DOCUMENT RESUME

ED 186 219 SE 030 431

AUTHOR Allen, Frank B.; And Others
TITLE Matematica Para La Escuela Secundaria, Primer Curso de Algebra (Parte 1). Traduccion Preliminar de la Edicion Inglesa Revisada. (Mathematics for High School, First Course in Algebra, Part 1. Preliminary Translation of the Revised English Edition).
INSTITUTION Stanford Univ., Calif. School Mathematics Study Group.
SPONS AGENCY National Science Foundation, Washington, D.C.
PUB DATE 62
NOTE 254p.; For related documents in Spanish, see SE 030 432-434.
LANGUAGE Spanish

EDRS PRICE MF01/PC11 Plus Postage.
DESCRIPTORS *Algebra; *Bilingual Education; *Instructional Materials; Mathematics Curriculum; *Mathematics Instruction; Secondary Education; *Secondary School Mathematics
IDENTIFIERS *School Mathematics Study Group

ABSTRACT

This is the student text for part one of a three-part SMSG algebra course for high school students. The principal objective of the text is to help the student develop an understanding and appreciation of some of the algebraic structure as a basis for the techniques of algebra. Chapter topics include congruence; numbers and variables; operations; real numbers; and properties of addition, multiplication, and division. (RH)

GRUPO DE ESTUDIO DE LA MATEMATICA ESCOLAR

MATEMATICA PARA LA ESCUELA SECUNDARIA

PRIMER CURSO DE ALGEBRA (Parte 1)

(Traducción preliminar de la edición inglesa revisada)

Mary L. Charles
of the NSF

MATEMATICA PARA LA ESCUELA SECUNDARIA

PRIMER CURSO DE ALGEBRA (Parte 1)

(Traducción preliminar de la edición inglesa revisada)

Texto preparado bajo la supervisión del personal para las muestras de libros de texto, del Grupo de Estudio de la Matemática Escolar:

Frank B. Allen, Escuela Secundaria del Pueblo de Lyons

Edwin C. Douglas, Escuela Taft

Donald E. Richmond, Colegio Williams

Charles E. Rickart, Universidad de Yale

Henry Swain, Escuela Secundaria del Pueblo de New Trier

Robert J. Walker, Universidad de Cornell

El apoyo financiero para el Grupo de Estudio de la Matemática Escolar provino de la Fundación Nacional de Ciencias.

Proyecto de traducción al español

Comisión consultiva

Edward G. Begle, Universidad de Stánford

Howard F. Fehr, Universidad de Columbia

Mariano García, Universidad de Puerto Rico

Max Kramer, Sàn Jose State College

PROLOGO

La creciente contribución de las matemáticas a la cultura del mundo moderno, y su importancia como parte vital de la educación científica y humanística, han hecho necesario que las matemáticas del programa escolar se seleccionen juiciosamente y que se enseñen bien en nuestras escuelas.

Tomando esto en consideración, las organizaciones de matemáticas en los Estados Unidos cooperaron en la formación del Grupo de Estudio de la Matemática Escolar (SMSG). Este grupo lo constituyen matemáticos de colegios y universidades, maestros de matemáticas de todos los niveles, expertos en educación y representantes de la ciencia y la tecnología. El propósito general del SMSG es el mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas en las escuelas de los Estados Unidos. La Fundación Nacional de Ciencias ha provisto fondos sustanciales para el financiamiento de esta labor.

Uno de los prerrequisitos para el mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas en nuestras escuelas es un mejor programa de estudios, un programa que tome en consideración el uso creciente de las matemáticas en la ciencia, la tecnología y otros campos del conocimiento y que, a la vez, refleje los avances recientes de las matemáticas mismas. Uno de los primeros proyectos del SMSG fué reclutar un grupo de matemáticos y maestros de matemáticas distinguidos para preparar una serie de libros de texto ilustrativos de un programa de estudios como el ya mencionado.

Los matemáticos profesionales en el SMSG creen que el contenido matemático presentado en este texto es valioso para todos los ciudadanos cultos de nuestra sociedad, y que su aprendizaje es importante para los estudiantes que van a ingresar en universidades, como preparación para estudios avanzados en este campo. Al mismo tiempo, los maestros en el SMSG creen que la forma en que aquí se presenta el material de estudio facilita al estudiante su asimilación.

En la mayoría de los casos el material parecerá familiar, pero su presentación y punto de vista serán diferentes. Algún material será completamente nuevo en relación con los programas de estudios tradicionales. Así debe ser, porque las matemáticas constituyen una disciplina viva y en constante crecimiento y no un producto inerte y rígido de la antigüedad. Esta fusión saludable entre lo antiguo y lo nuevo debe guiar a los estudiantes hacia una mejor comprensión de los conceptos básicos y de la estructura de las matemáticas y ofrecer una base sólida para la comprensión y el uso de las matemáticas en una sociedad científica.

No pretendemos que este libro se considere como la única manera definitiva de presentar correctamente las matemáticas a los estudiantes en este nivel. En cambio debe considerarse como una muestra de la clase de programa de estudios que necesitamos y como una fuente de sugerencias para los autores de textos comerciales. Esperamos sinceramente que estos textos señalen el camino hacia una enseñanza más inspirada y significativa de las matemáticas, disciplina que es la reina y sierva de las ciencias.

TABLA DE MATERIAS

Capítulo

NOTA: Algunos ejercicios han sido marcados con un asterisco (*) para orientar al maestro en la selección de los mismos.

PREFACIO

Al alumno:

Este libro se escribió para ti, para que lo leas. No es una mera lista de problemas.

Tu crecimiento matemático y, en consecuencia, la satisfacción y el placer que derives del estudio del álgebra dependerán grandemente de la lectura cuidadosa del texto. Por eso verás la importancia del desarrollo de hábitos eficaces en la lectura de las matemáticas.

Leer sobre matemática no es lo mismo que leer una novela. En ocasiones comprenderás sólo una pequeña parte del material en la primera lectura, un poco más la segunda vez, y solamente tras una tercera lectura te sentirás seguro de ti mismo. Con frecuencia será necesario usar lápiz y papel para hacer ejemplos o aclarar detalles.

Ante ti hay ahora una nueva y fecunda experiencia. ¡Aprovéchala lo mejor que puedas! ¡Empieza!

Capítulo 1

CONJUNTOS Y LA RECTA NUMERICA

1-1. Conjuntos y subconjuntos

¿Podrías ofrecer una descripción de los siguientes:

Alabama, Arkansas, Álaska, Arizona?

¿Cómo describirías éstos:

lunes, martes, miércoles, jueves, viernes?

Añade

sábado y domingo

al grupo anterior y luego describe los siete. Describe la colección de números:

1, 2, 3, 4, 5;

la colección de números:

2, 3, 5, 7, 8.

Te preguntarás si has entrado a la clase correcta. ¿Qué relación hay entre estas preguntas y la matemática? Cada una de las colecciones anteriores es un ejemplo de un conjunto. Tus respuestas a las preguntas deberían haberte sugerido que cada conjunto era una colección particular de miembros o elementos con alguna característica en común. Esta característica pudiera ser solamente que aparezcan todos juntos en una lista.

El concepto de conjunto será uno de los más sencillos entre los que aprenderás en matemática. Un conjunto es meramente una colección de elementos (en este curso casi siempre serán números).

Necesitamos ahora algunos símbolos para indicar que estamos construyendo o describiendo conjuntos. Si es posible hacer una lista de los miembros de un conjunto, podríamos encerrarlos entre llaves, así el conjunto de los primeros cinco números impares se representa por:

$\{1, 3, 5, 7, 9\}$;

el conjunto de todos los números pares entre 1 y 9 por:

$\{2, 4, 6, 8\}$;

y el conjunto de los estados cuyos nombres empiezan con la letra C por:

{California, Colorado, Connecticut}.

¿Podrías hacer una lista de todos los elementos del conjunto de los números impares y otra de los nombres de todos los ciudadanos de los Estados Unidos de América? Verás que en estos casos preferiríamos, o más bien nos veríamos forzados a describir el conjunto sin tratar de hacer una lista de todos sus elementos.

Es conveniente usar letras mayúsculas para nombrar conjuntos, así

$$A = \{1, 3, 5, 7\}$$

o también

A es el conjunto de todos los números impares entre 0 y 8.

Cuando un niño aprende a contar, recita algunos de los primeros elementos del conjunto N que nosotros llamamos el conjunto de los <u>números naturales</u>:

$$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Escribimos primero suficientes elementos del conjunto para ilustrar la ley que obedecen y luego usamos tres puntos que quieren decir, "y así sucesivamente". Cuando al conjunto N le añadimos el número 0, obtenemos un nuevo conjunto W al que llamaremos el conjunto de los <u>números cardinales</u>:

$$W = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Surge ahora una pregunta interesante. ¿Cómo podríamos describir un conjunto tal como el de todos los números cardinales pares mayores que 8 y a la vez menores que 10? ¿Contiene este conjunto <u>algún</u> elemento? Tal vez no te inclinarías a llamar a esto un conjunto, debido a que no hay manera de hacer una lista de sus elementos. En matemáticas llamamos conjunto <u>vacío</u> o <u>nulo</u> al que no contiene elementos. Usaremos el símbolo $\emptyset$ para denotar el conjunto vacío.

¡Advertencia! El conjunto $\{0\}$ <u>no</u> está vacío; contiene el elemento 0. Por otra parte, nunca escribimos entre llaves el símbolo $\emptyset$ del conjunto vacío.

Tal vez puedas pensar en más ejemplos de conjunto vacío, como el conjunto de todos los números cardinales entre $\frac{4}{3}$ y $\frac{5}{4}$.

Observa que cuando hablamos en términos de conjuntos, nos referimos más a colecciones de elementos que a los elementos individuales en sí. Ciertos conjuntos pueden contener elementos que también pertenecen a otros conjuntos. Por ejemplo, consideremos los conjuntos

$$R = \{0, 1, 2, 3, 4\} \text{ y } S = \{0, 2, 4, 6\}.$$

Forma el conjunto T de todos los números que pertenecen a ambos R y S. Por tanto

$$T = \{0, 2, 4\}.$$

Vemos que todos los elementos de T lo son también de R. Decimos que T es un <u>subconjunto</u> de R.

> Si todo elemento del conjunto A pertenece al conjunto B, entonces A es un <u>subconjunto</u> de B.

¿Es T un subconjunto de S?

Consecuencia de lo anterior es que todo conjunto es un subconjunto de sí mismo. Comprueba por ti mismo que $\{0, \frac{1}{2}, 3, 4\}$ es un subconjunto de sí mismo. Convendremos también que el conjunto nulo, $\emptyset$, es un subconjunto de todo conjunto.

<u>Conjunto de problemas 1-1a</u>

1. Haz una lista de los elementos del conjunto de
   (a) Todos los números cardinales impares del 1 al 12, inclusive.
   (b) Todos los números del 0 al 50, inclusive, que sean los cuadrados de números cardinales.
   (c) Todos los números cardinales de dos cifras, en cada uno de los cuales la cifra de las unidades es el doble de la cifra de las decenas.
   (d) Todos los números cardinales del 0 al 10, inclusive, que sean raíces cuadradas de números cardinales.
   (e) Todas las ciudades en los Estados Unidos de América cuya población exceda de cinco millones.
   (f) Todos los números menores que 10 que sean los cuadrados de números cardinales.
   (g) Los cuadrados de todos aquellos números que sean menores que 10.
   (h) Todos los números cardinales menores que 5 y al mismo tiempo mayores que 10.

2. Dados los siguientes conjuntos:
P, el conjunto de números cardinales mayores que 0 y menores que 7;
Q, el conjunto de números naturales menores que $\frac{13}{2}$;
R, el conjunto de números representados por los símbolos en las caras de un dado;
S, el conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
(a) Haz una lista de los elementos de cada uno de los conjuntos P, Q, R.
(b) Describe el conjunto S.
(c) Usando como base las contestaciones de (a) y (b), decide cuántas descripciones de un conjunto se pueden hacer.

3. Halla U, el conjunto de todos los números cardinales del 1 al 4, inclusive. Luego halla T, el conjunto de los cuadrados de todos los elementos de U. Ahora halla V, el conjunto de todos los números que pertenezcan a ambos conjuntos, U y T. (¿Incluiste al 2 en el conjunto V? Pero 2 no es un elemento de T, de manera que no puede pertenecer a ambos, U y T.) ¿Pertenece a U todo elemento de V? ¿Es V un subconjunto de U? ¿Es V un subconjunto de T? ¿Es U un subconjunto de T?

4. Volvamos al problema 3; sea K el conjunto de todos los números que pertenecen bien a U, a T, o a los dos, U y T. (¿Incluiste al 2 en el conjunto K? Has hecho lo correcto, porque el 2 pertenece a U, por lo tanto, pertenece a uno de los dos conjuntos, U o T. Los números 1 y 4 pertenecen a ambos conjuntos, U y T, pero los incluimos sólo una vez en K.) ¿Es K un subconjunto de U? ¿Es U un subconjunto de K? ¿Es T un subconjunto de K? ¿Es U un subconjunto de U?

*5. Considera los cuatro conjuntos: $\emptyset$
A = {0}
B = {0, 1}
C = {0, 1, 2}.

¿Cuántos subconjuntos diferentes se pueden construir de los elementos de cada uno de estos cuatro conjuntos? ¿Podrías decir, sin necesidad de escribirlos, cuántos subconjuntos hay en el conjunto

$$D = \{0, 1, 2, 3\}?$$

¿Qué regla has descubierto para contestar la pregunta?

Un conjunto puede contener cualquier número de elementos. ¿Cuántos elementos hay en el conjunto de todos los números impares entre 0 y 100? ¿Podrías contar el número de estos elementos? ¿Necesitas contarlos para determinar cuántos hay?

¿Cuántos elementos hay en el conjunto de los números cardinales que son múltiplos de 5? (Un múltiplo de 5 es un número cardinal multiplicado por 5.) ¿Puedes contar el número exacto de elementos en este conjunto?

Considera un conjunto cuyos elementos se puedan contar, aun cuando el hacerlo requiera una gran cantidad de tiempo y esfuerzo. Un conjunto como éste es el conjunto de todos los seres vivientes en un instante dado. Por otra parte, hay conjuntos cuyos elementos no se pueden contar, porque su número no tiene fin.

Diremos que un conjunto es <u>finito</u> si se puede contar el número exacto de sus elementos, o si dicho conjunto es el conjunto nulo. De otro modo, lo llamaremos un conjunto <u>infinito</u>. Decimos que un conjunto infinito contiene un número <u>infinito</u> de elementos.

Algunas veces un conjunto finito puede contener tantos elementos que es preferible abreviar la lista que se haga de ellos. Por ejemplo, se puede escribir el conjunto E de todos los números pares entre 2 y 50 como

$$E = \{4, 6, 8, \ldots, 48\}.$$

<u>Conjunto de problemas 1-1b</u>

1. ¿Cuántos elementos hay en cada uno de los siguientes conjuntos?
   (a) El conjunto de todos los números cardinales del 10 al 27, inclusive.
   (b) El conjunto de todos los números impares entre 0 y 50.
   (c) El conjunto de todos los múltiplos de 3.
   (d) El conjunto de todos los múltiplos de 3 entre 0 y 99, inclusive.

(e) El conjunto de todos los múltiplos de 10 entre 10 y 1,000, inclusive.

2. Clasifica, como finito o infinito, cada uno de los siguientes conjuntos:
   (a) Todos los números naturales.
   (b) Todos los cuadrados de los números naturales.
   (c) Todos los ciudadanos de los Estados Unidos de América.
   (d) Todos los números naturales menores que un billón.
   (e) Todos los números naturales mayores que un billón.

3. Dados los conjuntos $S = \{0, 5, 7, 9\}$ y $T = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$.
   (a) Halla K, el conjunto de todos los números que pertenecen a ambos S y T. ¿Es K un subconjunto de S? ¿De T? ¿Son S, T, y K finitos?
   (b) Halla M, el conjunto de todos aquellos números que pertenecen bien a S, a T, o a los dos. (Un mismo número no se incluye más de una vez en un conjunto.) ¿Es M un subconjunto de S? ¿Es T un subconjunto de M? ¿Es M finito?
   (c) Halla R, el subconjunto de M, que contenga todos los números impares que hay en M. ¿De cuáles otros de nuestros conjuntos es éste un subconjunto?
   (d) Halla A, el subconjunto de R, que contenga todos los miembros de M que sean múltiplos de 11. ¿Has encontrado que A no tiene elementos? ¿Cómo llamamos a este conjunto?
   (e) ¿Son los conjuntos A y K el mismo conjunto? Si no, ¿en qué difieren?
   (f) Basándote en tus experiencias con los problemas anteriores, ¿podrías llegar a la conclusión de que los subconjuntos de conjuntos finitos son también finitos?

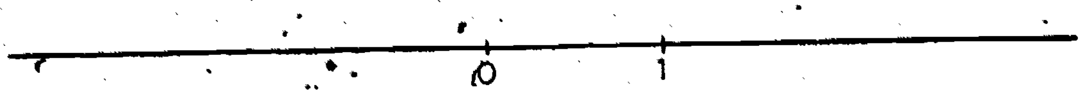
4. Usando como referencia la definición de múltiplo de 5 que dimos anteriormente, define un número cardinal par en términos de múltiplos. ¿Es 0 un número par?

1-2. La recta numérica

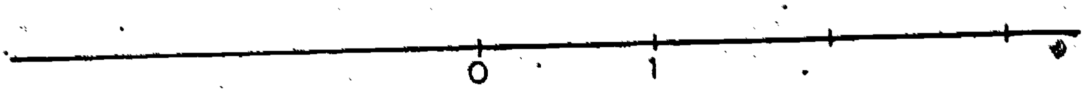
Al estudiar la aritmética, empezaste a usar los números para contar; más tarde los consideraste como símbolos, aparte de su uso para contar. Trabajaste también con puntos en escalas o líneas, como por ejemplo en una regla o en un termómetro. Suponte que ahora asociemos números con puntos en una recta.

Primero, trazamos una recta considerándola como un conjunto de puntos. ¿Cuántos puntos? Ciertamente, hay un número infinito de ellos. Vamos a asociar algunos de estos puntos con números, en la siguiente forma:

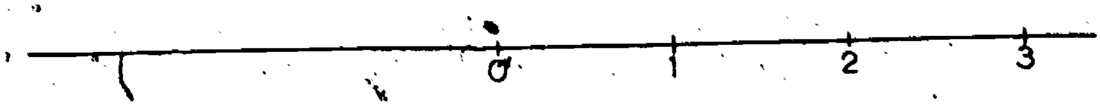
Escoge dos puntos distintos en una línea y marca el punto de la izquierda con el símbolo 0 y el de la derecha con 1.



Usando el intervalo entre estos dos puntos como unidad de medida, y empezando en el punto que asociaste con el 1, localiza puntos en la recta, a intervalos iguales y hacia la derecha. Sabemos que este proceso no tiene fin, aun cuando no podemos continuarlo más allá del margen derecho de esta página.



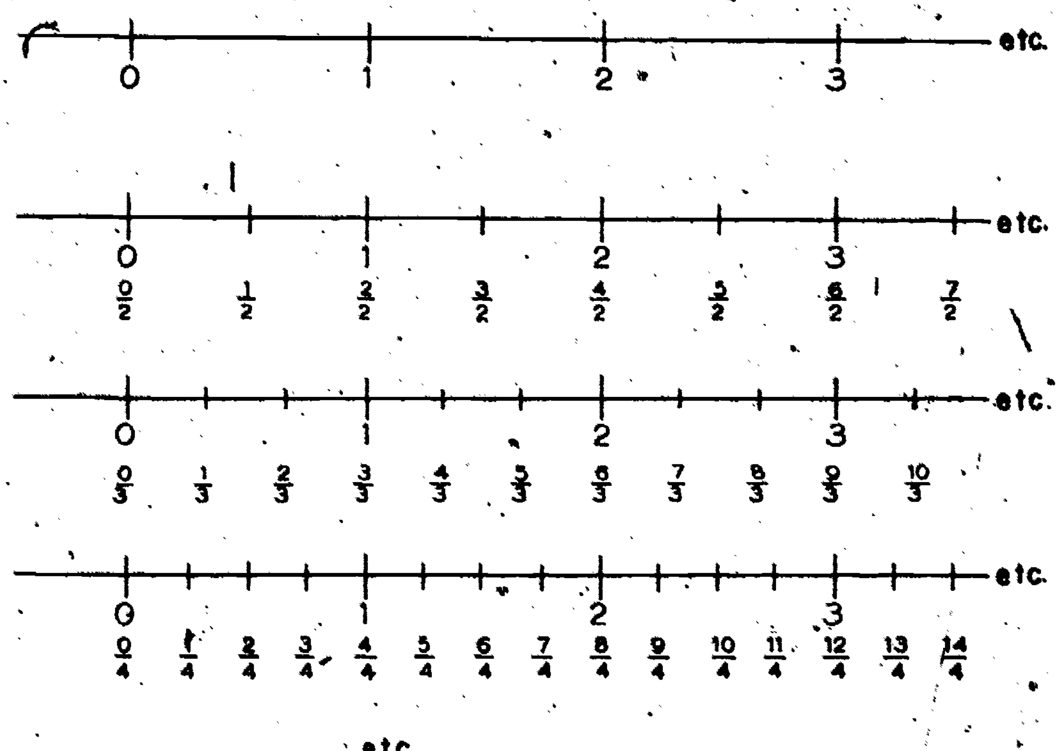
Marca ahora estos puntos, de izquierda a derecha, asignándole a cada nuevo punto el número cardinal que sigue al del punto anterior. La línea se verá así:



Observa que cada número cardinal va seguido a su derecha por su sucesor. ¿Cuál es el sucesor de 105? ¿De 100000005? Selecciona un número natural tan grande como puedas imaginarte. ¿Tendrá este número un sucesor? Formula una regla para hallar el sucesor de un número natural. ¿Qué implicaciones conlleva esto? Una es que, como todo número natural tiene un sucesor, no puede haber uno que sea el mayor de todos ellos; por lo tanto, el conjunto de los números naturales es infinito.

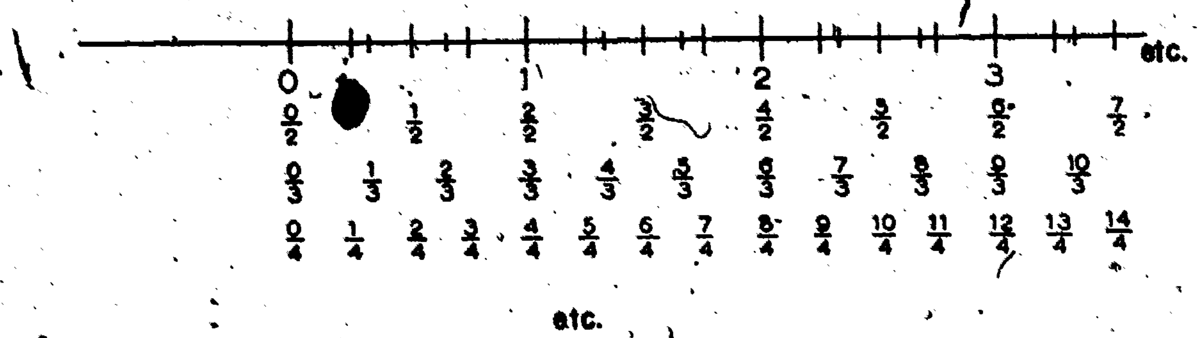
Cerciorémonos de que entendemos que <u>todo</u> número cardinal está ahora asociado con un punto de la recta ilimitada y que <u>todo</u> punto hasta ahora localizado en esa recta está asociado con un número cardinal. Esta correspondencia entre conjuntos de números y conjuntos de puntos en una recta es una idea que usaremos muchas veces durante el curso.

En la recta donde marcamos puntos con números cardinales podemos seguir marcando otros puntos dividiendo los intervalos en mitades, tercios, cuartos, etc., para obtener



donde se puede ver un conjunto interminable de rectas divididas en intervalos, a su vez subdivididos sucesivamente en más y más partes.

Coloquemos todas estas subdivisiones en una misma recta. Los puntos así determinados corresponden a algunos de los elementos del conjunto de números que llamamos <u>números racionales</u>.



A una recta en la cual marcamos, como acabamos de hacer, puntos con números, la llamaremos <u>recta numérica</u>. Al número asociado con un punto le llamaremos la <u>coordenada</u> del punto.

Vamos a repasar ahora lo que entendemos por una "fracción". Observemos que la coordenada del punto que corresponde al 2, en la recta numérica, tiene nombres diferentes:

$$\frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{8}{4}, \text{etc.}$$

Cada uno de estos símbolos es una <u>fracción</u> y cada uno es un nombre distinto para el mismo número 2. El número que llamamos "$2\frac{1}{2}$" puede ser representado también por medio de fracciones: $\frac{5}{2}, \frac{10}{4}, \frac{15}{6}$, etc. También podemos representar el número que llamamos ".6" por medio de: $\frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{9}{15}$, etc. En general entenderemos por una fracción un símbolo que indica el cociente de dos números.

Llamamos <u>número racional</u> a un número que se puede representar por medio de una fracción que indique el <u>cociente de dos números cardinales</u>, excluyendo la división por 0. Así, 2, $2\frac{1}{2}$, .6, $\frac{3}{2}$, $\frac{1001}{37}$ son ejemplos de números racionales. Más tarde estudiaremos números racionales que corresponden a puntos a la izquierda del 0 en la recta numérica. Veremos también que no todas las fracciones representan números racionales; pero, por definición, todo número racional se puede representar por una fracción. Representa los siguientes números racionales por medio de fracciones: $3\frac{1}{3}$, 7, 3.5, 0.

Los detalles importantes que debes recordar son los siguientes:

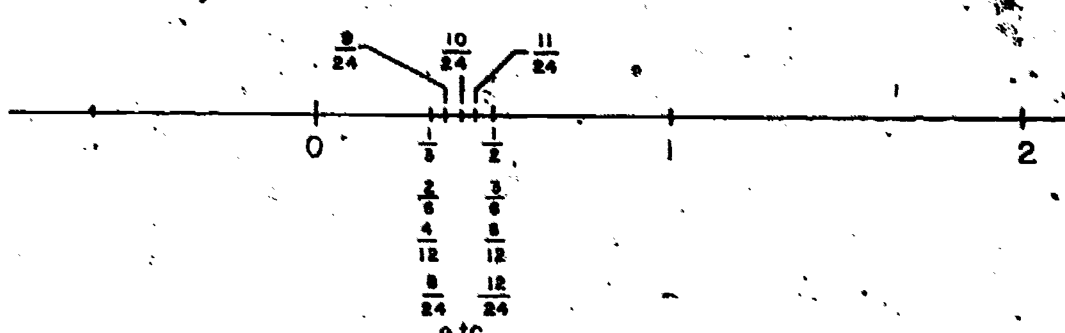
(1) Un número racional se puede representar por una fracción. (¿Debe estar siempre representado por una fracción?)

(2) El conjunto de los números cardinales es un subconjunto del conjunto de los números racionales; esto es, todos los números cardinales son números racionales. (¿Son números cardinales todos los números racionales?)

(3) Hay muchos nombres posibles para un mismo número.

(4) Tenemos un procedimiento para localizar en la recta numérica el punto correspondiente a cualquier número racional dado; esto es, a cada elemento del conjunto de números racionales le corresponde un punto en la recta numérica.

Pensarás que en el proceso de asignar números a puntos, se agotarán los puntos. ¿Estaremos seguros que entre dos puntos cualesquiera, sea cual fuere su proximidad, hay otro punto? Podemos contestar esta pregunta para puntos que corresponden a números racionales de la siguiente forma: Escoge dos de estos puntos, por ejemplo, los puntos cuyas coordenadas sean $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$. Sabemos que $\frac{1}{3}$ tiene los nombres: $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{8}{24}$, etc.; y $\frac{1}{2}$ tiene los nombres: $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{6}{12}$, $\frac{12}{24}$, etc. Entonces un número entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ es un número entre $\frac{8}{24}$ y $\frac{12}{24}$. Se puede escoger como uno de estos números a $\frac{9}{24}$, $\frac{10}{24}$, u $\frac{11}{24}$.



Así, los puntos cuyas coordenadas son $\frac{9}{24}$, $\frac{10}{24}$, $\frac{11}{24}$ están entre los puntos con coordenadas $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$.

Este procedimiento de localizar un punto entre dos puntos hallando un número entre dos números se puede llevar a cabo con dos puntos cualesquiera no importando su proximidad. Esto nos muestra; no solamente que hay un gran número de puntos entre dos puntos cualesquiera, sino que el número de ellos es infinito.

Ahora estamos seguros de que todo número racional corresponde a un punto en la recta numérica. ¿Crees que cada punto en la recta numérica (a la derecha del cero) corresponde a un número racional? En otras palabras, ¿crees que podemos marcar cada punto a la derecha del 0 con un número racional?

La contestación a esta pregunta, aunque te asombre, es "No". Más tarde demostraremos esta aseveración, y pronto asociaremos números con puntos a la izquierda del 0. Mientras tanto, vamos a suponer que <u>todo</u> punto a la derecha del 0 tiene una coordenada numérica, aun cuando algunos de estos números <u>no</u> sean racionales.

Resumiendo las aseveraciones anteriores: Existe un número infinito de puntos en la recta numérica. Hay también un número infinito de puntos cuyas coordenadas son números racionales. Por cierto, hay un número infinito de puntos entre cada par de puntos en la recta numérica. Aunque sólo hayamos visto esto para puntos con coordenadas racionales, ello es cierto también para todos los puntos.

En los capítulos 1 al 4 nos ocuparemos del conjunto de números que consiste en 0 y todos los números correspondientes a puntos a la derecha del 0. Cuando en estos capítulos hablamos de "números" de la aritmética nos referiremos a números de dicho conjunto.

<u>Conjunto de problemas 1-2a</u>

1. ¿Cuántos números hay entre 2 y 3? ¿Entre $\frac{2}{500}$ y $\frac{3}{500}$? Escribe dos números que se encuentren entre 2 y 3; entre $\frac{2}{500}$ y $\frac{3}{500}$.

2. En la recta numérica, indica por medio de marcas obscuras aquellos puntos cuyas coordenadas son:

   (a) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{11}{2}$, $\frac{13}{2}$.

   (b) Números racionales representados por fracciones con 5 como denominador, empezando con $\frac{1}{5}$ hasta llegar a $\frac{20}{5}$.

(c) 0, 0.5, 0.7, 1.1, 1.5, 1.8, 2, 2.7, 3.5, 4, 4.1.

(d) ¿Cuáles de los símbolos que aparecen en (a) y (c) no son fracciones? ¿Cuáles de los símbolos en (a) y (c) representan números racionales?

3. En el problema 2(b) la coordenada del punto asociado con $\frac{20}{5}$ podría tener otro nombre; a saber, el nombre habitual de un número natural. ¿Cuál sería éste? ¿Puedes escribir otros cuatro nombres del número que sirvan como coordenada de este punto?

4. Escribe seis nombres para la coordenada del punto asociado con $\frac{3}{4}$.

5. Vemos que en la recta numérica algunos puntos están a la derecha de otros, algunos a la izquierda de otros, y algunos entre otros. ¿Dónde está localizado el punto cuya coordenada es 3.5 en relación al punto cuya coordenada es 2? ¿Cuál es el mayor de 3.5 y 2? ¿Dónde está localizado el punto cuya coordenada es 1.5 con relación al punto cuya coordenada es 2? ¿Cuál es el mayor de 1.5 y 2?

6. ¿Entre qué dos números cardinales consecutivos se halla $\frac{22}{7}$? ¿Es $\frac{22}{7}$ mayor que 3.1? ¿Está el punto cuya coordenada es $\frac{22}{7}$ localizado a la izquierda del punto cuya coordenada es 3.2? ¿Entre qué dos números, expresados en décimas, está $\frac{22}{7}$?

*7. ¿Qué puedes decir acerca de un conjunto S de números cardinales que tenga las siguientes dos características?

(1) 2 es un elemento de S

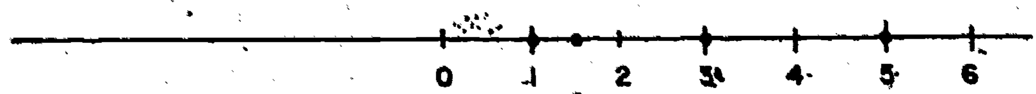
(2) el sucesor de cualquier número que pertenezca a S también pertenece a S.

Volvamos a la idea de un conjunto de números y representemos un conjunto en la recta numérica. Por ejemplo, cada elemento del conjunto

$$A = \{1, \tfrac{3}{2}, 3, 5\}$$

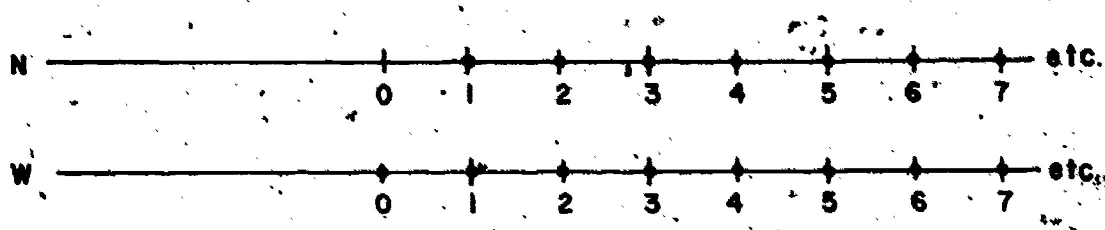
es un número asociado con un punto en la recta numérica. A este conjunto de puntos asociados le llamamos la <u>gráfica</u> del conjunto A.

Indicamos los puntos de la gráfica con marcas bien obscuras:



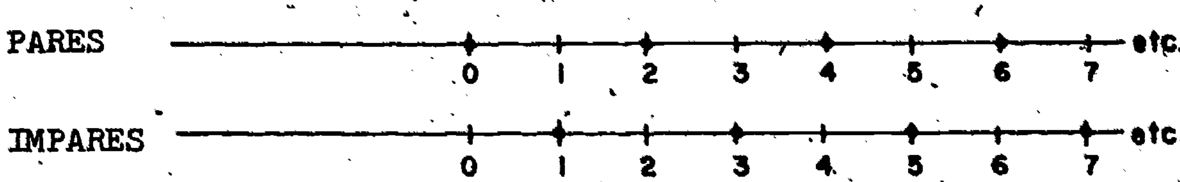
Así, la gráfica de un conjunto de números es el conjunto de puntos en la recta numérica cuyas coordenadas corresponden a los números del conjunto, y sólo esos puntos.

Observemos de paso que las gráficas del conjunto N de los números naturales y del conjunto W de los números cardinales son:



En estos diagramas vemos inmediatamente que N es un subconjunto de W.

A continuación aparece la gráfica del conjunto de los números cardinales pares así como la del conjunto de los números cardinales impares:



<u>Conjunto de problemas 1-2b</u>

1. Dados los conjuntos $S = \{0, 3, 4, 7\}$ y $T = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$.
   (a) Halla K, el conjunto de todos los números pertenecientes a ambos S y T; y M, el conjunto de todos aquellos números que pertenezcan a S, a T, o a los dos.
   (b) Traza cuatro rectas numéricas idénticas, una debajo de la otra. En rectas consecutivas indica las gráficas de los conjuntos S, T, K y M.

(c) ¿Ves algún procedimiento que te permita obtener las gráficas de K y M de las gráficas de S y T?

2. Considera los conjuntos $A = \{0, 5, 7, 9\}$ y $B = \{1, \frac{5}{2}, 8, 10\}$.

(a) Traza dos rectas numéricas idénticas, una debajo de la otra, e indica en ellas las gráficas de A y B.

(b) Si C es el conjunto de los números que pertenecen a ambos A y B; ¿qué infieres sobre el conjunto C, al estudiar las gráficas de A y B? ¿Cómo se llama este conjunto?

*3. Todo conjunto finito tiene la propiedad de poder ser apareado en forma biunívoca con un conjunto finito de números naturales. Por ejemplo, el conjunto de todas las letras del alfabeto inglés puede ser apareado en forma biunívoca con el conjunto de los primeros 26 números naturales.

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, & 26 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ a, & b, & c, & d, & \ldots, & z \end{array}$$

Un conjunto infinito, sin embargo, no puede ser apareado en forma biunívoca con un conjunto finito. Pero sí tiene la sorprendente propiedad de poder ser apareado en forma biunívoca con los elementos de algún subconjunto <u>propio</u> de sí mismo. (Un subconjunto propio de un conjunto es uno que no contiene todos los elementos del conjunto.) ¿Cómo se puede aparear, en forma biunívoca, el conjunto de los números cardinales (que es infinito) con el conjunto de todos los múltiplos de 3 (que es un subconjunto propio del primero)?

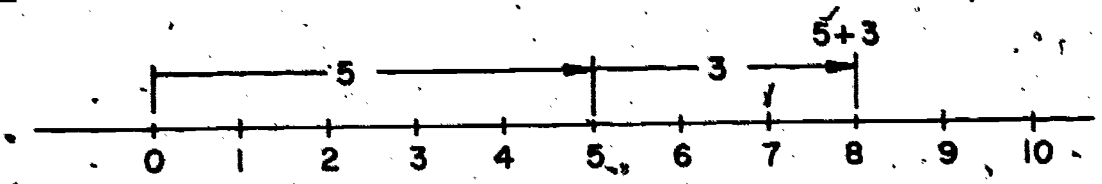
1-3. Suma y multiplicación en la recta numérica

Hemos visto cómo se pueden representar conjuntos de números en una recta numérica. Vamos ahora a usar la recta numérica para representar la suma y la multiplicación de números.

Recordemos primero que

$$5 + 3$$

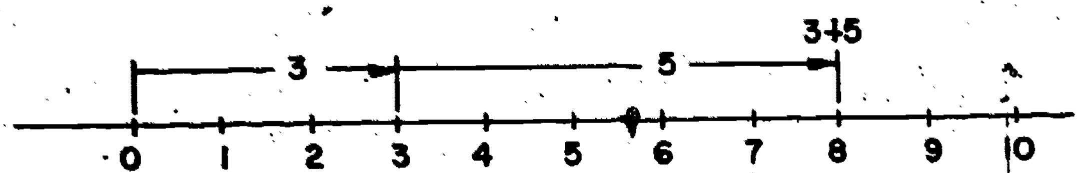
es un símbolo para un número que se obtiene sumándole 3 a 5. Esto se puede interpretar como moverse en la recta numérica desde 0 hasta 5 y desde este punto moverse tres unidades hacia la derecha, localizando así el punto cuya coordenada es $5 + 3$.



Tomemos otro ejemplo: vamos a hallar

$$3 + 5$$

en la recta numérica. Nos movemos desde 0 hasta 3 y luego 5 unidades más hacia la derecha, localizando así el punto cuya coordenada es $3 + 5$.



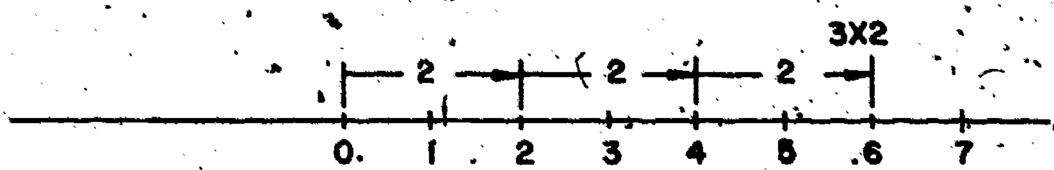
Como podemos ver en los diagramas, estos dos procedimientos para sumar son diferentes; aun cuando terminan en el mismo punto. Esto es, "$5 + 3$" y "$3 + 5$" son símbolos distintos para el mismo número 8.

Tal vez nos preguntemos si la suma es siempre posible en la recta numérica. ¿Será la suma de dos números racionales cualesquiera en la recta numérica un número racional? Te sugerimos que pienses sobre esto cuidadosamente.

El procedimiento para multiplicar dos números naturales en la recta numérica es parecido al que usamos para sumar si recordamos que, por ejemplo,

$$3 \times 2$$

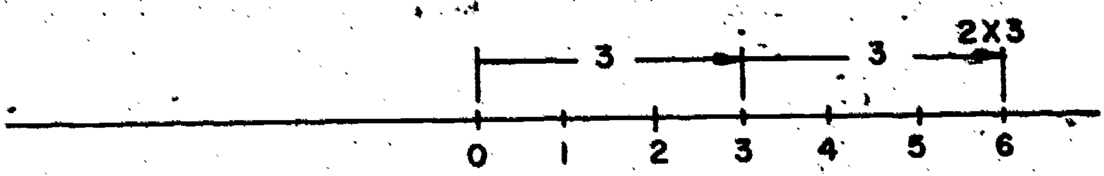
es un símbolo para representar el número que se obtiene al tomar el 2 tres veces como sumando. En la recta numérica se interpreta esto tomando el segmento entre 0 y 2 como unidad de medida y moviéndose hacia la derecha del 0 una distancia igual a tres veces dicho segmento. Así localizamos el punto cuya coordenada es 3×2.



Consideremos otro ejemplo:

$$2 \times 3$$

es un símbolo para el número que se obtiene al tomar 3 dos veces como sumando. En la recta numérica tomamos el segmento entre 0 y 3 como unidad de medida y nos movemos hacia la derecha del 0 una distancia igual a dos veces dicho segmento. El punto terminal tiene la coordenada 2×3.



Como podemos ver en los diagramas, estas dos multiplicaciones en la recta numérica son distintas, pero en ambos casos se termina en el mismo punto.

Conjunto de problemas 1-3

1. Efectúa las siguientes operaciones en la recta numérica:

   (a) $4 + 6$ (d) 5×2

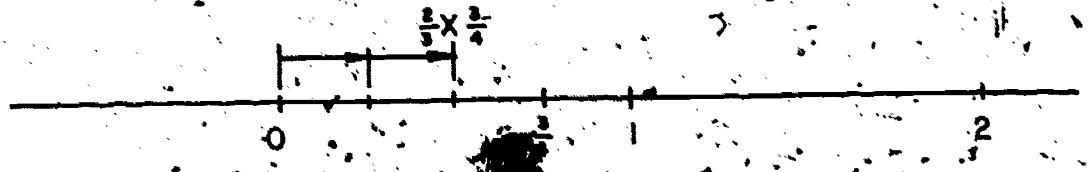
   (b) 3×4 (e) $\frac{4}{3} + 3\frac{1}{3}$

   (c) $0 + 0.8$ (f) 4×1

2. Describe un procedimiento para restar números en la recta numérica. Aplica dicho procedimiento a

   (a) $6 - 2$ (b) $7 - 3$ *(c) $1.8 - \frac{9}{5}$

*3. Podemos representar la multiplicación de números racionales en la recta numérica de la siguiente manera: Considera "$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$", que es un símbolo que representa dos tercios de $\frac{3}{4}$. En la recta numérica se divide el segmento entre 0 y $\frac{3}{4}$ en tres partes iguales y se localiza el punto que corresponde al extremo derecho de la segunda parte.



Efectúa las siguientes operaciones en la recta numérica:

(a) $\frac{1}{2} \times 4$ (b) $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$

4. (a) ¿Será impar la suma de dos números impares cualesquiera? Da un ejemplo.
   (b) ¿Será impar el producto de dos números impares cualesquiera? Da un ejemplo.
5. Considera el conjunto $T = \{1, 2, 3, 4\}$. Si seleccionamos cualquier elemento de este conjunto y le sumamos cualquier otro elemento del conjunto (incluyendo el sumarlo consigo mismo), ¿cuál es el conjunto S de todas las posibles sumas? ¿Es S un subconjunto de T?
6. Considera el conjunto $Q = \{0, 1\}$. Elige cualquier elemento de Q y multiplícalo por cualquier elemento de Q, incluyendo a él mismo. ¿Cuál es el conjunto P de todos los posibles productos? ¿Es P un subconjunto de Q?

*7. Considera el conjunto $Q = \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$. Como en el caso del problema 6, haz una lista de todos los productos que se obtienen al multiplicar cualquier elemento de Q por cualquier elemento de Q. Obtendrás en esta forma el conjunto $P = \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$, el cual es un subconjunto de Q. Esta propiedad de los números impares se describe diciendo que el conjunto Q es "cerrado respecto de la multiplicación". En general si se efectúa cierta operación con todos los pares de elementos de un conjunto dado K y obtenemos como resultado un conjunto P que sea un subconjunto de K, entonces decimos que K es <u>cerrado respecto de</u> dicha operación.
   (a) ¿Es el conjunto Q cerrado respecto de la suma?
   (b) ¿Es el conjunto de los números pares cerrado respecto de

la suma? ¿Y respecto de la operación de hallar la media aritmética?

(c) ¿Es el conjunto de los números cardinales cerrado respecto de la suma? ¿Y respecto de la multiplicación?

(d) ¿Es el conjunto de los números racionales cerrado respecto de la suma? ¿Y respecto de la multiplicación?

*8. (a) Describe un conjunto que sea cerrado respecto de la operación, "dos veces el producto".

(b) Describe un conjunto que sea cerrado respecto de la operación "dos veces el producto más uno".

9. Resume las ideas importantes de este capítulo.

Capítulo 2

NUMERALES Y VARIABLES

2-1. Numerales y frases numéricas

Gran parte de tu vida la has pasado leyendo, escribiendo, hablando de, y trabajando con números. Has usado también muchos nombres distintos para un mismo número. Algunos números tienen uno o más nombres corrientes que son usados con más frecuencia al referirnos a ellos. Así, el nombre corriente para el número cinco es "5" y el de una gruesa es "144". Los nombres corrientes del número racional un medio, son "$\frac{1}{2}$" y "0.5". Un problema de aritmética puede considerarse como el problema de hallar un nombre corriente para un número que está expresado de alguna otra forma. Por ejemplo, en la aritmética encontramos que 17 por 23 es el número 391.

Los nombres de los números, en contraste con los números mismos, se llaman numerales. Por ejemplo, dos numerales que representan el mismo número son: la suma indicada, "4 + 2" y el producto indicado, "2 × 3". El número representado en cada caso es 6 y decimos que "el número 4 + 2 es 6", "el número 2 × 3 es 6", y que "el número 4 + 2 es el mismo que el número 2 × 3". Estas aseveraciones pueden abreviarse así: "4 + 2 = 6", "2 × 3 = 6", y "4 + 2 = 2 × 3". El uso que aquí damos al signo de igualdad ilustra su uso general con numerales: Un signo de igualdad entre dos numerales indica que tales numerales representan el mismo número.

Algunas veces, necesitaremos encerrar un numeral entre paréntesis para hacer claro que se trata realmente de un numeral. Por consiguiente, conviene considerar el símbolo obtenido al encerrar entre paréntesis el numeral que representa un número dado como otro numeral para el mismo número. Así, "(4 + 2)" es otro numeral para 6 y podríamos escribir "(4 + 2) = 6". Para abreviar, frecuentemente se sustituye el símbolo "×" de la multiplicación por un punto "·". Por lo tanto, "2 × 3" se puede escribir como "2 · 3". Para abreviar también, acordamos que al colocar dos numerales, uno al lado del otro, indicamos un producto. Por ejemplo, "2(7 - 4)" se interpreta lo mismo que "$2 \times (7 - 4)$". Observa, sin embargo, que "23" es el nombre corriente ya establecido para el número veintitrés y no puede entenderse como el producto indicado "2×3". Otra excepción sería "$2\frac{1}{4}$" que quiere decir "$2 + \frac{1}{4}$" y no "$2 \times \frac{1}{4}$". Sin embargo, podemos escribir "2(3)" ó "(2)(3)", en vez de "2×3". Igualmente podemos sustituir "$2 \times \frac{1}{4}$" por "$2 \cdot \frac{1}{4}$" ó "$2(\frac{1}{4})$".

Considera la expresión "$2 \times 3 + 7$". ¿Es ésta un numeral? Tal vez estés de acuerdo con que lo es, puesto que $2 \times 3 = 6$ y por lo tanto

$$2 \times 3 + 7 = 6 + 7 = 13.$$

Por otro lado, otra persona podría pensar que, como $3 + 7 = 10$,

$$2 \times 3 + 7 = 2 \times 10 = 20.$$

Vamos a examinar esta expresión con más cuidado. ¿Cómo la leemos? ¿Qué numerales comprende? Obviamente, "2", "3" y "7" son numerales pero, ¿qué podemos decir de "2×3" y "$3 + 7$"? Es cierto que "2×3", como un producto indicado, y "$3 + 7$", como una suma indicada, son numerales. Sin embargo, <u>en la expresión</u> "$2 \times 3 + 7$", si "2×3" es un producto indicado, entonces "$3 + 7$" <u>no puede</u> ser una suma indicada; o, si "$3 + 7$" es una suma indicada, entonces "2×3" <u>no puede</u> ser un producto indicado. Por lo tanto, a falta de información adicional para decidir entre estas alternativas, decimos que la expresión "$2 \times 3 + 7$" no es realmente un numeral, ya que no representa un número definido. Otra expresión en la que surge el mismo problema es "$10 - 5 \times 2$". Para evitar confusión en expresiones de esta clase, convendremos en que cuando no se indique otra cosa, <u>se efectúa primero la operación de multiplicación y luego las de suma y resta.</u> En otras palabras, "$2 \times 3 + 7$" se leerá tomando a "2×3" como un producto indicado, de manera que $2 \times 3 + 7 = 13$. Igualmente, "$10 - 5 \times 2$" se leerá tomando a "5×2" como un producto indicado, de modo que $10 - 5 \times 2 = 0$.

Los paréntesis también pueden utilizarse para indicar cómo deseamos que se lea una expresión. Tendremos solamente que encerrar en paréntesis aquellas partes de la expresión que deben tomarse como un numeral. Así, en el caso de "$2 \times 3 + 7$", podemos escribir "$(2 \times 3) + 7$" si queremos que "2×3" sea un numeral y "$2 \times (3 + 7)$" si queremos que "$3 + 7$" sea un numeral. En otras palabras, se efectúan primero las operaciones indicadas dentro del paréntesis. Deberás hacer uso de paréntesis cuantas veces sea necesario, para evitar toda duda en cuanto a cómo se debe leer una expresión.

El siguiente ejemplo ilustra otro caso en el cual es necesario llegar a un acuerdo sobre cómo se debe leer una expresión:

$$\frac{5(6 - 2)}{13 - 3}.$$

Se sobrentiende que las expresiones colocadas sobre y debajo de la raya de la fracción deben tomarse como numerales. Por lo tanto, la expresión es un cociente indicado de los números $5(6 - 2)$ y $13 - 3$.

Conjunto de problemas 2-1a

1. Escribe otros seis numerales para el número 8. ¿Cuántos numerales hay para el número 8?

2. Comprueba si los numerales representan el mismo número en cada uno de los siguientes:

   (a) $2 + 4 \times 5$ y 22
   (b) $(2 + 4) \times 5$ y 30
   (c) $3 \times 3 - 1$ y 6
   (d) $2 \times 5 + 1$ y $(2 \times 5) + 1$
   (e) $4 + 3 \times 2$ y $(4 + 3) \times 2$
   (f) $(3 + 2) + 5$ y $3 + (2 + 5)$
   (g) $14 - 4 \times 3$ y 2
   (h) $(4 + \frac{2}{3}) + \frac{1}{3}$ y $4 + (\frac{2}{3} + \frac{1}{3})$

3. Escribe un nombre corriente para cada numeral:

   (a) $2 \times 5 + 7$
   (b) $2(5 + 7)$
   (c) $(4 + 15)(2 + 5)$
   (d) $2 + 3(5 + 1)$
   (e) $(8 - 3)6 + 4$
   (f) $4 + 15(2) + 5$
   (g) $\frac{1}{2}(5 + 7 \times 3)$
   (h) $4(5) + \frac{9}{3}$
   (i) $\frac{5(6 - 2)}{10 - 3}$
   (j) $\frac{(7 - 2)(3 + 1)}{15}$
   (k) $\frac{6}{8 - 5}$
   (l) $\frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}}$

Expresiones tales como "$4 + 2$", "2×3", "$2(3 + 7)$" y "$(1 - \frac{1}{2})(16 + 4) - 5$" son ejemplos de frases numéricas. Cada una de ellas es un numeral formado por numerales más simples. Una frase numérica es un numeral dado mediante una expresión que comprende otros numerales, así como también signos de operaciones. Es necesario recalcar que una frase numérica tiene que representar un número; es decir, tiene que ser un numeral. Por lo tanto, una expresión carente de sentido como lo es "(3 +) × (2 +)-", no es una frase numérica. Aún la expresión "$2 \times 3 + 7$" no es una frase numérica si no tomamos en consideración el acuerdo de hacer la multiplicación antes que la suma.

Las frases numéricas se pueden combinar para formar enunciados numéricos; esto es, enunciados con afirmaciones sobre números. Por ejemplo,

$$2(3 + 7) = (2 + 3)(4 + 0)$$

es un enunciado que afirma que el número representado por "$2(3 + 7)$" es el mismo que el representado por "$(2 + 3)(4 + 0)$". Se lee, "$2(3 + 7)$ es igual a $(2 + 3)(4 + 0)$", y fácilmente puedes verificar que éste es un enunciado cierto.

Considera el enunciado,

$$(3 + 1)(5 - 2) = 10.$$

Este afirma que el número $(3 + 1)(5 - 2)$ es 10. ¿Te preocupa esto? Tal vez te preguntes cómo puede ser posible que el autor haya cometido tal error de aritmética, porque cualquiera puede ver que $(3 + 1)(5 - 2)$ es 12 y no 10. Sin embargo, "$(3 + 1)(5 - 2) = 10$" sigue siendo un enunciado a pesar de ser falso.

El dato importante acerca de un enunciado con numerales es que sea cierto o falso, pero no ambas cosas. Gran parte del trabajo en álgebra consiste en decidir si son o no ciertos algunos enunciados que contienen numerales.

Conjunto de problemas 2-1b

1. Determina cuáles de los siguientes enunciados son ciertos y cuáles son falsos:

(a) $(3 + 7)4 = 3 + 7(4)$ (e) $\frac{7 + 9}{2} = 7 + \frac{9}{2}$

(b) $4(5) + 4(8) = 4(13)$ (f) $\frac{16}{2} + 4 - 3 = \frac{16}{2} + (4 - 3)$

(c) $2(5 + \frac{1}{2}) = 2(5) + 2(\frac{1}{2})$ (g) $5(7 + 3) = 10(\frac{20}{5} + 1)$

(d) $23 - 5(2) = 36$ (h) $\frac{12}{3(2)} = \frac{12}{3}(2)$

(i) $3(8 + 2) = 6 \times 5$
(k) $3 + 7(9 + 2) = (3 + 7)(9 + 2)$
(j) $12 + (2 \times 3) = 12(9)$

2. Escribe un nombre corriente para cada numeral:
(a) $8 + 3(5 - 2) - (9 - 5)$
(d) $\frac{3(2) + 18}{6}$
(b) $3 \cdot 2(5) + 7 \cdot 4$
(e) $\frac{5(7 + 9)}{5}$
(c) $(\frac{2}{3})(\frac{3}{5}) + 2(6 - 3)$
(f) $0.6(2(3) + 4)(3) - \frac{12}{4}$

3. Suponte que estás explicando el uso de paréntesis a un amigo que no sabe nada acerca de ellos. Coloca paréntesis en cada una de las siguientes expresiones de manera que la expresión siga siendo un numeral para el mismo número:
(a) $\frac{1}{2} \times 6 + 3$
(c) $2 \times 3 + 4 \times 3$
(b) $2 \cdot 5 + 6 \cdot 2$
(d) $3 \times 8 - 4$

4. Coloca paréntesis en cada una de las siguientes expresiones de manera que obtengas enunciados ciertos:
(a) $10 - 7 - 3 = 6$
(j) $3 \times 5 - 2 \times 4 = 7$
(b) $3 \cdot 5 + 7 = 36$
(k) $3 \times 5 - 2 \times 4 = 52$
(c) $3 \cdot 5 + 7 = 22$
(l) $12 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times 9 = 51$
(d) $3 \cdot 5 - 4 = 3$
(m) $12 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times 9 = 3$
(e) $3 \cdot 5 - 4 = 11$
(n) $12 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times 9 = 18$
(f) $3 \times 5 + 2 \times 4 = 23$
(o) $3 + 4 \cdot 6 + 1 = 49$
(g) $3 \times 5 + 2 \times 4 = 84$
(p) $3 + 4 \cdot 6 + 1 = 31$
(h) $3 \times 5 + 2 \times 4 = 68$
(q) $3 + 4 \cdot 6 + 1 = 43$
(i) $3 \times 5 - 2 \times 4 = 36$
(r) $3 + 4 \cdot 6 + 1 = 28$

2-2. Algunas propiedades de la suma y de la multiplicación

Al final del capítulo 1, te acordaste de la suma y su representación en la recta numérica. Vamos a considerar ahora algunas de las propiedades* de la suma. Primero, la suma es una operación

*Propiedad, en el sentido familiar de la palabra, es algo que se posee. Una propiedad de la suma es algo que tiene la suma; es decir, una característica de la suma. Otro ejemplo del uso de este vocablo es, "la dulzura es una propiedad del azúcar".

binaria, en el sentido de que siempre se efectúa con dos números. Esto no parecerá muy razonable de primera intención ya que frecuentemente has sumado columnas largas de números. Como un experimento, trata de sumar 7, 8 y 3 simultáneamente. No importa cómo intentes hacerlo, te verás obligado a escoger dos de los números, sumarlos, y luego añadir el tercero a esa suma. Así, cuando escribimos $7 + 8 + 3$, queremos decir realmente $(7 + 8) + 3$ ó $7 + (8 + 3)$. Usamos el paréntesis aquí, como en casos anteriores, para señalar ciertos grupos de números con los cuales se ha de trabajar primero. Así, $(7 + 8) + 3$ implica que primero sumamos 7 y 8, y luego añadimos 3 a esta suma, de manera que pensamos en "$15 + 3$". De igual modo, $7 + (8 + 3)$ implica que vamos a añadirle a 7 la suma de 8 y 3, obteniendo así $7 + 11$. Observemos ahora que $15 + 3 = 18$ y que $7 + 11 = 18$. Hemos encontrado, pues, que

$$(7 + 8) + 3 = 7 + (8 + 3)$$

es un enunciado cierto.

Comprueba si el siguiente enunciado,

$$(5 + \tfrac{3}{2}) + \tfrac{1}{2} = 5 + (\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2})$$

es o no cierto.

