4$

   (b) $|-5| + 7 + (-5) + 2x = 0$

   (c) $-\left((-5)x + 7\right) = 5x + (-7)$

   (d) $|x + (-1)| = 4(-3) + (-2)(-8)$

   (e) $2x + 3x = 8 - 3x$

8. (a) Si a y b son números reales, indica la propiedad utilizada en cada paso del desarrollo siguiente:

$$\begin{aligned}(a + b)\left(a + (-b)\right) &= (a + b)a + (a + b)(-b)\\ &= a^2 + ab + a(-b) + (-b^2)\\ &= a^2 + 1ab + a(-1)b + (-b^2)\\ &= a^2 + \left(1 + (-1)\right) ab + (-b^2)\\ &= a^2 + (0)ab + (-b^2)\\ &= a^2 + (-b^2)\end{aligned}$$

(b) Redacta en palabras la propiedad acerca de los números reales a y b expresada en el enunciado

$$(a + b)\big(a + (-b)\big) = a^2 + (-b^2).$$

9. Determina conjuntos de validez para los siguientes enunciados abiertos y dibuja sus gráficas:

(a) $7r + 4 + 3r = (-4r) + 18$

(b) $4(y + 2) + (-6)(y + 3) + (-y) = -4$

(c) $4|x| = 18 + (-2|x|)$

(d) $3\big(x + (-4)\big)\big(x + (-1)\big) = 0$

(e) $x(x + 2) = 0$

10. Escribe un enunciado abierto para cada uno de los problemas siguientes. Determina los conjuntos de validez y contesta las preguntas.

(a) Dos automóviles distantes a 360 millas entre sí, salen el uno hacia el otro a la misma hora y se encuentran seis horas después. Si la velocidad del primer carro es dos veces la del segundo, ¿cuál es la velocidad de cada uno?

(b) El cuádruplo de cierto entero es dos más que el triple de su sucesor. ¿Cuál es el entero?

(c) La longitud del perímetro de un triángulo es 40 pulgadas. El segundo lado tiene 3 pulgadas más que el primero, y el tercer lado tiene una pulgada más que dos veces el primero. Calcula la longitud de cada lado.

Capítulo 8

PROPIEDADES DE LA ORDENACION

Una fuente de información general de este capítulo la encontrarán los maestros en Studies in Mathematics, Volume III, Capítulo 3, sección 3.

8-1. La relación de ordenación para los números reales

Conviene recordar que el punto sobresaliente en este capítulo es la relación de ordenación. (V. las observaciones preliminares sobre el Capítulo 6 de este Comentario.) Al hablar de un par de números dado, podemos cambiar, y con frecuencia así lo hacemos, de "menor que" a "mayor que" y viceversa sin dificultad. Sin embargo, esto tiende a oscurecer la idea de la relación de ordenación y no es admisible cuando estudiamos la relación de ordenación " $<$ " en sí misma. Hacemos hincapié en esta cuestión, porque es matemáticamente importante para el estudiante empezar a pensar en la relación de ordenación y no en la ordenación solamente. Por otra parte, no debe profundizarse la cuestión con los estudiantes. No es esencial que estén capacitados para explicarlo. Si se piensa sobre la relación de ordenación y se tiene el cuidado de presentarla correctamente, entonces el estudiante aprenderá automáticamente a pensar sobre una relación de ordenación como un objeto matemático, más bien que como un modo conveniente de considerar un par de números reales.

Respuestas al Conjunto de problemas 8-1; páginas 186-187:

1. (a) $-\frac{3}{2} < -\frac{4}{3}$

   (b) $-|-7| = -|7|$

   (c) No puede decirse; si c es un número real, entonces exactamente uno de los siguientes es cierto:
   $c < 1, \quad c = 1, \quad 1 < c.$

2. Si $c > 4$ y $4 > 1$, entonces $c > 1$; propiedad transitiva.

3. (a) Cierto
   (b) Cierto
   (c) Cierto
   (d) Cierto para cualquier número real a.

4. (a) Cierto
   (b) Falso
   (c) Falso
   (d) El conjunto de validez consiste en todos los números positivos.

5. (a) Falso
   (b) Falso
   (c) Cierto
   (d) Cierto

6. (a) $3 < 3 + x$
   $0 < x$

   Tres posibles descripciones del conjunto de validez son:
   El conjunto de números x tales que $0 < x$.
   Todos los números mayores que 0.
   El conjunto de todos los números positivos.

   (b) $3 + x < 3$
   $x < 0$

   El conjunto de todos los números negativos.

7. (a) $\{1\}$
   (b) $\{5\}$
   (c) $\{1\}$
   (d) $\{\pi + (-\sqrt{2})\}$

8. (a) El conjunto de todos los números menores que 3.
   (b) El conjunto de todos los números mayores que -3 y menores que 3.
   (c) Todos los números reales.
   (d) El conjunto de todos los números mayores que -3.

8-2. Propiedad aditiva de la ordenación

La [illegible] está naturalmente relacionada con la ordenación por el hecho de que $x + y$ se obtiene en la recta numérica mediante traslación hacia la derecha desde x, si y es positivo, y hacia la izquierda, si y es negativo. Sin embargo, ésta no es la propiedad que deseamos destacar. La propiedad considerada como fundamental es la propiedad aditiva de la ordenación. Es fácil demostrar que la primera propiedad antes mencionada se deduce de la fundamental. Por ejemplo, si $a = 0$, entonces la condición $a < b$ dice que b es positivo. La propiedad aditiva nos da $c < b + c$, lo cual dice que, si b es positivo, entonces $b + c$ está a la derecha de c, etc.

Página 188. $(-3) + (-3) < (-\frac{1}{2}) + (-3)$ es un enunciado cierto. Si c tiene sucesivamente los valores $\frac{1}{2}$, 0, -7, el enunciado es cierto en cada caso. Una exposición de la propiedad aditiva de la ordenación en palabras es: "Si un número es menor que otro, y a cada uno de ellos se le añade el mismo número, la ordenación se mantiene inalterada". La propiedad correspondiente de la igualdad es la propiedad aditiva de la igualdad.

Respuestas al Conjunto de problemas 8-2a; páginas 188-190:

1. (a) Cierto (c) Cierto
   (b) Cierto (d) Cierto

2. Si a, b, c, son números reales, y si $a \leq b$, entonces
$$a + c \leq b + c.$$
Si a, b, c, son números reales, y si $a > b$, entonces
$$a + c > b + c.$$
Si a, b, c, son números reales, y si $a \geq b$, entonces
$$a + c \geq b + c.$$

3. Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$. Propiedad aditiva de la ordenación
   Si $c < d$, entonces $b + c < b + d$. Propiedad aditiva de la ordenación
   Por lo tanto, $a + c < b + d$. Propiedad transitiva

4. En el ejemplo siguiente, llámese la atención de los estudiantes hacia el hecho de que no podríamos verificar el conjunto de validez sustituyendo números en el enunciado original, sino que en lugar de esto, tenemos que verificar el conjunto de validez invirtiendo los pasos que dimos para obtenerlo. Los estudiantes han visto antes esta inversión, en el Capítulo 7, sección 7-7, en relación con las ecuaciones. Entonces aprendimos a reconocer que ciertas ecuaciones son equivalentes, porque sabemos que los pasos dados para obtener una de otra son invertibles. Pronto (en la página 198) aplicaremos a inecuaciones este mismo procedimiento de

reconocer enunciados equivalentes por el hecho de que los pasos intermedios son invertibles.

(a) Si $3 + x < (-4)$ es cierto para algún x,
entonces $x < (-4) + (-3)$ es cierto para el mismo x,
y $x < -7$ es cierto para el mismo x.
Por consiguiente, si x es un número que hace cierto el enunciado original, entonces $x < -7$.
Si $x < -7$ es cierto para algún x, entonces
$3 + x < (-7) + 3$ es cierto para el mismo x,
y $3 + x < (-4)$ es cierto para el mismo x.
Por lo tanto, el conjunto de validez es el conjunto de todos los números reales menores que -7.

Los estudiantes deben seguir el método indicado en (a) para determinar los conjuntos de validez en este problema. Los conjuntos de validez son los siguientes:

(b) El conjunto de todos los números mayores que -1.

(c) El conjunto de todos los x tales que $x < -5$.

(d) El conjunto de todos los números mayores que $\frac{4}{3}$.

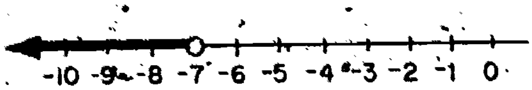
(e) El conjunto de todos los x tales que $x \geq \frac{7}{3}$.

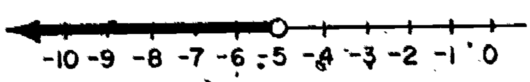
(f) El conjunto de todos los números mayores que 4.

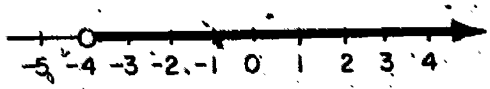
(g) El conjunto de todos los x tales que $-7 < x$.

(h) El conjunto de todos los números mayores que -4.

(i) El conjunto de todos los x tales que $x \leq -1$.

5. (a) 

(c) 

(h) 

6. Teorema: Si $a < b$, entonces $-b < -a$.

Demostración: Si $a < b$, — Suposición

entonces $a + \left((-a) + (-b)\right) < b + \left((-a) + (-b)\right)$ — Propiedad aditiva de la ordenación

$\left(a + (-a)\right) + (-b) < \left(b + (-b)\right) + (-a)$ — Propiedades conmutativa y asociativa de la suma

$0 + (-b) < 0 + (-a)$ — Propiedad aditiva de los opuestos

$-b < -a$ — Propiedad aditiva del cero

7. Teorema: Si $0 < y$, entonces $x < x + y$.

Demostración: Para todo a, b, c, si $a < b$, entonces $a + c < b + c$. — Propiedad aditiva de la ordenación

Sea $a = 0$, $b = y$, $c = x$.

Si $0 < y$, entonces $0 + x < y + x$.

Si $0 < y$, entonces $x < y + x$. — Propiedad aditiva del cero.

Si $0 < y$, entonces $x < x + y$. — Propiedad conmutativa de la suma

Página 190. Podemos escribir la propiedad aditiva de la ordenación así: "Si $a < b$, entonces $c + a < c + b$" por la propiedad conmutativa de la suma.

Página 191. El enunciado $4 = (-2) + 6$ puede traducirse a este otro enunciado que implica ordenación: $(-2) < 4$.

El número y tal que $7 = 5 + y$ es 2, determinado por la propiedad aditiva de la igualdad. De la misma manera, se encuentra que el conjunto de validez de $-3 = -6 + y$ consiste en el 3, otra vez un número positivo.

Página 192. Las razones para el teorema 8-2b son las siguientes:

Si $y = z + (-x)$,

entonces $x + y = x + (z + (-x))$ — Propiedad aditiva de la igualdad

$= (x + (-x)) + z$. — Propiedades asociativa y conmutativa de la suma

En el siguiente párrafo, y es negativo, y es 0, ó y es positivo. Exactamente uno de éstos es cierto, por la propiedad de comparación.

Respuestas al Conjunto de problemas 8-2b; páginas 193-195:

1. (a) $-24 < -15$, $-24 + 9 = -15$, $b = 9$

   (b) $-\frac{5}{4} < \frac{63}{4}$, $-\frac{5}{4} + \frac{68}{4} = \frac{63}{4}$, $b = \frac{68}{4} = 17$

   (c) $\frac{7}{10} < \frac{6}{5}$, $\frac{7}{10} + \frac{5}{10} = \frac{6}{5}$, $b = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

   (d) $-\frac{1}{2} < \frac{1}{3}$, $-\frac{3}{6} + \frac{5}{6} = \frac{2}{6}$, $b = \frac{5}{6}$

   (e) $-345 < -254$, $-345 + 91 = -254$, $b = 91$

   (f) $-\frac{33}{13} < -\frac{98}{39}$, $-\frac{99}{39} + \frac{1}{39} = -\frac{98}{39}$, $b = \frac{1}{39}$

   (g) $-0.21 < 1.47$, $-0.21 + 1.68 = 1.47$, $b = 1.68$

   (h) $\left(\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{4}\right) < \left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right)$, $\left(-\frac{225}{120}\right) + \left(\frac{161}{120}\right) = \left(-\frac{64}{120}\right)$, $b = \frac{161}{120}$

2. Debemos demostrar que hay un número b tal que $c = a + b$, y luego demostrar que b es negativo.

   Si b es $c + (-a)$,
   entonces $b = c + (-a)$.

$a + b = a + (c + (-a))$	Propiedad aditiva de la igualdad
$= (a + (-a)) + c$	Propiedades conmutativa y asociativa de la suma
$= 0 + c$	Propiedad aditiva de los opuestos
$a + b = c$	Propiedad aditiva del cero

   Por lo tanto, hay un número b tal que $c = a + b$.

