DOCUMENT RESUME

ED 186 217 SE 030 429

AUTHOR Beatty, Leslie: And Others
TITLE Matematicas Para La Escuela Primaria, Grado 4 (Parte 1), Comentario. Traduccion Preliminar de la Edicion en Ingles Revisada. (Mathematics for the Elementary School, Grade 4, Part 1, Teacher's Commentary. Preliminary Translation of the Revised English Edition).
INSTITUTION Stanford Univ., Calif. School Mathematics Study Group.
SPONS AGENCY National Science Foundation, Washington, D.C.
PUB DATE 67
NOTE 511p.; For related document in Spanish, see SE 030 430. Contains occasional light type.
LANGUAGE Spanish

EDRS PRICE MF02/PC21 Plus Postage.
DESCRIPTORS *Arithmetic; *Bilingual Education; *Elementary Education; *Elementary School Mathematics; Grade 4; Instructional Materials; *Mathematics Curriculum; Mathematics Instruction; *Teaching Guides
IDENTIFIERS *School Mathematics Study Group

ABSTRACT

This is Part 1 of the teacher's commentary for the grade 4 mathematics program. Part 1 includes the commentary for chapters 1 through 5. Topics covered include congruence, numbers and number bases, subtraction of numbers, division of numbers, and elementary geometry. References to the student text are cited. (RH)

SCHOOL
MATHEMATICS
STUDY GROUP

MATEMATICAS PARA LA ESCUELA PRIMARIA

Grado 4 (Parte 1)

Comentario

(Traducción preliminar de la edición en inglés revisada)

MATEMATICAS PARA LA ESCUELA PRIMARIA

Grado 4 (Parte 1)

Comentario

(Traducción preliminar de la edición en inglés revisada)

Texto preparado bajo la supervisión del Comité para la matemática de la escuela primaria del Grupo de Estudio de la Matemática Escolar:

Leslie Beatty	Distrito escolar de Chula Vista Chula Vista, California
E. Glenadine Gibb	Colegio para Maestros del Estado de Iowa, Cedar Falls, Iowa
W.T. Guy	Universidad de Texas
S.B. Jackson	Universidad de Maryland
Irene Sauble	Escuelas públicas de Detroit
M.H. Stone	Universidad de Chicago
J.F. Weaver	Universidad de Boston
R.L. Wilder	Universidad de Michigan

Financial support for the School Mathematics Study Group has been provided by the National Science Foundation.

Proyecto de Traducción al Español

Comisión Consultiva

Edward G. Begle, Universidad de Stanford

Howard F. Fehr, Universidad de Columbia

Mariano García, Universidad de Puerto Rico

Max Kramer, San Jose State College

PROLOGO

La creciente contribución de las matemáticas a la cultura del mundo moderno, y su importancia como parte vital de la educación científica y humanística, han hecho necesario que las matemáticas del programa escolar se seleccionen juiciosamente y que se enseñen bien en nuestras escuelas.

Tomando esto en consideración, las organizaciones de matemáticas en los Estados Unidos cooperaron en la formación del Grupo de Estudio de la Matemática Escolar (SMSG). Este grupo lo constituyen matemáticos de colegio y universidades, maestros de matemáticas de todos los niveles, expertos en educación y representantes de la ciencia y la tecnología. El propósito general del SMSG es el mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas en las escuelas de los Estados Unidos. La Fundación Nacional de Ciencias ha provisto fondos sustanciales para el financiamiento de esta labor.

Uno de los prerrequisitos para el mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas en nuestras escuelas es un mejor programa de estudios, un programa que tome en consideración el uso creciente de las matemáticas en la ciencia, la tecnología y otros campos del conocimiento y que, a la vez, refleje los avances recientes de las matemáticas mismas. Uno de los primeros proyectos del SMSG fue reclutar un grupo de matemáticos y maestros de matemáticas distinguidos para preparar una serie de libros de texto ilustrativos de un programa de estudios como el ya mencionado.

Los matemáticos profesionales en el SMSG creen que el contenido matemático presentado en este texto es valioso para todos los ciudadanos cultos de nuestra sociedad, y que su aprendizaje es importante para los estudiantes que van a ingresar en universidades, como preparación para estudios avanzados en este campo. Al mismo tiempo, los maestros en el SMSG creen que la forma en que aquí se presenta el material de estudio facilita al estudiante su asimilación.

En la mayoría de los casos el material parecerá familiar, pero su presentación y punto de vista serán diferentes. Algún material será completamente nuevo en relación con los programas de estudios tradicionales. Así debe ser, porque las matemáticas constituyen una disciplina viva y en constante crecimiento y no un producto inerte y rígido de la antigüedad. Esta fusión saludable entre lo antiguo y lo nuevo debe guiar a los estudiantes hacia una mejor comprensión de los conceptos básicos y de la estructura de las matemáticas y ofrecer una base sólida para la comprensión y el uso de las matemáticas en una sociedad científica.

No pretendemos que este libro se considere como la única manera definitiva de presentar correctamente las matemáticas a los estudiantes en este nivel. En cambio, debe considerarse como una muestra de la clase de programa de estudios que necesitamos y como una fuente de sugerencias para los autores de textos comerciales. Esperamos sinceramente que estos textos señalen el camino hacia una enseñanza más inspirada y significativa de las matemáticas, disciplina que es la reina y sierva de las ciencias.

TABLA DE MATERIAS

PREFACIO

El Grupo de Estudio de la Matemática Escolar ha preparado una serie de libros de texto que contienen material de estudio para los grados del 4º al 6º. Se han planeado para ilustrar el tipo de programa de estudios que consideramos adecuado para la escuela elemental.

Este volumen es parte de ese material preparado por un grupo de 30 personas, entre las que había, casi en números iguales, matemáticos de colegios y universidades, profesores destacados de escuela elemental y consultores. Todos dedicaron un gran esfuerzo para que el contenido de este texto fuera correcto matemáticamente, apropiado y fácil de enseñar. En numerosos salones de clase se emplearon versiones preliminares para contrastar y modificar estas consideraciones.

Se planeó el contenido para dar al estudiante un concepto mucho más amplio de lo que es realmente la matemática que el concepto presentado tradicionalmente en este nivel. Se hace menos hincapié en el aprendizaje rutinario y se da mayor importancia a la construcción de modelos y a la representación simbólica de ideas y relaciones de las cuales el estudiante puede deducir generalizaciones matemáticas importantes.

El contenido básico trata principalmente sobre el desarrollo de algunos de los conceptos fundamentales de la matemática, los cuales incluyen ideas acerca de números, numeración, las operaciones de la aritmética y la geometría intuitiva. Se introduce bien temprano el tratamiento más sencillo de estas ideas y se reexaminan frecuentemente en cada nivel subsiguiente; además, en todos los textos se ofrecen oportunidades de analizarlas más detalladamente y aplicarlas efectivamente en la resolución de problemas. Estos conocimientos matemáticos fundamentales y estas destrezas se desarrollan y se amplían continuamente durante todo el programa de estudios de la matemática, desde los grados primarios hasta el 12 y más adelante.

Creemos que la matemática puede estudiarse con éxito y con gusto. Esperamos que estos textos ayuden mucho a los estudiantes y maestros que los utilicen para lograr este propósito y que disfruten el placer de los descubrimientos y de los logros que se pueden alcanzar mediante el estudio de la matemática.

Capítulo 1

EL CONCEPTO DE CONJUNTO

PROPOSITO DE LA UNIDAD

El propósito de esta unidad es ayudar a los estudiantes a familiarizarse con el concepto de conjunto y a empezar a conocer el "lenguaje conjuntista". El lenguaje conjuntista es una manera eficaz de expresar ideas, no solamente en matemáticas, sino también en muchos otros campos del conocimiento. Así, pues, el estudio de los conjuntos se ha convertido en una parte cada vez más importante de la matemática. Por esta razón, los estudiantes deben empezar a familiarizarse con el concepto de conjunto, por su valor intrínseco y por su utilidad.

La noción de conjunto no es nueva para los alumnos. Por ejemplo, en grados anteriores, cuando trabajaron con grupos o colecciones de cosas, trataban realmente con algunos aspectos de la idea de conjunto. Así, podían identificar las propiedades numéricas de los conjuntos de objetos. Quizás, consideraban la idea de conjunto en términos de expresiones como un conjunto de platos, un conjunto de sellos, un conjunto de bloques, un conjunto de bolitas, un conjunto de personas, un conjunto de libros, etc. Con frecuencia, estas ideas no se han definido con precisión. La ampliación de este conocimiento de los alumnos acerca de los conjuntos destacará la importancia de hacer afirmaciones precisas.

En esta unidad, se hace un esfuerzo para ayudar a los estudiantes a darse cuenta de la importancia de la precisión al construir enunciados para describir cosas. Como primera unidad del texto para el cuarto grado del programa experimental del SMSG, no es nuestro propósito explicar un tema del cual las demás unidades vayan a ser meras variaciones. Sin embargo, las ideas explicadas en esta unidad se utilizarán en todo el programa, siempre que sirvan de ayuda para aclarar alguna cuestión. En síntesis, el propósito de esta unidad es (1) proporcionar a los estudiantes parte de un nuevo lenguaje que podrán utilizar ventajosamente más adelante para expresar ideas con precisión, oralmente y por escrito, (2) ayudar a los estudiantes a conocer uno de los conceptos importantes de la matemática, y (3) proporcionar a los estudiantes el conocimiento de algunas de las propiedades de los conjuntos y enseñarles el uso de este conocimiento para describir ideas matemáticas de la aritmética y la geometría, con mayor precisión.

BASE MATEMATICA

Un conjunto puede considerarse como una colección de cosas. Puede ser una colección de cuadros, de personas, de ideas, de rectas, de números, etc. Cada una de las cosas de un conjunto se llama un miembro o elemento del conjunto. Por ejemplo, los números enteros entre 1 y 5 son 2, 3 y 4. Podemos expresar esta idea de la siguiente manera: El conjunto de los números cardinales entre 1 y 5 es {2, 3, 4}; o, si llamamos "conjunto A" al "conjunto de todos los números cardinales entre 1 y 5", entonces, podemos escribir: El conjunto A = {2, 3, 4} o A = {2, 3, 4}. Generalmente, los elementos del conjunto se incluyen entre llaves, { }.

Algunos conjuntos no contienen miembros. A un conjunto tal se le llama conjunto vacío (o conjunto nulo). Por ejemplo, si el conjunto B es el conjunto de todos los números naturales impares menores que 1, el conjunto B no tiene elementos. Para indicar que B no tiene elementos, escribimos: El conjunto B = { } o B = { }.

Si queremos nombrar un conjunto particular, es importante que se describa explícitamente o que se escriba de manera que no haya duda en cuanto al conjunto a que nos referimos. Por ejemplo, el conjunto de los estudiantes podría ser un conjunto cualquiera de estudiantes. Sin embargo, el conjunto de los estudiantes presentes en un salón a cierta hora no deja duda en cuanto al conjunto particular a que nos referimos. Un conjunto de números puede ser uno cualquiera de varios posibles conjuntos; pero el conjunto de los números cardinales pares menores que 10 se refiere al conjunto particular {0, 2, 4, 6, 8}.

Conjuntos iguales y conjuntos equivalentes

Dos conjuntos son iguales, si los elementos de un conjunto son los mismos que los elementos del otro. No es suficiente que el número de elementos de un conjunto sea el mismo que el número de elementos del otro; los elementos deben ser los mismos. Los conjuntos {1, 2, 3, 4, 5} y {a, e, i, o, u} tienen el mismo número de elementos, pero no son iguales. Los conjuntos {1, 2, 3, 4, 5} y {2, 1, 4, 5, 3} son iguales, puesto que sus elementos son los mismos. El orden en que se dan los elementos de un conjunto no afecta al conjunto.

Algunas veces, hacemos distinciones muy agudas entre dos conjuntos. Considérense, por ejemplo, los dos conjuntos, A y B, donde

A = {Jaime, Juan}

y B es el conjunto de dos hombres cuyos nombres aparecen en el conjunto A. ¿Es el conjunto A igual al conjunto B? La respuesta depende de lo que entendamos por el conjunto A. Si el conjunto A es un conjunto de nombres, entonces $A \neq B$, porque B es un conjunto de hombres y A es un conjunto de nombres. Pero, si el conjunto A consiste en los dos hombres cuyos nombres son Jaime y Juan, entonces A = B.

Consideremos un segundo ejemplo. Si C = {4, 8} y D = {3 + 1, 10 - 2}, entonces, ¿serán C y D iguales? Si entendemos que C es un conjunto de dos símbolos, a saber, los numerales 4 y 8, y que D consiste en cuatro numerales y los símbolos de adición y sustracción, entonces, C y D no son iguales. Pero, si C y D se consideran como los conjuntos de nombres para dos números, cuatro y ocho, entonces, C y D son conjuntos iguales.

Esta distinción aguda entre dos posibles interpretaciones diferentes de un mismo conjunto es análoga a la distinción entre el número cuatro y el numeral cuatro. Generalmente, el contexto bastará para aclarar si se está hablando de un numeral o de un número. No obstante, al interpretar dos conjuntos, quizás, sea necesario explicar lo que queremos decir, cuando dichos conjuntos admitan más de una interpretación.

Dos conjuntos que no son iguales, pero que tienen el mismo número de elementos se llaman <u>conjuntos equivalentes</u>. Por ejemplo, los conjuntos {1, 3, 5, 7} y {2, 4, 6, 8} son conjuntos equivalentes, pero no son conjuntos iguales.

Un conjunto puede estar contenido en otro conjunto. El conjunto A es un <u>subconjunto</u> del conjunto B, si todos los elementos de A son también elementos de B. Por ejemplo, si B = {1, 3, 5}, entonces, los subconjuntos de B son {1}; {3}, {5}, {1, 3}, {1, 5}, {3, 5}, {1, 3, 5} y el conjunto vacío { }. Un conjunto cualquiera es un subconjunto de sí mismo y el conjunto vacío es subconjunto de todo conjunto. Esta idea puede aclararse, si consideramos el conjunto {Tomás, Ricardo, Horacio}, donde pensamos ahora en el conjunto de tres niños cuyos nombres son Tomás, Ricardo y Horacio, y no en el conjunto de las tres palabras, Tomás, Ricardo y Horacio. Entonces, preguntamos: "¿De cuántas maneras podría pedirse a ninguno o a algunos de los tres niños que nos acompañaran al juego de pelota?" La respuesta es que se le podría pedir a uno cualquiera de ellos, a dos cualesquiera de ellos, a los tres, o a ninguno. Así, los subconjuntos son {Tomás}, {Ricardo}, {Horacio}, {Tomás, Ricardo}, {Tomás, Horacio}, {Ricardo, Horacio}, {Tomás, Ricardo, Horacio} y { }.

Un subconjunto de un conjunto dado se llama un subconjunto propio, si el conjunto dado contiene uno o más elementos que no están contenidos en el subconjunto. De los subconjuntos de {1, 3, 5} indicados anteriormente, el único subconjunto que no es un subconjunto propio es el conjunto mismo, a saber, {1, 3, 5}.

No se recomienda que los términos <u>conjuntos equivalentes</u> y <u>subconjunto propio</u> se introduzcan en este momento.

<u>Reunión de conjuntos</u>

Si combinamos los conjuntos de cosas, describimos este nuevo conjunto como la <u>reunión</u> de los dos conjuntos. Supongamos que los elementos del conjunto G son los estudiantes de la clase miembros del comité que deberá preparar los juegos para la fiesta de la clase, y supongamos que los elementos del conjunto F son los estudiantes de la clase miembros del comité de obsequios para la fiesta. Si el conjunto G = {María, Juana, Roberto, Tomás} y el conjunto F = {Ana, Ricardo, Susana}, entonces, el conjunto G combinado con el conjunto F será el conjunto de todos los estudiantes que prepararán la fiesta (suponiendo haya dos comités solamente). Describimos esta combinación como la <u>reunión</u> del conjunto G y el conjunto F. Así, la reunión del conjunto G y el conjunto F es el conjunto de los miembros de los dos comités, es decir, {María, Juana, Roberto, Tomás, Ana, Ricardo, Susana}.

Escribimos esto de la manera siguiente, utilizando el símbolo especial, $\cup$, para indicar reunión: G $\cup$ F = {María, Juana, Roberto, Tomás, Ana, Ricardo, Susana}. Se lee: "La reunión del conjunto G y el conjunto F es el conjunto cuyos elementos son María, Juana, Roberto, Tomás, Ana, Ricardo y Susana". Al escribir la reunión de los conjuntos G y F, siempre escribimos G $\cup$ F, y <u>no</u> conjunto G $\cup$ conjunto F.

Consideremos otros dos conjuntos. El conjunto K es el conjunto de los números cardinales mayores que 10 y menores que 16; de modo que, K = {11, 12, 13, 14, 15}. El conjunto L es el conjunto de los números primos entre 10 y 20; de modo que, L = {11, 13, 17, 19}. La reunión de los dos conjuntos es el conjunto cada uno de cuyos elementos está, por lo menos, en uno de los dos conjuntos. Así, la reunión de los conjuntos K y L es el conjunto {11, 12, 13, 14, 15, 17, 19}. Podemos escribir esto así: K $\cup$ L = {11, 12, 13, 14, 15, 17, 19}. (El maestro observará que aun cuando 11 y 13 son elementos de los dos conjuntos K y L, cada uno de estos elementos se incluyó una sola vez en la reunión de los dos conjuntos.)

La definición de la reunión de más de dos conjuntos es parecida a la de la reunión de dos conjuntos: La reunión de más de dos conjuntos es el conjunto que consiste en los elementos que están, por lo menos, en uno de los conjuntos dados. Por ejemplo, sean A = {a, b, c, d}, B = {c, d, e, f} y C = {e, f, g, h}.

Observamos que $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$ y que $B \cup C = \{c, d, e, f, g, h\}$. Si escribimos $A \cup (B \cup C)$ o $(A \cup B) \cup C$, obtenemos el conjunto $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. La reunión de tres conjuntos A, B y C puede determinarse, hallando la reunión de $(B \cup C)$ con A, es decir, $A \cup (B \cup C)$; o hallando la reunión de C con $(A \cup B)$, es decir, $(A \cup B) \cup C$. Esta es una ilustración del uso de la propiedad asociativa (que encontraremos nuevamente en un capítulo subsiguiente). A primera vista, quizás, no parezca importante aquí, pero dicha propiedad es necesaria al determinar la reunión de tres (o más) conjuntos.

Intersección de conjuntos

Estamos familiarizados con la idea de intersección en relación con las carreteras. La intersección de dos carreteras es la parte común a ambas. Ahora, definimos intersección en el caso de los conjuntos. Consideremos nuevamente los conjuntos K y L:

$$K = \{11, 12, 13, 14, 15\}$$
$$L = \{11, 13, 17, 19\}$$

La intersección de estos dos conjuntos es el conjunto de los miembros comunes a ambos. Específicamente, la intersección de los conjuntos K y L es el conjunto $\{11, 13\}$. Podemos expresar esto de la manera siguiente, utilizando el símbolo especial, $\cap$, para indicar intersección: $K \cap L = \{11, 13\}$. Al escribir la intersección de los conjuntos K y L, siempre escribimos $K \cap L$ y no conjunto K conjunto L. Leemos esto así: "La intersección de los conjuntos K y L es el conjunto cuyos elementos son 11 y 13", o más brevemente, "el conjunto K intersección L es $\{11, 13\}$".

Ahora, consideremos el conjunto R, el conjunto de los números naturales del 1 al 5, inclusives, y el conjunto S, el conjunto de los números naturales del 6 al 10, inclusives:

$$R = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$S = \{6, 7, 8, 9, 10\}$$

Los conjuntos R y S no tienen elementos comunes. Por tanto, la intersección de los conjuntos R y S es el conjunto vacío y escribimos $R \cap S = \{\ \}$.

La intersección de más de dos conjuntos se define de una manera análoga a la intersección de dos conjuntos. La intersección de más de dos conjuntos es el conjunto que consiste en los elementos que pertenecen a todos los conjuntos dados. Por ejemplo, sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ y $C = \{3, 4, 7, 8\}$. Observamos que $A \cap B = \{3, 4\}$ y que $B \cap C = \{3, 4\}$. Si escribimos $A \cap (B \cap C)$ o $(A \cap B) \cap C$, obtenemos en cada caso el conjunto $\{3, 4\}$. Esto muestra que

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

y que $A \cap (B \cap C)$ o $(A \cap B) \cap C$ es la intersección de los tres conjuntos A, B y C. Como se sugirió en el caso de la reunión, la propiedad asociativa es válida también para la operación de intersección.

ENSEÑANZA DE LA UNIDAD

CONSIDERACIONES SOBRE LOS CONJUNTOS

Objetivo: Explicar la idea de conjunto y desarrollar la práctica de describir un conjunto y nombrar los elementos de un conjunto.

Vocabulario: Conjunto, ~~elemento~~ de un conjunto, llaves, { }, conjunto vacío o nulo

Sugerencias para la enseñanza:

En matemáticas, aprendemos acerca de los números y de las cosas que hacemos con ellos. También, queremos aprender más acerca de figuras como las siguientes:

> El maestro deberá dibujar en la pizarra repre~~sentaciones~~ de un triángulo, de un cuadrado, de rectas que se intersecan, de un punto, de una circunferencia y de un ángulo, o referirse a modelos de dichos conceptos en el salón. Recálquese la idea de que es nuestro propósito aprender acerca de la aritmética y de la geometría.

Hay algunas nuevas ideas en la matemática, que nos ayudan a pensar acerca de números y de figuras como las que tenemos en la pizarra (o en el salón). Una de estas ideas es la de conjunto.

> El maestro deberá hablar de la idea de conjunto y de la manera como se usa este concepto cotidianamente. Lo siguiente puede servir para iniciar la discusión. Inclúyanse otras ilustraciones.

Hablamos acerca del conjunto de platas de nuestra cafetería. Podemos también hablar del conjunto de sillas de nuestro salón. Hay un conjunto de numerales en un termómetro, en una regla y en un calendario para un mes particular. Podríamos decir: Nombren el conjunto de números representados en la esfera de un reloj. ¿Qué números nombraríamos?

> Pídase a los estudiantes que nombren conjuntos de cosas. El maestro deberá asegurarse de que lo hacen explícitamente, de modo que se refieren a un solo conjunto particular.

Por ejemplo, un conjunto de números no es un conjunto particular, pero el conjunto que empieza con 10 y cuyos otros elementos se obtienen contando de dos en dos hasta 20, es un conjunto particular. Análogamente, un conjunto de sillas puede ser el conjunto de sillas de cierto salón, de la biblioteca, de la tienda, de una casa particular o aún de una habitación particular de una casa particular, etc., pero el conjunto de sillas en nuestro salón de clases es un conjunto particular. Quizás, el maestro quiera utilizar ideas como el conjunto de niños en todos los salones de cuarto grado de la escuela, el conjunto de todos los niños que están en cuarto grado en el país, el conjunto de niños en el salón que tienen 9 años, el conjunto de niñas en la escuela, el conjunto de niños que son Exploradores, etc. También, el conjunto de los números que utilizan los niños para contar 10 objetos; el conjunto de los números naturales entre 0 y 50, empezando con 1 y contando de dos en dos; el conjunto de números, empezando con el 1 y contando indefinidamente, observando que en este caso, no hay un último número. Al identificar estos conjuntos, utilícense ejemplos en los que haya muchos elementos en el conjunto y ejemplos en los que haya pocos elementos o incluso un solo elemento.

Cuando hablamos de diferentes conjuntos de cosas, frecuentemente, podemos nombrar las cosas de ese conjunto. Por ejemplo, si nombramos el conjunto de niños en nuestra clase cuyos nombres de pila empiezan con S, podemos escribir: {Sara, Samuel, Susana}.

Utilícense nombres apropiados para la clase. Preséntense otros conjuntos e indíquense los elementos de los mismos. Destáquese la idea de que los conjuntos pueden representarse de diversas maneras, pues que, en matemáticas, acostumbramos incluir los elementos entre llaves. (Puesto que algunos estudiantes tienen dificultad al escribir las llaves { }, puede permitírseles emplear paréntesis rectangulares, [ ]. Sin embargo, no debe permitirse el uso de paréntesis curvos, ( ).) Ejemplos: El conjunto de los alumnos de la clase cuyos nombres de pila empiezan con S: {Sara, Samuel, Susana}; el conjunto de las vocales: {a, e, i, o, u}. Nómbrense otros conjuntos e indíquense los elementos de cada conjunto.

En nuestro estudio de los conjuntos, llamaremos a <u>cada</u> una de las cosas que componen un conjunto un <u>elemento</u> del conjunto. Para el conjunto de alumnos cuyos nombres de pila empiezan con S, Sara es un elemento, Samuel es un elemento y Susana es un elemento. En el conjunto de cinco números {1, 2, 3, 4, 5}, cada uno de los números es un elemento del conjunto. Algunas veces, un conjunto no tiene elemento alguno.

> Háganse preguntas acerca de los elementos que pertenecen al conjunto de elefantes en el salón, al conjunto de letras entre a y b, al conjunto de personas de la ciudad que miden 10 pies, al conjunto de los numerales de dos dígitos que representan números menores que 10, al conjunto de letras que se emplean para escribir <u>gato</u> y, también, para escribir <u>pez</u>, etc. Destáquese la idea de que no hay elementos en ninguno de estos conjuntos. Utilícense ejemplos que sean de interés para los alumnos de cada clase particular.

Para todos estos conjuntos, decimos que no tienen elemento alguno.

> Quizás, el maestro quiera tratar de buscar con los alumnos modos apropiados de nombrar este conjunto. En cualquier caso, señálese que el nombre que se le da a un conjunto que no tiene elementos es el de <u>conjunto vacío</u>. Tal vez, el maestro quiera identificar algunos conjuntos vacíos en el salón, la escuela, la comunidad, etc.

Tenemos una manera especial de escribir el conjunto vacío. Supongamos que el conjunto K es el conjunto de elefantes en nuestro salón. Si no hay elefantes en el salón, podemos escribir

$$K = \{\ \}.$$

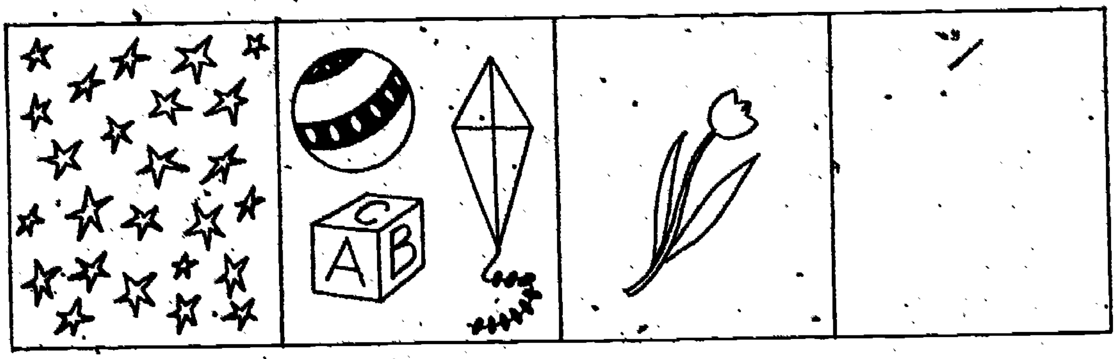
> Véase la página 11, que corresponde a la página 1 del <u>Texto del estudiante</u>.
> <u>Nota</u>: El maestro queda en libertad de proporcionar más material de práctica, si se necesita en alguna de las secciones de esta unidad. Al final de la misma, se encontrarán algunos ejercicios suplementarios para cada sección.

Capítulo 1

EL CONCEPTO DE CONJUNTO

CONSIDERACIONES SOBRE LOS CONJUNTOS

Los siguientes son ejemplos de conjuntos:



Un conjunto de estrellas — Un conjunto de juguetes — Un conjunto de flores — Un conjunto vacío

Puedes pensar en muchos conjuntos de cosas:

El conjunto de niños en tu escuela;
El conjunto de niños en tu clase;
El conjunto de números 1, 2, 3, 4, 5, y así sucesivamente;
El conjunto de números 1, 3, 5, 7, 9, 11, y así sucesivamente;
El conjunto de números 2, 4, 6, 8, 10, 12, y así sucesivamente;
El conjunto de letras en nuestro alfabeto;
El conjunto de niños en tu clase que tienen diez pies de estatura.

Un conjunto es una colección de cosas. Algunas de estas colecciones pueden ser conjuntos de objetos, conjuntos de gente, conjuntos de cuadros y conjuntos de números. Piensa en algunos ejemplos de conjuntos de cosas.

Una cosa que pertenece a un conjunto es un <u>miembro</u> o <u>elemento</u> de ese conjunto. Cada una de las letras, b, r, s, t, y, es un elemento del conjunto de letras en nuestro alfabeto. Tú eres un elemento del conjunto de alumnos de tu escuela.

Hay conjuntos que tienen solamente <u>un elemento</u>. El conjunto de letras en nuestro alfabeto entre d y f tiene solamente un elemento, el cual es la letra e.

Hay conjuntos que no tienen <u>elemento alguno</u>. El conjunto de niños en tu clase que tienen menos de cuatro años de edad, no tiene elementos. Si un conjunto no tiene elementos se le llama <u>conjunto vacío</u>.

Utilizamos letras mayúsculas para los <u>nombres de los conjuntos</u>.
Puedes usar cualquier letra mayúscula qué desees.
La letra que escojas puede ayudarte a identificar el conjunto.
Los estados de Nueva York y California son miembros del conjunto de los estados de los Estados Unidos de América.
Podemos dar a este conjunto el nombre <u>conjunto C</u>. Expresamos esto así:

C = {Nueva York, California}

Los números naturales entre 4 y 8 son 5, 6, 7.
Podemos dar a este conjunto el nombre <u>conjunto N</u>. Expresamos este así:

N = {5, 6, 7}

Conjunto de problemas 1

<u>Nombra los elementos de cada conjunto</u>:

1. Las cinco primeras letras del alfabeto. {a, b, c, d, e}
2. Los números que usas al contar los primeros cinco niños en tu aula. {1, 2, 3, 4, 5}
3. Los números, contando de dos en dos, desde 1 hasta 9. {1, 3, 5, 7, 9}
4. Los números, contando de dos en dos, desde 6 hasta 16. {6, 8, 10, 12, 14, 16}

5. Las letras de tu nombre de pila. (Una letra puede aparecer más de una vez en tu nombre de pila. Inclúyela solamente una vez en el conjunto.) (Hay varias respuestas posibles.)

6. Los días de la semana cuyos nombres empiezan con "l".
{lunes}

7. Los niños de tu clase que tienen menos de seis años.
{ }

8. Los meses del año cuyos nombres empiezan con la letra j.
{junio, julio}

9. Los números entre 30 y 40 que son mayores que 50.
{ }

10. <u>PROBLEMA DIFICIL</u>: Las letras que están en el nombre de tu escuela y no están en tu apellido. (Hay varias respuestas posibles.)

NUMEROS

Objetivo: Ayudar a los estudiantes a percatarse de la diferencia entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números cardinales, según están definidos; también, enseñarlos a identificar, dentro del conjunto de los números cardinales, el conjunto de los números pares y el conjunto de los números impares.

Asociar con cada conjunto de cosas el número de elementos del conjunto.

Sugerencias para la enseñanza:

Síganse las sugerencias presentadas en el Texto del estudiante. Contar de dos en dos, empezando con el 0 y, después, con el 1, nos dará los nombres de los elementos del conjunto de los números pares y los del conjunto de los números impares. Obsérvese la diferencia entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números cardinales, según se emplean aquí.

Determinar el número de elementos de un conjunto no es una nueva experiencia, pero a los estudiantes, debe brindárseles la oportunidad de hacerlo en este momento.

NUMEROS

Cuando aprendiste a contar, empezaste con el 1. Contaste 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, y así sucesivamente. Ahora, puedes contar hasta mucho más de 12. No importa hasta cuánto puedes contar, quedan todavía más números. Si supieras cómo contarlos, seguirías contando, mientras vivas. Todavía, habría más números. Estos números utilizados al contar se llaman <u>números naturales</u>.

En la aritmética, se considera el conjunto de números llamado <u>conjunto de los números cardinales</u>. Estos números son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, y así sucesivamente. Podemos expresar el conjunto de los números cardinales en esta forma:

$$C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

Podemos expresar el conjunto de los números naturales en esta forma:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

No podemos escribir todos los números cardinales. Usamos los tres puntos, ..., para significar que hay más números de los que podemos escribir.

El número 0 es el primero escrito en el conjunto C.
El número 6 es el último escrito en el conjunto C.
Pero, 6 no es el último número cardinal.
Es solamente el último número escrito en el conjunto C.

Escribimos:

$C = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots\}$

Hemos usado dos formas diferentes para nombrar el mismo conjunto.

Cuenta "de dos en dos", empezando con el número 0.
Cuentas 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, ...
Estos números que nombras se llaman <u>números pares</u>.
Los números representados por 0, 2, 4, 6, 8, ..., se llaman números pares.
Los numerales 38, 54, 76, 128, 100, 200 y 1352 son nombres de algunos números pares.

Cuenta "de dos en dos", empezando con el número 1. Cuentas 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, ... Los números cardinales que nombras, cuando cuentas "de dos en dos", empezando con el 1, se llaman <u>números impares</u>.

Los numerales 25, 37, 41, 53, 101, 421 y 1247 son nombres de algunos números impares.

He aquí algunos otros conjuntos de cosas:

Conjunto A	Conjunto B
María	a
árbol	b
pluma	c
carro	d
cuadro	

El conjunto A es un conjunto de palabras. El número de palabras en el conjunto A es 5.

El conjunto B es un conjunto de letras. El número de letras en el conjunto B es 4.

El número de números impares en el conjunto de los números naturales entre 1 y 20 es 9. Los miembros de este conjunto son 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19.

El número de palabras en el conjunto { } es 0.
No hay elementos en este conjunto.
Llamamos a este conjunto el conjunto vacío.
El número correspondiente al conjunto vacío es el cero.

Utilizamos números para decir cuántos elementos hay en un conjunto.

Conjunto de problemas 2

En los ejercicios 1, 2, 3, 4 y 5, aparecen algunos conjuntos. Debajo de cada uno, hay grupos de palabras. ¿Qué grupo de palabras describe <u>mejor</u> cada conjunto? ¿Será a), b) o c)? Escribe tu respuesta. Di, entonces, <u>cuántos</u> miembros hay en ese conjunto.

1. {1, 3, 5, 7, 9} (c, 5)
   a) Un conjunto de números pequeños
   b) El conjunto de todos los números impares
   c) El conjunto de números impares menores que 10
2. {martes, miércoles} (c, 2)
   a) El conjunto de días escolares
   b) El conjunto de los dos últimos días de la semana
   c) El conjunto de días de la semana cuyos nombres empiezan con m
3. {10, 20, 30, 40} (b, 4)
   a) El conjunto de números menores que 50
   b) Los números naturales menores que 50 cuyos numerales terminan en cero
   c) El conjunto de números pares menores que 50
4. {tiza, libro, borrador, lápiz} (a, 4)
   a) Un conjunto de cosas que encuentras en un salón de clase
   b) Un conjunto de muebles escolares
   c) Un conjunto de cosas para leer
5. {autobús, tren, automóvil, aeroplano} (c, 4)
   a) Un conjunto de cosas que ves en el cielo
   b) Un conjunto de cosas que encuentras en un garaje
   c) Un conjunto de cosas que la gente puede usar cuando viaja
6. He aquí algunas cosas: papa, 9, Roberto, apio, 3, piedra, 5, Jorge, 15, e, 4, tocineta, 6, María, u, David, a, dulce, o, 7, i, llave

   Elige las cosas que constituyen:
   a) Un conjunto de nombres de niños {Roberto, Jorge, David}
   b) El conjunto de números cardinales mayores que 2 y menores que 8 {3, 4, 5, 6, 7}

c) El conjunto de vocales {a, e, i, o, u}

d) Un conjunto de cosas para comer
{papas, apio, tocinetas, dulce}

e) Un conjunto de cosas para leer { }

CONJUNTOS CONTENIDOS EN CONJUNTOS

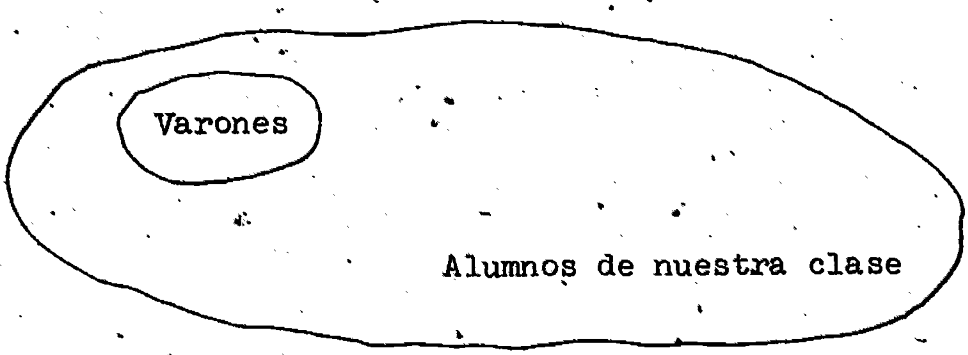
Objetivo: Explicar a los estudiantes cómo elegir un conjunto contenido en otro conjunto y pedirles que construyan diagramas sencillos para indicar que un conjunto está contenido en otro.