Haz lo mismo con

$$(1.2 + 1.8) + 2.6 = 1.2 + (1.8 + 2.6),$$

y con

$$(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2}) + \tfrac{2}{3} = \tfrac{1}{3} + (\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3}).$$

Es evidente que estos enunciados siguen una ley común y que todos resultan ser ciertos. Llegamos a la conclusión de que todo enunciado que sigue esta ley es cierto. Esta es una propiedad de la suma de números; esperamos que trates de formularla tú mismo. Compara tu formulación con lo siguiente: Si añades un segundo número a un primer número, y a esta suma le añades un tercer número, el resultado será el mismo que si añades el segundo número al tercero y luego añades esta suma al primer número.

Esta propiedad de la suma se llama la propiedad asociativa de la suma. Es ésta una de las propiedades fundamentales del sistema numérico y una de cual depende toda la matemática. Incidentalmente, con frecuencia sirve para economizar trabajo al sumar. Esto lo vemos en el segundo ejemplo anterior: "$\frac{3}{2} + \frac{1}{2}$" es otro nombre para 2, de manera que "$5 + (\frac{3}{2} + \frac{1}{2})$" resulta ser una suma más sencilla que "$(5 + \frac{3}{2}) + \frac{1}{2}$". En el tercer ejemplo, tenemos ~~que~~ $1.2 + 1.8 = 3$; partiendo de esto, ¿cuál de las expresiones, "$(1.2 + 1.8) + 2.6$" y "$1.2 + (1.8 + 2.6)$", haría más fácil la suma final?

Examinemos el cuarto ejemplo. Ninguna de las expresiones "$(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}) + \frac{2}{3}$" y "$\frac{1}{3} + (\frac{1}{2} + \frac{2}{3})$" contiene una primera suma tan fácil de efectuar que nos simplifique el trabajo de la segunda suma. Si pudiéramos primero sumar $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{3}$ la suma sería 1, y es fácil añadir $\frac{1}{2}$ a 1. Lo que nos agradaría, entonces, es tomar la primera suma indicada en la expresión "$(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}) + \frac{2}{3}$", y escribirla como "$(\frac{1}{2} + \frac{1}{3})$" para que "$\frac{1}{3}$" quede inmediatamente antes que "$\frac{2}{3}$". Para ello, necesitamos saber que

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

es un enunciado cierto.

Aunque esto lo podemos comprobar muy bien por aritmética, vamos a considerar otros ejemplos más sencillos. ¿Es el siguiente enunciado cierto?:

$$3 + 5 = 5 + 3$$

Tal vez pienses: "Si yo me gano \$3 hoy y mañana \$5, tendré lo mismo que ganándome \$5 hoy y \$3 mañana". Tal vez Juan piense: "Caminando 3 millas antes del almuerzo y 5 millas después del almuerzo se recorre la misma distancia que caminando 5 millas antes del almuerzo y 3 millas después del almuerzo".

Recuerda ahora la recta numérica. ¿Qué hallamos en el capítulo 1 acerca de moverse desde 0 hasta 5 y luego moverse tres unidades más hacia la derecha, y cómo se comparaba esto con moverse desde 0 hasta 3 y luego moverse 5 unidades más hacia la derecha? ¿Qué nos dice esto acerca de $5 + 3$ y $3 + 5$? Usa este mismo procedimiento para decidir si los siguientes enunciados son ciertos:

$$0 + 6 = 6 + 0,$$

$$2\tfrac{1}{2} + 5 = 5 + 2\tfrac{1}{2}.$$

Probablemente conoces bien esta propiedad de la suma. Se llama la propiedad conmutativa de la suma. Trata de formularla tú mismo y compara lo que obtengas con lo siguiente: La suma de dos números es la misma no importa en qué orden se sumen.

La propiedad asociativa de la suma nos dice que, según sea nuestro deseo podemos o no usar paréntesis como símbolos de agrupación en una suma indicada. La propiedad conmutativa, a su vez, nos dice que las sumas, que lo son siempre de dos números a un tiempo, pueden hacerse en cualquier orden. Por ejemplo, si consideramos

$$32 + 16 + 18 + 4,$$

la propiedad asociativa nos dice que no es necesario el uso de paréntesis para agrupar los sumandos en esta suma indicada, porque no importa la forma en que los agrupemos, el resultado no varía. Podemos, si nos place, sumar 16 y 32, después añadir 18 a esa suma y finalmente añadirle 4 a esta última suma. La propiedad conmutativa nos dice que podemos escoger cualquier otro orden. Cuando efectuamos la operación mentalmente, es más fácil escoger pares de sumandos cuyas sumas sean múltiplos de 10 y considerarlos primero. Podemos pensar en "32 + 16 + 18 + 4" como si fuera "(32 + 18) + (16 + 4)", en donde las sumas indicadas nos dicen que primero sumamos 32 y 18 (que da una suma fácil, 50), luego 16 y 4, y finalmente las dos sumas parciales, 50 y 20. Primero hicimos uso mentalmente de la propiedad conmutativa para alterar el orden de los sumandos 16 y 18 en la suma indicada original.

Conjunto de problemas 2-2a

1. Considera varias maneras de efectuar mentalmente los siguientes cómputos y halla (si la hay) la que parezca más sencilla. Después efectúa de la manera más sencilla las sumas indicadas.

   (a) $6 + (8 + 4)$ (e) $2\frac{1}{5} + 3\frac{2}{3} + 6 + 7\frac{4}{5}$

   (b) $\frac{2}{5} + \frac{2}{3} + 1 + \frac{1}{3} + \frac{8}{5}$ (f) $(2\frac{1}{3} + 1) + \frac{6}{5}$

   (c) $5\frac{4}{7} + 6 + 14\frac{3}{7}$ (g) $(1.8 + 2.1) + (1.6 + .9) + 1.2$

   (d) $\frac{3}{4} + \frac{1}{3}$ (h) $(8 + 7) + 4 + (3 + 6)$

2. Desde la punta del hocico de un ratón hasta la parte posterior de su cabeza hay 32 milímetros; desde la parte posterior de su cabeza hasta el arranque de su cola hay 71 milímetros; desde el arranque de su cola hasta el extremo de ésta hay 76 milímetros. ¿Cuál es el largo del ratón desde la punta de su hocico hasta el extremo de su cola? ¿Tendrá el mismo largo desde el extremo de su cola hasta la punta de su hocico? ¿Por qué crees que hemos incluido aquí este ejercicio?

Examinaremos ahora las propiedades correspondientes de la multiplicación. Considera este enunciado,

$$(7 \times 6) \times \frac{1}{3} = 7 \times (6 \times \frac{1}{3}).$$

Comprueba si es o no un enunciado cierto; asegúrate de que efectúas las multiplicaciones como se indica. En forma similar, comprueba la veracidad de los enunciados

$$(4 \times 1.5) \times 3 = 4 \times (1.5 \times 3)$$

y

$$(\frac{3}{4} \times 7) \times 4 = \frac{3}{4} \times (7 \times 4).$$

Una vez más encontramos que estos enunciados son ciertos, y que se ajustan a una misma ley. Llegamos a la conclusión de que todos los enunciados que siguen esa ley son ciertos, y llamamos a esta propiedad de la multiplicación, <u>la propiedad asociativa de la multiplicación</u>. Recuerda tu esfuerzo para expresar en palabras la propiedad asociativa de la suma y, de manera semejante, enuncia ahora la propiedad asociativa de la multiplicación.

En los ejemplos anteriores no todas las multiplicaciones indicadas eran de igual dificultad. En el primero, "$(7 \times 6) \times \frac{1}{3}$", que nos da "$42 \times \frac{1}{3}$", resulta ser más trabajoso que "$7 \times (6 \times \frac{1}{3})$", que sencillamente se convierte en "7×2". ¿Cuál de las frases en el segundo enunciado es más fácil de manejar? Vemos, pues, que la propiedad asociativa de la multiplicación, al igual que la propiedad asociativa de la suma, puede usarse para simplificar las operaciones aritméticas que se efectúan mentalmente.

En el tercer enunciado, ninguna de las formas facilita la segunda multiplicación. Lo mejor que se puede hacer es multiplicar primero $\frac{3}{4} \times 4$, aun cuando no aparecen seguidos en ninguna de las dos frases, y luego multiplicar el resultado por 7. ¿Es esto permisible? Podríamos estar seguros de que lo es si supiéramos que

$$\frac{3}{4} \times 7 = 7 \times \frac{3}{4}$$

es un enunciado cierto. Este posible intercambio es uno que nos gustaría hacer antes de aplicar la propiedad asociativa. (¿Cuál sería otro?)

Como en la sección anterior, construye algunos problemas sencillos acerca de caminar o de ganar dinero que comprueben la veracidad de un enunciado como

$$2 \times 5 = 5 \times 2.$$

En el capítulo 1, tuviste también la experiencia de usar la recta numérica para ver que

$$2 \times 3 = 3 \times 2$$

es un enunciado cierto. De tu aritmética, también sabes que la multiplicación larga se puede hacer en cualquier orden, y probablemente has usado esa información para comprobar tu trabajo:

$$\begin{array}{r} 256 \\ \underline{63} \\ 768 \\ \underline{1536} \\ 16128 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 63 \\ \underline{256} \\ 378 \\ 315 \\ \underline{126} \\ 16128 \end{array}$$

Todos estos son ejemplos ilustrativos de la <u>propiedad conmutativa de la multiplicación</u>: El producto de dos números es el mismo no importa en qué orden se multipliquen.

Como en el caso de la suma, las propiedades asociativa y conmutativa de la multiplicación nos dicen que en un producto indicado podemos agrupar los factores a nuestra conveniencia, e igualmente podemos alterar el orden de los factores en el producto. Así, al multiplicar $9 \times 2 \times 3 \times 50$, es conveniente tomar 2×50 primero y luego multiplicar 9×3, o sea 27, por 100.

<u>Conjunto de problemas 2-2b</u>

1. Considera varios modos de efectuar mentalmente los siguientes cómputos, y halla (si lo hay) el que parezca más sencillo. Luego efectúa las operaciones indicadas en la forma más sencilla.

(a) $4 \times 7 \times 25$
(b) $\frac{1}{5} \times (26 \times 5)$
(c) $73 + 62 + 27$
(d) $(3 \times 4) \times (7 \times 25)$
(e) 12×14
(f) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{5}{6}$
(g) $6 \times 8 \times 125$
(h) $(1.25) \times 5.5 \times 8$
(i) $(2 \times 5) \times 1.97$
(j) $\frac{5}{4} \times 6 \times \frac{4}{3} \times \frac{1}{5}$

2. ¿Es más fácil computar

$$\begin{array}{r} 957 \\ \times\ \underline{222} \end{array} \quad ó \quad \begin{array}{r} 222 \\ \times\ \underline{957} \end{array} \quad ?$$

¿Y en el caso de

$$\begin{array}{r} 3.89 \\ \times\ \underline{141} \end{array} \quad y \quad \begin{array}{r} 141 \\ \times\ \underline{3.89} \end{array} \quad ?$$

2-3. La propiedad distributiva

Juan recogió dinero en su salón hogar. El martes, 7 personas le entregaron 15¢ cada una, y el miércoles, 3 personas le entregaron 15¢ cada una. ¿Qué cantidad de dinero recogió? El hizo este cálculo,

$$\begin{aligned} 15(7) + 15(3) &= \\ 105 + 45 &= \\ 150. \end{aligned}$$

De manera que recogió \$1.50.

Pero, vamos a pedirle ahora que lleve cuentas diferentes. Como todos le dieron la misma cantidad de dinero, es posible también llevar una cuenta sólo del número de personas que pagaron, y luego multiplicar el total por 15. Ahora su cálculo aparecería como sigue:

$$\begin{aligned} 15(7 + 3) &= \\ 15(10) &= \\ 150. \end{aligned}$$

El resultado es el mismo no importa cuál de los dos métodos se use para llevar cuentas; por lo tanto,

$$15(7) + 15(3) = 15(7 + 3)$$

es un enunciado cierto. Como este enunciado cierto nos dice que $15(7) + 15(3)$ y $15(7 + 3)$ son nombres para el mismo número, también podíamos haber escrito

$$15(7 + 3) = 15(7) + 15(3).$$

La mitad del dinero que Juan recogió se va a gastar en un regalo, y una tercera parte en otro regalo. ¿Cuánto se gasta en total? De nuevo, los cómputos pueden efectuarse de dos maneras:

$150(\frac{1}{2}) + 150(\frac{1}{3}) =$	$150(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) =$
$75 + 50 =$	$150(\frac{3}{6} + \frac{2}{6}) =$
$125.$	$150(\frac{5}{6}) =$
	$125.$

Como antes, hemos encontrado un enunciado cierto,

$$150(\frac{1}{2}) + 150(\frac{1}{3}) = 150(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}).$$

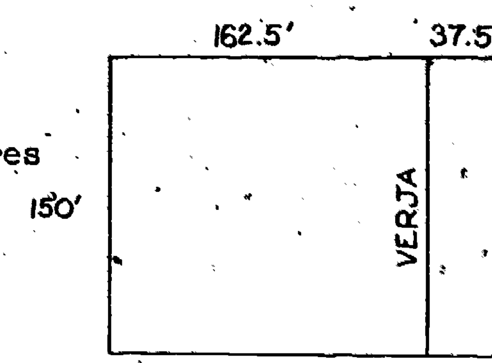
Otra manera de escribir el mismo enunciado sería

$$150(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = 150(\frac{1}{2}) + 150(\frac{1}{3}).$$

Consideremos otro ejemplo. El Sr. Jones posee un solar en la ciudad, de 150 pies de fondo y 162.5 pies de frente. Adyacente a su solar, separado de éste por una verja, hay otro solar que mide lo mismo de fondo pero cuyo frente es de sólo 37.5 pies. ¿Cuál es el área, en pies cuadrados, de cada uno de los solares, y cuál es la suma de las dos áreas? El Sr. Jones compra el segundo solar y quita la verja. ¿Cuál es el área del solar ahora?

El número de pies cuadrados en el nuevo solar es

$$150(162.5 + 37.5) =$$
$$150(200) =$$
$$30000.$$



El área total de los dos solares separados es

$$150(162.5) + 150(37.5) =$$
$$24375 + 5625 =$$
$$30000.$$

Por tanto,

$$150(162.5 + 37.5) = 150(162.5) + 150(37.5)$$

es un enunciado cierto.

Examinemos más detalladamente dos de nuestros enunciados ciertos. Escribimos

$$15(7) + 15(3) = 15(7 + 3).$$

$15(7)$ representa un número que hemos decidido escribir como un producto indicado; lo mismo sucede con $15(3)$. Así, $15(7) + 15(3)$ es una suma indicada de dos números. Por otra parte, $7 + 3$ representa un número que decidimos escribir como una suma indicada, de modo que $15(7 + 3)$ es un producto indicado. Por tanto, el enunciado,

$$15(7) + 15(3) = 15(7 + 3)$$

afirma que la suma indicada y el producto indicado son nombres del mismo número.

El enunciado cierto,

$$150(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}) = 150(\tfrac{1}{2}) + 150(\tfrac{1}{3})$$

es una afirmación semejante.

<u>Conjunto de problemas 2-3a</u>

1. Examina la veracidad de los siguientes enunciados:
   (a) $2 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = 7 \cdot 4$
   (b) $15 \cdot 2 = 7 \cdot 2 + 8 \cdot 2$
   (c) $25(40 + 3) = 25(40) + 25(3)$
   (d) $3(2) + 6(3) = 9(6)$
   (e) $13(19 + 1) = 13(19) + 13(1)$
   (f) $2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) = 2\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4}$
   (g) $12(\frac{2}{3} + \frac{3}{4}) = 12(\frac{2}{3}) + 12(\frac{3}{4})$
   (h) $3(2.5) + 3(1.5) = 3(2.5 + 1.5)$

Parece que hemos encontrado una ley para construir enunciados ciertos. Trata de verbalizar esta ley de varias maneras. Después compara lo que has hecho con lo siguiente: El producto de un número por la suma de otros dos (números) es igual al producto del primero y el segundo más el producto del primero y el tercero. Esta propiedad se llama <u>la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma</u>, o como ~~diremos~~ frecuentemente, <u>la propiedad distributiva</u>.

Esta propiedad, al igual que otras que hemos estudiado, tiene estrecha relación con la aritmética, tanto en lo relativo a los artificios de los cómputos mentales como en lo que concierne a los fundamentos de la materia. En nuestro primer ejemplo, si comparamos las dos expresiones "$15(7) + 15(3)$" y "$15(7 + 3)$", vemos que es más sencillo calcular el resultado usando la segunda expresión, ya que $7 + 3$, que es 10, hace fácil la multiplicación. En el próximo ejemplo, sin embargo, si comparamos las expresiones "$150(\frac{1}{2}) + 150(\frac{1}{3})$" y "$150(\frac{1}{2} + \frac{1}{3})$", vemos que es preferible hacer uso de la primera expresión porque es más sencillo sumar 75 y 50 que sumar las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$. ¿Qué forma es más sencilla en el tercer ejemplo? ¿Y en los enunciados del Conjunto de problemas 2-3a?

Más importante que su papel de facilitar los cómputos mentales es el que tiene la propiedad distributiva en gran parte de nuestra técnica aritmética, como por ejemplo en la multiplicación larga. ¿Cómo efectuamos la siguiente operación:

$$\begin{array}{r} 62 \\ \times\ \underline{23} \end{array} \quad ?$$

Escribimos

$$\begin{array}{r} 62 \\ \times\ \underline{23} \\ \underline{186}\!\!\!\! \\ 186 \\ \underline{124} \\ 1426 \end{array}$$

Esto significa realmente que tomamos $62(20 + 3)$ como $62(20) + 62(3)$, o sea, $1240 + 186$. (El "0" al final de "1240" no aparece pero se sobrentiende en la multiplicación larga de arriba.) Vemos, pues, que la propiedad distributiva es la base de esta técnica corriente.

Supongamos que deseamos considerar varias maneras de computar el producto indicado,

$$(\frac{1}{3} + \frac{1}{4})12.$$

Esta frase no se ajusta a la ley de la propiedad distributiva en la forma en que la hemos considerado hasta ahora. Tal vez podrás adivinar, basándote en tus experiencias anteriores, que

$$(\frac{1}{3} + \frac{1}{4})12 = (\frac{1}{3})12 + (\frac{1}{4})12$$

es un enunciado cierto. Sin embargo, vamos a ver cómo las propiedades, según las hemos descubierto hasta ahora, nos permiten establecer la veracidad ~~de~~ este enunciado.

Sabemos primero que

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)12 = 12\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$$

es un enunciado cierto. (¿Qué propiedad de la multiplicación usamos aquí?) Luego podemos aplicar la propiedad distributiva según la conocemos para escribir

$$12\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = 12\left(\frac{1}{3}\right) + 12\left(\frac{1}{4}\right)$$

y aplicando la propiedad conmutativa dos veces más, podemos escribir

$$12\left(\frac{1}{3}\right) + 12\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)12 + \left(\frac{1}{4}\right)12.$$

El último paso, que sería innecesario si sólo quisiéramos computar "$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)12$" en forma sencilla, nos lleva finalmente al enunciado requerido:

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)12 = \left(\frac{1}{3}\right)12 + \left(\frac{1}{4}\right)12.$$

Una vez más, este enunciado parece tener una forma sencilla, y de hecho, sugiere una forma alternativa para la propiedad distributiva, la cual puede obtenerse de nuestra ley anterior aplicando sucesivamente la propiedad conmutativa de la multiplicación. Expresa en tus propias palabras esta forma alternativa. El siguiente enunciado,

$$\left(\frac{1}{3}\right)12 + \left(\frac{1}{4}\right)12 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)12$$

sugiere una ley. ¿Cuál es?

<u>Conjunto de problemas 2-3b</u>

1. Siguiendo una forma adecuada de la propiedad distributiva, completa los siguientes enunciados haciéndolos ciertos:
   - (a) $12(3 + 4) = 12(\ \ ) + 12(\ \ )$
   - (b) $3(\ \ ) + \qquad (7) = 3(5 + 7)$
   - (c) $(2.5 + 4.5) \qquad = (2.5)4 + (4.5)4$
   - (d) $\qquad = 24\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{6}\right)$
   - (e) $7(\ \ ) + 6(\ \ ) = 13(\ \ )$
   - (f) $(3 + 11)2 =$
2. Considera los siguientes ejemplos de dos maneras diferentes y decide en cada caso cuál de las dos (si alguna) hace más sencillos los cómputos. Luego efectúa las operaciones en la forma más sencilla.

(a) $27(\frac{7}{8}) + 27(\frac{1}{8})$

(b) $(\frac{1}{3})12 + (\frac{1}{4})12$

(c) $(.36 + .14).6$

(d) $12(5 + 5)$

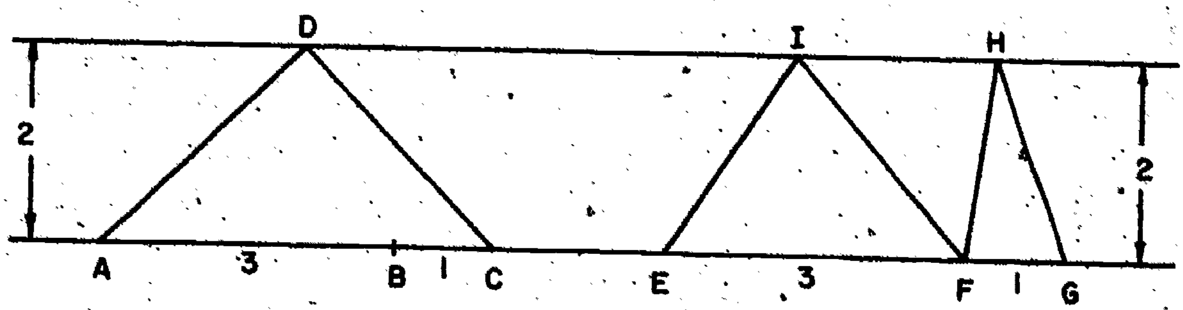
(e) $(2.3 + 4.6) + 7.7$

(f) $6(\frac{3}{2} + \frac{2}{3})$

(g) $.71(.8) + .2(.71)$

(h) $3(2 + 7 + 6 + 5)$

3. La siguiente figura muestra un cierto número de triángulos.



¿Qué relación existe entre el área del triángulo ACD y las áreas de los triángulos EFI y FGH? Usa la fórmula del área de un triángulo en términos del largo de la base y de la altura.

4. Escribe un nombre corriente para

$$(\frac{1}{2} + \frac{2}{3})11 + (\frac{1}{2} + \frac{2}{3})7.$$

(Sugerencia: Considera $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ como un numeral, y no empieces a trabajar hasta que no hayas pensado en una manera <u>poco trabajosa</u> de hacer este ejercicio.)

5. Escribe los nombres corrientes para:

(a) $8(\frac{3}{5} + \frac{2}{3}) + (\frac{2}{3} + \frac{3}{5})7$

(b) $7(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{3}{4}) + 5(\frac{5}{6} + \frac{3}{4})$

*(c) $5(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}) + 7(\frac{1}{2} + \frac{1}{3})$

6. Escribe nombres corrientes para:

(a) $3 \times (17 + 4) \times \frac{1}{3}$

(b) $\frac{3(17 + 4)}{3}$

(c) $\frac{1}{5}(3 + 8)10$

(d) $3(7) + 3(11)$

(e) $3(7) + 3(2)$

(f) $3(7) + 6$

(g) $7(4) + 42$

(h) $3(\frac{1}{5}) + \frac{2}{5}$

(i) $3(17) + 12$

(j) $6(19) + 19$

(k) $(10 + 2) \times 4 \times \frac{1}{2}$

(l) $\frac{(10 + 2) \times 4}{2}$

2-4. Variables

Considera por un momento un ejercicio sencillo para trabajarlo mentalmente:

"Toma 6, súmale 2, multiplica por 7 y luego divide por 4". Si sigues estas instrucciones, se te habrá ocurrido indudablemente la sucesión de números

$$6, 8, 56, 14$$

y que la contestación a este ejercicio es 14. Imagínate ahora que tu mejor amigo está ausente de la clase y que le has prometido un informe detallado sobre el trabajo del día. Por esta razón, escribes las instrucciones para cada paso del ejercicio de la siguiente manera:

$$6$$
$$6 + 2$$
$$7(6 + 2)$$
$$\frac{7(6 + 2)}{4}$$

¿Ofrece este método de describir el ejercicio más información o menos información que el anterior? Claramente tiene la ventaja de mostrar exactamente las operaciones implicadas en cada paso, pero tiene la desventaja de que no llega hasta ~~la~~ contestación al ejercicio. Por otra parte, la frase "$\frac{7(6 + 2)}{4}$" es un numeral para el resultado, 14. Esto se comprueba fácilmente llevando a cabo las operaciones indicadas.

Esta es una situación imaginaria en la cual anotaste, para tu amigo, no la contestación al ejercicio, sino la forma del mismo. Así se ilustra un punto de vista fundamental de la matemática. En muchas ocasiones durante este curso, daremos primordial importancia a la estructura o forma de un problema antes que a la contestación al mismo. De hecho, muy pocas veces nos interesamos solamente en la contestación a un problema.

Trata ahora de seguir estas instrucciones:

> "Toma 7; multiplícalo por 3, añade 3 al producto, multiplica por 2 y divide por 12".

¿Cuál es la frase que nos presenta todas estas operaciones? ¿Es dicha frase un numeral para el mismo número que obtuviste mentalmente?

Hagamos ahora uno de estos ejercicios añadiéndole la condición de que se te permite escoger, al comienzo, cualquiera de los números del conjunto

$$S = \{1, 2, 3, \ldots, 1000\}.$$

Esta vez las instrucciones son:

> "Toma cualquier número del conjunto S, multiplícalo por 3, súmale 12, divide por 3 y resta 4".

Se puede advertir que este ejercicio consiste realmente en 1000 diferentes ejercicios de aritmética, uno por cada elección de un número de partida entre los del conjunto S. Considera el ejercicio que se obtiene al partir del número 17. El método aritmético y el método de la estructura correspondiente conducen a los siguientes pasos:

Aritmético	Estructural
17	17
51	$3(17)$
63	$3(17) + 12$
21	$\frac{3(17) + 12}{3}$
17	$\frac{3(17) + 12}{3} - 4$

Observa que, [illegible] la propiedad distributiva de los números, y ya que $12 = 3(4)$,

$$3(17) + 12 = 3(17) + 3(4) = 3(17 + 4),$$

de manera que

$$\frac{3(17) + 12}{3} = \frac{3(17 + 4)}{3} = 17 + 4.$$

Por lo tanto,

$$\frac{3(17) + 12}{3} - 4 = 17 + 4 - 4 = 17.$$

En otras palabras, la frase final que se obtiene haciendo uso de la "estructura" es un numeral para 17. Elige otros números del conjunto S para hacer el ejercicio. ¿Obtendrás siempre al final el número que escogiste al principio? Una manera de contestar esta pregunta sería haciendo los 1000 diferentes ejercicios. Tal vez hayas sospechado, después de seguir el procedimiento en varios casos, que pudiera no ser necesario hacer todos los 1000 ejercicios para contestar la pregunta.

Vamos a examinar dicho procedimiento más detenidamente. Observa primero que el procedimiento no depende realmente del número que se escogió del conjunto S. De hecho, si usamos la palabra "número" para referirnos al número seleccionado, los pasos del ejercicio son:

$$\text{número}$$
$$3(\text{número})$$
$$3(\text{número}) + 12$$
$$\frac{3(\text{número}) + 12}{3}$$
$$\frac{3(\text{número}) + 12}{3} - 4$$

Para ahorrar espacio, indiquemos con la letra "n" el número seleccionado. Entonces los pasos anteriores vienen a ser:

$$n$$
$$3n$$
$$3n + 12$$
$$\frac{3n + 12}{3}$$
$$\frac{3n + 12}{3} - 4.$$

Observa que aquí usamos "n" como un numeral para el número seleccionado y que la frase en cada una de las otras etapas es también un numeral. (Así, si n fuera 17, entonces el producto indicado "3n" sería un numeral para 51.) En particular, la frase "$\frac{3n + 12}{3} - 4$" es un numeral para el "resultado" del ejercicio. Además, por la propiedad distributiva para los números,

$$3n + 12 = 3n + 3(4) = 3(n + 4)$$

y de aquí que

$$\frac{3n + 12}{3} = \frac{3(n + 4)}{3} = n + 4.$$

Por consiguiente,

$$\frac{3n + 12}{3} - 4 = n + 4 - 4 = n.$$

Como "n" puede representar cualquier número del conjunto S, llegamos a la conclusión de que el resultado final de este ejercicio es, en verdad siempre, el mismo número seleccionado al comenzar.

La discusión anterior ilustra lo poderosos que son los métodos basados en la estructura o forma, en vez de los directamente fundados en aritmética. El método, en cierto sentido, nos permite reemplazar 1000 distintos problemas aritméticos por un solo problema.

¿Habría algún cambio significativo en la discusión del ejercicio si en vez de n hubiéramos decidido usar alguna otra letra, como m o x, para indicar al número seleccionado de S?

Llamaremos una variable a una letra que, como la "n" del ejercicio anterior, se usa para indicar uno cualquiera de los números de un conjunto dado. En un cálculo cualquiera en el que interviene una variable, ésta es un numeral que representa un número definido, pero no especificado de un conjunto dado de números admisibles. Los números admisibles para la variable "n" en el ejercicio anterior son los números cardinales del 1 al 1000. Todo número que una variable dada puede representar se llama un valor de la variable. Algunas veces llamamos dominio o campo de variabilidad de una variable al conjunto de valores de la misma. El dominio de la variable "n" en el ejercicio anterior es el conjunto $S = \{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$. A menos que no se especifique cuál es el dominio de una variable, supondremos que éste es el conjunto de todos los números. Por ahora, sólo estamos considerando los números de la aritmética.

Conjunto de problemas 2-4

1. Si doblamos la suma de cierto número t y 3, ¿cuál de las siguientes sería una forma correcta,

$$2t + 3 \quad ó \quad 2(t + 3) \quad ?$$

2. Si sumamos 5 al duplo de cierto número n y luego dividimos la suma por 3, ¿cuál sería la forma correcta de expresarlo,

$$\frac{2n + 5}{3} \quad ó \quad \frac{2n}{3} + 5 \quad ?$$

3. Si sumamos un cuarto de cierto número x a un tercio de cuatro veces el mismo número, ¿cuál sería la forma correcta de expresarlo,

$$\tfrac{1}{3}(4x) + \tfrac{1}{4}(x) \text{ ó } \tfrac{4}{3}(x) + \tfrac{1}{4}(x) \text{ ?}$$

4. Si representamos por la letra y el número de galones de leche comprados, ¿cuál sería la forma correcta para el número de botellas de un cuartillo en que pudiera echarse la leche,

$$4y \text{ ó } \tfrac{y}{4} \text{ ?}$$

5. Si a representa el largo de cierto rectángulo en pies y b representa el ancho, también en pies, ¿podríamos representar el perímetro de dicho rectángulo por alguna de las siguientes formas:

$$a + b, \quad ab \text{ ?}$$

6. Si a es 2, b es 3, c es $\frac{3}{4}$, m es 1, y n es 0; halla el valor de (es decir, el número que representa) cada una de las siguientes expresiones:

(a) $6b + ac$

(b) $(a + b)(a + m)$

(c) $6(b + ac)$

(d) $\dfrac{2b + c}{b}$

(e) $nc + ac$

(f) $n(c + ac)$

(g) $\dfrac{2a + 3b}{m}$

(h) $m(b - 4c)$

(i) $\dfrac{5(3a + 4b)}{2(a + b)}$

(j) $a + 2(b + m)$

7. Halla nombres corrientes para:

(a) $\frac{9}{5}C + 32$, cuando C es 85

(b) $\dfrac{h(a + b)}{2}$, cuando h es 4, a es 3, y b es 5

(c) $P(1 + rt)$, cuando P es 500, r es 0.04, t es 3

(d) $\dfrac{r\ell - a}{r - 1}$, cuando a es 4, r es 2, ℓ es 48

(e) ℓwh, cuando ℓ es 18, w es 10, h es 6.

8. Si a es 3, b es 2, y c es 4, halla el valor de:

(a) $\dfrac{(3a + 4b) - 2c}{3}$

(b) $\dfrac{(6a - 4b) + 5c}{5}$

(c) $\dfrac{\left(\frac{7a}{2} + \frac{3b}{2}\right) - \frac{5c}{2}}{2}$

(d) $\dfrac{(1.5a + 3.7b) - 2.1c}{7}$

9. Resume las ideas nuevas, incluyendo las definiciones, que han sido introducidas en este capítulo.

Capítulo 3

ENUNCIADOS Y PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES

3-1. Enunciados, ciertos y falsos

Cuando hacemos afirmaciones acerca de números, escribimos enunciados tales como

$$(3 + 1)(5 + 2) = 10.$$

Recuerda que un enunciado puede ser cierto o falso, pero no ambas cosas. Este enunciado en particular es falso.

Algunos enunciados, como el anterior, comprenden el símbolo " = ", que quiere decir "es" o "es igual a". Además de ésta, hay otras formas verbales que usaremos en enunciados matemáticos. Por ejemplo, el símbolo " $\neq$ " significará "no es" o "no es igual a". Entonces

$$8 + 4 \neq 28 \cdot 2$$

es un enunciado cierto y

$$8 + 4 \neq \frac{24}{2}$$

es un enunciado falso.

Conjunto de problemas 3-1

¿Cuáles de los siguientes enunciados son ciertos y cuáles son falsos?

1. $4 + 8 = 10 + 5$
2. $8 + 3 = 10 + 1$
3. $4 + 8 = 8 + 4$
4. $5 + 7 \neq 6 + 6$
5. $\frac{1}{2} + \frac{5}{8} = 1 + \frac{1}{8}$
6. $\frac{85}{1} \neq 85$
7. $13 + 0 \neq 15 + 0$
8. $12(5) \neq 5(12)$
9. $7(6 \times 3) = (7 \times 6) \times 3$
10. $8(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = 8(\frac{1}{2}) - 8(\frac{1}{4})$
11. $65 \times 1 = 65$
12. $13 \times 0 = 13$
13. $\frac{2}{3}(7) \neq 2(\frac{7}{3})$
14. $4(\frac{3}{5}) = \frac{12}{5}$
15. $8(\frac{3}{5}) = \frac{24}{40}$

3-2. Enunciados abiertos

No es difícil decidir si un enunciado numérico es cierto o no, porque esta clase de enunciados comprende números particulares. Considera el enunciado,

$$x + 3 = 7.$$

¿Es cierto este enunciado? Dirás que no sabes qué número "x" representa y sin esa información no puedes llegar a una decisión. Lo mismo sucede con el enunciado, "El es un doctor"; no puedes decidir si es cierto o no hasta que sepas quién es "él". En este sentido, la variable "x" se usa más o menos en la misma forma en que usamos un pronombre en el lenguaje corriente.

Considera el enunciado,

$$3n + 12 = 3(n + 4),$$

con el que trabajamos en la sección 2-4 cuando por primera vez se introdujo la idea de una variable. Tampoco en este caso podemos decidir a base del enunciado solamente, si es cierto o no; pero ahora se trata de una situación diferente. Como en los casos anteriores, podríamos decidir, si supiéramos el número que "n" representa. Sin embargo en este caso es posible tomar una decisión aún sin saber el valor de n. Podemos recordar una propiedad general de los números para demostrar que este enunciado es cierto <u>independientemente del número que "n" represente</u>. ¿Qué nombre se le dio a esa propiedad?

Decimos que enunciados tales como

$$x + 3 = 7$$

y

$$3n + 12 = 3(n + 4),$$

que contienen variables, son enunciados <u>abiertos</u>. El hecho de que sin más información no podemos decidir si estos enunciados son ciertos o no, sugiere el uso de la palabra "abierto". Un <u>enunciado abierto</u> es un enunciado que comprende una o más variables, y la decisión sobre si es cierto o falso queda pendiente hasta tanto tengamos suficiente información adicional. De la misma manera, llamamos <u>frases abiertas</u> a las frases que comprenden una o más variables.

<u>Conjunto de problemas 3-2a</u>

Determina ~~si~~ los siguientes enunciados abiertos son ciertos para los valores de las variables que se proponen:

1. $7 + x = 12$; sea x igual a 5
2. $7 + x \neq 12$; sea x igual a 5
3. ~~$y + 9 \neq 11$; sea y igual a 6~~
4. $t + 9 = 11$; sea t igual a 6
5. $\frac{5x + 1}{7} \neq 3$; sea x igual a 3; sea x igual a 4
6. $2y + 5x = 23$; sea x igual a 4, y igual a 3; sea x igual a 3, y igual a 4
7. $2a - 5 \neq (2a + 4) - b$; sea a igual a 9 y b igual a 9; sea a igual a 3 y b igual a 9
8. $5m + x = (2m + 3) + x$; sea x igual a 4

Si se nos da un enunciado abierto, y se especifica el dominio de la variable, ¿cómo podemos determinar los valores de la variable, si los hay, para los cuales el enunciado sea cierto? Ensayando, podemos tratar varios números hasta dar con un número "correcto"; pero sería mejor, después del primer intento, pensar un poco con el fin de que nos sirva de guía en los siguientes ensayos.

Experimentemos con el enunciado abierto "$2x - 11 = 6$". De primera intención, trata un número x lo suficientemente grande de manera que $2x$ sea mayor que 11; tomemos $x = 9$. Entonces

$$\begin{aligned} 2x - 11 &= 2(9) - 11 \\ &= 7. \end{aligned}$$

Por tanto, el numeral de la izquierda representa a 7, que es diferente de 6. Parece que 9 era un número muy grande; por lo tanto vamos a tomar $x = 8$. Entonces

$$\begin{aligned} 2x - 11 &= 2(8) - 11 \\ &= 5. \end{aligned}$$

En esta ocasión, el numeral de la izquierda representa a 5, que también es diferente de 6. Como 8 resultó ser muy pequeño, vamos a tomar un número que esté entre 8 y 9, digamos $8\frac{1}{2}$. Entonces

$$\begin{aligned} 2x - 11 &= 2(8\tfrac{1}{2}) - 11 \\ &= 6. \end{aligned}$$

"$6 = 6$" es un enunciado cierto; de manera que hemos encontrado que el enunciado abierto "$2x - 11 = 6$" es cierto si x es igual a $8\frac{1}{2}$.

¿Crees que haya otros valores de x para los cuales este enunciado es cierto? ¿Crees que para todo enunciado abierto existe un valor de la variable que lo haga cierto?; ¿y uno que lo haga falso?

Conjunto de problemas 3-2b

Determina los números, si los hay, que hacen ciertos los siguientes enunciados abiertos:

1. $12 + y = 8$
2. $4y + 5 = 45$
3. $3x - 2 = 10$
4. $3x - 2 = 15$
5. $4x + 3x = 14$
6. $4x - 3x = 14$
7. $s + 3 = s + 2$
8. $t + 2t \neq 27 + 3t$
9. $t + 3 = 3 + t$
10. $(x + 1)2 \neq 2x + 2$

Si una variable aparece en un enunciado abierto en la forma "a • a", que significa "a multiplicado por a", es conveniente escribir "a • a" como "a^2", lo cual leemos "a al cuadrado".

Conjunto de problemas 3-2c

1. Trata de hallar valores de las variables para los cuales los siguientes enunciados abiertos son ciertos:
   (a) $x^2 = 9$
   (b) $4 - x^2 = 0$
   (c) $x^2 = x$
   (d) $x^2 - 1 = 3$
   (e) $x + 2 = 9$
   (f) $(x - 1)^2 = 4$
   (g) $4 + x^2 = 0$
   (h) $x^2 + 7 = 7$
2. ¿Cuál es un valor de x para el cual el enunciado,

$$x^2 = \frac{9}{16}$$

   es cierto?
3. Un número que nos interesará más tarde es un valor de x para el cual el enunciado "$x^2 = 2$" es cierto. A este número lo llamamos la raíz cuadrada de 2, y lo escribimos como $\sqrt{2}$. Más tarde verás que $\sqrt{2}$ es la coordenada de un punto en la recta numérica. ¿Aproximadamente, dónde estaría localizado en la recta numérica?

3-3. Conjuntos de validez de enunciados abiertos

Sea el dominio de la variable en el enunciado,

$$3 + x = 7$$

el conjunto de todos los números de la aritmética. Si tomamos un valor particular para x, entonces el enunciado resultante será cierto o falso. Por ejemplo,

Si x es	el enunciado	es
0	$3 + 0 = 7$	falso
1	$3 + 1 = 7$	falso
$\frac{1}{2}$	$3 + \frac{1}{2} = 7$	falso
2	$3 + 2 = 7$	falso
4	$3 + 4 = 7$	cierto
6	$3 + 6 = 7$	falso

De esta manera podemos considerar que el enunciado "$3 + x = 7$" se comporta como una criba: separa el dominio de la variable en dos subconjuntos. De igual modo que puedes separar en una baraja de naipes dos subconjuntos, el de negras y el de rojas, así, el dominio de la variable se criba para construir dos subconjuntos, uno que contiene todos los números que hacen el enunciado cierto y otro que contiene todos los números que hacen el enunciado falso. Vemos aquí que 4 pertenece al primer subconjunto, mientras que 0, 1, $\frac{1}{2}$, 2 y 6 pertenecen al segundo.

El conjunto de validez de un enunciado abierto que comprende una variable es el conjunto de todos aquellos números del dominio de la variable que hacen cierto el enunciado. A menos que se especifique otra cosa, continuaremos suponiendo que el dominio de la variable es el conjunto de todos los números de la aritmética. (Recuerda que los números de la aritmética consisten en el 0 y todos los números que sean coordenadas de puntos a la derecha de 0 en la recta numérica.)

Conjunto de problemas 3-3a

1. Decide si el número que aparece después de cada enunciado abierto pertenece al conjunto de validez del enunciado:
   (a) $7 + x = 12$; 5
   (b) $y +$ [illegible] 11; 6

(c) $\frac{5x + 1}{7} \neq 3$; 3

(d) $2x + 1 = 2(x + 1)$; 3

(e) $x + \frac{1}{x} = 2$; 3

(f) $3m = m + 2m$; 5

(g) $n^2 + 2n \neq n(n + 2)$; 3

2. Después de cada uno de los siguientes enunciados abiertos aparece un conjunto que contiene todos los números del conjunto de validez del enunciado, y posiblemente otros más. Halla el conjunto de validez en cada caso.

(a) $3(x + 5) = 17$; $\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$

(b) $x^2 - (4x - 3) = 0$; $\{1, 2, 3, 4\}$

(c) $x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{1}{6} = 0$; $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\}$

(d) $x + \frac{1}{x} = 2$; $\{1, 2, 3\}$

(e) $x(x + 1) = 3x$; $\{0, 1, 2\}$

(f) $\frac{5x + 1}{7} = 3$; $\{0, 2, 4\}$

(g) $x + 1 = 5x - 1$; $\{1, \frac{1}{2}, 2\}$

(h) $x + 2 = x + 7$; $\{0, 2, 3\}$

3. Escribe un enunciado abierto cuyo conjunto de validez es $\emptyset$, el conjunto nulo.

Muchas fórmulas usadas en la ciencia y en el comercio aparecen en forma de enunciados abiertos que comprenden más de una variable. Por ejemplo, la fórmula

$$V = \frac{1}{3}Bh$$

se usa para hallar el volumen de un cono. La variable h representa el número de unidades de la altura del cono, B representa el número de unidades cuadradas de la base; y V representa el número de unidades cúbicas en el volumen. Cuando en una fórmula como ésta, se especifican valores para todas excepto una de las variables, el enunciado abierto resultante comprende sólo una variable. Entonces el conjunto de validez de este enunciado nos da información acerca del número representado por esta variable.

Siguiendo con el ejemplo: consideremos un cono particular con 66 pies cúbicos de volumen y 33 pies cuadrados de área en su base. De esta información determinamos que V es 66 y B es 33 y escribimos el enunciado abierto correspondiente con una variable h,

$$66 = \frac{1}{3}(33)h.$$

El conjunto de validez de este enunciado es {6}. Así hallamos que la altura del cono es 6 pies.

Conjunto de problemas 3-3b

1. La fórmula que se usa para pasar de una temperatura F, medida en grados Fahrenheit, a la temperatura correspondiente C, medida en grados Centígrados, es

$$C = \frac{5}{9}(F - 32).$$

Halla el valor de C cuando F es igual a 86.

2. La fórmula usada para calcular el interés simple es

$$i = prt,$$

en la que i es el número de dólares de interés, p es el número de dólares de capital, r es el tipo de interés y t es el número de años. Halla el valor de t cuando i es 120, r es 0.04, y p es 1000.

3. Una fórmula usada en física para relacionar la presión y el volumen de una cantidad dada de un gas a temperatura constante es

$$pv = PV,$$

en la que V es el número de unidades cúbicas de volumen a P unidades de presión y v es el número de unidades cúbicas de volumen a p unidades de presión. Halla el valor de V cuando v es 600, P es 75 y p es 15.

*4. La fórmula para el área de un trapecio es

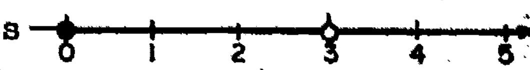
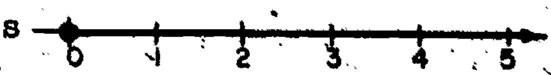
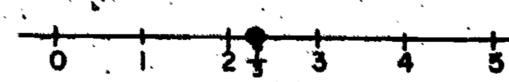
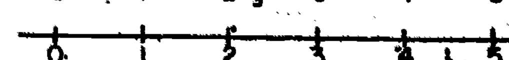
$$A = \frac{1}{2}(B + b)h,$$

en la que A es el número de unidades cuadradas del área, B es el número de unidades de una de las bases, b es el número de unidades de la otra base, y h es el número de unidades de la altura. Halla el valor de B cuando A es 20, b es 4, y h es 4.

3-4. Gráficas de conjuntos de validez

Recordemos que la gráfica de un conjunto S de números es el conjunto de puntos de la recta numérica correspondientes a los números de S, y sólo esos puntos.

Así, la gráfica del conjunto de validez de un enunciado abierto que comprende una variable es el conjunto de todos los puntos de la recta numérica a la derecha del 0 y cuyas coordenadas son valores de la variable para los cuales el enunciado abierto es cierto. Representemos las gráficas de algunos enunciados abiertos.

	Enunciado	Conjunto de validez	Gráfica
(a)	$x = 2$	$\{2\}$	
(b)	$x \neq 3$	Todos los números de la aritmética excepto el 3	
(c)	$3 + x = (7 + x) - 4$	Todos los números de la aritmética	
(d)	$y(y + 1) = 3y$	$\{0, 2\}$	
(e)	$3y = 7$	$\{\frac{7}{3}\}$	
(f)	$2x + 1 = 2(x + 1)$	$\emptyset$	 (La gráfica no contiene punto alguno)

Notarás en (b) que indicamos con marcas bien obscuras los puntos incluidos en la gráfica y con un círculo todo punto no incluido en la misma. Las líneas obscuras señalan todos los puntos que están cubiertos. La flecha al extremo derecho de la recta numérica en (b) y (c) indica que todos los puntos hacia la derecha están en la gráfica.

Conjunto de problemas 3-4

Define el conjunto de validez de cada enunciado abierto y represéntalo gráficamente:

1. $x + 7 = 10$
2. $2x = x + 3$
3. $x + x \neq 2x$
4. $x + 3 = 3 + x$

5. $(x)(0) = x$
6. $3 + x \neq 6$
7. $2x + 3 = 8$
8. $5 \neq 3n + 1$
9. $y \cdot (1) \neq y$
10. $x^2 = 2x$

3-5. Enunciados que contienen desigualdades

Si consideramos dos números diferentes cualesquiera, uno de ellos será menor que el otro. ¿Es esto siempre cierto? Se nos sugiere, pues, otra forma verbal que usaremos en enunciados numéricos. Usamos el símbolo " $<$ " para significar "es menor que", y " $>$ " para significar "es mayor que".

Para evitar confusión en el uso de estos símbolos, debes recordar que en un enunciado cierto, tal como

$$8 < 12$$

o también

$$12 > 8,$$

la punta del símbolo (el extremo pequeño) señala hacia el más pequeño de los dos números.

Halla los dos puntos en la recta numérica que corresponden a 8 y a 12. ¿Cuál de ellos queda a la izquierda? ¿Corresponderá siempre el menor de dos números al punto que queda a la izquierda? Verifica tu contestación localizando en la recta numérica puntos correspondientes a varios pares de números, tales como $\frac{5}{2}$ y 2.2; $\frac{8}{6}$ y $\frac{8}{5}$.

De igual manera que " $\neq$ " significa "no es igual a", así " $\ngtr$ " significa "no es mayor que". ¿Qué significa " $\nless$ "?

Conjunto de problemas 3-5

¿Cuáles de los siguientes enunciados son ciertos? ¿Cuáles son falsos? Usa la recta numérica como ayuda para tomar una decisión.

1. $4 + 3 < 3 + 4$
2. $5(2 + 3) > 5(2) + 3$
3. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ngtr 1$
4. $5 + 0 \ngtr 5$
5. $2 > 2 \times 0$
6. $0.5 + 1.1 = 0.7 + 0.9$
7. $5.2 - 3.9 < 4.6$
8. $2 + 1.3 > 3.3$
9. $2 + 1.3 \ngtr 3.3$
10. $4 + (3 + 2) < (4 + 3) + 2$
11. $\frac{2}{3}(8 + 4) < \frac{2}{3} \times 8 + \frac{2}{3} \times 4$
12. $5 + (\frac{2}{5} + \frac{3}{5}) \neq (4 - 1)2$

3-6. Enunciados abiertos que contienen desigualdades

¿Cuál es el conjunto de validez del enunciado abierto

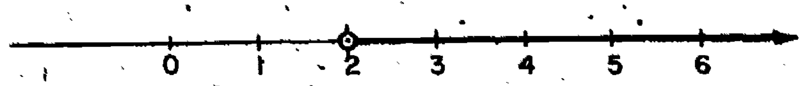
$$x + 2 > 4?$$

Podemos contestar esta pregunta de la siguiente manera: Sabemos que el conjunto de validez de

$$x + 2 = 4$$

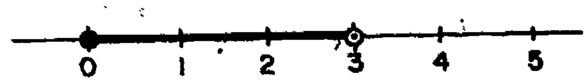
es $\{2\}$. Cuando x es un número mayor que 2, $x + 2$ será un número mayor que 4. Cuando x es un número menor que 2, $x + 2$ será un número menor que 4. Así, todo número mayor que 2 hará el enunciado cierto y todos los demás números lo harán falso. Es decir, el conjunto de validez del enunciado "$x + 2 > 4$" es el conjunto de todos los números mayores que 2.

La gráfica de este conjunto de validez es el conjunto de todos los puntos de la recta numérica cuyas coordenadas son mayores que 2. Este es el conjunto de todos los puntos que están a la derecha del punto con coordenada 2:



Como otro ejemplo considera la gráfica del conjunto de validez de

$$1 + x < 4.$$

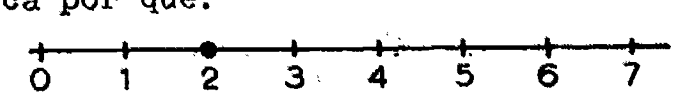
Conjunto de validez	Gráfica
Todos los números de la aritmética desde el 0 hasta el 3, incluyendo el 0 pero no el 3.	

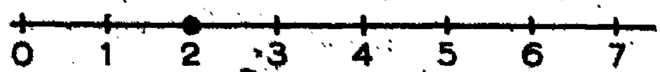
Se acostumbra llamar <u>igualdad</u> a un enunciado simple que comprende el símbolo " = ", y <u>desigualdad</u> a un enunciado que comprende uno de los símbolos " < " ó " > ". Una igualdad que contenga variables se llama <u>igualdad condicional</u> o <u>ecuación</u>, y una desigualdad que contenga variables se llama <u>desigualdad condicional</u> o <u>inecuación</u>.

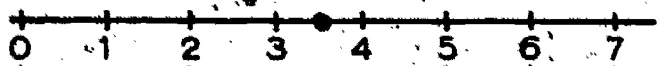
Conjunto de problemas 3-6

1. Determina en cada caso si el conjunto de los puntos marcados constituye la gráfica del conjunto de validez del enunciado abierto. Si no lo es, explica por qué.

   (a) $2 + x = 4$



(b) $3x = 5$ 

(c) $2y = 7$ 

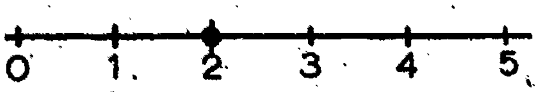
(d) $x > 1$ 

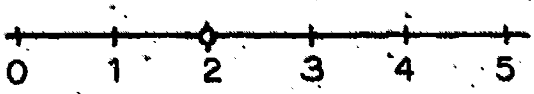
(e) $2x > 5$ 

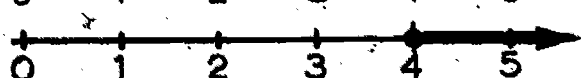
2. Dibuja las gráficas de los conjuntos de validez de los siguientes enunciados abiertos:

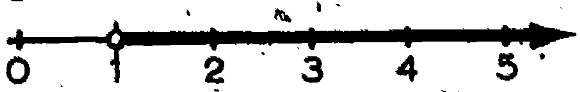
(a) $y = 3$
(b) $x \neq 2$
(c) $x > 2$
(d) $3 + y = 4$
(e) $3 + y \neq 4$
(f) $2x = 5$
(g) $2x > 5$
(h) $3 + y > 4$
(i) $3 + y < 4$
(j) $m < 3$
(k) $m > 3$
(l) $x(x + 2) = 4x$
(m) $\frac{y}{3} = 4$
(n) $3a + 2 = 3(a + 2)$

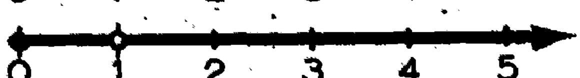
3. A continuación aparecen algunas gráficas. En cada caso, halla el enunciado abierto cuyo conjunto de validez está representado por la correspondiente gráfica.

(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

(e) 

4. Si el dominio de la variable en cada uno de los siguientes enunciados abiertos es el conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, halla el conjunto de validez de cada uno y dibuja la gráfica del mismo.

(a) $4 + x = 7$
(b) $4x + 3 = 6$
(c) $2x > 5$
(d) $x + 3 < 6$
(e) $2x + 6 = 2(x + 3)$

5. Si el dominio de la variable en cada uno de los enunciados abiertos del problema 4 es el conjunto que consiste en 0, 5 y todos los números mayores que 0 y menores que 5, halla el

conjunto de validez de cada uno y dibuja la gráfica del mismo.

6. ¿Cuáles de los conjuntos de validez en los problemas 4 y 5 son conjuntos finitos?

3-7. Enunciados con más de una cláusula

Todos los enunciados discutidos hasta ahora han sido sencillos—es decir, contenían solamente una forma verbal. Consideremos un enunciado como

$$4 + 1 = 5 \quad y \quad 6 + 2 = 7.$$

De primera impresión creerás que hemos escrito <u>dos</u> enunciados. Pero, si lees el enunciado de izquierda a derecha, verás que es un <u>enunciado compuesto</u> en el cual la conjunción <u>y</u> enlaza dos cláusulas. De manera que en la matemática, como en el lenguaje corriente, encontramos enunciados declarativos que están compuestos de enunciados simples.

Recuerda que un enunciado numérico es cierto o falso. El enunciado compuesto,

$$4 + 1 = 5 \quad y \quad 6 + 2 = 7$$

es indudablemente falso, debido a que la palabra <u>y</u> quiere decir "ambas" y en este caso la segunda de las cláusulas es falsa. El enunciado compuesto,

$$3 \not> 1 + 2 \quad y \quad 4 + 7 > 10$$

es cierto, debido a que <u>ambas</u> cláusulas son enunciados ciertos.

En general, un enunciado compuesto que lleva la conjunción <u>y</u> es cierto si todas sus cláusulas son enunciados ciertos; de otro modo será falso.

Conjunto de problemas 3-7a

¿Cuáles de los siguientes enunciados son ciertos?

1. $4 = 5 - 1 \quad y \quad 5 = 3 + 2$
2. $5 = \frac{11}{2} - \frac{1}{2} \quad y \quad 6 < \frac{2}{3} \times 9$
3. $3 > 3 + 2 \quad y \quad 4 + 7 < 11$
4. $3 + 2 > 9 \times \frac{1}{3} \quad y \quad 4 \times \frac{3}{2} \neq 5$
5. $3.2 + 9.4 \not> 12.6 \quad y \quad \frac{7}{8} < \frac{11}{12}$
6. $3.25 + 0.3 \not> 6.25$

Considera ahora el enunciado,

$$4 + 1 = 5 \text{ ó } 6 + 2 = 7.$$

Este es otro tipo de enunciado compuesto en el que la conjunción es o. Aquí debemos ser muy cuidadosos. Posiblemente, los enunciados lingüísticos pueden ayudarnos a esclarecer la situación. Si decimos, "Los Yankees o los Indios ganarán el banderín", queremos decir que solamente uno de los dos ganará; ciertamente, los dos no pueden ganar. Pero cuando decimos, "Mi paquete o el tuyo llegará dentro de una semana", cabe la posibilidad de que lleguen ambos paquetes. Con esto queremos decir que uno o más de los paquetes llegará, lo que incluye la posibilidad de que lleguen ambos. Esta segunda interpretación de la conjunción "o" resulta más apropiada para nuestro trabajo en matemática.

Por lo tanto, acordamos que un enunciado compuesto que lleva la conjunción o es cierto si una o más de sus cláusulas son enunciados ciertos; de otro modo será falso.

Clasificamos a

$$4 + 1 = 5 \text{ ó } 6 + 2 = 7$$

como un enunciado compuesto cierto porque su primera cláusula es un enunciado cierto; clasificamos también a

$$5 < 4 + 3 \text{ ó } 2 + 1 \neq 4$$

como un enunciado compuesto cierto, porque una o más de sus cláusulas son ciertas (en este caso, ambas son ciertas).

¿Es el siguiente enunciado falso?

$$3 \neq 2 + 1 \text{ ó } 2 > 4 + 1$$

¿Por qué?

Conjunto de problemas 3-7b

¿Cuáles de los siguientes enunciados son ciertos?

1. $3 = 5 - 1$ ó $5 = 3 + 2$
2. $7 = \frac{11}{2} + \frac{3}{2}$ ó $2 = \frac{11}{2} - \frac{3}{2}$
3. $4 > 3 + 2$ ó $6 < 3 + 1$
4. $2 + 3 > 9 \times \frac{1}{3}$ y $4 \times \frac{3}{2} \neq 6$
5. $6.5 + 2.3 \neq 8.8$ ó $\frac{3}{5} < \frac{7}{15}$
6. $5 + 4 < 9$ ó $\frac{3}{4} < \frac{9}{12}$.