   Exactamente uno de los siguientes es cierto:
   $0 < b$; $b = 0$, ó $b < 0$.

   Si $0 < b$,
   entonces $a < a + b$. Propiedad aditiva de la ordenación

   Luego, $a < c$, puesto que $c = a + b$.
   Pero $a < c$ y $c < a$ es una contradicción.

Si $b = 0$,
entonces $a + b = a$. Propiedad aditiva del cero
Luego, $c = a$, puesto que $c = a + b$.
Pero $c = a$ y $c < a$ es una contradicción.
Por lo tanto, $b < 0$.

3. (a) Cierto (d) Cierto

   (b) Falso (e) Cierto

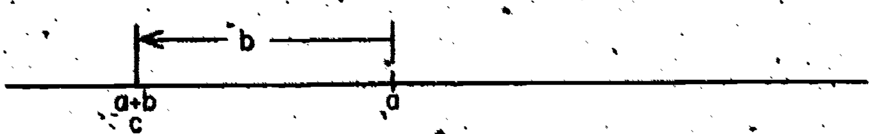
   (c) Cierto (f) Cierto

4. (a) $5 < 13$, $8 < 13$, (también $5 < 8$)

   (b) $(-3) < (-1)$, $(-1) < 2$, $(-3) < 2$

   (c) $5 + 2 = 7$, $5 = 7 + (-2)$

5.



Sitúa a. Puesto que $b < 0$, nos movemos $|b|$ unidades a la izquierda para situar $a + b$. c es otro nombre para $a + b$. c está a la izquierda de a, así que $c < a$.

6. (a) Falso (b) Cierto (c) Cierto

7. (a) $|3 + 4| = |7| = 7$
   $|3| + |4| = 3 + 4 = 7$ De modo que, $|3 + 4| \leq |3| + |4|$ es un enunciado cierto.

   (b) $|(-3) + 4| = |1| = 1$
   $|-3| + |4| = 3 + 4 = 7$ De modo que, $|(-3) + 4| \leq |-3| + |4|$ es un enunciado cierto.

   (c) $|(-3) + (-4)| = |-7| = 7$
   $|-3| + |-4| = 3 + 4 = 7$ De modo que, $|(-3) + (-4)| \leq |-3| + |-4|$ es un enunciado cierto.

   (d) Para dos números reales cualesquiera a y b,

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

8. Para dos números reales cualesquiera a y b,

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \quad T$$

9. (a) Si x es el número,
entonces $x + 5 < 2x$.
Si $x + 5 < 2x$ es cierto para algún x,
entonces $5 < x$ es cierto para el mismo x.
Por consiguiente, si x es un número que hace cierto el enunciado original, entonces $5 < x$.
Si $5 < x$,
entonces $x + 5 < 2x$ es cierto para el mismo x.
Por lo tanto, el conjunto de validez es el conjunto de todos los números mayores que 5.

(b) Si x es el número de dólares que Manuel pagaría, entonces $x + 130$ es el número de dólares que pagaría José, y $x + x + 130 \leq 380$.

El conjunto de validez es el conjunto de todos los números menores que o iguales a 125.
Así, pagaría Manuel no más de \$125.

(c) Si n es el número,
entonces $6n + 3 > 7 + 5n$.
El conjunto de validez es el conjunto de todos los números mayores que 4.
El número es cualquier número mayor que 4.

(d) Si y es el número de estudiantes en la clase,
entonces $2y \geq y + 26$.
El conjunto de validez es el conjunto de todos los números mayores que o iguales a 26.
El número de estudiantes en la clase es 26 por lo menos.

*(e) Si s es la nota que el estudiante debe obtener en el tercer examen, entonces

$$\frac{82 + 91 + s}{3} \geq 90,$$

y $$82 + 91 + s \geq 3\ (90).$$

El conjunto de validez es el conjunto de todos los números mayores que o iguales a 97.
El estudiante debe obtener una nota de por lo menos 97 en el tercer examen.

En este problema puede plantearse una cuestión sobre el dominio de s. Algunos estudiantes alegarán que se trata de un dominio tal como $0 \leq s \leq 100$; otros pueden asegurar que s puede ser un número cualquiera, y algunos pueden preguntar: "¿Qué hay sobre 30π?", etc. Se presenta una buena oportunidad aquí para llamar la atención sobre la importancia de pensar acerca del dominio de la variable.

*(f) Si n es el número de años de edad que tiene Raúl, entonces $n + 5$ es el número de años de edad que tiene Luis, y $n + 5 + n < 23$.
El conjunto de validez es el conjunto de todos los números menores que 9.
Raúl tiene menos de 9 años de edad.

8-3. Propiedad multiplicativa de la ordenación

La propiedad fundamental se da en el teorema 8-3a. La "descubrimos" por inducción, pero puede demostrarse. Esto indica que la propiedad multiplicativa de la ordenación no es independiente de las otras propiedades, pues puede ser deducida de ellas. Procede de la propiedad aditiva de la ordenación por conducto de la propiedad distributiva, la cual une la suma y la multiplicación.

Página 196. Puesto que $\frac{1}{4} < \frac{2}{7}$,

$$\frac{1}{4}(5) < \frac{2}{7}(5) \qquad \text{Si } a < b \text{ y } c > 0, \ ac < bc.$$

y $$\frac{5}{4} < \frac{10}{7}.$$

Análogamente, puesto que $-\frac{5}{6} < -\frac{14}{17}$,

$$\left(-\frac{14}{17}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) < \left(-\frac{5}{6}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) \qquad \text{Si } a < b \text{ y } c < 0, \ bc < ac.$$

y $$\frac{14}{51} < \frac{5}{18}.$$

De nuevo, puesto que $\frac{5}{3} < \frac{7}{4}$,

$$\frac{7}{4}\left(-\frac{1}{4}\right) < \frac{5}{3}\left(-\frac{1}{4}\right) \qquad \text{Si } a < b \text{ y } c < 0, \ bc < ac.$$

y $$-\frac{7}{16} < -\frac{5}{12}.$$

Página 196. La justificación de los pasos efectuados en la demostración del primer caso del teorema 8-3a es la siguiente:

1. Si x y z son dos números reales tales que $x < z$, entonces existe un número positivo y tal que $z = x + y$.
2. Propiedad multiplicativa de la igualdad
3. Propiedad distributiva
4. El producto de dos números positivos es positivo.
5. Si $z = x + y$, siendo y un número positivo, entonces $x < z$.

Los estudiantes pueden observar que éste es un ejemplo de una demostración hecha traduciendo alternadamente de enunciados acerca de la ordenación a enunciados acerca de la igualdad.

Páginas 197-198. La propiedad multiplicativa de la ordenación, considerada desde el punto de vista de los números más bien que de la relación de la ordenación, podría expresarse así: Si un número es menor que otro, y ambos se multiplican por un número positivo, la ordenación permanece inalterada; si un número es menor que otro número, y ambos se multiplican por un número negativo, la ordenación se invierte.

La justificación de los pasos efectuados en la demostración del teorema 8-3b es como sigue:

Si $x > 0$,

$(x)(x) > 0(x)$. Propiedad multiplicativa de la ordenación (Si $a < b$, entonces $ac < bc$, si c es positivo.)

Si $x < 0$,

$(x)(x) > (0)(x)$. Propiedad multiplicativa de la ordenación (Si $a < b$, entonces $bc < ac$, si c es negativo.)

Si $x = 0$, $x^2 = 0$; y si $x \neq 0$, $x^2 > 0$.

Por lo tanto, para todos los números reales x, $x^2 \geq 0$.

Página 198. A los miembros de $-8x < -8$ debemos añadir $5x + 2$ para obtener el enunciado original $(-3x) + 2 < 5x+(-6)$.

Multiplicando los miembros de la desigualdad $1 < x$ por -8, obtenemos el enunciado $-8x < -8$.

Respuestas al Conjunto de problemas 8-3; páginas 198-200:

1. (a) El conjunto de todos los números mayores que 4.

   (b) El conjunto de todos los números menores que 1.

   (c) El conjunto de todos los x tales que $x < -4$.

   (d) El conjunto de todos los números mayores que $\frac{4}{3}$.

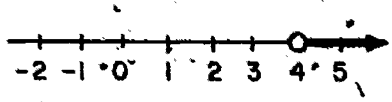
   (e) El conjunto de todos los números negativos.

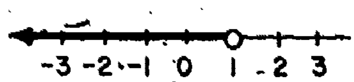
   (f) El conjunto de todos los x tales que $x > \frac{3}{2}$.

   (g) El conjunto de todos los números menores que $\frac{17}{6}$.

   (h) El conjunto de todos los números mayores que $-\frac{4}{5}$.

   (i) El conjunto de todos los números mayores que 2.

2. (a) 

   (b) 

3. (a) Si Sara tiene b libros, entonces Susana tiene $b + 16$ libros, y $b + 16 + b > 28$.

   El conjunto de validez consiste en todos los números mayores que 6, así que Sara tiene por lo menos 6 libros.

   (b) Si se siembran x bulbos, entonces

$$15 < \frac{5}{8}x \quad y \quad 15 > \frac{3}{8}x.$$

   El conjunto de validez consiste en todos los enteros entre 24 y 40.

4. Si $a < b$, entonces $a = b + e$, donde $e < 0$. (V. el Conjunto de problemas 8-2b, problema 2)

Entonces, si $c < 0$, $ac = (b + e)c$, — Propiedad multiplicativa de la ordenación

o sea $ac = bc + ec$. — Propiedad distributiva

Si $c < 0$, entonces ec es positivo, y $bc < ac$. — Si $z = x + y$, siendo y positivo, entonces $x < z$.

*5. Si $c < 0$, entonces $0 < (-c)$, y $(-c)$ es positivo.
Si $a < b$, entonces $a(-c) < b(-c)$,

$$-(ac) < -(bc),$$

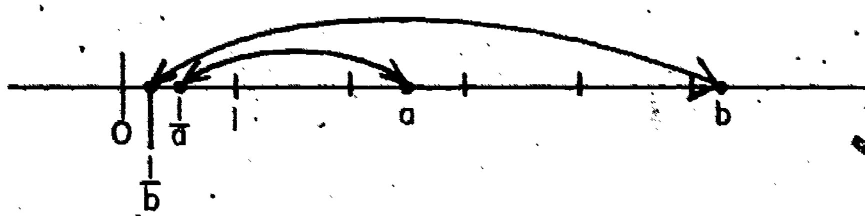
y $bc < ac$. — Si $a < b$, entonces $-b < -a$.

6. Si $a < b$, $a > 0$ y $b > 0$,
entonces $a(\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}) < b(\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b})$.

$$(a\cdot\frac{1}{a})(\frac{1}{b}) < (b\cdot\frac{1}{b})(\frac{1}{a})$$

$$(1)(\frac{1}{b}) < (1)(\frac{1}{a})$$

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$



7. Si $a < b$, donde $a < 0$ y $b < 0$,
entonces $(\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b})$ es positivo.

$$a(\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}) < b(\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b})$$

$$(a\cdot\frac{1}{a})(\frac{1}{b}) < (b\cdot\frac{1}{b})(\frac{1}{a})$$

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

La relación se mantiene cuando ambos a y b son negativos.

8. Si $a < b$, $a < 0$, $b > 0$, entonces $\frac{1}{a} < 0$ y $\frac{1}{b} > 0$, por lo tanto, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, por la propiedad transitiva.

   La relación $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ no se mantiene si $a < 0$ y $b > 0$.

   Esto puede ser también refutado mediante un "contraejemplo":

   Si $a = -2$ y $b = 2$, entonces $\frac{1}{a} = -\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{b} = \frac{1}{2}$.

   Puesto que $-\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$, la relación es falsa.

9. La propiedad aditiva de la ordenación: Si a, b, y c son números reales, y si $a > b$, entonces, $a + c > b + c$.
   Propiedad multiplicativa de la ordenación: Si a, b y c son números reales, y si $a > b$, entonces

   $ac > bc$, si c es positivo;

   $bc > ac$, si c es negativo.

10. Si $a > 0$, $b > 0$ y $a < b$, entonces por la propiedad multiplicativa de la ordenación, tenemos

    $a \cdot a < a \cdot b$ y $a \cdot b < b \cdot b$.

    Si $a^2 < ab$ y $ab < b^2$,

    entonces $a^2 < b^2$, por la propiedad transitiva de la ordenación.