Vocabulario:

> Si un conjunto está contenido en otro, el primer conjunto se llama un <u>subconjunto</u> del segundo.

Sugerencias para la enseñanza:

Algunas veces, tenemos conjuntos contenidos en un conjunto. Hablamos acerca del conjunto de alumnos de nuestra clase. Dentro de ese conjunto, está el conjunto de los varones. Si no queremos escribir todos los nombres, podemos obtener una representación de esta idea, de la siguiente manera:



> Los tamaños relativos de las regiones no conllevan comparación alguna entre el número de varones y el número de alumnos en la clase. El diagrama significa que hay un conjunto de alumnos en la clase, algunos de los cuales son varones.

¿Cuál es el conjunto de los números cardinales desde 1 hasta 10? Dentro de este conjunto, tenemos un conjunto de números impares y un conjunto de números pares. Supongamos que escribimos esos conjuntos.

> Escríbase en la pizarra:
> El conjunto de los números cardinales desde 1 hasta 10 es {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}. El conjunto de los números impares desde 1 hasta 10 es {1, 3, 5, 7, 9}. El conjunto de los números pares desde 1 hasta 10 es {2, 4, 6, 8, 10}.

O, en lugar de todas estas palabras, podríamos escribir:

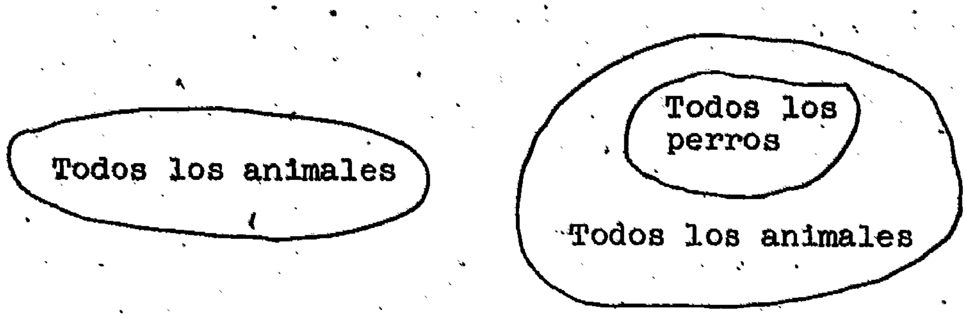
$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

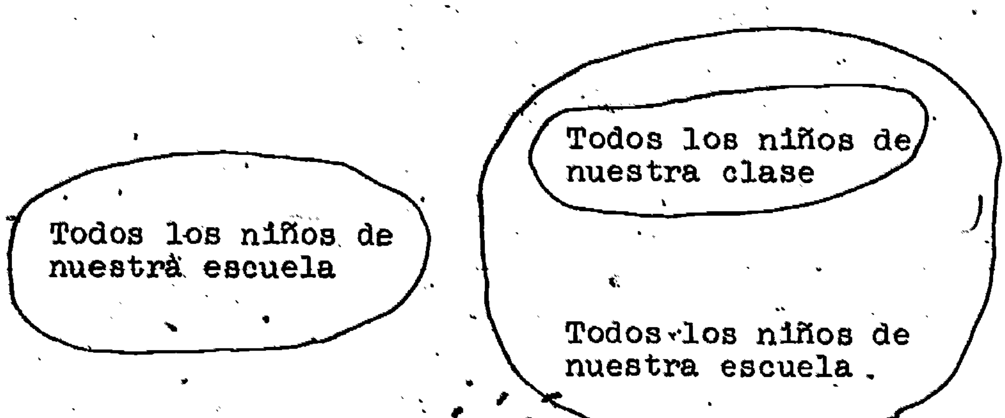
$I = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$P = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

Al presentar esto en la pizarra, escríbanse los conjuntos $N = \{1, 2, \text{etc.}\}$, $I = \{1, 3, \text{etc.}\}$, $P = \{2, 4, \text{etc.}\}$. Quizás, el maestro quiera indicar lo que cada enunciado significa. Tal vez, también, quiera trazar líneas para conectar elementos iguales del conjunto N y del conjunto I, y del conjunto N y del conjunto P, con el propósito de ver los dos conjuntos contenidos en el primero.

Utilícense otros ejemplos para ayudar a los estudiantes a ver que un conjunto dado puede contener otro conjunto. Quizás, el maestro quiera desarrollar con la clase algunos de los ejemplos presentados en el Texto del estudiante. Inclúyanse algunos ejemplos en los que no se mencionen todos los conjuntos contenidos en un conjunto. Por ejemplo:





Véase la página 21, que corresponde a la página 8 del Texto del estudiante.

E8

CONJUNTOS CONTENIDOS EN CONJUNTOS

Teníamos algunas monedas en una alcancía.

Las pusimos sobre la mesa.

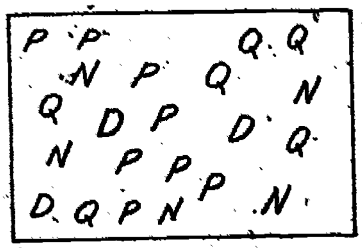
La ilustración de la derecha muestra la forma en que cayeron las monedas.

Cada N representa una moneda de cinco centavos.

Cada P representa un centavo.

Cada D representa una moneda de diez centavos.

Cada Q representa una moneda de veinticinco centavos.

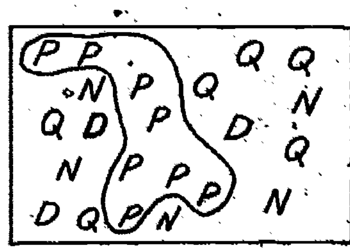


En el conjunto de monedas, hay un conjunto de centavos.

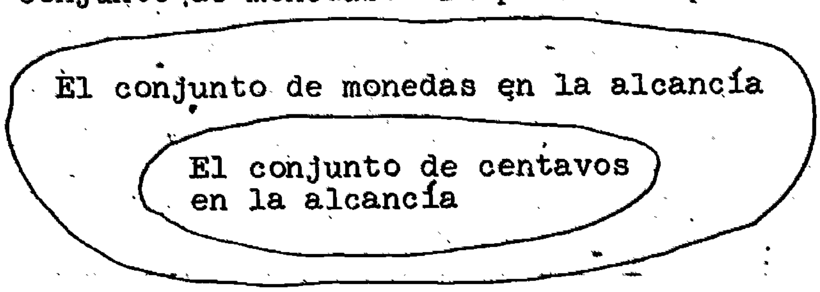
Se dibujó un cerco alrededor de todos los centavos.

Todos los centavos están dentro del cerco.

Todas las otras monedas están fuera del cerco.



Hay otra forma de indicar que el conjunto de centavos está dentro del conjunto de monedas. La podemos expresar así:

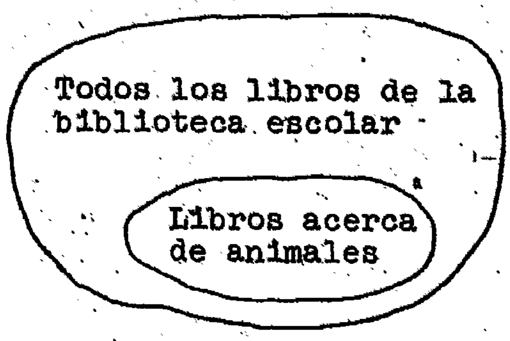


¿Cómo indicamos los centavos en la ilustración?

Están dentro del redondel pequeño.

¿Dónde están las otras monedas que no son centavos?

Están fuera del redondel pequeño, pero dentro del grande.

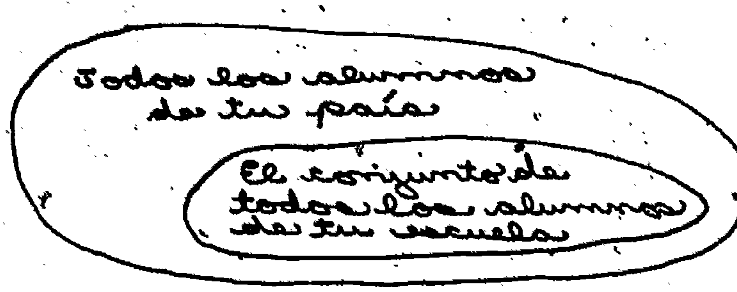


La ilustración de la izquierda representa otro conjunto dentro de un conjunto. El conjunto de libros acerca de animales está dentro del conjunto de todos los libros de la biblioteca escolar.

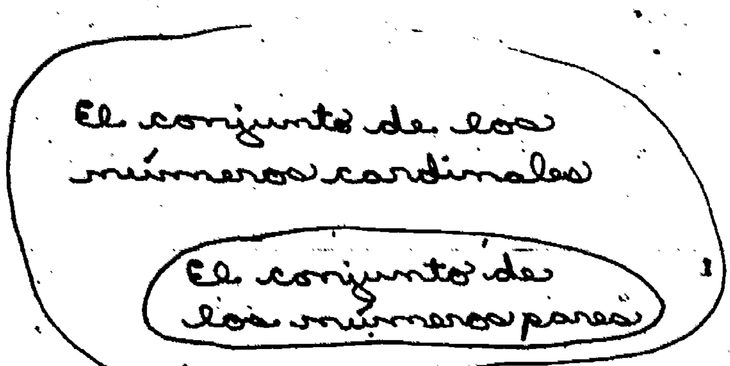
Podemos decir que el conjunto de libros acerca de animales es un <u>subconjunto</u> del conjunto de todos los libros de la biblioteca.

<u>Conjunto de problemas 3</u>

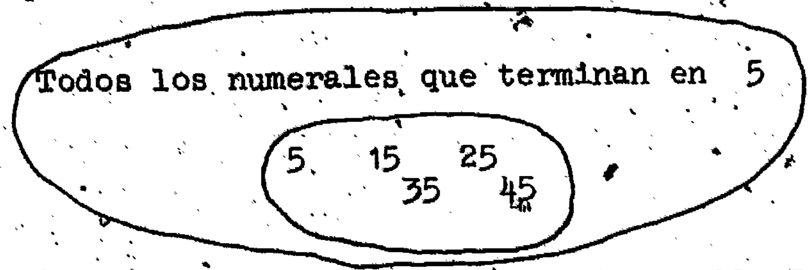
1. El conjunto de todos los alumnos de tu escuela está dentro del conjunto de todos los alumnos de tu país. Dibuja una figura que represente esta idea.



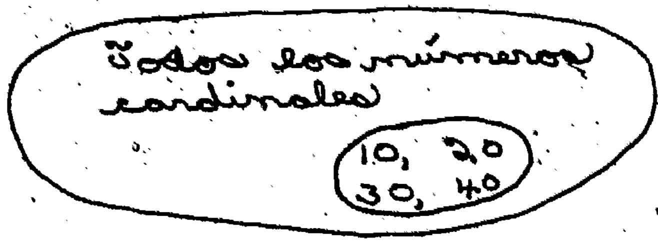
2. Haz un dibujo para indicar que el conjunto de todos los números pares está dentro del conjunto de todos los números cardinales.



3. El dibujo que sigue muestra que el conjunto de los numerales 5, 15, 25, 35, 45 está dentro del conjunto de todos los numerales que terminan en 5:



Haz un dibujo para mostrar que los números 10, 20, 30, 40 están dentro del conjunto de todos los números cardinales.



4. Un conjunto de niñas en el cuarto grado es María, Marta, Carola, Catalina, Mariana, Susana. Da a este conjunto el nombre Conjunto S.

S = {María, Marta, Carola, Catalina, Mariana, Susana}

He aquí alguna información sobre este conjunto de niñas; utilízala al contestar las preguntas del problema:

Nombre	Color de los ojos	Color del pelo	Edad
María	azul	rubio	9
Marta	castaño	castaño	10
Carola	gris	negro	9
Catalina	castaño	negro	9
Mariana	azul	castaño	10
Susana	castaño	castaño	9

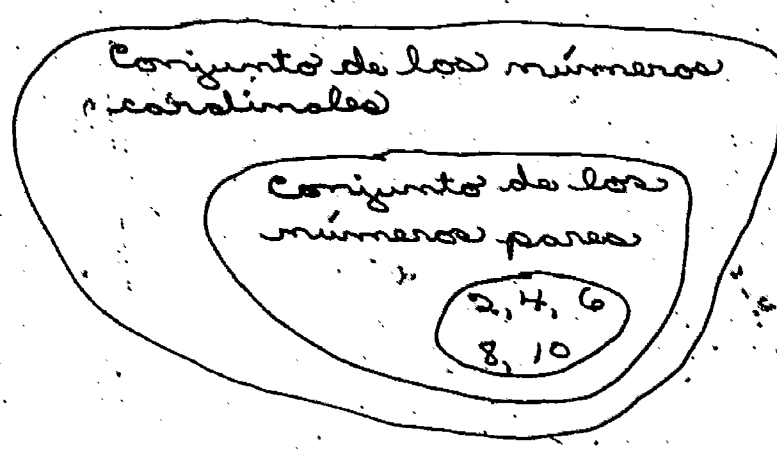
a) Escribe los elementos del conjunto de niñas que tienen 10 años de edad. (Marta, Mariana)
Llámalo conjunto B. ¿Está el conjunto B en el conjunto S? (Sí)

b) Escribe los elementos del conjunto de niñas que tienen ojos grises. (Carola)
Llámalo conjunto C. ¿Está el conjunto C en el conjunto S? (Sí)

c) Escribe los elementos del conjunto de niñas que tienen pelo negro y que tienen 9 años de edad. (Carola, Catalina)
Llámalo conjunto X. ¿Está el conjunto X en el conjunto S? (Sí)

d) ¿Está el conjunto C en el conjunto X? (Sí)

5. PROBLEMA DIFICIL: Haz un dibujo para demostrar que los números 2, 4, 6, 8, 10 están dentro del conjunto de los números pares y que los números pares están dentro del conjunto de los números cardinales.



CONJUNTOS IGUALES

Objetivo: Definir lo que son conjuntos iguales, dar ejemplos de conjuntos iguales y de conjuntos que no son iguales y determinar si varios conjuntos dados son iguales o no.

Vocabulario: conjuntos iguales; $\neq$ significa "no es igual a".

Sugerencias para la enseñanza:

> Utilizamos una letra mayúscula para nombrar un conjunto, si los elementos del conjunto se escriben dentro de llaves. De otro modo, al referirnos a un conjunto cuyos elementos no están incluidos entre llaves, utilizaremos la palabra conjunto y escribiremos, por ejemplo, el conjunto E = el conjunto D.

Sabemos que un conjunto puede tener nombres diferentes. Cuando escribimos el conjunto A = el conjunto B, queremos decir que "conjunto A" y "conjunto B" son dos nombres de un mismo conjunto. Si

A es $\{1, 2, 3\}$ y
B es $\{3, 1, 2\}$,

entonces, el conjunto A = el conjunto B. Los nombres "conjunto A" y "conjunto B" son, simplemente, nombres diferentes del mismo conjunto. Los elementos de los conjuntos no tienen que escribirse en el mismo orden. Los conjuntos que tienen los mismos elementos son conjuntos iguales.

¿Cuál es la primera letra del alfabeto?; ¿la tercera letra?; ¿y la quinta letra? Ahora, escribamos el conjunto cuyos elementos son las letras primera, tercera y quinta del alfabeto. Escribimos $\{a, c, e\}$. Llamemos a este conjunto, el conjunto A.

Escríbase: $A = \{a, c, e\}$.

Ahora, escribamos el conjunto de letras de la palabra "cae". Llamemos a este conjunto, el conjunto B. ¿Es el conjunto A igual al conjunto B? ¿Por qué? ¿Deberán escribirse las letras de los dos conjuntos en el mismo orden para que los conjuntos sean iguales?

Pídase a los estudiantes que den oralmente o por escrito otro conjunto que sea igual al conjunto A. Podrían llamarlo el conjunto C y escribir el conjunto C = el conjunto A. Recomiéndese a los estudiantes que den otros ejemplos de conjuntos que sean iguales. Quizás, el siguiente ejemplo les sugiera otros que pueden dar. Escríbanse los elementos del conjunto, antes de llegar a una decisión. Es decir,

K = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}
L = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

Los elementos del conjunto K son los numerales que representan los primeros doce números naturales. Los elementos del conjunto L son los numerales que marcan las horas en el reloj. El conjunto K = el conjunto L, puesto que los elementos de ambos conjuntos son los mismos.

Después que se haya proporcionado práctica en identificar conjuntos iguales, deben darse algunos ejemplos de conjuntos que no son iguales. Si X = {1, 2, 3, 4, 5} y Y = {a, e, i, o, u}, entonces, muéstrese que estos conjuntos no son iguales, indicando que sus elementos so son los mismos. Señálese que el conjunto X no es igual al conjunto Y, escribiendo

el conjunto X ≠ el conjunto Y.

Léase esto así: El conjunto X no es igual al conjunto Y. Explíquese que el símbolo ≠ significa "no es igual a". También, debemos señalar la idea de que dos conjuntos pueden tener algunos elementos iguales, pero ser conjuntos distintos. Por ejemplo, si

S = {12, 3, 4, 5}
y T = {1, 2, 3, 4, 5},

entonces, el conjunto S no es igual al conjunto T. De modo que escribamos el conjunto S ≠ el conjunto T. Preséntense otros ejemplos en los que se describan los conjuntos y pídase a los estudiantes que determinen si los conjuntos son iguales; como, por ejemplo:

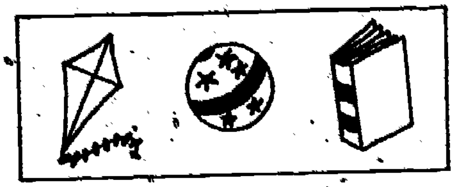
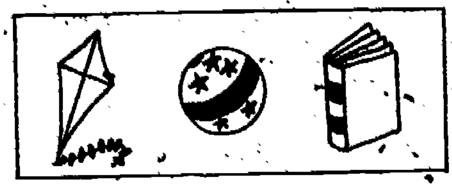
A = {bola, muñeca, tren} C = {1, 3, 5, 7}
B = {bola, bate, silla} D = {3, 7, 1, 5}
El conjunto A ≠ el conjunto B.
El conjunto C = el conjunto D.

Véase la página 27, que corresponde a la página 12 del Texto del estudiante.

E12

CONJUNTOS IGUALES

He aquí dos conjuntos de figuras:

Los elementos de los dos conjuntos son los mismos.

Si dos conjuntos tienen los mismos elementos, los dos conjuntos son iguales.

Los elementos de conjuntos iguales no tienen que presentarse en el mismo orden.

He aquí algunos otros conjuntos:

A = {manzana, lápiz}

B = {lápiz, manzana}

Podemos decir que el conjunto A es igual al conjunto B.

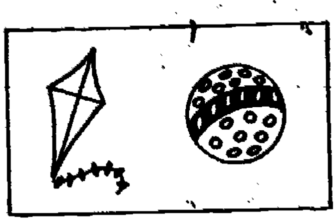
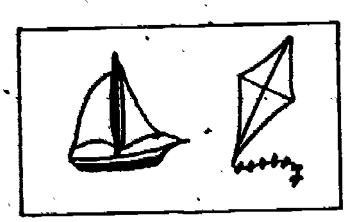
Escribimos: conjunto A = conjunto B.

M = {5, 1, 3}

N = {1, 3, 5}

¿Es el conjunto M = el conjunto N? ¿Por qué? (Sí. Tienen los mismos elementos.)

Examina los dos conjuntos de figuras que siguen:

Estos conjuntos no tienen los mismos elementos.

Pero sí tienen el mismo número de elementos.

E13

G = {manzana, lápiz, casa}
H = {perro, carro, sombrero}

El conjunto G no es igual al conjunto H. Escribimos: conjunto G ≠ conjunto H.

R = {0, 1, 2, 3}
P = {1, 2, 3}

El conjunto R no es igual al conjunto P.
Escribimos: conjunto R ≠ conjunto P.

Conjunto de problemas 4

A = {4, 5, 7}   B = {5, 4, 7}   C = {7, 4, 5}

1. ¿Es el conjunto A = el conjunto B? (sí)
2. ¿Es el conjunto C = el conjunto A? (sí)
3. ¿Es el conjunto C = el conjunto B? (sí)

X = {b, a, c, k}   Y = {c, b, k, a}   Z = {k, c, t, a}

4. ¿Es el conjunto X = el conjunto Y? (sí)
5. ¿Es el conjunto Z = el conjunto X? (no)
6. ¿Es el conjunto Z = el conjunto Y? (no)

R = {6, 8, 10}   S = {10, 7, 8}   T = {8, 6, 10}

7. ¿Es el conjunto R = el conjunto S? (no)
8. ¿Es el conjunto T = el conjunto R? (sí)
9. ¿Es el conjunto T = el conjunto S? (no)

He aquí algunos conjuntos: (Utilízalos para contestar las preguntas 10, 11, 12 y 13.)

A = {3, 5, 7, 4, 2}
B = {2, 3, 4, 5, 6}
C = {2, 3, 4, 5, 7}
D = {6, 5, 4, ~~3,~~ 2}

E = {5, 3, 7, 2, 4}
F = {2, 4, 6, 3, 5}

10. ¿A qué conjuntos es igual el conjunto A?
(a los conjuntos C y E)

11. ¿A qué conjuntos es igual el conjunto C?
(a los conjuntos A y E)

12. ¿Son el conjunto C, el conjunto E y el conjunto A conjuntos iguales? (sí)

13. ¿Qué conjuntos son iguales al conjunto D?
(Los conjuntos B y F)

14. X = {t, s, r, d}

Piensa en un conjunto que tenga el mismo número de elementos que el conjunto X, pero que no sea igual al conjunto X.

Llámalo conjunto Z.

Copia y completa: Z = { } (Hay varias respuestas posibles)

15. B = {3, 7, 9, 5}
El conjunto E es el conjunto de todos los números impares menores que 10. Indica cuál de los siguientes enunciados es correcto: El conjunto B = el conjunto C; el conjunto B ≠ el conjunto E. (El conjunto B ≠ el conjunto E)

16. El conjunto A es el conjunto de todos los números cardinales mayores que 5, pero menores que 10.

El conjunto B es igual al conjunto A. Nombra los elementos del conjunto B. (6, 7, 8, 9)

17. D = $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}$

E = $\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\}$

Indica cuál de los siguientes enunciados es correcto:
El conjunto D ≠ el conjunto E; el conjunto D = el conjunto E.
(El conjunto D = el conjunto E)

LA REUNION DE CONJUNTOS

Objetivo: Desarrollar la comprensión de lo que es la reunión de dos conjuntos (parte de este conocimiento consiste en saber que un elemento que está en dos conjuntos dados aparece una sola vez en la reunión de los dos conjuntos) y enseñar el uso del símbolo ∪ para denotar la reunión.

Materiales: Dos envases de material plástico, una moneda, una llave, un lápiz, un borrador, una bolita, una piedra (pueden utilizarse otras cosas)

Vocabulario: reunión y el símbolo ∪

Sugerencias para la enseñanza:

> Colóquense dos envases de material plástico transparente en dos sitios distintos del tablero del escritorio. Colóquense una moneda y una llave en un envase, y un lápiz, un borrador, una bolita y una piedra en el otro. Pueden utilizarse otros objetos en sustitución de los sugeridos, siempre y cuando quede clara la idea matemática principal. O, quizás, el maestro prefiera colocar objetos sobre un tablero de franela.

Algunas veces, combinamos dos conjuntos. De esto resulta un nuevo conjunto. Imaginemos que Juan tiene una moneda y una llave en uno de sus bolsillos. A este conjunto, lo llamaremos el conjunto A.

> Señálese el envase adecuado. Quizás, el maestro desee colocar una tarjeta con el nombre, conjunto A, al lado de dicho envase. Escríbase en la pizarra:
>
> A = {moneda, llave}

En otro de sus bolsillos, Juan tiene un lápiz, un borrador, una bolita y una piedra. Llamaremos a este conjunto, el conjunto B.

> Nuevamente, señálese el envase adecuado. Tal vez, el maestro quiera marcarlo conjunto B.
>
> B = {lápiz, borrador, bolita, piedra}

Juan tomó los objetos de sus bolsillos y los colocó juntos sobre una mesa.

> Colóquense todos los objetos juntos sobre el escritorio.

Ahora, tenemos un nuevo conjunto. Lo podemos llamar el conjunto C. ¿Cuáles son los miembros de este nuevo conjunto, el conjunto C?

> Anótense en la pizarra los elementos del conjunto C en el orden en que los nombren los alumnos; por ejemplo, C = {moneda, llave, lápiz, borrador, bolita, piedra}.

¿Contiene el conjunto C a todos los elementos del conjunto A? ¿Contiene el conjunto C a todos los elementos del conjunto B? Tenemos una manera especial de indicar esto. Decimos que el conjunto C es la <u>reunión</u> de los conjuntos A y B.

Ahora, examinemos otros dos conjuntos.

> Escríbanse los dos conjuntos siguientes en la pizarra:
>
> X = {Roberto, Carolina, Elena, María}
> Y = {Angel, Carolina, María, Pablo, Samuel}
>
> Descríbase cada conjunto de una manera apropiada. Por ejemplo: El conjunto X puede ser el conjunto de los alumnos que estuvieron ausentes ayer y el conjunto Y puede ser el conjunto de todos los alumnos que están ausentes hoy. Hágase claro que Carolina y María en el conjunto X son las mismas que Carolina y María, elementos del conjunto Y.

Combinemos los conjuntos X e Y. Cada uno de los elementos se considera una sola vez. De esto, resulta un conjunto nuevo formado por todos los elementos del conjunto X y del conjunto Y, juntos. Podemos llamar a este nuevo conjunto, el conjunto Z. ¿Cuáles son los elementos del conjunto Z?

> Anótense en la pizarra los elementos del conjunto Z en el orden en que los mencionen los estudiantes. Por ejemplo, Z = {Roberto, Carolina, Elena, María, Angel, Pablo, Samuel}.

El maestro deberá pedir a los alumnos que expliquen por qué los nombres Carolina y María aparecen una sola vez en este conjunto nuevo, el conjunto Z.

¿Contiene el conjunto Z a todos los elementos del conjunto X? ¿Contiene el conjunto Z a todos los elementos del conjunto Y? ¿Hay algunos elementos en el conjunto Z que no estén ni en el conjunto X ni en el conjunto Y? ¿Es el conjunto Z la reunión del conjunto X y el conjunto Y?

Examínese lo que está escrito en la pizarra. Esto podría disponerse de la manera siguiente:

X = {Roberto, Carolina, Elena, María}
Y = {Angel, Carolina, María, Pablo, Samuel}
Z = {Roberto, Carolina, Elena, María, Angel, Pablo, Samuel}

Recálquese que podemos decir y, también, escribir: La reunión de los conjuntos X e Y es {Roberto, Carolina, Elena, María, Angel, Pablo, Samuel}.

Otra manera sería: La reunión de los conjuntos X e Y es el conjunto Z. Entonces, introdúzcase el símbolo ∪ para la reunión. Verifíquese que la misma idea podría escribirse así:

$X \cup Y =$ {Roberto, Carolina, Elena, María, Angel, Pablo, Samuel}

o, también,

$X \cup Y = Z.$

Constrúyanse otros ejercicios en los que haya que identificar los conjuntos, haciendo una lista de los elementos de cada uno y, entonces, descríbase la reunión de los conjuntos. Quizás, el maestro desee proseguir con ejercicios más avanzados y considerar la reunión de más de dos conjuntos.

Véase la página 33, que corresponde a la página 15 del Texto del estudiante.

LA REUNION DE CONJUNTOS

Juan dio un paseo con su mamá y su papá.
Juan anotó los diferentes pájaros que vio su mamá.
También, anotó los diferentes pájaros que vio su papá.

El conjunto A es el conjunto de los diferentes pájaros que vio la mamá de Juan.

petirrojo	reinita
gorrión	

Conjunto A

El conjunto B es el conjunto de los diferentes pájaros que vio el papá de Juan.

gavilán	ruiseñor
reyezuelo	
golondrina	

Conjunto B

Para determinar todos los diferentes pájaros que vieron los padres de Juan, reunimos los conjuntos A y B. Nuestro conjunto es ahora

petirrojo, reinita, gorrión, gavilán, reyezuelo, ruiseñor, golondrina

Este conjunto es la reunión de los conjuntos A y B.
Escribimos:

A U B = {petirrojo, reinita, gorrión, gavilán, reyezuelo, ruiseñor, golondrina}

Leemos A U B así: la reunión de los conjuntos A y B.

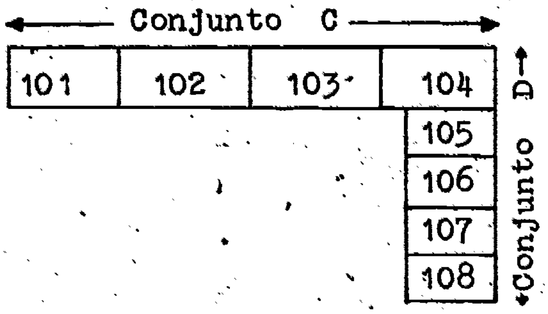
Tu clase escogió algunos comités para una fiesta.
El comité para escoger los juegos era el conjunto J.
El comité para comprar los premios era el conjunto P.

J = {Juan, Jaime, Elena, Susana}
P = {Juan, Irene, Doris, Samuel}

Los dos comités se reunieron conjuntamente. ¿Qué alumnos asistieron a la reunión?

J ∪ P = {Juan, Jaime, Elena, Susana, Irene, Doris, Samuel}

El cuadro de la derecha muestra las aulas en la escuela de Juana. Las aulas 101, 102, 103 y 104 tienen ventanas a lo largo de un lado del edificio. Las aulas 104, 105, 106, 107 y 108 tienen ventanas a lo largo de otro lado del edificio.



C = {101, 102, 103, 104}
D = {104, 105, 106, 107, 108}

Escribimos: C ∪ D = {101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108}.
Leemos: La reunión de los conjuntos C y D, es el conjunto cuyos miembros son 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108.

Eduardo está aprendiendo a tocar la trompeta y el piano. Su programa de práctica es el siguiente:

domingo	lunes	martes	miércoles	jueves	viernes	sábado
		trompeta	trompeta	trompeta	trompeta	
	piano	piano	piano	piano		

El conjunto T será el conjunto de días en que Eduardo practica la trompeta.
El conjunto P será el conjunto de días en que Eduardo practica el piano.

T = {martes, miércoles, jueves, viernes}
P = {lunes, martes, miércoles, jueves}

La reunión de los conjuntos T y P es el conjunto de días de la semana en los cuales Eduardo practica la trompeta o el piano o ambos. Escribimos:

T ∪ P = {lunes, martes, miércoles, jueves, viernes}

Conjunto de problemas 5

1. A = {gato, perro, vaca, caballo}

   B = {ganso, caballo, cerdo}

   ¿Cuál de los siguientes conjuntos es la reunión de los conjuntos A y B?

   X = {gato, vaca, perro, ganso, caballo, cerdo}

   Y = {vaca, caballo, ganso, caballo, cerdo}

   Z = {gato, perro, vaca, gallina, ganso, caballo, cerdo}

   Respuesta: El conjunto X es la reunión de los conjuntos A y B. Escribimos: A ∪ B = X

2. R = {10, 20, 30, 40, 50}

   S = {60, 70, 80, 90, 100}

   ¿Cuál de los siguientes conjuntos es la reunión de los conjuntos R y S?

   M = {70, 90, 110, 130, 150}

   N = {100, 90, 80, 70, 60, 50, 40, 30, 20, 10}

   Copia y completa: R ∪ S = (n)

3. G = {a, t, z, r, m, j}

   H = {r, q, z, t}

   ¿Cuál de los siguientes conjuntos es la reunión de los conjuntos G y H?

   M = {q, a, m, j}

   N = {a, t, z, r, m, j, q, r, z, t}

   L = {a, j, m, q, r, t, z}

   Copia y completa: G ∪ H = (L)

4. J = {blanco, azul}

   K = {rojo, azul}

   Copia y completa: J ∪ K = {blanco, azul, rojo}

5. V = {18, 21, 24}

   W = {15, 18, 21, 24, 27}

   Copia y completa: V ∪ W = {18, 21, 24, 15, 27}

6. N = {s, o, a, p}
   O = {w, a, t, e, r}

   Copia y completa: N U P = {s, o, a, p, w, t, e, r}

7. El conjunto P es el conjunto de los números impares entre 6 y 12. Copia y completa: P = {7, 9, 11}
   El conjunto Q es el conjunto de los números impares menores que 7. Copia y completa: Q = {5, 3, 1}

   P U Q = {1, 3, 5, 7, 9, 11}

8. El conjunto R es el conjunto de los números pares entre 90 y 100. Copia y completa: R = {92, 94, 96, 98}
   El conjunto S es el conjunto de los números cardinales mayores que 94 y menores que 96. Copia y completa:

   S = {95}   R U S = {92, 94, 95, 96, 98}

9. El conjunto T es el conjunto de los números cardinales entre 65 y 66. Copia y completa: T = { }
   El conjunto W es el conjunto de los números cardinales mayores que 9 y menores que 11. Copia y completa:

   W = {10}   T U W = {10}

10. El conjunto X es el conjunto de los números naturales entre 25 y 30. Copia y completa: X = {26, 27, 28, 29}
    El conjunto Y es el conjunto de los números pares entre 25 y 31. Copia y completa: Y = {26, 28, 30}

    X U Y = {26, 27, 28, 29, 30}

LA INTERSECCION DE CONJUNTOS

Objetivo: Explicar la idea de que la intersección de dos conjuntos es el conjunto cuyos elementos están en los dos conjuntos dados; y que si dos conjuntos no tienen elementos que sean iguales, entonces, su intersección es el conjunto vacío; y, también, introducir el símbolo ∩ asociado con la intersección de conjuntos.

Vocabulario: Intersección y el símbolo ∩

Sugerencias para la enseñanza:

> Al elegir ejemplos para explicar estas ideas, elíjanse (1) dos conjuntos de manera que algunos, pero no todos los elementos de los dos conjuntos, sean iguales; (2) dos conjuntos en los que todos los elementos de uno sean iguales a los del otro; y (3) dos conjuntos que no tengan elementos comunes. En el primer ejemplo, la intersección de los conjuntos será un conjunto que contenga a algunos, pero no todos los elementos de cualquiera de los dos conjuntos. En el segundo ejemplo, la intersección será cualquiera de los dos conjuntos iguales. En el tercer ejemplo, la intersección de los dos conjuntos es el conjunto vacío.
>
> Se podría empezar, eligiendo dos conjuntos entre los alumnos del salón, de manera que algunos de los estudiantes estén en ambos conjuntos.

Escribamos en la pizarra los nombres de esos miembros de la clase. Llamaremos a uno de los conjuntos el conjunto A y al otro el conjunto B.

> Por ejemplo:
>
> A = {Juan, Carlos, María, Felipe, Elena, Federico}
>
> B = {Carlos, Elena, Federico, Gloria, Marta, Teodoro}

Los estudiantes que están en los dos conjuntos son Carlos, Elena y Federico. Estos forman otro conjunto. Llamémoslo el conjunto C. Tenemos un nombre especial para este conjunto. Lo llamamos la <u>intersección</u> de los conjuntos A y B.

> Escríbase: La intersección de los conjuntos A y B es {Carlos, Elena, Federico}. Póngase de manifiesto la idea de que tenemos un símbolo que podemos utilizar para indicar esto, así:
> A ∩ B = {Carlos, Elena, Federico}.
>
> Preséntense otros ejemplos, como los siguientes:
>
> El conjunto X es el conjunto de todos los varones de nuestra clase que pertenecen al coro.
>
> El conjunto Y es el conjunto de todos los varones de nuestra clase que pertenecen a la banda de música.
>
> Escríbanse los conjuntos así:
>
> X = {Roberto, Jaime, Carlos, Enrique}
>
> Y = {Roberto, Enrique, Juan, Benito}
>
> Roberto y Enrique están en los dos conjuntos. La intersección de los conjuntos X e Y es el conjunto {Roberto, Enrique}. Es decir,
> X ∩ Y = {Roberto, Enrique}.
>
> Pídase a los estudiantes que digan oralmente y, además, escriban cuál es el conjunto intersección.