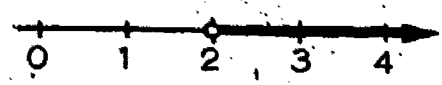
3-8. Gráficas de conjuntos de validez de enunciados abiertos compuestos

Hasta ahora, sólo hemos considerado gráficas de enunciados simples. Las gráficas de un enunciado abierto compuesto requieren un tratamiento especial. Consideremos el enunciado abierto,

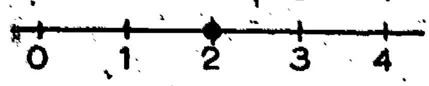
$$x > 2 \text{ ó } x = 2.$$

Las cláusulas de este enunciado y las gráficas correspondientes de sus conjuntos de validez son las siguientes:

$x > 2$

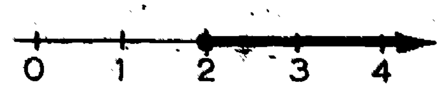


$x = 2$



Si un número pertenece al conjunto de validez del enunciado "$x > 2$" o al conjunto de validez del enunciado "$x = 2$", entonces pertenece al conjunto de validez del enunciado compuesto "$x > 2$ ó $x = 2$". Por lo tanto, todo número mayor que o igual a 2 pertenece al conjunto de validez. Por otra parte, cualquier número menor que 2 hace falsas ambas cláusulas del enunciado compuesto y por tanto no pertenece al conjunto de validez. La gráfica del conjunto de validez será, pues;

$x > 2$ ó $x = 2$



Abreviamos el enunciado "$x > 2$ ó $x = 2$" así: "$x \geq 2$". Este se lee, "x es mayor que o igual a 2". ¿Qué queremos decir por "$\leq$"?

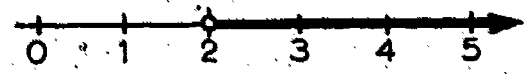
Hagamos una exposición precisa del principio comprendido:

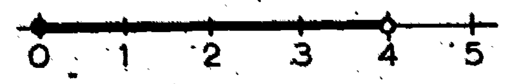
La gráfica del conjunto de validez de un enunciado compuesto que lleva la conjunción o consiste en el conjunto de todos los puntos pertenecientes a cualquiera de las gráficas de las dos cláusulas del enunciado.

Finalmente, consideremos el problema de construir la gráfica de un enunciado abierto tal como

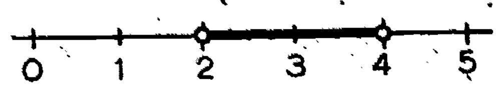
$$x > 2 \text{ y } x < 4.$$

De nuevo, empezamos con las dos cláusulas y las gráficas de sus conjuntos de validez:

$x > 2$ 

$x < 4$ 

De aquí se desprende (usando un argumento parecido al anterior), que la gráfica del conjunto de validez del enunciado compuesto es

$x > 2$ y $x < 4$ 

A veces escribimos "$x > 2$ y $x < 4$" en la forma "$2 < x < 4$".

Vemos que la gráfica del conjunto de validez de un enunciado compuesto que lleva la conjunción y consiste en todos los puntos comunes a las gráficas de los conjuntos de validez de las dos cláusulas del enunciado.

Hemos necesitado muchas palabras, escogidas cuidadosamente, para describir las diversas relaciones entre enunciados, conjuntos de validez y gráficas. Hasta ahora, consistentemente hemos hecho referencia a la gráfica del conjunto de validez de un enunciado abierto; en el futuro, usaremos en cambio la frase abreviada gráfica de un enunciado. Esta será una descripción más sencilla y no habrá confusión si recordamos su verdadero significado.

También para abreviar, convendrá hablar del punto 3 ó del punto $\frac{1}{2}$ cuando nos referimos al punto cuya coordenada es 3 ó al punto cuya coordenada es $\frac{1}{2}$. Sabemos que puntos y números son entidades distintas, pero también hay una correspondencia definida entre ellos en la recta numérica. Cuando haya alguna posibilidad de confusión, nos acordaremos de usar las descripciones completas.

Conjunto de problemas 3-8

Construye las gráficas de los siguientes enunciados abiertos:

1. $x = 2$ ó $x = 3$
2. $x = 2$ y $x = 3$
3. $x > 5$ ó $x = 5$
4. $x > 2$ y $x < \frac{11}{2}$
5. $x > 5$ y $x = 5$
6. $x + 1 = 4$ y $x + 2 = 5$
7. $x + 1 = 4$ ó $x + 3 = 5$
8. $x > 3$ ó $x = 3$
9. $x < 3$ ó $x = 3$

10. $x \neq 3$ y $x \neq 4$

3-9. Resumen de enunciados abiertos

Hemos examinado algunos enunciados y hemos visto que cada uno puede ser clasificado como cierto o falso, pero no como ambas cosas. Establecimos también un conjunto de símbolos para indicar relaciones entre números:

" $=$ " quiere decir "es" o "es igual a"
" $\neq$ " quiere decir "no es" o "no es igual a"
" $<$ " quiere decir "es menor que"
" $>$ " quiere decir "es mayor que"
" $\leq$ " quiere decir "es menor que o igual a"
" $\geq$ " quiere decir "es mayor que o igual a"

Hemos estudiado enunciados compuestos que tienen dos cláusulas. Si las cláusulas están unidas por la palabra o, el enunciado será cierto si al menos una de ellas es cierta; de otro modo será falso. Si las cláusulas están unidas por la palabra y, el enunciado será cierto si ambas cláusulas son ciertas; de otro modo será falso.

Un enunciado abierto es un enunciado que contiene una o más variables.

El conjunto de validez de un enunciado abierto que contiene una variable es el conjunto de todos los números que hacen que el enunciado sea cierto. El enunciado abierto actúa como una criba para separar el dominio de una variable en dos subconjuntos: un subconjunto de números que hacen que el enunciado sea cierto y un subconjunto de números que hacen que el enunciado sea falso.

La gráfica de un enunciado es la gráfica del conjunto de validez del enunciado.

Conjunto de problemas 3-9

Determina el conjunto de validez de cada uno de los siguientes enunciados abiertos y represéntalo gráficamente. A continuación tienes algunos ejemplos de cómo podrías expresar los conjuntos de validez:

Enunciado abierto	Conjunto de validez
$x + 3 = 5$	$\{2\}$
$2x \neq x + 3$	El conjunto de todos los números de la aritmética excepto el 3.
$x + 1 < 5$	El conjunto de todos los números de la aritmética menores que 4.
$2x \geq 9$	El conjunto de números que consiste en $4\frac{1}{2}$ y todos los números mayores que $4\frac{1}{2}$.

1. $z + 8 = 14$
2. $2 + v < 15$
3. $2x = 3$
4. $6 > 1 + 3$ y $5 + t = 4$
5. $6 > 1 + 3$ ó $2 + t = 1$
6. $x^2 = x$
7. $x + 2 = 3$ ó $x + 4 = 6$
8. $\frac{x}{2} > 3$
9. $t + 4 = 5$ ó $t + 5 \neq 5$
10. $3a \neq a + 5$
11. $3x^2 = 12$
12. $(3x)^2 = 36$
13. $9 + t < 12$ ó $5 + 1 \neq 6$
14. $5x + 3 < 19$
15. $(x - 1)^2 = 4$
16. $3x = (8 + x) - 2$
17. $x^2 - 3x + 2 \leq 0$
18. $t + 6 \leq 7$ y $t + 6 \geq 7$
19. $3(x + 2) = 3x + 6$
20. $t + 2 \neq 3$ y $8 + 2 < 5$

3-10. Elemento identidad

Considera los conjuntos de validez de los enunciados abiertos,

$$5 + x = 5$$
$$3 + y = 3$$
$$2\tfrac{1}{2} + a = 2\tfrac{1}{2}.$$

¿Te parece que el conjunto de validez de cada uno de estos enunciados es $\{0\}$? ¿Para qué número n será cierto que

$$n + 0 = n?$$

Aquí tenemos una propiedad interesante que llamaremos la propiedad aditiva del cero. Podemos expresarla en palabras así: "La suma de cualquier número y cero es el número mismo".

En el lenguaje algebraico podemos expresar esta propiedad de la manera siguiente:

Para todo número a,

$$a + 0 = a.$$

Al cero lo llamamos frecuentemente el elemento identidad o neutral para la suma, ya que al sumarlo a cualquier número obtenemos como resultado idénticamente el mismo número.

¿Existe un elemento identidad para la multiplicación? Considera los conjuntos de validez de los siguientes enunciados abiertos:

$$3x = 3$$

$$\frac{2}{3}n = \frac{2}{3}$$

$$.7 = .7y$$

$$n(5) = 5.$$

Seguramente encontraste que el conjunto de validez de cada uno de estos enunciados es $\{1\}$.

Así,

$$n(1) = n$$

parece ser un enunciado cierto para todos los números. A esta propiedad la llamaremos la propiedad multiplicativa del uno. ¿Cómo podrías expresarla en palabras?

En el lenguaje algebraico podemos expresarla de la manera siguiente:

Para todo número a,

$$a(1) = a.$$

Podemos ver que el elemento identidad para la multiplicación es el 1.

El cero posee otra propiedad que se hará evidente si contestas las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es el resultado de multiplicar cualquier número de la aritmética por 0?

2. Si el producto de dos números es 0, y uno de ellos es 0, ¿qué puedes decir acerca del otro?

A esta propiedad que se ha hecho evidente la llamamos la propiedad multiplicativa del cero y la podemos expresar de la manera siguiente:

Para todo número a,

$$a(0) = 0.$$

Estas propiedades del cero y del uno son muy útiles. Por ejemplo, usamos la propiedad multiplicativa del uno en la aritmética cuando trabajamos con números racionales. Suponte que deseamos hallar un numeral para $\frac{5}{6}$ que sea una fracción con 18 como denominador. Entre todos los nombres del 1, tales como $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{5}{5}$, ..., escogemos "$\frac{3}{3}$" porque 3 es el número que al multiplicarse por 6 da 18. Entonces tendremos

$$\begin{aligned}\frac{5}{6} &= \frac{5}{6}(1)\\ &= \frac{5}{6}\left(\frac{3}{3}\right)\\ &= \frac{5(3)}{6(3)}\\ &= \frac{15}{18}.\end{aligned}$$

Suponte que ahora queremos sumar $\frac{7}{9}$ y $\frac{5}{6}$. Para hacerlo convendría hallar otros nombres para $\frac{7}{9}$ y $\frac{5}{6}$, nombres que sean fracciones con el mismo denominador. ¿Qué denominador debemos escoger? Tendrá que ser un múltiplo de 6 y de 9, pero no podrá ser 0. Así, 36, ó 18, ó 54, ó muchos otros, son posibles selecciones. Para mayor sencillez escogemos el más pequeño, 18. (A éste le llamamos el <u>mínimo</u> <u>común</u> <u>múltiplo</u> de 6 y 9.) Ahora, para sumar $\frac{7}{9}$ y $\frac{5}{6}$, ya sabemos que

$$\frac{5}{6} = \frac{15}{18}.$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}\frac{7}{9} &= \frac{7}{9}(1)\\ &= \frac{7}{9}\left(\frac{2}{2}\right)\\ &= \frac{7(2)}{9(2)}\\ &= \frac{14}{18}.\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\frac{5}{6} + \frac{7}{9} &= \frac{15}{18} + \frac{14}{18}\\ &= \frac{29}{18}.\end{aligned}$$

<u>Ejemplo</u>. Halla un nombre corriente para $\dfrac{\frac{2}{3}+5}{\frac{3}{7}}$.

$$\frac{\frac{2}{3}+5}{\frac{3}{7}} = \frac{\frac{2}{3}+5}{\frac{3}{7}}\cdot\frac{21}{21}$$ (¿Por qué usamos $\frac{21}{21}$?)

$$= \frac{(\frac{2}{3} + 5)21}{(\frac{3}{7})21}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}(21) + 5(21)}{\frac{3}{7}(21)}$$ (Observa el uso de la propiedad distributiva)

$$= \frac{14 + 105}{9}$$

$$= \frac{119}{9}.$$

Conjunto de problemas 3-10

En los problemas del 1 al 10, ilustra cómo usas las propiedades del 0 y del 1 para encontrar un nombre corriente para cada uno de los siguientes:

1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$
2. $\frac{7}{12} + \frac{5}{18}$
3. $\dfrac{7 + \frac{2}{3}}{\frac{5}{6}}$
4. $\dfrac{\frac{1}{2} + \frac{3}{5}}{\frac{3}{20}}$
5. $27 + \left((15\frac{2}{3} + 2\frac{1}{3}) - 18\right)$
6. $\frac{7}{8}\left((3.7 + 0.3) - 4\right)$
7. $163(\frac{7}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4})$
8. $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}(2)\right) + 17$
9. $(6 - 6)(46)(36)\left(17 - \frac{2}{3}(12)\right)$
10. $(\frac{16}{3} - 5)(3)(5280)$

*11. (a) Si sabes que el producto de dos números es 0 y que uno de los números es 3, ¿qué puedes decir acerca del otro número?

(b) Si el producto de dos números es 0, ¿qué puedes decir acerca de por lo menos uno de ellos?

(c) ¿Permite la propiedad multiplicativa del 0 contestar estas preguntas? ¿Qué otra propiedad del 0 está implícita aquí?

3-11. Clausura

Hasta ahora en nuestro trabajo, hemos combinado frecuentemente dos números, mediante la suma o la multiplicación, para obtener otro número. Basándonos en nuestra experiencia anterior, nunca hemos tenido duda de que el resultado siempre es un número. Sin embargo, hay algunas tribus primitivas que sólo saben contar hasta tres. Suponte que trataras de enseñar a tales personas a sumar—¿qué les dirías al llegar a sumas como "2 + 2" y "2 + 3"? Obviamente, tendrías que ampliar su conjunto de números de manera que la suma de dos números cualesquiera fuera un número del conjunto.

El conjunto de los números de la aritmética tiene esta propiedad; es decir, la suma de dos cualesquiera de estos números es siempre un número del conjunto. Cuando se efectúa una cierta operación con los elementos de un subconjunto dado de los números de la aritmética y obtenemos siempre como resultado un número de este subconjunto, decimos que el <u>subconjunto es cerrado respecto de la operación</u>. Por lo tanto, decimos que el conjunto de los números de la aritmética es <u>cerrado respecto de la suma</u>. Así también, este conjunto es <u>cerrado respecto de la multiplicación</u> ya que el producto de dos números cualesquiera es siempre un número. Expresamos estas propiedades en lenguaje algebraico como sigue:

<u>Propiedad de clausura de la suma</u>: Para todo número a y todo número b, $a + b$ es un número.

<u>Propiedad de clausura de la multiplicación</u>: Para todo número a y todo número b, ab es un número.

3-12. Propiedades asociativa y conmutativa de la suma y de la multiplicación

En el capítulo 2 discutimos varios modelos para construir enunciados ciertos acerca de números y vimos que esos modelos estaban estrechamente relacionados con muchas de las técnicas de la aritmética. ¿Cuáles eran algunos de estos modelos? Por ejemplo, encontramos enunciados ciertos tales como

$$(7 + 8) + 3 = 7 + (8 + 3)$$

y

$$(1.2 + 1.8) + 2.6 = 1.2 + (1.8 + 2.6).$$

De estos ejemplos derivamos una ley para enunciados ciertos que expresamos en palabras como sigue: Si añades un segundo número a un primer número, y después un tercer número a esa suma, el resultado es el mismo que si sumas el segundo número y el tercero, y luego añades su suma al primer número. ¿Cómo se llamaba esta propiedad?

El lenguaje algebraico con el que nos hemos estado familiarizando nos permite presentar, al igual que en el caso de las propiedades del 1 y del 0 que acabamos de estudiar, un enunciado relativo a la propiedad anterior en este lenguaje. Tenemos que ocuparnos de tres números (no necesariamente distintos) a la vez. Llamemos "a" al primero de ellos, "b" al segundo y "c" al tercero. "Añadir un segundo número a un primer número" se representará por "a + b"; "añadir un tercer número a esa suma" se representará por "(a + b) + c". (¿Por qué intercalamos los paréntesis?) Escribe la segunda parte de nuestro enunciado verbal en el lenguaje del álgebra. Las palabras "el resultado es el mismo" nos dicen ahora que tenemos dos nombres para el mismo número. Entonces nuestro enunciado resulta ser

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

¿Para qué números es cierto este enunciado? Anteriormente habíamos llegado a la conclusión de que es cierto para todos los números. Por lo tanto, finalmente escribimos:

Para todo número a, para todo número b, para todo número c,

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Otros enunciados ciertos eran de la forma

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

$$3 + 5 = 5 + 3.$$

Llamamos propiedad conmutativa de la suma a la propiedad que nos dice que todos los enunciados que siguen esta ley son ciertos. La expresamos en palabras así: Si dos números se suman en órdenes distintos, los resultados son los mismos. Dicho en lenguaje algebraico:

Para todo número a y todo número b,

$$a + b = b + a.$$

¿Cómo expresarías la propiedad asociativa de la multiplicación en lenguaje algebraico?

¿Qué propiedad está expresada por la siguiente aseveración?

Para todo número a y todo número b, 7

$$ab = ba.$$

Estas propiedades de las operaciones nos permiten escribir frases abiertas en "otras formas". Por ejemplo, la frase abierta $3d(d)$ puede escribirse como $3(d \cdot d)$, esto es, $3d^2$, si aplicamos la propiedad asociativa de la multiplicación. De modo que, dos "formas" de una frase abierta son dos numerales para el mismo número.

Entre las propiedades que acabamos de considerar están las de conmutatividad de la suma y de la multiplicación. ¿Por qué nos interesa tanto saber si son conmutativas operaciones binarias tales como la suma y la multiplicación? ¿No son conmutativas todas las operaciones de la aritmética? Intentemos averiguarlo con la división, por ejemplo. Recuerda que

$$6 \div 3$$

significa "6 dividido por 3". Examina ahora si

$$6 \div 3 = 3 \div 6$$

es un enunciado cierto. Esta es evidencia suficiente para mostrar que la división no es una operación conmutativa. (Incidentalmente, podrías hallar alguna a y alguna b de manera que $a \div b = b \div a$?) ¿Es asociativa la operación de división?

Otro ejemplo muy interesante en el caso de los números naturales es el siguiente: Sea $2 ** 3$ definido como $(2)(2)(2)$ y $3 ** 2$ como $(3)(3)$. En general, $a ** b$ significará que a se ha tomado b veces como factor. ¿Es cierto el siguiente enunciado:

$$5 ** 2 = 2 ** 5?$$

¿Llegas a la conclusión de que esta operación binaria con los números naturales es conmutativa? ¿Es asociativa?

Tal vez objetarás que este segundo ejemplo es artificial. Por el contrario, la operación ** definida arriba se emplea realmente en el lenguaje de algunas computadoras digitales. Verás, una máquina trabaja mejor si se le dan todas las instrucciones en una sola línea, y por esto se ideó una notación "lineal" para esta operación. Pero debes ver que para la máquina el orden de los números en esta operación es muy significativo. ¿Hay alguna restricción en cuanto al tipo de números con los cuales podemos efectuar la operación **?

Conjunto de problemas 3-12

1. Si x, y son números de la aritmética, la propiedad de clausura nos asegura que $3xy$, $2x$, y por lo tanto, $(3xy)(2x)$ son números de la aritmética. Entonces, las propiedades asociativa y conmutativa de la multiplicación nos permiten escribir esta última expresión en otra forma:

$$(3xy)(2x) = (3 \cdot 2)(x \cdot x)y$$
$$= 6x^2y.$$

Como el ejemplo anterior, expresa en otra forma los siguientes productos indicados:

(a) $(2m)(mn)$ (d) $(\frac{1}{2}ab)(6c)$

(b) $(5p^2)(3q)$ (e) $(10a)(10b)$

(c) $n(2n)(3m)$ (f) $(3x)(12)$

2. Si x, y son números de la aritmética, entonces la propiedad de clausura nos permite considerar a $12x^2y$ como un numeral que representa un solo número. Las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación nos permiten escribir otros numerales para el mismo número. $(4xy)(3x)$, $(2x)(6xy)$ y $(12x^2y)(1)$ son algunas de las muchas formas en que podemos escribir $12x^2y$ como productos indicados. Análogamente, escribe tres posibles productos indicados para cada uno de los siguientes:

(a) $8ab^2$ (b) $7xy^2$

(c) $10mn$ (e) $64a^2bc^2$

(d) $x^2\ y^2$ (f) $2c$

3. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son ciertos para todo valor de la variable? Explica cuáles de las propiedades te ayudaron en cada caso.
   (a) $m(2 + 5) = (2 + 5)m$
   (b) $(m + 1)2 = (2 + 1)m$
   (c) $(a + 2y) + b = (a + b) + 2y$
   (d) $3x + y = y + 3x$
   (e) $(2a + c) + d = 2a(c + d)$
   (f) $2c + 6 = 6 + 2c$
   (g) $.5b(200) = 200(.5b)$
   (h) $(2uv)z = 2u(vz)$
   (i) $(\frac{m}{2} + \frac{n}{2}) + \frac{s}{2} = \frac{m}{2} + (\frac{n}{2} + \frac{s}{2})$
   (j) $3x + y = x + 3y$
4. Sea el conjunto $A = \{0, 1\}$.
   (a) ¿Es A cerrado respecto de la suma?
   (b) ¿Es A cerrado respecto de la multiplicación?
5. (a) ¿Es el conjunto S de todos los múltiplos de 6 cerrado respecto de la suma?
   (b) ¿Es el conjunto S cerrado respecto de la multiplicación?

*6. Definamos algunas operaciones binarias distintas a las de la suma y la multiplicación. Usaremos el símbolo " $\circ$ " y leeremos "$a \circ b$" como "a operación b". Como el símbolo que utilizaremos tendrá varios significados, es imprescindible definirlo cada vez que lo usemos. Por ejemplo, para toda a y toda b,

si $a \circ b$ significa $2a + b$, entonces $3 \circ 5 = 2(3) + 5$;

si $a \circ b$ significa $\frac{a + b}{2}$, entonces $3 \circ 5 = \frac{3 + 5}{2}$;

si $a \circ b$ significa $(a - a)b$, entonces $3 \circ 5 = (3 - 3)5$;

si $a \circ b$ significa $a + \frac{1}{3}b$, entonces $3 \circ 5 = 3 + (\frac{1}{3})(5)$;

si $a \circ b$ significa $(a + 1)(b + 1)$, entonces $3 \circ 5 = (3 + 1)(5 + 1)$.

Para cada una de las interpretaciones expuestas arriba, escribe un numeral que represente cada uno de los siguientes:

(a) $2 \circ 6$ (c) $6 \circ 2$

(b) $(\frac{1}{2}) \circ 6$ (d) $(3 \circ 2) \circ 4$

*7. ¿Son conmutativas operaciones binarias con números tales como las que definimos en el problema 6? En otras palabras, ¿es cierto que para toda a y toda b, $a \circ b = b \circ a$? Examinemos algunos casos. Por ejemplo, si $a \circ b$ significa $2a + b$, vemos que

$$3 \circ 4 = 2(3) + 4$$
$$4 \circ 3 = 2(4) + 3.$$

Pero "$2(3) + 4 = 2(4) + 3$" es un enunciado falso. Por lo tanto concluimos que la operación aquí indicada por el símbolo " $\circ$ " no es conmutativa. Determina en cada uno de los siguientes si la operación descrita es o no conmutativa:

(a) Para toda a y toda b, $a \circ b = \frac{a + b}{2}$

(b) Para toda a y toda b, $a \circ b = (a - a)b$

(c) Para toda a y toda b, $a \circ b = a + \frac{1}{3}b$

(d) Para toda a y toda b, $a \circ b = (a + 1)(b + 1)$

¿Puedes concluir que son conmutativas las operaciones binarias en todo caso?

*8. ¿Es la operación " $\circ$ " asociativa en cada uno de los casos anteriores? Por ejemplo, si para toda a y toda b, $a \circ b = 2a + b$, ¿es $(4 \circ 2) \circ 5 = 4 \circ (2 \circ 5)$ un enunciado cierto?

$$(4 \circ 2) \circ 5 = 2\ 2(4) + 2\ + 5$$
$$= 2(10) + 5$$

mientras que

$$4 \circ (2 \circ 5) = 2(4) + \ 2(2) + 5$$
$$= 8 + 9$$

Como el enunciado $2(10) + 5 = 8 + 9$ es falso, concluimos que esta operación no es asociativa. Determina si las operaciones descritas en el problema 7(a) - (d) son asociativas.

3-13. La propiedad distributiva

Lo que estudiamos acerca de los números en el capítulo 2 nos ha mostrado varias versiones de la propiedad distributiva. Así,

$$15(7 + 3) = 15(7) + 15(3)$$

y

$$(\tfrac{1}{3})12 + (\tfrac{1}{4})12 = (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4})12$$

son dos enunciados ciertos cada uno de los cuales sigue una de las leyes que hemos estudiado. Hemos visto la importancia de esta propiedad para relacionar sumas indicadas y productos indicados. Podemos expresar ahora la <u>propiedad distributiva</u> en lenguaje algebraico:

Para todo número a, todo número b y todo número c,

$$a(b + c) = ab + ac.$$

¿Está esto de acuerdo con lo que expresamos en palabras en el capítulo 2? Como hemos establecido que "$a(b + c)$" y "$ab + ac$" son numerales para el mismo número, podemos igualmente escribir:

Para todo número a, todo número b y todo número c,

$$ab + ac = a(b + c).$$

Podemos también aplicar la propiedad conmutativa de la multiplicación para escribir:

Para todo número a, todo número b y todo número c,

$$(b + c)a = ba + ca$$

y también:

Para todo número a, todo número b y todo número c,

$$ba + ca = (b + c)a.$$

¿Cuál de estas leyes sigue el primero de los ejemplos anteriores? ¿el segundo?

Cualquiera de los cuatro enunciados anteriores describe la propiedad distributiva. Todas estas formas son útiles en el estudio del álgebra.

<u>Ejemplo 1</u>. Escribe el producto indicado, $x(y + 3)$, como una suma indicada.

$$x(y + 3) = xy + x(3) \quad \text{por la propiedad distributiva}$$
$$= xy + 3x$$

<u>Ejemplo 2</u>. Escribe $5x + 5y$ como un producto indicado.

$$5x + 5y = 5(x + y) \quad \text{por la propiedad distributiva}$$

<u>Ejemplo 3</u>. Escribe en una forma más sencilla la frase abierta, $3a + 5a$.

$3a + 5a = (3 + 5)a$ por la propiedad distributiva
$= 8a$

Ejemplo 4. Escribe en una forma más sencilla la frase abierta, $2x + 3y + 4x + 6y$.

$2x + 3y + 4x + 6y = (2x + 4x) + (3y + 6y)$ por las propiedades asociativa y conmutativa de la suma

$= (2 + 4)x + (3 + 6)y$ por la propiedad distributiva

$= 6x + 9y$

Conjunto de problemas 3-13a

1. Escribe los siguientes productos indicados como sumas indicadas:
   (a) $6(r + s)$
   (b) $(b + 3)a$
   (c) $x(x + z)$
   (d) $(7 + x)x$
   (e) $6(8 + 5)$
   (f) $(a + b)b$
2. Escribe las siguientes sumas indicadas como productos indicados:
   (a) $3x + 3y$
   (b) $am + an$
   (c) $x + bx$ Sugerencia: $x = (1)x$
   (d) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$
   (e) $2a + a^2$ Sugerencia: ¿Cómo se define a^2?
   (f) $x^2 + xy$
3. Utiliza las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva para escribir, en la forma lo más sencilla posible, las siguientes frases abiertas:
   (a) $14x + 3x$
   (b) $\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}x$
   (c) $\frac{2}{3}a + 3b + \frac{1}{3}a$
   (d) $7x + 13y + 2x + 3y$
   (e) $4x + 2y + 2 + 3x$
   (f) $1.3x + 3.7y + 6.2 + 7.7x$
   (g) $2a + \frac{1}{3}b + 5$

La propiedad distributiva expuesta en el enunciado:

Para todo número a, todo número b, y todo número c,

$$a(b + c) = ab + ac$$

concierne a los tres números a, b y c. Sin embargo, la propiedad de clausura nos permite aplicar la propiedad distributiva en muchos casos en que una frase abierta contiene aparentemente más de tres numerales. Por ejemplo, suponte que queremos expresar el producto indicado $2r(s + t)$ como una suma. La frase abierta contiene los cuatro numerales 2, r, s y t. No obstante, la propiedad de clausura nos permite considerar a $2r$ como el nombre de un solo número, de modo que podemos pensar en términos de tres numerales, $2r$, s y t. Así:

$$\begin{aligned} 2r(s + t) &= (2r)(s + t) \\ &= (2r)s + (2r)t \\ &= 2rs + 2rt \end{aligned}$$

Ejemplo 1. Escribe $3u(v + 3z)$ como una suma indicada.

La propiedad de clausura nos permite considerar a cada uno de los términos $3u$, v, y $3z$ como el nombre de un número. Entonces, por la propiedad distributiva

$$\begin{aligned} 3u(v + 3z) &= (3u)v + (3u)(3z) \\ &= 3uv + 9uz \end{aligned}$$

por las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación

Ejemplo 2. Escribe la suma indicada, $2rs + 2rt$, como un producto indicado.

Esto lo podemos hacer de tres maneras:

(1) $2rs + 2rt = 2(rs) + 2(rt)$
$= 2(rs + rt)$

(2) $2rs + 2rt = r(2s) + r(2t)$
$= r(2s + 2t)$

(3) $2rs + 2rt = (2r)s + (2r)t$
$= 2r(s + t)$

Aunque las tres formas son correctas, generalmente preferimos la tercera.

Ejemplo 3. Expresa el producto indicado, $3(x + y + z)$, como una suma indicada.

$$3(x + y + z) = 3x + 3y + 3z$$

Conjunto de problemas 3-13b

1. Escribe como una suma indicada cada uno de los siguientes productos indicados:
   (a) $m(6 + 3p)$
   (b) $2k(k + 1)$
   (c) $6(2s + 3r + 7q)$
   (d) $(2x + xy)x$
   (e) $(e + f + g)h$
   (f) $6pq(p + q)$
2. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son ciertos para todo valor de cada variable?
   (a) $2a(a + b) = 2a^2 + ab$
   (b) $4xy + y^2 = (4x + y)y$
   (c) $3ab + 6bc = 3b(a + 2c)$
   (d) $2a(b + c) = 2ab + c$
   (e) $(4x + 3)x = 4x^2 + 3 + x$
   (f) $(2y + xy) = (2 + x)y$
3. Escribe como un producto indicado cada una de las siguientes sumas indicadas:
   (a) $3uv + v^2$
   (b) $7pq + 7qr$
   (c) $3x + 3x^2$ Sugerencia: Piensa en $3x$ como $(3x)(1)$
   (d) $2c + 4cd$ Sugerencia: $4cd = (2c)(2d)$
   (e) $3x + 6x^2$
   (f) $xz^2 + 2xz$

A continuación presentamos otra aplicación importante de la propiedad distributiva:

<u>Ejemplo 1.</u> Escribe la expresión, $(x + 2)(x + 3)$, como una suma indicada, sin paréntesis.

Si escribimos la propiedad distributiva, y debajo de ella el producto indicado, podemos ver qué nombres debemos tomar como nombres diferentes de números.

$$a(b + c) \quad = \quad ab \quad + \quad ac$$
$$(x + 2)(x + 3) = \overbrace{(x + 2)}x + \overbrace{(x + 2)}3$$

$= x^2 + 2x + 3x + 6$ propiedad distributiva

$= x^2 + (2 + 3)x + 6$ propiedad distributiva

$= x^2 + 5x + 6$

¿Podrías haber usado una forma diferente de la propiedad distributiva para empezar tu trabajo?

Ejemplo 2. Escribe $(a + b)(c + d)$ como una suma indicada sin paréntesis. Justifica cada paso.

$$(a + b)(c + d) = (a + b)c + (a + b)d$$
$$= ac + bc + ad + bd$$

Conjunto de problemas 3-13c

Escribe como sumas indicadas sin paréntesis los siguientes productos indicados:

1. $(x + 4)(x + 2)$
2. $(x + 1)(x + 5)$
3. $(x + a)(x + 3)$
4. $(x + 2)(y + 7)$
5. $(m + n)(m - n)$
6. $(2p + q)(p + 2q)$

3-14. Resumen: Propiedades de las operaciones con números de la aritmética

Los números pueden ser sumados y multiplicados. Hemos aprendido que los números y las operaciones relacionadas con ellos tienen propiedades fundamentales que llamamos las propiedades de los números. A continuación haremos una lista de estas propiedades.

1. Propiedad de clausura de la suma: Para todo número a y todo número b, $a + b$ es un número.
2. Propiedad de clausura de la multiplicación: Para todo número a y todo número b, ab es un número.
3. Propiedad conmutativa de la suma: Para todo número a y todo número b, $a + b = b + a$.
4. Propiedad conmutativa de la multiplicación: Para todo número a y todo número b, $ab = ba$.
5. Propiedad asociativa de la suma: Para todo número a, todo número b y todo número c, $(a + b) + c = a + (b + c)$.
6. Propiedad asociativa de la multiplicación: Para todo número a, todo número b y todo número c, $(ab)c = a(bc)$.
7. Propiedad distributiva: Para todo número a, todo número b y todo número c, $a(b + c) = ab + ac$.

8. <u>Propiedad aditiva del 0</u>: Para todo número a,

$$a + 0 = a.$$

9. <u>Propiedad multiplicativa del 1</u>: Para todo número a,

$$a(1) = a.$$

10. <u>Propiedad multiplicativa del 0</u>: Para todo número a,

$$a(0) = 0.$$

<u>Conjunto de problemas 3-14</u>

1. Halla el nombre corriente de cada uno de los números que se obtienen de

$$8 \_\_\_\_\_\_\_ 3 \_\_\_\_\_\_\_ 2$$

llenando cada uno de los blancos con uno de los signos $+$, $\times$, $-$, y colocando paréntesis para indicar su agrupación. Como ejemplos, $8 - (3 + 2) = 3$, y $(8 + 3) \times 2 = 22$.

2. En los ejercicios siguientes, escribe los productos indicados como sumas indicadas y las sumas indicadas como productos indicados:

(a) $(1 + x)5$

(b) $\frac{3}{4}a + \frac{2}{4}a$

(c) $33(95) + 15(11)$

(d) $c + 2c$

(e) $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3})y$

(f) $x(y + 1)$

(g) $xy + x$

(h) $3ax + 2ay$

(i) $(5 + y)y + 2y$

(j) $(2 + a)b + (2 + a)3$

Sugerencia: $(2 + a)$ es un número, por la propiedad de clausura

(k) $b + 3ab$

(l) $2a(a + b + c)$

(m) $(u + 2v)(u + v)$

(n) $(a + 1)^2$

3. Usa las propiedades de los números para escribir en una forma más sencilla los siguientes:

(a) $17x + x$

(b) $2x + y + 3x + y$

(c) $3(x + 1) + 2x + 7$

(d) $1.6a + .7 + .4a + .3b$

(e) $by + 2by$

(f) $9x + 3 + x + 2 + 11x$

*4. Aquí verás cómo se comprueba si un número cardinal es exactamente divisible por 9. Según vayas leyendo, anota las propiedades de la suma y de la multiplicación que se usan.

Analiza lo siguiente:

$$\begin{aligned}
2357 &= 2(1000) + 3(100) + 5(10) + 7(1) \\
&= 2(999 + 1) + 3(99 + 1) + 5(9 + 1) + 7(1) \\
&= 2(999) + 2(1) + 3(99) + 3(1) + 5(9) + 5(1) + 7(1) \\
&= \big(2(999) + 3(99) + 5(9)\big) + \big(2(1) + 3(1) + 5(1) + 7(1)\big) \\
&= \big(2(111) + 3(11) + 5(1)\big)9 + (2 + 3 + 5 + 7) \\
&= (222 + 33 + 5)9 + (2 + 3 + 5 + 7)
\end{aligned}$$

¿Es 2357 divisible por 9? Emplea el mismo procedimiento con 35,874. ¿Podrías enunciar una regla general para decidir cuando un número cardinal es divisible por 9?

*5. Examina la estructura del siguiente cálculo:

$$\begin{aligned}
19 \times 13 &= 19(10 + 3) \\
&= 19(10) + 19(3) && \text{(¿qué propiedad?)} \\
&= 19(10) + (10 + 9)3 \\
&= 19(10) + \big(10(3) + 9(3)\big) && \text{(¿qué propiedad?)} \\
&= \big(19(10) + 10(3)\big) + 9(3) && \text{(¿qué propiedad?)} \\
&= (19 + 3)10 + 9(3) && \text{(¿qué propiedades?)}
\end{aligned}$$

El resultado final nos indica un método para multiplicar números cardinales entre 11 y 19, inclusive: Suma al primer número la cifra de las unidades del segundo número y multiplica por 10, luego añade a este resultado el producto de las cifras de las unidades de los dos números. Usa el método para multiplicar 15×14, 13×17, 11×12.

Problemas de repaso

1. (a) Describe el conjunto H si
   $H = \{21, 23, 25, 27, \ldots, 49\}$.

   (b) Considera el conjunto A de todos los números cardinales mayores que 20. ¿Es H un subconjunto de A? ¿Es A un subconjunto de H?

   (c) Clasifica como finito o infinito cada uno de los conjuntos H y A.

2. Halla la coordenada de un punto que está en la recta numérica entre los dos puntos con coordenadas $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{6}$. ¿Cuántos puntos hay entre estos dos?

3. Considera el conjunto

   $T = \{0, 3, 6, 9, 12, \ldots\}$.

¿Es T cerrado respecto de la operación de sumar?; ¿y respecto de la operación de "calcular la media aritmética"?

4. Sea el dominio de la variable t el conjunto R de todos los números entre 3 y 5, inclusive.

(a) Construye la gráfica del conjunto R.

(b) Determina si cada uno de los siguientes números es un valor admisible para t: $\frac{3}{2}$, π, $\frac{17}{4}$, $4\frac{1}{3}$, $\frac{11}{2}$, $\sqrt{2}$.

5. ¿Será cierto cada uno de los siguientes enunciados?

$$(3 + 1)^2 = 3^2 + 2(3)(1) + 1^2$$
$$(5 + 2)^2 = 5^2 + 2(5)(2) + 2^2$$
$$\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}\right)^2 = \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 + 2\left(\tfrac{1}{3}\right)\left(\tfrac{2}{3}\right) + \left(\tfrac{2}{3}\right)^2$$

Determina qué patrón siguen estos enunciados y descríbelo en palabras. Entonces, formúlalo en lenguaje algebraico como un enunciado abierto con dos variables. Utiliza las propiedades de los números de la aritmética, según las hemos descubierto, para comprobar si el enunciado obtenido es o no cierto para todos los valores de las variables.

6. ¿Cuáles de los siguientes enunciados A, B, C, D y E tienen el mismo conjunto de validez que el enunciado "$x \leq 5$"?

(A) $x > 5$ ó $x = 5$

(B) $x < 5$ y $x = 5$

(C) $x \not> 5$

(D) $x \not< 5$

(E) $x \neq 5$

7. Halla el conjunto de validez de cada uno de los siguientes enunciados:

(a) $n - 5 = 7$

(b) $2n - 5 = 7$

(c) $3n - 5 = 7$

(d) $4n - 5 = 7$

(e) $6n - 5 = 7$

(f) $12n - 5 = 7$

8. Si m es un número de la aritmética, determina el conjunto de validez de:

(a) $m + m > 2$

(b) $m + m = 2m$

(c) $m \geq 2m$

(d) $m + 3 < m$

¿Cuál de estos conjuntos es un subconjunto de todos los demás? ¿Cuál es un subconjunto solamente de sí mismo? Contesta las preguntas anteriores, desde (a) hasta (d), si el dominio de m es el conjunto de los números naturales.

9. Sea T el conjunto de validez de

$$x + 3 = 5 \text{ ó } x + 1 = 4.$$

(a) ¿Es 3 un elemento de T?
(b) ¿Es 2 un elemento de T?
(c) ¿Es $\emptyset$ un subconjunto de T?

10. Representa gráficamente el conjunto de validez S de

$$x + 1 < 5 \text{ y } x - 1 \geq 2.$$

11. Considera el enunciado abierto,

$$2x \leq 1.$$

¿Cuál es su conjunto de validez si el dominio de x es el conjunto de

(a) los números naturales?
(b) los números cardinales?
(c) todos los números de la aritmética?

12. (a) ¿Es cierto el siguiente enunciado?

$$\frac{17}{2}(8 + 1) = \frac{17}{2}(4 + 5)$$

(b) ¿Tienes que hacer alguna multiplicación para contestar la parte (a)? Explica.

13. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son ciertos?

(a) $5(4 + 2) = (4 + 2)5$
(b) $10(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = \frac{21}{2} + \frac{31}{3}$
(c) $10(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = 5 + \frac{10}{3}$
(d) $4 + 7 + 1.817 = 5 + 1.817 + 6$
(e) $12 \times 8 + 12 \times 92 = 1200$
(f) $(5 \times \frac{25}{4})16 = 500$

14. Explica cómo se usa la propiedad del 1 al efectuar el siguiente cálculo:

$$\frac{\frac{3}{5} + \frac{2}{3}}{\frac{3}{4}}$$

15. Explica por qué

$$3x + y + 2x + 3y = 5x + 4y$$

es cierto para todos los valores de x y de y.

16. (a) Escribe como sumas indicadas sin paréntesis los siguientes productos indicados:

$$(x + 1)(x + 1)$$
$$(x + 2)(x + 2).$$

(b) Emplea el modelo de los resultados de la parte (a) para escribir la suma indicada,

$$x^2 + 6x + 9$$

como un producto indicado.

Capítulo 4

ENUNCIADOS ABIERTOS Y ENUNCIADOS LINGUISTICOS

4-1. Frases abiertas y frases lingüísticas

Constantemente estamos construyendo un nuevo lenguaje simbólico que se va haciendo cada vez más, un lenguaje completo. Hemos usado frases matemáticas, tales como "$8 + 3y$"; formas verbales matemáticas, incluso " = " y " > "; y enunciados matemáticos, como "$7n + 3n = 50$".

Recordemos que una variable, tal como "n", es el nombre de un número bien definido, aunque no especificado. La traducción de "n" a nuestro idioma significará entonces una referencia de un número no especificado con algo de interés para nosotros. Así, el numeral "n" puede representar "el número de problemas que he resuelto", "el número de estudiantes en un acto deportivo", "el número de monedas de 10 centavos en el bolsillo de Juan", o "el número de pies de altura del asta de la bandera de la escuela". ¿Qué otras traducciones son posibles?

Consideremos la frase "$5 + n$". ¿Podemos inventar una frase lingüística para ella? Supongamos que empleamos las traducciones antes sugeridas. Si "n" es el número de problemas que he de resolver hoy, entonces la frase "$5 + n$" representa "el total de los problemas incluyendo los cinco resueltos la noche anterior"; o, si yo tengo 5 monedas de 10 centavos y "n" representa el número de tales monedas en el bolsillo de Juan, entonces "$5 + n$" representa "el número total de dichas monedas, contando las cinco mías y las que están en el bolsillo de Juan". Observa que la traducción de "$5 + n$" depende de qué traducción hacemos de "n".

¿Cuál de las traducciones, en apariencia innumerables, hemos de seleccionar? Debemos recordar que la variable que aparece en la frase abierta, sea "n" o "x", o "w", o "b", es el nombre de un número. Que este número sea, el de monedas, el de estudiantes o el de pulgadas, etc., depende sólo del uso que pretendamos hacer de la traducción. El contexto mismo frecuentemente sugerirá o limitará tales traducciones. Así por ejemplo, no tendría sentido el traducir una frase tal como "$2,500,000 + y$" en términos del número de monedas de 10 centavos en el bolsillo de Juan, pero sí lo tendría el considerar "y" como representando el número que da el aumento de población de un estado que tenía 2,500,000 habitantes en la época del último censo, o como el número adicional de millas que ha recorrido un satélite, que en el momento de la última información había ya viajado 2,500,000 millas. Análogamente, la variable en la frase ".05 + k" difícilmente podría traducirse como el número de vacas o de estudiantes, pero sí como el incremento en el porcentaje de interés que previamente era 5 por ciento.

¿Cómo podemos traducir la frase "3x + 25"? Si no hay razones especiales para elegir una traducción particular, podemos considerar x como el número de centavos que Tomás se gana en una hora, cortando grama. Entonces 3x es el número de centavos ganados en tres horas. Si Tomás termina la tarea en tres horas y recibe una propina de 25 centavos, entonces la frase "3x + 25" representa el número total de centavos que Tomás posee luego de trabajar tres horas. ¿Cómo puede traducirse esa frase si consideramos x como el número de estudiantes en cada clase de álgebra, si estas clases son del mismo tamaño? O bien, ¿cuándo x es el número de millas recorridas por un automóvil en una hora a velocidad constante?

Hay muchas traducciones lingüísticas del símbolo " + ", que indica la operación de sumar dos números. Algunas de ellas son las siguientes: "la suma de", "más que", "aumentado en", "más viejo que" y otras. Hay también muchas traducciones lingüísticas de los símbolos que indican la operación de multiplicar dos números, incluyendo "por", "producto de" y otras. ¿Qué traducciones lingüísticas hay del símbolo " - "?

Conjunto de problemas 4-1

En los problemas 1-6, escribe frases lingüísticas que correspondan a cada una de las frases abiertas que aparecen a continuación. Trata de variar todo lo que puedas las frases lingüísticas. Indica en cada caso qué representa la variable.

1. $7w$ (Si un quintal de trigo cuesta w dólares, la frase es: "el número de dólares que cuestan siete quintales".)
2. $n + 7$
3. $n - 7$
4. $\frac{y}{2}$
5. $2r + 5$
6. $a + b$

En cada uno de los problemas 7-17, halla una frase abierta que sea una traducción de la frase lingüística dada. En cada problema indica qué representa la variable.

7. El número de pies en y yardas.
(si y es el número de yardas, entonces $3y$ es el número de pies.)
8. El número de pulgadas en f pies.
9. El número de pintas en k cuartillos.
10. El número de millas en k pies.
11. El sucesor de un número cardinal.
12. El recíproco de un número (si el producto de dos números es 1, cada uno es el recíproco del otro).
13. El número de onzas en k libras y t onzas.
14. El número de centavos en d dólares y k pesetas.
15. El número de centavos en m dólares, k pesetas, m monedas de diez centavos y n monedas de cinco centavos.
16. El número de pulgadas de largo de un rectángulo que es dos veces más largo que ancho. (Sugerencia: Dibuja una figura que te ayude a representar la situación.)
17. El número de pies de altura de un triángulo si la altura es 6 pies mayor que la base.

En los problemas 18-25, escribe frases lingüísticas que sean traducciones de las frases abiertas dadas. En cada problema identifica la variable.

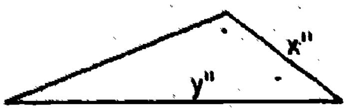
18. $n + 7n$
19. $(2r - 5) + 7$
20. $3x + (2x + 1) + x$
21. $5000 + 4y$
22. $y + .04y$
*23. $x(x + 3)$ (Sugerencia: Esta frase podría interpretarse como la expresión para el número de unidades cuadradas de cierta área.)
*24. $\frac{1}{2}y\ (y + 5)$
*25. $w(w + 3)(2w + 5)$ (Sugerencia: Esta frase podría interpretarse como la expresión para representar el número de unidades cúbicas de cierto volumen.)

26. Escoge una variable para indicar el número de pies de longitud del lado de un cuadrado. Escribe una frase abierta para representar el número de pies en el perímetro del cuadrado.

27. Escoge una variable para indicar el número de pulgadas de altura de la cabeza de un hombre. Después, escribe una frase abierta para representar el número de pulgadas de estatura del hombre, si se sabe que su estatura es $7\frac{1}{2}$ veces la altura de su cabeza.

28. Si un lado de un triángulo es tres pulgadas más largo que un segundo lado, escribe una frase abierta para representar el número de pulgadas de largo del primer lado.

29. La longitud de un lado de un triángulo es x pulgadas y la de un segundo lado es y pulgadas. La longitud del tercer lado es la mitad de la suma de las longitudes de los dos primeros lados.



(a) Escribe una frase abierta para representar el número de pulgadas del perímetro del triángulo.

(b) Escribe una frase abierta para representar el número de pulgadas de longitud del tercer lado.

30. En una cierta comunidad el número de niñas es seis quintos del de niños. Escribe una frase abierta para representar el número de niñas en términos del número de niños.

31. La entrada para una función de "El Mikado" cuesta $2.00 por persona. Escribe una frase abierta para representar el total de dólares cobrados en términos del número de personas que compraron boletos.

32. Si un hombre puede pintar su casa en d días, escribe una frase abierta para representar la parte del trabajo que puede completar en un día.

33. Si una tubería puede llenar la quinta parte de una piscina en una hora, escribe una frase abierta para representar la parte de la piscina que se llenaría en x horas.

34. Cuando un árbol crece, aumenta el radio de su tronco debido

a que va formando un anillo de madera nueva cada año. Si el tronco tiene ahora r anillos, escribe una frase abierta para representar el número de anillos que tendrá de aquí a doce años.

*35. Una planta crece un cierto número de pulgadas por semana. Ahora tiene 20 pulgadas de altura. Escribe una frase abierta que represente el número de pulgadas de altura que tendrá de aquí a cinco semanas.

*36. Supongamos que diez minutos después de un hombre meter sus brazos en agua caliente, la temperatura de sus pies empieza a subir a razón de un grado por minuto. Escribe una frase abierta para representar el aumento de la temperatura de los pies del hombre en cualquier momento (pasados diez minutos de haber puesto sus brazos dentro del agua caliente.)

*37. Tres hijos comparten una herencia.

(a) Escribe una frase abierta para representar el número de dólares que recibe uno de los hijos si le toca la mitad de la herencia.

(b) Escribe una frase abierta para representar el número de dólares que recibe el segundo hijo, si le tocan cincuenta dólares más que la décima parte de la herencia.

(c) Escribe una frase abierta para representar la parte que le corresponde al tercer hijo.

(d) Escribe una frase abierta para representar la suma de las partes que recibieron los tres hijos.

38. Escoge una variable para representar el número de pies de ancho de un rectángulo.

(a) Escribe una frase abierta para representar el largo del rectángulo, si éste es cinco pies menos que el doble del ancho. Dibuja la figura correspondiente.

(b) Escribe una frase abierta para representar el perímetro del rectángulo descrito en la parte (a).

(c) Escribe una frase abierta para representar el área del rectángulo descrito en la parte (a).

4-2. Enunciados abiertos y enunciados lingüísticos

Es natural pasar de la traducción de frases a la traducción de enunciados.

Ejemplo. $45 + 3x = 108$

¿Cómo escribiríamos un enunciado lingüístico para este enunciado abierto? Podríamos decir: "A un vendedor de libros le pagan \$45 semanales, más \$3 por cada juego de libros que venda. Una semana le pagaron \$108". Otra traducción de este enunciado abierto podría ser: "Un embarque de mercancía consta de una caja que pesa 45 libras y varias cajitas que pesan 3 libras cada una. El embarque total pesa 108 libras".

¿Qué enunciados lingüísticos podrías escribir para este mismo enunciado?

Conjunto de problemas 4-2a

Escribe tus propios enunciados lingüísticos para los siguientes enunciados abiertos:

1. $n + 7 = 82$
2. $2n = 500$
3. $\frac{b}{2} = 17$
4. $w(w + 4) = 480$
5. $a + (2a + 3a) = (a + 2a) + 3a$
6. $4n + 7n = 44$
7. $4k + 7k = 47$
8. $x + x + x + x = 100$
9. $y + 5 = 5 + y$
10. $\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b = 6$

Con más frecuencia necesitamos traducir enunciados lingüísticos a enunciados abiertos. Encontramos que tales enunciados abiertos son de especial ayuda cuando tratamos problemas verbales en los que el enunciado lingüístico hace referencia a una cantidad que nos interese hallar.

Ejemplo 1. "Carlos tiene una tabla de 44 pulgadas de largo. Quiere cortarla en dos pedazos, de manera que uno de ellos sea tres pulgadas más largo que el otro. ¿Cuál debe ser el largo del pedazo más corto?"

A veces podemos ver más fácilmente cuál debe ser nuestro enunciado abierto ensayando con un valor numérico cualquiera de la cantidad que pide el problema.

Si el largo del pedazo más corto es 18 pulgadas, entonces el pedazo más largo mide $(18 + 3)$ pulgadas. Como la tabla entera mide 44 pulgadas de largo, tendremos el enunciado

$$18 + (18 + 3) = 44.$$

A pesar de que este enunciado no es cierto, sugiere la forma que necesitamos para un enunciado abierto. Observa que la cuestión planteada en el problema nos ha señalado nuestra variable. Ahora podemos decir:

> Si el largo del pedazo más corto es K pulgadas, entonces el pedazo más largo mide $(K + 3)$ pulgadas de largo, y el enunciado es
>
> $$K + (K + 3) = 44.$$

Decimos que el enunciado es falso cuando K es 18. Probablemente exista algún valor de K para el cual el enunciado abierto sea cierto. Si quisiéramos hallar el largo del pedazo más corto, podríamos hacerlo hallando el conjunto de validez del enunciado abierto anterior. Tal vez sientas el deseo de hallar un número que haga el enunciado cierto. En tal caso, trata de hallarlo. Por ahora, sin embargo, nuestro objetivo es tener práctica en la construcción de enunciados abiertos. Más tarde nos ocuparemos de hallar los conjuntos de validez de tales enunciados y así contestaremos las preguntas de los problemas.

En este ejemplo sustituimos algunos números específicos a las cantidades que intervienen, con el fin de ayudarnos a idear un modelo para el enunciado abierto. Algunas veces podrás descubrir el enunciado abierto inmediatamente sin tener que ensayar con números específicos.

Observa que los enunciados lingüísticos tratan a menudo de pulgadas o de libras o de años o de dólares; sin embargo los enunciados abiertos siempre tratan de <u>números</u> solamente.

Observa también, que tenemos gran cuidado de señalar lo que representa nuestra variable, bien sea el número de pulgadas, o el número de burros, o el número de toneladas.

<u>Ejemplo 2.</u> "Dos carros parten desde el mismo punto al mismo tiempo y corren en la misma dirección a velocidades constantes de 34 y 45 millas por hora, respectivamente. ¿En cuántas horas estarán a 35 millas uno del otro?"

Si corren durante 4 horas, el más veloz recorre 45(4) millas y el más lento 34(4) millas. Como el carro más veloz debería estar entonces 35 millas más lejos del punto de partida que el carro más lento, tenemos el enunciado

$$45(4) - 34(4) = 35,$$

que es falso. Sin embargo, nos sugiere lo siguiente:

Si los carros viajan durante h horas, entonces el más veloz recorre $45h$ millas y el más lento $34h$ millas, y

$$45h - 34h = 35.$$

Ejemplo 3. "Un hombre dejó \$10,500 para su viuda, un hijo y una hija. La viuda recibió \$5000 y la hija dos veces lo que recibió el hijo. ¿Cuánto le tocó al hijo?"

Si el hijo recibió n dólares, entonces la hija recibió $2n$ dólares y

$$n + 2n + 5000 = 10,500.$$

Conjunto de problemas 4-2b

Escribe enunciados abiertos que te puedan ayudar a resolver los problemas 1-13, teniendo cuidado de dar el significado de la variable en cada uno. Para efectuar tu trabajo puede servirte de guía la forma indicada en el ejemplo 3. No es necesario hallar los conjuntos de validez de los enunciados abiertos.

1. Enrique y Carlos eran candidatos rivales en una elección escolar. Votaron 516 miembros de la clase y Enrique recibió 30 votos más que Carlos. ¿Cuántos recibió Carlos? (Sugerencia: Si Carlos recibió c votos, escribe una frase abierta para representar el número de votos que recibió Enrique. Entonces escribe tu enunciado abierto.)
2. Un rectángulo es 6 veces más largo que ancho. Su perímetro es 144 pulgadas. ¿Cuál es el ancho del rectángulo? (Acuérdate de dibujar una figura.)
3. El ángulo mayor de un triángulo mide 20° más que el doble del menor, y el tercer ángulo mide 70°. La suma de los ángulos de un triángulo es 180°. ¿Cuánto mide el ángulo más pequeño?
4. Un puente tiene tres secciones, una de ellas es 100 pies

más larga que cada una de las otras dos. Si el puente mide 2500 pies de largo, ¿cuánto mide cada una de las secciones más cortas?

5. Una clase de 43 estudiantes se dividió en dos secciones. Si en la sección del Sr. Pérez había cinco estudiantes más que en la de la Srta. López, ¿cuántos estudiantes había en cada sección? (¿Podrás hacer este problema de dos maneras? Si había w estudiantes en la sección de la Srta. López, halla dos maneras para decir cuántos habrá en la del Sr. Pérez.)

6. El largo de un rectángulo mide 5 pulgadas más que su ancho. ¿Cuál es el largo del rectángulo si su área es de 594 pulgadas cuadradas?

7. La edad de Juan es tres veces la de Ricardo. Hace tres años la suma de sus edades era 22 años. ¿Qué edad tiene cada uno ahora? (Sugerencia: Halla una frase para representar la edad que tenía cada uno hace tres años en términos de la edad que tiene Ricardo ahora.)

8. Juan tiene $1.65 en su bolsillo, repartidos en monedas de cinco, diez y veinticinco centavos. El número de monedas de veinticinco centavos es uno más que el de monedas de diez centavos, y el número de monedas de cinco centavos es uno más que dos veces el de monedas de diez centavos. ¿Cuántas monedas de diez centavos tiene? (Sugerencia: Si Juan tiene d monedas de diez centavos, escribe una frase para el valor de todas ellas, una frase para el valor de todas sus monedas de veinticinco centavos y otra frase para el valor de todas sus monedas de cinco centavos; luego escribe tu enunciado abierto.)

9. Compré 23 sellos de correo, algunos de cuatro centavos y otros de siete centavos. Si los sellos costaron un total de $1.19, ¿cuántos compré de cada clase?

10. Un tren de pasajeros viaja 20 millas por hora más rápidamente que un tren de carga. Al cabo de 5 horas el tren de pasajeros ha recorrido 100 millas más que el tren de carga. ¿A qué velocidad viaja el tren de carga? (Sugerencia: Para cada tren, halla una frase que represente el número de millas que ha recorrido.)