8-4. Las propiedades fundamentales de los números reales

Esta sección contiene algunas de las ideas matemáticas más importantes de todo el curso. Hasta ahora hemos dado por supuesto que los números reales son objetos con los cuales estamos familiarizados y nos hemos ocupado de "descubrir" (y a veces demostrar) propiedades acerca de ellos. En esta sección tratamos de desviar la manera de pensar de los estudiantes acerca de los números reales de un punto de vista primariamente <u>inductivo</u> a uno <u>deductivo</u>. El punto de vista deductivo ha sido, por supuesto, predominante en nuestra mente desde el principio y ha tenido una gran influencia en nuestro estudio de los números reales. De este modo hemos trabajado consistentemente hasta lograr las quince propiedades fundamentales mencionadas aquí. Ahora que la lista está completa (al menos para nuestros fines), podemos revelar al estudiante el "secreto". La idea que debe ponerse de manifiesto aquí al estudiante es que pudimos haber empezado con estas propiedades considerándolas, no como una <u>descripción</u>, sino como una definición del sistema de los números reales. Así "número real", "suma", "multiplicación" y "relación de ordenación" se convierten en términos indefinidos, las propiedades fundamentales se convierten en axiomas (de un cuerpo ordenado) y todas las demás propiedades, como consecuencias de los axiomas, se convierten en teoremas. Este es el punto de vista axiomático que ya es habitual en la matemática más avanzada.

A pesar de la considerable preparación que ha precedido al cambio en el punto de vista indicado aquí, es obvio que la mayoría de los estudiantes no podrán todavía apreciar por completo su significado. No tenemos, sin embargo, la intención de demostrarlo todo de aquí en adelante, pero seguiremos, como hasta ahora, "descubriendo" propiedades y dando ocasionalmente una demostración sencilla. El cambio principal consiste en nuestra actitud hacia las propiedades descubiertas, a saber, que podrían demostrarse, si tuviéramos el tiempo y la experiencia para hacerlo.

Los estudiantes más aprovechados captarán la idea fácilmente y esperamos que la mayoría de los alumnos, al terminar el curso, podrán pensar deductivamente en el sistema de los números reales. El curso de geometría tradicional, tanto como el curso de geometría del SMSG, requiere un enfoque deductivo de la geometría. El curso de geometría del SMSG supone también que los números reales han de darse axiomáticamente. Por lo tanto, el punto de vista deductivo es importante, no sólo para la matemática avanzada, sino también para cursos posteriores de la escuela secundaria.

Página 202. La propiedad fundamental que falta, y que nos permitiría obtener todo lo necesario acerca de los números reales, se llama el axioma de completitud. Puede enunciarse de varios modos, y uno de los más convenientes es el que se basa en el concepto de "extremo superior" o "cota superior mínima". Antes de expresarlo, definamos primero lo que se entiende por una "cota superior" de un conjunto:

Sea S un conjunto de números reales, y b un número real tal que $s \leq b$ para todo s perteneciente a S. Entonces b se llama una "cota superior" de S. Si no existe una cota superior de S que sea menor que b, entonces b se llama una cota superior mínima o extremo superior de S.

Podemos ahora enunciar el

Axioma de completitud. Si S es cualquier conjunto de números reales para el cual hay una cota superior, entonces existe un extremo superior de S.

El axioma de completitud se necesita, por ejemplo, para demostrar la existencia de $\sqrt{2}$. Con otras palabras, no se puede demostrar, usando sólo las quince propiedades enunciadas anteriormente, que existe un número real a para el cual $a^2 = 2$. De hecho, el axioma de completitud se necesita para demostrar la existencia de cualquier número irracional. Para una discusión más detallada de estas ideas, véase Studies in Mathematics, Volume III, Capítulo 5.

Respuestas a los problemas de repaso, páginas 205-208:

1. (a) $-100 < -99$ (d) $\frac{6}{7} > \frac{5}{8}$
   (b) $0.2 > 0.1$ (e) $3 \cdot 4 - 4 > 3(4-4)$
   (c) $|-3| < |-7|$ (f) $x^2 + 1 > 0$

2. (a) Cierto (d) Falso
   (b) Falso (e) Falso
   (c) Cierto (f) Cierto

3. (a) No equivalentes (d) Equivalentes
   (b) Equivalentes (e) No equivalentes
   (c) Equivalentes (f) No equivalentes

4. (a) Positivo (d) Negativo
   (b) Positivo (e) Positivo
   (c) Negativo (f) Positivo

5. (a) El conjunto de todos los números menores que (-5).
   (b) El conjunto de todos los números mayores que (-1).
   (c) El conjunto de todos los números mayores que (-6).
   (d) El conjunto de todos los números menores que (-3).
   (e) El conjunto de todos los números menores que o iguales a 91.
   (f) El conjunto vacío.

6. (a) El conjunto de todos los números mayores que 2.

   (b) $\{2\}$

   (c) El conjunto de todos los números reales negativos.

   (d) El conjunto de todos los números reales, excepto el cero.

   (e) El conjunto de todos los números no negativos menores que 90.

   (f) $\emptyset$

7. (a) $\{2\}$

   (b) $\{-1\}$

   (c) $\{-2\}$

   (d) $\emptyset$

   (e) El conjunto de los enteros menores que -2.

   (f) El conjunto de los enteros mayores que -1.

8. (a) $\{\frac{5}{3}\}$

   (b) $\{2\}$

   (c) $\{\frac{2}{3}\}$

   (d) $\{-1\}$

   (e) $\{0\}$

   (f) $\{-\frac{7}{3}\}$

9. (a) $\{-12\}$

   (b) $\{-3\}$

   (c) $\{0\}$

   (d) $\{0\}$

   (e) El conjunto de los números reales.

   (f) $\{-\frac{5}{6}\}$

10. Si A es el número de unidades cuadradas del área,
$$24 \leq A < 28.$$

11. Si A es el número de unidades cuadradas del área,
$$24 \leq A < 35.$$

*12. Si A es el número de unidades cuadradas del área,
$$25.5225 \leq A < 26.5625.$$

13. (a) Si p es el número de plantas al comienzo del segundo año,
$$p > \frac{3}{4}(240) \quad \text{y} \quad p < \frac{5}{6}(240);$$
es decir, $180 < p < 200.$

Si n es el número de semillas al final del segundo año,

$$n > (180)(240) \text{ y } n < (200)(240);$$

es decir, $43,200 < n < 48,000$.

(b) Si s es el número de semillas al final del segundo año,

$$s > (180)(230) \quad \text{y} \quad s < (200)(250);$$

es decir, $41,400 < s < 50,000$.

14. (a) Si el lado de un cuadrado tiene x pulgadas de largo, entonces el lado del triángulo tiene $x + 3.5$ pulgadas de largo, y $4x = 3(x + 3.5)$.

La longitud del lado del cuadrado es 10.5 pulgadas.

(b) Si la velocidad de la corriente es x millas por hora, entonces la velocidad del bote a favor de la corriente es $x + 10$ millas por hora, y

$$x + 10 \leq 25.$$

La velocidad de la corriente es menor que o igual a 15 millas por hora.

(c) Si x es el número de horas que emplea en el trabajo, entonces

$$3 \leq x \leq 5.$$

María puede esperar que el trabajo le ocupe de 3 a 5 horas.

(d) Si x es el número de horas que Jaime debe trabajar,

$$1.5\,x \geq 75.$$

Jaime debe trabajar por lo menos 50 horas.

Capítulo 8

Sugerencias para exámenes

1. Determina los conjuntos de validez de los siguientes enunciados abiertos y dibuja sus gráficas:

   (a) $(-x) + 5 \leq (-8) + |-8|$

   (b) $\frac{3}{2}x + (-3) > x + (-4)$

   (c) $(-7) + (-y) < \frac{3}{7} + (-\frac{3}{7})$

   (d) $37 + (-6r) + 7 > 9r + (-7r) + 8 + (-2r)$

   (e) $5n + (-3) > 2n + 9$

   (f) $4|x + (-3)| > 12$

2. Si p, q, t son números reales, y $p < q$, ¿cuáles de los siguientes enunciados son ciertos?

   (a) $p + t < q + t$, si $t > 0$

   (b) $p + t > q + t$, si $t < 0$

   (c) $pt < qt$, si $t > 0$

   (d) $pt > qt$, si $t < 0$

   (e) $\frac{1}{p} < \frac{1}{q}$

3. Si n es un número no negativo y x es un número no positivo, ¿cuáles de los siguientes enunciados son ciertos?

   (a) $x \leq 0$

   (b) $n \nless x$

   (c) $n \geq 0$

   (d) $x \leq n$

   (e) $x \ngtr 0$

   (f) $n > x$

4. Sabemos que el enunciado "$4 < 7$" es cierto. ¿Qué enunciados ciertos resultan cuando ambos números son afectados como sigue?

   (a) aumentados en 5

   (b) disminuidos en 5

   (c) multiplicados por 5

   (d) multiplicados por (-5)

   (e) multiplicados por 0

5. Escribe un enunciado abierto para cada uno de los siguientes problemas. Expresa los conjuntos de validez y contesta las preguntas.

   (a) Tomás tiene \$15 más que Guillermo. Después que Tomás gaste \$3 en comidas, los dos muchachos juntos tendrán por lo menos \$60. ¿Cuánto dinero tiene Guillermo?

   (b) Si se añade 13 a un número y la suma se multiplica por 2, el producto es más de 76. ¿Cuál es el número?

   (c) Tomás trabaja a razón de p dólares por día. Después de trabajar 5 días recoge su paga y gasta \$6 de ella. Si le quedan entonces más de \$20, ¿cuánto ganaba por día?

   (d) Un agricultor descubrió que por lo menos el 70% de una cierta clase de semilla se desarrollaba en nuevas plantas. Si tiene 245 plantas, ¿cuántas semillas sembró?

6. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son ciertos para todo a y todo b?

   (a) Si $a + 2 = b$, entonces $b < a$.

   (b) Si $a + (-3) = b$, entonces $b < a$.

   (c) Si $(a + 5) + (-2) = b + 5$, entonces $b < a$.

   (d) Si $a < 4$ y $4 > b$, entonces $a < b$.

   (e) Si $a + 2 < 7$ y $b + 2 > 7$, entonces $a < b$.

7. Dados $\frac{7}{9}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ y n. En cada parte de este problema, háganse tantos enunciados como se puedan acerca de n y los números dados, usando el símbolo "$<$", si se sabe que:

   (a) $n < \frac{7}{9}$ (b) $n < \frac{2}{3}$ (c) $n < \frac{3}{4}$

8. Un hombre tiene 3 muestras de mineral, cada una de ellas con el mismo volumen. La muestra de plomo tiene más peso que la de hierro. La muestra de oro tiene más peso que la de plomo. ¿Cuál es la muestra de mineral más pesada, la de oro, o la de hierro? ¿Qué propiedad de los números reales se ilustra en este caso?

Capítulo 9

LA RESTA Y LA DIVISION DE NUMEROS ENTEROS

El final del Capítulo 8 fue la culminación de nuestro estudio de los números reales. Allí describimos el sistema de los números reales como un conjunto de elementos (números reales) para los cuales se dan dos operaciones binarias que se supone satisfacen una lista de propiedades fundamentales (axiomas). Las dos operaciones son la adición o suma, y la multiplicación. Así, toda el álgebra podría desarrollarse sin siquiera mencionar la resta (o sustracción) y la división. Sin embargo, es conveniente disponer de dichas operaciones, aun cuando no sea más que por comodidad en la escritura. Evidentemente, estas operaciones deben definirse directamente en términos de las operaciones fundamentales de suma y multiplicación.

Hay dos maneras equivalentes de definir la resta, y cualquiera de ellas podría utilizarse aquí. Son:

(1) $a - b = a + (-b)$

(2) $a - b$ es la solución de la ecuación $a = b + x$.

Los autores de este libro escogieron la primera de éstas, porque se adapta más rápidamente al punto de vista de que la resta es una especie de operación inversa de la suma ya conocida para los números de la aritmética, y que debe extenderse a todos los números reales. De ese modo, sólo tenemos que identificar la resta de la aritmética con $a + (-b)$ para justificar la definición para todos los números reales. Esta definición también se apoya en el trabajo hecho previamente con el inverso aditivo, que es importante por sí mismo, y encaja muy bien con la representación de la suma y la resta en la recta numérica. Véase el teorema 9-1 en el cual se demuestra que las dos definiciones son equivalentes.

Hay también dos maneras de definir la división:

(3) $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$

(4) $\frac{a}{b}$ es la solución de la ecuación $a = bx$, $b \neq 0$.

En este caso también se escogió el primer método por su semejanza con la definición escogida de la resta, y porque destaca el inverso multiplicativo. Debería también mencionarse que en estas definiciones las diversas propiedades de la resta y de la división surgen fácilmente de las primeras propiedades de la suma y la multiplicación.

El segundo método de definir la resta y la división se basa en la "solución de ecuaciones". Esto tiene alguna ventaja cuando el objetivo es justificar extensiones del sistema numérico al exigir que ciertas ecuaciones simples tengan siempre soluciones. Por ejemplo, la ecuación $a = b + x$ no siempre tiene una solución en enteros positivos (aun cuando a y b sean enteros positivos), pero siempre tiene una solución cuando el sistema se extiende para incluir los enteros negativos. De igual manera, la ecuación $a = bx$ ($b \neq 0$) no siempre tiene una solución en enteros (aun cuando a y b sean enteros), pero tiene siempre una solución cuando el sistema se extiende para incluir los números racionales. En cursos posteriores, la introducción de los números complejos está motivada por la necesidad de que $x^2 + a = 0$ (en particular, $x^2 + 1 = 0$) tenga una solución para todo a.