Ahora, supongamos que E = {1, 3, 5, 7} y que D = {5, 7, 9, 11}. Los números 5 y 7 son elementos de los dos conjuntos. La intersección de los conjuntos E y D es el conjunto {5, 7}. Escribimos E ∩ D = {5, 7}.

Sean M = {2, 4, 6, 8} y N = {2, 4, 6, 8}. Los números que están en los dos conjuntos son 2, 4, 6 y 8. La intersección de los conjuntos M y N es el conjunto {2, 4, 6, 8}. Escribimos M ∩ N = {2, 4, 6, 8}.

> En el ejemplo anterior, es muy conveniente, aunque no necesario, que los estudiantes escriban (o digan) que la intersección de los conjuntos M y N es el conjunto M (o que la intersección del conjunto M y el conjunto N es el conjunto N).

Elijamos todos los números naturales impares entre 0 y 11. Lo llamaremos el conjunto S. Ahora, elijamos todos los números naturales pares entre 0 y 11. Lo llamaremos el conjunto T. Estos dos conjuntos no tienen elementos que pertenezcan a ambos conjuntos. Decimos que la intersección de los conjuntos S y T es el conjunto vacío, { }. Esbribimos $S \cap T = \{\ \}$.

He aquí otros ejemplos de conjuntos cuya intersección es el conjunto vacío:

(1) El conjunto J es el conjunto de los estudiantes de la clase que nacieron en junio o julio. El conjunto M es el conjunto de los estudiantes de la clase que nacieron en marzo o mayo.

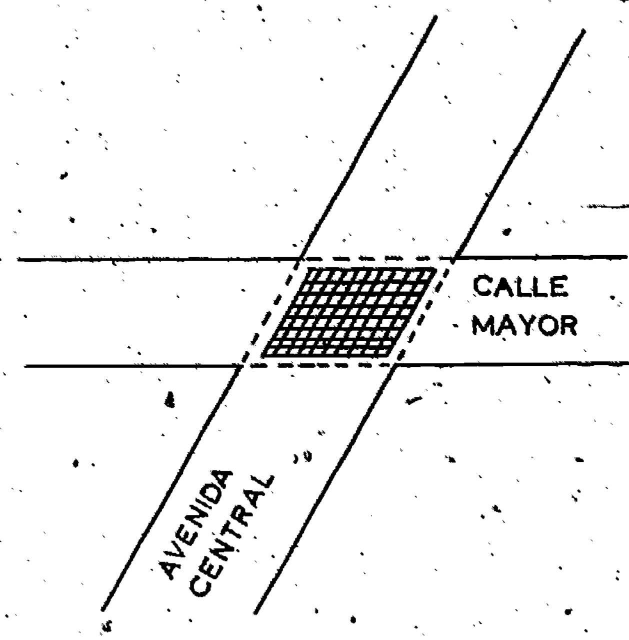
(2) $X = \{a, b, c, d\}$; $Y = \{1, 2, 3, 4\}$

(3) $R = \{7, 8, 9\}$; $S = \{10, 11, 6\}$

> Tal vez, el maestro quiera utilizar ejercicios como los que se dan a continuación, antes de que los alumnos resuelvan los problemas que se presentan en la sección Intersección de conjuntos.
>
> "Indiquen en voz alta y por escrito qué conjunto constituye la intersección de los dos conjuntos dados en cada uno de los siguientes casos: (También, podría pedírseles a algunos de los estudiantes que describan cada uno de los conjuntos dados.)
>
> (1) A = {agosto, septiembre, octubre, noviembre}
> B = {septiembre, noviembre, enero}
>
> (2) N = {Norma, Noelia, Natalia}
> M = {Marcos, Marta, María}
>
> (3) V = {a, e, i, o, u}
> C = {d, g, b, k, l, m, n, o}
>
> (4) $K = \{4, 9, 16, 25\}$
> $J = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$
>
> Véase la página 40, que corresponde a la página 19 del Texto del estudiante.

LA INTERSECCION DE CONJUNTOS

Observa la figura de la derecha. La Calle Mayor y la Avenida Central se cruzan. Una parte de una calle es, también, una parte de la otra calle. Esta parte se sombreó en la figura. Pertenece a ambas calles. Es la intersección de las dos calles. Examina los dos conjuntos siguientes:



Conjunto A	Conjunto B
Alicia	Elena
Isabel	Raúl
Raúl	José
Susana	Susana
Tomás	Olga

Algunos niños son elementos de ambos conjuntos.
Los niños que son elementos de ambos conjuntos son Raúl y Susana.
Este conjunto puede escribirse así: {Raúl, Susana}
Este conjunto se llama la intersección de los conjuntos A y B.
Escribimos: $A \cap B = \{Raúl, Susana\}$
Leemos $A \cap B$ así: la intersección de los conjuntos A y B.
El símbolo $\cap$ significa "la intersección de".

He aquí algunos conjuntos más:

El conjunto X es el conjunto de los números que utilizamos, cuando contamos de cinco en cinco, empezando con 5 y terminando con 30.

$$X = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$$

El conjunto Y es el conjunto de los números que utilizamos, cuando contamos de diez en diez, empezando con 10 y terminando con 50.

$$Y = \{10, 20, 30, 40, 50\}$$

Los números que son elementos de ambos conjuntos X e Y son 10, 20 y 30. La intersección de los conjuntos X e Y es el conjunto {10, 20, 30}. Escribimos: $X \cap Y = \{10, 20, 30\}$.

$$J = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$$
$$K = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$$

El conjunto J es el conjunto de los números pares menores que 17. El conjunto K es el conjunto de los números impares menores que 17.

No hay números que sean elementos de ambos conjuntos J y K.

La intersección de los conjuntos J y K es el conjunto { }.

Escribimos: $J \cap K = \{\ \}$.

Conjunto de problemas 6

1. A = {carro, tren, taxi, bote}

   B = {vagón, bote, aeroplano, tren, bicicleta}

   ¿Cuál de los siguientes conjuntos es la intersección de los conjuntos A y B?

   M = {carro, taxi, vagón, aeroplano, bicicleta}

   R = {bote, tren}

   S = { }

   Respuesta: El conjunto R es la intersección de los conjuntos A y B. Escribimos: $A \cap B = R$.

2. D = {13, 17, 19, 23}
   E = {9, 11, 13, 15, 17, 18, 21}
   ¿Cuál de los siguientes conjuntos es la intersección de los conjuntos D y E?

   P = {13, 17, 19, 23, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21}
   Q = {9, 11, 15, 19, 21}
   R = {17, 13}

   Copia y completa: D ∩ E = (Q)

3. G = {d, x, p, r, q, m}
   H = {t, b, s, n, a}
   ¿Cuál de los siguientes conjuntos es la intersección de los conjuntos G y H?

   I = {a, b, d, m, n, p, q, r, s, t, x}
   J = {d, b, p, q, n, m}
   K = { }

   Copia y completa: G ∩ H = (K)

4. J = {vestido, zapato, sombrero, chaqueta}
   K = {zapato, gorra, chaqueta, vestido}

   Copia y completa: J ∩ K = {vestido, zapato, chaqueta}

5. L = {g, r, a, n, d}
   M = {p, i, a, n, o}

   Copia y completa: L ∩ M = {a, n}

6. N = {73, 59, 8, 81, 63}
   O = {104, 49, 73, 58, 18, 95}

   Copia y completa: N ∩ O = {73}

7. El conjunto P es el conjunto de los números cardinales menores que 7. Copia y completa: P = {6, 5, 4, 3, 2, 1, 0}
   El conjunto Q es el conjunto de los números cardinales entre 5 y 12. Copia y completa:

   Q = {6, 7, 8, 9, 10, 11}

   P ∩ Q = {6}

   P ∪ Q = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11}

8. El conjunto R es el conjunto de los números cardinales mayores que 38 y menores que 44. Copia y completa:
R = {39, 40, 41, 42, 43}
El conjunto S es el conjunto de los números cardinales entre 36 y 46 que no son números pares.
Copia y completa: S = {37, 39, 41, 43, 45}

$R \cap S$ = {39, 41, 43}

$R \cup S$ = {39, 40, 41, 42, 43, 37, 45}

PROBLEMAS DE PRACTICA SUPLEMENTARIA REFERENTE A CONJUNTOS

CONSIDERACIONES SOBRE LOS CONJUNTOS

Conjunto de problemas 7

Escribe los elementos de cada uno de los conjuntos siguientes:

1. El conjunto de los números pares menores que 12.
{0, 2, 4, 6, 8, 10}
2. El conjunto de los números naturales menores que 20 y mayores que 10. {11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19}
3. El conjunto de los números impares entre 10 y 20.
{11, 13, 15, 17, 19}
4. El ~~conjunto~~ conjunto de los números cardinales menores que 17 y mayores que 15. {16}
5. El conjunto de los números entre 30 y 40 que son mayores que 60. { }
6. ¿Cuántos miembros hay en el conjunto de letras de nuestro alfabeto? (28)
7. He aquí un conjunto: {martes, miércoles}. Describe este conjunto, escribiendo en una hoja de papel: Este es un conjunto de (los días de la semana cuyos nombres empiezan con m.)
8. Nombra dos conjuntos que no tienen elementos. (Hay varias respuestas posibles.)

9. Da una ilustración de un conjunto. Describe, entonces, el conjunto, diciendo: Este es un conjunto de (Hay varias respuestas posibles.)

10. Describe el conjunto siguiente con tus propias palabras:

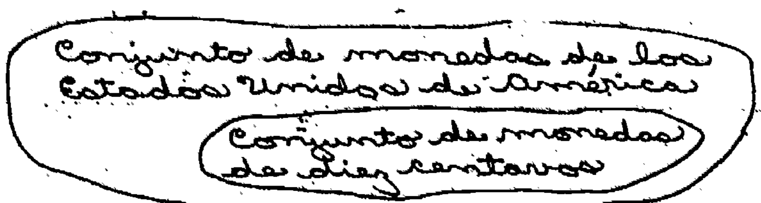
$$A = \{5, 10, 15, 20, 25\}$$

(El conjunto A es el conjunto de los primeros cinco números naturales, contando de cinco en cinco.)

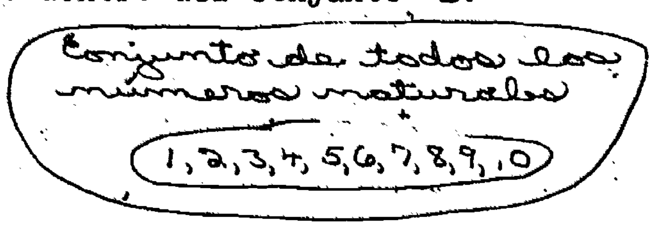
CONJUNTOS CONTENIDOS EN CONJUNTOS

Conjunto de problemas 8

1. Dibuja una figura para mostrar que el conjunto de monedas de diez centavos es un conjunto dentro del conjunto de monedas de los Estados Unidos de América.



2. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
Conjunto B = conjunto de todos los números naturales.
Dibuja una figura para mostrar que el conjunto A es un conjunto dentro del conjunto B.



Escribe un subconjunto (conjunto dentro de un conjunto) de cada uno de los siguientes:

3. {a, b, c, d, e, f} (Hay varias respuestas posibles. Posibilidad: {a, b, c})

4. {Ford, Chevrolet, Plymouth, Rambler, Cadillac} (Hay varias respuestas posibles. Posibilidad: {Ford, Cadillac})

5. {El conjunto de días festivos en un año} (Hay varias respuestas posibles. Posibilidad: {Navidad, Día de Acción de Gracias})

6. Escribe el conjunto de las vocales. Llama a este conjunto, el conjunto A. Escribe, ahora, un subconjunto del conjunto A. (A = {a, e, i, o, u} Hay varias respuestas posibles. Posibilidad: {a, o})

7. El conjunto C = el conjunto de todos los estados de los Estados Unidos de América. Escribe un subconjunto del conjunto C. (Hay varias respuestas posibles. Posibilidad: {Florida, Illinois})

8. El conjunto X = el conjunto de las monedas de diez centavos. Podemos decir que el conjunto X es un conjunto dentro del conjunto de todas (las monedas de los Estados Unidos de América.)

9. El conjunto Y = el conjunto de los números naturales. Z = {3, 8, 15, 93, 175}. El conjunto Z es un (subconjunto) del conjunto Y.

10. El conjunto C es el conjunto de todos los números impares. Determina un subconjunto del conjunto C. (Hay varias respuestas posibles. Posibilidad: {7, 11, 43})

CONJUNTOS IGUALES

Conjunto de problemas 9

1. A = {9, 4, 3}, B = {4, 3, 9}
¿Es el conjunto A = el conjunto B? (Sí)

2. M = {10, 11, 12}, N = {10, 11, 13}
¿Es el conjunto M = el conjunto N? (No)

3. X = {perro, gato, ratón}
Y = {ratón, gato, caballo, perro}
¿Es el conjunto X = el conjunto Y? (No)

4. El conjunto D es el conjunto de los números cardinales mayores que 7 y menores que 12. El conjunto E es igual

al conjunto D. Nombra los elementos del conjunto E.
(8, 9, 10, 11)

He aquí algunos conjuntos: F = {2, 4, 6, 8}
G = {4, 2, 8, 6}
H = {8, 6, 1, 4}
K = {8, 6, 1, 2}
L = {4, 8, 6, 1}
M = {6, 2, 8, 4}

5. ¿A qué conjuntos es igual el conjunto F? (a los conjuntos G y M)
6. ¿Serán conjuntos iguales los conjuntos H y L? (Sí)
7. ¿Qué conjuntos son iguales al conjunto K? (Ninguno)
8. A = {2, 4, 6, 8}. El conjunto B es el conjunto de todos los números pares menores que 20. ¿Cuál de los siguientes enunciados es correcto? El conjunto A = el conjunto B; el conjunto A ≠ el conjunto B. (El conjunto A ≠ el conjunto B)
9. Escribe un conjunto. Llámalo conjunto X. Ahora, escribe un conjunto que sea igual al conjunto X. (Hay varias respuestas posibles. Posibilidades: x = {10, 11, 12, 13, 14}; y = {14, 13, 12, 10, 11})
10. El conjunto J es el conjunto de las primeras cinco letras del alfabeto. El conjunto K es el conjunto de las últimas cinco letras del alfabeto. ¿Es el conjunto J = el conjunto K? (no)

LA REUNION DE CONJUNTOS

Conjunto de problemas 10

1. A = {1, 2, 3, 4}, B = {5, 6, 7, 8}
La reunión de los conjuntos A y B es el conjunto:
{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}
2. C = {c, a, n, d, y}, D = {c, o, k, e}
Copia y completa: C ∪ D = {c, a, n, d, y, o, k, e}

3. E = {5, 10, 15, 20, 25}, F = {30, 35, 40, 45}
¿Cuál de los siguientes conjuntos es la reunión de los conjuntos E y F?
M = {10, 20, 25, 45, 50, 55, 60, 65, 70} (El conjunto N)
N = {45, 40, 35, 30, 25, 20, 15, 10, 5}

4. H = {2, 4, 6, 8, 10}, J = {3, 6, 8, 12}
Escribe los elementos de la reunión de los conjuntos H y J.
(H ∪ J = {2, 4, 6, 8, 10, 3, 12})

5. El conjunto K es el conjunto de los números impares entre 10 y 20. El conjunto L es el conjunto de los números pares entre 10 y 20. Copia y completa:
K ∪ L = {11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19}

6. El conjunto R es el conjunto de los números cardinales entre 47 y 48. El conjunto S es el conjunto de los números cardinales mayores que 15 y menores que 17.
Copia y completa: R ∪ S = {16}

7. X = {B, E}, Y = {A, O, C, E}
Copia y completa: X ∪ Y = {O, A, B, E, C}

8. T = {$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$}, V = {$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$}
El conjunto W es la reunión de los conjuntos T y V.
Escribe los elementos del conjunto W. ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$).

9. C = {1, 6, 7, 8, 3}, D = {2, 6, 7, 8, 1}
El conjunto E es la reunión de los conjuntos C y D.
Escribe los elementos del conjunto E. (1, 6, 7, 8, 3, 2)

10. El conjunto M es el conjunto de los números cardinales entre 20 y 21. El conjunto N es el conjunto de los números pares entre 6 y 8. Copia y completa:
M ∪ N = { }

11. A = {9, 18, 27, 36}. El conjunto B tiene 5 elementos.
A ∪ B = {3, 6, 9, 12, 15, 18, 27, 36}
A ∩ B = {9}
B = {3, 6, 9, 12, 15}

LA INTERSECCION DE CONJUNTOS

Conjunto de problemas 11

1. A = {1, 2, 3, 4, 5}, B = {2, 4, 6, 8, 1}
   ¿Cuál de los siguientes conjuntos es la intersección de los conjuntos A y B?
   M = {5, 6, 1, 2}
   N = {1, 2, 4} (El conjunto N)
   S = {1, 4, 6}

2. C = {a, e, i, o, u}, D = {a, b, c, d, e}
   El conjunto E es la intersección de los conjuntos C y D. Escribe los elementos del conjunto E. (E = {a, e})

3. R = {5, 10, 15, 20, 25}, S = {10, 20, 30, 40}
   El conjunto T es la intersección de los conjuntos R y S. Escribe los elementos del conjunto T. (T = {10, 20})

4. El conjunto X es el conjunto de los primeros cinco números naturales. El conjunto Y es el conjunto de los números impares entre 4 y 12. El conjunto Z es la intersección de los conjuntos X e Y. Escribe los elementos del conjunto Z. (Z = {5}

5. K = {perros, gatos, ratones}
   L = {cerdos, perros, gatos, ratones}
   M = {caballos, vacas, perros}
   Copia y completa: K ∩ L = {perros, gatos, ratones}
   K ∩ M = {perros}
   L ∩ M = {perros}

6. H = {s, t, u, d, y}, J = {h, a, r, d}
   Copia y completa: H ∩ J = {d}

7. A = {escritorio, silla, lápiz}
   B = {borrador, tiza, silla}
   C = {libro, libreta, escritorio}
   Copia y completa: A ∩ C = {escritorio}
   A ∩ B = {silla}
   B ∩ C = { }

E28

C U A = {libro, libreta, escritorio, silla, lápiz}

C U B = {libro, libreta, escritorio, borrador, tiza, silla}

B U A = {borrador, tiza, silla, escritorio, lápiz}

8. J = {12, 18, 24, 30}. El conjunto K tiene dos elementos. Un elemento es 6. K ∩ J = 18. Copia y completa:

K = {6, 18}

9. El conjunto R es el conjunto de los números naturales menores que 6. Copia y completa: R = {1, 2, 3, 4, 5}
El conjunto S es el conjunto de los números naturales entre 5 y 11. Copia y completa:

S = {6, 7, 8, 9, 10}

R ∩ S = { }

R ∩ S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

10. El conjunto P es el conjunto de todos los números pares entre 1 y 7. El conjunto Q es el conjunto de todos los números impares entre 1 y 7. Copia y completa:

P ∩ Q = { }

P ∩ Q = {2, 3, 4, 5, 6}

Capítulo 2

NUMERACION

PROPOSITO DE LA UNIDAD

Esta unidad se propone dos fines: (1) ampliar los conocimientos de los alumnos acerca de los principios fundamentales de la numeración, destacando especialmente el sistema decimal y (2) hacer clara la distinción entre dos maneras de representar números: como conjuntos de cosas y como puntos de una recta, con las implicaciones que esto conlleva acerca de las ideas de igualdad y desigualdad. Además de la Base matemática que se presenta en las páginas subsiguientes, el maestro considerará útil referirse al libro del SMSG, Studies in Mathematics, Volume VI, Number Systems, Capítulo 2, páginas 17-49.

BASE MATEMATICA

Los principios de la numeración no pueden explicarse eficazmente, si existe confusión respecto a los términos número y numeral. Estos no son sinónimos. Un número es un concepto, una abstracción. Un numeral es un símbolo, un nombre de un número. Un sistema de numeración es un sistema de numerales (no un sistema de números), o sea, un sistema para nombrar números.

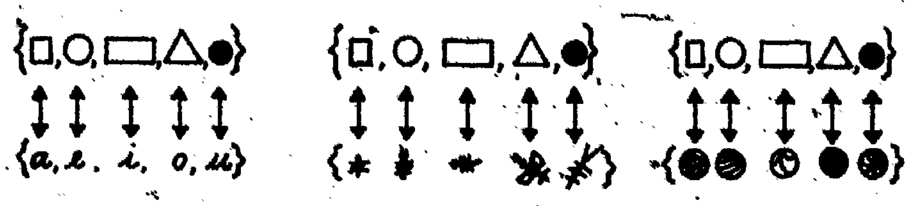
En realidad, resulta tedioso el hacer constantemente la distinción entre "número" y "numeral" y es habitual el usar el término "número" en ambos sentidos, puesto que el contexto mismo hace imposible toda confusión. Sin embargo, en esta unidad, se ha tratado de emplear los términos número, numeral y numeración con su significado matemático preciso.

Corrientemente, representamos los números de dos maneras muy distintas: (1) mediante conjuntos de cosas, y (2) mediante puntos de una recta. Utilicemos el número 5 para dar ejemplos de estos dos tipos de representación.

En el primer caso, el número 5 puede asociarse con un conjunto de objetos, como:

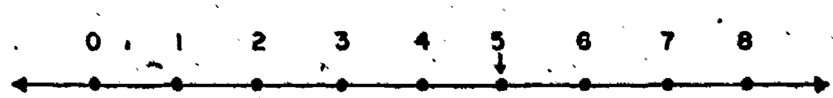
{□, ○, ▭, △, ●}

Entonces, podemos asociar el número 5 con un conjunto cualquiera cuyos elementos puedan aparearse biunívocamente con los elementos de este "conjunto modelo", como se muestra a continuación:



Todos estos conjuntos tienen al número 5 como su propiedad numérica común. En este sentido, 5 es un número cardinal que nos dice cuántos miembros hay en el conjunto.

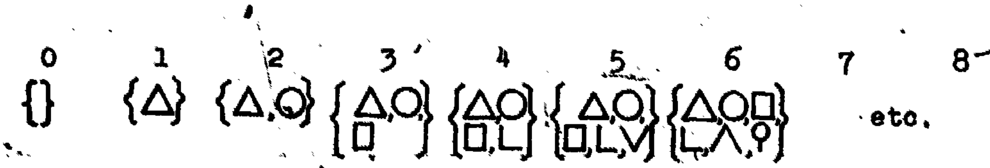
En el segundo caso, el número 5 puede asociarse con un punto de una recta numérica, como en la siguiente figura:



Hay un punto único de la recta numérica que corresponde a cada número cardinal; es decir, hay un punto y sólo uno de la recta numérica que corresponde a cada número cardinal dado.

En el análisis anterior, está implícita la idea de que los elementos de un conjunto de números cardinales pueden ordenarse y pueden disponerse en una sucesión de menor a mayor y viceversa.

Primeramente, consideremos la idea de ordenación en relación con los números cardinales asociados con conjuntos de cosas:

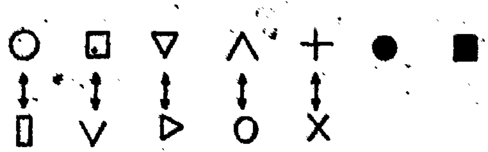


Cuando los números cardinales se ordenan de esta manera, podemos decir que:

(a) cada número del conjunto de los números cardinales es una unidad mayor que el número que le precede, y que

(b) para cada elemento del conjunto de los números cardinales (excepto cero), hay un número precedente que es una unidad menor que el elemento en cuestión.

Las ideas de mayor que (>) y menor que (<) pueden relacionarse con el apareamiento de elementos de conjuntos modelos. Por ejemplo, considérese el apareamiento de los elementos de los conjuntos modelos para 7 y 5:



Decimos que 7 es mayor que 5 ($7 > 5$), puesto que un apareamiento de los elementos de los conjuntos pone de manifiesto que hay un exceso de elementos en el conjunto cuyo número es 7, respecto del conjunto cuyo número es 5. También, decimos que 5 es menor que 7 ($5 < 7$), puesto que un apareamiento de los elementos de los conjuntos pone de manifiesto una deficiencia de elementos en el conjunto cuyo número es 5, respecto del conjunto cuyo número es 7.

Ahora, considérese la idea de <u>ordenación</u> en relación con los números representados mediante puntos de una recta numérica. En este caso, "mayor que" significa "a la derecha de", y "menor que" significa "a la izquierda de". Como 7 está a la derecha de 5 en la recta numérica, $7 > 5$. Como 5 está a la izquierda de 7 en la recta numérica, $5 < 7$.

Este es el momento oportuno para comentar acerca del uso correcto del signo de igualdad (=). Por ejemplo, cuando escribimos

$$5 + 2 = 8 - 1,$$

queremos decir que los símbolos "5 + 2" y "8 - 1" son nombres de la misma cosa, el número 7. En general, cuando escribimos

$$A = B,$$

no queremos decir que las letras o símbolos "A" y "B" sean lo mismo. Evidentemente, no lo son. Lo que <u>queremos</u> decir es que las letras "A" y "B", ambas se han empleado como <u>nombres de una misma cosa</u>. Es decir, la igualdad

$$A = B$$

afirma precisamente que lo que designamos con el símbolo "A" es <u>idéntico a</u> lo que designamos con el símbolo "B". El signo de igualdad debe utilizarse siempre con este significado solamente.

Ahora, pasemos de los números a los numerales.

La manera de nombrar los números es un problema que se ha estudiado durante muchísimos años. Varios libros como el que mencionamos anteriormente (<u>Studies in Mathematics, Volume VI</u>) dan información útil e interesante respecto a este tema. Para nuestro propósito inmediato, bastará considerar lo esencial del esquema para nombrar números que utilizamos corrientemente en la actualidad.

Estamos tan familiarizados con nuestro sistema de numeración decimal que a veces no nos damos cuenta de que éste es sólo un ejemplo de una clase amplia de sistemas de numeración que se caracterizan por el empleo de la idea de valor de posición con diferentes bases.

Nuestro sistema se llama sistema decimal debido al uso que hace de conjuntos de diez y a la manera de disponer estos conjuntos de diez para dar significado a un numeral. (La palabra decimal proviene de la palabra latina "decem", que significa diez.) Utilizamos diez símbolos para escribir numerales en el sistema decimal. Estos símbolos, llamados dígitos, son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

El sistema decimal es un sistema de numeración que emplea la idea de valor de posición, pues el tamaño del conjunto que representa un dígito en un numeral depende de la posición que ocupa dicho dígito en el numeral. Cuando decimos que el numeral 213, por ejemplo, es un nombre para el número 2 (diez veces diez) + 1 (diez) + 3 (unidades), podemos darnos cuenta de la agrupación en conjuntos de unidades, decenas y diez veces diez (centenas) por las posiciones de los dígitos 2, 1 y 3 en el numeral. Cada lugar en el numeral tiene un valor que es diez veces el del lugar inmediato a su derecha y el dígito en un lugar cualquiera nombra el número de conjuntos de unidades, decenas, centenas, etc., correspondiente a ese lugar. De modo que, si leemos de derecha a izquierda cualquier numeral en el sistema decimal, el dígito que ocupa el primer lugar indica el número de unidades, el del segundo lugar indica el número de decenas, el del tercer lugar el número de centenas, el del cuarto el número de millares, y así sucesivamente. Debido a esta agrupación por conjuntos de diez y debido al valor de posición que tiene cada dígito en virtud del lugar que ocupe en un numeral, decimos que el sistema de numeración decimal es un sistema de numeración de base diez. Los nombres sistema de numeración decimal y sistema de numeración de base diez pueden utilizarse alternadamente, pues significan exactamente lo mismo.

Ahora, considérese un sistema de numeración que utiliza la idea de valor de posición en el cual la base sea algún otro número distinto de diez, digamos, cinco. Aquí, tenemos que pensar en agrupar conjuntos de unidades, conjuntos de cinco, conjuntos de cinco veces cinco, y así sucesivamente, del mismo modo que en el sistema decimal agrupábamos conjuntos de unidades, conjuntos de diez, conjuntos de diez veces diez, etc. Examínense las marcas en los conjuntos representados más adelante. Si no hay marca alguna, podemos representar el número por 0; si hay una marca, por 1; dos marcas, por 2; tres marcas, por 3; cuatro marcas por 4.

Ahora, al nombrar el número para indicar cinco marcas, tenemos que escribir un numeral con valor de posición que signifique conjunto de cinco y ninguna unidad. Este numeral se escribe 10_{cinco} en el "sistema de base cinco" y se lee "uno, cero, base cinco". Obsérvese la importancia del valor de posición: 0 significa conjunto vacío de unidades y 1 significa 1 conjunto de cinco, en virtud de los lugares que ocupan. Necesitamos una manera de indicar que estamos agrupando en conjuntos de cinco.

Esto se logra, escribiendo cinco como subíndice. Obsérvese que no ha habido cambio alguno en el concepto del número cinco; solamente tenemos una manera nueva de escribir el numeral para representarlo. En el sistema de numeración de base cinco, sólo necesitamos los símbolos 0, 1, 2, 3, 4. Cuando aparece escrito uno solo de estos símbolos, es decir, en un numeral de un solo dígito, el símbolo tiene el mismo significado en el sistema de base cinco que en el sistema de base diez. Así, 1, 2, 3 y 4 escritos separadamente nombran los números cardinales que corresponden a conjuntos de una marca, dos marcas, tres marcas y cuatro marcas, respectivamente. En consecuencia, si escribimos numerales de un dígito en el sistema de base cinco, el subíndice "cinco" no es necesario, aunque no es incorrecto escribirlo.

Continuemos contando en el sistema de base cinco, utilizando conjuntos de marcas con el numeral correspondiente del sistema de base cinco al lado del conjunto.

(XXXXX) X	11_{cinco}	Un conjunto de cinco y una unidad
(XXXXX) XX	12_{cinco}	Un conjunto de cinco y dos unidades
(XXXXX) (XXXXX)	20_{cinco}	Dos conjuntos de cinco y ninguna unidad
(XXXXX) (XXXXX) X	21_{cinco}	Dos conjuntos de cinco y una unidad
(XXXXX XXXXX XXXXX)	30_{cinco}	Tres conjuntos de cinco y ninguna unidad
(XXXXX XXXXX XXXXX) X	31_{cinco}	Tres conjuntos de cinco y una unidad
XXXXX XXXXX XXXX XXXXX XXXXX	44_{cinco}	Cuatro conjuntos de cinco y cuatro unidades

(Esto es todo lo que vamos a escribir mediante numerales en base cinco en este capítulo. Para escribir numerales y contar en sistemas de numeración con otras bases, el maestro puede referirse al libro del SMSG, Matemáticas para el primer ciclo secundario, Volumen I, Parte 1, Texto del estudiante.) La tabla que aparece en la página 58 puede servir de guía para escribir numerales en base cinco y en otras bases. Obsérvese que en el sistema de base nueve, se necesitan sólo nueve símbolos para representar los dígitos; en el sistema de base ocho, se necesitan solamente ocho símbolos y en el sistema de base tres, solamente tres. La posición de un símbolo en cualquiera de los numerales y la base del sistema de numeración nos indican el número que representa el numeral. Considérese, por ejemplo, el número representado por el numeral 212 que está en la columna Tres de la tabla de la página siguiente. (No se escribió un subíndice para 212, pues su posición en la tabla indica que la base es tres.)

212_{tres} = 2 (tres veces tres) + 1 (tres) + 2 (unidades)

En la tabla, puede observarse que este numeral nombra el mismo número que el numeral 23 en la columna correspondiente a la base diez. Aunque 212_{tres} y 23 son nombres diferentes del mismo número, no se recomienda que en este momento se escriba 212_{tres} = 23, pues esto daría la impresión de que se está explicando una base en términos de otra. Será mejor desarrollar los significados, utilizando ejemplos como los siguientes y no "mezclar" las bases:

111_{cuatro} = 1 (cuatro × cuatro) + 1 (cuatro) + 1 (unidad)
(Se lee: uno, uno, uno, base cuatro)
= 1 (dieciséis) + 1 (cuatro) + 1 (unidad)

375_{ocho} = 3 (ocho × ocho) + 7 (ochos) + 5 (unidades)
(Se lee: tres, siete, cinco, base ocho)
= 3 (sesenta y cuatros) + 7 (ochos) + 5 (unidades)

435_{seis} = 4 (seis × seis) + 3 (seises) + 5 (unidades)
(Se lee: cuatro, tres, cinco, base seis)
= 4 (treinta y seises) + 3 (seises) + 5 (unidades)

100_{siete} = 1 (siete × siete) + 0 (sietes) + 0 (unidades)
(Se lee: uno, cero, cero, base siete)
= 1 (cuarenta y nueve) + 0 (sietes) + 0 (unidades)

243_n = 2 (n × n) + 4 (n) + 3 (unidades), donde n representa un número cualquiera igual o menor que diez. Se lee: dos, cuatro, tres, base n.

En los párrafos anteriores, no se trata de sugerir una manera de presentar el tema a los estudiantes; lo que se trata es de explicar el significado de los sistemas de numeración con diferentes bases, que utilizan el concepto de valor de posición. En la sección Agrupación en base cinco y en otras secciones de este capítulo, se presentan sugerencias para la enseñanza.

Base

Diez	Nueve	Ocho	Siete	Seis	Cinco	Cuatro	Tres
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	10
4	4	4	4	4	4	10	11
5	5	5	5	5	10	11	12
6	6	6	6	10	11	12	20
7	7	7	10	11	12	13	21
8	8	10	11	12	13	20	22
9	10	11	12	13	14	21	100
10	11	12	13	14	20	22	101
11	12	13	14	15	21	23	102
12	13	14	15	20	22	30	110
13	14	15	16	21	23	31	111
14	15	16	20	22	24	32	112
15	16	17	21	23	30	33	120
16	17	20	22	24	31	100	121
17	18	21	23	25	32	101	122
18	20	22	24	30	33	102	200
19	21	23	25	31	34	103	201
20	22	24	26	32	40	110	202
21	23	25	30	33	41	111	210
22	24	26	31	34	42	112	211
23	25	27	32	35	43	113	212
24	26	30	33	40	44	120	220
25	27	31	34	41	100	121	221

Como puede verse en la tabla, el numeral que representa la base siempre es 10, cuando se escribe en el sistema de esa base particular. Análogamente, en todo sistema de la clase que estamos considerando, el numeral 100 siempre designa el cuadrado de la base.

Un conocimiento del esquema general de la notación posicional contribuirá a entender mejor el sistema de numeración de base diez, en particular.

Materiales para el Capítulo 2

1. Tablero de franela y siluetas
2. Recta numérica (desde el 0 hasta el 100)
3. Paquetes de veinte a treinta objetos que puedan contarse (Los objetos que vayan a utilizarse deben ser lo suficientemente grandes para que se vean desde todos los lugares del salón. Los estudiantes pueden tener objetos más pequeños apropiados para trabajar en sus pupitres.)
4. Varios palillos, sorbetes o tisas de cartulina, para usarlos en tablas de valor posicional
5. Abaco
6. Pueden construirse tablas de valor de posición que muestren agrupaciones en conjuntos de diez, cinco y tres. A continuación, se presentan varios ejemplos:

Centenas	Decenas	Unidades

Cincos	Unidades

Treses	Unidades

AGRUPACION EN BASE CINCO

Objetivo: Comprender la agrupación en base cinco.

Materiales: Un paquete de veinte a treinta objetos para cada alumno de la clase.

Un tablero de franela y siluetas para que el maestro haga algunas demostraciones.

Vocabulario: Sistema de numeración, base diez

Sugerencias para la enseñanza:

> En matemáticas, es importante que entendamos la estructura del sistema de numeración decimal. Por sistema de numeración, entendemos un convenio para escribir o expresar los números ordenadamente por sus tamaños.
>
> Como preparación para iniciar esta sección, quizás, el maestro quiera tener un paquete de veinte o treinta objetos que puedan contarse para cada uno de los alumnos. Esto les proporcionará una oportunidad de trabajar con materiales concretos para descubrir relaciones por ellos mismos.

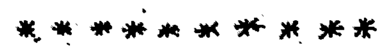
Exploración:

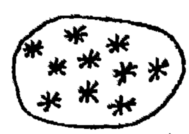
Imaginemos un pastor que vivió hace muchos años, cuidando sus ovejas en el campo. Al principio, el pastor tenía solamente dos o tres ovejas y podía decir de una ojeada si faltaba alguna. No tenía que saber contar. Más tarde, su rebaño aumentó a nueve y no podía decidir rápidamente si faltaba alguna de sus ovejas. Tenía que buscar una manera de contarlas. Algún día podría perderse o herirse una oveja. A menos que el pastor tuviera alguna manera de contarlas, no sabría si faltaba alguna. Finalmente, decidió contar sus ovejas utilizando los dedos. Con cada oveja, asociaba un dedo. Este sistema funcionaba bien, mientras no tuviera más de diez ovejas.