11. En una tienda hay 39 cuartillos de leche, repartidos en envases de cartón de una pinta y de media pinta. Hay seis veces más envases de una pinta que de media pinta. ¿Cuántos envases de media pinta hay?
12. El Sr. Vélez tiene un empleo con sueldo inicial de $3600 y aumentos anuales de $300. Al mismo tiempo, el Sr. Sánchez empezó a trabajar con un sueldo de $4500 y aumentos anuales de $200. ¿De aquí a cuántos años tendrán los dos el mismo sueldo?
13. Una mesa es tres veces más larga que ancha. Si fuera tres pies más corta y tres pies más ancha, sería cuadrada. ¿Cuál es su largo y cuál es su ancho? (Dibuja dos diagramas del tablero de la mesa.)
14. Construye tus propios problemas para cada uno de los siguientes enunciados abiertos:
    (a) $5n + 10(n + 2) + 50(2n) = 480$
    (b) $a(3a) = 300$
    (c) $.60x + 1.10(85 - x) = 78.50$
    (d) $a + (a + 3) + (a + 6) = 69$
    (e) $b = 2(18 - b)$
    (f) $30h + 4(5 - h) = 59$
    (g) $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + x = 1$
15. Traduce lo siguiente a un enunciado abierto. Luego traduce el enunciado abierto a un problema distinto que comprenda otra situación.

    "Trescientos turistas fueron en dos lanchas a dar un viaje alrededor de la bahía. La capacidad de una de las lanchas era de 80 pasajeros más que la capacidad de la otra. Si las dos lanchas se llenaron, ¿cuántos pasajeros había en cada una?"

4-3. Enunciados abiertos que contienen desigualdades

No todos nuestros enunciados tienen que ser igualdades. Los problemas que hablan de "mayor que" o "menor que" también tienen significación real.

Si decimos: "Construye un problema para el enunciado $d + 2 > 5$", el problema verbal podría ser: "Si sumara dos dólares al dinero que tengo, tendría más de cinco dólares. ¿Cuánto tengo ahora?"

Conjunto de problemas 4-3a

Construye problemas para los siguientes enunciados abiertos:

1. $a > 3$
2. $n + 1 < 17$
3. $.25q \leq 175$
4. $5(n + 3) < 100$
5. $p + 10{,}000 > 160{,}000$
6. * $a + 2a + 3a \geq 48$
7. $a + 2a + 3a = 50$
8. * $y + 3 < 10,\ y + 3 > 5$
9. $\frac{1}{2}b < 9$
10. * $s > 3(12 - s)$

En los problemas con desigualdades, al igual que en las ecuaciones, convendrá a veces ensayar primero con un número específico a fin de poder descubrir un enunciado abierto.

Ejemplo 1. "En seis meses el Sr. Acosta se ganó más de \$7000. ¿Cuánto se ganó por mes?"

Si ganara \$1100 al mes, en 6 meses se ganaría 6×1100 dólares. El enunciado entonces sería

$$6 \times 1100 > 7000.$$

Esto, desde luego, no es cierto pero nos sugiere lo que debemos hacer.

Si el Sr. Acosta ganara a dólares al mes, en 6 meses se ganaría $6a$ dólares. Entonces

$$6a > 7000.$$

Ejemplo 2. "Un cuerpo cae libremente durante dos segundos y recorre una distancia de 48 pies o menos, dependiendo de la resistencia del aire. ¿Qué distancia recorrerá durante el segundo segundo si la que recorre durante el primer segundo es 32 pies menos que aquélla?"

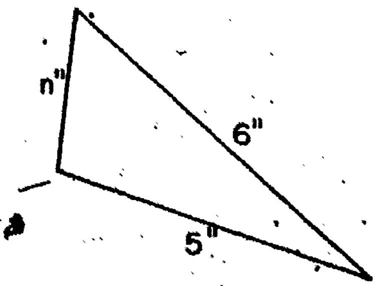
Si el cuerpo cae 42 pies durante el segundo segundo, entonces habrá caído $(42 - 32)$ pies durante el primer segundo. Como la distancia total de caída es menor que o igual a 48 pies, nuestro enunciado es

$$(42 - 32) + 42 \leq 48.$$

Esto sugiere una manera de escribir el enunciado abierto. Si el cuerpo cae d pies durante el segundo segundo, entonces habrá caído $(d - 32)$ pies durante el primer segundo y tenemos que

$$(d - 32) + d \leq 48.$$

Ejemplo 3. "Las longitudes de dos lados de un triángulo son 5 y 6 pulgadas. ¿Cuál es la longitud del tercer lado?"



Quizás hayas dibujado muchos triángulos y te habrás dado cuenta de que la longitud de un lado cualquiera de un triángulo tiene que ser menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados. Por lo tanto, si el tercer lado de este triángulo mide n pulgadas,

$$n < 5 + 6.$$

Al mismo tiempo el lado que mide seis pulgadas también debe ser menor que la suma de las longitudes de los otros dos, y así

$$6 < n + 5.$$

Como deben cumplirse ambas condiciones, tenemos que el enunciado abierto para nuestro problema es

$$n < 5 + 6 \quad y \quad 6 < n + 5.$$

Conjunto de problemas 4-3b

Escribe enunciados abiertos para los problemas 1-10, teniendo cuidado de indicar el significado de la variable en cada caso.

1. Un tercio de un número sumado a tres cuartos del mismo número es igual a o mayor que 26. ¿Cuál es el número?
2. Luis tiene 5 años más que Raúl y la suma de sus edades es menor que 23. ¿Qué edad tiene Raúl?
3. Un cuadrado y un triángulo equilátero tienen perímetros iguales. Un lado del triángulo es cinco pulgadas más largo que un lado del cuadrado. ¿Cuál es la longitud del lado del cuadrado? Dibuja la figura.
4. Un bote, viajando a favor de la corriente, va 12 millas por hora más rápidamente que la corriente. Su velocidad en esa dirección es menos de 30 millas por hora. ¿Cuál es la velocidad de la corriente?

5. Juan dijo: "Tardaré más de dos horas en cortar la grama y no debo tardar más de cuatro horas en este trabajo, pues de lo contrario no podré ir a nadar". ¿Cuánto tiempo espera que le ocupe el trabajo?
6. El anunciante en un programa de televisión de media hora insiste en que el tiempo para anuncios comerciales debe ser por lo menos tres minutos, y la cadena televisora insiste en que sea menos de 12 minutos. Expresa estas condiciones en un enunciado matemático. ¿Cuánto tiempo deberá dedicar el director del programa a los asuntos que no sean de publicidad?
7. Un maestro dice: "Si tuviese en mi clase tres veces el número de alumnos que tengo ahora, tendría por lo menos 26 más de los que hay". ¿Cuántos estudiantes tiene en la clase?
8. La cantidad de \$205 se va a repartir entre Tomás, Ricardo y Enrique. A Ricardo le tocan \$15 más que a Enrique, y a Tomás le toca dos veces lo que a Ricardo. ¿Cómo se debe repartir el dinero?
9. Una cantidad entre \$205 y \$225, inclusive, se va a repartir entre tres hermanos, Tomás, Ricardo y Enrique. A Ricardo le tocan \$15 más que a Enrique, y a Tomás le toca dos veces lo que a Ricardo. ¿Cuánto le debe tocar a Enrique?

*10. Un estudiante obtuvo notas de 75 y 82 en dos exámenes. ¿Cuánto deberá obtener en un tercer examen para que su promedio sea 88 o más? Si la puntuación máxima del tercer examen es 100, ¿cuál es el promedio más alto que él puede obtener? ¿Cuál es el promedio más bajo que puede obtener?

11. Escribe un enunciado abierto para cada uno de los siguientes enunciados lingüísticos, utilizando dos variables:
    (a) La matrícula en la Escuela Central es mayor que la matrícula en la Escuela Vocacional.
    (b) La matrícula en la Escuela Central es de 500 estudiantes más que la matrícula en la Escuela Vocacional.

Problemas de repaso

1. Escribe frases lingüísticas acerca de situaciones reales que sean traducciones de las siguientes frases abiertas. En cada

oración cuida de identificar explícitamente la variable.

(a) $x + 15$

(b) $3p + 2(p - 1)$

(c) $60 - 10t$

(d) $9(15r + 25)$

(e) $\frac{1}{2}b(3b - 4)$

En los problemas 2, 3, 4 y 5, escribe frases abiertas que sean traducciones de las frases lingüísticas. En cada problema tèn cuidado en indicar, si es que no está ya especificado, lo que representa la variable. En algunos problemas puedes usar más de una variable.

2. (a) Un número disminuido en 3.
   (b) La edad de Samuel de aquí a siete años.
   (c) La edad de María hace diez años.
   (d) Una temperatura 20° más alta que la de ahora.
   (e) El costo de n lápices a 5 centavos cada uno.
3. (a) La cantidad de dinero en mi bolsillo: x monedas de diez centavos, z monedas de cinco centavos, y 6 centavos.
   (b) Un número aumentado en su duplo.
   (c) Un número aumentado en el duplo de otro número.
   (d) El número de días en w semanas.
   (e) Un millón más que dos veces la población de una ciudad en Kansas.
   (f) Un sueldo anual equivalente a x dólares por mes.
4. (a) Un dólar más que dos veces la asignación de Isabel.
   (b) La distancia recorrida en h horas a una velocidad constante de 40 millas por hora.
   (c) La contribución sobre una propiedad valorada en y dólares si el tipo contributivo es de $25.00 por cada $1,000 en valor de tasación.
   (d) Cuarenta libras más que el peso de Gerardo.
   (e) El área de un rectángulo que tiene un lado 3 pulgadas más largo que otro.
5. (a) El costo de x libras de lomillo a $1.59 la libra.
   (b) Las ganancias de Catalina en z horas a razón de 75

centavos la hora.

(c) El costo de g galones de gasolina a 33.2 centavos el galón.

(d) El costo de dos compras: x melones a 29 centavos cada uno, z libras de carne picada a 59 centavos la libra.

(e) Un número de dos dígitos en el que el dígito de las decenas es d y el de las unidades es u.

6. Escribe enunciados lingüísticos que sean traducciones de los enunciados abiertos:

(a) $x < 80$

(b) $y = 3600$

(c) $z > 100,000,000$

(d) $u + v + w = 180$

(e) $z(z + 18) = 360$

En los problemas 7, 8 y 9, escribe enunciados abiertos que correspondan a los enunciados lingüísticos, usando una variable en cada uno. En cada problema cuida de exponer, si es que ya no se ha indicado, lo que representa la variable.

7. (a) María, una joven de 16 años que tiene dos hermanos, es 4 años mayor que su hermana.

(b) Guillermo compró b plátanos a 9 centavos cada uno y pagó 54 centavos.

(c) Si un cierto número se añade a su duplo, la suma es menor que 39.

(d) La cantidad que periódicamente sus padres asignan a Arturo es un dólar más que el doble pero dos dólares menos que el triple de la asignada a su hermana Isabel.

(e) La distancia desde la Ciudad Dodge hasta la Ciudad Oklahoma, 260 millas, se recorrió en t horas a una velocidad media de 40 millas por hora.

(f) El viaje en automóvil desde San Luis a Memphis, 300 millas, se hizo en t horas a una velocidad máxima de 50 millas por hora.

8. (a) La cumbre de la montaña Pike está a más de 14,000 pies sobre el nivel del mar.

(b) Cierto libro, de 1.4 pulgadas de espesor, tiene n páginas; cada página tiene 0.003 pulgadas de espesor y la cubierta tiene $\frac{1}{10}$ pulgadas de espesor y es azul.

(c) Dos millones es mayor que dos veces la población de cualquier ciudad en Colorado.

(d) Un cuadrado de lado x tiene un área mayor que un rectángulo cuyos lados son $(x - 1)$ y $(x + 1)$.

(e) Los impuestos sobre bienes raíces se calculan a base de \$24.00 por cada \$1,000 en valor de tasación. El gravamen contributivo de una propiedad valorada en y dólares es \$348.00.

(f) Si Gerardo aumentara 40 libras, todavía no pesaría más de 152 libras.

9. (a) La suma de un número cardinal y su sucesor es 575.

(b) La suma de un número cardinal y su sucesor es 576.

(c) La suma de dos números, el segundo de los cuales es una unidad mayor que el primero, es 576.

(d) Una tabla de 16 pies de longitud se corta en dos pedazos de modo que uno de ellos es un pie más largo que dos veces el otro.

(e) Catalina gana \$2.25 por cuidar niños durante 3 horas a x centavos la hora.

10. Un número de dos dígitos es 7 unidades mayor que tres veces la suma de sus dígitos. Traduce esto a un enunciado abierto. (Sugerencia: Expresa el número por medio de dos variables como hiciste en el problema 5(e).)

11. La suma de dos números es 42. Si n representa el primer número, escribe una expresión para representar el segundo número, utilizando la variable n.

12. (a) A un número le sumamos 17 y multiplicamos el resultado por 3. Escribe un enunciado abierto para indicar que el producto resultante es 192.

(b) Si a un número le sumamos 17 y multiplicamos esta suma por 3, el producto resultante es menor que 192. Traduce esto a un enunciado abierto.

13. Un número es 5 veces otro. La suma de los dos números es 15 más que 4 veces el más pequeño. Expresa esto por medio de un enunciado abierto.

14. Susana tiene 16 libros más que Sara. Escribe un enunciado abierto para indicar que entre las dos tienen más de 28 libros

15. (a) Un agricultor puede arar un terreno en 7 horas usando uno de sus tractores. ¿Qué parte del terreno puede arar con ese tractor en una hora?

(b) Con un segundo tractor, puede arar el terreno en 5 horas. Si usara ambos tractores por dos horas, ¿qué parte del terreno podría arar?

(c) ¿Qué parte del terreno se quedaría sin arar?

(d) Escribe un enunciado abierto para indicar que si se usan ambos tractores por x horas, se podría arar todo el terreno.

*16. Al volar de Nueva York a Los Angeles, el reloj se atrasa tres horas. Si el tiempo de vuelo es h horas, ¿cuándo deberás salir de Nueva York para llegar a Los Angeles antes del mediodía? Escribe un enunciado abierto para este problema.

17. El Sr. Rivera está rebajando su peso. En los últimos 8 meses ha perdido 5 libras por mes. Su peso es ahora de 175 libras. ¿Cuál era su peso m meses atrás si $m < 8$? Escribe un enunciado abierto para indicar que hace m meses su peso era de 200 libras.

Escribe enunciados abiertos para los problemas del 18 al 23. Expresa claramente lo que representa la variable, pero no determines el conjunto de validez del enunciado abierto.

18. (a) La suma de un número cardinal y su sucesor es 45. ¿Cuáles son los números?

(b) La suma de dos impares consecutivos es 76. ¿Cuáles son los números?

19. El Sr. Gómez pagó \$176 por un congelador vendido con un descuento de 12% del precio estipulado. ¿Cuál era el precio estipulado?

20. La paga de un hombre que trabajó 48 horas en una semana fue de \$166.40. Las horas en exceso de 40 se pagan a razón de tiempo y medio. ¿Cuánto es su salario por hora?

*21. Un hombre dispara su rifle sobre un blanco. Dos segundos después de disparar, oye el sonido de la bala al dar en el blanco. Si la velocidad del sonido es 1100 pies por segundo y la

5

velocidad de la bala es 1700 pies por segundo, ¿a qué distancia está el blanco?

22. Los estudiantes que asisten a la Escuela Superior Lincoln tienen la costumbre de atajar atravesando un solar yacío que hay cerca de la escuela, en vez de seguir la acera alrededor de la esquina. El solar es rectangular de 200 pies por 300 pies, y el atajo sigue una línea recta desde una esquina del solar hasta la opuesta. ¿Cuál es la longitud del atajo? (Sugerencia: Usa el teorema de Pitágoras.)

23. Uno de los extremos de un alambre de 50 pies está amarrado al tope de un poste vertical de teléfono. El alambre se tensa y el otro extremo se fija con un bloque de concreto que está en el piso a 30 pies de la base del poste y al nivel de ésta. ¿Cuál es la altura del poste?

24. (a) En un solar de estacionamiento de automóviles cobran 35 centavos por la primera hora, o fracción de hora, y 20 centavos por cada hora (completa o fraccionaria) adicional. Si un automóvil ha estado estacionado por espacio de t períodos de una hora después de la primera, escribe una frase abierta para el costo del estacionamiento.

(b) Si el costo de estacionamiento por hora es el mismo del problema anterior, y un automóvil se estacionó por un total de h períodos de una hora, escribe una frase abierta para la cantidad a pagar.

*25. Al agua de un radiador se le añaden dos cuartillos de alcohol y entonces la mezcla contiene 20 por ciento de alcohol; es decir, 20 por ciento de la mezcla es alcohol puro. Escribe un enunciado abierto para este enunciado lingüístico. (Sugerencia: Escribe una frase abierta para el número de cuartillos de alcohol en términos del número de cuartillos de agua que había originalmente en el radiador.)

*26. (a) Dos tuberías traen agua a un depósito. La capacidad de una de ellas es 100 galones por minuto y la de la otra 40 galones por minuto. Si el agua fluye a través de la primera tubería durante x minutos y a través de la segunda durante y minutos, escribe una frase abierta para el flujo total en galones.

(b) En el problema anterior, si cerramos la primera tubería al cabo de dos horas, escribe la expresión que represente el flujo total en galones en y minutos, siendo y mayor que 120.

(c) Usando la información de la parte (a), escribe un enunciado abierto para indicar que el flujo total es de 20,000 galones.

27. (a) La planta A crece dos pulgadas cada semana, y al presente tiene 20 pulgadas de altura. Escribe una frase abierta para el número de pulgadas de altura de la planta de aquí a w semanas.

(b) La planta B crece tres pulgadas cada semana y ahora tiene 12 pulgadas de altura. Escribe una frase abierta para el número de pulgadas de altura de la planta de aquí a w semanas.

(c) Al cabo de algunas semanas, las plantas tendrán la misma altura. Expresa esto por medio de un enunciado abierto.

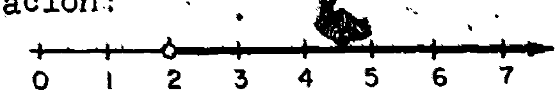
*28. Al nivel del mar un hombre respira 20 veces por minuto y respira una vez más por minuto por cada 1,500 pies de ascenso.

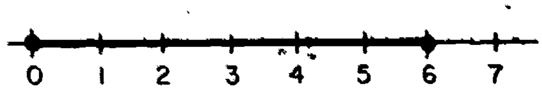
(a) Escribe una frase abierta para el número de veces que el hombre respira por minuto si se encuentra a h pies de altura sobre el nivel del mar.

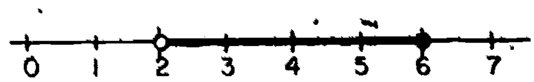
(b) A y pies sobre el nivel del mar un hombre respira 24 veces por minuto. Con la información obtenida en (a), escribe un enunciado abierto exponiendo este dato.

29. Emplea cada uno de los símbolos verbales: $=$, $\neq$, $<$, $\nless$, $>$, $\ngtr$, $\leq$, $\geq$, en $x \_\_\_ \frac{5}{2}$, y construye la gráfica de cada uno de los enunciados abiertos que obtengas.

30. Halla los enunciados abiertos cuyas gráficas aparecen a continuación:

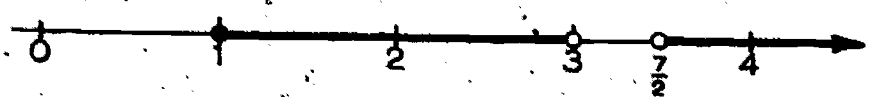
(a) 

(b) 

(c) 

31. Construye la gráfica de los siguientes enunciados abiertos:
(a) $x = 2$ ó $x > 5$
(b) $x = 2$ y $x > 5$
(c) $x > 2$ ó $x < 5$
(d) $x < 2$ y $x < 5$

*32. Halla un enunciado abierto cuya gráfica sea:



Probablemente tendrás que hacer enunciados compuestos usando las conjunciones "o", "y", así como también algunas desigualdades.

33. Un hombre que tiene cinco dólares en su bolsillo, se detiene, camino de su casa, en una confitería con la intención de llevarle a su esposa dos libras de dulces. Encuentra dulces que se venden en cajas de a libra por $1.69, $1.95, $2.65 y $3.15. Si sale de la tienda con dos cajas de a libra,
(a) ¿Cuál es la cantidad mínima de dinero que le puede haber sobrado?
(b) ¿Cuál es la cantidad máxima de dinero que le puede haber sobrado?
(c) ¿Qué combinaciones de dos cajas de dulces no puede comprar?

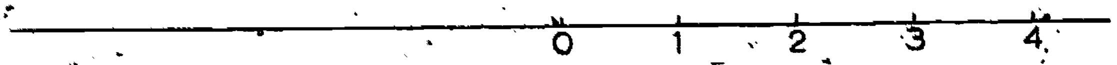
*34. Al final del capítulo 3 (Conjunto de problemas 3-14, ejercicio 5) descubriste una "regla para multiplicar números cardinales entre 11 y 19, inclusive". Ahora, usando a y b, respectivamente para indicar las cifras de las unidades de dos números, deberías poder escribir un enunciado abierto que exprese el producto p en términos de a y b. Cuando hayas escrito tu enunciado, emplea la propiedad distributiva para verificar si lo que hiciste es correcto.

Capítulo 5

LOS NUMEROS REALES

5-1. La recta de los números reales

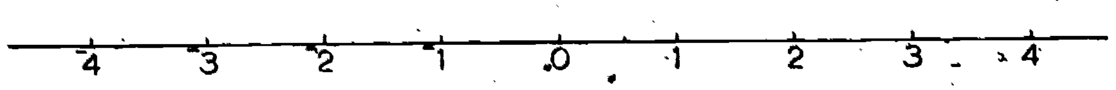
Cuando trabajaste con la recta numérica, varias cosas han podido despertar tu curiosidad. Por ejemplo, una recta se extiende interminablemente tanto hacia la izquierda como hacia la derecha. Sin embargo,



sólo hemos marcado aquellos puntos situados a la derecha del 0. Esto plantea una pregunta que contestaremos en esta sección: ¿Cómo marcaremos los puntos situados a la izquierda?

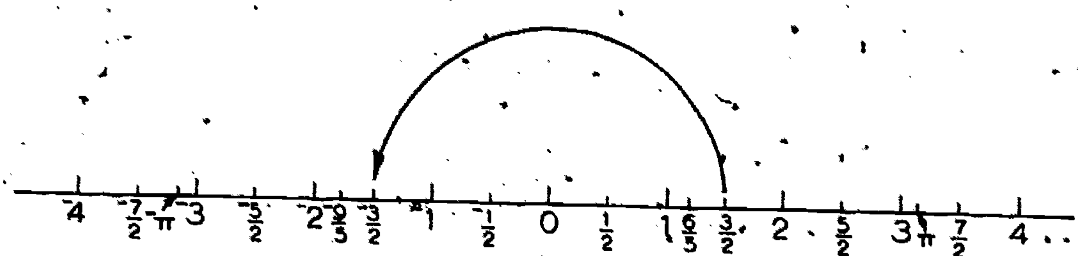
En el capítulo 1 se te dijo que hay números racionales que se asocian con los puntos de la mitad izquierda de la recta numérica, pero entre tanto sólo has tratado con los números racionales de la mitad derecha. También se te dijo que algunos puntos de la recta numérica no corresponden a números racionales. Esto plantea una segunda pregunta: ¿Dónde están algunos de esos puntos en la recta numérica que no corresponden a números racionales y qué nuevos números están asociados con ellos?

Volvamos a la primera de estas preguntas: ¿Cómo marcaremos los puntos situados a la izquierda del 0? No hay duda alguna de que la recta contiene infinitos puntos a la izquierda del 0. Es fácil marcar tales puntos si seguimos la pauta utilizada para marcar los puntos a la derecha del 0. Como entonces, usamos el intervalo desde 0 hasta 1 como unidad de medida, y localizamos puntos a intervalos iguales a lo largo de la recta <u>hacia la izquierda</u>. El primero de estos puntos lo marcamos con $^{-}1$, el segundo con $^{-}2$,



etc., donde el símbolo "$^{-}1$" se lee "1 <u>negativo</u>", $^{-}2$ se lee "2 negativo", etc. ¿Cuál es la coordenada del punto que está 7 unidades a la izquierda del 0?

Procediendo como antes, podemos localizar más puntos a la izquierda del 0 y marcarlos con símbolos semejantes a los ya usados para los números de la derecha, pero con una raya en la parte superior izquierda para indicar que el número está a la izquierda del 0. Así, por ejemplo, $^{-}\frac{3}{2}$ está a la misma distancia del 0 por la izquierda que $\frac{3}{2}$ por la derecha, etc.



El conjunto de <u>todos</u> los números asociados con puntos en la recta numérica se llama conjunto de los <u>números reales</u>. Los números a la izquierda del cero se llaman <u>números reales negativos</u> y los de la derecha, <u>números reales positivos</u>. En este lenguaje los números de la aritmética son los <u>números reales no negativos</u>.

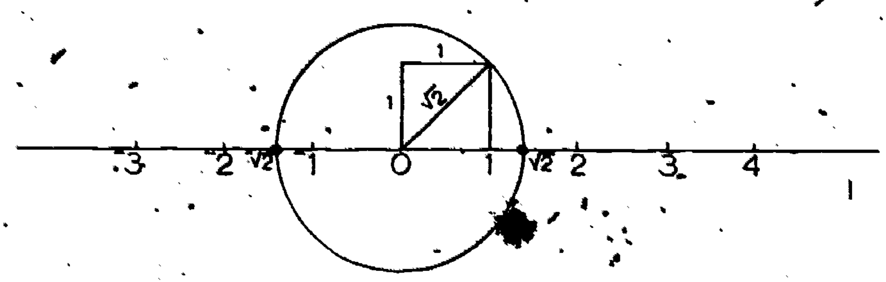
El conjunto de todos los números cardinales, {0, 1, 2, 3, ...}, reunido con el conjunto {$^{-}1$, $^{-}2$, $^{-}3$, ...} se llama conjunto de los <u>enteros</u> {..., $^{-}3$, $^{-}2$, $^{-}1$, 0, 1, 2, 3, ...}. El conjunto de los números racionales de la aritmética, reunido con el de los números racionales negativos, se llama conjunto de los <u>números racionales</u>. (Ciertamente todos los números racionales son números reales.)

Recuerda que cada número racional queda ahora asignado a un punto de la recta numérica, pero quedan todavía muchos puntos a los cuales no se les puede asignar números racionales. Los números que asociamos con estos puntos se llaman <u>números irracionales</u>. (Así, todos los números irracionales son también números reales.) Por consiguiente, podemos considerar el conjunto de los números reales como el conjunto combinado de los números racionales e irracionales.

Por ejemplo, todos los enteros, tales como $^{-}4$, 0, 2, son números racionales; halla ejemplos de números racionales que no son enteros. Además, todos los números racionales, tales como $\frac{3}{2}$, 0, 6, son números reales.

Queda la segunda pregunta: ¿Dónde están algunos de los puntos de la recta numérica que no corresponden a números racionales? En un capítulo ulterior se demostrará que, por ejemplo, el número real $\sqrt{2}$ es un número irracional. Localicemos los puntos con coordenadas $\sqrt{2}$ y $^{-}\sqrt{2}$, respectivamente.

Ante todo, recordemos que $\sqrt{2}$ es un número cuyo cuadrado es 2. Puedes haber aprendido que la longitud de la diagonal de un cuadrado, cuyos lados tienen longitud 1, es un número cuyo cuadrado es 2. (¿Conoces algunos datos acerca de los triángulos rectángulos que te ayuden a comprobar esto?) Con el fin de localizar un punto en la recta numérica para $\sqrt{2}$, todo lo que hay que hacer es construir un cuadrado cuyo lado tenga longitud 1 y trasladar la longitud de una de sus diagonales a nuestra recta numérica. Esto podemos hacerlo, como en la figura, dibujando un círculo con centro en el punto 0 en la recta numérica y de radio



igual a la diagonal del cuadrado. Este círculo corta la recta numérica en dos puntos, cuyas coordenadas son los números reales $\sqrt{2}$ y $^{-}\sqrt{2}$, respectivamente.

Más adelante demostrarás que el número $\sqrt{2}$ no es racional. Tal vez creas que $\sqrt{2}$ es 1.4. Cuadra 1.4 para que tú mismo compruebes si esto es cierto. ¿Es $(1.4)^2$ el mismo número que 2? De igual modo, comprueba si $\sqrt{2}$ es 1.41; 1.414. El cuadrado de cada uno de estos decimales se acerca cada vez más a 2 que el anterior, pero parece no haber número racional alguno cuyo cuadrado sea 2.

Hay muchos más puntos en la recta numérica real cuyas coordenadas no son números racionales. ¿Crees que $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ es uno de ellos? ¿Y $3 + \sqrt{2}$? ¿Por qué?

Conjunto de problemas 5-1

1. Construye las gráficas de los siguientes conjuntos:

   (a) $\{0, 3, {}^{-}5, {}^{-}\frac{1}{2}\}$

   (b) $\{{}^{-}\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{2}, {}^{-}\frac{5}{2}\}$

   (c) $\{{}^{-}\frac{3}{2}, 5, {}^{-}7, {}^{-}\frac{11}{3}\}$

   (d) $\{{}^{-}\frac{12}{7}, {}^{-}\frac{6}{5}, \frac{6}{5}, \frac{7}{12}\}$

   (e) $\{\sqrt{2}, {}^{-}\sqrt{2}, 3, {}^{-}3\}$

   (f) $\{{}^{-}1, {}^{-}(1 + \frac{1}{2}), 1 + \frac{1}{2}\}$

   (g) $\{{}^{-}\frac{1}{2}, (\frac{1}{2})^2, {}^{-}\frac{6}{4}, (3 - 3)\}$

2. En cada uno de los siguientes ejercicios aparecen las coordenadas de dos puntos; ¿cuál está a la derecha del otro?

   (a) $3, {}^{-}4$

   (b) $5, {}^{-}4$

   (c) ${}^{-}2, {}^{-}4$

   (d) ${}^{-}\sqrt{2}, 1$

   (e) ${}^{-}\frac{5}{2}, 0$

   (f) ${}^{-}\frac{5}{2}, {}^{-}\frac{10}{4}$

   (g) $0, 3$

   (h) ${}^{-}4, \sqrt{2}$

   (i) ${}^{-}\frac{16}{3}, {}^{-}\frac{21}{4}$

   (j) ${}^{-}\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

3. El número π es la razón de la circunferencia de un círculo a su diámetro. Así, un círculo cuyo diámetro es de longitud 1 tiene una circunferencia de longitud π. Imagina tal círculo descansando sobre la recta numérica en el punto 0. Si sobre la recta, y sin que resbale, rodamos el círculo una vuelta completa a la derecha, éste se detendrá en un punto. ¿Cuál es la coordenada de este punto? Si lo rodamos una vuelta completa a la izquierda, ¿en qué punto se detendrá? ¿Puedes localizar aproximadamente estos puntos en la recta numérica? (El número real π, al igual que $\sqrt{2}$, no es un número racional.)

4. (a) ¿Es $^{-}2$ un número cardinal? ¿Un entero? ¿Un número racional? ¿Un número real?
   (b) ¿Es $\frac{10}{3}$ un número cardinal? ¿Un entero? ¿Un número racional? ¿Un número real?
   (c) ¿Es $^{-}\sqrt{2}$ un número cardinal? ¿Un entero? ¿Un número racional? ¿Un número real?
5. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son idénticos?
   A es el conjunto de los números cardinales, B es el conjunto de los enteros positivos, C es el conjunto de los enteros no negativos, I es el conjunto de los enteros, N es el conjunto de los números naturales.

5-2. Orden en la recta de los números reales

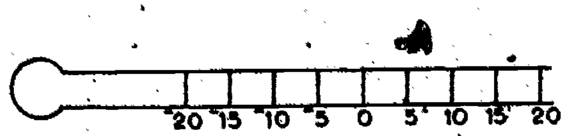
Para el caso de los números reales positivos, ¿cómo describimos una ordenación? Por ejemplo, como "5 está a la izquierda de 6" en la recta numérica, y como "5 es menor que 6", convenimos que estos dos enunciados dicen lo mismo acerca de 5 y 6. Escribimos esto como el enunciado cierto

$$5 < 6.$$

Así, para un par de números reales positivos, "está a la izquierda de" en la recta numérica y "es menor que" indican el mismo orden.

¿Qué entenderemos por "es menor que" al referirnos a dos números cualesquiera, sean éstos positivos, negativos, ó 0? Nuestra contestación es sencillamente: "está a la izquierda de" en la recta de los números reales.

Busquemos una justificación en la experiencia diaria. Todos conocemos bien los termómetros y nos damos cuenta de que las escalas en los termómetros están marcadas con números sobre 0, bajo 0, y con el 0 mismo. Sabemos que mientras más frío hace, más baja será la temperatura que leemos en la escala. Si ponemos un termómetro en posición horizontal, como en la figura, vemos que se parece a parte de nuestra recta. Cuando decimos "es menor que" ("es una temperatura más baja que"), queremos decir "está a la izquierda de" en la escala del termómetro. En esta escala, ¿qué



número es menor, $^{-}5$ ó $^{-}10$?

Así extendemos el significado anterior de "es menor que" a todo el conjunto de números reales. Convenimos que:

> Para los números reales, "es menor que" significa "está a la izquierda de" en la recta numérica. Si a y b son números reales, "a es menor que b" se escribe
>
> $$a < b.$$

(A menos que no se especifique otra cosa, ahora y en el futuro se entenderá que el dominio de una variable es el conjunto de los números reales.)

¿Podrías dar un significado para "es mayor que" en el caso de los números reales? Como antes, usa el símbolo " > " para "es mayor que". De igual modo, explica qué significan " $\leq$ ", " $\geq$ ", " $\not<$ ", " $\not>$ " en el caso de los números reales.

Conjunto de problemas 5-2a

1. Determina cuáles de los siguientes enunciados son ciertos y cuáles son falsos:

   (a) $3 \leq {}^{-}1$
   (b) $2 < {}^{-}\frac{7}{2}$
   (c) ${}^{-}4 \not< 3.5$
   (d) ${}^{-}\frac{12}{5} < {}^{-}2.2$
   (e) ${}^{-}\frac{3}{5} \leq {}^{-}\left(\frac{3+0}{5}\right)$
   (f) ${}^{-}4 \neq 3.5$
   (g) ${}^{-}6 > {}^{-}3$
   (h) $3.5 < {}^{-}4$
   (i) ${}^{-}3 < {}^{-}2.8$
   (j) ${}^{-}\pi \not< {}^{-}2.8$

2. Considera los siguientes pares de números reales y decide cuáles de los enunciados que están debajo de cada par son ciertos y cuáles son falsos:

$^-2$ y $\frac{3 \times 4}{2}$:

$^-2 < \frac{3 \times 4}{2}$ es cierto;

$^-2 = \frac{3 \times 4}{2}$ es falso;

$^-2 > \frac{3 \times 4}{2}$ es falso.

(a) $^-3.14$ y $^-3$:

$^-3.14 < {}^-3$

$^-3.14 = {}^-3$

$^-3.14 > {}^-3$

(b) 2 y $^-2$:

$2 < {}^-2$

$2 = {}^-2$

$2 > {}^-2$

(c) $\frac{5+3}{2}$ y 2×2:

$\frac{5+3}{2} < 2 \times 2$

$\frac{5+3}{2} = 2 \times 2$

$\frac{5+3}{2} > 2 \times 2$

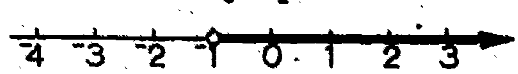
(d) $^-0.001$ y $^-(\frac{1}{1000})$:

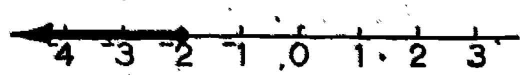
$^-0.001 < {}^-(\frac{1}{1000})$

$^-0.001 = {}^-(\frac{1}{1000})$

$^-0.001 > {}^-(\frac{1}{1000})$

3. Construye la gráfica del conjunto de validez de cada uno de los siguientes enunciados. Por ejemplo:

$x > {}^-1$, 

$x \leq {}^-2$, 

(a) $y < 2$

(b) $u \nless 3$

(c) $v \geq {}^-\frac{3}{2}$

*(d) $r \nless {}^-2$

(e) $x = 3$ ó $x < {}^-1$

(f) $c < 2$ y $c > {}^-2$

(g) $a \leq {}^-3$ y $a \geq {}^-3$

(h) $d \leq {}^-1$ ó $d > 2$

(i) $u > 2$ y $u < {}^-3$

(j) $a < 6$ y $a < {}^-2$

4. Para cada uno de los siguientes conjuntos, escribe un enunciado abierto que contenga la variable x y cuyo conjunto de validez sea el conjunto dado:

(a) A es el conjunto de todos los números reales no iguales a 3.

(b) B es el conjunto de todos los números reales menores que o iguales a $^{-}2$.

(c) C es el conjunto de todos los números reales no menores que $\frac{5}{2}$.

5. Escoge cualquier número real positivo p; escoge cualquier número real negativo n. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son ciertos?

$$n < p, \quad p < n, \quad n \leq p, \quad n \neq p.$$

6. Sea el dominio de la variable p el conjunto de los enteros. Entonces halla el conjunto de validez de:

(a) $^{-}2 < p$ y $p < 3$.

(b) $p \leq {}^{-}2$ y $^{-}4 < p$.

(c) $p = 2$ ó $p = {}^{-}5$.

7. (a) Durante un día frío la temperatura subió 10 grados desde $^{-}5°$. ¿A cuánto subió la temperatura?

(b) Otro día, la temperatura subió 5 grados desde $^{-}10°$. ¿A cuánto subió?

(c) Durante un deshielo en enero, la temperatura subió de $^{-}15°$ a 35°. ¿Cuánto subió?

8. En cada uno de los blancos que siguen, usa uno de los símbolos =, <, > para construir, si es posible, un enunciado cierto:

(a) $\frac{3}{5}$ ______ $\frac{^{-}6}{10}$ (d) $\frac{^{-}173}{29}$ ______ $\frac{^{-}183}{29}$

(b) $\frac{3}{5}$ ______ $\frac{3}{6}$ (e) $\frac{^{-}3}{5}$ ______ $\frac{3}{6}$

(c) $\frac{9}{12}$ ______ $\frac{8}{12}$ (f) $\frac{^{-}3}{5}$ ______ $\frac{^{-}3}{6}$

Hay ciertos datos sencillos, pero muy importantes, acerca del orden de los números en la recta de los números reales. Si escogemos dos números reales diferentes cualesquiera, estamos <u>seguros</u> de que o el primero es menor que el segundo o el segundo es menor que el primero, pero no ambas cosas. En el lenguaje del álgebra, esta propiedad de ordenación de los números reales se convierte en la propiedad de comparación:

> Si a es un número real y b es un número real, entonces solamente uno de los siguientes es cierto:
>
> $a < b$, $a = b$, $b < a$.

Conjunto de problemas 5-2b

1. Para cada uno de los siguientes pares de números, comprueba que la propiedad de comparación es cierta a base de hallar cuál de las tres relaciones existe entre los números:

   (a) $^-2$ y $^-1.6$

   (b) 0 y $^-2$

   (c) $\frac{2 \times 3 \times 4}{5}$ y $^-\left(\frac{2 \times 3 \times 4}{5}\right)$

   (d) $^-16$ y $^-\frac{32}{2}$

   (e) 12 y $(5 + 2)\left(\frac{1}{7} \times \frac{36}{3}\right)$

   (f) $^-2$ y 2

2. Usando el símbolo $<$, construye enunciados ciertos que contengan los siguientes pares de números:

   (a) 2, $^-3$

   (b) $\frac{4}{2}$, $^-\frac{5}{2}$

   (c) $^-\frac{4}{5}$, $^-\frac{6}{5}$

   (d) $\frac{4}{5}$, $\frac{11}{10}$

   (e) $^-\frac{4}{50}$, $\frac{11}{100}$

   (f) $\frac{103}{13}$, $\frac{205}{26}$

   (g) $\frac{13}{15}$, $\frac{2}{3}$

   (h) $\frac{12}{119}$, $^-\left(\frac{25}{238}\right)$

   (i) $^-\sqrt{2}$, $^-1.5$

   (j) $\sqrt{2} + \pi$, $1.5 + 3$

3. La propiedad de comparación, ya expuesta en el texto, es un enunciado que contiene el símbolo " $<$ ". Trata de formular la propiedad correspondiente usando el símbolo " $>$ ", y compruébala con referencia a los pares de números del problema 1.

4. Trata de enunciar una propiedad de comparación que contenga el símbolo " $\geq$ ".

¿Cuál es el menor de $\frac{4}{5}$ y $\frac{5}{6}$? Puedes contestar esta pregunta aplicando la propiedad multiplicativa del 1 a cada número para así obtener $\frac{4}{5} = \frac{4}{5} \times \frac{6}{6} = \frac{24}{30}$ y $\frac{5}{6} = \frac{5}{6} \times \frac{5}{5} = \frac{25}{30}$. Entonces $\frac{4}{5} < \frac{5}{6}$, debido a que $\frac{24}{30}$ está a la izquierda de $\frac{25}{30}$ en la recta numérica.

Ahora, deberías sentirte capaz de comparar dos números racionales cualesquiera. ¿Cómo decidirías cuál es el menor de los dos números $\frac{337}{113}$ y $\frac{167}{55}$? (No efectúes los cálculos; sólo describe el método.)

Tal vez notaste, al comparar $\frac{337}{113}$ y $\frac{167}{55}$, que $\frac{337}{113} < 3$ (es decir, $\frac{337}{113} < \frac{339}{113}$) y $3 < \frac{167}{55}$ (es decir, $\frac{165}{55} < \frac{167}{55}$). ¿Podrías decir ahora qué relación hay entre $\frac{337}{113}$ y $\frac{167}{55}$ sin tener que escribirlos como fracciones con el mismo denominador? ¿Cómo podrías, de manera semejante, averiguar cuál es el menor de $\frac{40}{27}$ y $\frac{\pi}{2}$? Suponte que x, y son números reales, y que además $x < {}^-1$, ${}^-1 < y$. Usando de nuevo la recta numérica, ¿qué puedes decir acerca de la relación que hay entre ellos?

La propiedad de ordenación que empleamos en los últimos tres ejemplos se llama la <u>propiedad transitiva</u>*:

Si a, b, c, son números reales
y si $a < b$ <u>y</u> $b < c$,
entonces $a < c$.

<u>Conjunto de problemas 5-2c</u>

1. En cada uno de los siguientes ejercicios, determina la relación de ordenación que hay entre cada dos de los tres números reales.
   Por ejemplo, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{^-4}{5}$ están en la relación: $\frac{^-4}{5} < \frac{3}{4}$, $\frac{3}{4} < \frac{3}{2}$, $\frac{^-4}{5} < \frac{3}{2}$.

   (a) $\frac{^-1}{5}$, $\frac{3}{2}$, y 12,

   (b) π, ${}^-\pi$, y ${}^-\sqrt{2}$,

   (c) 1.7, 0, y ${}^-1.7$,

   (d) ${}^-\left(\frac{27}{15}\right)$, ${}^-\left(\frac{3}{15}\right)$ y ${}^-\left(\frac{2}{15}\right)$,

   (e) $\frac{12 \times (\frac{1}{2} + \frac{1}{3})}{3}$, $\frac{^-5}{3}$, $\frac{6}{3}$.

<u>Nota al calce</u>
*Del latín, <u>transire</u>, cruzar.

(f) $\frac{3 \times (27 + 6)}{9}$, $\frac{(2 \times 3) + (7 \times 9)}{6}$, y $\frac{(99 \times 3) \times \frac{1}{3}}{2}$,

(g) 3^2, 4^2, $(3 + 4)^2$,

(h) $^-\frac{1}{2}$, $^-\frac{1}{3}$, $^-\frac{1}{4}$,

(i) $1 + \frac{1}{2}$, $^-1 + (\frac{1}{2})^2$, $(1 + \frac{1}{2})^2$.

2. Enuncia una propiedad transitiva para " $>$ ", e ilustra dicha propiedad mediante dos de los ejercicios del problema 1.

3. Arturo y Roberto están sentados en los extremos opuestos de un balancín (subè y baja), y el extremo en que está sentado Arturo baja lentamente hasta el suelo. Arturo se levanta y Carlos se monta; entonces el extremo donde está sentado Roberto baja hasta el suelo. ¿Quién pesa más, Arturo o Carlos?

4. ¿Existe una propiedad transitiva para la relación " $=$ "? En tal caso, da un ejemplo.

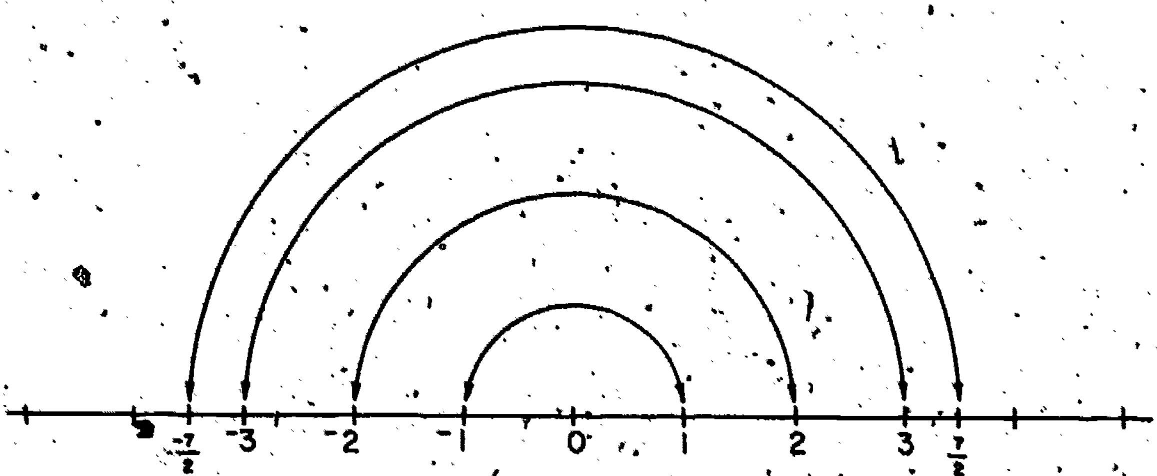
5. Enuncia una propiedad transitiva para " $\geq$ ", y da un ejemplo.

6. Hemos llamado <u>números reales positivos</u> al conjunto de los números mayores que 0, y <u>números reales negativos</u> al conjunto de los números menores que 0. Describe,
   (a) los números reales no positivos,
   (b) los números reales no negativos.

7. Halla la relación que hay en cada uno de los siguientes pares de números:
   (a) $^-\frac{15}{8}$ y $^-\frac{25}{12}$ (c) $^-\frac{145}{28}$ y $^-\frac{104}{21}$
   (b) $^-\frac{17}{35}$ y $^-\frac{7}{13}$ (d) $^-\frac{192}{46}$ y $^-\frac{173}{44}$

5-3. <u>Opuestos</u>

Cuando marcamos los puntos a la izquierda del 0 en la recta de los números reales, empezamos por marcar intervalos sucesivos de longitud 1 a la izquierda del 0. Sin embargo, podemos también aparear los puntos a igual distancia del 0 y a distinto lado del mismo. Así, $^-2$ está a la misma distancia del 0 que 2. ¿Qué número se encuentra a la misma distancia del 0 que $\frac{7}{2}$? Si escoges un punto cualquiera de la recta numérica, ¿podrás hallar un punto a la misma distancia, pero a distinto lado, del 0? ¿Qué puedes decir si el punto es el mismo 0?



Como los dos números en cada uno de esos pares están a distinto lado del 0, es natural que los llamemos <u>opuestos</u>. El opuesto de un número real distinto de cero es el otro número real que está a igual distancia del 0 en la recta numérica. ¿Cuál es el opuesto de 0?

Consideremos algunos números reales típicos. Escríbelos en una columna. Luego escribe sus opuestos en otra columna y estudia las afirmaciones que siguen:

2,	$^{-}2$;	$^{-}2$ es el opuesto de 2.
$^{-}\frac{1}{2}$,	$\frac{1}{2}$;	$\frac{1}{2}$ es el opuesto de $^{-}\frac{1}{2}$.
0,	0;	0 es el opuesto de 0.

Es un tanto molesto tener que escribir tales afirmaciones en esa forma y por ello hace falta un símbolo que signifique "el opuesto de". A este fin, usaremos la misma raya con que indicamos los números a la izquierda del 0, pero colocándola un poco más abajo, " - ". Empleando este símbolo las tres afirmaciones se convierten en los enunciados ciertos:

$$^{-}2 = -2$$

$$\frac{1}{2} = -\,^{-}\frac{1}{2}$$

$$0 = -0.$$ (Lee estos enunciados cuidadosamente.)

De estos enunciados podemos aprender dos cosas. Primero, que "$^-2$" y "-2" son nombres distintos de un mismo número. Es decir, "2 negativo" y "el opuesto de 2" representan el mismo número. Por lo tanto, no importa si la raya se escribe arriba o un poco más abajo, pues en ambos casos significa lo mismo. Siendo esto así, no necesitamos los dos símbolos.

¿Cuál de ellos seguiremos usando? Escrita arriba la raya se aplica solamente a números negativos, mientras que escrita un poco más abajo puede aplicarse a <u>cualquier</u> número real. (Observa que el opuesto del número positivo 2 es el número negativo $^-2$, y que el opuesto del número negativo $\frac{1}{2}$ es el número positivo $\frac{1}{2}$.) Por lo tanto, es natural conservar el símbolo para "opuesto de" (en el sentido de "negativo" u "opuesto de") cuando el número en cuestión es <u>positivo</u>. Ahora los enunciados se pueden escribir así:

$-2 = -2$, (lo que leemos, "negativo 2 es el opuesto de 2")

$\frac{1}{2} = -(-\frac{1}{2})$, (lo que leemos, "$\frac{1}{2}$ es el opuesto de negativo $\frac{1}{2}$")

$0 = -0$

El segundo de estos enunciados también se puede leer como:

$\frac{1}{2}$ es el opuesto del opuesto de $\frac{1}{2}$.

Una segunda observación general: el <u>opuesto</u> <u>del</u> <u>opuesto</u> de un número <u>es</u> <u>el</u> <u>número</u> <u>mismo</u>; en símbolos,

Para todo número real y,

$$-(-y) = y.$$

¿Cuál es el opuesto del opuesto del opuesto de un número? ¿Cuál es el opuesto del opuesto de un número negativo?

Cuando escribimos la raya " $-$ " a la izquierda de la variable x, estamos efectuando con x la operación de "determinar el opuesto de x". No confundas esto con la operación <u>binaria</u> de la resta que se efectúa con <u>dos</u> números, como por ejemplo "$3 - x$", que quiere decir "x restado de 3". ¿Qué clase de número es $-x$ si x es un número positivo? ¿Si x es un número negativo? ¿Si x es 0?

El símbolo "$-x$" se leerá como "el opuesto de x". De modo que, si x es un número a la derecha del 0 (positivo), entonces $-x$ está a la izquierda (negativo); si x está a la izquierda del 0 (negativo), entonces $-x$ está a la derecha (positivo).

Conjunto de problemas 5-3a

1. Determina el opuesto de cada uno de los siguientes números:
   (a) 2.3 (c) $-(-2.3)$ (e) $-(42 \times 0)$
   (b) -2.3 (d) $-(3.6 - 2.4)$ (f) $-(42 + 0)$
2. ¿Qué clase de número es $-x$ si x es positivo?, ¿si x es negativo?, ¿si x es 0?
3. ¿Qué clase de número es x si $-x$ es un número positivo?, ¿si $-x$ es un número negativo?, ¿si $-x$ es 0?
4. (a) ¿Es todo número real el opuesto de algún número real?
   (b) ¿Es el conjunto de todos los opuestos de números reales el mismo que el conjunto de todos los números reales?
   (c) ¿Es el conjunto de todos los números negativos un subconjunto del conjunto de todos los opuestos de números reales?
   (d) ¿Es el conjunto de todos los opuestos de números reales un subconjunto del conjunto de todos los números negativos
   (e) ¿Es el opuesto de todo número un número negativo?

La ordenación de los números en la recta de los números reale revela que $-\frac{1}{2}$ es menor que 2. ¿Es el opuesto de $-\frac{1}{2}$ menor que el opuesto de 2? Construye ejemplos semejantes con otros pares de números. Después que hayas determinado la ordenación de un par, halla la ordenación de sus opuestos. Verás que hay una propiedad general para opuestos:

Para los números reales a y b,
si $a < b$, entonces $-b < -a$.

Conjunto de problemas 5-3b

1. Para cada uno de los siguientes pares de números, determina cuál es el mayor:
   (a) 2.97, -2.97 (d) -1, 1 (g) 0, -0
   (b) -12, 2 (e) -370, -121 (h) -0.1, -0.01
   (c) -358, -762 (f) 0.12, 0.24 (i) 0.1, 0.01
2. Utilizando las relaciones " $<$ " o " $>$ ", escribe enunciados ciertos para los siguientes números y sus opuestos.
   Ejemplo: Para los números 2 y 7, $2 < 7$ y $-2 > -7$.

(a) $\frac{2}{7}, -\frac{1}{6}$

(b) $\sqrt{2}, -\pi$

(c) $\pi, \frac{22}{7}$

(d) $3(\frac{4}{3} + 2), \frac{5}{4}(20 + 8)$

(e) $-(\frac{8 + 6}{7}), -2$

(f) $-((3 + 17)0), -((5 + 0)3)$

3. Construye las gráficas de los conjuntos de validez de los siguientes enunciados abiertos:
(Sugerencia: Cuando sea conveniente, emplea la propiedad de ordenación para opuestos antes de hacer la gráfica.)

(a) $x > 3$

(b) $x > -3$

(c) $-x > 3$

(d) $-x > -3$

4. Describe el conjunto de validez de cada enunciado abierto:

(a) $-x \neq 3$

(b) $-x \neq -3$

(c) $x < 0$

(d) $-x < 0$

(e) $-x \geq 0$

(f) $-x \leq 0$

5. A continuación aparecen algunos conjuntos. En cada caso, construye dos enunciados abiertos cada uno de los cuales tenga por conjunto de validez el conjunto considerado. (Usa opuestos cuando sea conveniente.)

(a) A es el conjunto de todos los números reales no negativos.

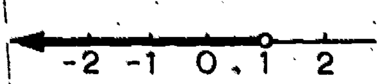
(b) B es el conjunto de todos los números reales no iguales a -2.

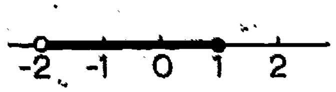
(c) C es el conjunto de todos los números reales no mayores que -3.

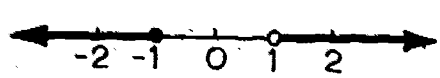
(d) $\emptyset$.

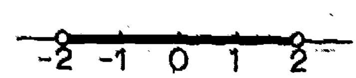
(e) E es el conjunto de todos los números reales.

6. Escribe un enunciado abierto para cada una de las siguientes gráficas:

(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

7. Escribe el opuesto de cada uno de los siguientes números y luego escoge el que sea mayor del número y su opuesto:

(a) 3

(b) 0

(c) 17

(d) -7.2

(e) $-\sqrt{2}$ (h) $(1-\frac{1}{4})^2$

(f) -0.01 (i) $1-(\frac{1}{4})^2$

(g) $-(-2)$ (j) $-(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})$

*8. Escribamos " $\succ$ " por la frase "está más distante de 0 que" en la recta de los números reales. ¿Tiene " $\succ$ " la misma propiedad de comparación que " > "?; es decir, si a y b son dos números reales distintos, ¿es cierto que $a \succ b$ o $b \succ a$, pero no ambas cosas? ¿Tiene " $\succ$ " una propiedad transitiva? ¿Para qué subconjunto del conjunto de números reales tendrán " $\succ$ " y " > " el mismo significado?

9. Traduce los siguientes enunciados lingüísticos a enunciados abiertos y describe la variable empleada:
   (a) La puntuación de Juan es mayor que 100 negativo. ¿Cuál es su puntuación?
   (b) Sé que no tengo dinero, pero mis deudas no pasan de \$200. ¿Cuál es mi situación financiera?
   (c) Pablo abonó \$10 a su cuenta, pero aún debe más de \$25. ¿Cuál era el montante de su cuenta?

10. Cambia los numerales "$-\frac{13}{42}$" y "$-\frac{15}{49}$" a formas que tengan el mismo denominador. (Sugerencia: Primero cambia $\frac{13}{42}$ y $\frac{15}{49}$.) ¿Qué relación de ordenación hay entre $-\frac{13}{42}$ y $-\frac{15}{49}$? (Sugerencia: Conociendo la relación existente entre $\frac{13}{42}$ y $\frac{15}{49}$, ¿cuál será la relación entre sus opuestos?) Formula ahora una regla general para determinar la relación de ordenación que hay entre dos números racionales negativos.

5-4. Valor absoluto

Queremos definir ahora una operación nueva y muy útil que concierne a un solo número real: la operación de tomar su valor absoluto.

> El valor absoluto de un número real distinto de 0 es el mayor entre el número y su opuesto. El valor absoluto de 0 es 0.

El valor absoluto de 4 es 4, porque entre 4 y -4, el mayor es 4. El valor absoluto de $-\frac{3}{2}$ es $\frac{3}{2}$. (¿Por qué?) ¿Cuál es el valor absoluto de -17? Entre un número distinto de 0 y su opuesto, ¿cuál es el mayor, siempre: el positivo o el negativo? Explica por qué el valor absoluto de un número real cualquiera es un número positivo ó 0.

Como de costumbre, convendremos en usar un símbolo para indicar la operación.

Escribimos

$$|n|,$$

para indicar el valor absoluto del número n. Por ejemplo,

$$|4| = 4, \quad \left|-\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}, \quad |-\sqrt{2}| = \sqrt{2}, \quad |12| = 12.$$

Observa que cada uno de éstos es no negativo.

Si examinas estos números y sus valores absolutos en la recta numérica, ¿qué puedes concluir acerca de la distancia entre un número y 0? Observas que la distancia entre 4 y 0 es 4, entre $-\frac{3}{2}$ y 0 es $\frac{3}{2}$, etc. Observa también que la distancia entre dos puntos cualesquiera de la recta numérica es un número real no negativo.

> La distancia entre un número real y 0 en la recta de los números reales es el valor absoluto de ese número.