Una vez que se ha demostrado la equivalencia de estas dos maneras de definir la resta y la división (V. los teoremas 9-1, 9-4), quedamos en libertad de usar la más apropiada para el problema que se esté considerando. Se notará que nos hemos aprovechado de esta libertad en muchos sitios.

Esto se le justifica al estudiante proponiéndole que describa la resta de números de la aritmética en términos de lo que debe añadirse al más pequeño para obtener el mayor. Cuando se establece que debemos añadir el opuesto del menor, inmediatamente tomamos esto como la definición de la resta para <u>todos</u> los números reales. Una motivación parecida nos lleva a la definición de la división.

Se encontrarán referencias a la resta y a la división en <u>Studies in Mathematics</u>, <u>Volume III</u>, páginas 3.11 - 3.14.

9-1. <u>Definición de la resta</u>

Suponemos que el estudiante está familiarizado en aritmética con el restar b de a averiguando cuánto debe agregarse a b para obtener a. De esto, nuestro conocimiento sobre ecuaciones equivalentes rápidamente nos lleva a sumar el opuesto de b a a.

Esperamos que la exposición presentada ayudará al estudiante que ha estado restando por el sistema de "quitar" en la transición a un punto de vista aditivo.

<u>Página 210</u>. $(-5) - 2 = (-5) + (-2) = -7$

$5 - (-2) = 5 + 2 = 7$

$(-2) - (-5) = (-2) + 5 = 3$

$(-5) - (-2) = (-5) + 2 = -3$

Leemos "5 - (-2)" como "cinco menos el opuesto de 2". El primer "-" indica resta; el segundo "-" significa "el opuesto de". (Desde luego, en este caso el segundo pudo también leerse "negativo 2". Sin embargo, si interviene una variable, el "-" deberá leerse "el opuesto de".

Queremos que nuestros estudiantes puedan pronto al considerar la diferencia a - b, pensarla como una suma, la suma de a y (-b). Esto se justifica por nuestra definición de la resta.

Sin duda se habrá notado que no usamos la palabra "signo" para los símbolos "-" o "+". Llegamos a la conclusión de que realmente no necesitamos la palabra, y puesto que su mal uso en el pasado ha producido considerable incomprensión (en casos tales como "al tomar el valor absoluto de un número quitándole su signo"), preferimos no usar "signo" como una palabra.

En relación con esto, debemos mencionar que no escribimos +5 para representar el número cinco. Los números positivos son los números de la aritmética. Por lo tanto, no necesitamos un símbolo nuevo para ellos. De modo que escribimos 5, no +5, y el símbolo "+" lo usamos solamente para indicar suma.

<u>Página 210</u>. El teorema 9-1 demuestra que nuestra definición de la resta es consistente con el punto de vista de que a - b es el número que sumado a b nos da a. De ahora en adelante podemos adoptar cualquiera de estos puntos de vista.

<u>Respuestas al Conjunto de problemas 9-1</u>, páginas 211-212:

1. -3000
2. $\frac{5}{4}$
3. $\frac{3}{2}$
4. -1.262
5. -3.01
6. 5
7. 160
8. -2
9. 15 - (-8) = 23
10. (-25) - (-4) = -21
11. (-9) - 6 = -15
12. (-12) - (-17) = 5
13. 8 - (-5) = 13

14. S es un subconjunto de R y es, en realidad, igual a R. El conjunto de los números reales es cerrado respecto de la resta. El conjunto de los números de la aritmética no es cerrado respecto de la resta. El número 3-5 no es un número de la aritmética y sirve como un contra-ejemplo.

15. El miembro de la izquierda

$a - a = a + (-a)$ por la definición de la resta
$= 0$ por la propiedad aditiva de los opuestos.

16. (a) El estudiante puede aplicar el teorema 9-1;

puesto que $y - 725 = 25$
entonces $y = 725 + 25$
$y = 750.$

Puede también aplicar la propiedad aditiva de la igualdad después de haber usado la definición de la resta:

$$y - 725 = 25$$
$$y + (-725) = 25,$$
que es equivalente a
$$y = 25 + 725$$
$$y = 750$$

El conjunto de validez es {750}.

Si no se ha hecho ya, se podrá aprovechar este momento para permitir a los estudiantes que omitan escribir "que es equivalente a". Sin embargo, debemos cerciorarnos, de vez en cuando, que los estudiantes siguen pensando con claridad acerca de:

(1) efectuar en ambos miembros de un enunciado sólo aquellas operaciones que estén seguros de que han de producir un enunciado equivalente, o
(2) cambiar meramente el nombre de uno u otro miembro del enunciado.

(b) {110}
(c) {-12}
(d) {-4}
(e) {-16.4}
(f) $\{\frac{1}{4}\}$

17. $-3 - 10 = -13$; la nueva temperatura es 13° bajo cero.
18. $7.23 - 15.50 = -8.27$; la cuenta de ella muestra un débito de $8.27.
19. $(-80) - (-50) = -30$

20. $14{,}495 - (-282) = 14{,}777$; la cumbre del Monte Whitney está a 14,777 pies sobre la parte más baja del Valle de la Muerte.

9-2. Propiedades de la resta

Página 212. La resta no es ni conmutativa ni asociativa.

Página 213. La decisión de que $a - b - c$ significará $a + (-b) + (-c)$ es arbitraria. Al mismo tiempo, vemos que es una decisión conveniente. En virtud de ella, podemos considerar la expresión $6a - 2x + b - 3y$ como la suma de $6a$, $-2x$, b y $-3y$. Esperamos que los estudiantes estarán muy pronto listos para pensar en esta forma.

Página 214. Ejemplo 3. Las respuestas a los tres porqués son:

(1) Definición de la resta

(2) $-(ab) = (-a)b$ y $-(-a) = a$

(3) Propiedades asociativa y conmutativa de la suma y la propiedad distributiva

Página 215. La justificación de cada uno de los pasos dados en la resta

$$(6a - 8b + c) - (4a - 2b + 7c)$$

se indica a continuación:

(1) Definición de la resta

(2) $-(x + y + z) = (-x) + (-y) + (-z)$ para todos los números reales x, y, z

(3) $-(-x) = x$ para todos los números reales x

(4) Propiedades asociativa y conmutativa de la suma

(5) $-xy = (-x)y = x$ y $x = 1 \cdot x$ para todos los números reales x, y

(6) Propiedad distributiva

(7) Suma de números reales

(8) $(-x)(y) = -xy$ para dos números reales cualesquiera x e y

(9) Convenio de que $a - b - c$ significa $a + (-b) + (-c)$

Respuestas al Conjunto de problemas 9-2a; páginas 215-216:

1. (a) $-x$ (c) $11x^2$
   (b) $-8a$ (d) $-5xz$

2. (a) $7y$ (c) $-8x^2$

(b) $\frac{3}{2}c$ (d) $-2a^2 + 6a$

3. (a) $-3x + 4y$ (c) $2a$

(b) $5a + 3y$ (d) $x-7$

4. -4

5. $\frac{1}{3}$

6. 1

7. $(3\pi + 9) - (5\pi - 9) = (3\pi + 9) + (-(5\pi - 9))$ Definición de la resta

$= (3\pi + 9) + ((-5\pi) + 9)$ El opuesto de una suma es la suma de los opuestos.

$= (3\pi + (-5\pi)) + (9 + 9)$ Propiedades asociativa y conmutativa de la suma

$= (3\pi + (-5)\pi) + (9 + 9)$ $-ab = (-a)b$

$= (3 + (-5))\pi + (9 + 9)$ Propiedad distributiva

$= (-2)\pi + 18$ Suma de números reales

$= -2\pi + 18$ $-ab = (-a)b$

8. $\sqrt{5} + 10$
9. $2y$
10. $\frac{5}{2}c$
11. $1-x$
12. 0
13. $a - 11b$
14. $4x^2 + x + 15$
15. $-2a + 5b - c - 4$
16. $11x^2 - 10x - 8$
17. $3x^2 + 4x + 8$
18. $-xy + 3yz - 4xz$
19. $10n + 13p - 13a$

20. $(5x - 3y) - (2 + 5x) + (3y - 2)$

$= \big(5x + (-3y)\big) + \big(-(2 + 5x)\big) + \big(3y + (-2)\big)$	Definición de la resta
$= \big(5x + (-3y)\big) + \big((-2) + (-5x)\big) + \big(3y + (-2)\big)$	El opuesto de una suma es la suma de los opuestos.
$= \big(5x + (-5x)\big) + \big((-3y) + 3y\big) + \big((-2) + (-2)\big)$	Propiedades asociativa y conmutativa de la suma
$= 0 + 0 + \big((-2) + (-2)\big)$	Propiedad aditiva de los opuestos
$= -4$	Suma de números reales

21. $(11a + 13b - 7c) - (8a - 5b - 4c) = 3a + 18b - 3c$

22. $(-3x + 12) - (-3x^2 + 5x - 7) = 3x^2 - 8x + 19$

23. $(-9s - 3u) - (3s - 4t + 7u) = -12s - 10u + 4t$

24. Si $a > b$, entonces

$a + (-b) > b + (-b)$	Propiedad aditiva de la ordenación
$a - b > b + (-b)$	Definición de la resta
$a - b > 0.$	Propiedad aditiva de los opuestos

25. Si $(a - b)$ es un número positivo, entonces $a > b$.
Si $(a - b)$ es un número negativo, entonces $a < b$.
Si $(a - b)$ es cero, entonces $a = b$.

26. Si a, b, y c son números reales, y $a > b$, entonces $a - c > b - c$.

Si $a > b$,

$a + (-c) > b + (-c)$	Propiedad aditiva de la ordenación
$a - c > b - c.$	Definición de la resta

<u>Respuestas al Conjunto de problemas 9-2b</u>; páginas 217-218:

1. (a) -8
(b) $2a - 8$
(c) -27
(d) $-5x$
(e) $4x - 12$
(f) $15 - 10x$
(g) $-6x - 6$
(h) $-6x - 6$
(i) $ab - 2a$
(j) $xy + 4y$

2. (a) $3a - 6b + 3c$
   (b) $-7x$
   (c) $a + 2b$
   (d) $8u^2 + 6u - 9$
   (e) $x^2 - y^2$
   (f) $2a^2 - ab - b^2$
   (g) $a - 2b + 5c$
   (h) $-6x^2 - xy$
   (i) $-3ab - ac + 3a$
   (j) $a^2 + 2ab + 6a + b^2 + 6b + 9$

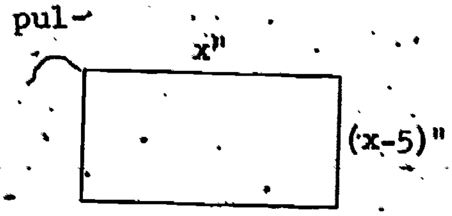
3. (a) Ya los estudiantes probablemente escribirán sólo lo siguiente:

$$3x - 4 = 5$$
$$3x = 9$$
$$x = 3.$$

El conjunto de validez es $\{3\}$.

   (b) $\{1\}$
   (c) $\{2\}$
   (d) Todos los y tales que $y > -\frac{1}{2}$.
   (e) Todos los u tales que $u > -\frac{2}{3}$.
   (f) $\{-\frac{16}{7}\}$
   (g) Todos los x.
   (h) Todos los a.
   (i) Todos los c tales que $c > 3$.

4. (a) Si el rectángulo tiene x pulgadas de largo, entonces tiene $x - 5$ pulgadas de ancho, y



$$2x + 2(x - 5) = 38$$
$$4x - 10 = 38$$
$$x = 12$$

La longitud es 12 pulgadas.

   (b) El número es 51.
   (c) El maestro tiene menos de 23 estudiantes.

Página 217. $(-3)(2x - 5) = (-3)\big(2x + (-5)\big)$ Definición de la resta

$= (-3)(2x) + (-3)(-5)$ Propiedad distributiva

$= \big((-3)(2)\big)x + 15$ Propiedad asociativa y definición de la multiplicación

$= (-6)x + 15$ Definición de la multiplicación

$= -6x + 15$ $(-a)(b) = -(ab)$

En forma abreviada

$$(-3)(2x - 5) = -6x + 15$$

puede parecer que suponemos una propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la sustracción. Realmente, al pensar en $2x - 5$ como la suma de $2x$ y (-5), usamos todavía la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición, y no necesitamos extenderla a la sustracción.

9-3. Lá resta en términos de distancia

Introducimos aquí la relación entre la diferencia de dos números y la distancia entre los puntos asociados en la recta numérica para de nuevo utilizar la recta numérica como ayuda para aclarar nuestras ideas.

Sin embargo, debemos darnos cuenta de que $(a - b)$ como una distancia dirigida y $|a - b|$ como una distancia, son conceptos muy útiles al tratar de la pendiente y la distancia en geometría analítica.