Llegó el día en que su rebaño aumentó. De nuevo, se enfrentó al problema de hallar una manera de contar sus ovejas y esta vez, decidió emplear piedrecitas. Cada mañana, después que hubieran pasado diez ovejas (una por cada uno de los dedos) por el portón, colocaba una piedrecita en un saquito. Esto significaba que tenía tantos grupos de diez ovejas como piedrecitas en el saquito y tantas otras como indicaran sus dedos. Por ejemplo, ~~si tenía~~ treinta y cuatro ovejas, tendría tres piedrecitas en el saquito y quedarían cuatro ovejas, las cuales contaría con sus dedos.

Cuando las ovejas regresaban al atardecer, repetía la operación. Podía decir si tenía las mismas ovejas que por la mañana.

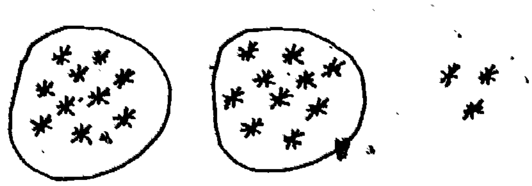
Hoy día, empleamos más o menos el mismo sistema. Podemos escribir un numeral que represente cuántas ovejas tenemos, sin necesidad de utilizar piedrecitas. Cuando escribimos el numeral 34, sabemos, por el lugar que ocupa el 3, que hay tres conjuntos de diez cada uno. La posición del 4 indica que hay cuatro ovejas más.

Cada uno de ustedes tiene un paquete con algunos objetos. Repasemos nuestro sistema de numeración; cuenten nueve objetos. Añadan un objeto más a este conjunto y veamos exactamente cómo se escribe y se interpreta esto. Añadiendo un objeto a nueve objetos sueltos, obtenemos diez objetos 

o un conjunto de diez objetos. 

Añadan cuatro objetos a este conjunto de diez. 
Observen que ahora tenemos un conjunto de diez objetos y cuatro objetos más. Escribamos esto así: "14". Por la posición del "1" en este numeral, sabemos que representa un conjunto de diez objetos. También, por el lugar del "4" en este numeral, sabemos que representa los cuatro objetos sueltos.

Sumen nueve objetos al conjunto de catorce y agrúpenlos en conjuntos de diez. Vemos que tenemos dos conjuntos de diez objetos y quedan tres objetos sueltos. Esto puede escribirse así: "23". Ahora, podemos interpretar este numeral, de acuerdo con los lugares que ocupan el "2" y el "3".



> Si es necesario, continúese efectuando las anteriores agrupaciones de objetos y escriba los numerales en la pizarra.

El sistema de numeración decimal, basado en agrupaciones de diez en diez, se llama a veces sistema de base diez. Vemos que el sistema de base diez utiliza diez símbolos solamente. ¿Podrían nombrar esos símbolos? (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)

> Para dar más práctica, quizás, el maestro desee hacer copias de ejemplos parecidos al que se da a continuación:

Agrupa los siguientes objetos en conjuntos de diez.	¿Cuántos conjuntos de diez hay?	¿Cuántos objetos sueltos quedan?	¿Cómo se escribe el numeral en base diez?
* * * * * * * * * * * * * * * * *			

Supongamos que el pastor hubiera utilizado una sola mano para contar. Posiblemente se habría servido de grupos de cinco en vez de grupos de diez.

Ahora, podemos comparar este sistema con el sistema de base diez. ¿Qué nombre le daríamos? (Sistema de base cinco) ¿Cuántos símbolos utilizamos en el sistema de base diez? (Diez) ¿Cuántos símbolos utilizaríamos en el sistema de base cinco? (Cinco) ¿Cuáles serían esos símbolos? (0, 1, 2, 3, 4)

Después del pastor haber contado cinco ovejas (una por cada dedo), ¿qué haría entonces? (Colocaría una piedrecita en su saquito.) ¿Por qué debemos tener siempre un símbolo para representar el cero? (Este símbolo se utiliza para llenar posiciones que de otro modo quedarían vacías y ocasionarían confusiones. Por ejemplo, en 203, se necesita el cero para indicar que, aunque tenemos 2 centenas y 3 unidades, no tenemos decenas.)

Utilicemos nuestros objetos para ilustrar el sistema de base cinco. Coloquen siete de ellos en sus pupitres. Agrupen los siete objetos en conjuntos de cinco. ¿Cuántos conjuntos de cinco hay? (Uno) ¿Cuántos objetos sueltos quedan? (Dos) Añadan tres objetos más a este conjunto. ¿Cuántos conjuntos de cinco hay ahora? (Dos) ¿Cuántos objetos sueltos quedan? (Ninguno)

Capítulo 2

NUMERACION

AGRUPACION EN BASE CINCO

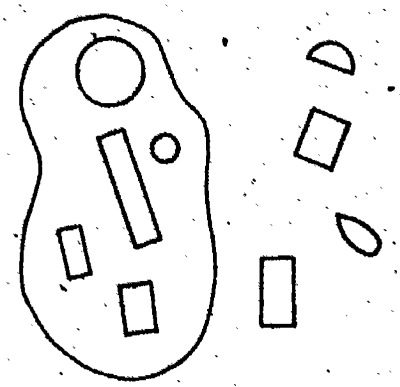
Nuestro sistema de numeración se llama a veces el sistema de base diez. Esto significa que agrupamos en conjuntos de diez. En el sistema de base diez, se emplean solamente diez símbolos. Estos son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Podemos escribir un numeral cualquiera, utilizando de estos diez símbolos los que sean necesarios.

La siguiente representación muestra el uso del sistema de base diez en la escritura de numerales. Escribe en tu hoja de papel las letras a, b, c, d, e y f. Al lado de cada letra, escribe el numeral que corresponde al lugar que la letra ocupa en la tabla.

Agrupa estos objetos en conjuntos de ~~diez~~.	¿Cuántos conjuntos de diez hay?	¿Cuántos objetos sueltos quedan?	¿Cómo escribes el numeral en base diez?
1. XXXXXXXXXX XXXXXX	1	6	16
2. XXXXXXXXXX XXX XXXXXXXXXX	2	3	23
3. XXXXXXXXXX XXXX	a (1)	b (4)	c (14)
4. XXXXXXXXXX XXXXX XXXXXXXXXX	d (2)	e (5)	f (25)

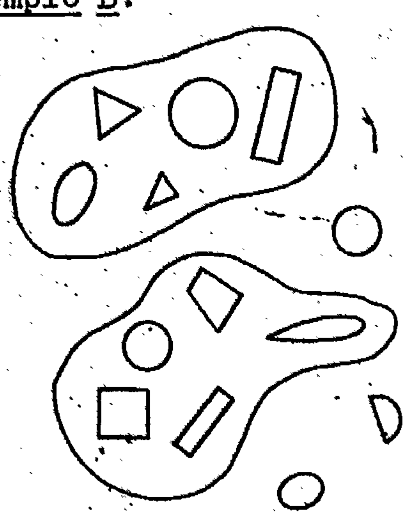
¿Cómo resultaría nuestro sistema de numeración, si tratáramos de hacer un sistema que utilizara conjuntos de cinco? Desde luego, en un sistema de base cinco, agruparíamos en conjuntos de cinco según se indica en los ejemplos A, B, C y D, a continuación:

Ejemplo A:



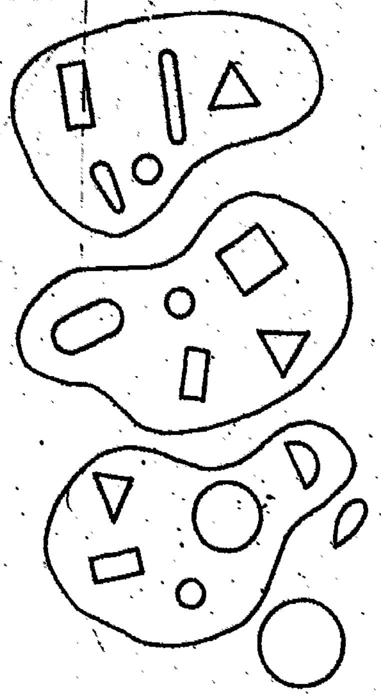
Pongamos estos objetos en conjuntos de cinco. Encontramos un conjunto de cinco y cuatro objetos sueltos.

Ejemplo B:



En este diagrama, tenemos dos conjuntos de cinco objetos cada uno y tres objetos sueltos.

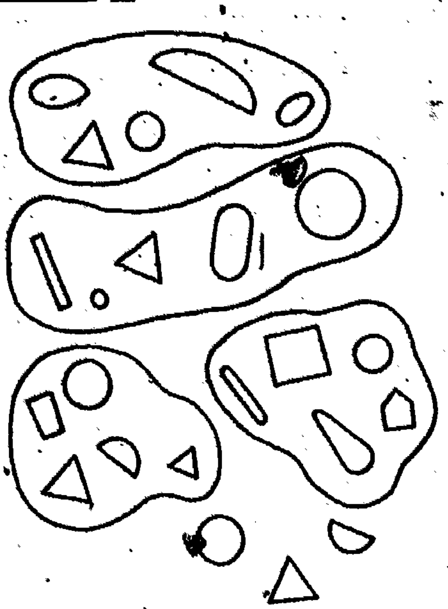
Ejemplo C:



Examina este conjunto de objetos.

1. ¿Cuántos conjuntos de cinco hay? (3)
2. ¿Cuántos objetos sueltos quedan? (2)
3. Tenemos (3) cincos y (2) unidades.

Ejemplo D:



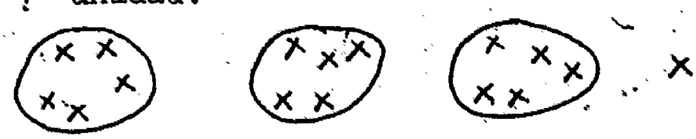
1. ¿Cuántos conjuntos de cinco hay? (4)
2. ¿Cuántos objetos sueltos quedan? (3)
3. Tenemos (4) cincos y (3) unidades.

Conjunto de problemas 1

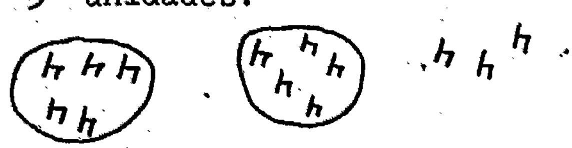
1. Copia y completa la siguiente tabla:

Agrupa estos objetos en conjuntos de cinco.	¿Cuántos conjuntos de cinco hay?	¿Cuántos objetos sueltos quedan?
√√√√√ √√√√√ √√√	2	3
ooooo oooo	(1)	(4)
xxxxx xxxxx xxxxx xx	(3)	(2)
□□□□□ □□□□□ □□ □□□□□ □□□□□	(4)	(2)

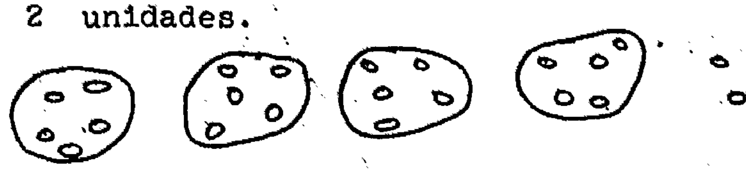
2. Dibuja un conjunto de objetos que muestre 3 grupos de cinco y 1 unidad.



3. Dibuja un conjunto de objetos que muestre 2 grupos de cinco y 3 unidades.



4. Dibuja un conjunto de objetos que muestre 4 grupos de cinco y 2 unidades.



78

5. Copia y completa la siguiente tabla:

Conjuntos de objetos	Cincos	Unidades
xxxxx xxxx	1	4
00000 00000 00000 00	3	2
✓✓✓✓✓ ✓✓✓✓✓ ✓✓✓✓✓ ✓✓✓✓✓ ✓	(4)	(1)
□□□□□ □□□□□ □□□□	(2)	(4)
△△△△△ △△△△△ △△△△△ △△△△△	(4)	(0)

Sería conveniente hacer duplicados de este Conjunto de problemas para los estudiantes. En los problemas del 2 al 4, les agradará dibujar sus propios objetos para representar cada conjunto. Pueden utilizarse objetos diferentes, dentro del mismo conjunto.

NOTACION DE BASE CINCO

Objetivo: Explicar a los estudiantes la notación de base cinco.

Materiales: Tabla de valores posicionales y tiras de cartulina

Vocabulario: Notación

Sugerencias para la enseñanza:

Ahora, estamos preparados para introducir la escritura de numerales en base cinco. Utilícense una tabla de valores posicionales y un montón de tiras de cartulina para indicar agrupaciones de cincos y de unidades.

Cincos	Unidades

Escríbase la notación de base cinco en la pizarra, a medida que los alumnos cuenten las tiras de cartulina. Por ejemplo:

1_{cinco}	2_{cinco}	3_{cinco}	4_{cinco}	10_{cinco}
11_{cinco}	12_{cinco}	13_{cinco}	14_{cinco}	20_{cinco}
21_{cinco}	22_{cinco}	23_{cinco}	24_{cinco}	30_{cinco}
31_{cinco}	32_{cinco}	33_{cinco}	34_{cinco}	40_{cinco}
41_{cinco}	42_{cinco}	43_{cinco}	44_{cinco}	

Utilícense solamente veinticuatro tiras en este estudio. Para contar veinticinco tiras utilizando la notación de base cinco, sería necesario saber algo acerca de los numerales de tres dígitos que no se estudiarán hasta el quinto grado.

Exploración:

Utilicemos nuestras tiras de cartulina para ilustrar el sistema de base cinco. Empezaremos con una sola tira de cartulina. Coloquémosla en el lugar de las unidades en la caja de valores posicionales. El símbolo que empleamos para representar uno en base cinco es 1_{cinco}. La palabra "cinco" escrita a la derecha del numeral y un poco hacia abajo indica que estamos agrupando en conjuntos de cinco. Añadan otra tira. ¿Qué símbolo utilizaríamos? (2_{cinco}) Añadamos otra tira al conjunto. ¿Qué símbolo utilizaríamos? (3_{cinco}) Añadamos otra tira al conjunto. ¿Qué símbolo utilizaríamos? (4_{cinco}) Añadamos otra tira al conjunto. ¿Cuántas tiras tenemos? (Un conjunto de cinco) Coloquemos el 1 para representar el conjunto de cinco en el lugar de los cincos. Hemos escrito 1_{cinco}, 2_{cinco}, 3_{cinco}, 4_{cinco}. ¿Cómo escribiremos un cinco y ninguna unidad? (10_{cinco}) Leemos este símbolo así: "un cinco y ninguna unidad" o "uno, cero, base cinco". ¿Qué significa 10_{cinco}? (Un conjunto de cinco y ninguna unidad)

> Continúese añadiendo tiras, una cada vez, y escribiendo el nombre del número representado, utilizando la notación de base cinco hasta llegar a 44_{cinco}. Cada vez que se cuente un conjunto de cinco tiras, agrúpense éstas y colóquense en el lugar de los cincos.

NOTACION DE BASE CINCO

Diagrama	Significado	Numeral
x	1 unidad	1_{cinco}
xx	2 unidades	2_{cinco}
xxx	3 unidades	3_{cinco}
xxxx	4 unidades	4_{cinco}
xxxxx	1 cinco y 0 unidades	10_{cinco}
xxxxx x	1 cinco y 1 unidad	11_{cinco}
xxxxx xx	1 cinco y 2 unidades	12_{cinco}
xxxxx xxx	1 cinco y 3 unidades	13_{cinco}
xxxxx xxxx	1 cinco y 4 unidades	14_{cinco}
xxxxx xxxxx	2 cincos y 0 unidades	20_{cinco}

Cuando se agrupa de cinco en cinco, utilizamos la idea de valor de posición y los símbolos 0, 1, 2, 3 y 4 para nombrar un número.

En el sistema de base cinco, no hay un símbolo de un solo dígito para representar un cinco. Reagrupamos cinco unidades como un cinco y empleamos para esto el numeral de dos dígitos 10_{cinco}. Esto se lee: "uno, cero, base cinco". El cero está en el lugar de las unidades para mostrar que no hay unidades. El 1 está en el lugar de los cincos para mostrar un grupo de cinco.

Observa las seis x de la tabla.

¿Cuántos conjuntos de cinco hay? (1)

¿Cuántas x quedan? (1)

¿Cómo se escribe el numeral en base cinco? (11_{cinco})

¿Cómo se lee este numeral en base cinco? (uno, uno, base cinco)

Supon[illegible]e tienes nueve objetos.

¿Cuántos conjuntos de cinco hay? (1)

¿Cuántos objetos quedan? (4)

¿Cómo escribirías el numeral en base cinco? (14_{cinco})

Lee este numeral en base cinco. (uno, cuatro, base cinco)

Piensa en trece objetos.

¿Cuántos conjuntos de cinco hay? (2)

¿Cuántos objetos quedan? (3)

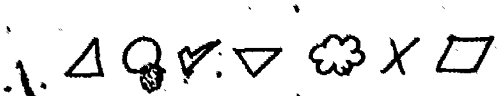
¿Cómo escribirías el numeral en base cinco? (23_{cinco})

Lee este numeral en base cinco. (dos, tres, base cinco)

Conjunto de problemas 2

Cada uno de los siguientes problemas tiene tres partes; escribe la respuesta para cada parte, como se hizo para el número 1:

1. Examina los siguientes objetos:



a) ¿Cuántos conjuntos de cinco hay? (1)

b) ¿Cuántos objetos quedan? (2)

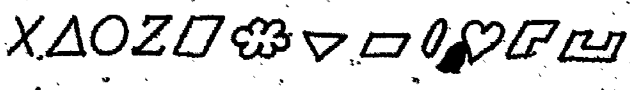
c) ¿Cómo se escribe el numeral en base cinco?

Respuesta: 1. a) 1

b) 2

c) 12_{cinco}

2. Examina los siguientes objetos:

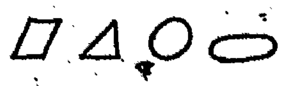


   a) ¿Cuántos conjuntos de cinco hay? (2)

   b) ¿Cuántos objetos quedan? (2)

   c) ¿Cómo se escribe el numeral en base cinco? (22_{cinco})

3. Examina los siguientes objetos:



   a) ¿Cuántos conjuntos de cinco hay? (0)

   b) ¿Cuántos objetos quedan? (4)

   c) ¿Cómo se escribe el numeral en base cinco? (4_{cinco})

4. Piensa en ocho perros.

   a) ¿Cuántos conjuntos de cinco hay? (1)

   b) ¿Cuántos de los ocho perros no están en un conjunto de cinco? (3)

   c) ¿Cómo se escribe el numeral correspondiente a ocho en base cinco? (13_{cinco})

5. Piensa en diecinueve gatos.

   a) ¿Cuántos conjuntos de cinco hay? (3)

   b) ¿Cuántos de los diecinueve gatos no están en un conjunto de cinco? (4)

   c) ¿Cómo se escribe el numeral para diecinueve en base cinco? (34_{cinco})

Conjunto de problemas 3

Copia y completa la siguiente tabla; el primer ejercicio se hizo como un ejemplo:

Agrupa estas letras en conjuntos de cinco.	¿Cuántos conjuntos de cinco letras hay?	¿Cuántas letras quedan?	¿Cómo escribirías el numeral en base cinco?
I A B D E F G H C	1	4	14_{cinco}
A K B E F G H C D J I	(2)	(1)	(21_{cinco})
Z Z Z Z Z Z Z Z Z Z Z Z Z Z Z	(3)	(0)	(30_{cinco})
F I G R C O M P M K L N T E A Q B S H	(3)	(4)	(34_{cinco})
A J H C I B L G F D K T N M R P Q O S X U V W	(4)	(3)	(43_{cinco})

El maestro deberá hacer varios duplicados de la tabla anterior para que los alumnos la completen.

Conjunto de problemas 4

Copia y completa la siguiente tabla; el primer ejercicio muestra lo que tienes que hacer:

	Número de objetos	Conjuntos de cinco	Objetos que no están en un conjunto de cinco	Numeral en base cinco
1.	11	2	1	21_{cinco}
2.	8	(1)	(3)	(13_{cinco})
3.	16	(3)	(1)	(31_{cinco})
4.	3	(0)	(3)	(3_{cinco})
5.	20	(4)	(0)	(40_{cinco})
6.	14	(2)	(4)	(24_{cinco})

86

AGRUPACION Y NOTACION EN OTRAS BASES

Objetivo: Extender la idea de agrupación a otras bases y estudiar las notaciones correspondientes.

Materiales: Cajas de valores posicionales y tiras de cartulina; un conjunto de veinte objetos para cada estudiante

Sugerencias para la enseñanza:

> Ahora, estudiaremos bases numéricas distintas de diez y de cinco. Las próximas experiencias implican datos que pueden deducirse de un modelo definido, el cual pueden descubrir los alumnos con la ayuda del maestro. Más adelante, se presentan algunas sugerencias para la enseñanza. Nuevamente, los estudiantes tendrán que utilizar sus materiales.
>
> Antes de asignar los conjuntos de problemas del 3 al 5, deberá hacerse algún trabajo en clase que ilustre agrupaciones en otras bases. Utilícense cajas de valores posicionales, con el fin de explicar la notación. Síganse las indicaciones sugeridas al estudiar la base cinco.

Exploración:

1. Cuenten diecisiete objetos.
2. Agrupen los diecisiete objetos en conjuntos de nueve.
   a. ¿Cuántos conjuntos de nueve hay? (1)
   b. ¿Cuántos objetos sueltos quedan? (8)
   c. ¿Cómo se escribe el numeral en base nueve? (18_{nueve})
3. Agrupen los diecisiete objetos en conjuntos de ocho.
   a. ¿Cuántos conjuntos de ocho hay? (2)
   b. ¿Cuántos objetos sueltos quedan? (1)
   c. ¿Cómo se escribe el numeral en base ocho? (21_{ocho})
4. Agrupen los diecisiete objetos en conjuntos de siete.
   a. ¿Cuántos conjuntos de siete hay? (2)
   b. ¿Cuántos objetos sueltos quedan? (3)
   c. ¿Cómo se escribe el numeral en base siete? (23_{siete})
5. Agrupen los diecisiete objetos en conjuntos de seis.
   a. ¿Cuántos conjuntos de seis hay? (2)
   b. ¿Cuántos objetos sueltos quedan? (5)
   c. ¿Cómo se escribe el numeral en base seis? (25_{seis})

AGRUPACION Y NOTACION EN OTRAS BASES

Conjunto de problemas 5

Cuenta veinte objetos y contesta las siguientes preguntas:

1. Agrupa los veinte objetos en conjuntos de nueve.
   a) ¿Cuántos conjuntos de nueve hay? (2)
   b) ¿Cuántos objetos quedan? (2)
   c) ¿Cuántos nueves y cuántas unidades hacen veinte?
   (2 nueves y 2 unidades)

2. Agrupa los veinte objetos en conjuntos de ocho.
   a) ¿Cuántos conjuntos de ocho hay? (2)
   b) ¿Cuántos objetos quedan? (4)
   c) ¿Cuántos ochos y cuántas unidades hacen veinte?
   (2 ochos y 4 unidades)

3. Agrupa los veinte objetos en conjuntos de siete.
   a) ¿Cuántos conjuntos de siete hay? (2)
   b) ¿Cuántos objetos quedan? (6)
   c) ¿Cuántos sietes y cuántas unidades hacen veinte?
   (2 sietes y 6 unidades)

4. Agrupa los veinte objetos en conjuntos de seis.
   a) ¿Cuántos conjuntos de seis hay? (3)
   b) ¿Cuántos objetos quedan? (2)
   c) ¿Cuántos seises y cuántas unidades hacen veinte?
   (3 seises y 2 unidades)

5. Completa los siguientes ejercicios. En el ejercicio a), deberías pensar en cuántos conjuntos de nueve hay en veinte objetos. Entonces, considera cuántos objetos quedan.
   a) 20 = (22)$_{\text{nueve}}$ c) 20 = (26)$_{\text{siete}}$
   b) 20 = (24)$_{\text{ocho}}$ d) 20 = (32)$_{\text{seis}}$

Conjunto de problemas 6

Escribe el numeral en base cinco para cada uno de los siguientes números:

1. 9 = (14)$_{\text{cinco}}$ 3. 17 = (32)$_{\text{cinco}}$
2. 14 = (24)$_{\text{cinco}}$ 4. 15 = (30)$_{\text{cinco}}$

5. $3 = \underline{(3)}_{\text{cinco}}$ 6. $22 = \underline{(42)}_{\text{cinco}}$

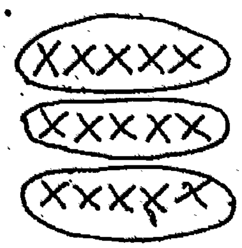
Escribe, en base diez, el número de objetos representado por cada uno de los siguientes numerales en base cinco:

1. $23_{\text{cinco}} = \underline{(13)}$ objetos
2. $13_{\text{cinco}} = \underline{(8)}$ objetos
3. $2_{\text{cinco}} = \underline{(2)}$ objetos
4. $20_{\text{cinco}} = \underline{(10)}$ objetos
5. $33_{\text{cinco}} = \underline{(18)}$ objetos
6. $41_{\text{cinco}} = \underline{(21)}$ objetos

Conjunto de problemas 7

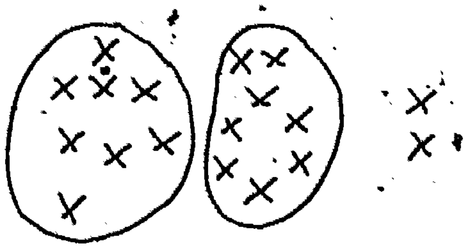
1. He aquí algunas representaciones de 18 signos x. Están agrupados de diferentes maneras. Di cómo están agrupados. Entonces, escribe el numeral correspondiente. El primer ejercicio se presenta como un ejemplo.

a.



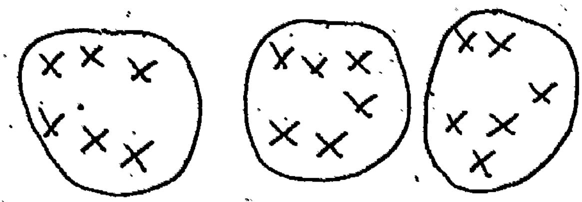
3 cincos y 3 unidades = 33_{cinco}

b.



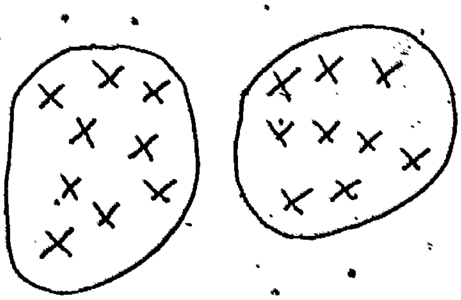
(2 ochos y 2 unidades = 22_{ocho})

c.



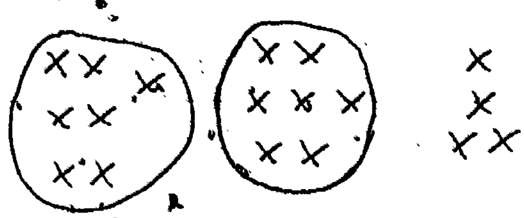
(3 seises y 0 unidades = 30_{seis})

d.



(2 nueves y 0 unidades = 20_{nueve})

e.



(2 sietes y 4 unidades = 24_{siete})

2. Agrupa 32 signos x en los siguientes conjuntos. En cada caso, considera cuántos conjuntos hay y cuántos signos x quedan y, luego, escribe el numeral correspondiente.
   a) Conjuntos de ocho (40_{ocho})
   b) Conjuntos de siete (44_{siete})
   c) Conjuntos de nueve (35_{nueve})
   d) Conjuntos de seis (52_{seis})

Después que hayas completado el Conjunto de problemas 7, verás que el Conjunto de problemas 8 es muy parecido. Aquí, deseamos que pienses en el número de signos x y cómo agruparlos. Pero no escribes los signos x en tu hoja de papel—sólo piensa en ellos.

Tomemos la penúltima fila de la tabla en el Conjunto de problemas 8 y veamos cómo podemos hallar los numerales que deben escribirse en los espacios vacíos.

Numeral en base diez	Sietes	Unidades	Numeral en base siete
20			

El numeral en base diez es 20. Considera los 20 signos x escritos en tu hoja de papel—no los hagas, simplemente piensa en ellos. Luego, piensa en cuántos conjuntos de siete hay en 20. ¿Habrá solamente 2 conjuntos de siete, cada uno, en 20? Sí. También, hay seis unidades sobrantes. ¿Cómo puedes anotar esto en la tabla? Puedes poner un 2 debajo de Sietes y un 6 debajo de Unidades. Luego, debajo de Numeral en base siete, puedes escribir el numeral que significa 2 sietes y 6 unidades. Este es 26_{siete}. Entonces, la penúltima fila se verá así en la tabla:

Numeral en base diez	Sietes	Unidades	Numeral en base siete
20	2	6	26_{siete}

Ahora, completa la tabla del Conjunto de problemas 8.

Conjunto de problemas 8

> El maestro puede, si lo desea, reproducir este ejercicio en hojas mimeografiadas, en lugar de pedirles a los alumnos que lo copien.

1. Completa la siguiente tabla:

Numeral en base diez	Treses	Unidades	Numeral en base tres
5	(1)	(2)	(12_{tres})
3	(1)	(0)	(10_{tres})
8	(2)	(2)	(22_{tres})
Numeral en base diez	**Seises**	**Unidades**	**Numeral en base seis**
11	(1)	(5)	(15_{seis})
22	(3)	(4)	(34_{seis})
18	(3)	(0)	(30_{seis})
Numeral en base diez	**Cuatros**	**Unidades**	**Numeral en base cuatro**
9	(2)	(1)	(21_{cuatro})
14	(3)	(2)	(32_{cuatro})
11	(2)	(3)	(23_{cuatro})
Numeral en base diez	**Ochos**	**Unidades**	**Numeral en base ocho**
25	(3)	(1)	(31_{ocho})
16	(2)	(0)	(20_{ocho})
19	(2)	(3)	(23_{ocho})
Numeral en base diez	**Sietes**	**Unidades**	**Numeral en base siete**
13	(1)	(6)	(16_{siete})
20	(2)	(6)	(26_{siete})
10	(1)	(3)	(13_{siete})

UN NUMERO PUEDE TENER DIVERSOS NOMBRES

Objetivo: Ayudar a los estudiantes a darse cuenta de que un número puede tener diversos nombres.

Materiales: Tablas de valores posicionales, varios palillos o tiras de cartulina, ábaco

Sugerencias para la enseñanza:

Es necesario que los alumnos se den cuenta de que un número puede tener diversos nombres. Podríamos empezar, trayendo al salón siete objetos, como bloques palillos, que todos los estudiantes puedan ver con facilidad.

Durante el estudio, deben utilizarse materiales como tablas de valores posicionales, un ábaco o paquetes de palillos para ayudar a los alumnos a captar la idea de que un mismo número puede tener diversos nombres.

Para empezar el estudio, pídase a los estudiantes que indiquen lo que se puede escribir en la pizarra para representar el número de objetos señalados.

Desde luego, hay varias respuestas posibles. Algunas de ellas son: el numeral 7, la palabra siete, 3 más 4 o, quizás, el símbolo VII. Al presentar diferentes maneras de nombrar el 7, los estudiantes pueden dar como respuestas expresiones como (8 - 1), (2 + 2 + 3), (7 × 1), etc.; pero el maestro no debe tratar de que lo hagan. Estas posibilidades se estudiarán más adelante en el curso. Nuestro propósito principal aquí es destacar la agrupación y la escritura en base diez y no los cálculos. A medida que los alumnos presenten sugerencias, otros alumnos deberán escribirlas en la pizarra.

Cuando se considere que ya la clase entiende diversas maneras de expresar números cuyos numerales en base diez contienen un dígito, puede pasarse al estudio de diversas maneras de nombrar números cuyos numerales en base diez contienen dos dígitos, como dieciséis. A medida que se sugieran diferentes posibilidades y se escriban en columnas en la pizarra, puede construirse una tabla como la siguiente:

Nombres diferentes de un mismo número

7	12	16	58
siete	10 y 2	8 y 8	5 decenas + 8 unidades
VII	6 por 2	dieciséis	4 decenas + 18 unidades
5 y 2	12 unidades	1 decena y 6 unidades	38 y 20
7 unidades	1 docena	XVI	50 y 8

Ahora, podríamos estudiar un número grande cuyo numeral decimal tenga dos dígitos, como, por ejemplo, 58. Pueden añadirse los resultados a la tabla. Debe darse especial atención a poner de manifiesto la idea de que 58 puede expresarse, no sólo como 5 decenas y 8 unidades, sino, también, como 4 decenas y 18 unidades.

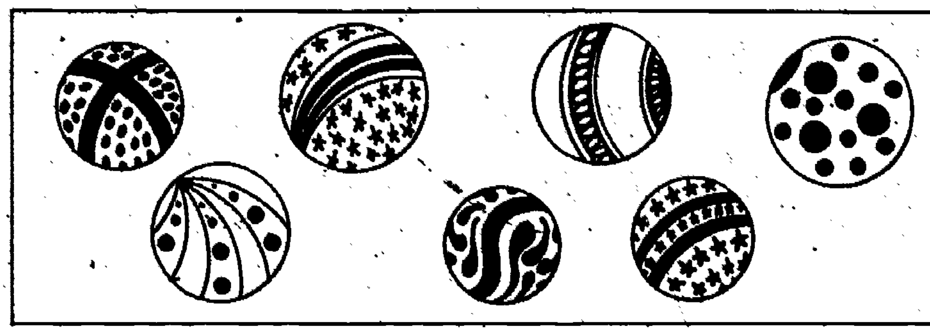
Utilícense cajas de valores posicionales, paquetes de palillos o un ábaco para explorar maneras de nombrar números cuyos numerales decimales tienen tres dígitos. Debe procurarse, sobre todo, obtener más de un nombre para esos números. El número, 243, por ejemplo, puede expresarse como dos centenas, cuatro decenas y tres unidades; dos centenas, tres decenas y trece unidades, o una centena, trece decenas y trece unidades. Las últimas formas permiten repasar la idea de expresar números de otra manera, necesaria al efectuar algunas sustracciones.

Cuando el maestro crea que los alumnos están familiarizados con diferentes maneras de expresar estos números, podría pedirles que determinen otros para formas como siete decenas y once unidades. Una respuesta es ocho decenas y una unidad u ochenta y uno. Deben incluirse tipos de agrupaciones como tres centenas, doce decenas y trece unidades, etc.; entender esto, permite repasar la idea de expresar números de otra manera, como se utiliza en la adición.

Es importante que los alumnos comprendan estas ideas. Trabajar con materiales concretos los ayudará a lograrlo. Antes de asignar ejercicios escritos individualmente, deben explorarse y estudiarse bien en clase las numerosas posibilidades de nombres diferentes para un mismo número.

UN NUMERO PUEDE TENER DIVERSOS NOMBRES

He aquí un conjunto de bolas.
El número de elementos en el conjunto es siete.



¿Qué podemos escribir en la pizarra para nombrar el número de bolas?

Indica si cada uno de estos numerales es un nombre para siete: 13_{cuatro}, 21_{tres}, 12_{cinco}, 11_{seis}. (Sí.) Algunos de estos numerales son de la clase de nombres que hemos venido estudiando en esta unidad. Todos ellos son nombres adecuados. También, los siguientes nombres se usan a veces para siete: VII y 卌 II.

Hay todavía otros nombres para siete. Indica si cada uno de los siguientes es un nombre para siete: 8 - 1, 3 + 4, 10 - 3, 5 + 2. (Sí.) Hay muchas formas más de nombrar el siete. ¿Cuáles son algunos de esos nombres? (Las siguientes son respuestas posibles:

6 y 1
un siete
2 y 5
uno menos que ocho)

Conjunto de problemas 9

Escribe diferentes nombres para los números indicados. Utiliza solamente numerales en base diez. Ejemplo: 56 = 50 + 6, 56 = 40 + 10 + 6; 56 = 60 - 4; 56 = 55 + 1.

1. Escribe cuatro nombres diferentes para 8.
2. Escribe cuatro nombres diferentes para 27.
3. Escribe cuatro nombres diferentes para 64.
4. Escribe cuatro nombres diferentes para 1.
5. Escribe cuatro nombres diferentes para 163.
6. Escribe cuatro nombres diferentes para 378.
7. Escribe cuatro nombres diferentes para 500.

> Hay varias respuestas correctas para cada problema. Trátese de que los estudiantes den respuestas diferentes.

OTROS NOMBRES PARA NUMEROS

Objetivo: Ayudar a los estudiantes a comprender la estructura del sistema decimal.