Conjunto de problemas 5-4a

1. Halla los valores absolutos de los siguientes números:

   (a) -7 (c) $(6 - 4)$ (e) $-(14 + 0)$

   (b) $-(-3)$ (d) 14×0 (f) $-(-(-3))$

2. (a) ¿Qué clase de número es $\frac{4}{3}$?, ¿qué clase de número es $\left|\frac{4}{3}\right|$? (¿No negativo o negativo?)

   (b) Si x es un número real no negativo, ¿qué clase de número es $|x|$?

3. (a) ¿Qué clase de número es $-\frac{2}{5}$?, ¿qué clase de número es $\left|-\frac{2}{5}\right|$? (¿No negativo o negativo?)

(b) Si x es un número real negativo, ¿qué clase de número es $|x|$?

4. ¿Es $|x|$ un número no negativo para toda x? Explica.

5. Si x es un número negativo, ¿cuál es el mayor entre x y $|x|$?

6. ¿Es el conjunto $\{-1, -2, 1, 2\}$ cerrado respecto de la operación de tomar el valor absoluto de sus elementos?

Notamos que para un número no-negativo, el mayor entre el número y su opuesto es el primero. Es decir:

Para todo número real x
que sea 0 ó positivo,
$$|x| = x.$$

¿Qué se puede decir acerca de un número negativo y su valor absoluto? Escribe numerales corrientes para los siguientes pares:

$\|-5\| =$	$\|-3.1\| =$
$-(-5) =$	$-(-3.1) =$
$\|-\frac{1}{2}\| =$	$\|-467\| =$
$-(-\frac{1}{2}) =$	$-(-467) =$

(¿Qué clase de números son -5, $-\frac{1}{2}$, -3.1, -467?) Encontraste que

$$|-5| = -(-5), \qquad |-3.1| = -(-3.1),$$
$$|-\tfrac{1}{2}| = -(-\tfrac{1}{2}), \qquad |-467| = -(-467).$$

¿No está claro ahora que podemos decir: "El valor absoluto de un número <u>negativo</u> es el <u>opuesto</u> del número negativo"? Es decir:

Para todo número real <u>negativo</u> x,
$$|x| = -x.$$

<u>Conjunto de problemas 5-4b</u>

1. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son ciertos?

(a) $|-7| < 3$ (d) $2 \nless |-3|$ (g) $-2 < |-3|$

(b) $|-2| \leq |-3|$ (e) $|-5| \nless |2|$ (h) $|\sqrt{16}| > |-4|$

(c) $|4| < |1|$ (f) $-3 < 17$ (i) $|-2|^2 = 4$

2. Escribe cada uno de los siguientes como un numeral corriente:

(a) $|2| + |3|$
(b) $|-2| + |3|$
(c) $-(|2| + |3|)$
(d) $-(|-2| + |3|)$
(e) $|-7| - (7 - 5)$
(f) $7 - |-3|$
(g) $|-5| \times 2$
(h) $-(|-5| - 2)$
(i) $|-3| - |2|$
(j) $|-2| + |-3|$
(k) $-(|-3| - 2)$
(l) $-(|-2| + |-3|)$
(m) $3 - |3 - 2|$
(n) $-(|-7| - 6)$
(o) $|-5| \times |-2|$
(p) $-(|-2| \times 5)$
(q) $-(|-5| \times |-2|)$

3. ¿Cuál es el conjunto de validez de cada uno de los siguientes enunciados abiertos?
(a) $|x| = 1$, (b) $|x| = 3$, (c) $|x| + 1 = 4$, *(d) $5 - |x| = 2$.

4. ¿Cuáles de los siguientes enunciados abiertos son ciertos para todos los números reales x?
(a) $|x| \geq 0$, (b) $x \leq |x|$, (c) $-x < |x|$, (d) $-|x| \leq x$.
(Sugerencia: Asigna un valor positivo a x; luego asígnale también un valor negativo antes de tomar una decisión.)

5. Describe las variables empleadas y traduce a un enunciado abierto: Juan tiene menos dinero que yo, y yo tengo menos de \$20. ¿Cuánto dinero tiene Juan?

6. Representa gráficamente los conjuntos de validez de los siguientes enunciados:
(a) $|x| < 2$
(b) $x > -2$ y $x < 2$.
(c) $|x| > 2$
(d) $x < -2$ o $x > 2$

7. Compara las gráficas de los enunciados en los problemas 6(a) y (b); en 6(c) y (d).

8. Demuestra que si x es un número real negativo, entonces x es el opuesto del valor absoluto de x; es decir, si $x < 0$, entonces $x = -|x|$. (Sugerencia: ¿Cuál es el opuesto del opuesto de un número?)

9. Representa gráficamente el conjunto de los enteros menores que 5 cuyos valores absolutos sean mayores que 2. ¿Será -5 un elemento de este conjunto? ¿Será 0 un elemento de este conjunto? ¿Será -10 un elemento de este conjunto?
10. Si I es el conjunto de todos los enteros, R el conjunto de todos los números reales, y P el conjunto de todos los números reales positivos, escribe tres números:
    (a) pertenecientes a P pero no a I,
    (b) pertenecientes a R pero no a P,
    (c) pertenecientes a R pero no a P ni a I,
    (d) pertenecientes a P pero no a R.
11. Traduce a un enunciado abierto: La temperatura de hoy osciló no más de 5 grados alrededor de 0.
12. Compara los conjuntos de validez de los dos enunciados,

$$|x| = 0, \qquad |x| = -1.$$

5-5. Resumen

1. Marcamos los puntos a la izquierda del 0 en la recta numérica con números <u>negativos</u>; el conjunto de los <u>números reales</u> consiste en todos los números de la aritmética y sus opuestos.
2. A muchos de los puntos en la recta numérica no les asignamos números racionales como coordenadas. Identificamos estos puntos con <u>números irracionales</u>. El conjunto de los números reales consiste en todos los números racionales y los irracionales.
3. Para los números reales, "es menor que" significa "está a la izquierda de" en la recta numérica.
4. <u>Propiedad de comparación</u>. Si a es un número real y b es un número real, entonces solamente uno de los siguientes es cierto: $a < b$, $a = b$, $b < a$.
5. <u>Propiedad transitiva</u>. Si a, b, c son números reales y si $a < b$ <u>y</u> $b < c$, entonces $a < c$.

6. El opuesto de 0 es 0, y el opuesto de cualquier otro número real es el otro número que está a igual distancia de 0 en la recta de los números reales.
7. El valor absoluto de 0 es 0, y el valor absoluto de cualquier otro número real n es el mayor entre n y el opuesto de n.
8. Si x es un número positivo, entonces $-x$ es un número negativo. Si x es un número negativo, entonces $-x$ es un número positivo.
9. El valor absoluto del número real n se denota por $|n|$. También, $|n|$ es un número no negativo que representa la distancia entre 0 y n en la recta numérica.
10. Si $n \geq 0$, entonces $|n| = n$;
Si $n < 0$, entonces $|n| = -n$.

Problemas de repaso

1. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son ciertos?
(a) $-2 < -5$
(b) $-(5 - 3) = -(2)$
(c) $-(5 - 3) < -|-2|$
(d) $-\frac{1}{2} \geq -(\frac{6+1}{14})$
(e) $-2 < |-5|$
(f) $|-2| < |-5|$
2. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son falsos?
(a) $-(-3) + 5 > -(-2) + 6$
(b) $3 \not< -3$ ó $3 > -3$
(c) $3 \not< -3$ y $3 > -3$
(d) $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$ y $-\frac{4}{5} < -\frac{5}{6}$
(e) $|\frac{3}{4}| < -(-|-1|)$
(f) $-(|-3| \cdot 2) > -(|-5| - |3|)$
3. Construye la gráfica de cada uno de los siguientes enunciados:
(a) $v \geq 1$ y $v < 3$
(b) $|r| = 2$
(c) $x < 4$ ó $x > 2$
(d) $|x| = x$
4. Describe el conjunto de validez de cada enunciado:
(a) $y \leq 3$ y $y > 4$
(b) $-|u| < 2$
(c) $-3 < x < 2$
(d) $|x| = -x$
(e) $|y| < -2$
(f) $|v| \geq 0$

5. Considera el enunciado abierto "$|x| < 3$". Construye la gráfica de su conjunto de validez si el dominio de x es el conjunto de:
(a) los números reales (c) los números reales no negativos
(b) los enteros (d) los enteros negativos.

6. Describe las variables empleadas y traduce cada uno de los siguientes a un enunciado abierto:
(a) El jueves la temperatura media fue de $4°$ menos que el viernes, y el viernes estuvo por debajo de $-10°$. ¿Cuál fue la temperatura media el jueves?
(b) El domingo la temperatura media osciló no más de $6°$ alrededor de $-5°$.

7. Si I es el conjunto de todos los enteros, R el conjunto de todos los números reales, P el conjunto de todos los números reales positivos, y F el conjunto de todos los números racionales, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?
(a) F es un subconjunto de R.
(b) Todo elemento de I es un elemento de F.
(c) Hay elementos de I que no son elementos de R.
(d) Todo elemento de I es un elemento de P.
(e) Hay elementos de R que no son elementos de F.

8. Construye la gráfica del conjunto de enteros menores que 6 cuyos valores absolutos sean mayores que 3. ¿Es -8 un elemento de este conjunto?

9. Cuando sumamos un cierto entero y su sucesor, el resultado es el sucesor mismo.
(a) Traduce este enunciado lingüístico a un enunciado abierto.
(b) Halla el conjunto de validez de este enunciado.

10. El perímetro de un cuadrado es menor que 10 pulgadas.
(a) ¿Qué sabes acerca del número de unidades, s, de longitud del lado de este cuadrado? Representa gráficamente este conjunto.

(b) ¿Qué sabes acerca del número de unidades, A, del área de este cuadrado? Representa gráficamente este conjunto.

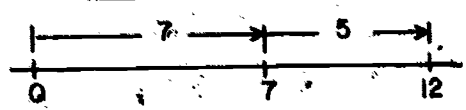
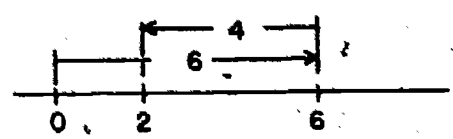
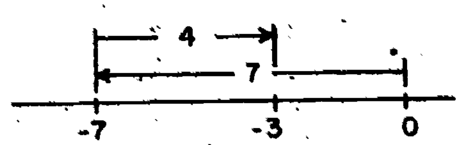
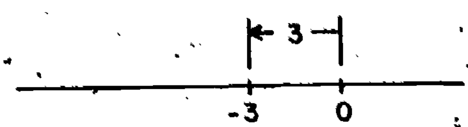
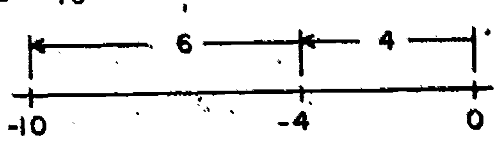
Capítulo 6

PROPIEDADES DE LA SUMA

6-1. Suma de los números reales

Desde primer grado has estado sumando números; a saber, los números no negativos de la aritmética. Ahora nos ocupamos de un conjunto más amplio de números, el de los números reales. Nuestra larga experiencia con la suma de números no negativos, tanto en la aritmética como en la recta numérica, debería darnos inmediatamente un indicio de cómo sumar números reales.

Consideremos las ganancias y pérdidas de un vendedor de helados durante los diez días en que tuvo el negocio. Usamos números positivos para representar las ganancias y números negativos para representar las pérdidas. Describamos la operación de su negocio en la primera columna y añadamos otras dos columnas, una para los cómputos aritméticos de su ingreso neto por períodos de dos días, y la otra para representar estos cómputos en la recta numérica.

Negocio	Aritmética	Recta numérica
lunes: Ganancia de $7 martes: Ganancia de $5	$7 + 5 = 12$ ingreso neto	
miércoles: Ganancia de $6 jueves: Pérdida de $4 (se vació una goma)	$6 + (-4) = 2$ ingreso neto	
viernes: Pérdida de $7 (otra goma) sábado: Ganancia de $4	$(-7) + 4 = -3$	
domingo: Día de descanso lunes: Pérdida de $3 (hizo frío)	$0 + (-3) = -3$	
martes: Pérdida de $4 (hizo más frío) miércoles: Pérdida de $6 (cerró el negocio)	$(-4) + (-6) = -10$	

Estas cuentas ilustran casi todas las posibles sumas de números reales: un positivo sumado a un positivo, un positivo sumado a un negativo, un negativo sumado a un positivo, cero sumado a un negativo y un negativo sumado a un negativo.

Uno de los propósitos de esta sección será aprender a traducir al lenguaje del álgebra unas operaciones que primero describimos geométricamente. La suma en la recta numérica es una de ellas; trataremos de definirla en el lenguaje del álgebra.

Si representamos la suma $7 + 5$ en la recta numérica, primero vamos desde 0 hasta 7, y luego desde 7 nos movemos 5 unidades más hacia la derecha. Si consideramos $(-7) + 4$, primero vamos desde 0 hasta (-7) y luego desde (-7) nos movemos 4 unidades hacia la derecha. Estos ejemplos nos recuerdan algo que ya sabemos: Para sumar un número positivo, nos movemos hacia la derecha en la recta numérica. De los otros ejemplos, podemos claramente deducir qué sucede en la recta numérica cuando sumamos un número negativo. Al sumar (-4), nos movemos 4 unidades hacia la izquierda; cuando sumamos (-6) nos movemos 6 unidades hacia la izquierda. Hay otro caso a considerar: Si sumamos 0, ¿qué movimiento se hace?

Ya hemos descrito el movimiento para todos los casos; vamos a ver si podemos aprender a expresar algebraicamente la distancia que nos movemos. Olvídate por el momento de la dirección; sólo queremos saber qué distancia nos movemos al ir desde a hasta $a + b$. Cuando b es positivo vamos hacia la derecha. Muy bien, ¿pero qué distancia? Nos movemos b unidades. Cuando b es negativo, vamos hacia la izquierda. ¿Qué distancia? Nos movemos $(-b)$ unidades. (Recuerda que $(-b)$ es positivo si b es negativo.) Si b es 0, no nos movemos en absoluto. ¿Qué símbolo hemos usado con el significado: "b; si b es positivo; $-b$, si b es negativo; 0, si b es 0"? Por supuesto, el símbolo "$|b|$". Así hemos aprendido que para encontrar $a + b$ en la recta numérica, empezamos en a y nos movemos la distancia $|b|$

hacia la derecha, si b es positivo;

hacia la izquierda, si b es negativo.

Conjunto de problemas 6-1

1. Resuelve los siguientes problemas, usando números positivos y negativos:
   (a) Un equipo de fútbol perdió 6 yardas en la primera jugada y ganó 8 yardas en la segunda. ¿Cuál fue el resultado neto de las dos jugadas?
   (b) Juan le pagó a Jaime los 60¢ que le debía, pero Alfredo le había pagado a Juan los 50¢ que le debía. ¿Cuál es el resultado neto de las dos transacciones de Juan?
   (c) Si un termómetro registra -15 grados y la temperatura sube 10 grados, ¿qué temperatura registrará el termómetro? ¿Y si el aumento de temperatura hubiera sido de 30 grados?
   (d) La Srta. Vélez rebajó 6 libras durante su primera semana a dieta, rebajó 3 libras la segunda semana, aumentó 4 libras la tercera y aumentó 5 libras en la última. ¿Cuál fue el resultado neto al cabo de las cuatro semanas?
2. Usa la recta numérica como ayuda para efectuar las operaciones indicadas con números reales:
   (a) $\left(4 + (-6)\right) + (-4)$
   (b) $4 + \left((-6) + (-4)\right)$
   (c) $-\left(4 + (-6)\right)$
   (d) $3 + \left((-2) + 2\right)$
   (e) $2 + \left(0 + (-2)\right)$
   (f) $\left((-3) + 0\right) + (-2.5)$
   (g) $|-2| + (-2)$
   (h) $(-3) + \left(|-3| + 5\right)$
3. En cada uno de los siguientes ejercicios, explica con tus propias palabras cómo sumas los dos números dados:
   (a) $7 + 10$
   (b) $7 + (-10)$
   (c) $10 + (-7)$
   (d) $(-10) + (-7)$
   (e) $10 + 7$
   (f) $(-7) + (-10)$
   (g) $(-7) + 10$
   (h) $(-10) + 7$
   (i) $(-10) + 0$
   (j) $0 + 7$
4. ¿En qué partes del problema 3 sumaste del mismo modo que lo hacías con los números de la aritmética?
5. ¿Qué podrías decir siempre acerca de la suma cuando ambos sumandos son negativos?

6-2. Definición de la suma

Queremos ahora aprovechar lo que acabamos de aprender acerca de la suma en la recta numérica para expresar, primero en nuestro idioma y luego en el lenguaje del álgebra, lo que se entiende por $a + b$ para todos los números reales a y b. Las cuentas del vendedor de helados nos presentaron algunos casos. Ante todo, sabemos a base de nuestra experiencia anterior cómo sumar a y b si ambos son números no negativos. Consideremos, pues, otro ejemplo; a saber, un negativo sumado a un negativo. ¿Qué es

$$(-4) + (-6)?$$

En la recta numérica encontramos que

$$(-4) + (-6) = (-10).$$

Nuestra tarea ahora es pensar más cuidadosamente acerca de cómo llegamos a (-10). Empezamos moviéndonos desde 0 hasta (-4). ¿Dónde está localizado (-4) en la recta numérica? Está a la izquierda del 0. ¿A qué distancia? "Distancia entre un número y 0" era uno de los significados del valor absoluto de un número. Así, la distancia entre 0 y (-4) es $|-4|$. (Naturalmente, vemos que es más fácil escribir 4 que $|-4|$, pero la expresión $|-4|$ nos recuerda que estamos pensando en "distancia desde 0", y en este momento es oportuno recordarlo.)

(-4) está, pues, $|-4|$ unidades a la izquierda de 0. Cuando ahora consideramos

$$(-4) + (-6),$$

nos movemos otras $|-6|$ unidades hacia la izquierda. ¿Dónde estamos ahora? En $-(|-4| + |-6|)$.

Así, el pensar sobre la distancia desde 0 y sobre la distancia recorrida en la recta numérica nos ha llevado a reconocer que

$$(-4) + (-6) = -(|-4| + |-6|)$$

es un enunciado cierto.

Es razonable que preguntes en este momento qué hemos logrado con todo esto. ¡Tomar una expresión sencilla como $(-4) + (-6)$, y hacerla parecer más complicada! Cierto, pero la expresión $-(|-4| + |-6|)$, complicada como se ve, tiene una gran ventaja. Contiene sólo operaciones que sabemos efectuar a base de experiencias previas. Verás: $|-4|$ y $|-6|$ son ambos números positivos, y sabemos cómo sumar números positivos; además, $-(|-4| + |-6|)$ es el opuesto de un número, y sabemos cómo hallar el opuesto de un número. Así, hemos logrado expresar la suma de dos números negativos, de la cual sólo teníamos una ilustración en la recta numérica, por medio del lenguaje del álgebra tal como lo hemos construido hasta ahora.

Considera la suma $(-2) + (-3)$ y observa que por el mismo razonamiento llegas al enunciado cierto,

$$(-2) + (-3) = -(|-2| + |-3|).$$

De estos ejemplos se desprende que lo siguiente define la suma de dos números negativos en términos de operaciones que ya sabemos efectuar:

En nuestro idioma: La suma de dos números negativos es negativa; el valor absoluto de esta suma es la suma de los valores absolutos de los números.

En el lenguaje del álgebra:

Si a y b son ambos números negativos, entonces

$$a + b = -(|a| + |b|).$$

Conjunto de problemas 6-2a

1. Usa la definición anterior para hallar un nombre corriente para cada una de las siguientes sumas indicadas, y luego compruébalos intuitivamente mediante la interpretación por ganancias y pérdidas, o usando la recta numérica.

   Ejemplo. Por definición,

   $$\begin{aligned}(-2) + (-3) &= -(|-2| + |-3|)\\ &= -(2 + 3)\\ &= -5\end{aligned}$$

   Comprobación: Una pérdida de \$2 seguida de una pérdida de \$3 es una pérdida neta de \$5.

   (a) $(-2) + (-7)$
   (b) $(-4.6) + (-1.6)$
   (c) $(-3\frac{1}{3}) + (-2\frac{2}{3})$
   (d) $(-25) + (-73)$
   (e) $5\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}$

2. Escoge un método cualquiera para hallar un nombre corriente para cada uno de los siguientes:

   (a) $(-6) + (-7)$
   (b) $(-7) + (-6)$
   (c) $-(|-7| + |-6|)$
   (d) $6 + (-4)$

(e) $(-4) + 6$
(f) $|6| - |-4|$
(g) $0 + (-3)$
(h) $-(|-3| - |0|)$
(i) $3 + ((-2) + 2)$

3. Halla el conjunto de validez de cada uno de los siguientes enunciados:
   (a) $(-5) + (x) = -(|-5| + |-3|)$
   (b) $x + (-5) = -(|-5| + |-3|)$
   (c) $(-5) + (x) = -(|-3| + |-5|)$
   (d) $x + (-5) = -(|-3| + |-5|)$
4. Piensa otra vez sobre el problema 3 en el Conjunto de problemas 6-1. Cuando un número es positivo y otro es negativo, ¿a qué distancia de 0 se halla la suma de los dos números?
5. ¿Cómo sabes si la suma de dos números es positiva o negativa cuando uno de ellos es positivo y el otro es negativo?

*6. ¿Es el enunciado
$$(-1) + (-x) = -(|-1| + |-x|)$$
cierto para todos los valores no negativos de x?

Hasta ahora hemos considerado la suma de dos números no negativos, y la de dos números negativos. Seguidamente consideraremos la suma de dos números, uno de los cuales es positivo y el otro negativo.

Veamos otra vez algunos ejemplos sobre ganancias y pérdidas:

Ganancia de \$7 y pérdida de \$3;	$7 + (-3) = 4;$	$\|7\| - \|-3\| = \|4\|$
Ganancia de \$3 y pérdida de \$7;	$3 + (-7) = -4;$	$\|-7\| - \|3\| = \|-4\|$
Pérdida de \$7 y ganancia de \$3;	$(-7) + 3 = -4;$	$\|-7\| - \|3\| = \|-4\|$
Pérdida de \$3 y ganancia de \$7;	$(-3) + 7 = 4;$	$\|7\| - \|-3\| = \|4\|$
Pérdida de \$3 y ganancia de \$3;	$(-3) + 3 = 0;$	$\|3\| - \|-3\| = \|0\|$

Considera estos ejemplos en la recta numérica, y también piensa de nuevo sobre las preguntas planteadas en los problemas 4 y 5 del Conjunto de problemas 6-2a. De éstos se desprende que la suma de dos números, uno de los cuales es positivo (ó 0) y el otro negativo, se obtiene de la siguiente manera:

El valor absoluto de la suma es la diferencia de los valores absolutos de los números.

La suma es positiva si el número positivo tiene el valor absoluto mayor.

La suma es negativa si el número negativo tiene el valor absoluto mayor.

La suma es 0 si el número positivo y el negativo tienen el mismo valor absoluto.

En el lenguaje del álgebra,

Si $a \geq 0$ y $b < 0$, entonces.

$$a + b = |a| - |b|, \text{ si } |a| \geq |b|$$

y

$$a + b = -(|b| - |a|), \text{ si } |b| > |a|.$$

Si $b \geq 0$ y $a < 0$, entonces:

$$a + b = |b| - |a|, \text{ si } |b| \geq |a|$$

y

$$a + b = -(|a| - |b|), \text{ si } |a| > |b|.$$

<u>Conjunto de problemas 6-2b</u>

1. Halla la suma en cada uno de los siguientes ejercicios, primero de acuerdo con la definición y luego mediante otro método cualquiera que creas conveniente:

(a) $(-5) + 3$ (e) $18 + (-14)$

(b) $(-11) + (-5)$ (f) $12 + 7.4$

(c) $(-\frac{8}{3}) + 0$ (g) $(-\frac{2}{3}) + 5$

(d) $2 + (-2)$ (h) $(-35) + (-65)$

2. ¿Es el conjunto de todos los números reales cerrado respecto de la operación de sumar?

3. ¿Es el conjunto de todos los números reales negativos cerrado respecto de la suma? Justifica tu contestación.

4. En el transcurso de una semana las desviaciones en la temperatura media de la temperatura normal de 71 para la estación, fueron -7, 2, -3, 0, 9, 12, -6. ¿Cuál fue la temperatura media para cada día? ¿Cuál es la suma de las desviaciones?

5. Para cada uno de los siguientes enunciados abiertos, halla un número real que lo haga cierto:

(a) $x + 2 = 7$
(b) $3 + y = -7$
(c) $a + 5 = 0$
(d) $b + (-7) = 3$
(e) $(-\frac{5}{6}) + x = -\frac{5}{6}$
(f) $c + (-3) = -7$
(g) $y + \frac{2}{3} = -\frac{5}{6}$
(h) $\frac{1}{2}x + (-4) = 6$
(i) $(y + (-2)) + 2 = 3$
(j) $(3 + x) + (-3) = -1$

6. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son ciertos?

(a) $(-4) + 0 = 4$
(b) $-(|-1.5| + |0|) = -1.5$
(c) $(-3) + 5 = 5 + (-3)$
(d) $(4 + (-6)) + 6 = 4 + ((-6) + 6)$
(e) $(-5) + (-(-5)) = -10$
(f) $(-7) + ((-5) + (-3)) = ((-7) + (-5)) + 3$
(g) $-(6 + (-2)) = (-6) + (-2)$
(h) $(-7) + (-9) = -(7 + 9)$
(i) $(-3) + 7 = -(3 + (-7))$

7. Traduce los siguientes enunciados lingüísticos a enunciados abiertos. Por ejemplo: Guillermo gastó 60¢ el martes y se ganó 40¢ el miércoles. El no podía recordar qué sucedió el lunes, pero el miércoles por la noche le quedaban 50¢. ¿Cuánto dinero tenía el lunes? Si Guillermo tenía x centavos el lunes, entonces

$$x + (-60) + 40 = 50.$$

Esto se puede escribir así,

$$x + (-20) = 50.$$

(a) Si viajas 40 millas hacia el norte y luego 55 millas hacia el sur, ¿a qué distancia estarás del punto de partida?

(b) La suma de (-9), 28, y un tercer número, es (-52). ¿Cuál es el tercer número?

(c) A las 8 a.m. la temperatura era $-2°$. Entre las 8 a.m. y el mediodía subió $15°$. Entre el mediodía y las 4 p.m.

aumentó 6°. A las 8 p.m. la temperatura era -9°. ¿Cuál fue el cambio de temperatura entre las 4 p.m. y las 8 p.m.?

(d) Si un hombre que pesaba 200 libras rebajó 4 libras en una semana, 6 libras en la segunda semana y pesaba 195 libras al terminar la tercera semana, ¿cuántas libras aumentó en la tercera semana?

(e) Una acción que al cierre de operaciones el lunes tenía valor de 83, bajó 5 puntos el martes. ¿Qué cambio tuvo el miércoles si en la mañana del jueves su valor era de 86?

6-3. Propiedades de la suma

Tuvimos buen cuidado de describir y hacer una lista de las propiedades de la suma cuando trabajamos con los números de la aritmética. Ahora que hemos decidido cómo sumar números reales, deseamos verificar que estas propiedades de la suma se aplican a los números reales en general.

Sabemos que nuestra definición de suma incluye la suma usual de los números de la aritmética, pero necesitamos también poder sumar de una manera tan sencilla como antes. ¿Podemos todavía sumar números reales en cualquier orden y agruparlos de la manera que nos convenga? En otras palabras, ¿serán todavía válidas las propiedades conmutativa y asociativa de la suma? Si podemos convencernos de que estas propiedades también se pueden aplicar a los números reales, entonces podemos estar seguros de que se conserva la estructura de los números cuando pasamos de los números de la aritmética a los números reales. Más adelante se plantearán preguntas análogas acerca de la multiplicación.

Considera las siguientes preguntas: ¿Son $4 + (-3)$ y $(-3) + 4$ nombres del mismo número? Compruébalo en la recta numérica. Haz lo mismo para $(-1) + 5$ y $5 + (-1)$; para $(-2) + (-6)$ y $(-6) + (-2)$.

¿Incluyen los enunciados anteriores todos los casos posibles en la suma de números reales? De no ser así, busca ejemplos de los casos que falten.

Parece, pues, que la suma de dos números reales cualesquiera es la misma no importa en qué orden se sumen. Esta es la

<u>Propiedad conmutativa de la suma</u>: Para dos números reales cualesquiera a <u>y</u> b,

$$a + b = b + a.$$

Calcula ahora los siguientes pares de sumas:

$$\left(7 + (-9)\right) + 3 \quad y \quad 7 + \left((-9) + 3\right);$$
$$\left(8 + (-5)\right) + 2 \quad y \quad 8 + \left((-5) + 2\right);$$
$$(4 + 5) + (-6) \quad y \quad 4 + \left(5 + (-6)\right).$$

¿Qué observas en estos resultados?

Podríamos presentar muchos otros ejemplos. ¿Crees que se obtendrían los mismos resultados? Tenemos, pues, la

<u>Propiedad asociativa de la suma</u>: Para tres números reales cualesquiera a, b, c,

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Naturalmente, el que las propiedades asociativa y conmutativa sean válidas en varios casos no constituye una demostración de que sean válidas para todos los casos. Podría darse una demostración completa de las propiedades empleando la definición precisa de la suma de números reales en todos los casos posibles en que se apliquen las propiedades. Estas demostraciones son largas, particularmente la de la propiedad asociativa, porque hay que considerar muchos casos. No perderemos tiempo en presentar estas demostraciones, pero tal vez quieras intentar la demostración para la propiedad conmutativa en algunos casos.

Como la propiedad asociativa nos asegura que en una suma de tres números reales no importa qué dos números adyacentes sumamos primero, se acostumbra quitar los paréntesis y dejar las sumas en una forma no especificada, tal como $4 + (-1) + 3$.

De la definición de la suma obtenemos otra de sus propiedades que es nueva para los números reales y que nos será muy útil. Por ejemplo, la definición nos dice que $4 + (-4) = 0$; que $(-4) + \left(-(-4)\right) = 0$. En general, la suma de un número y su opuesto es 0. Esto lo enunciamos como la

<u>Propiedad aditiva de los opuestos</u>: Para todo número real a,

$$a + (-a) = 0.$$

Otra propiedad que se desprende directamente de la definición de la suma es la

<u>Propiedad aditiva del 0</u>: Para todo número real a,

$$a + 0 = a.$$

Construye varios ejemplos ilustrativos de esta propiedad y de la anterior.

<u>Conjunto de problemas 6-3</u>

1. Demuestra cómo podemos usar las propiedades de la suma para explicar por qué son ciertos los siguientes enunciados:

   <u>Ejemplo</u>.

   $$5 + (3 + (-5)) = 3 + 0$$

   El numeral a la izquierda es

$5 + (3 + (-5))$	$= (5 + (-5)) + 3$	propiedades asociativa y conmutativa de la suma.
	$= 0 + 3$	propiedad aditiva de los opuestos.
	$= 3 + 0$	propiedad conmutativa de la suma.

   El numeral a la derecha es

   $$3 + 0.$$

   (a) $3 + ((-3) + 4) = 0 + 4$
   (b) $(5 + (-3)) + 7 = ((-3) + 5) + 7$
   (c) $(7 + (-7)) + 6 = 6$
   (d) $|-1| + |-3| + (-3) = 1$
   (e) $(-2) + (3 + (-4)) = ((-2) + 3) + (-4)$
   (f) $(-|-5|) + 6 = 6 + (-5)$

2. Considera varias maneras de efectuar mentalmente los siguientes cómputos y halla la que parezca más sencilla. Después haz las sumas en la forma más fácil.

   (a) $\frac{5}{16} + 28 + (-\frac{5}{16})$

   (b) $.27 + (-18) + 3 + .73$

   (c) $(-5) + 32 + 3 + (-8)$

(d) $(-\frac{1}{2}) + 7 + (-2) + (-\frac{3}{2}) + 2$

(e) $\frac{5}{3} + (-3) + 6 + \frac{1}{3} + (-2)$

(f) $253 + (-67) + (-82) + (-133)$

(g) $|-\frac{3}{2}| + \frac{5}{2} + (-7) + |-4|$

(h) $(x + 2) + (-x) + (-3)$

(i) $w + (w + 2) + (-w) + 1 + (-3)$

3. Haciendo uso de las propiedades asociativa y conmutativa de la suma, escribe un nombre más sencillo para una de las frases de cada uno de los siguientes enunciados y halla el conjunto de validez del enunciado:

(a) $x = x + ((-x) + 3)$

(b) $m + (7 + (-m)) = m$

(c) $n + (n + 2) + (-n) + 1 + (-3) = 0$

(d) $(y + 4) + (-4) = 9 + (-4)$

*4. Emplea la definición de la suma de números negativos para demostrar que si $a < 0$ y $b < 0$, entonces $a + b = b + a$.

*5. Emplea la definición de la suma para demostrar que $a + 0 = a$ para todo número real a.

*6. Emplea la definición de la suma para demostrar que $a + (-a) = 0$ para todo número real a. (Sugerencia: Separa los casos $a = 0$ y $a \neq 0$. Si $a \neq 0$, uno de los números, a y $-a$ es positivo y el otro negativo. (¿Por qué?)).

6-4. La propiedad aditiva de la igualdad

Hay otro dato acerca de la suma al cual debemos prestar atención. Sabemos que

$$4 + (-5) = (-1).$$

Esto significa que $4 + (-5)$ y (-1) son dos nombres para un número. Sumémosle 3 a ese número. Entonces $(4 + (-5)) + 3$

y $(-1) + 3$, son nuevamente dos nombres para un número. Así,

$$(4 + (-5)) + 3 = (-1) + 3.$$

También, por ejemplo,

$$(4 + (-5)) + 5 = (-1) + 5.$$

Análogamente, ya que

$$7 = 15 + (-8),$$

entonces

$$7 + (-7) = (15 + (-8)) + (-7).$$

Esto nos sugiere la

<u>Propiedad aditiva de la igualdad</u>: Para tres números reales cualesquiera a, b, c,

$$\text{si } a = b, \text{ entonces } a + c = b + c.$$

Expresado en palabras, si a <u>y</u> b son dos nombres para un número, entonces $a + c$ <u>y</u> $b + c$ son dos nombres para un número.

Usemos ahora las propiedades de la suma enunciadas previamente y la propiedad aditiva de la igualdad.

<u>Ejemplo 1</u>. Determina el conjunto de validez del enunciado abierto,

$$x + \frac{3}{5} = -2.$$

¿Podrías determinar números que hagan este enunciado cierto? Si no lo haces fácilmente, ¿podrías usar como ayuda algunas propiedades de la suma? Veamos. No sabemos realmente si <u>hay</u> algún número que haga este enunciado cierto. Sin embargo, si existe un número x tal que haga cierto el enunciado; (es decir, si el conjunto de validez no es vacío) entonces $x + \frac{3}{5}$ y -2 representan el mismo número.

Sumémosle $-\frac{3}{5}$ a este número; entonces, por la propiedad aditiva de la igualdad, tenemos que

$$\left(x + \frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right) = -2 + \left(-\frac{3}{5}\right).$$

¿Por qué sumamos $-\frac{3}{5}$? Porque en este caso queremos cambiar el numeral de la izquierda para que sólo contenga el numeral "x". Observa cómo esto sucede en las próximas líneas. Continuando, tenemos que

$$x + \left(\frac{3}{5} + \left(-\frac{3}{5}\right)\right) = (-2) + \left(-\frac{3}{5}\right). \quad \text{(¿Por qué?)}$$

$$x + 0 = -\frac{13}{5}. \quad \text{(¿Por qué?)}$$

$$x = -\frac{13}{5}. \quad \text{(¿Por qué?)}$$

Así, llegamos al nuevo enunciado abierto, $x = -\frac{13}{5}$. Si un número x hace cierto el enunciado original, también hará cierto este nuevo enunciado. Estamos seguros de esto porque empleamos las propiedades que son válidas para todos los números reales. Esto nos dice que $-\frac{13}{5}$ es el único valor verdadero posible del enunciado original, pero no nos garantiza que efectivamente sea un valor verdadero. ¿Es $-\frac{13}{5}$ un valor que hace cierto el enunciado original? Sí, porque $\left(-\frac{13}{5}\right) + \frac{3}{5} = -2$.

Hemos descubierto aquí una idea muy importante acerca de enunciados tales como el anterior. Demostramos que si existe un número x que haga cierto el enunciado original, entonces el único número que x puede representar es $-\frac{13}{5}$. Al comprobar y hallar que $-\frac{13}{5}$ hace el enunciado cierto, habremos encontrado el único número que pertenece al conjunto de validez.

El enunciado del ejemplo anterior es una ecuación. Al conjunto de validez de una ecuación le llamaremos frecuentemente su conjunto de soluciones y a sus miembros les llamaremos soluciones, y escribiremos "resuelve" en vez de "determina el conjunto de validez de".

Ejemplo 2. Resuelve la ecuación,

$$5 + \frac{3}{2} = x + \left(-\frac{1}{2}\right).$$

Si $5 + \frac{3}{2} = x + \left(-\frac{1}{2}\right)$ es cierto para alguna x,

entonces $\left(5 + \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} = \left(x + \left(-\frac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}$ es cierto para la misma x;

$5 + 2 = x + 0$ es cierto para la misma x;

$7 = x$, es cierto para la misma x.

Si $x = 7$,

el lado izquierdo es: $5 + \frac{3}{2} = \frac{10}{2} + \frac{3}{2}$

$$= \frac{13}{2}.$$

y el lado derecho es:

$$7 + (-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{14}{2} + (-\tfrac{1}{2})$$
$$= \tfrac{13}{2}.$$

Por lo tanto, el conjunto de validez es $\{7\}$.

Conjunto de problemas 6-4

Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones. Realiza tu trabajo en la forma que muestra el ejemplo 2.

1. $x + 5 = 13$
2. $(-6) + 7 = (-8) + x$
3. $(-1) + 2 + (-3) = 4 + x + (-5)$
4. $(x + 2) + x = (-3) + x$
5. $(-2) + x + (-3) = x + (-\frac{5}{2})$
6. $|x| + (-3) = |-2| + 5$
7. $(-\frac{3}{8}) + |x| = (-\frac{3}{4}) + (-1)$
8. $x + (-3) = |-4| + (-3)$
9. $(-\frac{4}{3}) + (x + \frac{1}{2}) = x + (x + \frac{1}{2})$

6-5. El inverso aditivo

Dos números cuya suma es 0 están relacionados de una manera muy particular. Por ejemplo, ¿qué número sumado a 3 da la suma 0? ¿Qué número sumado a -4 da 0? En general, si x, y son números reales tales que

$$x + y = 0,$$

decimos que y es un inverso aditivo de x. A base de esta definición, ¿es también x un inverso aditivo de y?

Pensemos ahora en un número cualquiera z que sea un inverso aditivo de, digamos, 3. Conocemos, naturalmente, un tal número; a saber, -3, pues por la propiedad aditiva de los opuestos, $3 + (-3) = 0$. ¿Puede haber otro número z tal que

$$3 + z = 0?$$

Toda nuestra experiencia con números nos dice: "No, no existe ningún otro número". Pero, ¿cómo podemos estar completamente seguros de esto? Es posible resolver esta cuestión haciendo uso de las propiedades conocidas de la suma, tal como se hizo en el ejemplo 1 de la sección anterior. Si para algún número z,

$$3 + z = 0$$

es un enunciado cierto, entonces

$$(-3) + (3 + z) = (-3) + 0$$

será también un enunciado cierto, por la propiedad aditiva de la igualdad. (¿Por qué sumamos -3?) Entonces, también

$$((-3) + 3) + z = -3$$

será cierto para la misma z, por la propiedad asociativa de la suma y la propiedad aditiva del 0. Esto nos dice finalmente que

$$z = -3$$

debe ser cierto también. En este último paso usamos la propiedad aditiva de los opuestos.

¿Qué hemos hecho aquí? Pues, empezamos tomando z como <u>cualquier</u> número que sea un inverso aditivo de 3; luego encontramos que z <u>tenía</u> que ser igual a -3; es decir, que -3 no sólo es <u>un</u> inverso aditivo de 3, sino también el <u>único</u> inverso aditivo de 3.

¿Hay algo particular acerca del 3? ¿Crees que el 5 tiene más de un inverso aditivo? ¿Y (-6.3)? Ciertamente, dudamos que lo tengan y podemos demostrar que no, a base del mismo razonamiento empleado anteriormente. Sin embargo, ¿podríamos verificar esto para <u>todos</u> los números? Lo que necesitamos es una afirmación válida para <u>cualquier</u> número real x; una afirmación que nos diga algo como esto: Sabemos que $(-x)$ es <u>un</u> inverso aditivo de x; dudamos que haya algún otro, y así es como podemos demostrar que no lo hay. Usemos el mismo razonamiento que en el caso especial cuando $x = 3$, y veamos si podemos llegar a la conclusión correspondiente.

Supongamos que z es cualquier inverso aditivo de x; es decir, cualquier número tal que

$$x + z = 0.$$

Siguiendo la analogía con el caso especial anterior, ¿cuál debe ser el primer paso ahora? Usamos la propiedad aditiva de la igualdad para escribir

$$(-x) + (x + z) = (-x) + 0.$$

Tenemos entonces que

$$\left((-x) + x\right) + z = -x.$$

¿Cuáles son las dos razones empleadas para llegar a este último enunciado?

Entonces

$$0 + z = -x, \qquad \text{(¿Por qué?)}$$

y finalmente

$$z = -x. \qquad \text{(¿Por qué?)}$$

Tuvimos éxito en nuestra tarea, no sólo para cuando $x = 3$ sino también para cualquier x. Todo número x tiene un inverso aditivo único (esto quiere decir "solamente uno"); a saber, $-x$.

Probablemente tendrás ahora toda clase de dudas y preguntas, lo cual era de esperar, por ser ésta la primera demostración que has visto en este curso. Lo que hemos hecho es usar datos ya conocidos acerca de todos los números reales para deducir un nuevo dato acerca de ellos, nuevo dato que sin duda esperabas que fuera cierto, pero que no obstante hubo necesidad de comprobar en esa forma. Presentaremos varias demostraciones en este curso y según vayas progresando te acostumbrarás cada vez más a este tipo de razonamiento. Mientras tanto, hagamos un comentario adicional relativo a la demostración que acabamos de completar. Los distintos pasos que dimos fueron, desde luego, escogidos deliberadamente a fin de llegar al resultado deseado. Esto puede haberte dado la impresión de que "arreglamos" artificiosamente la demostración y que de otro modo no hubiéramos tenido éxito. ¿Está permitido lo que hicimos? Sí, lo está y de hecho toda demostración está "arreglada" en el sentido de que solamente damos los pasos que ayudan a nuestro propósito, y ningún otro. Cuando empezamos con

$$3 + z = 0,$$

decidimos emplear la propiedad aditiva de la igualdad para sumar (-3); en vez de éste, pudimos haber sumado otro número cualquiera, pero en nada nos hubiera ayudado. Por eso, no sumamos otro número, sino que sumamos -3.

Frecuentemente (aunque no siempre) llamamos "teoremas" a aquellos enunciados de nuevas propiedades que podemos demostrar provienen de otras propiedades ya establecidas. Así, la propiedad referente a inversos aditivos obtenida anteriormente, se puede enunciar como un teorema:

> Teorema 6-5a. Cualquier número real x tiene exactamente un inverso aditivo; a saber, $-x$.

Llamamos demostración de un teorema al argumento mediante el cual se muestra que el teorema es una consecuencia de otras propiedades.

Conjunto de problemas 6-5a

1. Para cada enunciado, halla su conjunto de validez.

(a) $3 + x = 0$

(b) $(-2) + a = 0$

(c) $3 + 5 + y = 0$

(d) $x + (-\frac{1}{2}) = 0$

(e) $|-4| + 3 + (-4) + c = 0$

(f) $\left(-(-\frac{2}{3})\right) + y = 0$

(g) $\left(-(2 + \frac{1}{3})\right) + a = 0$

(h) $2 + x + (-5) = 0$

(i) $3 + (-x) = 0$

2. ¿Pudiste usar el teorema 6-5a para economizar algún trabajo al resolver estas ecuaciones?

Veamos otro ejemplo que ilustre este método de demostrar una propiedad general de los números. Naturalmente no podemos demostrar una propiedad general de los números hasta tanto se nos ocurra una; busquemos una posible propiedad general. Recuerda la representación de la suma en la recta numérica, o si lo prefieres, la definición de la suma, para ver que

$$(-3) + (-5) = -(3 + 5).$$

Otra manera de escribir que $(-3) + (-5)$ y $-(3 + 5)$ son nombres del mismo número es

$$-(3 + 5) = (-3) + (-5).$$

Esto puede llevarnos a sospechar que el opuesto de la suma de dos números es la suma de los opuestos. Desde luego, solamente hemos comprobado esta conjetura para los números 3 y 5, y sería prudente probar algunos otros casos. ¿Es

$$-(2 + 9) = (-2) + (-9)?$$

¿Es

$$-\left(4 + (-2)\right) = (-4) + \left(-(-2)\right)?$$

(¿Cuál es otro nombre para $\left(-(-2)\right)$?)

¿Es

$$-\left((-1) + (-4)\right) = 1 + 4?$$

Nuestra conjetura parece ser cierta, por lo menos en todos los ejemplos considerados. En vez de seguir probando más ejemplos aritméticamente, enunciemos ahora la propiedad general que esperamos poder demostrar como un teorema.

Teorema 6-5b. Para dos números reales cualesquiera a y b, $-(a + b) = (-a) + (-b)$.

Demostración. Tenemos que demostrar que $(-a) + (-b)$ y $-(a + b)$ son nombres de un mismo número. Comprobemos que $(-a) + (-b)$ se comporta como el opuesto de $(a + b)$. Examinamos la expresión $(a + b) + \left((-a) + (-b)\right)$, pues si ésta es 0, $(-a) + (-b)$ será el opuesto de $(a + b)$.

$$\begin{aligned} (a + b) + \left((-a) + (-b)\right) &= a + b + (-a) + (-b) \\ &= \left(a + (-a)\right) + \left(b + (-b)\right) && \text{(¿Por qué?)} \\ &= 0 + 0 && \text{(¿Por qué?)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Y así encontramos que para todos los números reales a y b,

$$(-a) + (-b)$$

es un inverso aditivo de $(a + b)$, y que, como el inverso aditivo es único,

$$-(a + b) \quad \text{y} \quad (-a) + (-b)$$

son nombres de un mismo número.

Conjunto de problemas 6-5b

1. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son ciertos para todos los números reales? (Sugerencia: Recuerda que el opuesto de la suma de dos números es la suma de sus opuestos.)

   (a) $-(x + y) = (-x) + (-y)$
   (b) $-x = -(-x)$
   (c) $-(-x) = x$
   (d) $-\left(x + (-2)\right) = (-x) + 2$

(e) $-\left(a + (-b)\right) = (-a) + b$ (g) $-\left(x + (-x)\right) = x + (-x)$

(f) $\left(a + (-b)\right) + (-a) = b$

2. Justifica cada paso de la siguiente demostración: Para todos los números $x, y, z,$

$$(-x) + \left(y + (-z)\right) = y + \left(-(x + z)\right).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}(-x) + \left(y + (-z)\right) &= (-x) + \left((-z) + y\right)\\ &= \left((-x) + (-z)\right) + y\\ &= \left(-(x + z)\right) + y\\ &= y + \left(-(x + z)\right).\end{aligned}$$

3. ¿Es $-\left(3 + 6 + (-4) + 5\right) = (-3) + (-6) + 4 + (-5)$? ¿Qué podrías decir del opuesto de la suma de más de dos números? Determina cuáles de los siguientes enunciados son ciertos:

(a) $-\left((-2) + 6 + (-5)\right) = 2 + (-6) + 5$

(b) $-\left(3a + (-b) + (-2)\right) = 3a + b + 2$

(c) $-\left(a + (-b) + (-5c) + .7d\right) = (-a) + b + 5c + (-.7d)$

(d) $-\left(\frac{5}{3}x + 2y + (-2a) + (-3b)\right) = (-\frac{5}{3}x) + 2y + (-2a) + (-3b)$

*4. Ofrece un argumento para la conclusión a que llegaste en la segunda pregunta del problema 3.

*5. Demuestra la siguiente propiedad de la suma:

Para cualquier número real a, cualquier número real b y cualquier número real c,

si $a + c = b + c$, entonces $a = b$.

6-6. Resumen

Hemos definido la suma de los números reales como sigue:

La suma de dos números positivos nos es conocida de la aritmética.

La suma de dos números negativos es negativa; el valor absoluto de esta suma es la suma de los valores absolutos de los números.

La suma de dos números, uno de los cuales es positivo (ó 0) y el otro negativo, se obtiene de la manera siguiente:

El valor absoluto de la suma es la diferencia de los valores absolutos de los números.

La suma es positiva si el número positivo tiene el valor ~~absoluto mayor.~~

La suma es negativa si el número negativo tiene el valor absoluto mayor.

La suma es 0 si el número positivo y el negativo tienen el mismo valor absoluto.

Nos hemos convencido de que las siguientes propiedades son válidas para la suma de números reales:

<u>Propiedad conmutativa de la suma</u>: Para dos números reales, cualesquiera a y b:

$$a + b = b + a.$$

<u>Propiedad asociativa de la suma</u>: Para tres números reales cualesquiera a, b, y c,

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

<u>Propiedad aditiva de los opuestos</u>: Para todo número real a,

$$a + (-a) = 0.$$

<u>Propiedad aditiva del 0</u>: Para todo número real a,

$$a + 0 = a.$$

<u>Propiedad aditiva de la igualdad</u>: Para tres números reales cualesquiera a, b, y c,

$$\text{si } a = b, \text{ entonces } a + c = b + c.$$

Hemos usado la propiedad aditiva de la igualdad para determinar los conjuntos de validez de enunciados abiertos.

Hemos demostrado que el inverso aditivo es único; es decir, que cada número tiene exactamente un inverso aditivo que llamamos su opuesto.

Hemos descubierto y demostrado que el opuesto de la suma de dos números es lo mismo que la suma de sus opuestos.

Problemas de repaso

1. Halla un nombre corriente para cada uno de los siguientes:

   (a) $3\left(8 + (-6)\right)$

   (b) $(-3) + 2 \times 3$

   (c) $2 \times 7 + (-14)$

   (d) $(-\frac{2}{3}) + \frac{3}{5}$

   (e) $|-6| \cdot |3| + (-3)$

   (f) $6(1 + |-4|)$

2. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son ciertos?

   (a) $3 + (-8) = (-8) + 3$

   (b) $|-8| + (-8) = 0$

   (c) $6 \times 3 - 3 = 0$

   (d) $\left(2 + (-3)\right) + 6 = 2 + \left((-3) + 6\right)$

   (e) $5 - 3 \geq |-5| - |-3|$

   (f) $5(|10 - 7|) < 3 \times 3 \times 2$

   (g) $6 - 6 = 6 + (-6)$

3. Indica cómo pueden utilizarse las propiedades de la suma para explicar por qué cada uno de los siguientes enunciados es cierto:

   (a) $\frac{2}{3} + \left(7 + (-\frac{2}{3})\right) = 7$

   (b) $|-5| + (-.36) + |-.36| = 10 + \left(2 + (-7)\right)$

4. Halla el conjunto de validez de cada uno de los siguientes:

   (a) $\frac{5}{9} + 32 = x + \frac{5}{9}$

   (b) $x + 5 + (-x) = 12 + (-x) + (-3)$

   (c) $3x + \frac{15}{2} + x = 10 + 3x + (-\frac{7}{2})$

   (d) $|x| + 3 = 5 + |x|$

5. ¿Para qué conjunto de números es cierto cada uno de los siguientes enunciados?

   (a) $|3| + |a| > |-3|$

   (b) $|3| + |a| = |-3|$

   (c) $|3| +$ [illegible] $|-3|$

6. Se suman dos números. ¿Qué sabes acerca de ellos si
   (a) la suma es negativa?
   (b) la suma es 0?
   (c) la suma es positiva?
7. Un vendedor tenía un sueldo básico de $80 semanales. Además recibía una comisión del 3% sobre el total de sus ventas. Durante una semana él ganó $116. ¿A cuánto subieron sus ventas esa semana? Escribe un enunciado abierto para este problema.
8. Una cierta figura tiene cuatro lados. Tres de ellos miden 8 pies, 10 pies y 5 pies, respectivamente. ¿Cuál es la longitud del cuarto lado?
   (a) Escribe un enunciado abierto compuesto para este problema.
   (b) Construye la gráfica del conjunto de validez del enunciado abierto.
9. Si a, b y c son números de la aritmética, escribe cada una de las sumas indicadas como un producto indicado y cada uno de los productos indicados como una suma indicada:
   (a) $(2b + c)a$
   (b) $2a(b + c)$
   (c) $3a + 3b$
   (d) $5x + 10ax$
   (e) $x^2y + xy$
   (f) $6a^2b + 2ab^2$
   (g) $ab(ac + 3b)$
   (h) $3a(a + 2b + 3c)$
10. Dado el conjunto $\{-5, 0, \frac{3}{4}, -.75, 5\}$,
   (a) ¿Es este conjunto cerrado respecto de la operación de tomar el opuesto de cada uno de sus elementos?
   (b) ¿Es este conjunto cerrado respecto de la operación de tomar el valor absoluto de cada elemento?
   (c) Si un conjunto es cerrado respecto de la operación de tomar el opuesto, ¿será cerrado también respecto de la operación de tomar el valor absoluto? ¿Por qué?
11. Dado el conjunto $\{-5, 0, \frac{3}{4}, 5, 7\}$,
   (a) ¿Es este conjunto cerrado respecto de la operación de tomar el valor absoluto de cada uno de sus elementos?
   (b) ¿Es este conjunto cerrado respecto de la operación de tomar el opuesto de cada elemento?

(c) Si un conjunto es cerrado respecto de la operación de tomar el valor absoluto, ¿será también cerrado respecto de la operación de tomar el opuesto? ¿Por qué?

12. Dos automóviles parten al mismo tiempo de una ciudad corriendo en la misma dirección. Escribe una frase abierta para representar el tiempo que tarda el más veloz para adelantar m millas al más lento, si las velocidades a que corren los automóviles son 30 y 20 millas por hora, respectivamente.

Capítulo 7

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACION

7-1. Multiplicación de números reales

Nos toca ahora decidir cómo debemos multiplicar dos números reales para obtener otro número real. Por lo pronto, todo lo que podemos decir es que sabemos cómo multiplicar dos números no negativos.

Aquí, como en la definición de la suma, es de fundamental importancia que mantengamos la "estructura" del sistema numérico. Sabemos que si a, b, c son números cualesquiera de la aritmética, entonces

$$ab = ba,$$
$$(ab)c = a(bc),$$
$$a \cdot 1 = a,$$
$$a \cdot 0 = 0,$$
$$a(b + c) = ab + ac.$$

(¿Qué nombres les dimos a estas propiedades de la multiplicación?) Cualquiera que sea el significado que le demos al producto de dos números reales, debemos asegurarnos que está de acuerdo con los productos que conocemos de números reales no negativos y además que las anteriores propiedades de la multiplicación también son válidas para todos los números reales.

Considera algunos productos posibles:

$$(2)(3), \ (3)(0), \ (0)(0), \ (-3)(0), \ (3)(-2), \ (-2)(-3).$$

(¿Comprenden estos ejercicios ejemplos de todos los casos de multiplicación de números positivos y negativos y cero?) Observa que los tres primeros productos incluyen solamente números no negativos y, por lo tanto, ya han sido determinados:

$$(2)(3) = 6, \quad (3)(0) = 0, \quad (0)(0) = (0).$$

Tratemos ahora de ver cuáles deberán ser los tres productos restantes de manera que se conserven las propiedades básicas de la multiplicación arriba enunciadas. En primer lugar, si queremos que la propiedad multiplicativa del cero sea válida para todos los números reales, deberemos obtener $(-3)(0) = 0$. Podríamos conseguir los otros dos productos así:

$0 = (3)(0)$	
$0 = (3)\big(2 + (-2)\big)$,	escribiendo $0 = 2 + (-2)$; (Notarás que se introduce un número negativo en la discusión.)
$0 = (3)(2) + (3)(-2)$,	si la propiedad distributiva va a ser válida para los números reales;
$0 = 6 + (3)(-2)$,	ya que $(3)(2) = 6$.

De la unicidad del inverso aditivo sabemos que el único número real que da 0 al sumarlo a 6 es el número -6. Por lo tanto, si se desea que las propiedades de los números se conserven, el único valor posible que podemos aceptar para $(3)(-2)$ es -6.

Ahora, seguimos un procedimiento parecido para contestar la segunda pregunta.

$0 = (-2)(0)$,	si la propiedad multiplicativa del 0 va a ser válida para los números reales;
$0 = (-2)\big(3 + (-3)\big)$,	escribiendo $0 = 3 + (-3)$;
$0 = (-2)(3) + (-2)(-3)$,	si la propiedad distributiva va a ser válida para los números reales;
$0 = (3)(-2) + (-2)(-3)$,	si la propiedad conmutativa va a ser válida para los números reales;
$0 = (-6) + (-2)(-3)$,	por el resultado anterior que dio $(3)(-2) = -6$.

Hemos llegado a un punto en que $(-2)(-3)$ tiene que ser el opuesto de -6; por lo tanto, si queremos que las propiedades de la multiplicación sean válidas para los números reales, entonces $(-2)(-3)$ tiene que ser 6.

Pensemos ahora en estos ejemplos en términos de valor absoluto.

Recordemos que el producto de dos números positivos es positivo. Entonces, ¿cuáles son los valores de $|3||2|$ y $|-2||-3|$? ¿En qué relación están con $(3)(2)$ y $(-2)(-3)$, respectivamente? Compara también

$(-3)(4)$ y $-(|-3||4|)$; $(-5)(-3)$ y $|-5||-3|$; $(0)(-2)$ y $|0||-2|$.

Esta es la indicación que necesitábamos. Si queremos que la estructura del sistema numérico sea para los números reales la misma que para los números de la aritmética, tenemos que definir el producto de dos números reales a, b, de la siguiente forma:

Si a, b son ambos negativos o ambos no negativos, entonces $ab = |a||b|$.

Si uno de los números a, b es no negativo y el otro es negativo, entonces $ab = -(|a||b|)$.