Respuestas ál Conjunto de problemas 9-3; páginas 219-222:

(1) (a) $5 - (-3) = 8$
(b) $|5 - (-3)| = 8$
(c) [illegible] $- 6 = -8$
(d) $|-2 - 6| = 8$
(e) $1 - 5 = -4$
(f) $|1 - 5| = 4$
(g) $-2 - (-8) = 6$
(h) $|-2 - (-8)| = 6$
(i) $0 - 7 = -7$
(j) $|0 - 7| = 7$

(2) (a) $5 - x$
(b) $|5 - x|$
(c) $x + 2$
(d) $|x + 2|$
(e) $-x + 1$
(f) $|-1 + x|$
(g) $x - 0 = x$
(h) $|x - 0| = |x|$

3. (a) $|9 - 2| = |9| - |2|$
   (b) $|2 - 9| > |2| - |9|$
   (c) $|9 - (-2)| > |9| - |-2|$
   (d) $|(-2) - 9| > |-2| - |9|$
   (e) $|(-9) - 2| > |-9| - |2|$
   (f) $|2 - (-9)| > |2| - |-9|$
   (g) $|(-9) - (-2)| = |-9| - |-2|$
   (h) $|(-2) - (-9)| > |-2| - |-9|$

4. Del ejercicio anterior, esperamos que el estudiante inferirá que para dos números reales cualesquiera a y b,

$$|a - b| \geq |a| - |b| ,$$
$$|a - b| \geq |b| - |a| ,$$
$$|a - b| \geq \big||a| - |b|\big| .$$

En caso de que algunos de los estudiantes más aprovechados estén interesados en ver una demostración de estos enunciados, presentamos la siguiente:

El enunciado $|x + y| \leq |x| + |y|$ para dos números reales cualesquiera x e y puede usarse para demostrar los tres enunciados anteriores. (V. el problema 7, Conjunto de problemas 8-2b):

Con $x = a - b$ y $y = b$, tenemos

$$|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b| .$$

Por la propiedad aditiva de la ordenación,

$$|a| + (-|b|) \leq |a - b| ,$$
$$|a| - |b| \leq |a - b| ,$$
$$|a - b| \geq |a| - |b| .$$

De igual manera, $x = b - a$ y $y = a$ nos da el enunciado

$$|b - a| \geq |b| - |a| .$$

Puesto que $|b - a| = |-(b - a)| = |a - b|$, resulta

$$|a - b| \geq |b| - |a| .$$

Para demostrar el tercer enunciado, nótese que $|b| - |a| = -(|a| - |b|)$, de modo que ahora tenemos

$$|a - b| \geq |a| - |b| ,$$
$$|a - b| \geq -(|a| - |b|).$$

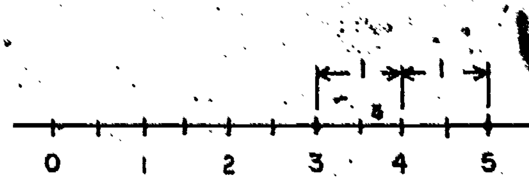
Con otras palabras, si $|a| \neq |b|$, entonces $|a - b|$ es mayor que o igual al mayor de $|a| - |b|$ y su opuesto $-(|a| - |b|)$, y esto significa que

$$|a - b| \geq \big||a| - |b|\big|.$$

Si $|a| = |b|$, entonces $\big||a| - |b|\big| = |0| = 0$, de manera que la última desigualdad es también cierta en este caso.

5. La distancia entre a y b resulta ser por lo menos tan grande como la distancia entre $|a|$ y $|b|$, porque a y b pueden estar a distinto lado de 0, mientras que $|a|$ y $|b|$ deben estar del mismo lado.

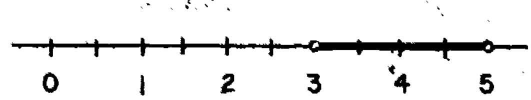
6. Los dos números x tales que la distancia entre x y 4 es 1, son los números correspondientes a los dos puntos que distan 1 unidad de 4.



Aunque éste es el modo sugerido de enfocar este problema, algunos estudiantes pueden hacerlo utilizando la definición de valor absoluto.

Si $x - 4 \geq 0$, entonces $1 = |x - 4| = x - 4$, y así, $x = 5$; si $x - 4 < 0$, entonces $1 = |x - 4| = -(x - 4) = -x + 4$, de lo cual obtenemos $x = 3$.

7. El conjunto de validez del enunciado $|x - 4| < 1$ es el conjunto $3 < x < 5$.



En vez de usar métodos formales para la solución de la inecuación, el estudiante se guiará por la pregunta: ¿Cuál es el conjunto de números x tales que la distancia entre x y 4 sea menor que 1? Como en el caso del ejercicio precedente, el estudiante puede tratar el problema partiendo directamente de la definición de valor absoluto en vez de seguir el enfoque sugerido.

Por ejemplo, si $x - 4 \geq 0$, entonces $|x - 4| = x - 4$, y

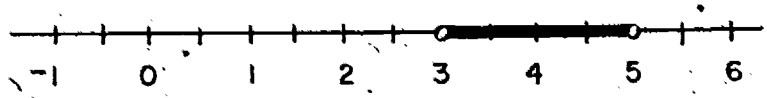
$$x - 4 < 1$$
$$x < 5.$$

Si $x - 4 < 0$, entonces $|x - 4| = -x + 4$, y

$$-x + 4 < 1$$
$$-x < -3$$
$$x > 3.$$

8. Todos los x tales que $x < 3$ ó $x > 5$.

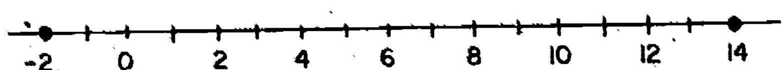
9. La gráfica de $x > 3$ y $x < 5$ es:



Este conjunto es idéntico al conjunto de validez de $|x - 4| < 1$.

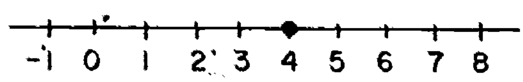
10. (a) Puesto que $|x - 6|$ representa la distancia entre 6 y x, el enunciado $|x - 6| = 8$ nos dice que el punto con coordenada x debe estar separado 8 unidades de 6. Así, x debe ser $6 + 8$ ó $6 - 8$. El conjunto de validez es $\{-2, 14\}$.

Gráfica:

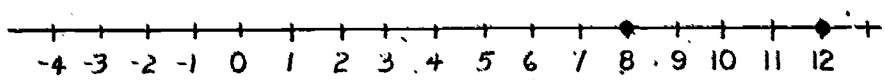


(b) Conjunto de validez: $\{4\}$

Gráfica:

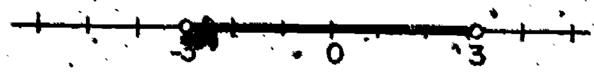


(c) Conjunto de validez: $\{8, 12\}$



(d) Conjunto de validez: Los números reales x tales que $-3 < x < 3$.

Gráfica:



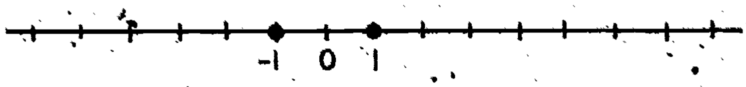
(e) Conjunto de validez: Todos los números reales.

Gráfica: La recta de los números reales.

(f) $|y| = 1$

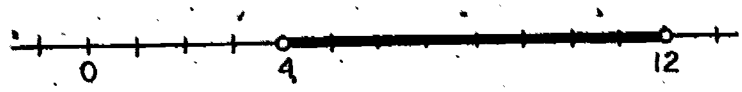
Conjunto de validez: $\{-1, 1\}$

Gráfica:



(g) Conjunto de validez: Los números reales y tales que $4 < y < 12$.

Gráfica:

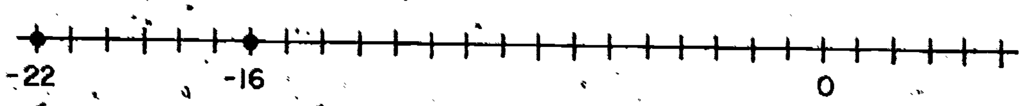


(h) $|z| = -6$

Conjunto de validez: El conjunto vacío $\emptyset$.

(i) Conjunto de validez: $\{-22, -16\}$

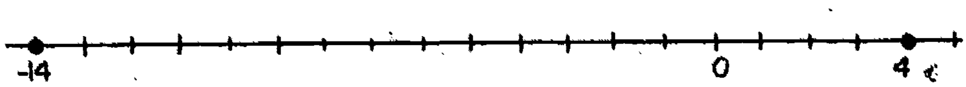
Gráfica:



(j) $|y + 5| = |y - (-5)| = 9$

Conjunto de validez: $\{-14, 4\}$

Gráfica:



11. Considérese a $|x|$ como la distancia en la recta numérica entre 0 y x.

$|x| = 3$, $x = -3$ ó $x = 3$

$|x| < 3$, $x > -3$ y $x < 3$

$|x| \leq 3$, Ninguno

$|x| > 3$, $x < -3$ ó $x > 3$

$|x| \geq 3$, $x \leq -3$ ó $x \geq 3$

$|x| \not< 3$, $x \leq -3$ ó $x \geq 3$

$|x| \not> 3$, Ninguno

*12. Supongamos que la distancia en millas hacia el este de la marca 0 corresponde a números positivos:

	Posición de Juan en la recta numérica	Posición de Raúl en la recta numérica	La diferencia	Distancia entre ellos en millas
(a) (1)	$(3)(10) = 30$	$(3)(-12) = -36$	$\|30-(-36)\| = 66$	66
(2)	$(1\frac{1}{2})(10) = 15$	$(1\frac{1}{2})(-12) = -18$	$\|15-(-18)\| = 33$	33
(3)	$(\frac{1}{3})(10) = \frac{10}{3}$	$(\frac{1}{3})(-12) = -\frac{12}{3}$	$\|\frac{10}{3}-(-\frac{12}{3})\| = \frac{22}{3}$	$\frac{22}{3}$
(b) (1)	$5 + 3(10) =$ $5 + 30 = 35$	$-6 + 3(12) =$ $-6 + 36 = 30$	$\|35 - 30\| = 5$	5
(2)	$5 + (1\frac{1}{2})(10) =$ $5 + 15 = 20$	$-6 + (1\frac{1}{2})(12) =$ $-6 + 18 = 12$	$\|20 - 12\| = 8$	8
(3)	$5 + (\frac{1}{3})(10) =$ $5 + \frac{10}{3} = \frac{25}{3}$	$-6 + (\frac{1}{3})(12)$ $-6 + 4 = -2$	$\|\frac{25}{3} - (-2)\| =$ $\|\frac{25}{3} + \frac{6}{3}\| = \frac{31}{3}$	$\frac{31}{3}$
(c) (1)	$(3)(10) = 30$	$(2\frac{3}{4})(-12) =$ $(\frac{11}{4})(-12) = -33$	$\|30-(-33)\| = 63$	63
(2)	$(1\frac{1}{2})(10) = 15$	$(1\frac{1}{4})(-12) =$ $(\frac{5}{4})(-12) = -15$	$\|15-(-15)\| = 30$	30
(3)	$(\frac{1}{3})(10) = \frac{10}{3}$	$(\frac{1}{3} - \frac{1}{4})(-12) =$ $(\frac{1}{12})(-12) = -1$	$\|\frac{10}{3} -(-1)\| =$ $\|\frac{10}{3} + 1\| = \frac{13}{3}$	$\frac{13}{3}$
(d) (1)	$(3)(-10) = -30$	$-6 + 3(-12) = -42$	$\|(-30)-(-42)\| = 12$	12
(2)	$(1\frac{1}{2})(-10) = -15$	$-6 + (1\frac{1}{2})(-12) = -24$	$\|(-15)-(-24)\| = 9$	9
(3)	$(\frac{1}{3})(-10) = -\frac{10}{3}$	$-6 + (\frac{1}{3})(-12) = -\frac{30}{3}$	$\|(-\frac{10}{3})-(-\frac{30}{3})\| = \frac{20}{3}$	$\frac{20}{3}$

9-4. La división

Véanse las notas al comienzo de este capítulo sobre la definición elegida para la división.

Página 222. Se notará que somos cada vez más tolerantes acerca del uso de las palabras. Nos permitiremos la libertad de usar "numerador" indistintamente para el numeral superior de una fracción o para el número que ese numeral represente. Esta es la manera de usar las palabras comúnmente en la matemática, y, por tanto, debemos empezar a familiarizarnos con ello. En la mayoría de los casos no hay confusión. Cuando sea necesario, podemos volver al significado original preciso, y debido a esto, debemos tener el cuidado de establecer el significado preciso antes de que empecemos a hacer concesiones, y además recordar ese significado de vez en cuando.