Materiales: Caja de valores posicionales, tiras de cartulina, ábaco

Sugerencias para la enseñanza:

En esta etapa, queremos que los alumnos adquieran práctica ulterior en la determinación de otros nombres para un número. Es importante que entiendan que 225 puede expresarse como:

2 centenas + 2 decenas + 5 unidades
22 decenas + 5 unidades
225 unidades
1 centena + 12 decenas + 5 unidades
2 centenas + 1 decena + 15 unidades
200 + 20 + 5
100 + 120 + 5

Utilizar una caja de valores posicionales y paquetes de palillos o tiras de cartulina, servirá de ayuda para hacer más clara la idea de reagrupación. Los números que se utilicen como ejemplos deberán ser pequeños, si se van a emplear tiras de cartulina o palillos. Preséntense algunos casos en los que los estudiantes mismos utilicen estos materiales para mostrar varios reagrupaciones. Continúese trabajando con números cuyos numerales decimales tengan 4 dígitos, a fin de ilustrar que este mismo tipo de determinación de otros nombres para números se utiliza con los millares. Un ábaco resultaría también apropiado para explicar estas ideas.

Pásese de este nivel concreto a un nivel más abstracto, escribiendo en la pizarra otros modos de representar números que sugieran los estudiantes como, por ejemplo:

2,345 = 2 millares + 3 centenas + 4 decenas + 5 unidades
= 23 centenas + 4 decenas + 5 unidades
= 234 decenas + 5 unidades
= 2345 unidades
= 2000 + 300 + 40 + 5

OTROS NOMBRES PARA NUMEROS

Ejemplo A: El número 23 puede representarse de las siguientes maneras:

2 decenas y 3 unidades

1 decena y 13 unidades

Ejemplo B: Veamos de cuántas maneras podemos representar el número 457. Al hallar otros nombres, utiliza solamente unidades, decenas y centenas.

457 = 457 unidades

457 = 4 centenas + 5 decenas + 7 unidades

457 = 4 centenas + 4 decenas + 17 unidades

457 = 3 centenas + 15 decenas + 7 unidades

457 = 3 centenas + 14 decenas + 17 unidades

457 = 45 decenas + 7 unidades

457 = 400 + 50 + 7

Ejemplo C: El número 4,605 se puede representar de varias maneras. Se pueden utilizar unidades, decenas, centenas y millares para hallar otros nombres.

4,605 = 4,605 unidades

4,605 = 46 centenas + 0 decenas + 5 unidades

4,605 = 4 millares + 6 centenas + 5 unidades

4,605 = 460 decenas + 5 unidades

4,605 = 4,000 + 600 + 5

4,605 = 4,600 + 5

Conjunto de problemas 10

En los ejercicios del 1 al 10, escribe C, si el enunciado es cierto; escribe F, si el enunciado es falso:

(C) 1. 34 puede representarse como 3 decenas + 4 unidades.
(C) 2. 34 puede representarse como 2 decenas + 14 unidades.
(F) 3. 34 puede representarse como 4 decenas + 3 unidades.
(C) 4. 34 puede representarse como 1 decena + 24 unidades.
(C) 5. 365 puede representarse como 3 centenas + 5 decenas + 15 unidades.
(F) 6. 365 puede representarse como 35 decenas + 5 unidades.
(C) 7. 365 puede representarse como 2 centenas + 15 decenas + 15 unidades.
(F) 8. 365 puede representarse como 3 centenas + 60 decenas + 5 unidades.
(F) 9. 184 puede representarse como 18 decenas + 14 unidades.
(C) 10. 184 puede representarse como 1 centena + 7 decenas + 14 unidades.

Para cada uno de los ejercicios del 11 al 16, escribe el numeral en base diez:

11. Seis centenas + cinco decenas + tres unidades (653)
12. Tres centenas + doce decenas + ocho unidades (428)
13. Nueve centenas + cuatro decenas + quince unidades (955)
14. 4 centenas + 17 decenas + 8 unidades (578)
15. 7 centenas + 5 decenas + 16 unidades (766)
16. 8 millares + 6 centenas + 3 decenas + 12 unidades (8,642)

Conjunto de problemas 11

Nombra cada uno de los siguientes de dos modos como un número de decenas y un número de unidades; el primer ejercicio se hizo a manera de ejemplo:

1. 37 Respuesta:
   3 decenas y 7 unidades
   2 decenas y 17 unidades

2. 26
   (2 decenas y 6 unidades)
   (1 decena y 16 unidades)

3. 54
   (5 decenas y 4 unidades)
   (4 decenas y 14 unidades)

4. 80
   (8 decenas y 0 unidades)
   (7 decenas y 10 unidades)

5. 77
   (7 decenas y 7 unidades)
   (6 decenas y 17 unidades)

6. 39
   (3 decenas y 9 unidades)
   (2 decenas y 19 unidades)

Completa los siguientes enunciados:

7. 354 = 3 centenas + (5) decenas + 4 unidades.
8. 354 = 3 centenas + 4 decenas + (14) unidades.
9. 354 = 2 centenas + (14) decenas + 14 unidades.
10. Nombra 836 de tres maneras diferentes, utilizando centenas, decenas y unidades. (Hay varias respuestas posibles, como en los problemas del 7 al 9.)
11. Nombra 605 de tres maneras diferentes, utilizando centenas, decenas y unidades. (Hay varias respuestas posibles, como en los problemas del 7 al 9.)
12. Nombra 612 de cuatro maneras diferentes. (Hay varias respuestas posibles.)
13. Nombra 7,631 de tres maneras diferentes, utilizando millares, centenas, decenas y unidades. (Hay varias respuestas posibles.)
14. Nombra 3,806 de cuatro maneras diferentes. (Hay varias respuestas posibles.)

15. Nombra cada uno de los siguientes como un numeral en base diez:

a) Cuatro centenas + cinco decenas + seis unidades = (456)

b) Dos millares + tres centenas + siete decenas + cinco unidades = (2,375)

c) Seis centenas + doce decenas + trece unidades = (733)

d) Nueve centenas + trece decenas + catorce unidades = (1,044)

e) 12 centenas + 14 decenas + 19 unidades = (1,359)

Conjunto de problemas 12

1. De la lista que sigue, escribe todas las letras que están al lado de los nombres correctos para 467:
   a) Cuatrocientos sesenta y siete
   b) Cuarenta y seis y siete más
   c) Cuarenta y seis decenas y siete
   d) Cuarenta centenas + sesenta y siete unidades
   e) 300 + 160 + 7
   f) Siete más cuatrocientos
   g) 400 + 60 + 7
   h) 300 + 150 + 17
   i) 467 decenas
2. Contesta Sí o No:
   a) 3,729 es 37 decenas más 29 unidades. (no)
   b) Diez centenas más cuarenta decenas más nueve unidades es lo mismo que mil cuarenta y nueve. (no)
   c) 5,000 + 500 + 1 = 5,501 (sí)
   d) 36 centenas + 1 decena + 18 unidades = 3,628 (sí)
   e) 734 = 600 + 120 + 24 (no)
3. Escribe el numeral en base diez para cada uno de los siguientes números:
   a) Cinco millares + seis centenas + ocho decenas + tres unidades (5,683)
   b) 3 millares + 8 centenas + 16 decenas + 5 unidades (3,965)
   c) 6 millares + 15 centenas + 2 decenas + 7 unidades (7,527)
   d) 8 millares + 4 centenas + 14 decenas + 16 unidades (8,556)
   e) 9 millares + 12 centenas + 3 decenas + 14 unidades (10,244)

AMPLIACION DE LAS IDEAS SOBRE EL SISTEMA DECIMAL

Objetivo: Ampliar la comprensión de la idea de valor de posición y la habilidad en la lectura y escritura de números grandes.

Materiales: Es conveniente construir una tabla que muestre los lugares y los nombres de los grupos.

Vocabulario: dígitos

> Si los estudiantes no entienden esta palabra, explíquese que un dígito es uno de los diez símbolos que utilizamos para escribir un numeral.

Toda vez que el sistema decimal se utiliza en casi todo el mundo, es necesario que lo comprendamos. Hasta ahora, hemos hablado acerca de números cuyos numerales tienen uno, dos, tres y cuatro dígitos. Sabemos que el lugar que ocupa un dígito en un numeral determina su valor de posición. También, sabemos que diez unidades es lo mismo que una decena y que diez decenas es lo mismo que una centena. De igual modo, diez centenas es lo mismo que un millar, una decena de millares es lo mismo que un diez-millar, y diez decenas de millares es lo mismo que un cien-millar.

cien-millares	diez-millares	millares	centenas	decenas	unidades
1	1	1,	1	1	1

Los numerales en el sistema decimal pueden leerse más fácilmente, si se agrupan en conjuntos de tres dígitos, empezando por la derecha. Cada conjunto de tres dígitos se separa del resto del numeral por una coma o comas.

Para leer un numeral de seis dígitos, empezamos con el grupo de la izquierda, leyendo el primer conjunto de dígitos seguido de la palabra "mil", como en "ciento once mil". Entonces, leemos el segundo grupo de dígitos como un numeral, "ciento once". El numeral completo se lee así: "ciento once mil, ciento once".

Algunos ejemplos que pueden analizarse son los siguientes:

162,142	162,000 + 142 Se lee: ciento sesenta y dos mil, ciento cuarenta y dos
234,172	234,000 + 172 Se lee: doscientos treinta y cuatro mil, ciento setenta y dos
23,100	23,000 + 100 Se lee: veintitrés mil, cien
2,020	2000 + 20 Se lee: dos mil, veinte
400,001	400,000 + 1 Se lee: cuatrocientos mil, uno

Quizás, sea necesario dar otras explicaciones y dedicar más tiempo a la lectura de numerales de cinco y seis dígitos.

AMPLIACION DE LAS IDEAS SOBRE EL SISTEMA DECIMAL

Sabemos que cada lugar en un numeral escrito en el sistema decimal tiene un nombre. Para un número cardinal, el primer lugar a la derecha es el lugar de las unidades, el segundo lugar el de las decenas y el tercero el de las centenas. El cuarto lugar es el lugar de los millares, el quinto el de los diez-millares y el sexto el de los cien-millares.

También, sabemos que:

10 <u>unidades</u> es lo mismo que 1 <u>decena</u>;

10 <u>decenas</u> es lo mismo que 1 <u>centena</u>;

10 <u>centenas</u> es lo mismo que 1 <u>millar</u>;

10 <u>millares</u> es lo mismo que 1 <u>decena de millar</u>

10 <u>decenas de millar</u> es lo mismo que 1 <u>centena de millar</u>

Nombre del lugar	cien-millares	diez-millares	millares	centenas	decenas	unidades
Dígitos	2	2	2	2	2	2

En el numeral de la tabla, cada 2 ocupa un lugar diferente. Explica el valor posicional de cada uno de esos dígitos.

Deseamos, ahora, leer los nombres de números grandes. Estos serán numerales hasta con seis dígitos, pero no más de seis.

Puedes leer numerales hasta de seis dígitos fácilmente, si los tres dígitos de la derecha se separan de los otros por una coma, como en 222,222 o en 74,609. El número representado por los dígitos a la izquierda de la coma dice cuántos millares hay; el número representado por los dígitos a la derecha de la coma dice cuántas unidades hay.

Leemos 222,222 como "doscientos veintidos mil, doscientos veintidos". Leemos 74,609 como "setenta y cuatro mil, seiscientos nueve. Observa que la palabra "y" no se usa después de mil, al leer numerales como éstos.

Lee los siguientes numerales:

736,421 (setecientos treinta y seis mil, cuatrocientos veintiuno)

80,592 (ochenta mil, quinientos noventa y dos)

603,250 (seiscientos tres mil, doscientos cincuenta)

248,759 (doscientos cuarenta y ocho mil, setecientos cincuenta y nueve)

10,003 (diez mil, tres)

5,791 (cinco mil, setecientos noventa y uno)

890,602 (ochocientos noventa mil, seiscientos dos)

927,030 (novecientos veintisiete mil, treinta)

Conjunto de problemas 13

Señala la letra que está al lado de la manera correcta de leer cada uno de los siguientes numerales; el ejercicio 1 se hizo como ejemplo:

1. 28
   a) veintisiete
   b) ochenta y dos
   c) veintiocho
   d) ocho

   Respuesta: 1. c

2. 5,250
   a) cinco mil, doscientos cinco
   b) quinientos veinticinco
   c) cinco mil, ciento cincuenta
   d) cinco mil, doscientos cincuenta

3. 17,002
   a) diecisiete mil, doscientos
   b) diecisiete mil, dos
   c) diecisiete mil, veinte
   d) ciento setenta mil, dos

4. 156,946
   a) ciento cincuenta y seis mil, novecientos cuarenta y seis
   b) ciento sesenta y cinco mil, novecientos cuarenta y seis
   c) ciento cincuenta y seis millones, novecientos cuarenta y seis
   d) ciento cincuenta y seis mil, seiscientos cuarenta y nueve

E53

5. 108,200 a) ciento ochenta millones, doscientos mil
b) ciento ocho mil, doscientos
c) cien mil, ochocientos veinte
d) ciento ocho millones, dos

6. 100,007 a) cien mil, setecientos
b) cien mil, setenta
c) cien mil, siete
d) mil, siete

7. 365,843 a) trescientos cincuenta y seis mil, ochocientos cuarenta y tres
b) trescientos sesenta y cinco mil, ochocientos cuarenta y tres
c) trescientos sesenta y cinco mil, ochocientos treinta y cuatro
d) trescientos sesenta y cinco millones, ochocientos cuarenta y tres

8. 22,222 a) veintidós mil, doscientos veintidós
b) doscientos veintidós mil, veintidós
c) doscientos veintidós millones, dos
d) doscientos dos mil, dos

Escribe numerales para representar cada uno de los siguientes:

9. Trescientos seis (306)

10. Seis mil, setecientos cincuenta y seis (6,756)

11. Cuarenta y siete mil, seiscientos cuatro (47,604)

12. Cuarenta mil, ciento veinticinco (40,125)

13. Trescientos cincuenta y un mil, quinientos sesenta y cuatro (351,564)

14. Cuarenta mil, cuarenta (40,040)

15. Doscientos cincuenta mil, cincuenta y seis (250,056)

16. Setecientos cincuenta y seis mil, treinta (756,030)

17. Quinientos mil, cinco (500,005)

18. Cuatrocientos cuatro mil, cuatro (404,004)

19. Seis mil, seis (6,006)

20. Sesenta mil, seis (60,006)

21. Sesenta mil, seiscientos seis (60,606)

RELACIONES DE ORDENACION EN LA RECTA NUMERICA

Objetivos: Hacer más claras las relaciones de ordenación, utilizando una recta numérica.

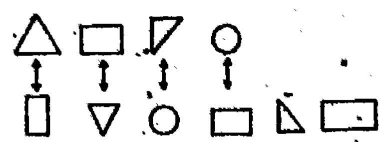
Materiales: Conjuntos de fichas para el juego de damas y un tablero; tablero de franela y modelos recortados; una recta numérica.

Sugerencias para la enseñanza:

Hasta ahora, se ha considerado especialmente la agrupación con respecto a bases. Al agrupar, los estudiantes comparan números, apareando biunívocamente los elementos de un conjunto con los elementos de otro. El conjunto con más elementos es mayor; o el conjunto con menos elementos es menor.

Conjunto A:

Conjunto B:



Hay cuatro objetos distintos en el conjunto A y seis objetos distintos en el conjunto B. Conjuntos tales se dice que son discretos, con elementos sueltos. Debe proporcionárseles a los estudiantes práctica en la comparación de conjuntos discretos de objetos, para determinar qué conjunto es mayor o qué conjunto es menor.

Otra manera de considerar los números es asociarlos con puntos de una recta. Cada número se asocia únicamente con un punto (es decir, un punto y sólo uno) de una "recta numérica" y viceversa. Dados dos números distintos, uno de ellos es el mayor. Podemos sumar un número al número menor para obtener el mayor. El mayor está a la derecha del menor.

En muchos casos, se habrá introducido la recta numérica ya en grados anteriores. Es importante que los alumnos capten claramente la idea de la recta numérica, pues será utilizada frecuentemente como ayuda gráfica:

(a) al comparar los números y los sistemas de numeración (Capítulo 2)

(b) para explicar la adición y la

sustracción (Capítulos 3 y 6) y la multiplicación y la división (Capítulos 4 y 7)

Ya hemos aprendido algo acerca de conjuntos de objetos como bolitas, fichas, etc. Suponga que damos a Juan un puñado de fichas rojas y a Sara otro puñado de fichas negras. ¿Habrá más fichas negras que rojas, o más rojas que negras, o habrá el mismo número de ambas? ¿Cómo puede determinarse? (Cuéntese el número de fichas negras y, después, el número de fichas rojas y véase cuál es mayor, o si son iguales.

Imaginemos por un momento que no conocemos el uno, el dos, el tres, etc., que se utilizan al contar. Entonces, no podríamos contar las fichas. ¿Cómo podría determinarse si hay más fichas negras o más fichas rojas? (Podría hacerse mediante un apareamiento.) Primero, podría aparearse una ficha negra con una roja, colocándolas juntas; después, otra ficha negra con otra ficha roja, y así sucesivamente. ¿Qué sucedería al terminar este apareamiento? (Habrá más fichas negras o más fichas rojas o habrá la misma cantidad de ambas.) ¿Qué nos dice esto? (Nos diría si hay más fichas negras o más fichas rojas o si hay el mismo número.)

Si es necesario, el maestro puede fácilmente preparar demostraciones en clase o ejercicios en los que se requieran apareamientos, utilizando conjuntos de estrellas, circunferencias, etc., dispuestos sobre un tablero de franela. Una tarea para la clase podría consistir en el apareamiento de estudiantes y sillas.

Aun sin emplear números, tenemos una manera de ver que algunos conjuntos tienen más elementos que otros. De dos conjuntos tales, decimos que el que tenga más elementos es el de <u>tamaño mayor</u> y el que tenga menos elementos es el de <u>tamaño menor</u>. Vemos que los conjuntos pueden tener tamaños distintos.

El término "tamaño" relacionado con más o menos elementos no debe confundirse con el tamaño físico de los objetos en los conjuntos: un conjunto de seis hormigas es de "tamaño mayor" que un conjunto de dos elefantes.

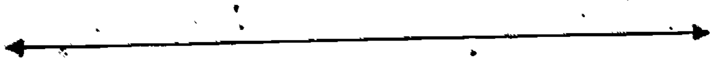
¿Cuál es el conjunto de menor tamaño que podemos considerar, que no sea vacío? (Un conjunto de un solo elemento) ¿Cuál es el conjunto de tamaño menor que le sigue? (Un conjunto de dos elementos, solamente) ¿Cuál sigue después de éste? (Un conjunto de tres elementos, solamente) Los números uno, dos, tres, y así sucesivamente, no indican, en realidad, otra cosa que los diversos tamaños posibles de conjuntos, dispuestos en orden, empezando con el menor.

Ahora, pensemos cómo contamos un conjunto de objetos. ¿Qué hacemos primero? (Primero, apareamos el numeral uno con un objeto del conjunto.) Entonces, si queda algún objeto, ¿qué hacemos? (Apareamos el numeral dos con otro objeto del conjunto.) Si aún queda otro objeto, ¿qué hacemos? (Apareamos el numeral tres con otro objeto del conjunto, y así sucesivamente.) El numeral que se aparea con el último objeto del conjunto es, entonces, el tamaño del conjunto. Nos dice cuántos objetos hay en el conjunto.

Esto muestra que contar es, también, aparear; es aparear un conjunto de nombres numéricos con objetos. Los numerales uno, dos, tres, etc., que se utilizan para contar representan números naturales.

¿Cuáles son los números que utilizamos para contar? Todos sabemos que son 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, etc. Estos números, junto con el número cero, forman un conjunto que llamamos el conjunto de los números cardinales.

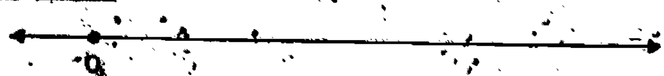
Para desarrollar el concepto de recta numérica, utilizamos una línea recta marcada con puntos que corresponden a los números cardinales. Primero, dibujamos una representación de una recta.



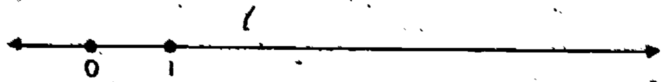
Dibújese en la pizarra una representación de una recta, como la que se indica arriba. (Desde luego, en realidad, sólo podemos representar un trozo de una recta, pero dibujamos puntas de flechas en sus extremos, para indicar

> que la recta se supone prolongada indefinidamente hacia la derecha y hacia la izquierda.) A medida que prosiga este estudio, los dibujos que se presentan más adelante indicarán cómo se marcan los puntos de esta recta numérica.

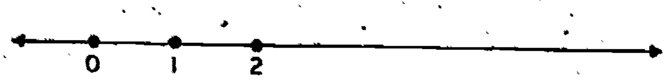
Ahora, elegimos un punto de la recta numérica para representar el número cero. Lo llamamos el punto marcado cero o, simplemente, el punto cero.



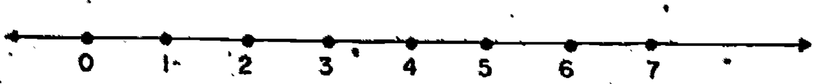
Entonces, elegimos un punto a la derecha del punto cero y a corta distancia del mismo, para representar el número uno. A este punto, lo llamamos el punto uno.



A la misma distancia a la derecha del punto uno, marcamos otro punto que llamamos el punto dos.



Continuando este procedimiento, obtenemos lo que llamamos una recta numérica.



y así sucesivamente.

En la pizarra, podríamos dibujar una recta numérica que tenga marcados todos los números desde 0 hasta 100.

> Puede disponerse de rectas numéricas procedentes de diversas fuentes. Alternativamente, una recta numérica como la anterior puede dibujarse en la pizarra o construirse con algunos materiales de que disponga el maestro. Quizás, éste quiera utilizar la escala de un termómetro como un ejemplo de recta numérica que en general, se coloca verticalmente.

Preguntas de orientación:

1. ¿Cuál es el número cardinal menor representado en la recta numérica? (Cero)

2. Al representar una recta numérica, ¿tendremos que

indicar el punto marcado cero? (No; es posible indicar simplemente una porción conveniente cualquiera de la recta numérica. Si empezamos con el número cardinal menor, entonces empezamos con el cero. Pero, si marcamos el primer punto con 202, entonces los puntos siguientes a la derecha, en orden, serán 203, 204, 205, etc.)

3. ¿Qué sabemos acerca de los números representados por los puntos a la derecha del primer punto marcado en la recta numérica? (Son mayores que el número representado por éste.)

4. ¿Cuál de los números 6 y 9 es el mayor? (9, pues tenemos que sumar 3 a 6 para obtener 9.) El punto 9 está a la derecha del 6 en la recta numérica. Si un número es mayor que otro, ¿qué sabemos acerca de los lugares que ocupan en la recta numérica?

5. ¿Qué indica la flecha a la derecha de la recta numérica? (La flecha indica que hemos dibujado solamente una porción de la recta numérica y que la recta, con sus puntos marcados, continúa hacia la derecha.)

6. ¿Habrá algún número que sea el mayor de todos los números de la recta numérica? (No; para todo número cardinal representado en la recta numérica, hay otro número cardinal mayor que dicho número.)

7. ¿Qué nos indica la flecha a la izquierda de la recta numérica? (Nos indica que la recta numérica se prolonga en ese sentido.) Más tarde, estudiaremos la parte de la recta numérica que se prolonga hacia la izquierda del cero.

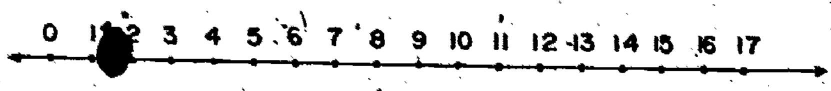
8. ¿Qué podemos decir acerca de <u>todo</u> número representado por un punto que está a la derecha de un punto dado? (Es mayor que el número representado por el punto dado.)

9. ¿Qué podemos decir acerca de <u>todo</u> número representado por un punto que está a la izquierda de un punto dado? (Es menor que el número representado por el punto dado.)

Podemos utilizar la recta numérica para ver cual de dos números dados es el mayor y cuál es el menor. En la recta numérica, <u>el punto que representa el número más grande siempre está a la derecha del punto que representa el número más pequeño</u>. Decimos que el número más pequeño es <u>menor que</u> el más grande y que el número más grande es <u>mayor que</u> el más pequeño.

E55

RELACIONES DE ORDENACION EN LA RECTA NUMERICA

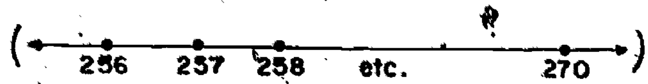


Hemos hablado acerca de la recta numérica. Sabemos que es una línea recta marcada con puntos que corresponden a los números cardinales. El punto cero está a la izquierda. Si piensas en dos números representados en la recta numérica, el de la derecha es más grande que el de la izquierda.

Al dibujar una recta numérica, ¿tendremos que indicar el punto que está marcado cero? Desde luego que no. Se puede indicar el punto que está marcado cero? Desde luego que no. Se puede indicar solamente una parte de la recta numérica. Si empezamos con el número cardinal menor, entonces empezamos con cero. Pero si designamos el primer punto 132, entonces los próximos puntos a la derecha, en orden, serían 133, 134, 135, y así sucesivamente.

Conjunto de problemas 14

1. Dibuja una recta numérica, indicando los números cardinales desde 256 hasta 270.



En cada uno de los siguientes ejercicios, halla los puntos que representan los dos números en la recta numérica; escribe los números que faltan en tu hoja de papel:

2. 266 y 258

(258) es menor que (266).

(258) está a la izquierda de (266).

(266) está a la derecha de (258).

3. 261 y 269

(261) es menor que (269).

(269) está a la derecha de (261).

(261) está a la izquierda de (269).

4. 270 y 263

(270) es mayor que (263).

(263) está a la izquierda de (270).

(270) está a la derecha de (263).

5. 264 y 268

(264) es menor que (268).

(264) está a la izquierda de (268).

(268) está a la derecha de (264).

6. 257 y 260

(260) es mayor que (257).

(260) está a la derecha de (257).

(257) está a la izquierda de (260).

ALGUNOS SIMBOLOS NUEVOS

Usualmente, escribimos "2 + 5 es igual a 7", utilizando el signo igual (=) en vez de las palabras "es igual a". Escribimos:

$$2 + 5 = 7$$

Tenemos otro símbolo que se llama el signo "es menor que". Para indicar "2 es menor que 3", escribimos

$$2 < 3.$$

Tenemos, también, un signo "es mayor que". Para indicar "8 es mayor que 3", escribimos

$$8 > 3.$$

Completa los siguientes enunciados con "menor que" o "mayor que":

1. $5 < 7$ Cinco es (menor que) siete.
2. $12 > 9$ Doce es (mayor que) nueve.
3. $0 < 1$ Cero es (menor que) uno.
4. $6 > 0$ Seis es (mayor que) cero.
5. $201 > 198$ Doscientos uno es (mayor que) ciento noventa y ocho.
6. $5 < 327$ Cinco es (menor que) trescientos veintisiete.

116

Conjunto de problemas 15

Escribe cada uno de los siguientes enunciados en la forma abreviada:

EJEMPLO: Siete es menor que diez. $7 < 10$

1. Uno es mayor que cero. $(1 > 0)$
2. Once es menor que trece. $(11 < 13)$
3. Cincuenta y seis es mayor que veintiuno. $(56 > 21)$
4. Doscientos sesenta es menor que trescientos sesenta. $(260 < 360)$
5. Trescientos cincuenta y nueve es mayor que doscientos noventa y siete. $(359 \geq 297)$
6. Doscientos sesenta y dos es menor que trescientos. $(262 < 300)$

Anota los numerales del 1 al 12 en una columna en tu libreta. Escribe C, si el enunciado correspondiente es cierto y F, si el enunciado es falso.

1. $4 < 7$ (C)
2. $5 > 1$ (C)
3. $4 > 4$ (F)
4. $0 < 5$ (C)
5. $30 < 17$ (F)
6. $52 > 49$ (C)
7. $120 < 19$ (F)
8. $299 > 617$ (F)
9. $426 > 425$ (C)
10. $629 < 89$ (F)
11. $513 > 377$ (C)
12. $201 < 210$ (C)

Conjunto de problemas 16

Copia cada uno de los enunciados matemáticos que siguen; escribe el signo "es menor que", "es mayor que" o "es igual a", para obtener un enunciado cierto:

1. $(8 + 4)$ (>) 11
2. $(1 + 3)$ (<) $(9 + 1)$
3. (2×3) (<) (3×3)
4. $(2 + 7)$ (=) $(11 - 2)$
5. $(2 + 3) + 4$ (=) $1 + (5 + 3)$
6. (3×4) (>) (2×5)
7. $(12 + 50)$ (>) 59
8. $(20 + 15)$ (=) $(10 + 25)$
9. $(8 + 3) + 2$ (<) $(7 + 5) + 2$
10. $(24 - 2)$ (>) (3×7)
11. $(18 - 6)$ (=) $(9 + 3)$
12. $(5 + 8) - 3$ (<) $(14 - 7) + 5$

POR MERA DIVERSION

Copia este crucigrama y llénalo:

A 2	B 7	3			C 4	D 3	E 9
F 4	9		G 2	H 6		I 6	9
0		J 4	6	1	K 7		9
	L 2	1			M 2	N 7	
	O 3	0			P 8	2	
Q 1		R 3	S 5	T 6	9		U 2
V 5	2		W 1	2		X 1	7

Los alumnos podrían utilizar papel cuadriculado para que les sea más fácil copiar el crucigrama o el maestro podrá hacer copias del mismo.

HORIZONTALMENTE

A. Doscientos setenta y tres

C. Otro nombre para 400 + 30 + 9

F. 1 más que 4 decenas + 8 unidades

G. 3 ochos y 2 unidades

I. (60 + 3) + (3 + 3) = ?

J. 46 centenas + 17 unidades

L. _?_ es 3 grupos de siete.

M. 4 monedas de cinco centavos y 7 centavos

O. (3 × 7) + 9

P. _?_ es 12 más que 70.

R. 3000 + 500 + 60 + 9

V. 539 = _?_ decenas + 19 unidades

W. ¿Cuántas pulgadas equivalen a un pie?

X. XVII es otro nombre para _?_.

VERTICALMENTE

A. 24 decenas

B. _?_ < 80

D. 3 docenas

E. Uno menos que mil

G. 2 decenas y 6 unidades

H. _?_ > 52

J. Cuatro mil, ciento tres

K. 4,289; 5,289; 6,289; _?_

L. 1 decena y 13 unidades

N. ¿A cuántas decenas equivale 720?

Q. 3 cuatros + 3 unidades

S. 5,264 = _?_ centenas + 15 decenas + 14 unidades

T. Cinco decenas y doce unidades

U. 7, 12, 17, 22, _?_

Capítulo 3

PROPIEDADES Y TECNICAS DE LA ADICION Y LA SUSTRACCION

PROPOSITO DE LA UNIDAD

El propósito de esta unidad es ayudar a los alumnos a entender la naturaleza de la adición y la sustracción como operaciones de la matemática. En el logro de este fin, los alumnos se familiarizarán, también, con las propiedades fundamentales de las dos operaciones y las relaciones de ellas entre sí.

Sin duda, los estudiantes han tenido experiencias con estas operaciones, pero necesitan considerar la naturaleza de las mismas con detenimiento, para ampliar y afianzar los conceptos que de ellas tienen. Suponemos que ésta es la primera vez que se recalcan las siguientes propiedades de la adición: la propiedad interna o de clausura, la propiedad conmutativa, la propiedad asociativa y la propiedad aditiva del cero.

En el material de estudio del capítulo, se utiliza el siguiente procedimiento al considerar un problema de aplicación práctico: se enuncia la relación numérica implicada en el problema mediante un enunciado matemático; se decide qué operación se va a utilizar; se efectúa esa operación con los números; y se utiliza el resultado numérico para expresar el resultado pedido en el problema original. En general, pero, con adaptaciones individuales, los estudiantes seguirán el procedimiento anterior. Hay dos objetivos que trataremos de lograr con los estudiantes: (1) el análisis del problema y la expresión de las relaciones implicadas en él, mediante un enunciado matemático y (2) la resolución de los problemas, mediante el uso de enunciados matemáticos. Una persona que tenga práctica en la resolución de problemas, no solamente hace uso de muchos planes, sino que, también, a menudo, utiliza los pasos en un orden diferente al resolver problemas distintos. El plan, según se sugirió, constituye una manera de ayudar a los estudiantes a extraer números de lo implicado en el problema y a expresar sus razonamientos de manera sistemática.

BASE MATEMÁTICA

En esta unidad, se hace hincapié en la operación de la adición y la relación entre la adición y la sustracción. Podría destacarse aquí que podemos pensar en el concepto de adición de la siguiente manera: considerar el número cardinal de cada uno de dos conjuntos disyuntos y la suma de esos números como el número cardinal del conjunto reunión de los conjuntos disyuntos dados. (Dos o más conjuntos que no tienen miembro común alguno son conjuntos disyuntos, es decir, no hay elemento alguno de un conjunto que también esté en el otro conjunto.) La operación de adición se efectúa siempre con dos números solamente y, por eso, se dice que es una operación binaria. Desde luego, tenemos que tener un conjunto de elementos para el cual la adición está definida y, en esta unidad, ese conjunto es el conjunto de los números cardinales, $C = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. "Una operación binaria que se efectúa con los elementos de un conjunto es una regla mediante la cual a cada par ordenado de elementos del conjunto le corresponde exactamente un elemento". (SMSG Studies, Volumen III, pág. 17.) En los casos en que sea posible, efectuamos la operación con dos números para obtener un tercer número que es único. En la sustracción y la división, claramente, el orden es importante. Aunque $12 + 9 = 9 + 12$, no es cierto que $12 - 9 = 9 - 12$, si nuestro conjunto es C, puesto que $9 - 12$ no es un número de C. El maestro mismo debe decidir si emplea o no la frase operación binaria con los estudiantes en esta etapa, pero deberán entender claramente que la operación de adición se efectúa con dos números solamente, para obtener un tercer número. El darse cuenta de esto es lo que pone de manifiesto la necesidad de la propiedad asociativa de la adición. ¿Cómo sumamos 3, 4 y 2, si la adición es una operación binaria? La respuesta a esta pregunta depende de la asociación de dos de los números solamente, para obtener un número y, después, de la agrupación de este número con el tercer número: $3 + 4 + 2 = (3 + 4) + 2 = 3 + (4 + 2)$. Los mismos comentarios se aplican a la operación de multiplicación, que se considerará más tarde.

Al estudiar las operaciones con los alumnos, las describiremos como modos de considerar dos números para obtener otro número. Cuando un niño suma 9 y 5 para obtener 14 o resta 9 y 5 para obtener 4, simplemente está considerando a 5 y 9 de dos maneras diferentes. La adición es una operación que se efectúa con dos sumandos (9 y 5), para obtener un tercer número llamado la suma. La sustracción es una operación que se efectúa para determinar un sumando desconocido, si se conocen la suma y el otro sumando (9 suma, otro sumando 5, sumando desconocido 4). Si se entiende esto, se evita la necesidad de insistir sobre las llamadas propiedades de la sustracción. Por ejemplo, 13 - 6 puede considerarse como "¿Qué número (sumando desconocido) puede sumarse a 6 (sumando conocido) para dar 13 (suma)?" Por tanto, si se sabe que $7 + 6 = 13$, también, se sabe que $13 - 6 = 7$ y que $13 - 7 = 6$.

267	sumando
+ 394	sumando
661	suma
661	suma
- 267	sumando
394	sumando

Es importante conocer la relación inversa que existe entre la adición y la sustracción para entender estas dos operaciones. Aunque no se emplee el término <u>inversa</u> con los estudiantes, ellos pueden aprender que la sustracción de un número dado neutraliza la adición del mismo número, y la adición de un número neutraliza la sustracción del mismo número; por ejemplo, si se suma 5 a 8, la adición puede neutralizarse, restando 5: $(8 + 5) - 5 = 8$. O, también, si 4 se resta de 9, la sustracción puede neutralizarse, sumando 4: $(9 - 4) + 4 = 9$.

La propiedad de <u>clausura</u> explica que no hay limitación en la operación de adición con respecto al conjunto de números cardinales, pero que hay una limitación en la operación de sustracción cuando solamente tenemos el conjunto de los números cardinales. Dos números cardinales cualesquiera pueden sumarse para producir otro número cardinal; pero no siempre al restar dos números cardinales se obtiene otro número cardinal; por ejemplo, si restamos 5 de 2 el resultado no es un número cardinal. Los matemáticos expresan esto, diciendo que el conjunto de los números cardinales es cerrado respecto de la adición, pero no lo es respecto de la sustracción. Más tarde en sus estudios de matemáticas, los alumnos conocerán conjuntos de números que son cerrados respecto de la sustracción y la división. Sin embargo, todo lo que esperamos que los alumnos entiendan ahora es que si se considera solamente el conjunto de los números cardinales, la operación de adición es siempre posible en este conjunto, pero la operación de sustracción no lo es siempre.