Es importante que nos demos cuenta de que, para dos números reales cualesquiera a y b, $|a|$ y $|b|$ son números de la aritmética; y ya conocemos el producto $|a||b|$. (¿Por qué?) Así, el producto $|a||b|$ es un número no negativo, y el producto ab será $|a||b|$ o su opuesto. Una vez más hemos usado solamente las operaciones ya conocidas: el multiplicar números positivos ó cero, y el hallar opuestos. Para recordar la definición, llena los espacios en blanco de las oraciones que siguen con las palabras "positivo", "negativo" o "cero".

El producto de dos números positivos es un número ________.
El producto de dos números negativos es un número ________.
El producto de un número negativo y uno positivo es un número ________.
El producto de un número real y cero es ________.

Toda vez que el producto ab es bien $|a||b|$ o su opuesto, y como $|a||b|$ es no negativo, podemos enunciar la siguiente propiedad de la multiplicación:

Para dos números reales cualesquiera a, b,

$$|ab| = |a||b|.$$

Conjunto de problemas 7-1

1. Utiliza la definición de multiplicación para calcular los siguientes productos:

<u>Ejemplos</u>.

$$(5)(-3) = -(|5||-3|) = -15$$
$$(-5)(-3) = (|-5||-3|) = 15$$
$$(-5)(3) = -(|-5||3|) = -15$$

(a) $(-7)(-8)$ (d) $(-18)(\frac{3}{5})$

(b) $(\frac{2}{3})(-12)$ (e) $(-\frac{3}{4})(-\frac{2}{5})$

(c) $|(-3)(2)|(-2)$ (f) $|-2|\left((-3) + |-3|\right)$

2. Calcula los siguientes productos:

(a) $(-\frac{1}{2})(-4)$ (g) $|-3|(-4) + 7$

(b) $\left((-\frac{1}{2})(2)\right)(-5)$ (h) $|3||-2| + (-6)$

(c) $(-\frac{1}{2})\left((2)(-5)\right)$ (i) $(-3)|-2| + (-6)$

(d) $(-3)(-4) + (-3)(7)$ (j) $(-3)\left(|-2| + (-6)\right)$

(e) $(-3)\left((-4) + 7\right)$ (k) $(-0.5)\left(|-1.5| + (-4.2)\right)$

(f) $(-3)(-4) + 7$

3. Si $x = -2$, $y = 3$, $a = -4$, halla los valores de las siguientes expresiones:

(a) $2x + 7y$

(b) $3(-x) + \left((-4)y + 7(-a)\right)$

(c) $x^2 + 2(xa) + a^2$

(d) $(x + a)^2$

(e) $x^2 + \left(3|a| + (-4)|y|\right)$

(f) $|x + 2| + (-5)|(-3) + a|$

4. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son ciertos?

(a) $2x + 8 = 12$, cuando $x = -10$

(b) $2(-y) + 8 = 28$, cuando $y = -10$

(c) $(-3)\left((2)(-x)\right) + 8 \neq 20$, cuando $x = 2$

(d) $(-5)\left((-b)(-4) + 30\right) < 0$, cuando $b = 2$

(e) $|x + 3| + (-2)\left(|x + (-4)|\right) \geq 1$, cuando $x = 2$

5. Halla los conjuntos de validez de los siguientes enunciados abiertos y construye sus gráficas.

Ejemplo. Halla el conjunto de validez de $(3)(-3) + c = 3(-4)$.

Si $(3)(-3) + c = 3(-4)$ es cierto para alguna c,
entonces $-9 + c = -12$ es cierto para la misma c;
$(-9 + c) + 9 = -12 + 9$ es cierto para la misma c;
$c = -3$.

Si $c = -3$,
entonces el miembro izquierdo es $(3)(-3) + (-3) = -12$,
y el miembro derecho es $3(-4) = -12$.

Por lo tanto, el conjunto de validez es $\{-3\}$.

(a) $x + (-3)(-4) = 8$
(b) $2(-2) + y = 3(-2)$
(c) $x + 2 = 3(-6) + (-4)(-8)$
(d) $x + (-5)(-6) = (-2)(3)$
(e) $x = (-5)(-6) + |-2|(3)$
(f) $x > (-4)(-2) + (-5)(2)$
(g) $|x| = (-\frac{2}{3})(7) + (-1)(-5)$

6. Dado el conjunto $S = \{1, -2, -3, 4\}$, halla el conjunto P de todos los productos de pares de elementos de S; es decir, productos obtenidos al multiplicar cada elemento de S por cada elemento de S.

7. Dado el conjunto R de todos los números reales, halla el conjunto Q de todos los productos de pares de elementos de R. ¿Será Q el mismo conjunto R? ¿Podrías asegurar que R es cerrado respecto de la multiplicación?

8. Dado el conjunto N de todos los números reales negativos, halla el conjunto T de todos los productos de pares de elementos de N. ¿Será cerrado respecto de la multiplicación el conjunto de los números reales negativos?

9. Dado el conjunto $V = \{1, -2, -3, 4\}$, halla el conjunto K de todos los números positivos obtenidos al multiplicar pares de elementos de V.

*10. Demuestra que el valor absoluto del producto ab es el producto $|a| \cdot |b|$ de los valores absolutos; es decir,

$$|ab| = |a||b|.$$

11. ¿Qué puedes decir acerca de dos números reales a y b en cada uno de estos casos?
(a) ab es positivo.
(b) ab es negativo.
(c) ab es positivo y a es positivo.
(d) ab es positivo y a es negativo.
(e) ab es negativo y a es positivo.
(f) ab es negativo y a es negativo.

*12. Justifica cada uno de los pasos enumerados en la demostración del teorema siguiente:

<u>Teorema</u>. Si a y b son números tales que ambos a y ab son positivos, entonces b será positivo también.

<u>Demostración</u>. Suponemos que $0 < a$ y $0 < ab$. Entonces:

1. Uno de los siguientes es cierto: $b < 0$, $b = 0$, $0 < b$.
2. Si $b = 0$, entonces $ab = 0$.
   Por lo tanto, "$b = 0$" es falso, ya que las expresiones "$ab = 0$" y "$0 < ab$" se contradicen.
3. Si $b < 0$, entonces $ab = -(|a||b|)$.
4. Si $b < 0$, entonces ab será negativo.
   Por lo tanto, "$b < 0$" es falso, ya que las expresiones "ab es negativo" y "$0 < ab$" se contradicen.
   Por lo tanto, $0 < b$; es decir, b es positivo, ya que ésta es la única posibilidad.

7-2. <u>Propiedades de la multiplicación</u>

La definición de la multiplicación de números reales que dimos en la sección anterior fue <u>sugerida por</u> las propiedades de la estructura, las cuales deseamos conservar para todos los números. Por otra parte, de hecho no hemos <u>supuesto</u> estas propiedades, porque pudimos haber dado la definición al principio sin hacer referencia a ellas. Sin embargo, ahora que hemos formulado una definición para la multiplicación, conviene que nos percatemos de que esta definición conduce a las propiedades deseadas.

Dicho de otra manera, necesitamos <u>demostrar</u> que la multiplicación así definida efectivamente tiene dichas propiedades. Toda vez que la definición se enuncia en términos de operaciones con números positivos y cero y la de tomar opuestos, éstas serán las únicas operaciones disponibles para las demostraciones.

<u>Propiedad multiplicativa del 1</u>: Para todo número real a,

$$a \cdot 1 = a.$$

<u>Demostración</u>. Si a es positivo o cero, sabemos que $a(1) = a$. Si a es negativo, nuestra definición de multiplicación afirma que

$$\begin{aligned} a \cdot 1 &= -(|a| \cdot 1) \\ &= -|a| \\ &= a. \end{aligned}$$

Trata de justificar cada paso de la demostración anterior.

<u>Propiedad multiplicativa del 0</u>: Para todo número real a,

$$a \cdot 0 = 0.$$

Escribe la demostración de esta propiedad.

<u>Propiedad conmutativa de la multiplicación</u>: Para dos números reales cualesquiera a, b,

$$ab = ba.$$

<u>Demostración</u>. Si por lo menos uno de los números a, b, es cero, entonces $ab = ba$. (¿Por qué?) Si a <u>y</u> b son ambos positivos o ambos negativos, entonces

$$ab = |a||b|, \quad y \quad ba = |b||a|.$$

Como $|a|$ y $|b|$ son números de la aritmética,

$$|a||b| = |b||a|.$$

Por tanto,

$$ab = ba$$

en estos dos casos.

Si uno de los dos números a, b es positivo o cero y el otro es negativo, entonces

$$ab = -(|a||b|) \quad y \quad ba = -(|b||a|).$$

Toda vez que

$$|a||b| = |b||a|$$

y como los opuestos de números iguales son iguales,

$$-(|a||b|) = -(|b||a|).$$

Por lo tanto, en este caso tenemos también que

$$ab = ba.$$

Hemos presentado aquí una demostración completa de la propiedad conmutativa para todos los números reales. Para ello nos basamos en la definición precisa de la multiplicación de números reales.

Conjunto de problemas 7-2a

1. Aplica las propiedades ya demostradas a los siguientes ejercicios:

   (a) $(-\frac{3}{4})\left((-\frac{4}{3})(-17)\right)$

   (b) $(-8)\left(5 + (-6)(\frac{2}{3})\right)$

   (c) $(-4)\left((-\frac{3}{2})(4) + (-\frac{6}{5})(-5)\right)$

   (d) $\left((4)(-6) + (-8)(-3)\right)(-\frac{47}{13})$

2. Ilustra la demostración de la propiedad conmutativa reemplazando a y b como sigue:

   (a) $(-3)(5)$ Ejemplo. $(-3)(5) = -(|-3|\,|5|)$
   $= -15$
   $(5)(-3) = -(|5|\,|-3|)$
   $= -15$

   (b) $(3)(-5)$

   (c) $(-\frac{2}{3})(0)$

   (d) $(-3)(-4)$

   (e) $(-7)(\frac{5}{7})$

Propiedad asociativa de la multiplicación: Para tres números reales cualesquiera a, b, c,

$$(ab)c = a(bc).$$

Demostración. Debemos demostrar que la propiedad es cierta para un negativo, dos negativos, o tres negativos, lo cual sería extenso. Se puede simplificar si observamos que

$$\begin{aligned} |(ab)c| &= |ab|\,|c| \qquad (\text{¿Por qué?}) \\ &= |a|\,|b|\,|c|, \end{aligned}$$

y también que

$$\begin{aligned} |a(bc)| &= |a|\,|bc| \\ &= |a|\,|b|\,|c|. \end{aligned}$$

Así $|(ab)c| = |a(bc)|$ para todos los números reales a, b, c.

Esto reduce la demostración de la propiedad asociativa de la multiplicación al problema de demostrar que $(ab)c$ y $a(bc)$ son ambos positivos, ambos cero, o ambos negativos.

Por ejemplo, si $(ab)c$ y $a(bc)$ son ambos negativos, entonces $|(ab)c| = -\big((ab)c\big)$ y $|a(bc)| = -\big(a(bc)\big)$. Así, $-\big(a(bc)\big) = -\big((ab)c\big)$ y por lo tanto $a(bc) = (ab)c$.

Si uno de a, b, c es cero, entonces $(ab)c = 0$ y $a(bc) = 0$. (¿Por qué?) Por lo tanto, en este caso $(ab)c = a(bc)$.

Si a, b, c son todos distintos de cero, tenemos que considerar ocho casos diferentes, que dependen de cuáles son los números positivos y cuáles negativos, según se muestra en la tabla que sigue:

Si	a	es	+	+	+	+	-	-	-	-
y	b	es	+	+	-	-	+	+	-	-
y	c	es	+	-	+	-	+	-	+	-
entonces	ab	es				-				
	bc	es				+				
	(ab)c	es				+				
	a(bc)	es				+				

Se llenó la cuarta columna en la que a es positivo y b y c son negativos. En este caso, ab es negativo y bc es positivo. Por lo tanto, $(ab)c$ es positivo y $a(bc)$ es positivo. Por consiguiente, en este caso, $(ab)c = a(bc)$.

La propiedad asociativa establece que al multiplicar tres números podemos tomar primero el producto de un par cualquiera de números que aparezcan adyacentes. Como consecuencia de la asociatividad y de la conmutatividad, podemos escribir productos de números sin utilizar símbolos de agrupación y efectuar la multiplicación en cualquier grupo y en cualquier orden.

Conjunto de problemas 7-2b

1. Copia la tabla anterior y llénala. Luego, utilízala para comprobar los casos restantes y completa la demostración.

2. En cada uno de los siguientes, verifica que los dos numerales son nombres del mismo número:

   (a) $((3)(2))(-4)$ y $(3)((2)(-4))$
   (b) $((3)(-2))(-4)$ y $(3)((-2)(-4))$
   (c) $((3)(-2))(4)$ y $(3)((-2)(4))$
   (d) $((-3)(2))($[illegible] y $(-3)((2)(-4))$
   (e) $((-3)(-2))(-4)$ y $(-3)((-2)(-4))$
   (f) $((3)(-2))(0)$ y $(3)((-2)(0))$

3. Explica cómo las propiedades asociativa y conmutativa pueden ayudarnos a efectuar de la manera más sencilla las siguientes multiplicaciones:

   (a) $(-5)(17)(-20)(3)$
   (b) $(\frac{2}{3})(\frac{7}{5})(-\frac{3}{4})$
   (c) $(\frac{1}{3})(\frac{6}{5})(-21)$
   (d) $(-\frac{2}{3})(\frac{4}{5})(\frac{3}{2})(-\frac{5}{4})$
   (e) $(\frac{1}{5})(-19)(-3)(50)$
   (f) $(-7)(-25)(3)(-4)$

Veamos ahora una propiedad que relaciona las operaciones de la suma y la multiplicación.

Propiedad distributiva. Para tres números reales cualesquiera a, b, c,

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Consideraremos solamente algunos ejemplos:

$(5)\big(2 + (-3)\big) = ?$ y $(5)(2) + (5)(-3) = ?$

$(5)\big((-2) + (-3)\big) = ?$ y $(5)(-2) + (5)(-3) = ?$

$(-5)\big((-2) + (-3)\big) = ?$ y $(-5)(-2) + (-5)(-3) = ?$

La propiedad distributiva es válida para todos los números reales. Esto se puede demostrar aplicando las definiciones de la suma y de la multiplicación a todos los casos posibles, lo que resultaría aún más tedioso que la demostración de la asociatividad.

Conjunto de problemas 7-2c

Utiliza, si es necesario, la propiedad distributiva para efectuar, de la manera menos trabajosa las operaciones indicadas:

1. $(-9)(-92) + (-9)(-8)$
2. $(.63)(6) + (-1.63)(6)$
3. $(-\frac{3}{2})\big((-4) + 6\big)$
4. $(-7)(-\frac{3}{4}) + (-7)(\frac{1}{3})$
5. $(-\frac{3}{4})\big((-93) + (-7)\big)$
6. $(-7)(\frac{2}{3}) + (-5)(\frac{2}{3})$

Podemos usar la propiedad distributiva para demostrar otra propiedad muy útil de la multiplicación.

Teorema 7-2a. Para todo número real a,

$$(-1)(a) = -a.$$

Para demostrar este teorema, debemos verificar que $(-1)a$ es el opuesto de a; es decir, que

$$a + (-1)a = 0.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} a + (-1)a &= 1(a) + (-1)a && \text{(¿Por qué?)} \\ &= \big(1 + (-1)\big)a && \text{(¿Por qué?)} \\ &= 0 \cdot a && \text{(¿Por qué?)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Aquí hemos comprobado que $(-1)a$ es un inverso aditivo de a. Como también sabemos que $-a$ es un inverso aditivo de a y que el inverso aditivo es único, hemos demostrado que

$$(-1)a = -a.$$

Conjunto de problemas 7-2d

Emplea el teorema 7-2a para demostrar los siguientes teoremas:

1. Para dos números reales cualesquiera a y b, $(-a)(b) = -(ab)$.
2. Para dos números reales cualesquiera a y b, $(-a)(-b) = ab$.
3. Escribe nombres corrientes para los siguientes productos:

(a) $(-5)(ab)$ (d) $(-5c)(\frac{3}{5}d)$

(b) $(-2a)(-5c)$ (e) $(\frac{2}{9}bc)(-6a)$

(c) $(3x)(-7y)$ (f) $(-0.5d)(1.2c)$

7-3. Uso de las propiedades de ~~la~~ multiplicación

En los problemas anteriores vimos que ahora podemos escribir

$$-5a \text{ en vez de } (-5)a,$$
$$-xy \text{ en vez de } (x)(-y),$$
$$6b \text{ en vez de } (-6)(-b).$$

De hecho,

$$-ab = -(ab) = (-a)(b) = (a)(-b).$$

Ahora que podemos multiplicar números reales y disponemos de las propiedades de la multiplicación de números reales, tenemos una base sólida para trabajar con una variedad de situaciones que se presentan en el álgebra.

Conjunto de problemas 7-3a

1. Utiliza la propiedad distributiva para escribir las siguientes expresiones como sumas indicadas:

(a) $3(x + 5)$ (f) $(-1)(y + (-z) + 5)$

(b) $(7 + (-k))a$ (g) $(13 + x)y$

(c) $2(a + b + c)$ (h) $(-8)((-4) + (-m))$

(d) $(-9)(a + b)$ (i) $(-g)(r + 1 + (-s) + (-t))$

(e) $((-p) + q)(-3)$

2. Al hacer el problema 1 probablemente tuviste que emplear la siguiente propiedad: Para dos números reales cualesquiera a y b,

$$(-a)(-b) = ab.$$

Indica las partes del problema en que la usaste.

3. Utiliza la propiedad distributiva para escribir las siguientes frases como productos indicados:

(a) $5a + 5b$

(b) $(-9)b + (-9)c$

(c) $12 + 18$

(d) $3x + 3y + 3z$

(e) $km + kp$

(f) $(a + b)x + (a + b)y$

(g) $7(\frac{1}{8}) + 3(\frac{1}{8})$

(h) $(-6)a^2 + (-6)b^2$

(i) $ca + cb + c$

(j) $2a + (-2b)$

4. En los ejercicios siguientes, aplica la propiedad distributiva, y otras propiedades que sean necesarias:

<u>Ejemplo</u>. $3x + 2x = (3 + 2)x = 5x$

(a) $12t + 7t$

(b) $9a + (-15a)$

(c) $(-5)y + 14y$

(d) $12z + z$ (Sugerencia: $z = 1 \cdot z$)

(e) $(-3m) + (-8m)$

(f) $\frac{1}{2}a + \frac{3}{2}a$

(g) $(1.6)b + (2.4)b$

(h) $(-5)x + 2x + 11x$

(i) $3a + 7y$ (¡Cuidado!)

(j) $4p + 3p + 9p$

(k) $8r + (-14r) + 6r$

(l) $6a + (-4a) + 5b + 14b$

En una frase expresada como una suma indicada $A + B$, A y B se llaman <u>términos</u> de la frase; si la frase es del tipo $A + B + C$, los términos serán A, B y C; y así sucesivamente. La propiedad distributiva puede ser muy útil para simplificar algunas frases. Así, encontramos que

$$5a + 8a = (5 + 8)a = 13a$$

es una simplificación posible y deseable. Sin embargo, en la frase

$$5x + 8y$$

no es posible tal simplificación. ¿Por qué?

A veces podemos aplicar la propiedad distributiva a algunos, pero no a todos, los términos de una expresión. Así,

$$6x + (-9)x^2 + 11x^2 + 5y = 6x + ((-9) + 11)x^2 + 5y = 6x + 2x^2 + 5y.$$

Frecuentemente tendremos la oportunidad de hacer esta clase de simplificación, a la que por conveniencia llamaremos <u>reducir términos</u>. Por lo general haremos el paso intermedio mentalmente. Así,

$$15w + (-9)w = 6w.$$

<u>Conjunto de problemas 7-3b</u>

1. Reduce términos en las siguientes frases:

   (a) $3x + 10x$

   (b) $(-9)a + (-4a)$

   (c) $11k + (-2)k$

   (d) $(-27b) + 30b$

   (e) $17n + (-16)n$

   (f) $x + 8x$ (Sugerencia: $x = 1 \cdot x$)

   (g) $(-15a) + a$

   (h) $\frac{7}{8}a + \frac{9}{8}a$

   (i) $5p + 4p + 8p$

   (j) $7x + (-10x) + 3x$

   (k) $12a + 5c + (-2c) + 3c^2$

   (l) $6a + 4b + c$

   (m) $9p + 4q + (-3)p + 7q$

   (n) $4x + (-2)x^2 + (-5x) + 5x^2 + 1$

2. Además de la propiedad distributiva, ¿qué otras propiedades de los números reales utilizaste en el problema 1, partes (f), (g), (k) y (m)?

3. Halla el conjunto de validez de cada uno de los siguientes enunciados abiertos: (Combina términos en cada frase cuando sea posible.)

   (a) $6x + 9x = 30$

   (b) $(-3a) + (-7a) = 40$

   (c) $x + 5x = 3 + 6x$

   (d) $3y + 8y + 9 = -90$

   (e) $14x + (-14)x = 15$

   (f) $(-3a) + 3a + 5 = 5$

   (g) $x + 2x + 3x = 42$

   (h) $x + 9 = 20$

   (i) $2y = y + 1$

   (j) $12 = 4y + 2y$

7-4. Uso ulterior de las propiedades de la multiplicación

Hemos visto cómo la propiedad distributiva nos permite reducir términos de una frase. Las propiedades de la multiplicación son también útiles en ciertas técnicas del álgebra relacionadas con productos que contienen frases.

Ejemplo 1. "$(3x^2y)(7ax)$" puede escribirse en forma más sencilla como "$21ax^3y$".

Los pasos indicados más adelante demuestran que esto es cierto. Justifica cada uno de ellos.

$$\begin{aligned}(3x^2y)(7ax) &= 3 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot 7 \cdot a \cdot x \\ &= 3 \cdot 7 \cdot a \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \\ &= (3 \cdot 7)a(x \cdot x \cdot x)y \\ &= 21ax^3y.\end{aligned}$$

(Observa que escribimos $x \cdot x \cdot x$ como x^3.)

Aun cuando en la práctica no escribimos todos estos pasos, debemos siempre darnos cuenta de cómo estas simplificaciones dependen de las propiedades fundamentales de la multiplicación, y estar dispuestos a explicar en cualquier momento los pasos intermedios.

Conjunto de problemas 7-4a

Simplifica las siguientes expresiones y, en el caso del problema 11, escribe los pasos que explican la simplificación:

1. $(-3)(8b)$
2. $(4c)(-3c)$
3. $(9b)(-8)$
4. $(-6y)(-7z)$
5. $(-3bc)(-6c)$
6. $(5w^3)(-3w)$
7. $(4y^2)(-3ay)$
8. $(\frac{3}{4}abc)(\frac{1}{2}bcd)$
9. $(-12pq)(-4pq)$
10. $(20b^2c^2)(10bd)$
11. $(\frac{1}{3}ab)(9a^2)$
12. $(-7b)(-4a)c$
13. $(-2x)(3ax)(-4a)$
14. $(6ab)(-2abc)(-a)$

Podemos combinar el método utilizado en los ejercicios anteriores con la propiedad distributiva para efectuar así multiplicaciones tales como las siguientes:

$$(-3a)\left(2a + 3b + (-5)c\right) = (-6a^2) + (-9ab) + 15ac.$$

Además, toda vez que demostramos en la sección 7-2 que

$$-a = (-1)a,$$

podemos, de nuevo con la ayuda de la propiedad distributiva, simplificar expresiones tales como

$$\begin{aligned} -\left(x^2 + (-7x) + (-6)\right) &= (-1)\left(x^2 + (-7x) + (-6)\right) \\ &= (-x^2) + 7x + 6. \end{aligned}$$

Conjunto de problemas 7-4b

Escribe las siguientes expresiones en la forma indicada en los ejemplos anteriores:

1. $(-3)(c + d)$
2. $2\left(8 + (-3b) + 7b^2\right)$
3. $6x(3y + z)$
4. $(-3)b^2c^2(4b + 7c)$
5. $5x(x + 6)$
6. $10b\left(2b^2 + 7b + (-4)\right)$
7. $-(p + q + r)$
8. $(-7)\left(3a + (-5b)\right)$
9. $6xy(2x + 3xy + 4y)$
10. $-(a^2 + 2ab + b^2)$
11. $(-4c)\left(2a + (-5b) + (-c)\right)$
12. $(-x)\left(x + (-1)\right)$

Como recordarás, del trabajo que hiciste en el capítulo 3, en algunas ocasiones la propiedad distributiva se utiliza varias veces en un mismo ejemplo.

Ejemplo 1.
$$\begin{aligned} (x + 3)(x + 2) &= (x + 3)x + (x + 3)2 \\ &= x^2 + 3x + 2x + 6 \\ &= x^2 + (3 + 2)x + 6 \\ &= x^2 + 5x + 6 \end{aligned}$$

<u>Ejemplo 2</u>. $\left(a + (-7)\right)(a + 3) = \left(a + (-7)\right)a + \left(a + (-7)\right)3$
$$= a^2 + (-7)a + 3a + (-21)$$
$$= a^2 + \left((-7) + 3\right)a + (-21)$$
$$= a^2 + (-4)a + (-21)$$

<u>Ejemplo 3</u>. $(x + y + z)(b + 5) = (x + y + z)b + (x + y + z)5$
$$= bx + by + bz + 5x + 5y + 5z.$$

<u>Conjunto de problemas 7-4c</u>

1. Efectúa las siguientes multiplicaciones:
   (a) $(x + 8)(x + 2)$ (d) $(a + 2)(a + 2)$
   (b) $\left(y + (-3)\right)\left(y + (-5)\right)$ (e) $(x + 6)\left(x + (-6)\right)$
   (c) $\left(6a + (-5)\right)\left(a + (-2)\right)$ (f) $(y + 3)\left(y + (-3)\right)$
2. Demuestra que para los números reales a, b, c, d,
$$(a + b)(c + d) = ac + (bc + ad) + bd.$$
   (Observa que ac es el producto de los primeros términos, bd es el producto de los segundos términos y $(bc + ad)$ es la suma de los productos restantes.)
3. Efectúa las siguientes multiplicaciones:
   (a) $(a + 3)(a + 1)$ (d) $\left(y + (-4)\right)\left(y^2 + (-2y) + 1\right)$
   (b) $(2x + 3)(3x + 4)$ (e) $(m + 3)(m + 3)$
   (c) $(a + c)(b + d)$ (f) $(2 + z)(7 + z)$
4. Efectúa las siguientes multiplicaciones:
   (a) $(3a + 2)(a + 1)$ (d) $\left(2pq + (-8)\right)(3pq + 7)$
   (b) $(x + 5)(4x + 3)$ (e) $\left(8 + (-3y) + (-y^2)\right)\left(2 + (-y)\right)$
   (c) $(1 + n)(8 + 5n)$ (f) $\left(5y + (-2x)\right)\left(3y + (-x)\right)$

7-5. <u>El inverso multiplicativo</u>

En la sección 6-4 descubrimos que todo número real tiene un inverso aditivo. En otras palabras, para todo número real existe otro número real de modo que la suma de los dos números es 0. Toda vez que cualquier número real permanece inalterado cuando se le añade 0 (¿Por qué?), llamamos al número 0 <u>el elemento identidad o elemento neutral para la suma</u>.

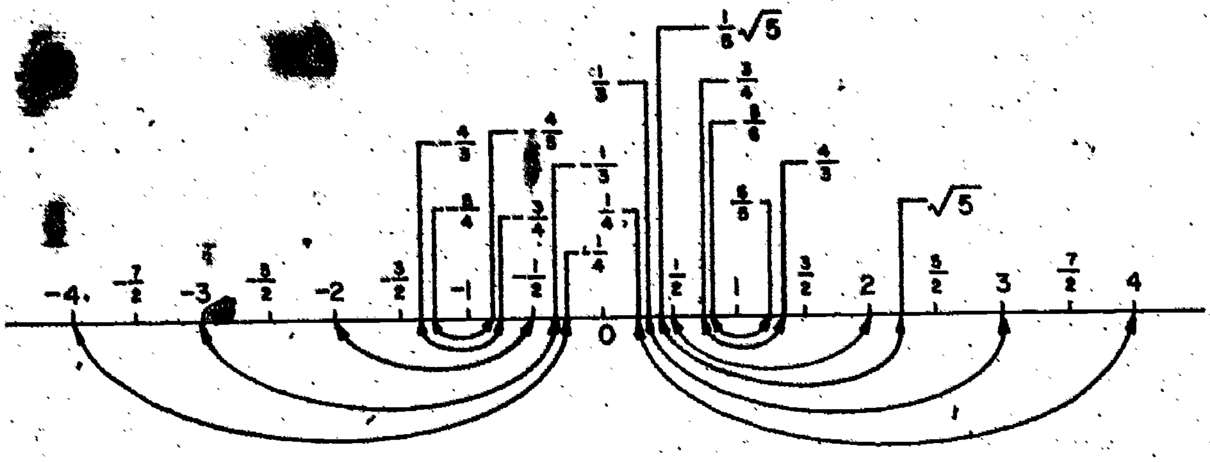
¿Habrá un concepto correspondiente al inverso multiplicativo para los números reales? Ante todo, debemos tener un elemento identidad para la multiplicación. Toda vez que un número real dado no cambia al multiplicarlo por 1 (¿Por qué?), llamamos al número 1 <u>el elemento identidad o elemento neutral para la multiplicación</u>. Para un número real dado, ¿existe otro número real de modo que el producto de los dos números sea 1?

Por ejemplo, considera el número 6. ¿Existe un número real que al multiplicarlo por 6 dé 1 como producto? Ensayando con varios números o empleando tus conocimientos de aritmética, probablemente verás que $\frac{1}{6}$ es un tal número, debido a que $6 \cdot \frac{1}{6} = 1$. Halla un número que al multiplicarlo por -2 dé 1 como producto. Haz lo mismo con $-\frac{1}{3}$ y con $\frac{3}{4}$. Antes de seguir adelante, demos una definición precisa de <u>inverso multiplicativo</u>.

> Si c <u>y</u> d son números reales tales que
>
> $$cd = 1,$$
>
> entonces llamamos a d un inverso multiplicativo de c.

Si d es un inverso multiplicativo de c, ¿será entonces c un inverso multiplicativo de d? ¿Por qué? ¿Tendrá <u>todo</u> número real un inverso multiplicativo? ¿Cuál es un inverso multiplicativo de 0?

Si examinamos estos inversos en la recta numérica, podemos observar algo acerca de su comportamiento. En el siguiente diagrama algunos números y sus inversos multiplicativos aparecen asociados mediante flechas dobles. ¿Cómo podrías comprobar que estos pares de números son realmente inversos multiplicativos? ¿Podrías imaginarte la disposición de las flechas dobles si marcáramos de igual modo muchos otros pares de estos inversos?



¿Qué sucede con el número 0? ¿Con qué número podría aparearse? ¿Existe un número b tal que $0 \cdot b = 1$? ¿Qué puedes afirmar acerca de un inverso multiplicativo de 0?

Si examinas las flechas dobles del diagrama anterior, tal vez recibas la impresión de que el inverso multiplicativo de un número viene expresado en una forma que se obtiene intercambiando numerador y denominador. ¿Qué sucedería con $\sqrt{5}$? Ciertamente, $(\frac{1}{5}\sqrt{5}) \cdot \sqrt{5} = \frac{1}{5}(\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}) = \frac{1}{5} \cdot 5 = 1$, de modo que $\sqrt{5}$ y $\frac{1}{5}\sqrt{5}$ son inversos multiplicativos el uno del otro.

Ahora podemos enunciar la propiedad que hemos estado investigando. Es en realidad una propiedad nueva de los números reales, ya que no puede derivarse de las propiedades que hemos enunciado hasta ahora.

> <u>La existencia de inversos multiplicativos</u>: Para todo número real c distinto de 0, existe un número real d tal que $cd = 1$.

Cuando estudiemos más problemas, verás más clara, si no es ya obvia para ti, la idea de que los números reales poseen esta propiedad. Es obvio también, por experiencia, que cada número distinto de cero tiene exactamente <u>un</u> inverso multiplicativo; es decir, el inverso multiplicativo de un número es <u>único</u>. Supondremos la unicidad aun cuando la podríamos demostrar a base de las otras propiedades tal como lo hicimos en el caso del inverso aditivo. (Fíjate en el Conjunto de problemas 7-8a.)

Conjunto de problemas 7-5

1. Halla los inversos multiplicativos de los siguientes números: $3, \frac{1}{2}, -3, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 7, \frac{5}{6}, -\frac{3}{7}, -7, \frac{3}{10}, \frac{1}{100}, -\frac{1}{100}, 0.45, -6.8.$
2. Construye una recta numérica y marca con flechas dobles los números $3, \frac{1}{3}, -3, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 7,$ y sus inversos multiplicativos.
3. Construye una recta numérica y marca con flechas dobles los números $3, \frac{1}{3}, -3, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 7,$ y sus inversos aditivos. ¿Cómo difiere este esquema de flechas dobles del que aparece en el problema 2?
4. Si b es un inverso multiplicativo de a, ¿qué valores obtenemos para b si a es mayor que 1? ¿Qué valores obtenemos para b si a está entre 0 y 1? ¿Cuál es un inverso multiplicativo de 1?
5. Si b es un inverso multiplicativo de a, ¿qué valores obtenemos para b si a es menor que -1? ¿Si $a < 0$ y $a > -1$? ¿Cuál es un inverso multiplicativo de -1?
6. Si b es el inverso multiplicativo de a, ¿qué valores obtenemos para b si a es positivo? ¿Si a es negativo?

7-6. Propiedad multiplicativa de la igualdad

En el capítulo anterior, enunciamos la propiedad aditiva de la igualdad. ¿Será posible hallar una propiedad correspondiente de la multiplicación? Considera los siguientes enunciados:

Como $(-2)(3) = -6$, entonces $\left((-2)(3)\right)(-4) = (-6)(-4)$.

Como $(-5)(-3) = 15$, entonces $\left((-5)(-3)\right)(\frac{1}{3}) = (15)(\frac{1}{3})$.

Observa que "$(-2)(3)$" y "-6" son nombres distintos para el mismo número, y cuando multiplicamos (-4) por este número obtenemos " $((-2)(3))(-4)$" y "$(-6)(-4)$" como nombres distintos para un nuevo número.

En general, tenemos la

<u>Propiedad multiplicativa de la igualdad</u>. Para tres números reales cualesquiera a, b y c, si $a = b$, entonces $ac = bc$.

<u>Conjunto de problemas 7-6</u>

1. Del mismo modo que en el caso anterior, explica en palabras el enunciado: "Como $(-5)(-3) = 15$, entonces $((-5)(-3))(\frac{1}{3}) = (15)(\frac{1}{3})$".

2. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son ciertos?

   (a) Si $2x = 6$, entonces $2x(\frac{1}{2}) = 6(\frac{1}{2})$.

   (b) Si $\frac{1}{3}a = 9$, entonces $\frac{1}{3}a(3) = 9(3)$.

   (c) Si $\frac{1}{4}n = 12$, entonces $\frac{1}{4}n(4) = 12(\frac{1}{4})$.

   (d) Si $\frac{2}{3}y = 16$, entonces $\frac{2}{3}y(\frac{3}{2}) = 16(\frac{3}{2})$.

   (e) Si $24 = \frac{3}{5}m$, entonces $24(\frac{3}{5}) = \frac{3}{5}m(\frac{3}{5})$.

3. Halla el conjunto de validez de cada uno de los siguientes enunciados:

<u>Ejemplo</u>. Determina el conjunto de validez de $\frac{5}{2}x = 60$.

Si $\frac{5}{2}x = 60$ es cierto para alguna x,

entonces $\frac{5}{2}x(\frac{2}{5}) = 60(\frac{2}{5})$ es cierto para la misma x;
(¿Por qué multiplicamos por $\frac{2}{5}$?)

$((\frac{5}{2})(\frac{2}{5}))x = 24$ es cierto para la misma x;

$x = 24$.

Si $x = 24$,
entonces el miembro izquierdo es $(\frac{5}{2})(24) = 60$, y el miembro derecho es 60.
De modo que "$\frac{5}{2}(24) = 60$" es un enunciado cierto, y el conjunto de validez es $\{24\}$.

(a) $12x = 6$ (d) $15 = 5y$ (g) $\frac{2}{3}z = 1$

(b) $7x = 6$ (e) $5 = 5y$ (h) $\frac{2}{3}z = \frac{2}{3}$

(c) $6x = 6$ (f) $2 = 5y$ (i) $\frac{2}{3}z = \frac{3}{2}$

4. Determina los conjuntos de validez de los siguientes enunciados abiertos:

(a) $7a = 35$ (e) $5 = \frac{1}{3}a$

(b) $\frac{1}{7}x = 5$ (f) $3 + x = -\frac{3}{2}$

(c) $7n = 5$ (g) $-12 = 3k$

(d) $\frac{4}{9}c = -2$ (h) $0 = \frac{x}{-12}$

5. (a) Halla el valor de B en la fórmula $V = \frac{1}{3}Bh$, si sabes que V es 84 y h es 7.

(b) Usa la fórmula $PV = pv$ para hallar el valor de p, si $P = 5$, $V = 260$ y $v = 100$.

7-7. Soluciones de ecuaciones

Anteriormente, hallaste y luego comprobaste posibles elementos de los conjuntos de validez de ciertos enunciados tales como la ecuación,

$$3x + 7 = x + 15.$$

Ahora estamos preparados para resolver tales ecuaciones mediante un procedimiento más general. ("Resolver" significa hallar el conjunto de validez.)

Primero, sabemos que, por la propiedad aditiva de la igualdad, cualquier valor de x para el cual

$$3x + 7 = x + 15$$

es un enunciado cierto, es también un valor de x para el cual

$$(3x + 7) + \left((-x) + (-7)\right) = (x + 15) + \left((-x) + (-7)\right)$$

es cierto. Podemos simplificar los numerales en cada miembro de este enunciado para obtener,

$$\left(3x + (-x)\right) + \left(7 + (-7)\right) = \left(x + (-x)\right) + \left(15 + (-7)\right),$$

y finalmente $$2x = 8.$$

Aquí, hemos sumado el número real $\left((-x) + (-7)\right)$ a cada miembro del enunciado y obtuvimos el nuevo enunciado "$2x = 8$". Así, cada número del conjunto de validez de "$3x + 7 = x + 15$" es un número del conjunto de validez de "$2x = 8$", debido a que la propiedad aditiva de la igualdad es válida para todos los números reales.

Apliquemos después la propiedad multiplicativa de la igualdad para obtener

$$\left(\frac{1}{2}\right)2x = \frac{1}{2}(8),$$

$$x = 4.$$

Así, cada número del conjunto de validez de "$2x = 8$" es un número del conjunto de validez de "$x = 4$".

Ahora podemos deducir que toda solución de "$3x + 7 = x + 15$" es una solución de "$x = 4$". La solución de esta última ecuación es obviamente 4. Pero, ¿estaremos seguros de que 4 es una solución de "$3x + 7 = x + 15$"? Esto lo podríamos comprobar fácilmente, pero aprovechemos este ejemplo para sugerir un procedimiento general.

El problema es el siguiente: Hemos demostrado que si x es una solución de

$$3x + 7 = x + 15,$$

entonces x es una solución de

$$x = 4.$$

Lo que tenemos que demostrar ahora es que si x es una solución de

$$x = 4,$$

entonces x es una solución de

$$3x + 7 = x + 15.$$

Frecuentemente, escribimos estos dos enunciados en forma combinada así:

x es una solución de "$3x + 7 = x + 15$" <u>si y solamente si</u> x es una solución de "$x = 4$".

Una manera de demostrar que el segundo de estos enunciados es cierto es invirtiendo los pasos en la demostración del primero. Así, si $x = 4$, multiplicamos por 2 para obtener

$$2x = 8.$$

(Observa que 2 es el recíproco de $\frac{1}{2}$.) Entonces sumamos $(x + 7)$ para obtener

$$2x + (x + 7) = 8 + (x + 7),$$
$$3x + 7 = x + 15.$$

(Observa que $(x + 7)$ es el opuesto de $((-x) + (-7))$. Por consiguiente, toda solución de "$x = 4$" es una solución de "$3x + 7 = x + 15$"; es decir, la única solución es 4.

> Decimos que "$x = 4$" y "$3x + 7 = x + 15$" son <u>enunciados equivalentes</u> en el sentido de que sus conjuntos de validez son los mismos.

¿Qué hemos aprendido? Si añadimos un número real a los dos miembros de una ecuación o si multiplicamos ambos miembros por un número real distinto de cero, ~~el~~ nuevo enunciado así obtenido es <u>equivalente</u> al enunciado original. Esto es cierto debido a que estas operaciones son "invertibles". Entonces si logramos obtener un enunciado equivalente cuya solución sea obvia, estamos seguros de tener el conjunto de validez requerido <u>sin necesidad de comprobarlo</u>. Naturalmente, conviene hacer la comprobación para asegurarnos de que no hay errores de aritmética.

Como otro ejemplo, resuelve la ecuación

$$5z + 8 = 2z + (-10).$$

Esta ecuación es equivalente a

$$(5z + 8) + ((-2z) + (-8)) = (2z + (-10)) + ((-2z) + (-8)),$$

es decir, equivalente a

$$(5z + (-2z)) + (8 + (-8)) = (2z + (-2z)) + ((-10) + (-8))$$

y también a

$$3z = -18.$$

En otras palabras, z es una solución de "$5z + 8 = 2z + (-10)$" <u>si y solamente si</u> z es una solución de "$3z = -18$". El último enunciado es equivalente a

$$\left(\frac{1}{3}\right)(3z) = \left(\frac{1}{3}\right)(-18);$$

es decir, a

$$z = -6.$$

De modo que, z es una solución de "$3z = -18$" <u>si y solamente si</u> z es una solución de "$z = -6$". Por lo tanto, los tres enunciados son equivalentes y su conjunto de validez es $\{-6\}$. En este caso, estuvimos seguros de que cada paso era invertible sin tener que efectuar las operaciones correspondientes. Al resolver una ecuación, nos preguntamos en cada paso: "¿Es este paso invertible?" Si lo es, obtenemos una ecuación equivalente.

Más adelante, aprenderemos a resolver otros tipos de enunciados mediante el uso de propiedades de los números. Para ello tendremos que aprender algo más acerca de qué operaciones dan lugar a enunciados equivalentes y cuáles no.

<u>Conjunto de problemas 7-7</u>

1. En cada uno de los pares de enunciados que aparecen a continuación, muestra cómo se puede obtener el segundo del primero. Muestra, si fuese posible, cómo se puede obtener el primero del segundo. ¿Qué pares de enunciados son equivalentes?

   (a) $x + (-3) = 5, \; x = 8$
   (b) $\frac{1}{2}b = 8, \; b = 16$
   (c) $(x + (-2)) = 3, \; 3(x + (-2)) = 9$
   (d) $z + (-7) = -z + 3, \; 2z = 10$
   (e) $6x = 7, \; (6x)0 = 7 \cdot 0$
   (f) $4y + (-6)$ [illegible] $+ (-6), \; 0 = y$
   (g) $-3a = -6, \; a = 2$
   (h) $5m + 5 = -m + (-7), \; 12 = -6m$
   (i) $x = 3, \; |x| = |3|$

2. Halla el conjunto de validez de cada una de las siguientes ecuaciones:

Ejemplo.

Resuelve: $(-3) + 4x = (-2x) + (-1)$.

Este enunciado es equivalente a

$$\left((-3) + 4x\right) + (2x + 3) = \left((-2x) + (-1)\right) + (2x + 3),$$

$$6x = 2;$$

y éste a su vez es equivalente a

$$\frac{1}{6}(6x) = \frac{1}{6} \cdot 2,$$

$$x = \frac{1}{3}.$$

Por lo tanto, el conjunto de validez es $\{\frac{1}{3}\}$.

(a) $2a + 5 = 17$

(b) $4y + 3 = 3y + 5 + y + (-2)$

(c) $12x + (-6) = 7x + 24$

(d) $8x + (-3x) + 2 = 7x + 8$ (Reduce los términos primero.)

(e) $6z + 9 + (-4z) = 18 + 2z$

(f) $12n + 5n + (-4) = 3n + (-4) + 2n$

(g) $15 = 6x + (-8) + 17x$

(h) $5y + 8 = 7y + 3 + (-2y) + 5$

(i) $(-6a) + (-4) + 2a = 3 + (-a)$

(j) $0.5 + 1.5x + (-1.5) = 2.5x + 2$

(k) $\frac{1}{2} + (-\frac{1}{2}c) + (-\frac{5}{2}) = 4c + (-2) + (-\frac{7}{2}c)$

(l) $2y + (-6) + 7y = 8 + (-9y) + (-10) + 18y$

(m) $(x + 1)(x + 2) = x(x + 2) + 3$

3. Traduce los siguientes a enunciados abiertos y halla sus conjuntos de validez; después contesta la pregunta de cada problema.

(a) El perímetro de un triángulo es de 44 pulgadas. El segundo lado es tres pulgadas mayor que el doble del tercer lado, y el primer lado es cinco pulgadas más largo que el tercero. Halla el largo de cada uno de los tres lados del triángulo.

(b) Si a un entero le añadimos su sucesor, el resultado es uno más que dos veces el entero. ¿Cuál es el entero?

(c) La suma de dos enteros impares consecutivos es 11. ¿Cuáles son los enteros?

(d) El Sr. Colón compró 30 pies de alambre y después compró 55 pies más de alambre de la misma clase. Encontró que había pagado $4.20 más de lo que pagó su vecino por 25 pies de la misma clase de alambre al mismo precio. ¿Cuál era el costo por pie del alambre?

(e) Cuatro veces un entero es diez unidades más que dos veces su sucesor. ¿Cuál es el entero?

*(f) En una carrera de automóviles, un conductor que partió en el primer grupo de carros se encontraba a 120 millas de la meta después de guiar durante 5 horas a cierta velocidad. Otro conductor, que partió más tarde, después de guiar durante 3 horas a la misma velocidad que el primero se encontraba a 250 millas de la meta. ¿A qué velocidad guiaban estos conductores?

(g) La planta A crece dos pulgadas por semana, y ahora tiene 20 pulgadas de altura. La planta B crece 3 pulgadas por semana y ahora tiene 12 pulgadas de altura. ¿De aquí a cuántas semanas tendrán las dos plantas la misma altura?

(h) Un cierto número es aumentado en 17 y esta suma se multiplica por 3. Si el producto resultante es 192, ¿cuál es el número?

(i) Un número es 5 veces otro y la suma de ellos es 15 más que 4 veces el menor. Halla el número menor.

(j) Al agua de un radiador se le añaden dos cuartillos de alcohol, y entonces la mezcla contiene 20 por ciento de alcohol. ¿Cuántos cuartillos de agua había en el radiador?

7-8. Recíprocos

Para abreviar, convendrá llamar "recíproco" al inverso multiplicativo, y representaremos el recíproco de a por el símbolo "$\frac{1}{a}$". Así para toda a, excepto 0, $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

Probablemente habrás notado que en el caso de los enteros positivos el símbolo que escogimos para "recíproco" es el símbolo conocido de una fracción. Así, por ejemplo, el recíproco de 5 es $\frac{1}{5}$. Esto ciertamente está de acuerdo con tus experiencias pasadas.

Sin embargo, el recíproco de $\frac{2}{3}$ es $\frac{1}{\frac{2}{3}}$; el de -9 es $\frac{1}{-9}$; y el de 2.5 es $\frac{1}{2.5}$. Toda vez que $\frac{1}{\frac{2}{3}}$ es el recíproco de $\frac{2}{3}$ y como $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$, resulta que $\frac{1}{\frac{2}{3}}$ y $\frac{3}{2}$ tienen que ser nombres del mismo número; como $\frac{1}{-9}$ es el recíproco de -9 y como $-9 \times (-\frac{1}{9}) = 1$, $\frac{1}{-9}$ y $-\frac{1}{9}$ tienen que ser nombres del mismo número. También, como $(2.5)(0.4) = 1$, 0.4 y $\frac{1}{2.5}$ tienen que ser nombres del mismo número. Estaremos en mejor situación para seguir tratando este tema cuando consideremos la división de números reales en un próximo capítulo.

Conjunto de problemas 7-8a

1. Si usamos el símbolo "$\frac{1}{a}$" para representar el recíproco de cualquier número a, distinto de cero, representa el recíproco de:

   (a) 15
   (b) -8
   (c) $\frac{1}{5}$
   (d) $-\frac{1}{6}$
   (e) $\frac{5}{3}$
   (f) 0.3
   (g) $-\frac{3}{4}$

2. Escribe el nombre corriente para el inverso multiplicativo de cada número del problema 1. ¿En qué casos será el mismo que el recíproco que escribiste en el problema 1?

3. Demuestra el teorema: Para cada número real a, distinto de cero, existe solamente un inverso multiplicativo de a. (Sugerencia: Sabemos que <u>existe</u> un inverso multiplicativo de a; a saber, $\frac{1}{a}$. Imagínate que existe <u>otro</u>, digamos x. Entonces $ax = 1$.)

¿Por qué excluimos al 0 de nuestra definición de recíprocos? Supongamos que el 0 tuviera un recíproco. ¿Cuál podría ser? Si hubiera un número b que fuera el recíproco de 0, entonces $0 \cdot b = 1$. ¿Cuál es el conjunto de validez del enunciado $0 \cdot b = 1$? Debes concluir que efectivamente el 0 no puede tener un recíproco. Aquí tenemos oportunidad de ilustrar, utilizando un ejemplo bastante sencillo, un tipo de demostración muy poderoso. Esta demostración se basa en el hecho de que un enunciado dado es cierto o falso, pero no ambas cosas. A la afirmación de que un enunciado dado es cierto y también falso le llamamos una contradicción. Si al desarrollar un razonamiento correcto llegamos a una contradicción, nos vemos obligados a aceptar que dicho razonamiento está fundado en una proposición falsa. La demostración del próximo teorema se basa en esta idea.

Teorema 7-8a. El número 0 no tiene recíproco.

Demostración. El enunciado "0 no tiene recíproco" es cierto o falso, pero no ambas cosas. Si suponemos que es falso; es decir, si suponemos que 0 tiene un recíproco, tenemos el siguiente razonamiento:

1.	Existe un número real a tal que $0 \cdot a = 1$.	Suposición.
2.	$0 \cdot a = 0$	El producto de 0 y cualquier número real es 0.
3.	Por consiguiente, $0 = 1$.	

Así, llegamos a la afirmación de que "$0 = 1$" es un enunciado cierto. Pero, obviamente, "$0 = 1$" es un enunciado falso, y por lo tanto, tenemos una contradicción. Conclusión: El primer paso de la demostración no puede ser cierto. Por consiguiente, es falsa la afirmación de que 0 tiene un recíproco; es decir, 0 no tiene recíproco.

A una demostración del tipo anterior la llamamos indirecta o demostración por contradicción o reductio ad absurdum.

Quisiéramos saber ahora qué podemos descubrir y demostrar acerca del comportamiento de los recíprocos.

Halla los recíprocos en cada uno de los siguientes conjuntos de números. Luego de examinar los dos conjuntos~~, ¿a~~ qué conclusión llegas acerca de los recíprocos?

$$\text{I.} \quad \{12, \tfrac{1}{8}, 150, 0.09, \tfrac{8}{9}\}$$

$$\text{II.} \quad \{-5, -\tfrac{1}{3}, -700, -2.2, -\tfrac{5}{3}\}$$

Si examinamos recíprocos en la recta numérica confirmaremos nuestra presunción de qué el siguiente teorema es cierto:

<u>Teorema 7-8b</u>. El recíproco de un número positivo es positivo y el recíproco de un número negativo es negativo.

<u>Demostración</u>. Sabemos que $a \cdot \frac{1}{a} = 1$; es decir, el producto de un número distinto de cero y su recíproco es el número <u>positivo</u> 1. Supongamos primeramente que a es positivo. Entonces solamente una de estas tres posibilidades es cierta:

$$\frac{1}{a} < 0, \quad \frac{1}{a} = 0, \quad 0 < \frac{1}{a}.$$

Vemos que si $\frac{1}{a}$ es negativo, entonces $a \cdot \frac{1}{a}$ es negativo, lo cual es una contradicción al hecho de que $a \cdot \frac{1}{a}$ es positivo. Tenemos también que, si $\frac{1}{a} = 0$ cuando a es positivo, entonces $a \cdot \frac{1}{a} = 0$; de nuevo, una contradicción. Esto nos deja una sola posibilidad: $\frac{1}{a}$ es positivo.

De igual modo, podemos demostrar que si a es negativo, entonces $\frac{1}{a}$ es negativo.

Halla el recíproco de cada uno de los siguientes números; luego halla el recíproco de ese recíproco. ¿Qué conclusión se sugiere?

$$-12, \ 80, \ \frac{19}{20}, \ -\frac{1}{9}, \ 1.6$$

<u>Teorema 7-8c</u>. El recíproco del recíproco de un número real a, distinto de cero, es el mismo número a.

Demostración. El recíproco del recíproco de a es $\frac{1}{\frac{1}{a}}$. Toda vez que $\frac{1}{\frac{1}{a}}$ y a son ambos recíprocos de $\frac{1}{a}$ (¿por qué?), y como hay exactamente un recíproco de $\frac{1}{a}$, tendremos que "$\frac{1}{\frac{1}{a}}$" y "a" tienen que ser nombres del mismo número. Por consiguiente,

$$\frac{1}{\frac{1}{a}} = a.$$

Conjunto de problemas 7-8b

1. Halla los recíprocos de los siguientes números:

   $\frac{3}{4}$, 0.3, -0.3, 0.33, -0.33, 1, -1, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{x^2 + 4}$, $y^2 + 1$

2. ¿Para qué valores reales de a no tendrán recíprocos los siguientes números?

   $a + (-1)$, $a + 1$, $a^2 + (-1)$, $a(a + 1)$, $\frac{a}{a + 1}$, $a^2 + 1$, $\frac{1}{a^2 + 1}$

3. Considera el enunciado

   $$(a + (-3))(a + 1) = a + (-3),$$

   que tiene el conjunto de validez $\{0, 3\}$. (Verifícalo.) Si multiplicamos ambos miembros del enunciado por el recíproco de $a + (-3)$; es decir, por $\frac{1}{a + (-3)}$, y usamos algunas propiedades de los números reales (¿qué propiedades?) obtenemos el enunciado,

   $$a + 1 = 1.$$

   Para $a = 3$, obtenemos, $3 + 1 = 1$, que claramente es un enunciado falso. ¿Por qué no tiene el nuevo enunciado el mismo conjunto de validez que el enunciado original?

4. Escribe una propiedad de los opuestos que corresponda al teorema 7-8b. Escribe una propiedad de los opuestos que corresponda al teorema 7-8c.

5. Considera tres pares de números: (1) $a = 2$, $b = 3$; (2) $a = 4$, $b = -5$; (3) $a = -4$, $b = -7$. ¿Será el enunciado $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{ab}$ cierto en los tres casos?
6. ¿Es el enunciado $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ cierto en los tres casos del problema 5? Señala los números y sus recíprocos en la recta numérica.
7. ¿Será cierto que si $a > b$ y además a, b son positivos, entonces $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$? Ensaya con algunos valores de a y b.
8. ¿Será cierto que si $a > b$ y además a, b son negativos, entonces $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$? Ensaya con algunos valores de a y b.
9. ¿Podrías decir inmediatamente cuál es el mayor de los recíprocos de dos números si uno de los números es positivo y el otro es negativo? Ilustra esto en la recta numérica.

*10. Completa la demostración del teorema 7-8b para el caso en que a sea negativo.

En el problema 5 comprobaste para tres pares particulares de valores de a y b, que $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{ab}$. En otras palabras, el producto de los recíprocos de los números de cada par es el recíproco de su producto. ¿Para cuántos pares de números tendríamos que comprobar este enunciado cosa de estar seguros de que es cierto para todos los números reales excepto 0? ¿Bastaría con un millón de pruebas? ¿Cómo sabríamos que el enunciado no sería falso en la prueba número un millón uno?

Frecuentemente llegamos a conclusiones probables observando lo que ocurre en varios casos particulares. A esto le llamamos razonamiento inductivo. No importa cuántos casos observemos, el razonamiento inductivo por sí solo no puede asegurarnos que una afirmación es siempre cierta.

De modo que, no podemos usar razonamiento inductivo para demostrar que $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{ab}$ es siempre cierto. Podemos demostrarlo para todos los números reales distintos de 0 mediante razonamiento deductivo, de la manera siguiente. (Recuerda que en una demostración sólo podemos utilizar propiedades ya establecidas.)

Teorema 7-8d. Para dos números reales cualesquiera a y b, distintos de cero,

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{ab}.$$

Análisis: Como nuestro propósito es demostrar que $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$ es el recíproco de ab, recordamos la definición de recíproco. Entonces concentramos nuestra atención en el producto $ab \cdot \left(\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}\right)$ y tratamos de demostrar que es igual a 1.

Demostración.

$ab \cdot \left(\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}\right) = a\left(\frac{1}{a}\right) \cdot b\left(\frac{1}{b}\right)$	por las propiedades asociativa y conmutativa
$= 1 \cdot 1$	debido a que $x \cdot \frac{1}{x} = 1$
$= 1$	

Por consiguiente, $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$ es el recíproco de ab. Es decir,

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{ab}.$$

Observa que la demostración del teorema 7-8d es muy parecida a la demostración de que la suma de los opuestos de dos números es el opuesto de su suma. Recuerda cómo se demostró este resultado: $(a + b) + \big((-a) + (-b)\big) = \big(a + (-a)\big) + \big(b + (-b)\big) = 0$; por lo tanto, $(-a) + (-b) = -(a + b)$.

Conjunto de problemas 7-8c

1. Efectúa las siguientes multiplicaciones. (En éste y en los próximos conjuntos de problemas suponemos que los valores de las variables son tales que las fracciones tienen sentido.)

(a) $\left(\frac{1}{2a}\right)\left(\frac{1}{3b}\right)$

(b) $\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{3ax}\right)$

(c) $\left(\frac{1}{-3y}\right)\left(\frac{1}{-7z}\right)$

(d) $\left(\frac{1}{\frac{1}{3}ab}\right)\left(\frac{1}{9a^2}\right)$

(e) $\left(\frac{1}{-2m^2n}\right)\left(-\frac{1}{3mn^2}\right)$

(f) $\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right)$

2. ¿Cuál es el valor de $87 \times (-9) \times 0 \times \frac{2}{3} \times 642$?
3. ¿Es $8 \cdot 17 = 0$ un enunciado cierto? ¿Por qué?
4. Si $n \cdot 50 = 0$, ¿qué puedes decir acerca de n?
5. Si $p \cdot 0 = 0$, ¿qué puedes decir acerca de p?
6. Si $p \cdot q = 0$, ¿qué puedes decir acerca de p ó q?
7. Si $p \cdot q = 0$, y sabemos que $p > 10$, ¿qué podemos decir acerca de q?