Aunque se encuentre que algunos estudiantes han aprendido antes puntos de vista de la división distintos de "¿qué número multiplicado por 2 da 10?", no deberá ser difícil convencerlos con ejemplos de que nuestra definición para los números reales está en armonía con su experiencia en aritmética.

Respuestas al Conjunto de problemas 9-4a; página 223:

1. 15
2. 1
3. 2500
4. 6
5. -6
6. -6
7. 4
8. $\frac{20}{3}$
9. $\frac{7}{16}$
10. 2
11. 2
12. $\frac{x}{y}$

Página 223. Puede ser útil recordar esta relación entre la división y la multiplicación sacada de la experiencia anterior de los estudiantes, si se les pregunta lo que han aprendido para comprobar la división. Este es un ejemplo del uso de la parte "solamente si" del teorema 9-4; esto es, para $b \neq 0$, si $a = cb$, entonces $\frac{a}{b} = c$.

Es este teorema el que muestra la equivalencia entre nuestra definición de la división $(\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b})$ y la otra definición corriente ($\frac{a}{b}$ es c tal que $a = cb$).

Página 224. Hemos tratado de hacer una indicación sobre la manera de saber por dónde se empieza una demostración de esta clase. Se debe tratar de aprovechar oportunidades para hacer esas indicaciones a los estudiantes siempre que sea posible. No hay, por supuesto, una pauta simple para todas las demostraciones, y no esperamos hacer expertos demostradores a estudiantes de noveno grado. Pero, sin embargo, sólo mediante el trato con muchos y diversos tipos de demostraciones es como puede desarrollar esa comprensión y habilidad.

Las razones para los pasos que se dan en la demostración del teorema 9-4 son las siguientes:

Primera parte:
(1) Definición de la división
(2) Propiedad multiplicativa de la igualdad
(3) Propiedad asociativa de la multiplicación
(4) Propiedad multiplicativa de los recíprocos
(5) Propiedad multiplicativa del 1

Segunda parte:
(1) Propiedad multiplicativa de la igualdad
(2) Propiedad asociativa de la multiplicación
(3) Propiedad multiplicativa de los recíprocos
(4) Propiedad multiplicativa del 1
(5) Definición de la división

Respuestas al Conjunto de problemas 9-4b; páginas 225-228:

1. Demostrar: $\frac{a}{1} = a$

Demostración: $a = a(1)$ Propiedad multiplicativa del 1

$\frac{a}{1} = a$ Teorema 9-4 con $c = a$, $b = 1$

Se notará que la demostración anterior empieza con un enunciado cierto y que un enunciado equivalente se ha obtenido aplicando un teorema del tipo "si y solamente si".

2. Demostrar: $\frac{a}{a} = 1$

Demostración: $a = a(1)$ Propiedad multiplicativa del 1

$a = (1)a$ Propiedad conmutativa de la multiplicación

$\frac{a}{a} = 1$ Teorema 9-4 con $c = 1$, $b = a$

3. (a) -1250, $(-1250)(-2) = 2500$

(b) -9, $(-9)(5) = -45$

(c) 4, $(4)(-50) = -200$

(d) $\sqrt{5}$, $(\sqrt{5})(3) = 3\sqrt{5}$

(e) 5, $(5)(7p) = 35p$

(f) 3π, $(3\pi)(3) = 9\pi$

(g) $-\frac{2}{9}$, $(-\frac{2}{9})(3) = -\frac{2}{3}$

(h) 36, $(36)(\frac{1}{3}) = 12$

(i) $\frac{5}{7}$, $(\frac{5}{7})(-\frac{7}{8}) = -\frac{5}{8}$

(j) 1, $(1)(-976) = -976$

(k) 0, $(0)(48) = 0$

(ℓ) $\frac{180}{\pi}$, $(\frac{180}{\pi})(2\pi) = 360$

(m) $-5a$, $(-5a)(-3) = 15a$

(n) -140, $(-140)(0.1) = -14$

(o) $-m$, $(-m)(-93) = 93m$

(p) 7, $(7)(2\sqrt{2}) = 14\sqrt{2}$

4. Si suponemos que la definición de la división es válida cuando $b = 0$, entonces $\frac{28}{0} = 28\cdot\frac{1}{0}$. Pero el cero no tiene recíproco. Podemos también considerar a $\frac{28}{0}$ desde el punto de vista del teorema 9-4, suponiendo que el teorema es válido cuando $b = 0$. Si $\frac{28}{0} = c$, entonces $28 = c\cdot 0$. Pero $c\cdot 0$ es cero y no puede ser un nombre para 28.

5. Un número positivo dividido por uno negativo es negativo. Podemos ver esto refiriéndonos a la definición de la división para $a > 0$ y $b < 0$.

$$\frac{a}{b} = a\left(\frac{1}{b}\right)$$

Si $b < 0$, entonces $\frac{1}{b} < 0$, por un teorema del Capítulo 7 que dice: "El recíproco de un número negativo es negativo". Así, $a(\frac{1}{b})$ es el producto de un número positivo y uno negativo, y, por tanto, es negativo.

Con razonamiento parecido podemos decir: Un número negativo dividido por uno positivo es negativo, y un número negativo dividido por un número negativo es positivo.

6. (a) Se debe ayudar a los estudiantes a ver que los conjuntos de validez de estos enunciados pueden hallarse de varios modos.

(1) Pueden aplicar el teorema 9-4.
Si $6y = 42$, entonces $y = \frac{42}{6}$.

(2) Pueden obtener un enunciado equivalente utilizando la propiedad multiplicativa de la igualdad.

$$6y = 42$$
$$y = \frac{1}{6}\cdot 42$$
$$y = 7$$

El conjunto de validez es $\{7\}$.

(b) $\{-7\}$
(c) $\{-7\}$
(d) $\{7\}$
(e) $\{\frac{1}{7}\}$
(f) $\{1\}$
(g) $\{\frac{43}{6}\}$
(h) $\{100\}$
(i) $\{75\}$
(j) $\{12\}$
(k) $\{0\}$
(ℓ) $\{\frac{2}{3}\}$

7. (a) $5a - 8 = -53$

$5a = -45$

$a = -9$

El conjunto de validez es $\{-9\}$.

(b) $\{16\}$

(c) $\{5\}$

(d) $\{28\}$

(e) $\{18\}$

8. Si n es el número, entonces

$$6n - 5 = -37\ ,$$
$$6n = -32\ ,$$
$$n = -\frac{32}{6} \text{ ó } -\frac{16}{3}\ .$$

Por lo tanto, el número es $-\frac{16}{3}$.

9. Si s es el número, entonces

$$32 + \frac{2}{3}s = 38\ ,$$
$$\frac{2}{3}s = 6\ ,$$
$$s = 6\cdot\frac{3}{2} \text{ ó } 9\ .$$

Por lo tanto, el número es 9.

10. $\frac{70}{3}$ libras de azúcar se necesitan para 35 bizcochos.

11. El rectángulo tiene 9 pulgadas de ancho.

12. Ricardo tiene 7 años y Juan tiene 21.

13. 22, 24

14. La suma de dos números consecutivos cualesquiera del conjunto de los enteros impares entre el 0 y el 42 satisface a las condiciones del problema.

15. Si el precio era p dólares antes de la venta,

$$p - .20p = 30 \,,$$
$$.80p = 30 \,,$$
$$p = 30 \cdot \frac{100}{80} \text{ ó } 37.50 \,.$$

Por lo tanto, el precio original era $37.50.

16. $1\frac{1}{4}$ horas

17. El número es 9.

18. Sea s el número de sellos de 4¢ comprados. Si se le cargó la cantidad correcta, entonces s debe ser un entero no negativo, y

$$15(.03) + .04s = 1.80 \,,$$
$$.45 + .04s = 1.80 \,,$$
$$.04s = 1.35 \,,$$
$$4s = 135 \,,$$
$$s = \frac{135}{4} = 33\frac{3}{4} \,.$$

Puesto que $33\frac{3}{4}$ no es un entero, se le cargó una cantidad errónea.

19. Tiene 12 centavos, 16 monedas de diez centavos, 22 monedas de cinco centavos. Tiene $2.82.

20. Juan tiene $25.

21. 20 millas por hora

22. 35, 36 y 37

Se notará que en este caso se pueden representar los tres enteros por i, $i + 1$, $i + 2$. Otra manera un poco más sencilla, sin embargo, es $i - 1$, i, $i + 1$.

23. Si n es el primer entero positivo, entonces
$n + 1$ es el entero que le sigue, y

$$n + (n + 1) < 25$$
$$2n + 1 < 25$$
$$2n < 24$$
$$n < 12.$$

Por lo tanto, los enteros son (1, 2), (2, 3), ..., (11, 12).

*24. Si x es el número de galones de jarabe de meple, entonces $160 - x$ es el número de galones de jarabe de maíz, y

$$8x + 2.4\,(160 - x) = 608.$$

La mezcla consiste en 40 galones de jarabe de meple y 120 galones de jarabe de maíz.

25. Si $\frac{a}{b} > 0$ y $b \neq 0$, entonces $ab > 0$.

Demostración: $\frac{a}{b} > 0$ y $b \neq 0$ es cierto por hipótesis.

$\frac{a}{b} = p$ donde $p > 0$.	Sea p el nombre del mismo número que $\frac{a}{b}$.
$a = pb$	Teorema 9-4
$ab = pb^2$	Propiedad multiplicativa de la igualdad
$b^2 > 0$	Teorema 8-3b
$pb^2 > 0$	El producto de dos números positivos es positivo.
$ab > 0$	ab y pb^2 son nombres para un mismo número.

Si $\frac{a}{b} < 0$ y $b \neq 0$, entonces $ab < 0$.

Demostración: $\frac{a}{b} < 0$ y $b \neq 0$ es cierto por hipótesis.

$\frac{a}{b} = n$ donde $n < 0$.	Sea n el nombre del mismo número que $\frac{a}{b}$.
$a = bn$	Teorema 9-4
$ab = b^2n$	Propiedad multiplicativa de la igualdad
$b^2 > 0$	Teorema 8-3b
$b^2n < 0$	El producto de un número positivo y un número negativo es negativo.
$ab < 0$	ab y b^2n son nombres para un mismo número.

9-5. Nombres corrientes

En esta sección y la próxima nos interesan cuatro convenios comúnmente aceptados acerca del numeral más sencillo para un número:

(1) No deben quedar operaciones indicadas que puedan efectuarse.
(2) Si hay una división indicada, los números cuya división está indicada no deben tener factor común.
(3) Preferimos escribir $-\frac{a}{b}$ a $\frac{-a}{b}$ ó $\frac{a}{-b}$.
(4) Siempre es posible evitar más de una división indicada.

De este modo, para ilustrar el primer convenio podemos decir que "$\frac{20}{4}$" no es tan sencillo como "5"; "$\frac{2+3}{6}$" no es tan sencillo como "$\frac{5}{6}$"; "$\frac{3 \cdot 5}{7}$" no es tan sencillo como "$\frac{15}{7}$"; pero $\frac{x+3}{y}$ no se puede simplificar más. De la misma manera, para el segundo convenio, "$\frac{14}{21}$" no es tan sencillo como "$\frac{2}{3}$" y "$\frac{2x+4}{ax^2+2a}$" no es tan sencillo como "$\frac{2}{a}$". Simplificaciones de esta clase dependen del teorema 9-5, del teorema $\frac{a}{a} = 1$ para $a \neq 0$, y de la propiedad del 1.

Página 228. Las razones que justifican los pasos en la demostración del teorema 9-5 son:

(1) Definición de la división
(2) Propiedades asociativa y conmutativa de la multiplicación
(3) Teorema 7-8d
(4) Definición de la división

Respuestas al Conjunto de problemas 9-5; páginas 230-231:

1. Si a y b son números reales, b $\neq$ 0, entonces $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$.

Demostración: $\frac{-a}{b} \cdot 1 = \frac{-a}{b}$ es cierto por la propiedad $a \cdot 1 = a$

$\frac{-a}{b} \cdot \frac{-1}{-1} = \frac{-a}{b}$ $\quad 1 = \frac{a}{a}$, $a \neq 0$

$\frac{(-a)(-1)}{(b)(-1)} = \frac{-a}{b}$ Teorema 9-5

$\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b}$ $\quad (-1)a = -a$

También, $\frac{-a}{b} = (-a)(\frac{1}{b})$ es cierto por la definición de la división.