La propiedad conmutativa de la adición dice que el orden de los sumandos puede alterarse, sin que se altere la suma: por ejemplo, $7 + 2 = 2 + 7$ o, en general, $a + b = b + a$. Se verá claramente que no hay una propiedad conmutativa para la sustracción; por ejemplo, $3 - 2 \neq 2 - 3$. La propiedad conmutitiva de la adición proporciona dos ventajas: (1) el número de datos de la adición que los alumnos tienen que aprenderse es menor y (2) en algunas adiciones como $2 + 9$, el cálculo puede efectuarse más fácilmente, si el alumno piensa en $9 + 2$.

Se ha recalcado que la adición es una operación con dos números para obtener un tercer número. ¿Qué sucede, si queremos sumar tres números? Tenemos que efectuar la operación con dos números cada vez; es decir, agrupamos los números de la manera adecuada. Por ejemplo, si consideramos los números 3, 4 y 7, (dejando los números en ese orden) podríamos tener $(3 + 4) + 7$ ó $3 + (4 + 7)$. ¿Producirían estas dos agrupaciones diferentes, el mismo resultado? Sí. En realidad, esto es exactamente lo que dice la propiedad asociativa de la adición, a saber, $(a + b) + c = a + (b + c)$. Puesto que sin alterar el orden, las únicas dos agrupaciones posibles dan el mismo resultado, es conveniente y se costumbra escribir $3 + 4 + 7$ cuando, en realidad, se quiere significar $(3 + 4) + 7$ ó $3 + (4 + 7)$. Incidentalmente, los mismos comentarios se aplican al caso de cuatro o más números. Es cierto, también, que no hay una propiedad asociativa para la sustracción; por ejemplo, $(5 - 3) - 2 = 0$, mientras que $5 - (3 - 2) = 4$. (Obsérvese que las expresiones en paréntesis representan un número.)

El uso de cero como sumando en la adición o la sustracción es importante. Es el único sumando que, cuando se emplea, no produce cambio alguno en ningún otro sumando respecto de la adición $(6 + 0 = 6)$ o en la suma respecto de la sustracción $(6 - 0 = 6)$.

Un enunciado que trata acerca de números es un enunciado matemático. En el encasillado de la derecha, aparecen algunos ejemplos de enunciados matemáticos.

$$\boxed{\begin{array}{c} 3 + 2 = 5 \\ 14 - 6 = 8 \\ 2 + n = 8 \\ 48 \div 12 = 4 \\ z + 8 = 7 \\ 3 > 1 + n \\ 8 \neq 6 + 1 \end{array}}$$

En este capítulo, en algunos enunciados matemáticos que expresan operaciones o relaciones, se utilizará una n, o alguna otra letra del alfabeto, como un símbolo para representar un miembro cualquiera del conjunto de los números cardinales.

Algunos enunciados matemáticos son ciertos. $3 + 5 = 8$, $15 - 7 = 8$, $8 \times 2 = 16$, $6 > 2$, $8 \neq 2$ son todos ejemplos de enunciados matemáticos ciertos.

Algunos enunciados matemáticos son falsos. $3 + 7 = 6$, $12 - 8 = 1$, $6 \times 1 = 7$, $12 \div 4 = 0$, $8 < 6$ son todos ejemplos de enunciados matemáticos falsos.

Algunos enunciados matemáticos son <u>abiertos</u>. Decimos que son abiertos, porque no sabemos si son ciertos o falsos. Algunos ejemplos son: $8 - n = 1$, $2 + 5 = n$, $n - 5 = 8$. Si $n = 14$, entonces, $6 + 8 = n$ es un enunciado cierto. Si $n = 6$, entonces, $8 - n = 1$ es un enunciado falso.

En este capítulo, nos interesaremos en contestar preguntas como: "Si $n = 6$, ¿es $n + 2 = 8$?", o "Si $2 + 7 = n$, ¿es $n = 9$?" o "¿Qué número tiene que representar n, para que $n - 7 = 5$?"

No utilizaremos los términos "enunciados matemáticos <u>falsos</u>" y "enunciados matemáticos <u>abiertos</u>", solamente emplearemos el término <u>enunciado matemático cierto</u>. A menos que se especifique otra cosa, todos los enunciados en este capítulo serán ciertos, porque es nuestra intención que en todos los enunciados abiertos como $n + 2 = 7$, el sustituto de n sea un número que haga cierto el enunciado.

ENSEÑANZA DE LA UNIDAD

Esta es la primera de dos unidades que estudiaremos en el cuarto grado, con el propósito de extender las ideas de la adición y la sustracción a los números cardinales y explicar más detalladamente las propiedades y técnicas de estas operaciones. Las sugerencias presentadas en la página siguiente se proyectaron para que sirvieran de ayuda al maestro en la enseñanza de la unidad.

Aunque el plan general de los comentarios es parecido al de las otras unidades, queremos hacer un comentario especial relacionado con el material de estudio. La parte de la Exploración de algunas secciones se ha desarrollado mediante una serie de ejercicios para analizarlos en clase. Si el maestro prefiere explicar las ideas independientemente de los ejercicios, entonces, deberá pedirse a los estudiantes que los analicen por sí solos.

Sugerimos que el maestro estudie cada sección detenidamente y elija el método más eficaz para explicar las ideas a su clase particular. Ciertamente, se espera que el maestro haga uso de su iniciativa y de sus ideas originales ampliamente, sin que se hagan cambios significativos en el propósito de la unidad.

ADICION Y SUSTRACCION

Objetivo: (a) Ayudar a los estudiantes a considerar la adición como la determinación del número de miembros de la reunión de dos conjuntos en los cuales ningún miembro es un miembro de los dos conjuntos.

(b) Ayudar a los estudiantes a darse cuenta de que la adición de los números de elementos de dos conjuntos no da el número de los elementos de la reunión, si los conjuntos tienen miembros comunes.

(c) Ayudar a los estudiantes a entender la adición, mediante el uso de la recta numérica.

Vocabulario: Reunión de conjuntos, intersección de conjuntos, miembros comunes

Sugerencias para la enseñanza:

> El maestro deberá proporcionar conjuntos de objetos o hacer algunos dibujos de conjuntos de objetos en la pizarra. Los conjuntos no deben tener elementos comunes. Cada conjunto tiene un número cardinal, el número de elementos en el conjunto. La reunión de dos conjuntos tiene un número cardinal, que es la suma de los números cardinales de los dos conjuntos.
>
> Los estudiantes deben repasar las ideas del Capítulo 1 acerca de la reunión y la intersección de conjuntos.

Exploración:

Si formamos la reunión de un conjunto de 4 libros de ciencia y un conjunto de diccionarios, el resultado es un conjunto de 9 libros. El 9 se obtiene, sumando 4 y 5. No sumamos conjuntos, sumamos números. Desde luego, la adición de números nos ayuda a describir la reunión de algunos conjuntos.

Examinemos otro ejemplo de reunión de conjuntos.

	Número de miembros en cada conjunto	Número de miembros en la reunión de los conjuntos
Tomás tiene 30 soldaditos nuevos y Juan tiene 25 soldaditos viejos. ¿Cuántos soldaditos tienen entre los dos?	30, 25	55

En este ejemplo, un conjunto consistente en 55 miembros se formó mediante la reunión de dos conjuntos, uno de 30 miembros y otro de 25 miembros. ¿Utilizamos la adición en este ejemplo? (Sí) ¿Qué números se sumaron? (30 y 25) ¿Cuál es el resultado? (55)

En estos ejemplos, utilizamos la adición para determinar el número de miembros de la reunión de dos conjuntos.

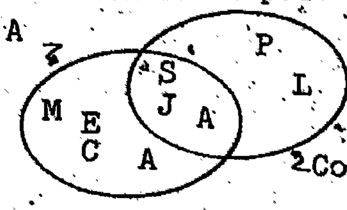
Les haré la siguiente pregunta acerca de esta manera de usar la adición: ¿Podrá utilizarse la adición para determinar el número de miembros de la reunión de dos conjuntos cualesquiera?

> Los estudiantes deberán dar ejemplos basados en su estudio de la reunión de conjuntos. Si no dan algún ejemplo que trate acerca de conjuntos que tengan algunos miembros comunes, el maestro deberá presentar un ejemplo parecido al siguiente:

Examinemos un ejemplo de reunión de dos conjuntos. El ejemplo es el siguiente: Estoy pensando en un conjunto de niñas (A) cuyos miembros tienen ojos azules y en un conjunto de niñas (R) cuyos miembros llevan trajes rojos. El conjunto A = {María, Juana, Susana, Ana, Elena, Catalina}. El conjunto R = {Paula, Susana, Juana, Ana, Lola}. Indiquen cuál es la reunión del conjunto A y el conjunto R. (La reunión del conjunto A y el conjunto R = {María, Juana, Susana, Ana, Elena, Catalina, Paula, Lola}.)

El maestro deberá hacer un dibujo para representar la reunión de estos conjuntos. A continuación, se presenta una manera de hacerlo, utilizando la primera letra del nombre de cada niña para representarla.

Conjunto A



Conjunto R

Obsérvese que Susana, Juana y Ana se representaron como miembros de ambos conjuntos. Son miembros de la reunión de los dos conjuntos. Se incluyen solamente una vez en la reunión de los dos conjuntos.

Volvamos a nuestra pregunta. ¿Podremos utilizar la adición para determinar el número de miembros de la reunión de dos conjuntos cualesquiera? ¿Cuántos miembros hay en el conjunto A? (6) ¿Cuántos miembros hay en el conjunto R? (5) ¿Cuántos miembros hay en la reunión del conjunto A y el conjunto R? (8) ¿Sumamos 6 y 5 para obtener el número de miembros de la reunión? (No). ¿Por qué? (Porque tienen algunos miembros que son los mismos, es decir, tienen algunos <u>miembros comunes</u>.)

Pensemos en otros ejemplos de reunión de conjuntos en los cuales no se utiliza la adición para determinar el número de elementos de la reunión.

¿Cuál es la respuesta a mi pregunta? ¿Podemos utilizar la adición para determinar el número de elementos de la reunión de dos conjuntos? (No siempre. En algunos casos podemos, en otros no.)

¿Cómo podremos terminar el siguiente ejemplo? "La adición puede utilizarse para determinar el número de elementos de la reunión de dos conjuntos que ... (no tienen elementos que sean los mismos, es decir, no tienen elementos comunes)".

La reunión de conjuntos nos da una oportunidad de emplear la sustracción. Por ejemplo, si la reunión de un conjunto de 4 tazas y un conjunto de n platillos es un conjunto de 12 objetos, entonces, el conjunto desconocido debe contener 8 platillos. Ocho se obtiene, utilizando la operación de sustracción. No restamos objetos o conjuntos, restamos números.

Quizás, el maestro quiera analizar algunos ejemplos de la reunión de conjuntos de un modo parecido al que se utilizó en la explicación del uso de la adición en situaciones que implican reunión de conjuntos.

¿Podemos utilizar la adición para determinar el número de elementos de la reunión de dos conjuntos <u>cualesquiera</u>? (No, pero podemos utilizarla en el caso de dos conjuntos cualesquiera que no tengan elementos comunes.) ¿Se aplica también esta limitación, cuando se utiliza la sustracción para determinar el número de elementos de un conjunto desconocido de la reunión de dos conjuntos? (Sí. Los dos conjuntos de la reunión no pueden tener elementos comunes.)

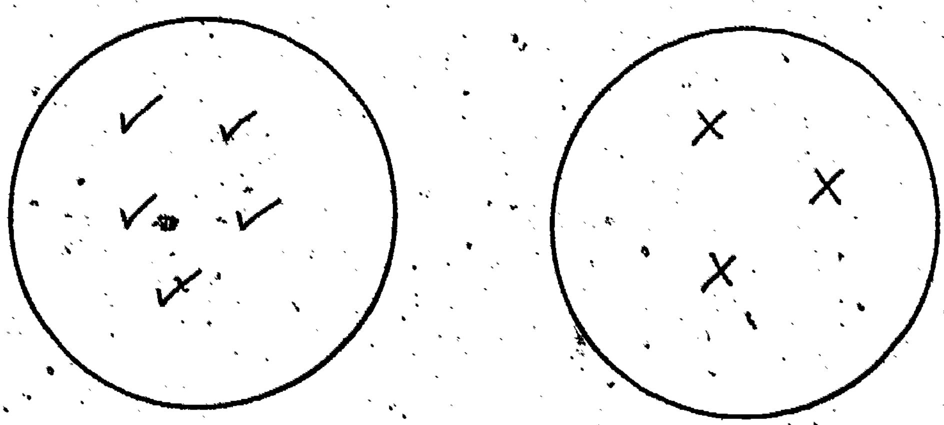
Los alumnos deberán resolver el Conjunto de problemas 1.

Capítulo 3

PROPIEDADES Y TECNICAS DE LA ADICION Y LA SUSTRACCION

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

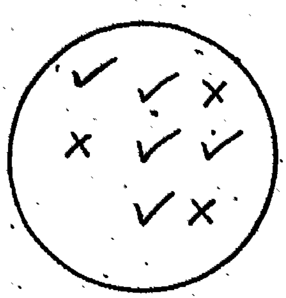
1.



Conjunto A   Conjunto B

(a) ¿Cuántos elementos hay en el conjunto A? (5)
(b) ¿Cuántos elementos hay en el conjunto B? (3)
(c) ¿Cuántos elementos hay en la reunión de los conjuntos A y B? (8).

Una representación de A ∪ B es:



A ∪ B

Podemos utilizar la adición para hallar el número de elementos en la reunión de dos conjuntos que no tienen elementos comunes.

2. El conjunto G es el conjunto de niñas de nueve años de edad en un salón de cuarto grado.

   G = {María, Isabel, Juana, Elena}

   El conjunto B es el conjunto de niñas en ese mismo salón, que tienen pelo castaño.

   B = {Linda, Isabel, Julia, Elena, Sandra}

   (a) ¿Cuál es el número de miembros del conjunto G? (4)
   (b) ¿Cuál es el número de miembros del conjunto B? (5)
   (c) ¿Cuál es el número de miembros de $G \cup B$? (7)

   No podemos sumar 4 y 5 para hallar el número de miembros de la reunión de estos dos conjuntos.

   <u>Podemos utilizar la adición para hallar el número de elementos en la reunión de dos conjuntos, solamente si los dos conjuntos no tienen elementos comunes.</u>

Conjunto de problemas 1

Contesta cada pregunta cuidadosamente:

1. Conjunto F = {perro, vaca, caballo, cerdo, pavo}
   Conjunto G = {pollo, perro, petirrojo, gato, cerdo}
   (a) El número de elementos del conjunto F = ? (5)
   (b) El número de elementos del conjunto G = ? (5)
   (c) El número de elementos de F ∪ G es ? (8)

   ¿Por qué no podríamos sumar el número de elementos del conjunto F y el número de elementos del conjunto G para obtener el número de elementos de F ∪ G? (Porque tienen 2 elementos comunes.)

2. J = {a, b, c, d, e, f, g, h, i}
   K = {j, k, l, m}
   (a) ¿Cuál es el número de elementos de J ∪ K? (13)
   (b) Podrías sumar el número de elementos del conjunto J y el número de elementos del conjunto K para obtener la respuesta? (Sí) ¿Por qué? (Porque los dos conjuntos no tienen elementos comunes.)

3. M = {f, o, u, r, t, h}
   P = {g, r, a, d, e}
   ¿Cuál es el número de elementos de M ∪ P? (10)

4. Hay 8 elementos en el conjunto R.
   Hay 5 elementos en el conjunto S.
   Ninguno de los elementos del conjunto R es un elemento del conjunto S.
   ¿Cuál es el número de elementos de R ∪ S? (13)
   ¿Cómo obtuviste la respuesta? (Sumando 8 y 5)

5. El conjunto E tiene 9 elementos.
El conjunto F tiene 7 elementos, ninguno de los cuales es elemento del conjunto E.
¿Cuál es el número de elementos en E ∪ F? (16)

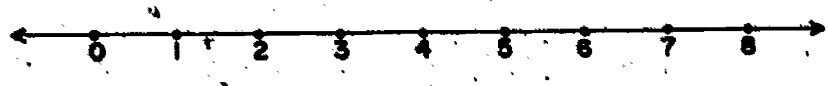
6. W = {5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14}
Y = {13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22}
El número de elementos en W ∪ Y es __?__ (16)
¿Cómo obtuviste la respuesta? (Quizás, algunos alumnos hayan contado el número de elementos diferentes de los dos conjuntos; quizás, otros hayan sumado el número de elementos en los dos conjuntos y, luego, le hayan restado 2, porque los conjuntos tienen 2 elementos comunes.)

LA ADICION Y LA RECTA NUMERICA

Sugerencias para la enseñanza:

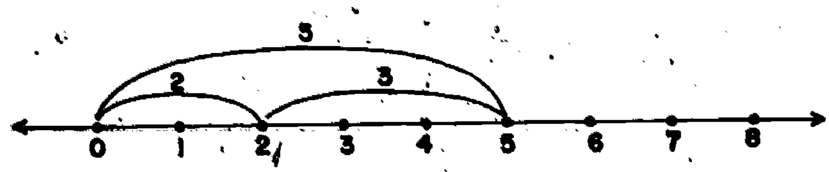
> Al "ver" la adición en la recta numérica, recuérdese a los estudiantes lo que aprendieron acerca de la recta numérica en el Capítulo 2. Ambas, la idea de reunión de conjuntos disyuntos y la de recta numérica, sirven de gran ayuda para "ver" el significado de la adición. El uso de una de ellas no excluye el uso de la otra. A algunos alumnos, pueden servirle de ayuda las dos ideas y a otros puede ayudarle una y la otra no.

Llamemos <u>segmento</u> de recta a una parte de la recta numérica que esté entre dos puntos de la recta, incluidos ambos puntos.



La parte de la recta entre 0 y 1, incluidos ambos, es un segmento de recta. Los puntos marcados 0 y 1 pertenecen a este segmento de recta. La parte de la recta desde 4 a 7, incluidos los extremos, es un segmento de recta. A estos segmentos de recta, los llamaremos "el segmento de recta desde 0 a 1", "el segmento de recta desde 4 a 7", e igualmente para otros segmentos de recta. Nombren otros segmentos de recta en la recta numérica del diagrama. Veamos si podemos utilizar la recta numérica y los segmentos de dicha recta como ayuda para representar la adición de dos números.

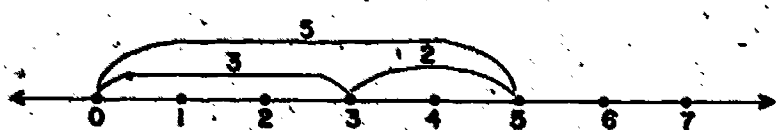
¿Nos ayudará el siguiente diagrama a pensar que $2 + 3 = 5$?



¿Qué diagrama podría hacerse para ayudarnos a comprender que $3 + 2 = 5$?

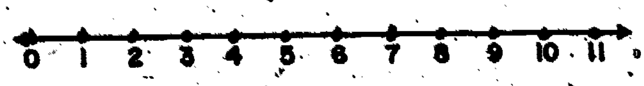
> Quizás, algunos estudiantes sugieran que puede utilizarse el mismo diagrama que para $2 + 3 = 5$. Quizás, otros prefieran

el diagrama mostrado en la página siguiente. El objetivo aquí es convenir en que el mismo diagrama puede servir de ayuda para pensar en los dos enunciados $2 + 3 = 5$ y $3 + 2 = 5$. Si esta idea se establece aquí, los estudiantes habrán empezado a entender la propiedad conmutativa de la adición.



Después del análisis en clase, los alumnos deberán trabajar individualmente en el Conjunto de problemas 2. Hágase que comparen sus respuestas en la clase.

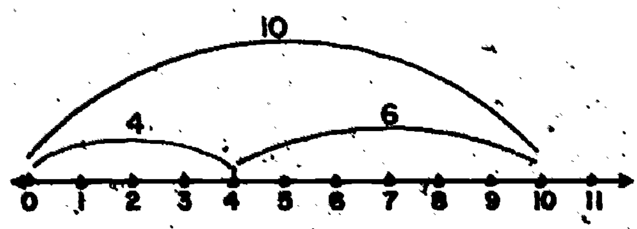
LA ADICION Y LA RECTA NUMERICA



Una parte de la recta numérica comprendida entre dos puntos, incluidos los dos puntos, se llama un <u>segmento de recta</u>. Por ejemplo, la parte de la recta entre el punto denominado 3 y el punto denominado 6 se llama "el segmento de recta desde 3 a 6". Los puntos denominados 3 y 6 pertenecen a este segmento de recta, desde luego. Nombra algunos otros segmentos de recta, examinando la recta numérica de más atrás.

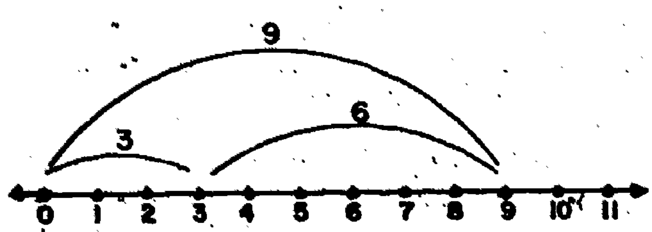
Podemos utilizar la recta numérica y los segmentos de recta como ayuda para representar la adición de números.

La figura siguiente nos ayuda a "ver" que $4 + 6 = 10$:



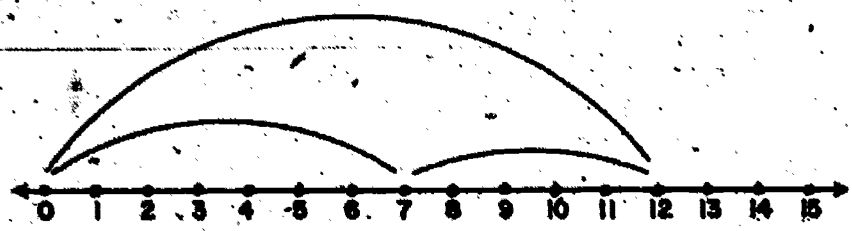
Primero, dibujamos la línea para representar el 4. Luego, trazamos la línea para representar el 6. En ésta partimos del 4 y recorremos 6 unidades hacia la derecha. Entonces, trazamos la línea del 0 al 10 para representar la suma de 6 y 4.

Una representación de $3 + 6 = 9$ podría aparecer así:

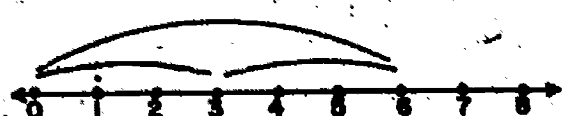


E66

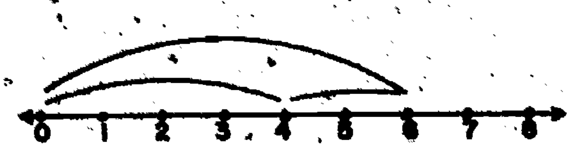
1. ¿Qué te sugiere la siguiente figura? (7 + 5 = 12)



2. ¿Cuál de las siguientes es una representación de 3 + 2 = 5? (b)

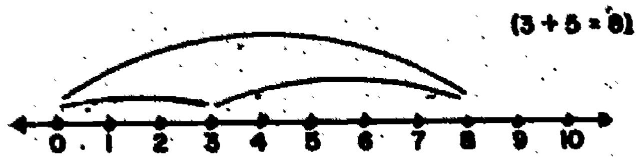
(a) 

(b) 

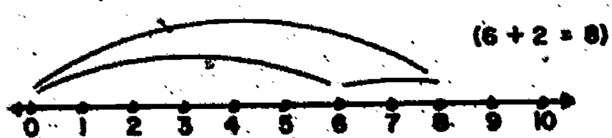
(c) 

Conjunto de problemas 2

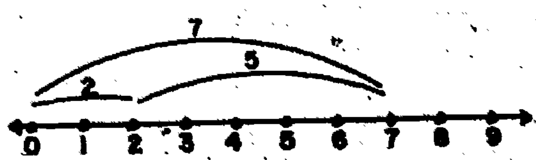
1. ¿Es la figura siguiente una representación de $4 + 3 = 7$ o de $3 + 5 = 8$?



2. ¿Qué te sugiere la siguiente figura?



3. Utiliza una recta numérica para representar $2 + 5 = 7$.



4. Dibuja una representación en la recta numérica de cada uno de los siguientes ejercicios:
   (a) $7 + 6 = 13$
   (b) $5 + 9 = 14$
   (c) $4 + 7 = 11$

LA ADICION Y LA SUSTRACCION COMO OPERACIONES

Objetivos: Explicar la idea de que una operación es una manera de considerar dos números para obtener un tercer número único y ayudar a los alumnos a darse cuenta de que los cuatro "procesos" fundamentales de la aritmética (adición, sustracción, multiplicación y división) son operaciones en ese sentido.

Materiales necesarios: Trozos de fieltro y un tablero de franela, conjuntos de objetos tales como discos o fichas.

Vocabulario: Operación, par de números, resultado, orden

Sugerencias para la enseñanza:

> La explicación que se presenta más adelante se redactó como si el maestro le estuviera hablando a su clase. Se encerraron en paréntesis varias sugerencias y las respuestas que el maestro quiere obtener de los alumnos a sus preguntas.
>
> Durante la explicación, el maestro deberá hacer algunos dibujos en la pizarra, utilizar trozos de fieltro o proporcionar conjuntos de objetos que puedan usarse. Si lo desea, puede presentar esta explicación mediante algún caso concreto, como dos conjuntos de personas, libros, etc. Sin embargo, deberá observar que el conjunto A y el conjunto B no tienen elementos comunes, mientras que el conjunto J es un subconjunto del conjunto H.

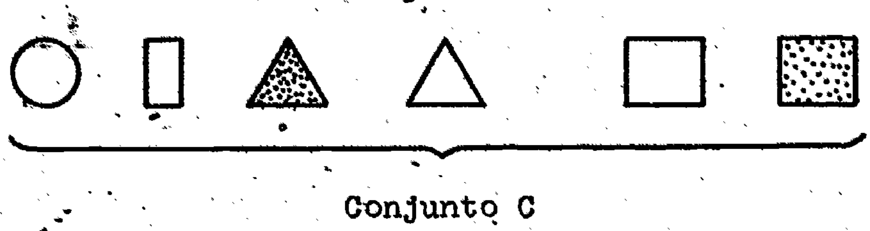
Exploración:

Consideremos los dos conjuntos siguientes:

Conjunto A   Conjunto B

¿Cuántos elementos hay en el conjunto A? (4) ¿Cuántos elementos hay en el conjunto B? (2) Observen que no hay elementos del conjunto A que pertenezcan también al conjunto B.

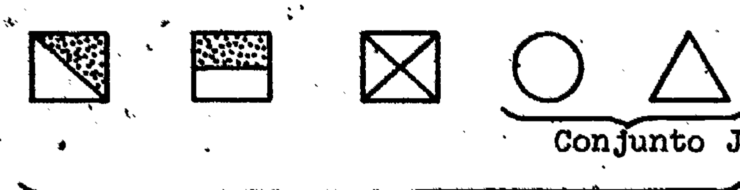
Muestren el resultado de combinar estos dos conjuntos. Llamaremos al resultado, conjunto C. El conjunto C es la reunión de los conjuntos A y B.



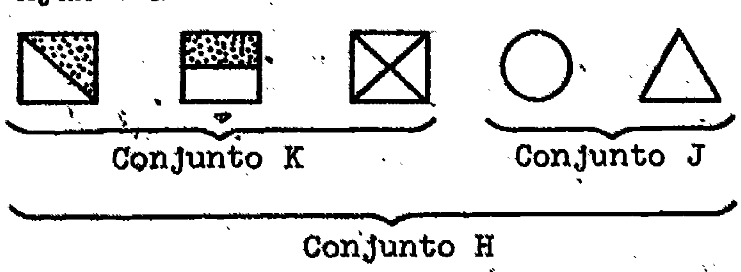
¿Cuántos elementos hay en el conjunto C? (6) Podemos decir que hay 4 + 2 ó 6 elementos en el conjunto C. 4 + 2 = 6.

He aquí otro conjunto que podemos estudiar: lo llamaremos el conjunto H.

En el conjunto H, hay dos miembros, la circunferencia y el triángulo, que ponemos juntos y le llamaremos el conjunto J. El conjunto J está en el conjunto H.



El conjunto J es una parte del conjunto H. Hay otra parte del conjunto H. Llamaremos la otra parte conjunto K. El conjunto K está en el conjunto H.



¿Cuál es el número de elementos del conjunto H? (5) ¿Cuál es el número de elementos del conjunto K? (3) Podemos decir que esto ilustra que 5 menos 2 es 3, o sea, 5 - 2 = 3. También, ilustra que 5 menos 3 es 2, o sea, 5 - 3 = 2.

Cuando sumamos, efectuamos una operación con números. ¿Pueden ilustrar esto con alguno de los ejemplos que utilizamos? ¿Qué números se sumaron? (4 y 2) ¿Cuál fue el resultado?

> Si empezamos con los dos conjuntos A y B y obtenemos el conjunto C, éste se llama el conjunto reunión y la reunión es la operación. Al empezar con los dos conjuntos H y J para obtener un tercer conjunto K, estamos determinando el subconjunto de H de manera que su reunión con el conjunto J es el conjunto H. Podemos llamar esta operación disección. No queremos decir que las operaciones de reunión y disección con conjuntos son completamente análogas a las operaciones de adición y sustracción con números. Simplemente, queremos decir que podemos empezar con dos conjuntos y obtener un tercer conjunto, mediante una operación.

¿Qué operación con números se utilizó en el segundo ejemplo? (Sustracción) ¿Con qué números se efectuó dicha operación? (5 y 2) ¿Cuál fue el resultado? (3)

¿Qué operaciones con números han utilizado? (Adición y sustracción) ¿Empezaron en cada caso con dos números y obtuvieron un número como resultado? (Sí)

> El maestro observará que en la adición y la sustracción, empezamos con un par de números y obtenemos un tercer número que es el resultado. Esta es una manera general de describir una operación con números: empezamos con un par de números, efectuamos una operación con los números y obtenemos un tercer número como resultado.
>
> También, debe recalcarse que el resultado depende de la operación efectuada. Si se empieza con 12 y 2 y se suma, el resultado es 14; si se resta, el resultado es 10; si se multiplica, el resultado es 24; si se divide, el resultado es 6. El orden en que se escriben los números con los cuales se opera es importante. Por ejemplo, si la operación es la sustracción y los números con los que se opera son 12, 7, se entiende que significa 12 - 7, pero

no 7 - 12; entonces, 12 es la suma, 7 es un sumando, y debe hallarse el otro sumando. Si la operación es la división y los números con los que se opera son 8, 2, se entiende que significa 8 ÷ 2, pero no 2 ÷ 8; entonces, 8 es el producto, 2 es un factor y debe determinarse el otro factor.

Ahora, considérense con los alumnos las otras dos operaciones, la multiplicación y la división. Preséntense algunos ejemplos, empezando con un par de números y la operación, multiplicación, para determinar un tercer número único. Análogamente, utilícense ejemplos para la división, observando que hay que tener cuidado al elegir el par y el orden en que se consideran los números, de manera que el tercer número resulte un número cardinal.

Entonces, analícese cada uno de los ejemplos de la tabla presentada más adelante, en términos de dos números, una operación y el número que es el resultado.

Los matemáticos dicen que los números 12, 7 forman un par ordenado, lo que significa que 12, 7 y 7, 12 son pares diferentes, porque los números están en un orden diferente.

Operación	Números con los que se efectúa la operación	Resultado
(a) Adición	7, 9	16
(b) Adición	12, 2	14
(c) Sustracción	12, 7	5
(d) Sustracción	12, 2	10
(e) Sustracción	7, 12	No es un número cardinal
(f) Multiplicación	6, 4	24
(g) Multiplicación	12, 2	24
(h) División	16, 2	8
(i) División	2, 16	No es un número cardinal

Ahora, puede utilizarse el Conjunto de problemas 3.

LA ADICION Y LA SUSTRACCION COMO OPERACIONES

La adición y la sustracción son dos operaciones de la matemática. La multiplicación y la división son, también, operaciones. Estas cuatro operaciones se llaman las operaciones fundamentales.

Una operación con dos números es una manera de considerar dos números para obtener un número y sólo uno. Cuando consideramos 9 y 5 y obtenemos 14, estamos sumando. Escribimos 9 + 5 = 14. Cuando consideramos 9 y 5 y obtenemos 4, estamos restando. Escribimos 9 - 5 = 4. Al restar, el orden de los dos números es importante. Si los números son 5, 9 esto significa 5 - 9. No hay ningún número cardinal que corresponda a 5 - 9.

Conjunto de problemas 3

Escribe los números del 1 al 12 en tu libreta. Escribe el numeral correcto o la palabra necesaria para completar esta tabla. El primer ejercicio se hizo como ejemplo.

	Números con los cuales se efectúa la operación	Resultado	Operación empleada
1.	5, 7	12	Adición
2.	9, 3	(6)	Sustracción
3.	10, 2	12	(Adición)
4.	10, 2	8	(Sustracción)
5.	10, 2	5	(División)
6.	10, 2	20	(Multiplicación)
7.	5, (4)	9	Adición
8.	(16), 9	7	Sustracción
9.	9, (6)	3	Sustracción
10.	6, 9	15	(Adición)
11.	(11), 7	4	Sustracción
12.	3, (2)	1	Sustracción

ENUNCIADOS MATEMATICOS CIERTOS

Objetivo: Ayudar a los estudiantes a aprender (a) el significado de los enunciados matemáticos y (b) que algunos enunciados matemáticos son ciertos y otros no lo son.

Vocabulario: Enunciado matemático, enunciado matemático cierto, falso

Exploración

En nuestro trabajo relacionado con el lenguaje, han aprendido a escribir enunciados. Estos enunciados pueden decir algo acerca de un hermano, de la ciudad en que vivimos o de alguna acción en el campo de juegos. Algunos enunciados matemáticos nos dicen algo acerca de los números. $6 + 7 = 13$ nos dice que si efectuamos la operación de adición con 6 y 7, el resultado es 13. Es un enunciado matemático acerca de 6, 7 y 13.

Sugerencias para la enseñanza:

> Pídase a los estudiantes que den pares de números, la operación que deberá efectuarse con ellos y el resultado. Por ejemplo, alguien podría dar el 3 y el 7, la operación de adición y el resultado como 10. El enunciado matemático acerca de 3, 7 y 10 es $3 + 7 = 10$. Si los números hubieran sido 7 y 3 y la operación la de adición, el enunciado habría sido $7 + 3 = 10$.

A menudo, redactamos enunciados matemáticos en los que no se da un tercer número. Supongamos que pienso en un número. ¿Cuál es ese número? Desde luego, que no pueden saberlo; pero, si les digo que al sumar 7 y 3 obtendrán el número en que estoy pensando, sabrán que dicho número es 10.

> Pídase a los estudiantes que expresen esto mediante un enunciado lingüístico. Alguno podría decir: "El número en que se ha pensado es 7 + 3". Entonces, pídase que digan cómo podemos expresar la misma idea, mediante un enunciado matemático. Se espera que los estudiantes respondan con $7 + 3 = \_\_\_$ ó $7 + 3 = ?$ ó $7 + 3 =$.

Queremos conducirlos a la idea de que una letra puede utilizarse para representar un número. Entonces, podemos escribir, por ejemplo, $7 + 3 = n$. Explíquese que una letra cualquiera puede utilizarse para representar un número, pero que n es la que se utiliza corrientemente. Prosígase con varios ejemplos parecidos, hasta que los estudiantes se acostumbren a utilizar enunciados matemáticos en los que se emplea una letra para representar un número.

Cuando escribimos el enunciado matemático $7 + 3 = 10$, expresamos la idea de que ambos $7 + 3$ y 10 son modos diferentes de nombrar el número en que estaba pensando. Consideremos el enunciado $6 + 7 = 13$. ¿Es cierto que $6 + 7$ y 13 son nombres diferentes del mismo número? (Sí) ¿Son las expresiones $18 - 9$, $6 + 3$ y $13 - 4$ nombres del mismo número? (Sí) ¿Son $8 + 4$ y 11 nombres diferentes del mismo número? (No)

Consideremos nuevamente enunciados matemáticos como $7 + 3 = n$ ó $n + 6 = 9$. En realidad, no sabemos si estos enunciados son ciertos o falsos. Si n representa el número 3 en el enunciado matemático $n + 6 = 9$, entonces, ese enunciado es cierto. Si n representa otro número cualquiera, ese enunciado es falso.