La idea sugerida en los ejercicios anteriores será de gran utilidad, especialmente para determinar los conjuntos de validez de algunas ecuaciones. Ahora estamos en condiciones de demostrar el siguiente teorema, empleando las propiedades de los recíprocos:

> <u>Teorema 7-8e.</u> Para dos números reales a <u>y</u> b, $ab = 0$ si y solamente si $a = 0$ ó $b = 0$.

Debido a la condición "si y solamente si", tendremos realmente que demostrar dos teoremas: (1) Si $a = 0$ ó $b = 0$, entonces $ab = 0$; (2) Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ ó $b = 0$.

<u>Demostración.</u> Si $a = 0$ ó $b = 0$, entonces $ab = 0$ por la propiedad multiplicativa del 0. De este modo hemos demostrado una parte del teorema.

Para demostrar la segunda parte, observa que $a = 0$ ó $a \neq 0$, pero no ambas cosas. Si $a = 0$, se cumple el requisito de que $a = 0$ ó $b = 0$. ¿Por qué?

Si $ab = 0$ y $a \neq 0$, entonces hay un recíproco de a y tenemos que

$$\left(\frac{1}{a}\right)(ab) = \frac{1}{a} \cdot 0, \qquad \text{(¿Por qué?)}$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)(ab) = 0, \qquad \text{(¿Por qué?)}$$

$$\left(\frac{1}{a} \cdot a\right)b = 0, \qquad \text{(¿Por qué?)}$$

$$1 \cdot b = 0, \qquad \text{(¿Por qué?)}$$

$$b = 0.$$

Así, en este caso también se cumple el requisito de que $a = 0$ ó $b = 0$; por consiguiente, hemos demostrado la segunda parte del teorema.

Conjunto de problemas 7-8d

1. Si $(x + (-5)) \cdot 7 = 0$, ¿qué podrá decirse con certeza acerca de 7 ó de $(x + (-5))$? ¿Podrá ser 7 igual a 0? Entonces, ¿qué puedes decir de $(x + (-5))$?
2. Explica cómo sabemos que 0 es el único valor de h que puede hacer cierto el enunciado, $9 \times h \times 17 \times 3 = 0$.

*3. Si a está entre p y q, ¿estará $\frac{1}{a}$ entre $\frac{1}{p}$ y $\frac{1}{q}$? Explica.

4. El teorema 7-8e nos permite determinar el conjunto de validez de una ecuación tal como

$$(x + (-3))(x + (-8)) = 0$$

sin tener que ensayar con ningún número en particular. Si tomamos $a = (x + (-3))$ y $b = (x + (-8))$, el teorema nos dice que este enunciado es equivalente al enunciado,

$$x + (-3) = 0 \text{ ó } x + (-8) = 0.$$

De este enunciado podemos deducir que el conjunto de validez es $\{3, 8\}$. Determina el conjunto de validez de cada una de las siguientes ecuaciones:

(a) $(x + (-20))(x + (-100)) = 0$

(b) $(x + 6)(x + 9) = 0$

(c) $x(x + (-4)) = 0$

(d) $(3x + (-5))(2x + (-1)) = 0$

(e) $(x + (-1))(x + (-2))(x + (-3)) = 0$

(f) $2(x + (-\frac{1}{2}))(x + \frac{3}{4}) = 0$

(g) $(3x + (-5))(2x + 1) = 0$

(h) $9|x + (-6)| = 0$

(i) $x(x + 4) = x^2 + 8$

5. Demuestra que si a, b, c son números reales, y si $ac = bc$ y $c \neq 0$, entonces $a = b$.

7-9. <u>Las dos operaciones básicas y el inverso de un número respecto de estas operaciones</u>

En los últimos dos capítulos fijamos nuestra atención en la suma y la multiplicación y en los inversos respecto de estas dos operaciones. Estos cuatro conceptos son fundamentales en el sistema de los números reales. La suma y la multiplicación tienen cada una de ellas varias propiedades y existe una propiedad que relaciona las dos; a saber, la propiedad distributiva. Todo nuestro trabajo al simplificar expresiones algebraicas se basa en estas propiedades y en aquellas de sus consecuencias que relacionan la suma, la multiplicación, los opuestos y los recíprocos.

Hemos señalado que la propiedad distributiva relaciona la suma con la multiplicación. Conviene examinar si hay alguna relación que conecte dos a dos de todas las maneras posibles las operaciones de sumar, multiplicar, tomar opuestos y hallar recíprocos. Escribamos todas las posibles combinaciones:

1. Suma y multiplicación. La propiedad distributiva: $a(b + c) = ab + ac$.
2. Suma y opuestos. Hemos demostrado que $-(a + b) = (-a) + (-b)$.
3. Suma y recíprocos. Encontramos que <u>no hay una relación sencilla</u> que conecte $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ y $\frac{1}{a + b}$. De hecho, no hay números reales para los cuales estas dos frases representen el mismo número. La ausencia de tal relación es motivo de serias dificultades en el álgebra para los alumnos que sin detenerse a pensar suponen que estas expresiones representan el mismo número.
4. Multiplicación y opuestos. Se demostró anteriormente que $-(ab) = (-a)(b) = (a)(-b)$.

5. Multiplicación y recíprocos. Hemos demostrado que $\frac{1}{ab} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$.

6. Opuestos y recíprocos. $\frac{1}{(-a)} = -(\frac{1}{a})$.

Esta última relación es nueva y debemos demostrarla. La demostración, que puede obtenerse de la combinación (5) anterior reemplazando b por -1, la dejamos a los estudiantes. (Sugerencia: ¿Cuál es el recíproco de -1?)

Enuncia las combinaciones (1), (2), (4), (5) y (6) en palabras. ¿Ves alguna analogía entre la combinación de suma y opuestos, por una parte, y la de multiplicación y recíprocos, por otra parte? Explica.

Problemas de repaso

1. Escribe un resumen de las ideas importantes de este capítulo, semejante al que escribiste al final del capítulo 6.
2. Expresa como sumas indicadas:
   (a) $3a(a + (-2))$
   (b) $(x + 1)(x + 6)$
   (c) $(a + b)(a + (-b))$
   (d) $(m + (-5))^2$
   (e) $(x + (-4))(2x + 3)$
3. Escribe cada uno de los siguientes como un producto indicado:
   (a) $2ax + 2ay$
   (b) $ac + (-bc) + c$
   (c) $c(a + b)x + (a + b)y$
   (d) $10x^2 + (-15x) + (-5)$
   (e) $9x^3 + 6x^2 + (-3x)$
4. Halla el conjunto de validez de cada una de las siguientes ecuaciones:

(a) $4a + 7 = 2a + 11$

(b) $8x + (-18) = 3x + 17$

(c) $7x + 2 + (-5x) = 3 + 2x + (-1)$

(d) $|-2| + 2x = (-3) + 3x + 5$

(e) $3x^2 + (-2)x = x^2 + 2 + 2x^2$

5. Reduce términos en las siguientes frases:

(a) $3a + b + a + (-2b) + 4b$

(b) $7x + b + (-3x) + (-3b)$

(c) $6a + (-7a) + 13.2 + (-5)a + (-8.6)$

(d) $|x| + 3|-x| + (-2)|-x|$

*6. Dado el conjunto $S = \{-2, -1, 0, 2\}$,

(a) Halla el conjunto P de todos los productos de los elementos de S tomados de tres en tres. (Sugerencia: Primero halla el conjunto de todos los productos de pares de elementos. Después halla el conjunto de los productos de cada elemento de este nuevo conjunto y cada elemento de S.)

(b) Halla el conjunto R de todas las sumas de elementos de S tomados de tres en tres.

7. Para cada uno de los siguientes problemas, escribe un enunciado abierto, halla su conjunto de validez, y contesta la pregunta del problema.

(a) Jaime y yo pensamos comprar una bola de baloncesto. Como Jaime está trabajando, acordamos que él aportaría \$2 más que yo. Si la bola cuesta \$11, ¿cuánto le toca pagar a Jaime?

(b) La suma de dos enteros impares consecutivos es 41. ¿Cuáles son los enteros?

(c) El largo de un rectángulo es 27 yardas mayor que el ancho. El perímetro es de 398 yardas. Halla el largo y el ancho.

(d) María y Jaime sumaron las notas que obtuvieron en un examen y la suma les dio 170. Después las restaron y la de María era 14 puntos más alta que la de Jaime. ¿Cuáles eran sus notas?

(e) Un hombre trabajó 4 días en una tarea y su hijo trabajó la mitad de ese tiempo. El jornal del hijo era $\frac{2}{5}$ del de su padre. Si entre los dos ganaron \$96, ¿cuánto ganaba cada uno por día?

(f) Un agricultor se encontraba en su corral. Además de él, sólo estaban allí algunos cerdos y algunos pollos y había dieciséis pollos más que cerdos. Observando esto y que en el corral había 74 patas, el agricultor se dijo a sí mismo muy contento—porque él además de agricultor era matemático y muy dado a hablar consigo mismo—"Ahora podré decir cuántos de cada clase de animales hay en mi patio". ¿Cuántos había? (Sugerencia: Los cerdos tienen 4 patas y los pollos 2.)

(g) En un quiosco de tirar al blanco, en una feria, pagaban 10¢ cada vez que se diera en el blanco y cobraban 5¢ por cada fallo. Si el Sr. Pérez perdió 25¢ en ese quiosco y falló 10 veces más que las veces que dio en el blanco, ¿cuántas veces dio en el blanco?

Capítulo 8

PROPIEDADES DE LA ORDENACION

8-1. Relación de ordenación para los números reales

En el capítulo 5, extendimos el concepto de ordenación de los números de la aritmética a todos los números reales. Esto se hizo utilizando la recta numérica, y convinimos que:

> Para los números reales, "es menor que" significa "está a la izquierda de" en la recta numérica. Si a y b son números reales, entonces "a es menor que b" se escribe "$a < b$".

Decimos que la relación "es menor que" para los números reales es una relación de ordenación. Es una relación binaria ya que relaciona dos números. ¿Qué sabemos ya acerca de la relación de ordenación? ¿Cuáles son algunas de sus propiedades generales?

En la sección 5-2 estudiamos dos propiedades fundamentales de la relación de ordenación para los números reales.

> Propiedad de comparación: Si a, b son números reales, entonces solamente uno de los siguientes es cierto:
>
> $$a < b, \quad a = b, \quad b < a.$$
>
> Propiedad transitiva: Si a, b, c, son números reales y si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

Otra propiedad que estudiamos en esa sección es la que conecta la relación de ordenación con la operación de tomar opuestos:

> Si a, b son números reales y si $a < b$, entonces $-b < -a$.

Tal vez te preguntes por qué cuidamos de no mencionar la relación "es mayor que". De hecho, esta relación, la cual representamos por el símbolo " > ", es también una relación de ordenación. ¿Tendrá la propiedad transitiva y la de comparación? Puesto que las tiene, disponemos realmente de dos relaciones de ordenación distintas (aunque muy estrechamente conectadas) para los números reales, y hemos preferido concentrar nuestra atención en la de "es menor que". Nuestra preferencia pudo haber sido la de "es mayor que", pero si vamos a estudiar una relación de ordenación y sus propiedades, no debemos crear confusión pasando de esa relación a otra durante la discusión.

Enunciamos, pues, la última propiedad mencionada en términos del símbolo "$<$", pero al aplicarla nos sentimos en libertad de decir: "Si $a < b$, entonces $-a > -b$".

En las dos secciones subsiguientes obtendremos algunas propiedades de la relación de ordenación "$<$" con respecto a las operaciones de sumar y de multiplicar. Esas propiedades son esenciales si es que hemos de utilizar la relación de ordenación en el álgebra.

Conjunto de problemas 8-1

1. Determina la relación de ordenación que hay entre cada par de números:
   (a) $-\frac{3}{2}$, $-\frac{4}{3}$
   (b) $-|-7|$, $-|7|$
   (c) c, 1 (Considera la propiedad de comparación.)
2. Continuando con el problema 1(c), ¿qué puedes decir acerca de la relación de ordenación que hay entre c y 1 si sabes que $c > 4$? ¿Qué propiedad de ordenación empleaste aquí?
3. En cada uno de los siguientes casos decide si el enunciado es cierto:
   (a) $-3 + (-2) < 2 + (-2)$
   (b) $(-3) + (0) < 2 + 0$
   (c) $(-3) + 5 < 2 + 5$
   (d) $(-3) + a < 2 + a$
4. En cada uno de los siguientes casos decide si el enunciado es cierto:
   (a) $(-3)(5) < (2)(5)$
   (b) $(-3)(0) < (2)(0)$
   (c) $(-3)(-2) < (2)(-2)$
   (d) $(-3)(a) < (2)(a)$ (¿Cuál es el conjunto de validez de este enunciado?)
5. En cada uno de los siguientes casos decide si el enunciado es cierto:

(a) $|4|(3 + (-2)) < |-6|(2 + (-3))$

(b) $(-\frac{3}{2})|\frac{2}{3}| < |-\frac{3}{2}|(-\frac{2}{3})$

(c) $(|-2| + (-2))((-4) + (-6)) < -(-3)|-4|$

(d) $\frac{4}{5}(|2| + |-2|) + 3(-|-2| + (-2)) < 0$

6. Un conjunto dado se puede describir de varias maneras. Describe de tres maneras distintas el conjunto de validez de:

   (a) $3 < 3 + x$

   (b) $3 + x < 3$

7. Determina el conjunto de validez de:

   (a) $3 = 2 + x$

   (b) $3 = (-2) + x$

   (c) $-3 = (-4) + x$

   (d) $\pi = \sqrt{2} + c$

8. Determina el conjunto de validez de:

   (a) $y < 3$

   (b) $|y| < 3$

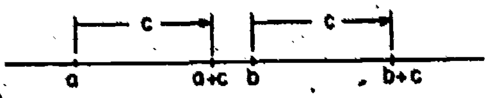
   (c) $-|y| < 3$

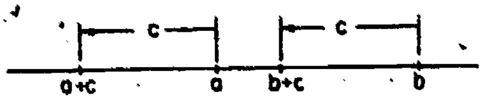
   (d) $-y < 3$

8-2. Propiedad aditiva de la ordenación

¿Qué relación hay entre la ordenación y la suma de los números? Encontraremos una propiedad fundamental y a base de ella demostraremos otras propiedades que relacionan la ordenación y la suma. Como anteriormente, consideraremos primero la relación de ordenación " < ", y luego podremos enunciar propiedades análogas para la relación " > ".

Conviene examinar la suma y la ordenación en la recta numérica. Recordamos que sumar un número positivo significa moverse hacia la derecha, y sumar un número negativo significa moverse hacia la izquierda. En la recta numérica, fijemos dos puntos a y b, donde $a < b$. Si a cada uno de los números, a y b, le sumamos el mismo número c, nos moveremos hacia la derecha de a y de b si c es positivo, y hacia la izquierda si c es negativo. Podemos pensar en dos hombres que caminan sobre la recta numérica cargando entre ambos una escalera. Al principio, el hombre en a está a la izquierda del hombre en b. Si caminan c unidades en cualquier dirección, y como el largo de la escalera no cambia, estaremos seguros de que el hombre de la izquierda seguirá a la izquierda. En sus nuevas posiciones el hombre en $a + c$ estará todavía a la izquierda del que está en $b + c$. Veamos,





Hemos descubierto así una propiedad fundamental de la ordenación que supondremos válida para todos los números reales.

> Propiedad aditiva de la ordenación: Si a, b, c, son números reales y si $a < b$, entonces
> $$a + c < b + c.$$

Ilustra esta propiedad para $a = -3$ y $b = -\frac{1}{2}$, asignándole sucesivamente a c los valores -3, $\frac{1}{2}$, 0, -7. Aquí $-3 < -\frac{1}{2}$. ¿Será "$(-3) + (-3) < (-\frac{1}{2}) + (-3)$" un enunciado cierto? Ensaya con los otros valores de c. Expresa en palabras la propiedad aditiva de la ordenación. ¿Hay una propiedad correspondiente para la igualdad?

Conjunto de problemas 8-2a

1. Empleando la propiedad aditiva de la ordenación, determina cuáles de los siguientes enunciados son ciertos:

   (a) $(-\frac{6}{5}) + 4 < (-\frac{3}{4}) + 4$

   (b) $(-\frac{5}{3})(\frac{6}{5}) + (-5) > (-\frac{5}{2}) + (-5)$

   (c) $(-5.3) + (-2)(-\frac{4}{3}) < (-0.4) + \frac{8}{3}$

   (d) $(\frac{5}{2})(-\frac{3}{4}) + 2 \geq (-\frac{15}{8}) + 2$

2. Enuncia una propiedad aditiva de la ordenación para cada una de las siguientes relaciones: " $\leq$ ", " $>$ ", " $\geq$ ".

3. Una extensión de la propiedad de la ordenación nos dice que:

   Si a, b, c, d son números reales tales que $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$.

   Esto se puede demostrar en tres etapas. Justifica cada una:

   Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$;

   si $c < d$, entonces $b + c < b + d$;

por lo tanto,

$$a + c < b + d.$$

4. Halla el conjunto de validez de cada uno de los siguientes enunciados:

Ejemplo. Si $(-\frac{3}{2}) + x < (-5) + \frac{3}{2}$ es cierto para alguna x,

entonces $x < (-5) + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}$ es cierto para la misma x.

$x < -2$ es cierto para la misma x.

Así, si x es un número que hace cierto el enunciado original, entonces $x < -2$. Si "$x < -2$" es cierto para alguna x, entonces

$(-\frac{3}{2}) + x < (-\frac{3}{2}) + (-2)$ es cierto para la misma x,

$(-\frac{3}{2}) + x < (-\frac{3}{2}) + \left((-5) + 3\right)$,

$(-\frac{3}{2}) + x < (-5) + \left(3 + (-\frac{3}{2})\right)$,

$(-\frac{3}{2}) + x < (-5) + \frac{3}{2}$ es cierto para la misma x.

Por lo tanto, el conjunto de validez es el conjunto de todos los números reales menores que -2.

(a) $3 + x < (-4)$

(b) $x + (-2) > -3$

(c) $2x < (-5) + x$

(d) $3x > \frac{4}{3} + 2x$

(e) $(-\frac{2}{3}) + 2x \geq \frac{5}{3} + x$

(f) $(-x) + 4 < (-3) + |-3|$

(g) $(-5) + (-x) < \frac{2}{3} + |-\frac{4}{3}|$

(h) $(-2) + 2x < (-3) + 3x + 5$

(i) $(-\frac{3}{4}) + \frac{5}{4} \geq x + |-\frac{3}{2}|$

5. Construye las gráficas de los conjuntos de validez de las partes (a), (c), y (h) del problema 4.

6. En el capítulo 5 enunciamos la siguiente propiedad de la ordenación: "Si $a < b$, entonces $-b < -a$". Demuestra esta propiedad, empleando la propiedad aditiva de la ordenación. (Sugerencia: Suma $\left((-a) + (-b)\right)$ a ambos miembros de la desigualdad $a < b$; después, emplea la propiedad del inverso aditivo.)

*7. Muestra que la propiedad:

"Si $0 < y$, entonces $x < x + y$"

es un caso especial de la propiedad aditiva de la ordenación. (Sugerencia: En el enunciado de la propiedad aditiva de la ordenación, toma $a = 0$, $b = y$, $c = x$.)

Podemos demostrar muchos resultados acerca de la ordenación como consecuencia de la propiedad aditiva de la ordenación. Dos de ellos son de especial interés para nosotros porque usándolos, podemos traducir enunciados acerca de la ordenación en enunciados acerca de la igualdad, y viceversa.

El primero de estos resultados será un caso especial de la propiedad. Consideremos algunos ejemplos numéricos de la propiedad si $a = 0$. En este caso, "$a < b$" viene a ser "$0 < b$"; es decir, b es un número positivo. Así, pues, escribimos: Si $0 < b$, entonces $c + 0 < c + b$.

Sea $a = 0$, $b = 3$, y $c = 4$; entonces $4 + 0 < 4 + 3$; es decir, como $7 = 4 + 3$, entonces $4 < 7$.

Sea $a = 0$, $b = 5$ y $c = -4$; entonces $(-4) + 0 < (-4) + 5$; es decir, como $1 = (-4) + 5$, entonces $(-4) < 1$.

Podemos considerar que estos dos ejemplos nos dicen:

Como $7 = 4 + 3$ y 3 es un número positivo, entonces $4 < 7$.

Como $1 = (-4) + 5$ y 5 es un número positivo, entonces $-4 < 1$.

Enunciamos este resultado como sigue:

Teorema 8-2a. Si $z = x + y$, y además y es un número positivo, entonces $x < z$.

Demostración. Podemos dar a la propiedad aditiva de la ordenación la siguiente forma:

Si $a < b$, entonces $c + a < c + b$. (¿Por qué?)

Como la propiedad es cierta para números reales cualesquiera a, b, c, podemos tomar $a = 0$, $b = y$, $c = x$. Así,

si $0 < y$, entonces $x + 0 < x + y$.

Si $z = x + y$, entonces "$x + 0 < x + y$" significa "$x < z$". Por lo tanto, hemos demostrado que si $z = x + y$, y además $0 < y$ (es decir, y es positivo), entonces $x < z$.

El teorema 8-2a nos ofrece ahora una traducción de un enunciado acerca de la igualdad, tal como

$$-4 = (-6) + 2,$$

en un enunciado acerca de la ordenación, que en este caso es

$$-6 < -4.$$

Observa que al sumar 2, un número positivo, a (-6) obtenemos un número a la derecha de -6 en la recta numérica.

Transforma el enunciado

$$4 = (-2) + 6$$

en un enunciado que contenga el concepto de ordenación.

El segundo resultado de la propiedad aditiva de la ordenación es un teorema que transforma enunciados acerca de la ordenación en enunciados acerca de la igualdad, lo contrario de lo que hace el teorema 8-2a. Has visto que si y es positivo y si x es un número cualquiera, entonces x es siempre menor que $x + y$. Si $x < z$, ¿existirá entonces un número positivo y tal que $z = x + y$? Considera, por ejemplo, los números 5 y 7, y observa que $5 < 7$. ¿Cuál es el número y tal que

$$7 = 5 + y?$$

¿Cómo hallaste y? ¿Encontraste que y es positivo? Considera los números -3 y -6, y observa que $-6 < -3$. ¿Cuál es el conjunto de validez de

$$-3 = -6 + y?$$

¿Es y positivo de nuevo?

$4 < 9,$	$9 = 4 + (\quad)$
$-3 < 5,$	$5 = (-3) + (\quad)$
$-4 < -1$	$-1 = (-4) + (\quad)$
$-6 < 0$	$0 = (-6) + (\quad)$

¿Qué clase de número hace cierta cada una de las ecuaciones anteriores? En cada caso sumaste un número positivo al número más pequeño para obtener el mayor.

Ya te habrás dado cuenta de que el teorema que tenemos en mente es:

> Teorema 8-2b. Si x, z son dos números reales tales que $x < z$, entonces hay un número real positivo y tal que
> $$z = x + y.$$

*Demostración. En realidad, tenemos que demostrar dos cosas. Primero, tenemos que hallar un valor de y tal que $z = x + y$; segundo, tenemos que demostrar que dicha y es positiva si $x < z$.

No es difícil hallar un valor de y tal que $z = x + y$. Tu experiencia en la solución de ecuaciones probablemente te sugiera que sumes $(-x)$ a los dos miembros de "$z = x + y$" para obtener $y = z + (-x)$.

Ensayemos con este valor de y. Sea

$$y = z + (-x).$$

Entonces

$$\begin{aligned} x + y &= x + \big(z + (-x)\big) \quad (\text{¿Por qué?}) \\ &= \big(x + (-x)\big) + z \quad (\text{¿Por qué?}) \\ &= 0 + z \\ x + y &= z. \end{aligned}$$

Hemos encontrado, pues, un valor de y, a saber, $z + (-x)$, tal que $z = x + y$.

Nos falta todavía demostrar que si $x < z$, entonces este valor de y es positivo. Sabemos que solamente uno de los siguientes enunciados es cierto: y es negativo, y es cero, y es positivo. (¿Por qué?) Si podemos demostrar que dos de estas posibilidades son falsas, la tercera tendrá que ser cierta. Ensayemos la primera posibilidad: Si fuera cierto que y es negativo, y que $z = x + y$, entonces la propiedad aditiva de la ordenación (con $a = y$, $b = 0$, $c = x$) afirmaría que $z < x$. Pero esto contradice la hipótesis $x < z$, de modo que no puede ser cierto que y sea negativo. Veamos la segunda posibilidad: Si fuera cierto que y es cero y que $z = x + y$, entonces sería cierto que $z = x$. De nuevo, esto contradice la hipótesis $z < x$, de modo que no puede ser cierto que y sea cero. Por consiguiente, la posibilidad restante, y es <u>positivo</u>, tiene que ser cierta. Esto completa la demostración.

El teorema 8-2b nos permite traducir un enunciado acerca de la ordenación en un enunciado acerca de la igualdad. Así,

$$-5 < -2$$

puede reemplazarse por

$$-2 = (-5) + 3,$$

que nos da la misma "información sobre la ordenación" acerca de -5 y -2. Es decir, hay un número positivo, 3, que sumado a -5, el menor de los dos números, nos da -2, el mayor.

<u>Conjunto de problemas 8-2b</u>

1. Para cada par de números, determina su ordenación y halla un número positivo b que sumado al menor de los dos dé el mayor.
   (a) -15 y -24
   (b) $\frac{63}{4}$ y $-\frac{5}{4}$
   (c) $\frac{6}{5}$ y $\frac{7}{10}$
   (d) $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$
   (e) -254 y -345
   (f) $-\frac{33}{13}$ y $-\frac{98}{39}$
   (g) -1.47 y -0.21
   (h) $(-\frac{2}{3})(\frac{4}{5})$ y $(\frac{3}{2})(-\frac{5}{4})$
2. Demuestra que el siguiente enunciado es cierto: Si a <u>y</u> c son números reales y si $c < a$, entonces hay un número real negativo b tal que $c = a + b$. (Sugerencia: Sigue un procedimiento análogo al usado para b positivo.)
3. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son ciertos para todos los valores reales de las variables?
   (a) Si $a + 1 = b$, entonces $a < b$.
   (b) Si $a + (-1) = b$, entonces $a < b$.
   (c) Si $(a + c) + 2 = (b + c)$, entonces $a + c < b + c$.
   (d) Si $(a + c) + (-2) = (b + c)$, entonces $b + c < a + c$.
   (e) Si $a < -2$, entonces existe un número positivo d tal que $-2 = a + d$.
   (f) Si $-2 < a$, entonces existe un número positivo d tal que $a = (-2) + d$.

4. (a) Del enunciado, $5 + 8 = 13$, deduce dos enunciados ciertos en los que el símbolo " < " relacione dos de los números 5, 8, 13.

   (b) Tenemos que $(-3) + 2 = (-1)$. Utilizando dos números cualesquiera de estos tres, ¿cuántos enunciados ciertos con el símbolo " < " puedes escribir?

   (c) Escribe dos enunciados ciertos utilizando el símbolo " ≯ " para relacionar los números 5 y 7, dado que $5 < 7$.

5. Muestra en la recta numérica que si a y c son números reales y si b es un número negativo tal que $c = a + b$, entonces $c < a$.

6. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son ciertos para todos los valores de las variables?

   (a) Si $b < 0$, entonces $3 + b < b$.

   (b) Si $b < 0$, entonces $3 + b < 3$.

   (c) Si $x < 2$, entonces $2x < 4$.

7. Verifica que cada uno de los siguientes enunciados es cierto:

   (a) $|3 + 4| \leq |3| + |4|$

   (b) $|(-3) + 4| \leq |-3| + |4|$

   (c) $|(-3) + (-4)| \leq |-3| + |-4|$

   (d) Para dos números reales cualesquiera a y b, enuncia una propiedad general que conecte $|a + b|$, $|a|$ y $|b|$.

8. ¿Qué propiedad general podemos enunciar para la multiplicación, semejante a la propiedad expuesta para la suma en el problema 7?

9. Traduce en enunciados abiertos los siguientes y determina sus conjuntos de validez:

   (a) La suma de un número y 5 es menor que dos veces el número. ¿Cuál es el número?

   (b) José y Manuel se proponen comprar un bote de vela, y le preguntan a un vendedor el precio de un nuevo tipo de bote que se está proyectando. El vendedor contestó: "No costará más de \$380". Si ellos habían convenido en que José contribuyera a la compra del bote con \$130 más que Manuel, ¿cuánto tendría que dar Manuel?

(c) Tres más que seis veces un número es mayor que siete aumentado en cinco veces el número. ¿Cuál es el número?

(d) Un maestro dice: "Si tuviese en mi clase dos veces el número de alumnos que ahora, tendría por lo menos 26 más de los que tengo". ¿Cuántos estudiantes hay en la clase?

*(e) Un estudiante tiene notas de 82 y 91 en dos exámenes. ¿Cuánto deberá obtener en un tercer examen para que su promedio sea 90 ó más?

*(f) Luis tiene 5 años más que Raúl y la suma de sus edades es menos de 23 años. ¿Qué edad tiene Raúl?

8-3. Propiedad multiplicativa de la ordenación

En la sección anterior enunciamos una propiedad fundamental que establece la ordenación de $a + c$ y $b + c$ cuando $a < b$. Examinemos ahora la ordenación de los productos ac y bc cuando $a < b$.

Considera el enunciado cierto,

$$5 < 8.$$

Si cada uno de estos números se multiplica por 2, se obtiene el enunciado cierto,

$$(5)(2) < (8)(2).$$

¿Qué te sugiere esto acerca de una propiedad multiplicativa de la ordenación? Antes de tomar una decisión, veamos otros ejemplos. En el caso anterior, los dos números 5 y 8 en el enunciado cierto "5 < 8" se intercalaron en "( )(2) < ( )(2)" para hacer un enunciado cierto. Haz lo mismo en los siguientes casos:

1. $7 < 10$ y $(\ )(6) < (\ )(6)$
2. $-9 < 6$ y $(\ )(5) < (\ )(5)$
3. $2 < 3$ y $(\ )(-4) < (\ )(-4)$
4. $-7 < -2$ y $(\ )(2) < (\ )(2)$
5. $-1 < 8$ y $(\ )(-3) < (\ )(-3)$
6. $-5 < -4$ y $(\ )(-6) < (\ )(-6)$

Nos ocupamos aquí de la relación de ordenación "<", observando el resultado cuando cada número en el enunciado "a < b" se multiplica por un mismo número. ¿Notaste que el procedimiento será distinto según multipliquemos por un número positivo o por uno negativo?

Los resultados anteriores sugieren que si $a < b$, entonces

$ac < bc$, siempre y cuando c sea un número positivo;

$bc < ac$, siempre y cuando c sea un número negativo.

Así encontramos otro conjunto importante de propiedades de la ordenación.

¿Cómo podrías emplear estas propiedades para decir rápidamente si los siguientes enunciados son ciertos?

Como $\frac{1}{4} < \frac{2}{7}$, entonces $\frac{5}{4} < \frac{10}{7}$.

Como $-\frac{5}{6} < -\frac{14}{17}$, entonces $\frac{14}{51} < \frac{5}{18}$.

Como $\frac{5}{3} < \frac{7}{4}$, entonces $-\frac{7}{16} < -\frac{5}{12}$.

Estas propiedades de la ordenación resultan ser consecuencias de las otras propiedades de la ordenación, y las enunciamos todas juntas del siguiente modo:

Teorema 8-3a. Propiedad multiplicativa de la ordenación: Si a, b, y c, son números reales y si $a < b$, entonces

$ac < bc$, si c es positivo,

$bc < ac$, si c es negativo.

Demostración. Hay dos casos. Consideremos primero el caso en que c es positivo. Aquí, tenemos que demostrar que si $a < b$, entonces $ac < bc$. Justifica cada paso de la demostración siguiente:

1. Existe un número positivo d tal que $b = a + d$.
2. Por tanto, $bc = (a + d)c$.
3. $bc = ac + dc$.
4. El número dc es positivo.
5. Por consiguiente, $ac < bc$.

La demostración del caso en que c es negativo se deja a los estudiantes como un ejercicio del Conjunto de problemas 8-3.

En vez de estudiar la propiedad multiplicativa de la relación de ordenación "es menor que" pudimos igualmente haber estudiado la de "es mayor que".

Cuando comparamos números, los dos enunciados "$a < b$" y "$b > a$" nos dicen lo mismo acerca de a y b. Así, cuando estamos interesados principalmente en los números más bien que en una relación particular de ordenación, tal vez convenga cambiar de una relación de ordenación a otra para entonces escribir enunciados como los siguientes:

Como $3 < 5$, entonces $3(-2) > 5(-2)$.
Como $-2 > -5$, entonces $(-2)(8) > (-5)(8)$.
Como $3 > 2$, entonces $(3)(-7) < (2)(-7)$.

Comprueba que estos enunciados son ciertos.

Cuando nos interesa no una relación de ordenación sino los números que ésta comprende, podemos decir que

$$\text{si } a < b, \text{ entonces } \begin{cases} ac < bc & \text{si } c \text{ es positivo,} \\ ac > bc & \text{si } c \text{ es negativo.} \end{cases}$$

Enuncia tú mismo estas propiedades de ordenación.

En nuestros estudios también necesitaremos algunos resultados tales como

Teorema 8-3b. Si $x \neq 0$, entonces $x^2 > 0$.

Demostración. Si $x \neq 0$, entonces x es negativo o x es positivo, pero no ambas cosas. Si x es positivo, entonces

$$x > 0,$$
$$(x)(x) > (0)(x), \qquad \text{(¿Por qué?)}$$
$$x^2 > 0.$$

Si x es negativo, entonces

$$x < 0,$$
$$(x)(x) > (0)(x), \qquad \text{(¿Por qué?)}$$
$$x^2 > 0.$$

En cualquier caso, se obtiene el resultado que nos interesa.

El teorema 8-3b establece que el cuadrado de un número distinto de cero es positivo. Para cualquier número x, ¿qué podemos decir acerca de x^2?

Es posible utilizar ventajosamente las propiedades de la ordenación para determinar conjuntos de validez de inecuaciones. Por ejemplo, determinemos el conjunto de validez de

$$(-3x) + 2 < 5x + (-6).$$

La propiedad aditiva de la ordenación nos permite sumar $(-2) + (-5x)$ a los miembros de esta inecuación para obtener

$$\left((-3x) + 2\right) + \left((-2) + (-5x)\right) < \left(5x + (-6)\right) + \left((-2) + (-5x)\right),$$

que al simplificar se convierte en

$$-8x < -8.$$

Como $\left((-2) + (-5x)\right)$ es un número real para todo valor de x, el nuevo enunciado tiene el mismo conjunto de validez que el original. (¿Qué debemos sumar a los miembros de "$-8x < -8$" para obtener el enunciado original; es decir, para invertir el paso?)

Entonces, por la propiedad multiplicativa de la ordenación,

$$(-8)\left(-\frac{1}{8}\right) < (-8x)\left(-\frac{1}{8}\right)$$

$$1 < x.$$

Aquí multiplicamos por un número real distinto de cero. Por lo tanto, este enunciado es equivalente al anterior. (¿Por cuánto debemos multiplicar los miembros de "$1 < x$" para obtener el enunciado anterior?) Evidentemente, el conjunto de validez de "$1 < x$" es el conjunto de todos los números mayores que 1, y éste es el conjunto de validez de la inecuación original.

Conjunto de problemas 8-3

1. Utilizando la forma del siguiente ejemplo, resuelve cada una de las siguientes inecuaciones: (Recuerda que "resolver" un enunciado es hallar su conjunto de validez.)

Ejemplo. $(-3x) + 4 < -5$.

Este enunciado es equivalente a

$-3x < (-5) + (-4)$, (suma (-4) a los dos miembros)

$-3x < -9$,

que a su vez es equivalente a

$(-\frac{1}{3})(-9) < (-\frac{1}{3})(-3x)$, (multiplica ambos miembros por $(-\frac{1}{3})$)

$3 < x$.

Así, el conjunto de validez consiste en todos los números mayores que 3.

(a) $(-2x) + 3 < -5$

(b) $(-2) + (-4x) > -6$

(c) $(-4) + 7 < (-2x) + (-5)$

(d) $5 + (-2x) < 4x + (-3)$

(e) $(\frac{2}{3}) + (-\frac{5}{6}) < (-\frac{1}{6}) + (-3x)$

(f) $\frac{1}{2}x + (-2) < (-5) + \frac{5}{2}x$

(g) $2x < 3 + |-2||-\frac{4}{3}|$

(h) $(-2) + 5 + (-3x) < 4x + 7 + (-2x)$

(i) $-(2 + x) < 3 + (-7)$

2. Construye las gráficas de los conjuntos de validez de las partes (a) y (b) del problema 1.

3. Traduce en enunciados abiertos los siguientes y resuélvelos:

(a) Susana tiene 16 libros más que Sara. Entre las dos tienen más de 28 libros. ¿Cuántos libros tiene Sara?

(b) Si se siembra una cierta variedad de bulbos, puede esperarse que menos de $\frac{5}{8}$ de ellos se desarrollen hasta convertirse en plantas. Sin embargo, si se les da el cuidado apropiado, más de $\frac{3}{8}$ de ellos crecerán. ¿Cuántos bulbos debió haber sembrado un jardinero cuidadoso que tiene 15 plantas?

4. Demuestra que si $a < b$ y c es un número negativo, entonces $bc < ac$. (Sugerencia: Existe un número negativo e tal que $a = b + e$. Por lo tanto, $ac = bc + ec$. ¿Qué clase de número es ec? Por consiguiente, ¿qué relación de ordenación hay entre ac y bc?)

*5. Si c es un número negativo, entonces $c < 0$. Tomando opuestos, tenemos que $0 < (-c)$. Como $(-c)$ es un número positivo, podemos demostrar el teorema del problema 4 observando que si $a < b$, entonces $a(-c) < b(-c)$; es decir, $-(ac) < -(bc)$. ¿Cómo llegamos entonces a la conclusión?

6. Si $a < b$, y además a, b son ambos números reales positivos, demuestra que $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$. (Sugerencia: Multiplica la desigualdad $a < b$ por $(\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b})$. Demuestra el teorema en la recta numérica.

7. ¿Es válida la relación $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ cuando $a < b$ y ambos a y b son negativos? Demuestra que es válida o que no lo es.

8. ¿Es válida la relación $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ cuando $a < b$, $a < 0$ y $b > 0$? Demuestra que es válida o que no lo es.

9. Enuncia las propiedades aditiva y multiplicativa de la relación de ordenación " $>$ ".

10. Demuestra lo siguiente: Si $0 < a < b$, entonces $a^2 < b^2$. (Sugerencia: Emplea las propiedades de la ordenación para obtener $a^2 < ab$ y $ab < b^2$).

8-4. Propiedades fundamentales de los números reales

En este capítulo y en los tres anteriores nos hemos ocupado de dos problemas principales. El primero fue extender la relación de ordenación y las operaciones de sumar y multiplicar de los números de la aritmética a todos los números reales. Antes de lograr esto no disponíamos, en realidad, del sistema de los números reales para trabajar. El segundo problema fue descubrir y enunciar cuidadosamente las propiedades fundamentales del sistema de los números reales. Los dos problemas, en la forma en que nos hemos visto obligados a tratarlos, están estrechamente entrelazados. En esta sección destacaremos el segundo problema, el más importante, resumiendo las propiedades fundamentales obtenidas.

Antes de continuar, debemos aceptar que la decisión respecto a qué <u>es</u> una propiedad fundamental no se toma a base de razones matemáticas rigurosas, sino que hasta cierto punto es cuestión de conveniencia y común acuerdo. Acostumbramos considerar el sistema de los números reales y sus varias propiedades como una "estructura" construida sobre una base compuesta de propiedades fundamentales. De hecho, de esa manera debes empezar a considerar ese sistema. Una buena pregunta, que ahora se puede contestar con más precisión que antes, es la siguiente: ¿Qué <u>es</u> el sistema de los números reales?

El sistema de los números reales es un conjunto de elementos para el cual están definidas las operaciones binarias de adición, " + ", y multiplicación " · ", y una relación de ordenación, " < ", con las propiedades siguientes:

1. Para dos números reales cualesquiera a <u>y</u> b, $a + b$ es un número real. (Clausura)
2. Para dos números reales cualesquiera a <u>y</u> b,
$$a + b = b + a.$$ (Conmutatividad)
3. Para tres números reales cualesquiera a, b <u>y</u> c,
$$(a + b) + c = a + (b + c).$$ (Asociatividad)
4. Existe un número real particular 0 tal que, para cualquier número real a,
$$a + 0 = a.$$ (Elemento identidad)
5. Para todo número real a existe un número real $-a$ tal que
$$a + (-a) = 0.$$ (Inversos)
6. Para dos números reales cualesquiera a <u>y</u> b, $a \cdot b$ es un número real. (Clausura)
7. Para dos números reales cualesquiera a <u>y</u> b,
$$a \cdot b = b \cdot a.$$ (Conmutatividad)

8. Para tres números reales cualesquiera
a, b y c,
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. (Asociatividad)

9. Existe un número real particular 1
tal que, para cualquier número real a,
$a \cdot 1 = a$. (Elemento identidad)

10. Para cualquier número real a, distinto
de 0, existe un número real $\frac{1}{a}$ tal que
$a \cdot (\frac{1}{a}) = 1$. (Inversos)

11. Para tres números reales cualesquiera
a, b, y c,
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. (Distributividad)

12. Para dos números reales cualesquiera
a y b, solamente uno de los siguientes
es cierto:
$a < b$, $a = b$, $b < a$. (Comparación)

13. Para tres números reales cualesquiera
a, b y c, si $a < b$ y $b < c$, entonces
$a < c$. (Transitividad)

14. Para tres números reales cualesquiera
a, b y c, si $a < b$, entonces
$a + c < b + c$. (Propiedad aditiva)

15. Para tres números reales cualesquiera
a, b y c, si $a < b$ y $0 < c$, entonces
$a \cdot c < b \cdot c$,
si $a < b$ y $c < 0$, entonces
$b \cdot c < a \cdot c$. (Propiedad multiplicativa)

Probablemente habrás notado que no están incluidas varias propiedades útiles que ya conoces. Esto no es por descuido. La razón para omitirlas es que se pueden demostrar a base de las propiedades enumeradas anteriormente. En realidad, con sólo añadir una nueva propiedad, podríamos obtener una lista de propiedades con las cuales sería posible demostrar todo lo relacionado con los números reales. No consideraremos esta propiedad adicional porque el hacerlo nos llevaría más allá de los límites de este curso. La estudiarás en un curso más avanzado.

Prácticamente toda el álgebra en este curso puede fundamentarse en la lista anterior de propiedades. Mediante las demostraciones es como establecemos conexiones entre esas propiedades fundamentales y todas las ideas y los teoremas que de ellas se desprenden. El razonamiento comprendido en las demostraciones es lo que mantiene como un todo, la estructura entera de la matemática, o de cualquier sistema lógico.

Por lo tanto, si hemos de apreciar verdaderamente lo que es la matemática, debemos primero examinar cómo están enlazadas las ideas en estos razonamientos; debemos también efectuar algunas demostraciones y no meramente contentarnos con una explicación plausible. Es cierto que algunas de las afirmaciones que hemos demostrado parecen muy obvias, y tal vez te preguntes, muy justificadamente, por qué nos tomamos la molestia de demostrarlas. Según adelantemos en nuestro estudio de la matemática, habrá más ideas que no son obvias en forma alguna y que sólo se pueden establecer mediante demostraciones. Durante las etapas más elementales de nuestra instrucción necesitamos pasar por la experiencia de examinar algunas demostraciones sencillas y de desarrollar gradualmente una buena disposición hacia el razonamiento, del que depende toda la estructura de la matemática. Es por esto por lo que examinamos detenidamente las demostraciones de algunas afirmaciones que son bien obvias.

La habilidad para descubrir un método de demostrar un teorema es algo que no se desarrolla de la noche a la mañana. Se logra examinando varias demostraciones diferentes, aprendiendo a buscar conexiones entre lo que sabemos y lo que queremos demostrar, y estudiando las sugerencias que se nos ofrecen como guía. Por otra parte, el ejercicio mental que se requiere se utiliza no sólo en la matemática sino también en todo razonamiento lógico.

Volvamos ahora a las propiedades fundamentales de los números reales y hagamos un resumen de algunas de las otras propiedades que pueden demostrarse a base de las ya mencionadas. Algunas de éstas fueron demostradas en el texto, y otras se incluyeron como ejercicios.

16. Cualquier número real x tiene solamente un inverso aditivo, a saber, $-x$.

17. Para dos números reales cualesquiera a y b,
$$-(a + b) = (-a) + (-b).$$
18. Para tres números reales a, b y c, si $a + c = b + c$, entonces $a = b$.
19. Para cualquier número real a, $a \cdot 0 = 0$.
20. Para cualquier número real a, $(-1)a = -a$.
21. Para dos números reales cualesquiera a y b, $(-a)b = -(ab)$ y $(-a)(-b) = ab$.
22. El opuesto del opuesto de un número real a es a.
23. Cualquier número real x distinto de 0 tiene solamente un inverso multiplicativo; a saber, $\frac{1}{x}$.
24. El número 0 no tiene recíproco.
25. El recíproco de un número positivo es positivo, y el recíproco de un número negativo es negativo.
26. El recíproco del recíproco de un número real a, distinto de cero, es a.
27. Para dos números reales cualesquiera a y b, distintos de 0,
$$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{ab}.$$
28. Para dos números reales a y b, $ab = 0$ si y solamente si $a = 0$ ó $b = 0$.
29. Para tres números reales a, b, y c, siendo $c \neq 0$, si $ac = bc$, entonces $a = b$.
30. Para dos números reales cualesquiera a y b, si $a < b$, entonces $-b < -a$.
31. Si a, b son números reales tales que $a < b$, entonces existe un número positivo c tal que $b = a + c$.
32. Si $x \neq 0$, entonces $x^2 > 0$.
33. Si $0 < a < b$, entonces $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.
34. Si $0 < a < b$, entonces $a^2 < b^2$.

Tal vez habrás notado que en la sección 8-3 ofrecimos una demostración de la propiedad multiplicativa de la ordenación. De hecho, esta propiedad (la número 15 de la lista) es consecuencia inmediata de las otras catorce propiedades fundamentales. Por lo tanto, se pudo haber omitido sin que esto limitara en modo alguno el alcance de la lista. Sin embargo, hemos incluido la propiedad a fin de recalcar la analogía que hay entre las propiedades de la suma y las de la multiplicación.

Habrás notado también que en el estudio anterior de las propiedades fundamentales nunca se mencionó el valor absoluto. Este importante concepto puede incluirse dentro del marco de las propiedades fundamentales mediante la siguiente definición:

$$\text{Si } 0 \leq a, \text{ entonces } |a| = a.$$
$$\text{Si } a < 0, \text{ entonces } |a| = -a.$$

Terminamos este resumen mencionando algunas propiedades de naturaleza muy diferente; a saber, las <u>propiedades de la igualdad</u>. Estas son propiedades más bien del lenguaje del álgebra que de los números reales. Recuerda que el enunciado "$a = b$", donde "a" y "b" son numerales, afirma que "a" y "b" son nombres del mismo número. Las dos primeras propiedades de la igualdad que enumeraremos no han sido enunciadas anteriormente, pero en realidad, se han empleado muchas veces. En las siguientes propiedades, a, b <u>y</u> c son números reales cualesquiera.

35. Si $a = b$, entonces $b = a$. (Reflexibilidad)
36. Si $a = b$, y además $b = c$, entonces $a = c$. (Transitividad)
37. Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$. (Propiedad aditiva)
38. Si $a = b$, entonces $ac = bc$. (Propiedad multiplicativa)
39. Si $a = b$, entonces $-a = -b$.
40. Si $a = b$, entonces $|a| = |b|$.

<u>Problemas de repaso</u>

1. Determina la ordenación entre cada par de números:

   (a) $-100, -99$
   (b) $0.2, -0.1$
   (c) $|-3|, |-7|$
   (d) $\frac{6}{7}, \frac{5}{8}$
   (e) $3 \cdot 4 - 4, 3(4 - 4)$
   (f) $x^2 + 1, 0$

2. Si $p > 0$ y $n < 0$, determina cuáles de los siguientes enunciados son ciertos y cuáles son falsos:
   (a) Si $5 > 3$, entonces $5n < 3n$.
   (b) Si $a > 0$, entonces $ap < 0$.
   (c) Si $3x > x$, entonces $3px > px$.
   (d) Si $(\frac{1}{n})x > 1$, entonces $x > n$.
   (e) Si $p > n$, entonces $\frac{1}{p} < \frac{1}{n}$.
   (f) Si $\frac{1}{p} > \frac{1}{x}$ y $\frac{1}{x} > 0$, entonces $p < x$ y $x > 0$.
3. ¿Cuáles de los siguientes pares de enunciados son equivalentes?
   (a) $3a > 2$, $(-3)a > (-2)$
   (b) $3x > 2 + x$, $2x > 2$
   (c) $3y + 5 = y + (-1)$, $2y = (-6)$
   (d) $-x < 3$, $x > (-3)$
   (e) $-p + 5 < p + (-1)$, $6 > 2p$
   (f) $\frac{1}{m} < \frac{1}{2}$ y $m > 0$, $m < 2$
4. Si $p > 0$ y $n < 0$, determina cuáles de las siguientes expresiones representan números positivos y cuáles números negativos:
   (a) $-n$
   (b) n^2
   (c) $-n^2$
   (d) pn
   (e) $(-p + (-n))^2$
   (f) $|n|$
5. Resuelve cada una de las siguientes inecuaciones:
   (a) $-x > 5$
   (b) $(-1) + 2y < 3y$
   (c) $(-\frac{1}{2})z < 3$
   (d) $(-4) + (-x) > 3x + 8$
   (e) $b + b + 5 + 2b + 12 \leq 381$
   (f) $x(x + 1) < x$
6. Determina el conjunto de validez de cada uno de los siguientes enunciados:
   (a) $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$ y $x > 0$
   (b) $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$
   (c) $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$ y $x < 0$
   (d) $(\frac{1}{x})^2 > 0$ y $x \neq 0$
   (e) $0 \leq 2x < 180$
   (f) $x^2 + 1 = 0$

7. Si el dominio de la variable es el conjunto de los enteros, determina los conjuntos de validez de los siguientes enunciados:

(a) $3x + 2x = 10$

(b) $x + (-1) = 3x + 1$

(c) $2x + 1 = -3x + (-9)$

(d) $2\big(x + (-3)\big) = 5$

(e) $3x + 5 < 2x + 3$

(f) $(\frac{1}{2}) + (-x) > (-\frac{1}{2}) + (-2x)$

8. Resuelve las siguientes ecuaciones:

(a) $3x = 5$

(b) $3 + x = 5$

(c) $2n + n + (-2) = 0$

(d) $7y + 3 = y + (-3)$

(e) $3x = 7x + (-2)x$

(f) $3q + (-q) + 5 + q = (-2)$

9. Resuelve las siguientes ecuaciones:

(a) $3(x + 5) = (x + 3) + x$

(b) $x(x + 3) = \big(x + (-4)\big)(x + 3)$

(c) $\frac{1}{2}y + (-\frac{1}{3}) = (-\frac{1}{2})y + (-\frac{1}{3})$

(d) $a^2 = a(a + 1)$

(e) $(x + 2)(x + 3) = x(x + 5) + 6$

(f) $2q^2 + 2q + q^2 = (3q + 5)(q + 1)$

10. El largo de un rectángulo es mayor que o igual a 6 unidades y menor que 7 unidades, y el ancho es 4 unidades. Halla el área del rectángulo.

11. El largo de un rectángulo es mayor que o igual a 6 unidades y menor que 7 unidades, y el ancho es mayor que o igual a 4 unidades y menor que 5 unidades. Halla el área del rectángulo.

*12. El largo de un rectángulo es mayor que o igual a 6.15 pulgadas y menor que 6.25 pulgadas, y el ancho es mayor que o igual a 4.15 pulgadas y menor que 4.25 pulgadas. Halla el área del rectángulo.

13. (a) Una cierta variedad de maíz produce 240 semillas por cada planta. Cuando se siembran, no todas las semillas se desarrollan; entre $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{6}$ de ellas producirán plantas nuevas. Cada nueva planta a su vez producirá 240 semillas. Si en un año se siembran las semillas de una sola planta de maíz, ¿cuántas semillas se podrán obtener en el siguiente año?

(b) Supongamos que, en el ejercicio anterior, una planta de maíz, en vez de producir 240 semillas, produce entre 230 y 250. Con esta condición, ¿cuántas semillas se podrán obtener en un año de las 240 sembradas el año anterior?

14. En los siguientes problemas, escribe enunciados abiertos y contesta la pregunta de cada uno:

(a) Un cuadrado y un triángulo equilátero tienen perímetros iguales. Un lado del triángulo es 3.5 pulgadas más largo que un lado del cuadrado. ¿Cuál es el largo del lado del cuadrado?

(b) Un bote, navegando a favor de la corriente, tiene una velocidad de 10 millas por hora más que la de la corriente. La velocidad del bote en esa dirección no es mayor de 25 millas por hora. ¿Cuál es la velocidad de la corriente?

(c) María tiene que hacer un trabajo de mecanografía que le empleará por lo menos tres horas. Si empieza a la 1 P.M. y debe terminar no más tarde de las 6 P.M., ¿cuánto tiempo espera que le ocupe el trabajo?

(d) Jaime recibe $1.50 por hora por un trabajo que hace en sus horas libres y ahorra lo que se gana para comprar un carro. ¿Cuántas horas tendrá que trabajar si el carro le ha de costar por lo menos $75?

Capítulo 9

LA RESTA Y LA DIVISION DE NUMEROS REALES

9-1. Definición de la resta

Supongamos que haces una compra por valor de 83 centavos, y das un dólar a la cajera. ¿Qué hace ella? Te devuelve dos centavos y dice "85", luego una moneda de 5 centavos y dice "90", y finalmente una moneda de 10 centavos y dice "un dólar". ¿Qué ha estado haciendo ella? Restando 83 de 100. ¿Cómo hace esto? Buscando cuánto debe sumar a 83 para obtener 100. La pregunta, "¿100 - 83 = cuánto?" significa lo mismo que "¿83 + cuánto = 100?" ¿Y cómo hemos resuelto la ecuación,

$$83 + x = 100$$

en el pasado? Sumamos a ambos lados el opuesto de 83, y obtenemos

$$x = 100 + (-83).$$

Por lo tanto, "100 - 83" y "100 + (-83)" son nombres del mismo número.

Practica con algunos otros ejemplos:

$20 - 9 = 11$	$20 + (-9) = 11$
$8 - 6 = 2$	$8 + (\ \ ) = 2$
$5 - 2 = (\ \ )$	$5 + (\ \ ) = 3$
$8.5 - (\ \ ) = 5.3$	$8.5 + (-3.2) = (\ \ )$

Después de estudiar estos ejemplos, convendrás en que al restar un número positivo b de un número positivo mayor a, se obtiene el mismo resultado que al sumar el opuesto de b al número a.

Como ya has tenido experiencia con la resta de números positivos, probablemente te preguntarás qué hemos logrado con lo anterior. Nuestro problema es decidir cómo definir la resta para todos los números reales. Hemos descrito ahora la resta, en el caso ya conocido de los números positivos, mediante operaciones que sabemos efectuar con todos los números reales; a saber, las de sumar y tomar opuestos. Por lo tanto, definimos la resta para todos los números reales como sumar el opuesto. De este modo, extendemos la resta a los números reales de manera que conserve las propiedades que ya conocemos de la aritmética; y en nuestra definición sólo se utilizaron ideas ya conocidas.

Para <u>restar</u> el número real b del número real a, suma el opuesto de b al número a. Así, para dos números reales a, b,

$$a - b = a + (-b).$$

<u>Ejemplos</u>.

$$2 - 5 = 2 + (-5) = -3$$
$$5 - 2 = 5 + (-2) = 3$$
$$(-2) - 5 = (-2) + (-5) = -7$$
$$2 - (-5) = 2 + 5 = 7$$
$$(-5) - 2 = \ ?$$
$$5 - (-2) = \ ?$$
$$(-2) - (-5) = \ ?$$
$$(-5) - (-2) = \ ?$$

Lee la expresión "5 - (-2)". ¿Hemos utilizado el símbolo " - " de dos maneras distintas? ¿Qué significa el primer símbolo " - "? ¿Qué significa el segundo?

Como ayuda para utilizar con claridad este símbolo, formulamos los siguientes enunciados análogos acerca de los dos significados:

En "a - b",	En "a + (-b)",
el símbolo " - " está <u>entre</u> dos numerales e indica la operación de <u>restar</u>. Leemos la expresión como "a menos b".	el símbolo " - " es parte de un numeral e indica el <u>opuesto de</u>. Leemos la expresión como "a sumado al opuesto de b".

Vemos que la operación de restar está muy relacionada con la de sumar. Enunciamos esto como sigue:

<u>Teorema 9-1</u>. Para tres números reales a, b, c, $a = b + c$ si y solamente si $a - b = c$.

<u>Demostración</u>. Recuerda que para demostrar un teorema en que intervenga la condición "si y solamente si" tenemos que demostrar, en realidad, dos teoremas.

Primero demostramos que si $a = b + c$, entonces $a - b = c$.

$$a = b + c$$
$$a + (-b) = (b + c) + (-b) \quad \text{(¿Por qué?)}$$
$$a - b = (b + (-b)) + c \quad \text{(¿Por qué?)}$$
$$a - b = c \quad \text{(¿Por qué?)}$$

Demostremos ahora que si $a - b = c$, entonces $a = b + c$. Para ello, observa que "$a - b = c$" significa "$a + (-b) = c$". Ahora podrás completar la demostración.

Conjunto de problemas 9-1

1. $(-5000) - (-2000)$
2. $\frac{3}{4} - (-\frac{1}{2})$
3. $(-\frac{9}{2}) - (-6)$
4. $(-0.631) - (0.631)$
5. $(-1.79) - 1.22$
6. $0 - (-5)$
7. $75 - (-85)$
8. $(-\frac{5}{9}) - \frac{13}{9}$
9. Resta -8 de 15.
10. De -25, resta -4.
11. ¿Qué número es 6 menos que -9?
12. ¿Cuánto mayor es -12 que -17?
13. ¿Cuánto mayor es 8 que -5?
14. Sea R el conjunto de todos los números reales y S el conjunto de todos los números obtenidos al efectuar la operación de restar con pares de números de R. ¿Es S un subconjunto de R? ¿Es el conjunto de los números reales cerrado respecto de la resta? ¿Es el conjunto de los números de la aritmética cerrado respecto de la resta?
15. Muestra por qué "$a - a = 0$" es cierto para todos los números reales.