$\frac{-a}{b} = -(a \cdot \frac{1}{b})$ $\quad (-a)(b) = -(ab)$

$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$ Definición de la división

2. (a) $\frac{4}{3}$ (b) $-\frac{4}{3}$ (c) $-\frac{4}{3}$ (d) $\frac{4}{3}$
3. (a) n (b) $-n$ (c) $\frac{1}{n}$
4. (a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $-\frac{2}{3}$ (d) $-\frac{2}{3}$ (e) $-\frac{2}{3}$
5. (a) y (b) y (c) $x + 1$ (d) 1
6. (a) 2 (b) -2 (c) -2 (d) -2
7. (a) $\frac{x+2}{3}$ (b) $\frac{2x-3}{2y-3}$ (c) $\frac{2x+1}{3}$ (d) $x + 2$
8. (a) $2 - a$ (b) $a - 2$ (c) $-a$ (d) -1
9. (a) $\frac{1}{t-2}$ (b) $\frac{1}{2t-1}$ (c) $t - 2$
10. (a) $6ab$ (b) $2a^2$ (c) $\frac{3a}{b}$ (d) $-\frac{3a}{5c}$
11. (a) $x - 1$ (b) $\frac{x+1}{4}$ (c) $\frac{3}{4}(x - 1)$ (d) $x - 1$
12. (a) $-\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1 - 3x - 2y}{4y - 2 - 6x}$

9-6. Fracciones

El punto principal de esta sección es desarrollar la habilidad en simplificar una expresión convirtiéndola en otra que contenga a lo más una división indicada. Esto significa esencialmente que estamos aprendiendo a multiplicar, dividir y sumar fracciones.

Página 232. Una vez más estamos aminorando nuestro rigor en el uso de las palabras. Nos permitimos usar "fracción" indistintamente para el símbolo o el número, aun cuando hablando correctamente, significa el símbolo. Así, en el párrafo precedente, un enunciado preciso hubiera dicho "multiplicar, dividir y sumar números representados por fracciones".

Ahora que hemos empezado a aminorar nuestra precisión en el lenguaje, sin más comentario nos consideraremos en libertad de usar el lenguaje conveniente aun cuando se viole la precisión del lenguaje sobre números y numerales, mientras estemos seguros de que el significado riguroso será entendido.

Mencionamos la palabra "razón" como parte del lenguaje en ciertas aplicaciones. Hay unos pocos problemas que usan "razón" en las siguientes páginas. Se podrá mencionar a los estudiantes que una ecuación tal como $\frac{x}{1197} = \frac{z}{19}$, que iguala dos razones, a menudo se llama una "proporción". Parece indeseable ahora divagar extensamente acerca de las palabras "razón" y "proporción", puesto que precisamente es sólo una mera cuestión de nombres especiales para conceptos familiares.

Respuestas al Conjunto de problemas 9-6a; páginas 233-234:

1. (a) $\frac{21}{16}$ (b) $-\frac{21}{16}$ (c) $\frac{21}{16}$ (d) $\frac{21}{16}$
2. (a) $\frac{6}{5}$ (b) $-\frac{6}{5}$ (c) $\frac{12}{7}$ (d) $\frac{6}{5}$
3. (a) $-\frac{10}{9}$ (b) $-\frac{10}{9}$ (c) $\frac{10}{9}$ (d) $\frac{10}{9}$
4. (a) $\frac{1}{n^2}$ (b) 1 (c) $\frac{1}{nx}$ (d) $\frac{1}{2n}$
5. (a) $\frac{x^2}{12}$ (b) $\frac{x^2}{12}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $-\frac{x^2}{12}$
6. (a) 5 (b) $\frac{29}{6}$ (c) 5 (d) $\frac{11}{6}$
7. (a) $\frac{4}{3}a^3$ (b) $12a$ (c) $\frac{3m}{a}$ (d) $\frac{a^2}{9}$
8. (a) $\frac{x+2}{4}$ (b) $\frac{3}{4}(x+2)$ (c) $\frac{3}{4}(x+2)$
9. (a) $\frac{(n+3)(n+2)}{6}$ (b) 1 (c) $\frac{2(n+3)}{3(n+2)}$
10. (a) y^2 (b) $2a$

11. Cada número racional puede estar representado por una fracción. No toda fracción representa un número racional. $\frac{\pi}{3}$ es una fracción, pero no es un número racional.

12. Si hay f profesores,

$$\frac{f}{1197} = \frac{2}{19}$$

$$f = \frac{2}{19} \cdot 1197$$

$$f = 126$$

Hay 126 profesores.

13. Si el otro fondo recibió x dólares,

$$\frac{x}{387} = \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{2}{3} \cdot 387$$

$$x = 258$$

El otro fondo recibió $258.

Página 234. El número de pasos que efectuará el estudiante al escribir su trabajo sobre suma de fracciones variará de estudiante a estudiante y de una vez a otra para el mismo estudiante. Dentro de poco, la mayor parte de los estudiantes podrán escribir

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = \frac{x}{3}\cdot\frac{5}{5} + \frac{y}{5}\cdot\frac{3}{3} = \frac{5x + 3y}{15}$$

Deben estimularse a los estudiantes a que continúen presentando la multiplicación por 1 en la forma $\frac{5}{5}$, $\frac{3}{3}$, etc.

Respuestas al Conjunto de problemas 9-6b; páginas 235-237:

1. (a) $\frac{11}{9}$ (b) $-\frac{1}{9}$ (c) $\frac{1}{9}$
2. (a) $\frac{7}{12}$ (b) $\frac{5}{6}$ (c) $\frac{13}{12}$
3. (a) $\frac{9}{a}$ (b) $\frac{13}{2a}$ (c) $\frac{4a + 5}{a^2}$
4. (a) $\frac{3x}{4}$ (b) $\frac{x^2}{8}$ (c) $-\frac{x}{4}$ (d) $\frac{x}{4}$
5. (a) $\frac{19a}{35}$ (b) $\frac{20 - a}{35}$ (c) $\frac{20a - 1}{35}$
6. (a) $\frac{3(x - 2)}{5}$ (b) $\frac{3}{5}x$ (c) $\frac{2x + 8}{x}$
7. Si a, b, y c son números reales, $c \neq 0$, entonces

   $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}$.

   El miembro de la izquierda es

   $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = a\cdot\frac{1}{c} + b\cdot\frac{1}{c}$ Definición de la división

   $= (a + b)\frac{1}{c}$ Propiedad distributiva

   $= \frac{a + b}{c}$ Definición de la división

8. Si a, b, y c son números reales, $c \neq 0$ y $d \neq 0$, entonces

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad + bc}{cd}.$$

El miembro de la izquierda es

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{a}{c}\cdot\frac{d}{d} + \frac{b}{d}\cdot\frac{c}{c} \qquad a\cdot 1 = a \text{ y } 1 = \frac{a}{a}$$

$$= \frac{ad}{cd} + \frac{bc}{dc} \qquad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$= \frac{ad + bc}{cd} \qquad \text{Propiedad conmutativa de la multiplicación y el problema 7}$$

Sería indeseable para el estudiante memorizar este resultado y usarlo como una fórmula. Se presenta aquí en un problema como algo interesante para demostrar. Al simplificar sumas de fracciones, los estudiantes deben continuar usando la propiedad del 1 para hacer iguales los denominadores.

9. Sugerimos aquí mediante un ejemplo el procedimiento de "despejar fracciones" al empezar a resolver una ecuación que contenga fracciones. Aunque no insistimos en que el estudiante emplee este método, esperamos que con la ayuda del maestro se dará cuenta de la eficiencia de "despejar fracciones", y aprenderá a utilizar efectivamente este método.

(a) $\{12\}$
(b) $\{2\}$
(c) $\{2\}$
(d) $\{18\}$
(e) $\{20\}$
(f) $\{\frac{20}{9}\}$
(g) $\{5, -5\}$
(h) $1 < x < 5$.

10. Si uno de los números es n, el otro número es $\frac{3}{5}n$, y

$$n + \frac{3}{5}n = 240$$
$$5n + 3n = 1200$$
$$8n = 1200$$
$$n = 150$$
$$\frac{3}{5}n = 90$$

O también,
si un número es n, el otro número es 240-n, y

$$n = \frac{3}{5}(240-n)$$
$$5n = 720-3n$$
$$8n = 720$$
$$n = 90$$
$$240-n = 150$$

Los números son 150 y 90.

11. El numerador se aumentó en 5.
12. El número es 312.
13. José tiene 12 años y su padre 36.
14. Los dos números son 5 y 2. La suma de sus recíprocos es $\frac{7}{10}$. La diferencia de sus recíprocos es $\frac{3}{10}$.
15. La razón es $\frac{1}{19}$.
16. (a) José pintará $\frac{1}{7}$ de la casa en un día. Pintará $d \cdot \frac{1}{7}$ ó $\frac{d}{7}$, de la casa en d días.

    (b) Roberto pintará $\frac{1}{8}$ de la casa en un día y $\frac{d}{8}$ en d días.

    (c) Roberto y José pintarán $\frac{1}{7} + \frac{1}{8}$ de la casa en un día y $\frac{d}{7} + \frac{d}{8}$ en d días.

    (d) La parte de la casa que pintó José más la parte de la casa que pintó Roberto equivalen a la casa completa. d representa el número de días que emplearon José y Roberto juntos para pintar la casa y es igual a $\frac{56}{15}$ ó $3\frac{11}{15}$ días.

    (e) José y Roberto juntos pintarán $\frac{1}{7} + \frac{1}{8}$ ó $\frac{15}{56}$ de la casa en 1 día.

*17. Si x es el número de juegos que el equipo de beisbol debe ganar, entonces

$$\frac{48 + x}{154} \geq 0.6$$
$$x \geq 44.4$$

Puesto que x debe ser un entero, el equipo debe ganar por lo menos 45 de los 54 juegos restantes para terminar con una puntuación de por lo menos .600.

La puntuación más alta que puede obtener es

$$\frac{48 + 54}{154} = .662$$

La puntuación más baja que puede obtener es

$$\frac{48 + 0}{154} = .312$$

Página 238. Se dan tres métodos para simplificar fracciones. Cada método tiene sus ventajas para ciertos tipos de problemas. Debe estimularse al estudiante a usar su propio criterio para elegir el método apropiado. Por ejemplo, cuando hay una fracción sencilla en el numerador y en el denominador, el método 3 es generalmente muy simple. Cuando hay una suma de fracciones en ambos, numerador y denominador, el método 1 es el mejor. De este modo, en el Conjunto de problemas 9-6c podría suceder que el estudiante utilizara el método 1 en los problemas 4, 5, 6, 7, 8, 12; el método 2 ó el 3 en los problemas 1, 2, 3, 9, 11.

Respuestas al Conjunto de problemas 9-6c; página 239:

1. $\frac{3}{2}$
2. $2a$
3. $\frac{a^3}{3y^3}$
4. 1
5. $\frac{48}{5}$
6. $-\frac{1}{48}$
7. 7
8. $\frac{a + 1}{2(a - 1)}$
9. -2
10. $-\frac{(a - b)^2}{8}$
11. $\frac{(x + 8)(x + 2)}{27}$
12. $\frac{y}{3}$

Respuestas a los Problemas de repaso

1. (a) $\frac{3}{8}$

   (b) Este no es un número, puesto que $\frac{1}{0}$ no es un número.

   (c) 0

   (d) Este no es un número; si lo fuera, podríamos expresar el número por $0 \cdot \frac{1}{0}$, pero $\frac{1}{0}$ no es un número.

   (e) 0

   (f) Este no es un número, puesto que $5 \div 0$ significa $5 \cdot \frac{1}{0}$, y $\frac{1}{0}$ no es un número.

   (g) Este no es un número, puesto que $\frac{1}{0}$ no es un número.

   (h) -36

   (i) 3

2. (a) $(5 - 5) \cdot 7 = 0$

   (b) $5 - (5 \cdot 7) = -30$

   (c) $7 - (6 - 2) = 3$

   (d) $(7 - 6) - 2 = -1$

   (e) $3 \cdot (2 - 2) \cdot 5 = 0$

   (f) $(3 \cdot 2 - 2) \cdot 5 = 20$

3. (a) $(-1)^2 - 4(2)(5) = -39$

   (b) $(6)^2 - 4(5)(-3) = 96$

   (c) $(-3)^2 - 4(1)(-2) = 17$

   (d) $(2)^2 - 4(1654)(0) = 4$

   (e) $(0)^2 - 4(5)(-5) = 100$

   (f) $(\frac{1}{4})^2 - 4(\frac{1}{3})(-\frac{1}{5}) = \frac{79}{240}$

4. $\frac{7}{2}$, puesto que si x es $\frac{7}{2}$, $\frac{3x + 5}{2x - 7} = \frac{3(\frac{7}{2}) + 5}{2(\frac{7}{2}) - 7} = \frac{3(\frac{7}{2}) + 5}{0}$

5. (a) $-6x - 3$
(b) $a^2b^2 - ab^3$
(c) $m^3 + m^2$
(d) $-3x + 2y$
(e) $5a^2 + 10ab - 15ac$
(f) $7x^3 - 21x^2$
(g) $(2x - 3y)(x + 4y) = 2x(x + 4y) - 3y(x + 4y)$
$= 2x^2 + 8xy - 3xy - 12y^2$
$= 2x^2 + 5xy - 12y^2$
(h) $(2a - 3b)(2a - 3b) = 2a(2a - 3b) - 3b(2a - 3b)$
$= 4a^2 - 6ab - 6ab + 9b^2$
$= 4a^2 - 12ab + 9b^2$

6. (a) Para todos los a tales que $a < 7$.
(b) $\{-4\}$
(c) Para todos los m tales que $m \geq \frac{45}{2}$.
(d) Para todos los x tales que $x < 9$.
(e) $\{12\}$
(f) Para todos los x tales que $x \geq 2$ ó $x \leq -2$.