Los enunciados matemáticos son como los enunciados lingüísticos. A veces, un enunciado lingüístico es cierto; a veces es falso (no cierto). Otras veces, no sabemos si es cierto o falso. Supongamos que decimos: "El está ausente de la escuela" o "Ella va hacia la biblioteca". ¿Son ciertos o falsos estos enunciados? No lo sabemos, hasta que sepamos quién es él o ella. Decimos que $n + 6 = 9$ no es ni cierto ni falso. Cuando n representa el número 3, podemos decir que el enunciado es cierto. Si sabemos que n representa un número cualquiera distinto de 3, sabemos que el enunciado es falso.

Pídase a los estudiantes que den algunos enunciados lingüísticos que sean ciertos, otros que sean falsos y algunos otros que puedan ser o ciertos o falsos.

Entonces, pídaseles que ~~den algunos~~ enunciados matemáticos que sean ciertos y en los que se utilicen solamente las operaciones de adición y sustracción y los símbolos +, −, =. Evítese que empleen los símbolos >, < y ≠ en esta etapa. Algunas respuestas correctas son: $11 + 2 = 13$, $15 - 7 = 8$, etc.

Pídase a los estudiantes que expliquen cómo saben que estos enunciados matemáticos son ciertos, tratando de que lleguen a la idea de que hay dos nombres diferentes para el mismo número; por ejemplo, $11 + 2$ y 13 son nombres del mismo número.

Ahora, pídase a los estudiantes que consideren enunciados matemáticos que no sean ciertos o enunciados en los cuales se necesita más información para poder decir si son ciertos o falsos. La exploración puede presentarse a la clase más o menos así:

¿Podrían mencionar algunos enunciados matemáticos que no sean ciertos? (Hay varias respuestas posibles; un ejemplo es $14 - 6 = 5$.) Supongamos que cambiamos un número cualquiera en uno de los enunciados matemáticos ciertos. ¿Seguirá siendo cierto el enunciado? (No, será falso; por ejemplo, $11 + 2 = 13$ es un enunciado cierto, pero $10 + 2 = 13$ es falso.)

¿Es el enunciado matemático, $8 + n = 14$, cierto o falso? (No podemos saberlo hasta que sepamos lo que el número n representa.) Si n representa 12, ¿será cierto el enunciado? (No) ¿Podrá n representar más de un número cardinal para hacer el enunciado cierto? (No, n tiene que ser 6.)

Generalmente, escribimos esto de la siguiente manera:

$$8 + n = 14$$
$$n = 6$$

¿Quién puede ir a la pizarra y escribir un enunciado matemático para decir lo que n representa, de modo que el siguiente enunciado sea cierto?

$$n + 4 = 12$$

(Los estudiantes deberán escribir su trabajo así:

$$n + 4 = 12$$
$$n = 8.)$$

Preséntense otros ejemplos, de manera que los estudiantes tengan la oportunidad de practicar esta forma de escribir su trabajo.

La explicación en el <u>Texto del estudiante</u>, en la página E68, se presenta como un conjunto de ejercicios para analizarlos en clase <u>después</u> de la exploración anterior.

No obstante, quizás, el maestro quiera pedir a los alumnos que hagan algunos o todos los ejercicios por sí mismos, para después analizar las respuestas en la clase.

Examinemos los ejercicios 12 y 13 de la página E71. Los estudiantes deberán empezar a darse cuenta de que la reunión de un conjunto de 6 objetos y un conjunto de 5 objetos (los conjuntos sin elementos comunes) en un solo conjunto de 11 objetos es un modelo o ejemplo de $6 + 5 = 11$. Recomiéndese la presentación de varios ejemplos en los que se utilicen objetos o dibujos para mostrar que enunciados como $6 + 6 = 10$ y $6 - 2 = 3$ no son enunciados matemáticos ciertos.

En esta unidad, un enunciado como "Determina n", seguido por $n + 7 = 10$, significa: "Determina n, de manera que $n + 7 = 10$ sea un enunciado cierto". En algunos problemas, se utilizan otras formas lingüísticas (que tienen el mismo significado), tales como "¿Qué número cardinal representa n, a fin de que $n - 6 = 9$ sea un enunciado cierto?"

Los Conjuntos de problemas 4 y 5 proporcionan a los estudiantes la oportunidad de trabajar solos.

ENUNCIADOS MATEMATICOS CIERTOS

Un enunciado que nos dice algo sobre números es un enunciado matemático.

Enunciados como los del encasillado A se llaman enunciados matemáticos. Un enunciado matemático puede ser cierto o falso.

A
$6 + 4 = 10$
$9 - 3 = 2$
$0 + 8 = 8$

1. (a) ¿Es cierto que $6 + 4 = 10$? (نعم)
   (b) ¿Es cierto que $9 - 3 = 2$? (no)
   (c) ¿Es cierto que $7 + 6 \neq 12$? (نعم)
   (d) ¿Es cierto que $10 - 10 \neq 10 - 9$? (نعم)
2. (a) ¿Son $6 + 4$ y 10 nombres diferentes para el mismo número? (نعم)
   (b) Di si los siguientes numerales son nombres para el mismo número: $6 + 3$, $11 - 2$, $9 + 0$. (نعم)
   (c) El numeral en base diez para $9 - 3$ es 6. Di cuál es el numeral en base diez para: $17 - 3$; (14) $12 + 5$; (17) $9 - 0$. (9)
3. Escribe algunos otros enunciados matemáticos.
4. María dijo: "Estoy pensando en un número. El número es el resultado de sumar 5 y 3. ¿En qué número estoy pensando? (8)
5. Roberto dijo: "Llamemos n al número de María. Entonces, n es el resultado de sumar 5 y 3. Así, $n = 8$. Ahora, si $n = 8$ entonces $5 + 3 = n$".
   Enunciados como los del encasillado B se llaman también enunciados matemáticos.

B
$3 + 8 = n$
$12 - 7 = n$
$n - 4 = 7$
$4 - n = 1$

6. (a) Si $n = 5$, ¿es $2 + 3 = n$? (Sí)
   (b) Si $n = 9$, ¿es $n - 5 = 4$? (Sí)
   (c) Si $n = 5$, ¿es $n - 5 = 1$? (No)
   (d) Si $n = 7$, ¿es $3 + 5 = n$? (No)
7. (a) Si $n = 4$, ¿es $10 - n = 6$? (Sí)
   (b) Si $n = 7$, ¿es $n + 3 = 10$? (Sí)
   (c) Si $n = 9$, ¿es $n + 3 = 10$? (No)
   (d) Si $n = 7$, ¿es $10 - n = 2$? (No)
8. (a) Si $n = 8 + 7$, ¿es $9 + 6 = n$? (Sí)
   (b) Si $n = 30 - 20$, ¿es $15 + n = 25$? (Sí)
   (c) Si $n = 100 + 300$, ¿es $n - 200 = 200$? (Sí)
9. ¿Cuál es el numeral en base diez para n en cada una de las partes (a), (b) y (c) del ejercicio 8? a.(15) b.(10) c.(400)
10. (a) Si $n = 7$, ¿es $11 - 3 \neq n$ o es $11 - 3 = n$? ($11-3 \neq n$)
    (b) Si $n = 12$, ¿es $17 - 5 \neq n$ o es $17 - 5 = n$? ($17-5=n$)
    (c) Si $n = 1$, ¿es $12 - n \neq 11$ o es $12 - n = 11$? ($12-n=11$)
11. Si $n = 7$, ¿cuáles de los siguientes son nombres diferentes para n? (a, d)
    (a) $12 - 5$ (b) $19 - 13$ (c) $10 - 7$ (d) $27 - 20$
12. Juana dijo: "$6 + 5 = 11$ es un enunciado matemático. Es un enunciado cierto". ¿Crees que lo que dijo Juana es correcto? (Sí) Dibuja un modelo o una representación para mostrar por qué piensas de ese modo. (V. la página 136.)
13. Guillermo dijo, "$6 - 2 = 3$ es un enunciado matemático. Es un enunciado cierto". ¿Estás de acuerdo con Guillermo? (No) Dibuja una representación o modelo para mostrar por qué piensas como lo haces. ($6-2=3$ es un enunciado matemático, pero no es un enunciado cierto.)

> El enunciado matemático $6 + 7 = 13$ es cierto. Es cierto, porque $6 + 7$ y 13 son dos nombres diferentes para el mismo número.
>
> El enunciado matemático $6 + 7 = 12$ no es cierto. No es cierto, porque $6 + 7$ y 12 no son nombres diferentes para el mismo número.

Conjunto de problemas 4

1. Algunos de los enunciados matemáticos siguientes son ciertos. Escribe en tu hoja de papel la letra de cada uno de los enunciados matemáticos que es cierto. (a, c, f, g, l).

   (a) $2 + 1 = 3$
   (b) $6 + 8 = 15$
   (c) $9 + 14 = 23$
   (d) $11 + 1 = 11$
   (e) $13 - 8 = 4$
   (f) $9 - 3 = 6$
   (g) $17 - 11 = 6$
   (h) $19 - 12 = 6$
   (i) $26 + 21 = 74$
   (j) $33 - 21 = 2$
   (k) $62 + 6 = 122$
   (l) $78 - 62 = 16$

2. Si $n = 5$, ¿cuáles de los siguientes enunciados matemáticos son ciertos? (Todos los enunciados son ciertos.)

   (a) $1 + 4 = n$ (b) $8 - n = 3$ (c) $n - 2 = 3$

3. Supongamos que se te preguntó: ¿Qué número debe representar n para que $8 + 5 = n$ sea un enunciado matemático cierto?

   (a) Si dijiste, "n es 13" ¿sería correcta tu respuesta? (Sí)
   (b) Si dijiste "n es 12" ¿sería correcta tu respuesta? (No)
   (c) Di si es correcto decir: "Si $n = 13$, entonces $8 + 5 = n$". (Sí).

4. Si n representa el número 3, ¿cuáles de los siguientes enunciados son ciertos? (a, c, e, f)

   (a) $2 + n = 5$
   (b) $8 + n = 10$
   (c) $n + 3 = 6$
   (d) $9 - n = 5$
   (e) $6 - n = 3$
   (f) $3 - n = 0$

5. Si $n = 7$, ¿cuáles de los siguientes enunciados matemáticos son ciertos? (a, b, c, d)

   (a) $n + 9 = 16$
   (b) $n - 6 = 1$
   (c) $9 - n = 2$
   (d) $4 + 3 = n$
   (e) $8 + n = 12$
   (f) $12 - n = 8$

6. (a) ¿Qué número representará n para que $8 + 4 = n$ sea un enunciado matemático cierto? (12)

   (b) ¿Qué número representará n para que $2 + n = 11$ sea un enunciado matemático cierto? (9)

7. ¿Qué número representará n para que $3 + n = 9$ sea un enunciado cierto? (6) Puedes usar la forma del encasillado A para escribir tu respuesta.

A
$3 + n = 9$
$n = 6$

8. ¿Qué número será n para que $2 + n = 7$ sea un enunciado cierto? (5) Escribe tu respuesta en la misma forma que usaste en el ejercicio 7.

Conjunto de problemas 5

Copia los numerales del 1 al 15 en tu hoja de papel. Al lado de cada uno, escribe las palabras, numerales y enunciados matemáticos correctos, para completar la siguiente tabla; el primer problema se hizo como un ejemplo:

	Números con los cuales se efectúa la operación	Resultado	Operación utilizada	Enunciado matemático
1.	12, 9	3	Sustracción	12 - 9 = 3
2.	18, 9	9	(Sustracción)	18 - 9 = 9
3.	6, 3	9	(Adición)	6 + 3 = 9
4.	5, 8	40	(Multiplicación)	5 × 8 = 40
5.	18, 3	(6)	(División)	18 ÷ 3 = 6
6.	6, m	13	Adición	(6+m=13)
7.	p, 7	6	Sustracción	(p-7=6)
8.	3, 7	(10)	Adición	(3+7=10)
9.	14, t	8	Sustracción	(14-t=8)
10.	12, (7)	5	Sustracción	(12-7=5)
11.	15, 9	6	(Sustracción)	(15-9=6)
12.	3, 14	17	Adición	(3+14=17)
13.	12, 4	(3)	División	(12÷4=3)
14.	5, 3	(15)	Multiplicación	(5×3=15)
15.	6, 2	(4)	Sustracción	(6-2=4)

CONSIDERACION DE LAS COMBINACIONES BASICAS DE LA ADICION

Objetivo: Ayudar a los alumnos a repasar las combinaciones aditivas básicas y estudiar las relaciones entre dichas combinaciones.

Vocabulario: Sumando, suma, más, columna, fila

Sugerencias para la enseñanza:

El tiempo dedicado al repaso de las combinaciones básicas de la adición puede variar de acuerdo con la necesidad de los alumnos. Si bien algunos necesitan menos práctica que otros, todos deben estudiar detenidamente las relaciones que se destacan en esta sección. Se espera que el maestro proporcione ejercicios de práctica apropiados para los alumnos que lo necesiten.

El maestro y los alumnos deberán estudiar juntos la página E74. Conviene que los alumnos enuncien las combinaciones básicas de la adición en diferentes formas lingüísticas, como se indica en la parte superior de esa página. Las palabras sumando y suma deben utilizarse repetidamente. Quizás, el maestro considere conveniente hacer copias de la tabla de adición, de manera que no sea necesario que cada estudiante la copie.

E74

CONSIDERACION DE LAS COMBINACIONES BASICAS DE LA ADICION

La adición se indica así:

$9 + 5 = 14$	$\begin{array}{r} 9 \\ +\underline{5} \\ 14 \end{array}$

9	+	5	=	14
sumando		sumando		suma

La adición se lee así:

9 y 5 son 14, ó 5 añadido a 9 es 14, ó 9 más 5 es igual a 14, ó $9 + 5$ es igual a 14.

En cada uno de estos ejemplos di qué números son los sumandos y cuál es la suma:

(a) $8 + 5 = 13$

(b) $8 + 9 = 17$

(c) $10 + 20 = 30$

(d) $\begin{array}{r} 31 \\ +\underline{45} \\ 76 \end{array}$

(e) $\begin{array}{r} 23 \\ +\underline{64} \\ 87 \end{array}$

Puedes conocer todas las combinaciones básicas de la adición. Esto te ayudará a completar la tabla de la próxima página. Se llama una tabla de adición. Para empezar, añades al número 0, que está en la columna de la izquierda, cada uno de los números de la fila de arriba. Escribe la suma debajo del número que se agregó al cero. Suma, $0 + 0 = 0$ y escribe 0 debajo del cero; $0 + 1 = 1$, de modo que escribes 1 debajo del 1, y así sucesivamente. Haz una copia de la tabla de la página siguiente y complétala.

Tabla de adición

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
2	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
3	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
4	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
5	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)
6	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
7	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)
8	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)
9	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)	(18)

Ahora, los estudiantes pueden utilizar la tabla. A continuación, se dan algunas sugerencias para el análisis en clase:

Ahora que tenemos la tabla, ¿cómo podemos utilizarla? (Podemos utilizarla para calcular la suma de dos números cualesquiera del conjunto, desde 0 hasta 9.)

Examinemos la tabla y hagamos una lista de las relaciones que descubrimos, mientras la construíamos. A medida que hagamos la lista, quizás, descubramos otras relaciones.

(a) Varias sumas son iguales y aparecen todas en una línea diagonal. (Después que se hayan anotado varias relaciones, el maestro puede ayudar a los estudiantes a darse cuenta de que si le añadimos 1 a un sumando y le restamos 1 al otro, no se altera la suma. Esta idea puede ilustrarse, utilizando objetos concretos o dibujos.)

(b) La primera fila que escribimos en la parte superior es igual a la que está encima de ésta y la primera columna que escribimos a un lado es igual a la que está a su izquierda. (Esta es una observación importante, porque conduce a la propiedad del cero como sumando en la adición y la sustracción. Tan pronto como se acabe de hacer la lista, el maestro deberá hacer preguntas como la siguiente: "¿Cuánto es $0 + 9$?; ¿$0 + 8$?; ¿y $0 + n$?")

(c) La tabla muestra que 7 y 8 tienen la misma suma que 8 y 7, etc. (Utilícense varias afirmaciones parecidas para recalcar la idea de que el orden de los sumandos puede cambiarse, sin alterar la suma. Esta idea se estudia detenidamente en la próxima sección.

(d) Cada suma en una fila es uno más que la suma a su izquierda, cada suma en una columna es uno más que la suma encima de ella. (El maestro puede preguntar: "¿Por qué?", después de señalar cada una de estas relaciones.)

Los estudiantes deben conservar sus tablas de adición, pues las volverán a utilizar pronto. Nos damos cuenta de que, probablemente, el maestro tendrá que proporcionar más práctica con las combinaciones básicas de la adición. Para ello, se sugiere el uso de juegos, exámenes y otros procedimientos que han demostrado ser eficaces. Algunos maestros acostumbran hacer copias mimeografiadas de una lista de combinaciones (sin las respuestas) que utilizan para exámenes cortos todos los días. También, mantienen al día tablas que muestren el progreso de cada estudiante.

Ahora, puede utilizarse el Conjunto de problemas 6. Se proyectó para que sirva de ayuda a los estudiantes para ver las relaciones entre las combinaciones y, en algunos casos, recordar las combinaciones que se han olvidado.

Deben recalcarse las siguientes ideas:

(1) Para sumar 9 a un número cualquiera, puede sumarse 10 y, luego, restar 1, porque $10 - 1$ es otro nombre para 9.

(2) Recomiéndose a los estudiantes que utilicen enunciados como, "Debido a que $5 + 5 = 10$, se deduce que $5 + 6 = 11$".

(3) Ayúdese a los estudiantes a explicar razonadamente sus respuestas. Para la afirmación "Debido a que $6 + 6 = 12$, se deduce que $6 + 7 = 13$", el maestro no debe esperar una respuesta en esta forma: "Si un sumando no se altera y al otro se le añade 1, la suma se altera en 1". Sin embargo, el maestro puede resumir la idea con estas palabras y tratar de que los estudiantes la expresen cada vez mejor para que la puedan entender claramente.

Utilícense estas relaciones como maneras de considerar números. El resultado final debe ser que los estudiantes sepan de memoria las combinaciones básicas de la adición.

Conjunto de problemas 6

La adición de números, como la de encasillado, puede hacerse rápidamente si conoces las combinaciones básicas de la adición. Deberías poder recordar todas las combinaciones básicas de la adición. He aquí unas pocas ideas en caso de que se te hayan olvidado algunos datos:

A		
	346	901
	+ 198	+ 648

1. Completa las proposiciones siguientes:

   (a) Puesto que $7 + 7 = 14$, $7 + 8 =$ (15)

   (b) Puesto que $6 + 6 = 12$, $6 + 7 =$ (13)

   (c) Puesto que $5 + 5 = 10$, $6 + 5 =$ (11)

   (d) Puesto que $8 + 8 = 16$, $8 + 7 =$ (15)

2. (a) Sabes que $6 + 8 = 14$. ¿Cómo hallas $6 + 9$?

   (6+9 es uno más que 6+8.)

   (b) Sabes que $9 + 4 = 13$. ¿Cómo hallas $9 + 5$?

   (9+5 es uno más que 9+4.)

   (c) Sabes que $7 + 9 = 16$. ¿Cómo hallas $8 + 9$?

   (8+9 es uno más que 7+9.)

3. Completa los enunciados siguientes:

   (a) Puesto que $10 + 9 = 19$, $9 + 9 =$ (18)

   (b) Puesto que $10 + 8 = 18$, $9 + 8 =$ (17)

   (c) Puesto que $7 + 10 = 17$, $7 + 9 =$ (16)

   (d) Menciona una manera de agregarle 9 a un número cualquiera. (Agréguesele 10 y, entonces, réstesele 1.)

4. Completa los siguientes enunciados:

   (a) $0 + 5 =$ (5)

   (b) $9 + 0 =$ (9)

   (c) $6 + 0 =$ (6)

   Si añades 0 a un número cualquiera, ¿cuál es la suma?

   (El número al que se añadió 0.)

5. Completa los siguientes enunciados:

   (a) $9 + 1 =$ (10)

   (b) $7 + 1 =$ (8)

   (c) $1 + 8 =$ (9)

   Si añades 1 a un número cualquiera, ¿cuál es la suma?

   (Uno más que el número.)

6. Examina la tabla de adición que hiciste. Nombra los números en cada uno de los conjuntos que se describen a continuación:

   (a) Los miembros del conjunto A se hallan, sumando 9 a cada uno de los números en el conjunto {0, 1, 2, 3, ..., 9}. (9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18)

   (b) Los miembros del conjunto B se obtienen, añadiendo 7 a cada uno de los números en el conjunto {0, 1, 2, 3, ..., 9}. (7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16)

   (c) Los miembros del conjunto C se obtienen agregando 6 a cada uno de los números en el conjunto {0, 1, 2, 3, ..., 9}. (6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15)

7. PROBLEMA DIFICIL: Utiliza tu respuesta al ejercicio 6 para hallar:

(a) $A \cap B$ (d) $A \cup B$

(b) $A \cap C$ (e) $A \cup C$

(c) $B \cap C$ (f) $B \cup C$

a) $A \cap B = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$

b) $A \cap C = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

c) $B \cap C = \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

d) $A \cup B = \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$

e) $A \cup C = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$

f) $B \cup C = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$

8. PROBLEMA DIFICIL

(a) Utiliza tu respuesta al ejercicio 6 para hallar

$(A \cap B) \cap (B \cap C)$. $\{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

(b) ¿Es tu respuesta para el ejercicio (a) la misma que para algún ejercicio del problema 7? (b)

LA PROPIEDAD CONMUTATIVA DE LA ADICION

Objetivo: Ayudar a los estudiantes a comprender que en la adición, el orden de los sumandos puede cambiarse, sin que se altere el resultado ($3 + 5 = 5 + 3$; es decir, en general, $a + b = b + a$, donde a y b son números cardinales cualesquiera).

Materiales necesarios: Bloques u otros objetos, monedas (monedas de diez centavos y de veinticinco centavos)

Vocabulario: Propiedad conmutativa de la adición

Sugerencias para la enseñanza:

Es importante que los estudiantes comprendan y utilicen la propiedad conmutativa de la adición. Esta propiedad se llama a veces <u>propiedad del orden</u> de la adición; sin embargo, aquí emplearemos el término <u>propiedad conmutativa</u> de la adición.

La siguiente explicación requiere el uso de ejemplos en los que se combinen objetos y que el maestro puede tratar de que los den los mismos estudiantes:

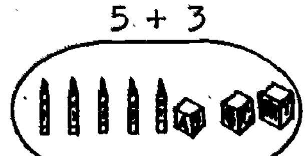
Quizás, el maestro quiera utilizar algunos materiales para demostrar el efecto del orden y de la agrupación en casos de naturaleza numérica y no numérica. Utilícense objetos como tizas o tiras de cartulina, lápices ristra de cuentas, etc.

La lección puede iniciarse, colocando juntos dos conjuntos de objetos, por ejemplo, lápices de colores y bloques, de dos maneras diferentes. Los siguientes dibujos indican una manera de utilizar los dos conjuntos:

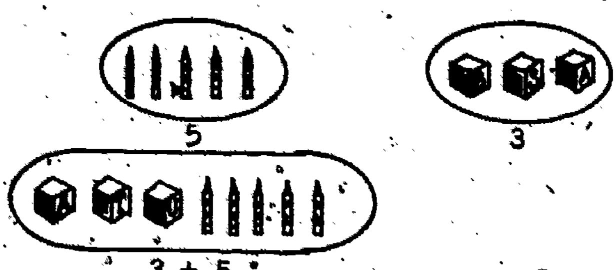
1. 

5 3

5 + 3



8 objetos en la reunión



8 objetos en la reunión

La observación importante a hacer es que el orden de colocación de los conjuntos no afecta al resultado. En cualquiera de los casos, la reunión de los 2 conjuntos disyuntos consiste en 8 miembros: 5 tizas y 3 bloques. Utilícense ejemplos parecidos para afianzar la idea de que la suma de dos números no es afectada por el orden en que se sumen.

En la página E79, se describen ejemplos numéricos y no numéricos de combinaciones de cosas y las observaciones de los resultados. Estos ejemplos deben analizarse en la clase.

La idea importante que se pone de manifiesto en esta lección es que el orden al sumar dos números cardinales no influye en la suma. Utilícense varios ejemplos, preguntando: "¿Es cierto que $7 + 1 = 1 + 7$, $0 + 6 = 6 + 0$, $12 + 21 = 21 + 12$, $96 + 69 = 69 + 96$, etc.?" Deben presentarse varios ejemplos, hasta que los estudiantes entiendan, generalicen y utilicen libremente la propiedad. Además, deben dar ejemplos y darse cuenta de que $a + b = b + a$ es un enunciado acerca de todos los pares de números cardinales.

Deben hacerse experimentos para determinar si esta propiedad se aplica a la sustracción. Al tratar de determinar si $5 - 2 = 2 - 5$, el maestro puede ayudar a los estudiantes a comprender que $3 = 5 - 2$, pero que no se conoce número cardinal alguno que represente $2 - 5$. Quizás, el maestro quiera ilustrar esto, colocando 2 lápices dentro de una caja y tratando de sacar 5 y, después, colocando 5 lápices dentro de la caja y tratando de sacar 2.

No nos proponemos aquí estudiar "los números negativos". Sin embargo, el maestro puede anticiparles a los estudiantes que llegará un momemto en que utilizarán números que les permitan hallar el número n, de manera que $2 - 5 = n$ sea un enunciado matemático cierto.

Asígnese el Conjunto de problemas 7, después de haber presentado la explicación anterior y estudiado la página E79.

LA PROPIEDAD CONMUTATIVA DE LA ADICION

1. Suponte que tienes una moneda de diez centavos y una de veinticinco centavos y vas a pagar con dichas monedas un libro de. 35¢. ¿Influirá en la cantidad que has de pagar el orden en que le das las monedas al dependiente? (no)
2. Usa las letras "S" y "E" para formar dos palabras. ¿Cuáles son las palabras? (SE, ES) ¿Cambió el resultado el orden de las letras? (sí)
3. ¿Es el resultado el mismo para cada suma en (a)?; (sí) ¿en (b)?; (sí) ¿y en (c)? (sí)

(a)	(b)	(c)
7 + 6, 6 + 7	50 + 47, 47 + 50	0 + 891, 891 + 0

¿Cómo difieren las sumas en (a)?; ¿en (b)?; ¿y en (c)?
(El orden de los sumandos es diferente.)

4. (a) ¿Es $400 + 500 = 500 + 400$? (sí)

   (b) ¿Es $692 + 8 = 8 + 692$? (sí)

   (c) ¿Es $1,000,000 + 0 = 0 + 1,000,000$? (sí)

   (d) Si n es un número cardinal, ¿es $n + 10 = 10 + n$? (sí)

LA ADICION ES UNA OPERACION CONMUTATIVA

Por ejemplo, $3 + 5 = 8$
$5 + 3 = 8$

La suma es la misma, aun cuando se altere el orden de los sumandos. Así, podemos escribir:

$$3 + 5 = 5 + 3$$

Conjunto de problemas 7

1. ¿Es $5 - 2 = 2 - 5$? (no) ¿Es $9 - 7 = 7 - 9$? (no) ¿Sabes qué número es $2 - 5$? (no) ¿Será válida para la sustracción la propiedad conmutativa? (no)

2. Un maestro estaba leyendo ante una clase, "¿Qué número representará n para que $637 + 596 = n$?" Jaime no oyó el 637 y, así, escribió: $596 + \_\_\_\_ = n$. Entonces, le pidió al maestro que le dijera el primer sumando. Después, escribió $596 + 637 = n$. ¿Será su resultado el mismo que el del alumno que escribió $637 + 596 = n$? (sí) ¿Por qué? (La adición es conmutativa.)

3. (a) ¿Es $13 - 11 = 11 - 13$? (no)

   (b) ¿Es $20 - 10 = 10 - 20$? (no)

   (c) Si $n = 10$, ¿es $n + 6 = 6 + n$? (sí)

   (d) Si $n = 20$, ¿es $n + 6 = 6 + n$? (sí)

   Indica qué número representa n para que $n - 6 = 6 - n$. (6)

4. ¿Cuáles de los siguientes son enunciados matemáticos ciertos? (a, b, d, e)

   (a) $18 + 11 = 11 + 18$

   (b) $203 + 401 = 200 + 404$

   (c) $6 + 5 = 7 + 4$

   (d) $1,207 + 2,011 = 1,102 + 7,021$

   (e) $19 + 91 = 91 + 19$

   (f) $95 + 59 = 59 + 59$

5. ¿Cuáles de los enunciados matemáticos en el problema 4 ilustran la propiedad conmutativa? (a, e)

6. **PROBLEMA DIFICIL:** (a) Escribe los numerales de números cardinales (si es posible), para completar la siguiente tabla:

Números con los cuales se efectúa la operación	Resultado	Operación utilizada
15, 7	(22)	Adición
7, 15	(22)	Adición
15, 7	(8)	Sustracción

(b) ¿Hay un número cardinal para cada blanco? (Sí) Si no lo hay, indica por qué.

7. **PROBLEMA DIFICIL:** (a) ¿Qué número cardinal representará n para que $0 + n = n + 0$? (Cualquier número cardinal)

(b) ¿Qué número cardinal representará n para que $12 - n = n - 12$? (12)

(c) ¿Qué números cardinales representarán x e y para que $x + y = y + x$? (Cualquier número cardinal)

CONSIDERACION DE LAS COMBINACIONES BASICAS DE LA SUSTRACCION

Objetivo: Ayudar a los estudiantes a aprender los datos de la sustracción y comprender la sustracción como una operación para hallar el sumando desconocido, cuando se conocen la suma y un sumando.

Vocabulario: Sumando conocido, sumando desconocido

Sugerencias para la enseñanza:

En esta sección, se presta atención particular a enunciados matemáticos como $9 - 5 = n$. Tales enunciados se leen "9 menos 5 es igual a n"; "9 disminuido en 5 es igual a n"; "5 restado de 9 es igual a n". No importa la manera de leer estos enunciados, la relación entre la adición y la sustracción se recalca en esta unidad, pensando: "¿Qué número sumado a 5 da 9?" En este enunciado, 9 es la suma, 5 es el sumando conocido y el resultado es el sumando desconocido. Recordando que $5 + 4 = 9$, el estudiante puede determinar el sumando desconocido que representa n. De modo que si un estudiante conoce la adición, tendrá la base necesaria para aprender las combinaciones básicas de la sustracción.

También, se procura especialmente ayudar a los estudiantes a utilizar el nuevo vocabulario, en lugar del vocabulario corriente que incluye los términos minuendo, sustraendo y diferencia. Como maestros, al pensar acerca de la adición y la sustracción, nos damos cuenta de que la adición se considera como la operación fundamental. Relacionar la sustracción con la adición, consitutye un esfuerzo para ayudar a los estudiantes a reducir la cantidad de combinaciones que tienen que aprenderse de memoria y el número de palabras nuevas, para ayudarlos así a darse cuenta de varias relaciones que de otro modo no serían evidentes. Por tanto, debe tratarse de que los estudiantes piensen: "¿Qué número sumado a 7 es 12?", para calcular $12 - 7$. Al mismo tiempo, a los estudiantes que piensan "12 menos 7" no se les debe obligar a cambiar.

En esta unidad, debemos dirigir primero nuestra atención a ayudar a los estudiantes a desarrollar una nueva manera de considerar la sustracción en relación con la adición. Un análisis en clase podría conducirse de manera parecida a la que presentamos a continuación.

En el enunciado matemático, $6 + 7 = 13$, ¿cuáles son los sumandos? (6 y 7) ¿Cuál es la suma? (13) En el enunciado matemático, $13 - 6 = 7$, a 13 le llamaremos la suma; 6 y 7 se llaman sumandos. ¿Cuáles son los sumandos en $3 + 8 = 11$?; ¿en $11 - 3 = 8$?; ¿y en $11 - 8 = 3$? (3, 8; 3, 8; 8, 3)

Ejemplos como los siguientes pueden servir de ayuda: $8 + n = 17$, $n + 7 = 13$; $15 - 6 = n$; $11 - 4 = n$; $n = 14 - 8$; $5 + n = 14$; $n = 16 - 7$; $n + 8 = 15$.

Supongamos que nuestro enunciado matemático es $11 + n = 12$. ¿Cuáles son los sumandos? (Un sumando es 11. El otro sumando es el número que representa n.) ¿Cuál es la suma? (12) ¿Cuál es la suma en $n = 12 - 11$? (12) ¿Cuáles son los sumandos? (Un sumando es el número representado por n. El otro sumando es 11.) En $n + 11 = 12$ y $n = 12 - 11$, ¿son los números 11 y el número representado por n los sumandos en ambos enunciados matemáticos? (Sí) ¿Cuál es el sumando conocido? (11) ¿Cuál es el sumando descohocido? (El número representado por n.)

Elíjanse otros ejemplos parecidos y háganse preguntas como las del análisis anterior, hasta que los estudiantes puedan indicar con facilidad cuáles son los sumandos y cuál es la suma.

Entonces, los alumnos deben completar la Tabla de sustracción de la página E83. A continuación, se dan las instrucciones para completar dicha tabla: Cada número de la fila superior debe restarse de cada uno de los números de la primera columna. El resultado de $0 - 0$ se escribe debajo del 0 de la fila superior. El resultado de $1 - 0$ se escribe a la derecha del 1, y así sucesivamente. Entonces, se resta el 1 de la fila superior de cada uno de los números de la primera columna. La primera de estas sustracciones es 0 - 1. Pregúntese a los estudiantes si esto es posible. La tabla sólo se puede llenar parcialmente, porque no hay resultados para sustracciones como 0 - 1, 3 - 5, 6 - 9 y 2 - 7, cuando utilizamos solamente números cardinales. Escríbase 0 - 1 = n es la pizarra. Pídase a los alumnos que identifiquen la suma (0) y los sumandos (1 y n). Ayúdeseles a ver que no hay número cardinal alguno que n pueda representar, tal que 1 + n = 0. Hágase lo mismo con otros ejemplos, como 3 - 5 = n y 6 - 5 = n.

Este trabajo deberá servir para afianzar el buen uso de los términos "sumando" y "suma", en relación con la sustracción. Más adelante en este capítulo, se presentará más práctica.

CONSIDERACION DE LAS COMBINACIONES BASICAS DE LA SUSTRACCION

La sustracción es la operación de hallar el sumando desconocido, si conocemos la suma y uno de los sumandos. Por ejemplo, si $8 + n = 12$, entonces 8 es un sumando y n es el sumando desconocido. Restamos 8 de 12 para encontrar el número que n representa.

Expresamos la sustracción así:

$9 - 5 = 4$ $\qquad \begin{array}{r} 9 \\ -\underline{5} \\ 4 \end{array}$

Los nombres de las partes de un enunciado de sustracción son

$$\underset{\text{suma}}{\underset{\uparrow}{9}} - \underset{\text{sumando}}{\underset{\uparrow}{5}} = \underset{\text{sumando}}{\underset{\uparrow}{4}}$$

Leemos la sustracción así: 9 menos 5 es igual a 4 ó 5 restado de 9 es 4.

En cada uno de los siguientes ejemplos, di qué números son sumandos y qué número es la suma:

(a) $15 - 9 = 6$	(c) $n + 5 = 13$	(e) $17 - n = 8$
(b) $9 = 13 - 4$	(d) $3 + n = 12$	(f) $14 - 8 = n$

Conoces varias combinaciones básicas de la sustracción. Llamaremos a la tabla en que las anotamos una tabla de sustracción. Copia la tabla de la próxima página y complétala.

Empiezas con el cero en la fila de arriba. Lo restas de cada número de la primera columna. Por ejemplo, $0 - 0 = 0$, pones el resultado, 0, a la derecha del cero que está en la primera columna, $1 - 0 = 1$, escribes 1 a la derecha del 1, y así sucesivamente. Sigue adelante. Para obtener las respuestas, razona así en el caso de $8 - 5$: ¿Qué es lo que sumado a 5 da 8? Cada uno de los números de la primera columna es una suma. Todos los otros números de la tabla son sumandos.

E83

Tabla de sustracción

-	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	(0)									
1	(1)	(0)								
2	(2)	(1)	(0)							
3	(3)	(2)	(1)	(0)						
4	(4)	(3)	(2)	(1)	(0)					
5	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)	(0)				
6	(6)	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)	(0)			
7	(7)	(6)	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)	(0)		
8	(8)	(7)	(6)	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)	(0)	
9	(9)	(8)	(7)	(6)	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)	(0)

> Después de completar la tabla de sustracción, deben destacarse ciertas relaciones. A continuación, se dan algunas sugerencias para un análisis en clase.

He aquí algunas cuestiones que debemos investigar:

1. ¿Es $4 - 3 = 3 - 4$? (No) ¿Es $6 - 2 = 2 - 6$? (No)

2. ¿Por qué no podemos obtener el resultado de $3 - 5$? (No hay número cardinal alguno que sumado a 5 dé 3.) (Los estudiantes pueden tratar de hallar el número en algún conjunto que al combinarse con un conjunto de 5 miembros nos dé un conjunto de 3 miembros.)