16. Halla el conjunto de validez de cada una de las siguientes ecuaciones:

(a) $y - 725 = 25$ (d) $3y - 2 = -14$

(b) $z - 34 = 76$ (e) $x + 23.6 = 7.2$

(c) $2x + 8 = -16$ (f) $z + (-\frac{3}{4}) = -\frac{1}{2}$

17. La temperatura bajó 10° desde una temperatura original de 3° bajo cero. ¿Cuál es la nueva temperatura? Muestra cómo esta pregunta está relacionada con la resta de números reales.

18. La Sra. J. tenía un haber de \$7.23 en su cuenta en una tienda por departamentos. Compró a crédito un traje de \$15.50. ¿Cuál era entonces el balance de su cuenta?

19. Guillermo le debía 80 centavos a su hermano y le pagó 50 centavos. ¿Cómo podemos escribir esta transacción como una resta de números reales? (Representa la deuda de 80 centavos por (-80)).

20. El punto más bajo del Valle de la Muerte está a 282 pies bajo el nivel del mar. La cumbre del Monte Whitney, visible desde este valle, está a una altura de 14,495 pies sobre el nivel del mar. ¿Qué altura tiene el Monte Whitney sobre el Valle de la Muerte?

9-2. Propiedades de la resta

¿Cuáles son algunas propiedades de la resta? ¿Es

$$5 - 2 = 2 - 5?$$

¿A qué conclusión llegas acerca de la conmutatividad de la resta? ¿Y es

$$8 - (7 - 2) = (8 - 7) - 2?$$

¿Crees que la resta es asociativa?

Si la resta no tiene algunas de las propiedades conocidas, tendremos que aprender a restar refiriéndonos a la definición en términos de sumar el opuesto. La suma, después de todo, sí tiene estas propiedades.

Por ejemplo, como la resta no es asociativa, la expresión

$$3 - 2 - 4$$

no es realmente un numeral porque no es el nombre de un número en particular. Recuerda que la resta es una operación binaria; es decir, en ella intervienen dos números. Entonces, ¿entenderemos que "3 - 2 - 4" significa "3 - (2 - 4)" ó "(3 - 2) - 4"? Para llegar a una decisión, transformamos la resta en la suma del opuesto. Entonces,

$$\begin{aligned} 3 - (2 - 4) &= 3 + \left(-(2 + (-4))\right) \\ &= 3 + \left((-2) + 4\right) \\ &= 3 + (-2) + 4. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} (3 - 2) - 4 &= (3 + (-2)) + (-4) \\ &= 3 + (-2) + (-4). \end{aligned}$$

Escogemos el segundo de estos significados como el más apropiado. Convendremos pues, que

$$a - b - c \text{ significa } (a - b) - c;$$

es decir,

$$a - b - c = a + (-b) + (-c).$$

Ejemplo 1. Halla un nombre corriente para

$$\left(\frac{6}{5} + 2\right) - \frac{1}{5}.$$

Podemos considerar esto como $\left(\frac{6}{5} + 2\right) + \left(-\frac{1}{5}\right)$, y entonces sabemos que podemos escribir

$$\begin{aligned} \left(\frac{6}{5} + 2\right) - \frac{1}{5} &= \left(\frac{6}{5} + 2\right) + \left(-\frac{1}{5}\right) \\ &= \left(\frac{6}{5} + \left(-\frac{1}{5}\right)\right) + 2 \\ &= 1 + 2 \\ &= 3. \end{aligned}$$

Ejemplo 2. Aplica las propiedades de la suma para escribir la expresión $-3x + 5x - 8x$ en una forma más sencilla.

$$-3x + 5x - 8x = (-3)x + 5x + (-8)x.$$

Empleamos aquí el teorema, $-ab = (-a)b$, para el primer término, y la definición de la resta y el mismo teorema para el último término. Es decir, consideramos la expresión, $-3x + 5x - 8x$ como la suma de las expresiones, $(-3)x$, $5x$, $(-8)x$. Entonces

$$\begin{aligned} -3x + 5x - 8x &= \big((-3) + 5 + (-8)\big)x \quad \text{por la propiedad distributiva} \\ &= -6x. \end{aligned}$$

La palabra "simplifica" se usa habitualmente para indicar instrucciones tales como "halla un nombre corriente de" y "emplea las propiedades de la suma para escribir en una forma más sencilla lo siguiente", aun cuando no es tan precisa como esas frases. De ahora en adelante, utilizaremos este término cuando no haya posibilidad de confusión.

Ejemplo 3. Simplifica $(5y - 3) - (6y - 8)$.

$$\begin{aligned} (5y - 3) - (6y - 8) &= 5y + (-3) + \big(-(6y + (-8))\big) && \text{(¿Por qué?)} \\ &= 5y + (-3) + \big(-(6y)\big) + \big(-(-8)\big), && \text{toda vez que el opuesto de la suma es la suma de los opuestos.} \\ &= 5y + (-3) + (-6)y + 8 && \text{(¿Por qué?)} \\ &= (-1)y + 5 && \text{(¿Por qué?)} \\ &= -y + 5. \end{aligned}$$

En vez de haber empleado la afirmación de que el opuesto de una suma es la suma de los opuestos, bien pudimos haber empleado el teorema 7-2a, el cual establece que $-a = (-1)a$, y luego la propiedad distributiva. Entonces nuestro ejemplo hubiera aparecido como sigue:

$$\begin{aligned} (5y - 3) - (6y - 8) &= 5y - 3 + \big(-(6y - 8)\big) \\ &= 5y - 3 + (-1)\big(6y + (-8)\big) \\ &= 5y - 3 + (-1)(6y) + (-1)(-8) \\ &= 5y - 3 - 6y + 8 \\ &= -y + 5 \end{aligned}$$

Cuando entiendas los pasos efectuados podrás abreviarlos así:

$$(5y - 3) - (6y - 8) = 5y - 3 - 6y + 8$$
$$= -y + 5.$$

Tal vez te asombre la manera cómo ahora efectuamos mentalmente algunos pasos. Esta habilidad de abarcar varios pasos sin tener que escribirlos todos es una indicación de nuestro desarrollo matemático. No obstante, debemos estar dispuestos en cualquier momento a señalar y explicar en detalle cada paso.

Por ejemplo, justifica cada uno de los siguientes pasos:

$$\begin{aligned}
(6a - 8b + c) - (4a - 2b + 7c) &\\
&= \big(6a + (-8b) + c\big) + \big(-(4a + (-2b) + 7c)\big)\\
&= \big(6a + (-8b) + c\big) + (-4a) + \big(-(-2b)\big) + (-7c)\\
&= \big(6a + (-8b) + c\big) + (-4a) + 2b + (-7c)\\
&= \big(6a + (-4a)\big) + \big((-8b) + 2b\big) + \big(c + (-7c)\big)\\
&= \big(6a + (-4)a\big) + \big((-8)b + 2b\big) + \big(1c + (-7)c\big)\\
&= \big(6 + (-4)\big)a + \big((-8) + 2\big)b + \big(1 + (-7)\big)c\\
&= 2a + (-6)b + (-6)c\\
&= 2a + (-6b) + (-6c)\\
&= 2a - 6b - 6c
\end{aligned}$$

Conjunto de problemas 9-2a

Simplifica: (En los problemas 7 y 20 muestra y explica cada paso como se hizo en las primeras dos partes del ejemplo 3. En los demás problemas utiliza la forma abreviada de la tercera parte del ejemplo 3.)

1. (a) $3x - 4x$
   (b) $-5a - 3a$
   (c) $4x^2 - (-7x^2)$
   (d) $-4xz - xz$
2. (a) $-3y - 5y + y$
   (b) $-3c + 5c - \frac{1}{2}c$
   (c) $7x^2 - 4x^2 - 11x^2$
   (d) $3a^2 - 5a^2 + 6a$
3. (a) $-(3x - 4y)$
   (b) $-(-5a - 3y)$
   (c) $-(4a - 6a)$
   (d) $-(7 - x)$
4. $(3.6 - 1.7) + (2.7 - 8.6)$
5. $(\frac{3}{4} - \frac{1}{6}) - \frac{1}{4}$
6. $(\frac{3}{4} - \frac{1}{6}) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{6})$
7. $(3\pi + 9) - (5\pi - 9)$

8. $(2\sqrt{5} + 8) + (2 - \sqrt{5})$
9. $-4y + 6y$
10. $-3c + 5c + \frac{1}{2}c$
11. $(3x - 6) + (7 - 4x)$
12. $(3x - 6) + (6 - 3x)$
13. $(5a - 17b) - (4a - 6b)$
14. $(2x + 7) + (4x^2 + 8 - x)$
15. $(3a + 2b - 4) - (5a - 3b + c)$
16. $(7x^2 - 3x) + (4x^2 - 7x - 8)$
17. $(7x^2 - 3x) - (4x^2 - 7x - 8)$
18. $(7xy - 4xz) - (8xy - 3yz)$
19. $(3n + 12p - 8a) - (5a - 7n - p)$
20. $(5x - 3y) - (2 + 5x) + (3y - 2)$

21. De $11a + 13b - 7c$ resta $8a - 5b - 4c$.
22. ¿Cuál es el resultado de restar $-3x^2 + 5x - 7$ de $-3x + 12$?
23. ¿Qué debemos sumar a $3s - 4t + 7u$ para obtener $-9s - 3u$?
24. Demuestra: Si $a > b$, entonces $a - b$ es positivo.
25. Si $(a - b)$ es un número positivo, ¿cuál de los enunciados, $a < b$, $a = b$, $a > b$ es cierto? ¿Y si $(a - b)$ es un número negativo? ¿Y si $(a - b)$ es cero?
26. Si a, b, c son números reales y además $a > b$, ¿qué se puede decir acerca de la ordenación de $a - c$ y $b - c$? Demuestra esa afirmación.

La definición de la resta en términos de la suma nos permite extender aún más nuestras aplicaciones de la propiedad distributiva y describir en un lenguaje diferente algunos de los pasos llevados a cabo al determinar conjuntos de validez.

Ejemplo. Simplifica

$$(-3)(2x - 5).$$

Aplicando la definición de la resta, tenemos que

$$
\begin{aligned}
(-3)(2x - 5) &= (-3)\big(2x + (-5)\big) \\
&= (-3)(2x) + (-3)(-5) \qquad \text{(¿Por qué?)} \\
&= \big((-3)(2)\big)x + 15 \qquad \text{(¿Qué propiedades de la multiplicación utilizamos aquí?)} \\
&= (-6)x + 15 \\
&= -6x + 15.
\end{aligned}
$$

Tal vez hubieras trabajado mentalmente algunos de estos pasos y hubieras escrito directamente:

$$(-3)(2x - 5) = -6x + 15,$$

pensando que "(-3) por $(2x)$ es igual a $(-6x)$"
y que "(-3) por (-5) es igual a 15".

Conjunto de problemas 9-2b

1. Efectúa las operaciones indicadas y simplifica cuando sea posible:
   (a) $4(3 - 5)$
   (b) $2\big(-4 - (-a)\big)$
   (c) $(-3)\big(4 - (-5)\big)$
   (d) $(-x)(-2 + 7)$
   (e) $(-4)(3 - x)$
   (f) $5(3 - 2x)$
   (g) $(-2)\big(3x - (-3)\big)$
   (h) $2(-3x - 3)$
   (i) $a(b - 2)$
   (j) $(-y)(-x - 4)$
2. Efectúa las operaciones indicadas y simplifica cuando sea posible:
   (a) $(-3)(-a + 2b - c)$
   (b) $(-3x + 2y) + 2(-2x - y)$
   (c) $(-2)(a - 2b) + 3(a - 2b)$
   (d) $4u(2u + 3) - 3(2u + 3)$
   (e) $x(x + y) - y(x + y)$
   (f) $2a(a - b) + b(a - b)$
   (g) $3(a - b + c) - (2a - b - 2c)$
   (h) $(-x)(4x - y) + 2x(-x - y)$
   (i) $a(b + c + 1) - 2a(2b + c - 1)$
   (j) $a(a + b + 3) + b(a + b + 3) + 3(a + b + 3)$

3. Resuelve:

(a) $3x - 4 = 5$

(b) $2a - 1 = 4a - 3$

(c) $-3y = 2 - y - 6$

(d) $-2 - 2y < -1$

(e) $4u + 3 > -5u - 3$

(f) $0.7x + 1.3 = 3.2 + 1.4x - 0{,}3$

(g) $-x - 1 < 4 - x$

(h) $3a + 3 = 7a + 4 - 4a - 1$

(i) $1.2 - 2.5c < -3.3 - c$

4. (a) El ancho de un rectángulo es 5 pulgadas menor que el largo. ¿Cuál es el largo, si el perímetro es de 38 pulgadas?

(b) Si a un número le restamos 17, y multiplicamos el resultado por 3, el producto es 102. ¿Cuál es el número?

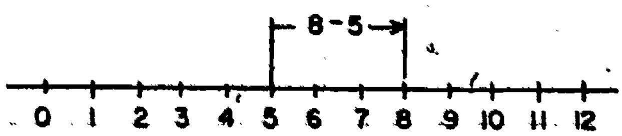
(c) Un maestro dice: "Si tuviese en mi clase tres veces el número de alumnos que tengo ahora, tendría un número menor que 46 más de los que hay". ¿Cuántos estudiantes tiene en la clase?

9-3. La resta en términos de distancia

Suponte que preguntemos: En la recta numérica, ¿qué distancia hay desde 5 hasta 8? Si x representa el número de unidades en esta distancia, entonces

$$5 + x = 8.$$

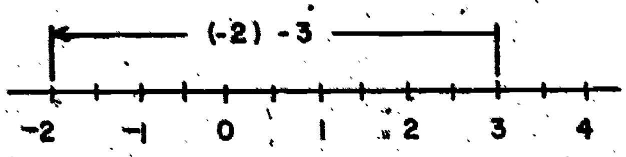
Como hemos visto, la solución de esta ecuación puede escribirse como $x = 8 - 5$. Así, podemos interpretar a $8 - 5$ como la distancia desde 5 hasta 8 en la recta numérica.



Preguntemos ahora qué distancia hay desde 3 hasta (-2). Si y representa el número de unidades en esta distancia, entonces

$$3 + y = (-2)$$
$$y = (-2) - 3.$$

Así, $(-2) - 3$ se puede interpretar como la distancia desde 3 hasta (-2).



La cantidad $8 - 5 = 3$ es positiva, mientras que $(-2) - 3$ es negativa. ¿Qué nos dice esto? Nos dice que la distancia desde 5 hasta 8 se mide hacia la <u>derecha</u>, y desde 3 hasta (-2) se mide hacia la <u>izquierda</u>. Por lo tanto, $a - b$ nos da efectivamente la distancia <u>desde</u> b <u>hasta</u> a; es decir, nos da a la vez la longitud y la dirección.

Supongamos que nos interesa, no la dirección, sino solamente la distancia <u>entre</u> a <u>y</u> b. Entonces $a - b$ es la distancia desde b hasta a, $b - a$ es la distancia desde a hasta b, y la distancia <u>entre</u> a <u>y</u> b es la que sea positiva de esas dos cantidades. A base de nuestro trabajo anterior sabemos que ésta es $|a - b|$.

Por ejemplo, la distancia <u>desde</u> 3 <u>hasta</u> (-2) es $(-2) - 3$, es decir, -5; la distancia <u>entre</u> 3 <u>y</u> (-2) es $|(-2) - 3|$, es decir, 5. De igual modo, la distancia <u>desde</u> 2 <u>hasta</u> x es $x - 2$; la distancia <u>entre</u> 2 <u>y</u> x es $|x - 2|$.

<u>Conjunto de problemas 9-3</u>

1. ¿Qué distancia hay
   (a) desde -3 hasta 5?
   (b) entre -3 y 5?
   (c) desde 6 hasta -2?
   (d) entre 6 y -2?
   (e) desde 5 hasta 1?
   (f) entre 5 y 1?
   (g) desde -8 hasta -2?
   (h) entre -8 y -2?
   (i) desde 7 hasta 0?
   (j) entre 7 y 0?

2. ¿Qué distancia hay

(a) desde x hasta 5?

(b) entre x y 5?

(c) desde -2 hasta x?

(d) entre -2 y x?

(e) desde -1 hasta $-x$?

(f) entre $-x$ y -1?

(g) desde 0 hasta x?

(h) entre 0 y x?

3. En cada uno de los siguientes pares de expresiones, sustituye el signo de interrogación por uno de los símbolos " < ", " = ", " > " para obtener un enunciado cierto.

(a) $|9 - 2| \ ? \ |9| - |2|$

(b) $|2 - 9| \ ? \ |2| - |9|$

(c) $|9 - (-2)| \ ? \ |9| - |-2|$

(d) $|(-2) - 9| \ ? \ |-2| - |9|$

(e) $|(-9) - 2| \ ? \ |-9| - |2|$

(f) $|2 - (-9)| \ ? \ |2| - |-9|$

(g) $|(-9) - (-2)| \ ? \ |-9| - |-2|$

(h) $|(-2) - (-9)| \ ? \ |-2| - |-9|$

4. Escribe un símbolo entre $|a - b|$ y $|a| - |b|$ para obtener un enunciado que sea cierto para todos los números reales a y b. Haz lo mismo para $|a - b|$ y $|b| - |a|$; para $|a - b|$ y $\big||a| - |b|\big|$.

5. Describe los enunciados obtenidos en el problema 4 en términos de distancia en la recta numérica.

6. ¿Para qué dos números x en la recta numérica es cierto el siguiente enunciado?

$$|x - 4| = 1$$

7. ¿Cuál es el conjunto de validez del enunciado,

$$|x - 4| < 1?$$

Construye la gráfica de este conjunto en la recta numérica.

8. ¿Cuál es el conjunto de validez del enunciado,

$$|x - 4| > 1?$$

9. Construye la gráfica del conjunto de validez de

$$x > 3 \text{ y } x < 5$$

en la recta numérica. ¿Es este conjunto idéntico al conjunto de validez de $|x - 4| < 1$? (Acostumbramos escribir "$3 < x < 5$" en vez del enunciado "$x > 3$ y $x < 5$".)

10. Determina el conjunto de validez de cada una de las siguientes ecuaciones y representa gráficamente cada uno de los conjuntos:

(a) $|x - 6| = 8$
(b) $y + |-6| = 10$
(c) $|10 - a| = 2$
(d) $|x| < 3$
(e) $|v| > -3$
(f) $|y| + 12 = 13$
(g) $|x - 8| < 4$ (Lee esto así: La distancia entre x y 8 es menor que 4.)
(h) $|z| + 12 = 6$
(i) $|x - (-19)| = 3$
(j) $|y + 5| = 9$

11. Para cada enunciado en la columna de la izquierda, escoge el enunciado en la columna de la derecha que tenga el mismo conjunto de validez:

$\|x\| = 3$	$x = -3$ y $x = 3$
$\|x\| < 3$	$x = -3$ ó $x = 3$
$\|x\| \leq 3$	$x > -3$ y $x < 3$
$\|x\| > 3$	$x > -3$ ó $x < 3$
$\|x\| \geq 3$	$x < -3$ y $x > 3$
$\|x\| \not< 3$	$x < -3$ ó $x > 3$
$\|x\| \not> 3$	$x \leq -3$ ó $x \geq 3$

*12. Juan y Raúl salen en bicicletas desde un punto marcado con 0 en una carretera recta. Juan corre a 10 millas por hora y Raúl a 12 millas por hora. Halla la distancia entre ellos al cabo de

(1) 3 horas, (2) $1\frac{1}{2}$ horas, (3) 20 minutos, si

(a) Salen al mismo tiempo desde la marca 0 y Juan va hacia el este y Raúl hacia el oeste.

(b) Cuando salen, Juan se encuentra a 5 millas al este y Raúl a 6 millas al oeste de la marca 0, y ambos van hacia el este.

(c) Juan sale desde la marca 0 y va hacia el este. Raúl sale 15 minutos más tarde, también desde la marca 0, y va hacia el oeste.

(d) Ambos salen al mismo tiempo: Juan desde la marca 0 y va hacia el oeste y Raúl desde 6 millas al oeste de dicha marca y también va hacia el oeste.

9-4. La división

Recordarás que definimos el restar un número como el sumar su opuesto:

$$a - b = a + (-b).$$

En otras palabras, definimos la resta en términos de la suma y el inverso aditivo.

Puesto que la relación entre la división y la multiplicación es casi la misma que la que hay entre la resta y la suma, podríamos esperar que la división se defina en términos de la multiplicación y el inverso multiplicativo. Esto es exactamente lo que hacemos.

> Para dos números reales cualesquiera a y b ($b \neq 0$), "a dividido por b" significa "a multiplicado por el recíproco de b".

Utilizaremos el símbolo "$\frac{a}{b}$" para indicar "a dividido por b". Este símbolo no es nuevo. Lo has utilizado como una fracción para indicar división. Así, pues, la definición de la división es:

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}, \quad (b \neq 0).$$

Como en la aritmética, llamaremos a "a" el <u>numerador</u> y a "b" el <u>denominador</u> de la fracción "$\frac{a}{b}$". Cuando no haya posibilidad de confusión, llamaremos también <u>numerador</u> al <u>número</u> que "a" representa y <u>denominador</u> al <u>número</u> que "b" representa.

A continuación aparecen algunos ejemplos de nuestra definición. El símbolo $\frac{10}{2}$ se interpreta como $10 \cdot \frac{1}{2}$, ó 5; e igualmente $\frac{3}{\frac{1}{5}}$ quiere decir $3\left(\frac{1}{\frac{1}{5}}\right)$, ó 3(5), ó 15.

¿Está de acuerdo está definición de la división con las ideas que acerca de ella tenemos en la aritmética? Por ejemplo, una manera elemental de referirnos a $\frac{10}{2}$ es preguntar, "¿qué número multiplicado por 2 da 10?" Como $5 \cdot 2 = 10$, entonces $\frac{10}{2} = 5$.

¿Por qué en la definición de la división se impuso la restricción "$b \neq 0$"? Debes estar prevenido contra el tratar inadvertidamente de efectuar la operación imposible de dividir por cero.

Conjunto de problemas 9-4a

Escribe nombres corrientes para los siguientes:

1. $\frac{75}{5}$
2. $\frac{570}{570}$
3. $\frac{2500}{1}$
4. $\frac{-30}{-5}$
5. $\frac{30}{-5}$
6. $\frac{-30}{5}$
7. $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{6}}$
8. $\dfrac{4}{\frac{3}{5}}$
9. $\dfrac{\frac{7}{8}}{2}$
10. $\dfrac{\frac{-2}{3}}{-\frac{1}{3}}$
11. $\frac{2b}{b}$
12. $\frac{x}{y}$

Completa los siguientes enunciados mentalmente y compáralos:

$$\frac{10}{2} = 5 \quad y \quad 10 = 5 \cdot 2,$$

$$\frac{-18}{-3} = 6 \quad y \quad -18 = 6(\quad),$$

$$\frac{8y}{(\quad)} = 2y \quad y \quad 8y = 2y(4).$$

¿Qué te sugieren estos ejemplos acerca de la relación entre la multiplicación y la división? ¿Es el siguiente teorema compatible con tu experiencia en la aritmética?

Teorema 9-4. Para $b \neq 0$, $a = cb$ si y solamente si $\frac{a}{b} = c$.

Es decir, a dividido por b es el número que multiplicado por b da a. Compara esto con el teorema 9-1 que afirma que b restado de a es el número que sumado a b da a.

De nuevo, para demostrar un teorema en que intervenga la condición "si y solamente si" tenemos que demostrar dos cosas. Primero, hay que demostrar que si $\frac{a}{b} = c$ $(b \neq 0)$, entonces $a = cb$. El hecho de que deseamos obtener cb en el miembro derecho de la ecuación nos sugiere iniciar la demostración multiplicando ambos miembros de "$\frac{a}{b} = c$" por b.

<u>Demostración</u>. Si $\frac{a}{b} = c$ $(b \neq 0)$, entonces

$$a \cdot \frac{1}{b} = c,$$

$$(a \cdot \frac{1}{b})b = cb,$$

$$a(\frac{1}{b} \cdot b) = cb,$$

$$a \cdot 1 = cb,$$

$$a = cb.$$

Segundo, hay que demostrar que si $a = cb$ $(b \neq 0)$, entonces $\frac{a}{b} = c$. Esta vez, el hecho de que no deseamos que b aparezca en el lado derecho sugiere iniciar la demostración multiplicando ambos miembros de "$a = cb$" por $\frac{1}{b}$. Esto es posible puesto que $b \neq 0$.

<u>Demostración</u>. Si $a = cb$ $(b \neq 0)$, entonces

$$a \cdot \frac{1}{b} = (cb)\frac{1}{b},$$

$$a \cdot \frac{1}{b} = c(b \cdot \frac{1}{b}),$$

$$a \cdot \frac{1}{b} = c \cdot 1,$$

$$a \cdot \frac{1}{b} = c,$$

$$\frac{a}{b} = c.$$

Justifica cada uno de los pasos en las demostraciones anteriores.

La segunda parte de este teorema concuerda con el método acostumbrado de comprobar la división multiplicando el cociente por el divisor.

La propiedad multiplicativa del 1 establece que $a = a(1)$ para cualquier número real a. Si a esto le aplicamos el teorema 9-4, obtenemos dos casos especiales conocidos de la división. Para cualquier número real a,

$$\frac{a}{1} = a,$$

y para cualquier número real a, <u>distinto de 0</u>,

$$\frac{a}{a} = 1.$$

Conjunto de problemas 9-4b

1. Demuestra que para cualquier número real a,

$$\frac{a}{1} = a.$$

2. Demuestra que para cualquier número real a, <u>distinto de cero</u>,

$$\frac{a}{a} = 1.$$

3. En los siguientes problemas efectúa las divisiones indicadas y compruébalas multiplicando el cociente por el divisor:

(a) $\frac{2500}{-2}$ (g) $\frac{-\frac{2}{3}}{3}$ (k) $\frac{0}{48}$

(b) $\frac{-45}{5}$ (h) $\frac{12}{\frac{1}{3}}$ (l) $\frac{360}{2\pi}$

(c) $\frac{-200}{-50}$ (m) $\frac{15a}{-3}$

(d) $\frac{3\sqrt{5}}{3}$ (i) $\frac{-\frac{5}{8}}{-\frac{7}{8}}$ (n) $\frac{-14}{0.1}$

(e) $\frac{35p}{7p}$ (o) $\frac{93m}{-93}$

(f) $\frac{9\pi}{3}$ (j) $\frac{-976}{-976}$ (p) $\frac{14\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$

4. ¿Qué puedes decir acerca de $\frac{28}{0}$?

5. Cuando dividimos un número positivo por un número negativo, ¿obtenemos un cociente positivo o negativo? ¿Y al dividir un número negativo por uno positivo? ¿Y si dividiéramos un número negativo por un número negativo?

6. Halla el conjunto de validez de cada una de las siguientes ecuaciones:

(a) $6y = 42$

(b) $-6y = 42$

(c) $6y = -42$

(d) $-6y = -42$

(e) $42y = 6$

(f) $42y = 42$

(g) $6y = 43$

(h) $\frac{1}{5}x = 20$

(i) $\frac{x}{5} = 15$

(j) $\frac{3}{4}a = 9$

(k) $\frac{2}{3}b = 0$

(l) $5x = \frac{10}{3}$

7. Halla el conjunto de validez de cada una de las siguientes ecuaciones:

(a) $5a - 8 = -53$

(b) $\frac{3}{4}y + 13 = 25$

(c) $x + .30x = 6.50$

(d) $n + (n + 2) = 58$

(e) $\frac{1}{3}a = \frac{1}{9}a + 4$

8. Si seis veces un número se disminuye en 5, el resultado es -37. Halla el número.

9. Si a dos tercios de un número le sumamos 32, el resultado es 38. ¿Cuál es el número?

10. Si se necesitan $\frac{2}{3}$ libras de azúcar para hacer un bizcocho, ¿cuántas libras de azúcar se necesitan para hacer 35 bizcochos para un banquete al cual asistirán 320 personas?

11. Un rectángulo es 7 veces más largo que ancho. Su perímetro es de 144 pulgadas. ¿Cuál es el ancho del rectángulo?

12. La edad de Juan es tres veces la de Ricardo. Hace tres años la suma de sus edades era 22 años. ¿Qué edad tiene cada uno ahora?

13. Halla dos enteros pares consecutivos cuya suma sea 46.

14. Halla dos enteros positivos impares consecutivos cuya suma sea menor que o igual a 83.

15. En una venta especial con descuento de 20%, una silla costó $30. ¿Qué precio tenía la silla antes de la venta especial?

16. Dos trenes salen de Chicago al mismo tiempo: uno viaja hacia el norte a 60 millas por hora y el otro hacia el sur a 40 millas por hora. ¿Después de cuántas horas estarán a 125 millas uno del otro?

17. La mitad de un número es 3 unidades mayor que un sexto del número. ¿Cuál es el número?

18. María compró 15 sellos de tres centavos y otros de cuatro centavos. Si pagó $1.80 por todos los sellos, ¿le cobraron la cantidad correcta?

19. Juan tiene 50 monedas, algunas de cinco centavos, otras de diez y otras de un centavo. El número de monedas de diez centavos es 4 más que el de las de un centavo, y el número de monedas de cinco centavos es seis más que el de las de diez centavos. ¿Cuántas monedas tiene de cada clase? ¿Cuánto dinero tiene?

20. Juan, que está ahorrando dinero para comprar una bicicleta, dijo: "En cinco semanas tendré un dólar más que tres veces lo que tengo ahora. Entonces tendré suficiente dinero para comprar mi bicicleta". Si la bicicleta cuesta $76, ¿cuánto tiene Juan ahora?

21. Un avión que vuela a una velocidad media de 200 millas por hora (cuando no hay viento) es retardado por un viento de frente y tarda $3\frac{1}{2}$ horas en completar un vuelo de 630 millas. ¿Cuál es la velocidad media del viento?

22. La suma de tres enteros positivos consecutivos es 108. Halla los enteros.

23. La suma de dos enteros positivos consecutivos es <u>menor</u> que 25. Halla los enteros.

*24. Un fabricante de jarabe preparó 160 galones, con un valor de $608, mezclando jarabe de meple de a $2 el cuartillo con jarabe de maíz de a 60¢ el cuartillo. ¿Cuántos galones de cada clase utilizó?

25. Muestra que si el cociente de dos números reales es positivo, el producto de los números es también positivo, y que si el cociente es negativo, el producto es negativo.

9-5. Nombres corrientes

En el capítulo 2 consideramos algunos nombres especiales para los números racionales, que son en cierto sentido los nombres más simples para estos números, y los llamamos "nombres corrientes". Dos detalles particulares acerca de cocientes indicados eran de interés: a "$\frac{20}{5}$" no le llamamos un nombre corriente para "cuatro", porque "4" es más sencillo; análogamente, "$\frac{14}{21}$" no es un nombre corriente para "dos tercios" porque "$\frac{2}{3}$" es más sencillo. Obtenemos estos nombres corrientes empleando la propiedad del 1 y el teorema $\frac{a}{a} = 1$.

$$\frac{20}{5} = \frac{4 \cdot 5}{5} = 4\left(\frac{5}{5}\right) = 4(1) = 4$$

y

$$\frac{14}{21} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 7} = \frac{2}{3}\left(\frac{7}{7}\right) = \frac{2}{3}(1) = \frac{2}{3}.$$

Por otra parte, "4" y "$\frac{2}{3}$" no se pueden simplificar más.

En el ejemplo anterior, ¿qué nos permitió escribir $\frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 7}$ como $\frac{2}{3}\left(\frac{7}{7}\right)$? Esta práctica corriente en la aritmética se puede demostrar para todos los números reales.

Teorema 9-5. Para cuatro números reales cualesquiera a, b, c, d, si $b \neq 0$ y $d \neq 0$, entonces

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Demostración. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \left(a \cdot \frac{1}{b}\right)\left(c \cdot \frac{1}{d}\right)$ (¿Por qué?)

$= (ac)\left(\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d}\right)$ (¿Por qué?)

$= (ac)\left(\frac{1}{bd}\right)$ Teorema 7-8d

$= \frac{ac}{bd}$ (¿Por qué?)

Ejemplo 1. Simplifica $\frac{3a^2b}{5aby}$.

$$\frac{3a^2b}{5aby} = \frac{3a(ab)}{5y(ab)},$$ por las propiedades asociativa y conmutativa,

$$= \frac{3a}{5y}\left(\frac{ab}{ab}\right),$$ por el teorema 9-5,

$$= \frac{3a}{5y},$$ por la propiedad del 1.

Ejemplo 2. Simplifica $\frac{3y - 3}{2(y - 1)}$. (Nota: Cuando escribimos esta frase, suponemos automáticamente que el dominio de y excluye a 1. ¿Por qué?)

$$\frac{3y - 3}{2(y - 1)} = \frac{3(y - 1)}{2(y - 1)},$$ por la propiedad distributiva,

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{y - 1}{y - 1}\right),$$ por el teorema 9-5,

$$= \frac{3}{2}(1),$$ toda vez que $\frac{a}{a} = 1$, (aquí $a = y - 1$)

$$= \frac{3}{2},$$ por la propiedad multiplicativa del 1.

Cuando adquieras más experiencia, indudablemente tu agilidad mental te permitirá omitir algunos de estos pasos.

Ejemplo 3. Simplifica $\frac{(2x + 5) - (5 - 2x)}{-8}$.

Por la definición de resta,

$$\frac{(2x + 5) - (5 - 2x)}{-8} = \frac{2x + 5 - 5 + 2x}{-8}$$

$$= \frac{4x}{-8},$$

$$= \frac{x(4)}{-2(4)},$$

$$= \frac{x}{-2}$$ por la propiedad multiplicativa del 1.

Los numerales $\frac{x}{-2}$, $\frac{-x}{2}$ y $-\frac{x}{2}$ son todos nombres del mismo número y todos parecen igualmente sencillos, pero el último de ellos es el nombre corriente que se acepta. Por lo tanto,

$$\frac{2x + 5 - (5 - 2x)}{-8} = -\frac{x}{2}.$$

Conjunto de problemas 9-5

1. Hemos empleado la propiedad cuyo enunciado es: para los números reales a y b, si $b \neq 0$, entonces

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}.$$

Demuestra este teorema.

Simplifica las expresiones que aparecen en cado uno de los siguientes problemas:

2. (a) $\frac{12}{9}$ (c) $\frac{-12}{10 - 1}$

   (b) $\frac{12}{-9}$ (d) $\frac{-12}{-9}$

3. (a) $\frac{n \cdot n}{n}$ (c) $\frac{-n}{-n^2}$

   (b) $\frac{-n^2}{n}$

4. (a) $\frac{2(x - 2)}{3(x - 2)}$ (d) $\frac{2(x - 2)}{3(2 - x)}$

   (b) $\frac{2x - 4}{3x - 6}$ (e) $\frac{2x - 4}{6 - 3x}$

   (c) $\frac{2(x - 2)}{-3(x - 2)}$

5. (a) $\frac{xy + y}{x + 1}$ (c) $\frac{xy + y}{y}$

   (b) $\frac{xy - y}{x - 1}$ (d) $\frac{xy - y}{y(x - 1)}$

6. (a) $\frac{8b - 10}{4b - 5}$ (c) $\frac{8(1 - b) + 2}{4b - 5}$

   (b) $\frac{8b - 10}{5 - 4b}$ (d) $-\frac{10 - 8b}{1 + 4(1 - b)}$

7. (a) $\frac{x + 2}{3}$ (c) $\frac{2x + 1}{3}$

(b) $\frac{2x - 3}{2y - 3}$ (d) $\frac{3x + 6}{3}$

8. (a) $\frac{2a - a^2}{a}$ (c) $\frac{2a - a^2}{a - 2}$

(b) $\frac{2a - a^2}{-a}$ (d) $\frac{2a - a^2}{a^2 - 2a}$

9. (a) $\frac{3}{3t - 6}$ (c) $\frac{(4t - 5) - (t + 1)}{3}$

(b) $\frac{3}{4t - 3 + 2t}$

10. (a) $\frac{6a^2b}{a}$ (c) $\frac{6a^2b}{2b^2a}$

(b) $\frac{6a^2b}{3b}$ (d) $\frac{3ab(2a + a)}{-15abc}$

11. (a) $\frac{(x + 1)(x - 1)}{x + 4}$ (c) $\frac{(x - 1)(2x - 3 + x)}{4x - 4}$

(b) $\frac{(x + 1)(x - 1)}{4x - 4}$ (d) $\frac{(-5x - 5)(2 - 2x)}{10x + 10}$

12. (a) $\frac{1 + 3x - 2y}{4y - 2 - 6x}$ (b) $\frac{1 - 3x - 2y}{4y - 2 - 6x}$

9-6. Fracciones

Al comienzo de la sección 9-5, recordamos dos convenios relativos a los nombres corrientes, que hemos estado utilizando desde el capítulo 2: Un nombre corriente no contiene divisiones indicadas que puedan efectuarse, y si contiene alguna división indicada, la fracción resultante debe estar en su "expresión mínima". Luego, en la misma sección, establecimos otro convenio, éste relativo a opuestos: Preferimos escribir $-\frac{a}{b}$ a escribir cualquiera de los otros nombres sencillos para el mismo número, $\frac{-a}{b}$, $\frac{a}{-b}$.

Volvamos a los convenios acerca de fracciones. En este curso una "fracción" es un símbolo que indica el cociente de dos números. Así, una fracción contiene dos numerales, un numerador y un denominador. Cuando no haya posibilidad de confusión, emplearemos la palabra "fracción" para referirnos también al número mismo que ésta representa. Cuando haya alguna posibilidad de confusión debemos volver al significado estricto de una fracción como un numeral.

En algunas aplicaciones de la matemática, el número representado por $\frac{p}{q}$ se llama la razón de p a q. Algunas veces usaremos también la palabra razón al referirnos al símbolo que indica un cociente.

En la sección anterior utilizamos el teorema 9-5 para escribir una fracción como el producto indicado de dos fracciones. Por ejemplo, escribimos

$$\frac{14}{21} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{7}.$$

Apliquemos ahora el teorema 9-5 en la "otra dirección" para escribir un producto indicado de fracciones como una sola fracción.

Ejemplo 1. Simplifica $\frac{x}{3} \cdot \frac{5}{6}$.

Por el teorema 9-5, $\frac{x}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{x \cdot 5}{3 \cdot 6}$

$$= \frac{5x}{18}.$$

Algunas veces utilizamos el teorema 9-5 de las "dos maneras" en un problema.

Ejemplo 2. Simplifica $(\frac{3}{2})(\frac{14}{9})$.

$(\frac{3}{2})(\frac{14}{9}) = \frac{3 \cdot 14}{2 \cdot 9}$ (¿Por qué?)

$= \frac{3}{2} \cdot \frac{(2 \cdot 7)}{(3 \cdot 3)}$ porque $14 = 2 \cdot 7$ y $9 = 3 \cdot 3$

$= \frac{7}{3} \cdot \frac{(2 \cdot 3)}{(2 \cdot 3)}$ (¿Por qué?)

$= \frac{7}{3}(\frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 3})$ por el teorema 9-5.

$= \frac{7}{3}$ por la propiedad del 1.

Conjunto de problemas 9-6a

Simplifica las expresiones que aparecen en los problemas 1-10:

1. (a) $\frac{3}{8} \cdot \frac{7}{2}$ (c) $(-\frac{3}{8})(-\frac{7}{2})$

   (b) $(-\frac{3}{8})\frac{7}{2}$ (d) $\frac{3}{2}(\frac{7}{8})$

2. (a) $\frac{4}{7} \cdot \frac{21}{10}$ (c) $\frac{4}{5+2} \cdot \frac{7+14}{7}$

   (b) $\frac{4}{10} \cdot \frac{21}{7}$ (d) $\frac{1}{7} \cdot \frac{4 \cdot 21}{10}$

3. (a) $(-2) \cdot \frac{5}{9}$ (c) $(\frac{-2}{-9}) \cdot 5$

   (b) $5 \cdot (-\frac{2}{9})$ (d) $\frac{1}{9} \cdot ((-5)(-2))$

4. (a) $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}$ (c) $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x}$

   (b) $n \cdot \frac{1}{n}$ (d) $\frac{1}{n+n}$

5. (a) $\frac{x}{4} \cdot \frac{x}{3}$ (c) $\frac{x}{4} \cdot \frac{3}{x}$

   (b) $\frac{-x}{4} \cdot \frac{-x}{3}$ (d) $\frac{-x}{-4} \cdot \frac{x}{-3}$

6. (a) $\frac{10}{3} \cdot \frac{3}{2}$ (c) $(-\frac{10}{3})(-\frac{3}{2})$

   (b) $\frac{10}{3} + \frac{3}{2}$ (d) $(-\frac{10}{3}) + (-\frac{3}{2})$

7. (a) $(4a^2)(\frac{a}{3})$ (c) $m(\frac{3}{a})$

   (b) $(4a^2)(\frac{3}{a})$ (d) $\frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3}$

8. (a) $\frac{3}{4} \cdot \frac{x+2}{3}$ (c) $\frac{3}{4}(x+2)$

   (b) $3 \cdot \frac{(x+2)}{4}$

9. (a) $\frac{n + 3}{2} \cdot \frac{n + 2}{3}$ (c) $\frac{n + 3}{n + 2} \cdot \frac{2}{3}$

   (b) $\frac{n + 3}{2} \cdot \frac{2}{n + 3}$

10. (a) $\frac{xy + y}{x + 1} \cdot \frac{xy - y}{x - 1}$ (b) $\frac{2a - a^2}{-a} \cdot \frac{2a}{a - 2}$

11. ¿Se puede representar todo número racional por una fracción? ¿Representa toda fracción un número racional?
12. En un colegio la razón del número de profesores al de estudiantes es $\frac{2}{19}$. ¿Cuántos profesores hay, si el número de estudiantes es 1197?
13. Las ganancias que se obtengan de un espectáculo estudiantil están asignadas a dos fondos para becas en la razón de $\frac{2}{3}$. Si el fondo al cual se asignó más dinero recibió $387, ¿cuánto recibió el otro?

Podemos enunciar ~~lo que~~ hemos hecho hasta ahora de otra manera. Un producto de dos cocientes indicados se puede escribir siempre como un cociente indicado. Así, podemos simplificar siempre una frase que contiene el producto de varias fracciones escribiéndola como una sola fracción. Sin embargo, si en una frase aparecen varias fracciones, éstas se podrían sumar, restar o dividir. En esta sección veremos que en todos estos casos, podremos encontrar siempre para representar el mismo número, otra frase con una sola división indicada. Podemos, pues, enunciar otro convenio más acerca de cocientes indicados: Ningún nombre corriente de un número contendrá más de una división indicada. Así, la instrucción "simplifica" incluirá siempre la idea: "emplea las propiedades de los números reales para hallar otro nombre que contenga a lo sumo una división indicada".

La clave para simplificar la suma de dos fracciones es emplear la propiedad del uno para obtener denominadores iguales.

Ejemplo 3. Simplifica $\frac{x}{3} + \frac{y}{5}$.

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = \frac{x}{3}(1) + \frac{y}{5}(1), \text{ por la propiedad del } 1,$$

$$= \frac{x}{3}\left(\frac{5}{5}\right) + \frac{y}{5}\left(\frac{3}{3}\right), \text{ ya que } \frac{a}{a} = 1,$$

$$= \frac{5x}{15} + \frac{3y}{15}, \text{ por el teorema 9-5,}$$

$$= 5x\left(\frac{1}{15}\right) + 3y\left(\frac{1}{15}\right), \text{ por la definición de división,}$$

$$= (5x + 3y)\frac{1}{15}, \text{ por la propiedad distributiva,}$$

$$= \frac{5x + 3y}{15}, \text{ por la definición de división.}$$

De nuevo te indicamos que pronto aprenderás a omitir algunos de estos pasos.

Conjunto de problemas 9-6b

Simplifica las expresiones que aparecen en los problemas 1-6:

1. (a) $\frac{5}{9} + \frac{2}{3}$ (b) $\frac{5}{9} - \frac{2}{3}$ (c) $\frac{-5}{9} + \frac{2}{-3}$

2. (a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

3. (a) $\frac{4}{a} + \frac{5}{a}$ (b) $\frac{4}{a} + \frac{5}{2a}$ (c) $\frac{4}{a} + \frac{5}{a^2}$

4. (a) $\frac{x}{4} + \frac{x}{2}$ (b) $\frac{x}{4} \cdot \frac{x}{2}$ (c) $\frac{x}{4} - \frac{x}{2}$ (d) $\frac{x}{2} - \frac{x}{4}$

5. (a) $\frac{4a}{7} - \frac{a}{35}$ (b) $\frac{4}{7} - \frac{a}{35}$ (c) $\frac{4a}{7} - \frac{1}{35}$

6. (a) $\frac{x + 8}{10} + \frac{x - 4}{2}$ (b) $\frac{x + 10}{10} + \frac{x - 2}{2}$ (c) $\frac{x + 10}{x} + \frac{x - 2}{x}$

7. Demuestra que para tres números reales a, b y c ($c \neq 0$),

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}.$$

*8. Demuestra que para cuatro números reales a, b, c y d $(c \neq 0,\ d \neq 0)$, $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad + bc}{cd}$.

9. Determina el conjunto de validez de cada uno de los siguientes enunciados abiertos:

Ejemplo. $\frac{x}{3} - 2 = \frac{2}{9}x$

Es posible utilizar dos procedimientos distintos:

$$\frac{x}{3} - \frac{2}{9}x = 2$$

$$\frac{3x}{9} - \frac{2x}{9} = 2$$

$$\frac{3x - 2x}{9} = 2$$

$$\frac{x}{9} = 2$$

$$x = 18$$

$$\left(\frac{x}{3} - 2\right)9 = \left(\frac{2}{9}x\right)9^{*}$$

$$3x - 18 = 2x$$

$$x = 18$$

*Multiplicamos por 9 porque sabemos que así la ecuación resultante no contendrá fracciones.

(a) $\frac{1}{4}y + 3 = \frac{1}{2}y$

(b) $\frac{a}{3} + \frac{a}{6} = 1$

(c) $\frac{3 + x}{8} = \frac{15}{24}$

(d) $\frac{7}{9}x = \frac{1}{3}x + 8$

(e) $\frac{3}{4}x = 35 - x$

(f) $\frac{a}{2} - 3 = \frac{1}{3} - a$

(g) $3|w| + 8 = \frac{1}{2}|w| + \frac{41}{2}$

(h) $-\frac{3}{7} + |x - 3| < \frac{22}{14}$

10. La suma de dos números es 240, y uno de los números es $\frac{3}{5}$ del otro. Halla los dos números.

11. El numerador de la fracción $\frac{4}{7}$ se aumenta en una cantidad x. El valor de la fracción resultante es $\frac{27}{21}$. ¿En qué cantidad se aumentó el numerador?

12. $\frac{13}{24}$ de un número es 13 unidades más que la mitad del número. ¿Cuál es el número?

13. La edad de José es $\frac{1}{3}$ de la de su padre. De aquí a 12 años su edad será la mitad de la que tendrá su padre entonces. ¿Qué edad tiene Juan? ¿Qué edad tiene su padre?

14. La suma de dos enteros positivos es 7 y su diferencia es 3. ¿Cuáles son los números? ¿Cuál es la suma de los recíprocos de estos números? ¿Cuál es la diferencia de los recíprocos?

15. En un embarque de 800 radios, $\frac{1}{20}$ de los radios estaban defectuosos. En este embarque, ¿cuál es la razón de los radios defectuosos a los radios no defectuosos?

16. (a) Si a José le toma 7 días pintar su casa, ¿qué parte del trabajo podría hacer en un día? ¿Y en d días?

    (b) Si a Roberto le toma 8 días pintar la casa de José, ¿qué parte del trabajo podría hacer en un día? ¿Y en d días?

    (c) Si Roberto y José trabajasen juntos, ¿qué parte del trabajo podrían hacer en un día? ¿Y en d días?

    (d) Utilizando las partes (a), (b) y (c) como referencia, traduce el siguiente enunciado abierto a un enunciado lingüístico:

$$\frac{d}{7} + \frac{d}{8} = 1.$$

    Despeja la d en este enunciado abierto. ¿Qué representa d?

    (e) ¿Qué parte del trabajo podrían hacer Roberto y José en un día, si trabajasen juntos?

*17. En agosto 1° un equipo de béisbol había ganado 48 juegos y perdido 52; y le quedaban por celebrar 54 juegos. Supongamos que para ganar el banderín deben terminar con un promedio de por lo menos .600. ¿Cuántos de los juegos que le faltan deben ganar? ¿Cuál es el promedio más alto que pueden alcanzar? ¿Y el más bajo?

Una propiedad clave para simplificar el producto indicado de dos fracciones es el teorema 9-5; y una propiedad clave para simplificar la suma indicada de dos fracciones es la propiedad del 1.

Cuando trabajamos con el cociente indicado de dos fracciones tenemos varios procedimientos alternativos en los que intervienen estas propiedades. Consideremos un ejemplo.

Ejemplo 4. Simplifica $\frac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{2}}$.

Método 1. Apliquemos la propiedad del 1, y consideremos a 1 como $\frac{6}{6}$. (A medida que prosigamos el trabajo, verás por qué escogimos $\frac{6}{6}$.)

$$\frac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{2}}\left(\frac{6}{6}\right)$$

$$= \frac{\frac{5}{3} \times 6}{\frac{1}{2} \times 6}$$

$= \frac{10}{3}$, por nuestro trabajo anterior con la multiplicación.

Método 2. Utilicemos la propiedad del 1, y consideremos a 1 como $\frac{2}{2}$. Escogemos el 2 porque es el recíproco de $\frac{1}{2}$.

Entonces $\frac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{2}\right)$ 4

$$= \frac{\frac{5}{3} \times 2}{\frac{1}{2} \times 2}$$

$= \frac{\frac{10}{3}}{1}$ el numerador según nuestro trabajo anterior
el denominador por haber escogido el recíproco de $\frac{1}{2}$.

$= \frac{10}{3}$ porque $\frac{a}{1} = a$ para cualquier a.

Método 3. Apliquemos la definición de la división.

$$\frac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{3}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{5}{3}(2) \qquad \text{puesto que } \frac{1}{\frac{1}{a}} = a$$

$$= \frac{10}{3} \qquad \text{por nuestro trabajo anterior con la multiplicación.}$$

De estos métodos puedes aplicar el que creas más conveniente con tal que (1) entiendas siempre lo que estás haciendo, y (2) no recibas instrucciones en contrario.

Conjunto de problemas 9-6c

Simplifica la expresión que aparece en cada uno de los siguientes ejercicios, utilizando el procedimiento más adecuado:

1. $\dfrac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{4}}$

2. $\dfrac{\frac{a^2}{2}}{\frac{a}{4}}$

3. $\dfrac{\frac{ax}{y^2}}{\frac{3xy}{a^2}}$

4. $\dfrac{\frac{2}{3} + \frac{1}{6}}{\frac{5}{6}}$

5. $\dfrac{12}{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}}$

6. $\dfrac{\frac{7}{8} - \frac{11}{12}}{2}$

7. $\dfrac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}$

8. $\dfrac{1 + \frac{1}{a}}{2 - \frac{2}{a}}$

9. $\dfrac{\frac{a - b}{2}}{\frac{a - b}{-4}}$

10. $\dfrac{a - b}{2} \cdot \dfrac{a - b}{-4}$

11. $\dfrac{\frac{x + 8}{9}}{\frac{3}{x} + 2}$

12. $\dfrac{\frac{xy + y}{x}}{3 + \frac{2}{x}}$

9-7. Resumen

Definición de la resta: Para restar el número real b del número real a, suma el opuesto de b al número a.

Teorema 9-1. Para tres números reales cualesquiera a, b, c, $a = b + c$ si y solamente si $a - b = c$.

Convenio: $a - b - c = a + (-b) + (-c)$.

En la recta numérica,

$a - b$ es la distancia desde b hasta a.
$b - a$ es la distancia desde a hasta b.
$|a - b|$ es la distancia entre a y b.

Definición de la división: Para dividir un número real a por un número real b, distinto de cero, multiplica a por el recíproco de b.

Teorema 9-4. Para tres números reales cualesquiera a, b, c, donde $b \neq 0$, $a = cb$ si y solamente si $\frac{a}{b} = c$.

Teorema 9-5. Para cuatro números reales cualesquiera a, b, c, d, si $b \neq 0$ y $d \neq 0$, entonces

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

El nombre más sencillo para un número:

(1) No debe contener operaciones indicadas que puedan efectuarse.
(2) No debe contener en ninguna división indicada factores comunes al numerador y al denominador.
(3) Debe tener la forma $-\frac{a}{b}$ con preferencia a $\frac{-a}{b}$ ó $\frac{a}{-b}$.
(4) Debe contener a lo más una división indicada.

Problemas de repaso

1. ¿Cuáles de las siguientes expresiones denotan un número real? Para cada una escribe o bien el nombre corriente del número o la razón por la cual no representa un número.

   (a) $5 \cdot \frac{1}{8}$ (d) $\frac{0}{0}$ (g) $\left|\frac{1}{0}\right|$

   (b) $3 \cdot \frac{1}{0}$ ~~(e) $\left|\frac{0}{7}\right|$~~ (h) $6 - 6 \cdot 7$

   (c) $3 \div 0$ (f) $5 + 0$ (i) $8 - 2 - 3$

2. En cada una de las siguientes expresiones coloca paréntesis para obtener un enunciado cierto:

   (a) $5 - 5 \cdot 7 = 0$ (d) $7 - 6 - 2 = -1$

   (b) $5 - 5 \cdot 7 = -30$ (e) $3 \cdot 2 - 2 \cdot 5 = 0$

   (c) $7 - 6 - 2 = 3$ (f) $3 \cdot 2 - 2 \cdot 5 = 20$

3. Halla el valor de la frase, $b^2 - 4ac$, para cada uno de los siguientes:

   (a) $a = 2,\ b = (-1),\ c = 5$ (d) $a = 1{,}654,\ b = 2,\ c = 0$

   (b) $a = 5,\ b = 6,\ c = (-3)$ (e) $a = 5,\ b = 0,\ c = -5$

   (c) $a = 1,\ b = (-3),\ c = (-2)$ (f) $a = \frac{1}{3},\ b = \frac{1}{4},\ c = -\frac{1}{5}$

4. Dada la fracción $\frac{3x + 5}{2x - 7}$, ¿cuál es el único valor de x para el cual la fracción no representa un número real?

5. Emplea la propiedad distributiva para escribir las siguientes expresiones como sumas indicadas:

   (a) $(-3)(2x + 1)$ (e) $5a(a + 2b - 3c)$

   (b) $ab^2(a - b)$ (f) $(x - 3)7x^2$

   (c) $m^2(m + 1)$ (g) $(2x - 3y)(x + 4y)$

   (d) $-(3x - 2y)$ (h) $(2a - 3b)^2$

6. Resuelve los siguientes enunciados:

   (a) $2a - 3 < a + 4$ (d) $\frac{x}{2} - \frac{3}{2} < \frac{x}{3}$

   (b) $7x + 4 + (-x) = 3x - 8$ (e) $\frac{1}{12}z + 1 = \frac{1}{3}z - 2$

   (c) $6m \geq 135$ (f) $-3|x| \leq -6$

7. Si $\frac{1}{4}$ de un número aumentado en $\frac{1}{8}$ del mismo número es menor que el número disminuido en 25, ¿cuál es el número?
8. Halla el promedio de los siguientes números:
$\frac{x+3}{x}$, $\frac{x-3}{x}$, $\frac{x+k}{x}$, $\frac{x-k}{x}$, en los que $x \neq 0$.
9. Muestra que $\frac{3}{8} < \frac{9}{20}$ y $\frac{9}{20} < \frac{7}{15}$ son enunciados ciertos. Luego, señala por qué reconoces inmediatamente que $\frac{3}{8} < \frac{7}{15}$ es cierto.
*10. Un mercero vendió dos camisas a $3.75 cada una. En la primera perdió 25% del costo y en la segunda ganó 25% del costo. ¿Cuál fue el resultado neto de estas ventas?
11. Si $y = ax + b$, donde $a \neq 0$, determina un enunciado equivalente para x en términos de a, b, y.
12. El año pasado el costo de las bolas de tenis era d dólares la docena. Este año el precio es c centavos por docena más alto que el del año pasado. ¿Cuánto costará media docena de bolas al nuevo precio?
13. Halla el conjunto de validez de cada una de las siguientes ecuaciones:

(a) $(x - 1)(x + 2) = 0$ (d) $(2m - 1)(m - 2) = 0$

(b) $(y + 5)(y + 7) = 0$ (e) $(x^2 + 1)3 = 0$

(c) $0 = z(z - 2)$ (f) $(x - 3) + (x - 2) = 0$

14. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, donde a, b, c, d, son números reales y $b \neq 0$, $d \neq 0$,
(a) Demuestra que $ad = bc$.
(b) Demuestra que, si $c \neq 0$, entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.
(c) Demuestra que, si $a \neq 0$, $c \neq 0$, entonces $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.
(d) Demuestra que $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.
15. Demuestra el teorema:

Si $b \neq 0$ y $c \neq 0$, entonces $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$.

16. Demuestra el teorema:

Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $\dfrac{1}{\frac{a}{b}} = \dfrac{b}{a}$.

*17. Dados el conjunto $\{1, -1, j, -j\}$ y la siguiente tabla de multiplicar:

Segundo número

Primer número: x	1	-1	j	-j
1	1	-1	j	-j
-1	-1	1	-j	j
j	j	-j	-1	1
-j	-j	j	1	-1

(a) ¿Es el conjunto cerrado respecto de la multiplicación?

(b) Para los casos $(-1, j)$, $(j, -j)$ y $(-1, -j)$, verifica que esta multiplicación es conmutativa.

(c) Para los casos $(-1, j, -j)$ y $(1, -1, j)$, verifica que esta multiplicación es asociativa.

(d) ¿Será cierto que $a \times 1 = a$, si a es cualquier elemento de $\{1, -1, j, -j\}$?

(e) Halla el recíproco de cada elemento de este conjunto.

Si x es un miembro no especificado del conjunto, halla los conjuntos de validez de los siguientes enunciados, haciendo uso de la pregunta (e):

(f) $j \times x = 1$.

(g) $-j \times x = j$.

(h) $j^2 \times x = -1$.

(i) $j^3 \times x = -1$.

INDICE ALFABETICO

Los números indican las páginas en el texto.