7. Si el número es n, entonces

$$\frac{1}{4}n + \frac{1}{8}n < n - 25,$$
$$2n + n < 8n - 200,$$
$$200 < 5n,$$
$$40 < n.$$

Por tanto, el número es mayor que 40.

8. $\frac{1}{4}\left(\frac{x + 3}{x} + \frac{x - 3}{x} + \frac{x + k}{x} + \frac{x - k}{x}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{4x}{x}\right) = 1$

9. $\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{5} = \frac{15}{40}$, y $\frac{9}{20}\cdot\frac{2}{2} = \frac{18}{40}$.

$\frac{15}{40} < \frac{18}{40}$; por tanto, $\frac{3}{8} < \frac{9}{20}$ es cierto.

$\frac{9}{20}\cdot\frac{3}{3} = \frac{27}{60}$ y $\frac{7}{15}\cdot\frac{4}{4} = \frac{28}{60}$.

$\frac{27}{60} < \frac{28}{60}$; por tanto, $\frac{9}{20} < \frac{7}{15}$ es cierto.

Entonces, por la propiedad transitiva, $\frac{3}{8} < \frac{7}{15}$ es cierto.

*10. Si la primera camisa costó x dólares, entonces

$$x - .25x = 3.75,$$
$$.75x = 3.75,$$
$$x = 5.$$

Por lo tanto, la primera camisa costó \$5.00. Puesto que la vendió por \$3.75, perdió \$1.25.

Si la segunda camisa costó y dólares, entonces

$$y + .25y = 3.75,$$
$$1.25y = 3.75,$$
$$y = 3.$$

Por lo tanto, la segunda camisa costó \$3.00. Como la vendió por \$3.75, ganó \$0.75.

Ahora bien, $(-1.25) + .75 = -.50$.

De este modo, perdió \$0.50 en las dos ventas.

11. $x = \frac{1}{a}(y - b)$

12. El costo del año pasado fue d dólares por docena.

El costo de este año es d dólares + c centavos por docena.

$\frac{1}{2}$ docena costará $\dfrac{d \text{ dólares} + c \text{ centavos}}{2}$

$$= \frac{100d + c}{2} \text{ centavos.}$$

13\. (a) $(x - 1)(x + 2) = 0$

es equivalente a

$x - 1 = 0$ ó $x + 2 = 0$,

que es equivalente a

$x = 1$ ó $x = -2$.

El conjunto de validez es $\{1, -2\}$.

(b) $\{-5, -7\}$

(c) $\{0, 2\}$

(d) $\{\frac{1}{2}, 2\}$

(e) $\emptyset$

(f) $\{\frac{5}{2}\}$

14\. (a) Para números reales a, b, c, d, donde $b \neq 0$, $d \neq 0$,

si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,

entonces $\frac{a}{b}(bd) = \frac{c}{d}(bd)$.	Propiedad multiplicativa de la igualdad
$(a \cdot \frac{1}{b})(bd) = (c \cdot \frac{1}{d})(bd)$	Definición de la división
$(ad)(b \cdot \frac{1}{b}) = (bc)(d \cdot \frac{1}{d})$	Propiedades asociativa y conmutativa de la multiplicación
$(ad) \cdot 1 = (bc) \cdot 1$	Propiedad multiplicativa de los recíprocos
$ad = bc$	Propiedad multiplicativa del 1

(b) Para números reales a, b, c, d, donde $b \neq 0$, $d \neq 0$, $c \neq 0$,

si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,

entonces $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{c}$.	Propiedad multiplicativa de la igualdad
$\frac{ab}{bc} = \frac{cb}{dc}$	Teorema 9-5
$\frac{ab}{cb} = \frac{bc}{dc}$	Propiedad conmutativa de la multiplicación

$\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{b} = \frac{b}{d}\cdot\frac{c}{c}$ Teorema 9-5

$\frac{a}{c}\cdot 1 = \frac{b}{d}\cdot 1$ $\frac{x}{x} = 1$, si $x \neq 0$

$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ Propiedad multiplicativa del 1

(c) Para números reales a, b, c, d, donde $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$,

si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,

entonces $\frac{a}{b}\cdot\frac{bd}{ac} = \frac{c}{d}\cdot\frac{bd}{ac}$. Propiedad multiplicativa de la igualdad

$\frac{a(bd)}{b(ac)} = \frac{c(bd)}{d(ac)}$ Teorema 9-5

$\frac{d(ab)}{c(ab)} = \frac{b(cd)}{a(cd)}$ Propiedades asociativa y conmutativa de la multiplicación

$\frac{d}{c}\cdot\frac{ab}{ab} = \frac{b}{a}\cdot\frac{cd}{cd}$ Teorema 9-5

$\frac{d}{c}\cdot 1 = \frac{b}{a}\cdot 1$ $\frac{x}{x} = 1$, si $x \neq 0$

$\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$ Propiedad multiplicativa del 1

$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ Si $x = y$, entonces $y = x$.

(d) Para números reales a, b, c, d, donde $b \neq 0$, $d \neq 0$,

si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,

entonces $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$. Propiedad aditiva de la igualdad

$\frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{c}{d} + \frac{d}{d}$ $\frac{x}{x} = 1$, si $x \neq 0$

$a\cdot\frac{1}{b} + b\cdot\frac{1}{b} = c\cdot\frac{1}{d} + d\cdot\frac{1}{d}$ Definición de la división

$(a + b)\frac{1}{b} = (c + d)\frac{1}{d}$ Propiedad distributiva

$\frac{a + b}{b} = \frac{c + d}{d}$ Definición de la división

15. $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c}$ Teorema 9-5

$= \frac{a}{b} \cdot 1$ $\frac{x}{x} = 1$, si $x \neq 0$

$= \frac{a}{b}$ Propiedad multiplicativa del 1

16. Para demostrar que el recíproco de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$, necesitamos probar que $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.

$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba}$ Teorema 9-5

$= \frac{ab}{ab}$ Propiedad conmutativa de la multiplicación

$= 1$ $\frac{x}{x} = 1$, si $x \neq 0$

Por lo tanto, $\frac{b}{a}$ <u>es</u> el recíproco de $\frac{a}{b}$, ó $\frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{a}{b}$.

*17. (a) Sí, porque el producto de dos miembros cualesquiera del conjunto es un miembro del conjunto.

(b) $(-1) \times j = -j$; $j \times (-1) = -j$. Por lo tanto, $(-1) \times j = j \times (-1)$.

$j \times (-j) = 1$; $(-j) \times j = 1$. Por lo tanto, $j \times (-j) = (-j) \times j$.

$(-1) \times (-j) = j$; $(-j) \times (-1) = j$. Por lo tanto, $(-1) \times (-j) = (-j) \times (-1)$.

(c) $((-1) \times j) \times (-j) = (-j) \times (-j) = -1$.
$(-1) \times (j \times (-j)) = (-1) \times 1 = -1$.

Por lo tanto, $((-1) \times j) \times (-j) = (-1) \times (j \times (-j))$.

$(1 \times (-1)) \times j = (-1) \times j = -j$.
$1 \times ((-1) \times j) = 1 \times (-j) = -j$.

Por lo tanto, $(1 \times (-1)) \times j = 1 \times ((-1) \times j)$.

(d) Sí. $1 \times 1 = 1$.
$(-1) \times 1 = -1$.
$j \times 1 = j$.
$(-j) \times 1 = -j$.

(e) $1 \times 1 = 1$. Por lo tanto, 1 es el recíproco de 1.

$(-1) \times (-1) = 1$. Por lo tanto, -1 es el recíproco de -1.

$j \times (-j) = 1$. Por lo tanto, $-j$ es el recíproco de j.

$(-j) \times j = 1$. Por lo tanto, j es el recíproco de $-j$.

(f)
$$\begin{aligned} j \times x &= 1 \\ (-j) \times (j \times x) &= (-j) \times 1 \\ \big((-j) \times j\big) \times x &= (-j) \times 1 \\ 1 \times x &= -j \\ x &= -j \end{aligned}$$

El conjunto de validez es $\{-j\}$.

(g) De igual manera, el conjunto de validez es $\{-1\}$. Multiplica por j, puesto que j es el recíproco de $-j$.

(h) El conjunto de validez es $\{1\}$. Puesto que $j^2 = -1$, se multiplica por (-1), el recíproco de (-1).

(i) El conjunto de validez es $\{-j\}$. Puesto que $j^3 = j^2 \times j = (-1) \times j = -j$, se multiplica por j, el recíproco de $(-j)$.

Capítulo 9

Sugerencias para exámenes

1. Simplifica:

(a) $-3 - 7$

(b) $9 - 6 - 1$

(c) $-\frac{18}{6}$

(d) $\frac{8}{9} - \frac{2}{3}$

(e) $17 - 2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3}$

(f) $\frac{2m}{3} \cdot \frac{-3}{m}$

(g) $\frac{3(x + 1)}{x - 1} \cdot \frac{1}{9(x + 1)}$

(h) $\frac{|3|}{a} \cdot \frac{a}{|-3|}$

(i) $\frac{2a}{\frac{1}{3}a}$

(j) $(6x - 2) - (3x + 1)$

(k) $2(m - 1) - (m - 1)$

(l) $\frac{3y - 3}{y - 1}$

(m) $\dfrac{(k-1)-(k+2)}{k-1}$

(n) $\dfrac{\frac{x+2}{3}}{\frac{x+2}{2}}$

(o) $3y - 7x + 5 + 2x - y - x$

(p) $\dfrac{2x^2y}{z} \cdot \dfrac{6z^2}{-7xy}$

(q) $(7x^2 - 3x + 2) - (3x^2 - x + 1)$

(r) $\dfrac{3x - y}{2y - 6x}$

(s) $\dfrac{x+1}{3} + \dfrac{x-1}{4}$

(t) $\dfrac{x}{x + \frac{1}{x}}$

(u) $\dfrac{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}}$

(v) $\dfrac{m}{n} \cdot \dfrac{n}{m}$

(w) $\dfrac{m}{n} + \dfrac{n}{m}$

2. Si $x_1 = 6$ y $x_2 = -3$, determina:

(a) $x_1 - x_2$

(b) $x_2 - x_1$

(c) $|x_1 - x_2|$

(d) $|x_2 - x_1|$

3. Resuelve:

(a) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 10$

(b) $\frac{x}{8} = \frac{x-1}{4}$

(c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{7}x = 3x$

(d) $\frac{1}{x} = \frac{3}{7}$

(e) $\frac{1}{3}y + \frac{2}{3} = \frac{1}{7}y$

(f) $\frac{x}{4} - \frac{6}{7} = \frac{5}{8}$

4. Determina los conjuntos de validez de los siguientes:

(a) $y - 3 = 7 - y$

(b) $17 + x > -3 - x$

(c) $\frac{1}{3}a + \frac{1}{6} = \frac{3}{4}a$

(d) $3|m| \leq -|m| + 12$

(e) $\frac{15}{|x|} > 10$

(f) $\frac{y}{4} + \frac{y}{7} = 1$

5. ¿Para qué números es cierto cada uno de los siguientes?

(a) $0 \cdot x = 0$

(b) $0 = 3x$

(c) $x \cdot 0 = 3$

(d) $\frac{0}{x} = 0$

(e) $|x - 1| < 0$

(f) $3x < 0$

6. Si $a > b$, decide, caso de ser posible, si los siguientes son positivos o negativos:

(a) $a - b$

(b) $\frac{1}{b - a}$

(c) $(a - b)^2$

(d) $|b - a|$

(e) a y b, si $ab < 0$

(f) a y b, si $\frac{a}{b} < 0$

(g) $a^2 - ab$

(h) $b^2 - ab$

7. ¿Qué número debe añadirse a $3a - 2b + c$ para obtener $a - 6b - 3c$?

8. ¿Por qué número debe multiplicarse $\frac{3}{bc}$ para obtener $17a$?

9. ¿12 es 30% de qué número?

10. Si al numerador de la fracción $\frac{5}{12}$ se le añade x, siendo x positivo, la diferencia de los valores de las fracciones es $\frac{1}{6}$. Determina el valor de x.

11. La proporción entre anticongelador y agua en el radiador del automóvil de Jaime es $\frac{3}{7}$. Si hay 12 litros de la mezcla, ¿cuántos litros de anticongelador hay en ella?

12. Roberto tiene 4 años más que David. La suma de sus edades es menor que 24. De aquí a dos años, la suma de sus edades será mayor que 20. ¿Qué edad tiene cada uno de ellos?