3. ¿Cómo sabemos que $7 - 4 = 3$? (Acéptese la siguiente como la mejor respuesta: "Sabemos que es 3, porque $4 + 3 = 7$ ó $3 + 4 = 7$".)

4. ¿Es el sumando conocido o el desconocido en algún caso mayor que la suma? (No) ¿Podrá ser alguno de ellos igual a la suma? (Sí, por ejemplo, en $7 - 7 = 0$, ó $3 - 3 = 0$, ó $7 - 0 = 7$, ó $3 - 0 = 3$.

> Ahora, utilícese el Conjunto de problemas 8 y, también, el Conjunto de problemas 9. Ambos grupos de problemas deben analizarse en clase, después que los estudiantes los hayan resuelto independientemente.
>
> Si el maestro pide a los alumnos que escriban sus respuestas, no debe esperar que las escriban en lenguaje perfecto. A los estudiantes sobresalientes, se les puede pedir que traten de formular sus respuestas en lenguaje perfecto. Esta asignación puede hacerse, en vez de proporcionar práctica innecesaria con los datos. Los Problemas difíciles y el Conjunto de problemas 8 se les puede asignar también a los estudiantes sobresalientes.
>
> El Conjunto de problemas 8 debe hacerse oralmente. Su propósito es ayudar a los alumnos a estudiar sistemáticamente la relación entre la adición y la sustracción.
>
> Quizás, el maestro considere útiles las siguientes preguntas, al estudiar la tabla de la página E85:

Examinen la tabla en la página E85. ¿La han visto antes? (Sí) ¿Cómo la han usado? (Para obtener la suma de dos números cualesquiera del conjunto desde 0 hasta 9.) ¿Dónde se hallan los sumandos, 6 y 7, en el caso de $6 + 7 = 13$? (El 6 está en la columna de la izquierda y el 7 en la fila superior.) ¿Dónde se halla la suma 13? (En el espacio opuesto al 6 que está en la columna de la izquierda y debajo del 7 que está en la fila superior.) ¿Cómo se puede obtener $13 - 6 = n$? Razona: $6 + n = 13$. Pueden hallar el 6 en la columna de la izquierda; entonces, busquen el 13 en la tabla, en la misma columna en que se encontró el 6. El sumando desconocido está en la fila superior, encima del 13. Es el 7.

> Las respuestas a las preguntas anteriores son difíciles para que los estudiantes las puedan expresar, pero pueden indicar la manera de obtener $12 - 7$, $9 - 4$ y otras sustracciones de la tabla, pensando en $7 + n = 12$ y $4 + n = 9$.
>
> Es importante considerar las sustracciones como $12 - 7$, así: "¿Qué número sumado a 7 es 12?" A menos que se haga esto, los estudiantes no se dan cuenta de la relación que hay entre la sustracción y la adición.
>
> Deben presentarse varios ejemplos como los problemas del 4 al 9 del Conjunto de problemas 9. Algunos estudiantes pueden escribir otros ejemplos e intercambiarlos con sus compañeros.
>
> Los estudiantes que no se hayan aprendido de memoria las combinaciones básicas de la adición tendrán dificultad. Proporciónense ejercicios de práctica interesantes, utilícense tarjetas, y hágase que los estudiantes tengan su propio conjunto de éstas. Haga uso de juegos que refuercen el conocimiento de las técnicas. Prepare exámenes cortos, proporcione trabajos interesantes, y utilice otros métodos cualesquiera que se consideren eficaces para ayudar a los estudiantes a aprender de memoria las combinaciones básicas de la operación. Continúe repasando las combinaciones básicas, según sea necesario. A los estudiantes que necesiten práctica, se les puede pedir que escriban enunciados como los de los

problemas 4 al 6 del Conjunto de problemas 9 o escribir otras generalizaciones acerca de las combinaciones básicas.

Deberá proporcionarse suficiente práctica con la escritura de las combinaciones en forma horizontal, como en $9 + 5 = 14$ y $13 - 6 = 7$, pues se utilizará a menudo en los capítulos subsiguientes.

Conjunto de problemas 8

Usa la tabla de sustracción para ayudarte a contestar estas preguntas.

1. ¿Por qué es la misma la primera columna que escribiste que la columna a su izquierda? (Un número no se altera, si se le resta cero. $m - 0 = m$.)
2. ¿Por qué tienden a cero los números de cada fila? (a medida que procedemos hacia la derecha, restamos uno más que el número anterior.)
3. ¿Por qué aumentan los números de cada columna? (El sumando no se altera y la suma se aumenta en 1.)
4. ¿Por qué está vacía una parte de la tabla? (No se puede restar un número mayor de otro menor, utilizando el conjunto de los números cardinales.)
5. Estudia la tabla de sustracción que completaste. Escribe los siguientes conjuntos de números:
   (a) Los miembros del conjunto X son los únicos números posibles que pueden ser sumandos, si la suma es 3.
   (El conjunto X = {0, 1, 2, 3})
   (b) Los miembros del conjunto Y son los únicos números posibles que pueden ser sumandos, si la suma es 7.
   (El conjunto Y = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7})
   (c) Los miembros del conjunto Z son los únicos números posibles que pueden ser sumandos, si la suma es 9.
   (El conjunto Z = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9})
6. PROBLEMA DIFICIL: Utiliza tu respuesta al problema 5 para hallar:

(a) $X \cap Y$	(c) $Y \cap Z$	(e) $X \cup Z$
(b) $X \cap Z$	(d) $X \cap Y$	(f) $Y \cup Z$

a. {0, 1, 2, 3}
b. {0, 1, 2, 3}
c. {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}
d. {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}
e. {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
f. {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

7. PROBLEMA DIFICIL: Utiliza tu respuesta al problema 7 para hallar $(X \cap Y) \cap (Y \cap Z)$. {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}

Conjunto de problemas 9

A	
892	310
- 375	- 184

La sustracción de números como en el encasillado A puede hacerse rápidamente y con seguridad, si conoces las combinaciones básicas de la adición. Deberías poder recordar todos los sumandos desconocidos de la tabla de la adición.

1. Di cómo localizar el sumando desconocido para $9 - 4 = n$; $11 - 7 = n$; $16 - 8 = n$; $8 - 0 = n$; $10 - 3 = n$; $12 - 9 = n$.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

(Para localizar el sumando desconocido para 13 - 6 = n, razonamos 6 + n = 13. Entonces, hallamos 6 en la columna de la izquierda de la tabla. En la fila correspondiente al 6, localizamos 13 y el sumando desconocido, 7, está en la parte superior de la columna que corresponde a ese 13.)

2. Si sabes que $9 + 4 = 13$, ¿qué combinación básica de la sustracción conoces? (13 - 9 = 4) (13 - 4 = 9)
3. Si restas 0 de cualquier número, ¿cuál es el resultado? (El resultado es el número.)
4. He aquí algunas ideas en caso de que hayas olvidado algunas combinaciones básicas. Completa los siguientes enunciados:
   (a) Puesto que $16 - 8 = 8$, $16 - 7 =$ (9)
   (b) Puesto que $13 - 6 = 7$, $13 - 5 =$ (8)
   (c) Puesto que $15 - 8 = 7$, $15 - 9 =$ (6)
   (d) Puesto que $11 - 7 = 4$, $11 - 8 =$ (3)

5. (a) Sabes que $14 - 7 = 7$. ¿Cómo hallas $14 - 8$?
(El resultado es 1 menos que 14 - 7.)

(b) Sabes que $12 - 6 = 6$. ¿Cómo hallas $12 - 5$?
(El resultado es 1 más que 12 - 6.)

(c) Sabes que $15 - 9 = 6$. ¿Cómo hallas $15 - 8$?
(El resultado es 1 más que 15 - 9.)

6. Completa los siguientes enunciados:

(a) Puesto que $18 - 10 = 8$, $18 - 9 =$ (9)

(b) Puesto que $16 - 10 = 6$, $16 - 9 =$ (7)

(c) Puesto que $13 - 10 = 3$, $13 - 9 =$ (4)

(d) Di una manera de restar 9 de cualquier número.
(Se resta 10 del número y se añade 1 al resultado.)

7. (a) Puesto que $13 - 8 = 5$, $13 - 5 =$ (8)

(b) Puesto que $11 - 4 = 7$, $11 - 7 =$ (4)

(c) Puesto que $15 - 6 = 9$, $15 - 9 =$ (6)

8. Si restas 1 de cualquier número natural, ¿cuál es el resultado? (Uno menos que el número natural.)

9. Utilizando solamente los números 12, 5 y 7, enuncia dos adiciones y dos sustracciones.

(5 + 7 = 12   12 - 5 = 7
7 + 5 = 12   12 - 7 = 5)

10. PROBLEMA DIFICIL: El resultado de efectuar la operación de la sustracción con un par de números es 7. Escribe cinco de estos pares. (Cualquier par de números con los que se obtenga el resultado 7 como, por ejemplo, los siguientes pares:

[illegible] = 7   19 - 12 = 7
10 - 3 = 7   143 - 136 = 7
13 - 6 = 7   201 - 194 = 7)
16 - 9 = 7

ENUNCIADOS MATEMATICOS EN QUE SE UTILIZA LA RECTA NUMERICA

Objetivo: Ayudar a los estudiantes a darse cuenta de las relaciones de ordenación y a comprender los enunciados matemáticos

Sugerencias para la enseñanza:

> El material que se presenta en la página E87 constituye un repaso del significado de los símbolos $<$ y $>$. Estos son los símbolos que representan las relaciones de ordenación menor que o mayor que. Pídase a los estudiantes que lean el material de la página E87. Escríbanse en la pizarra algunos enunciados como $5 > 3$. También, dibújese una recta numérica en la pizarra. Primero, hágase ver claramente que, por ejemplo, 5 es mayor que 3 (ó 3 es menor que 5), porque hay un número 2 que sumado a 3 da 5 como suma. (En general, si a y b representan dos números cualesquiera, entonces, $b > a$, si hay algún número c tal que $a + c = b$. Si $b > a$, entonces, $a < b$.) Después, utilícese la recta numérica para ayudar a los estudiantes a ver que el mayor de dos números es el que está más a la derecha en la recta numérica. Recálquese que un número es mayor que otro, porque un número puede sumarse al más pequeño para obtener el más grande.

¿Habrá un número que podamos sumar a 3 para obtener 5 como suma? (Sí, el número 2) ¿Cuál de los números, 5 y 3, es el mayor? ($5 > 3$ y $3 < 5$) ¿Cuál de los dos números, 5 ó 3, está a la derecha del otro en la recta numérica? (5 está a la derecha de 3; 3 está a la izquierda de 5.)

> Utilícense otros ejemplos, si es necesario, para ayudar a los estudiantes a ver que si $6 + 3 = 9$, por ejemplo, entonces, $9 > 6$ y $9 > 3$ y que 9 está a la derecha del 6 y del 3 en la recta numérica.
>
> Utilícense otros ejemplos como $7 > 5$, $8 < 10$, $8 < 5$ y pregúntese a los estudiantes si estos enunciados son ciertos. Pídaseles que hagan enunciados parecidos

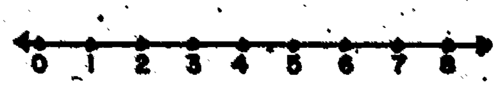
e indiquen si son ciertos o falsos. Ahora, pueden resolver el Conjunto de problemas 10.

Al resolver un problema como el problema 7 (1200 + 1000) ____ (1200 + 2000), los estudiantes deben estudiarlo detenidamente y evitar hacer cálculos. Aquí, puede señalarse que es fácil determinar que 1200 + 1000 es menor que 1200 + 2000, sin tener que obtener el resultado de cada operación.

E87

ENUNCIADOS MATEMATICOS EN QUE SE UTILIZA LA RECTA NUMERICA

Utilizando la recta numérica



Recuerdas que esto se llama una recta numérica.

Podemos sumar 2 y 3 para obtener 5. "5 es mayor que 2" y "5 es mayor que 3". Escribimos $5 > 2$ y $5 > 3$.

Puesto que $5 > 2$, 5 está a la derecha del 2 en la recta numérica y puesto que $5 > 3$, 5 está a la derecha del 3 en la recta numérica.

Supongamos que se suman dos números cardinales y ninguno es 0. Obtenemos una suma. La suma es mayor que cualquiera de los dos números que sumamos. La suma es un número a la derecha de cualquiera de los dos números, en la recta numérica.

"2 es menor que 5", porque podemos agregar el número 3 a 2 y obtener 5 como suma. 2 está a la izquierda de 5 en la recta numérica. Escribimos $2 < 5$ y lo leemos "2 es menor que 5".

"3 es menor que 5", porque podemos añadir el número 2 a 3 para obtener 5 como suma. 3 está a la izquierda de 5 en la recta numérica. Escribimos $3 < 5$ y lo leemos "3 es menor que 5".

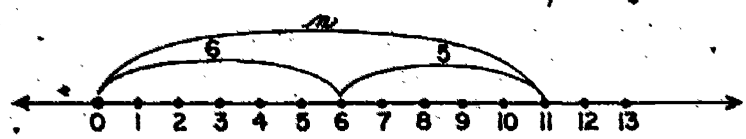
Conjunto de problemas 10

Copia cada uno de los siguientes enunciados; escribe $>$ o $<$ en cada blanco de manera que cada enunciado matemático sea cierto:

1. 8 ($>$) 6
2. $3 + 4$ ($>$) 6
3. $(11 + 9)$ ($>$) $(11 + 8)$
4. $(30 + 20)$ ($<$) $(31 + 21)$
5. $(53 + 40)$ ($<$) $(53 + 41)$
6. $(200 + 800)$ ($>$) $(200 + 700)$
7. $(1,200 + 1,000)$ ($<$) $(1,200 + 2,000)$

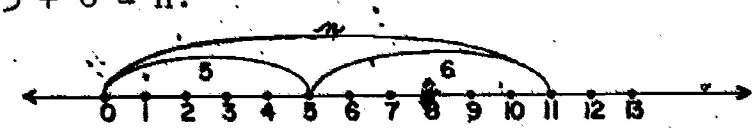
REPRESENTACIONES DE LA RECTA NUMERICA Y ENUNCIADOS MATEMATICOS.

Ahora, los estudiantes aprenderán a utilizar una recta numérica para representar enunciados matemáticos. Por ejemplo, $6 + 5 = n$ puede representarse así:



Indíquese a los estudiantes cómo las líneas curvas representan el enunciado. Las líneas curvas cortas representan los sumandos 6 y 5. La línea curva larga representa la suma.

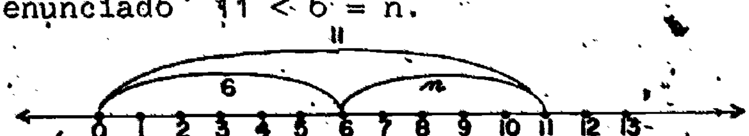
Ahora, representaremos el enunciado $5 + 6 = n$.



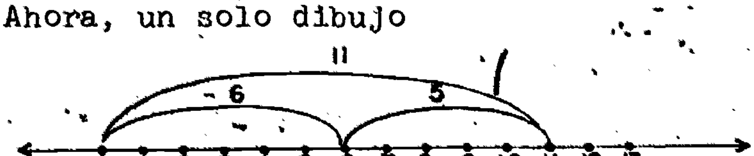
Como n representa el mismo número en las dos adiciones, podemos utilizar cualquiera de los dibujos para representar $5 + 6 = n$ y $6 + 5 = n$. El número representado por n es 11.

Quizás, el maestro tenga que considerar varios ejemplos diferentes y pedirles a los alumnos que hagan varios dibujos para obtener otro que represente los dos enunciados $6 + 5 = 11$ y $5 + 6 = 11$. Obsérvese el uso que se da aquí a la propiedad conmutativa de la adición.

Ahora, supongamos que representamos el enunciado $11 < 6 = n$.



El número representado por n es 5. Ahora, un solo dibujo

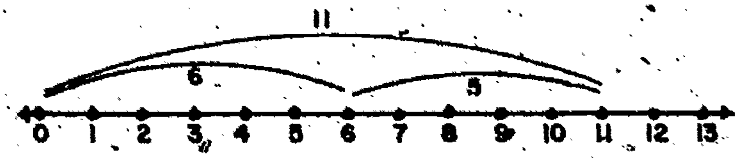


representa los cuatro enunciados

$$6 + 5 = 11$$
$$5 + 6 = 11$$
$$11 - 5 = 6$$
y
$$11 - 6 = 5$$

Después de esta Exploración, los estudiantes deben resolver el Conjunto de problemas 11.

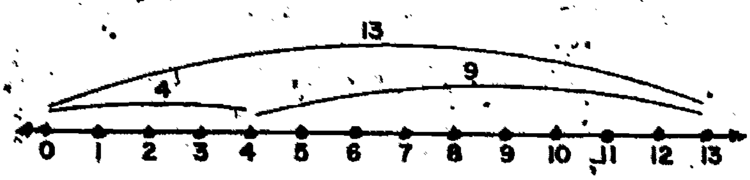
REPRESENTACIONES DE LA RECTA NUMERICA Y ENUNCIADOS MATEMATICOS



Una recta numérica puede utilizarse para sugerir enunciados matemáticos. Las dos líneas cortas por encima de la recta numérica sugieren los dos sumandos. La línea larga sugiere la suma. Los enunciados sugeridos son

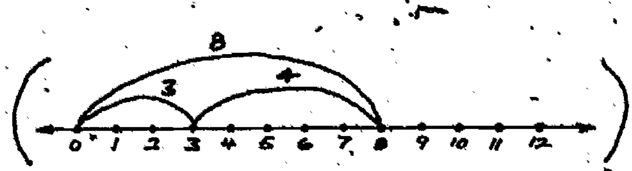
$$6 + 5 = 11$$
$$5 + 6 = 11$$
$$11 - 5 = 6$$
$$11 - 6 = 5$$

Conjunto de problemas 11



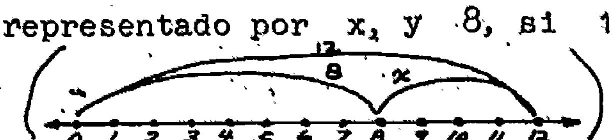
1. Dibuja una recta numérica como se indica anteriormente. Dibuja líneas curvas que sugieran el enunciado matemático $4 + 9 = n$.
   (a) ¿Cuál es la suma que representa n? (13)
   (b) ¿Es mayor que 4? (Sí)
   (c) ¿Es mayor que 9? (Sí)
   (d) Cuando se suman dos números cardinales, ¿es la suma siempre mayor que cualquiera de los sumandos? (No)
   (e) Si tu respuesta a (d) es "No", da un ejemplo. (4+0=4. Si un sumando es 0, el otro sumando es igual a la suma)

2. Dibuja una recta numérica como la del problema 1.
Usa líneas para representar la sustracción $8 - 3 = t$.
(a) ¿Cuál es otro nombre para el número que t representa?
(5)

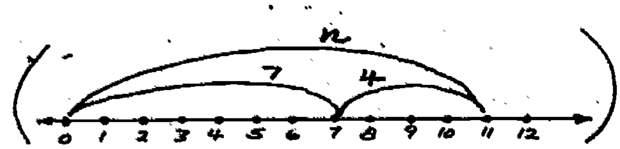


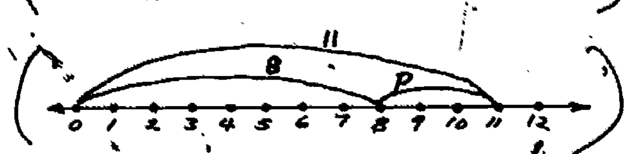
(b) ¿Es el sumando desconocido, representado por t, mayor que la suma? (no)
(c) ¿Puede alguna vez el sumando desconocido ser igual a la suma? (sí)

3. (a) ¿Cuántas unidades deben marcarse en una recta numérica para que puedas representar el enunciado matemático $12 - x = 8$? (12)
(b) Dibuja una recta numérica. Utiliza líneas para sugerir 12, el número representado por x, y 8, si $12 - x = 8$.



4. Dibuja rectas numéricas para sugerir cada uno de los enunciados matemáticos siguientes:
(a) $7 + 4 = n$
(b) $p + 5 = 9$
(c) $8 + p = 11$.





PROBLEMAS DIFICILES

5. ¿Cuántas unidades deben marcarse en una recta numérica para representar el enunciado matemático $140 - s = 40$? (140)
6. ¿Cuántas unidades deben marcarse en una recta numérica para representar el enunciado matemático $p + 17 = 30$? (30)
7. ¿Cuántas unidades deben marcarse en una recta numérica para representar el enunciado matemático $n - 29 = 13$? (42)

MAS ENUNCIADOS MATEMATICOS

Objetivo: Tratar de lograr que los estudiantes (a) se den cuenta clara de las relaciones numéricas al identificar los sumandos y las sumas en los enunciados matemáticos, (b) aprendan a determinar el número desconocido representado en el enunciado y (c) aprendan a identificar los sumandos y las sumas representadas por los diagramas de la recta numérica.

Sugerencias para la enseñanza:

El maestro puede iniciar esta lección, escribiendo en la pizarra algunos enunciados como $5 + n = 7$, $n = 7 - 5$, $5 = 7 - n$ y $n + 5 = 7$. Pídase a los estudiantes que indiquen si 5, 7 y n en los enunciados anteriores representan una suma, un sumando, un sumando desconocido o una suma desconocida. Pídase que dibujen rectas numéricas para representar los números 5, 7 y n; y que hallen el sumando desconocido en cada caso. He aquí algunos ejemplos de preguntas:

(1) En $5 + n = 7$, $n = 2$, porque $5 + 2 = 7$.

(2) En $5 = 7 - n$, $n = 2$, porque $7 - 2 = 5$. O, los estudiantes pueden pensar que 5 y n son los sumandos y 7 es la suma. De modo que $5 + 2 = 7$.

(3) En $n + 5 = 7$, $n = 2$, porque $2 + 5 = 7$.

La clave para hallar el número que n representa en estos enunciados es determinar si cada número es una suma o un sumando. Si se logra esto, los estudiantes pueden confiar en que comprenden la relación entre la adición y la sustracción para obtener respuestas. Deben saber lo siguiente:

(1) La adición es una operación para obtener la suma, cuando se conocen los dos sumandos.

(2) La sustracción es una operación para obtener un sumando desconocido, cuando se conocen la suma y un sumando.

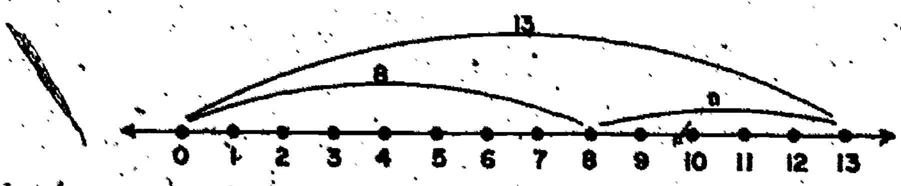
Es importante que comprendan estas ideas. La mayoría de los estudiantes pueden contestar la pregunta: "¿Qué número representará n para que el enunciado matemático $2 + n = 8$ sea cierto?" Ya se han aprendido de memoria la respuesta, $2 + 6 = 8$. Sin embargo, deben conocer la generalización para contestar la pregunta "¿Qué número deberá ser n, para que el enunciado matemático $82 + n = 136$ sea cierto?" En este caso, no saben la respuesta de memoria. Deben darse cuenta de que 136 es la suma y que n y 82 son los sumandos y pensar "$n = 136 - 82$". Después de escribir $n = 136 - 82$, pueden utilizarse las reglas de sustracción para obtener n.

Utilícense diversos tipos de respuestas, como $3 + n = 8$, $n = 8 - 3$, $n + 3 = 8$ y $8 - n = 3$. Todas estas respuestas representan una relación entre dos sumandos 3 y n y una suma 8. En cada caso, $n = 5$. El maestro puede escribir un enunciado como $4 + n = 9$ y pedir a los estudiantes que indiquen otras maneras de escribirla. (Respuesta: $n + 4 = 9$, $9 - n = 4$.) El maestro puede pedir a los estudiantes que escriban enunciados como $n + 2 = 8$ ó $6 = p + 3$, utilizando el signo de sustracción. ($n = 8 - 2$, $2 = 8 - n$) También, puede pedírseles que escriban $n = 10 - 4$ ó $3 = 10 - p$, utilizando el signo de adición. ($n + 4 = 10$, $4 + n = 10$)

En el problema 12 del Conjunto de problemas 12, los enunciados (a) y (b) pueden ser enunciados matemáticos ciertos. Sin embargo, en el enunciado (a), no hay ningún número cardinal que pueda restarse de 20 para obtener 30. En el enunciado (b) no hay ningún número cardinal que sumado a 30 dé 20.

MAS ENUNCIADOS MATEMATICOS

Conjunto de problemas 12



1. Esta recta numérica sugiere $n + 8 = 13$ ó $8 + n = 13$. ¿Sugiere también $n = 13 - 8$? Para responder a la pregunta "¿Qué número es el sumando desconocido n en $n + 8 = 13$?", podrás pensar: "¿Qué número sumado a 8 es 13?" ¿Podrás también pensar: "n es 13 menos 8?" (Sí)
2. Determina la operación que debe utilizarse para contestar la pregunta "¿Qué número será el sumando desconocido para que cada uno de estos enunciados matemáticos sea cierto?" (Sustracción) En cada uno, di qué números son sumandos y cuál es la suma. Escribe tus respuestas así: n y 7, sumandos; 18, suma.

(a) $n + 7 = 18$

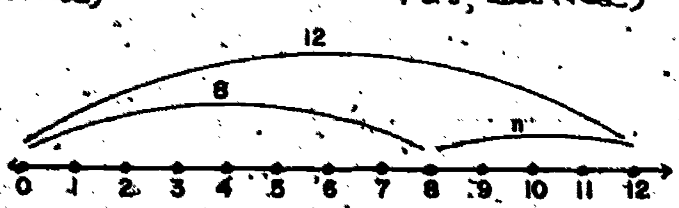
(b) $g = 3,649 - 1,856$
(g y 1,856, sumandos; 3,649, suma)

(c) $p + 364 = 982$
(p y 364, sumandos; 982, suma)

(d) $n = 436 - 194$
(n y 194, sumandos; 436, suma)

(e) $s + 824 = 1,726$
(s y 824, sumandos; 1,726, suma)

(f) $q = 728 - 475$
(q y 475, sumandos; 728, suma)



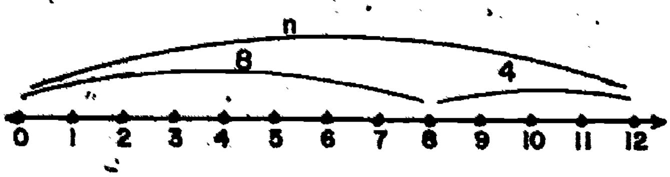
3. La recta numérica anterior sugiere $12 - n = 8$ ó $12 - 8 = n$. ¿Sugiere también $8 + n = 12$? Para contestar la pregunta "¿Qué número es el sumando desconocido n en $12 - n = 8$?",

puedes pensar: "¿Qué número añadido a 8 es 12?" ¿Podrás también pensar: "n es 12 menos 8"? (Sí)

4. Determina la operación que se usa para contestar la pregunta "¿Qué número será el sumando desconocido para que cada uno de los enunciados matemáticos siguientes sea cierto?" (La sustracción)

(a) $15 - n = 11$ (c) $20 - p = 9$ (e) $13 - q = 8$

(b) $11 + n = 15$ (d) $9 + p = 20$ (f) $8 + q = 13$



5. La recta numérica anterior representa $n = 8 + 4$. ¿Sugiere también $n - 4 = 8$?; ¿$n - 8 = 4$?; ¿y, además, $4 + 8 = n$? (Sí).

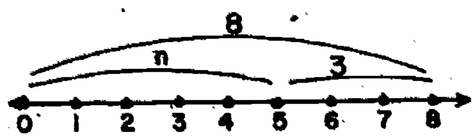
6. Determina la operación que debe utilizarse para contestar la pregunta "¿Qué número será la suma para que cada uno de estos enunciados matemáticos sea cierto?" (La adición)

(a) $x - 6 = 10$ (c) $y - 15 = 25$ (e) $z - 7 = 8$

(b) $x = 10 + 6$ (d) $y = 15 + 25$ (f) $z = 7 + 8$

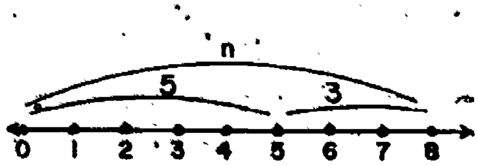
7. Escribe cuatro enunciados matemáticos sugeridos por cada representación.

(a)

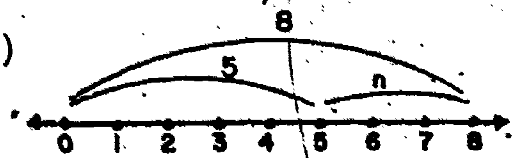


$m + 3 = 8$
$3 + m = 8$
$8 - 3 = m$
$8 - m = 3$

(b)



$5 + 3 = m$
$3 + 5 = m$
$m - 5 = 3$
$m - 3 = 5$

(c) 

$$\begin{pmatrix} n + 5 = 8 \\ 5 + n = 8 \\ 8 - 5 = n \\ 8 - n = 5 \end{pmatrix}$$

8. En cada enunciado matemático, determina qué números son sumandos y cuál es la suma. Di, luego, qué operación utilizarías para hallar el número que p representa. El ejercicio (a) se hizo como ejemplo.

(a) $p = 13 - 7$

p y 7 son los sumandos, 13 es la suma. Sustracción.

(b) $p + 800 = 1,743$

(p y 800 son los sumandos, 1,743 es la suma. Sustracción.)

(c) $67 + p = 136$

(67 y p son los sumandos, 136 es la suma. Sustracción)

(d) $p - 76 = 113$

(76 y 113 son los sumandos, p es la suma. Adición)

(e) $p - 39 = 206$

(39 y 206 son los sumandos, p es la suma. Adición)

(f) $p - 411 = 247$

(411 y 247 son los sumandos, p es la suma. Adición)

(g) $813 - p = 542$

(p y 542 son los sumandos, 813 es la suma. Sustracción)

(h) $247 - p = 76$

(p y 76 son los sumandos, 247 es la suma. Sustracción)

(i) $320 - p = 106$

(p y 106 son los sumandos, 320 es la suma. Sustracción)

(j) $p - 40 = 630$

(40 y 630 son los sumandos, p es la suma. Adición)

9. ¿Qué número representará p para que cada enunciado matemático sea cierto?

(a) $10 + p = 30$ (20)   (c) $0 = p + 0$ (0)   (e) $p = 15 - 5$ (10)

(b) $0 - p = 0$ (0)   (d) $10 - p = 10$ (0)   (f) $15 - p = 15$ (0)

10. ¿En qué partes del ejercicio 9 no es p un número natural?

(b, c, d y f)

PROBLEMAS DIFICILES

11. (a) Escribe un enunciado matemático utilizando n, 12 y 15. $(n + 12 = 15)$

(b) Escribe otro enunciado matemático utilizando n, 12 y 15. Ahora n representa un número distinto al del ejercicio (a). $(n - 12 = 15)$

12. ¿Habrá un número cardinal para remplazar n de modo que cada uno de los siguientes enunciados matemáticos sea cierto? (no)

(a) $20 - n = 30$ (b) $n + 30 = 20$

USO DE ENUNCIADOS MATEMÁTICOS PARA RESOLVER PROBLEMAS

Objetivo: Ayudar a los estudiantes a mejorar su práctica para resolver problemas, mediante el uso de enunciados matemáticos en casos que requieren adición y sustracción.

Sugerencias para la enseñanza:

> Es conveniente introducir las ideas de esta sección, resolviendo algunos problemas que muestren cómo se obtiene un enunciado matemático que expresa la relación implícita en el problema entre los datos que se dan y la pregunta cuya contestación se pide.
>
> El enunciado matemático indicará los números con los cuales se van a efectuar las operaciones y las técnicas calculatorias que se van a utilizar para determinar el número que se representó mediante una letra en el enunciado matemático. Entonces, finalmente, se escribe un "enunciado de respuesta", mediante el cual se contesta la pregunta que se hace en el problema.
>
> Las sugerencias que se dan a continuación pueden servirle de ayuda al maestro al proyectar la exploración.

Ahora, queremos escribir enunciados matemáticos que nos ayuden en la resolución de problemas. Veamos si podemos leer un problema y, después, formular un enunciado matemático, utilizando la información dada en el problema.

Examinemos un ejemplo sencillo. En una clase de cuarto grado hay 15 niños y 10 niñas. ¿Cuántos estudiantes hay en la clase?

Hagamos una representación de los datos, utilizando lo que sabemos acerca de los conjuntos.

Conjunto de 15 niños   Conjunto de 10 niñas

Ahora, ¿cuál es la pregunta? La pregunta es la siguiente: ¿Si formamos la reunión de esos dos conjuntos, ¿cuántos estudiantes habrá en el conjunto que constituye dicha reunión?

15 niños 10 niñas

Podemos escribir un enunciado matemático que represente la situación descrita en este problema. ¿Con qué número empezaremos? (15 y 10, ó 10 y 15). Representemos con n el número de objetos de la reunión de los dos conjuntos. El número de objetos de la reunión de los dos conjuntos que no tienen miembros comunes es la suma de los números de objetos de los dos conjuntos. De manera que escribimos: $15 + 10 = n$ ó $10 + 15 = n$.

$$25 = n$$

Resumamos de la siguiente manera: $15 + 10 = n$

Enunciado para la respuesta: Hay 25 estudiantes en la clase.

$$\begin{array}{r} 15 \\ +\ \underline{10} \\ 25 \end{array}$$

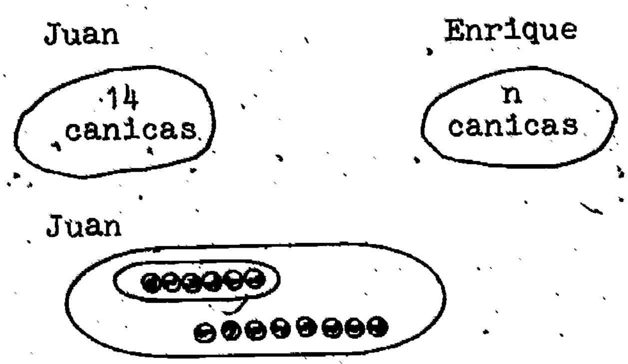
> La respuesta a la pregunta hecha en el problema puede ser evidente para todos los estudiantes tan pronto se haga la pregunta. No queremos que se siga el procedimiento un tanto largo que se presentó anteriormente cuando éste y la respuesta sean evidentes. Pero deseamos que sirva de guía para los estudiantes que no vean que el problema es un problema de adición y no de sustracción o, posiblemente, un problema que implique otra operación que no sea ninguna de las dos. También, el propósito de la parte más larga del procedimiento es ayudar a los estudiantes a escribir un enunciado matemático correcto. <u>En general, determinar el número representado en el enunciado matemático será más fácil que obtener el enunciado matemático.</u>

Debemos tener cuidado con la manera de considerar la adición. Esta es una operación con <u>números</u>. En el ejemplo, efectuamos la operación con los números 15 y 10. La adición no es una operación que se efectúa con los estudiantes. No sumamos 15 estudiantes y 10 estudiantes. Sin embargo, después que sumamos los números, podemos volver a nuestro problema y decir: "Hay 25 estudiantes". A esto le llamamos un "enunciado de respuesta".

Desde luego, es posible que la representación del problema y el uso del lenguaje conjuntista puede ser más difícil que la construcción directa del enunciado matemático. Este problema es un ejemplo:

Juan tiene 14 canicas. Esto es 6 canicas más que las que tiene Enrique. ¿Cuántas canicas tiene Enrique?

Si representamos los datos utilizando lo que sabemos acerca de los conjuntos, la representación podría ser la siguiente:



Nos enfrentamos con una dificultad al hacer un dibujo para representar la división del conjunto de las canicas de Juan en dos conjuntos que contengan 6 y n, respectivamente, pues no sabemos qué número representa n. El estudiante puede "ver" el enunciado $n + 6 = 14$ ó $14 - 6 = n$ más fácilmente que imaginarse una representación de la situación. De modo que la representación resulta ser un obstáculo, en vez de una ayuda. Ahora, analícese el ejemplo anterior con los estudiantes, sin emplear una representación. Guíese a los estudiantes en la formulación del enunciado matemático y, después, a la solución. Complétese el análisis, escribiendo el "enunciado de respuesta".

Debemos tener cuidado con la manera de considerar la sustracción. Esta es una operación con números. En el ejemplo que acabamos de utilizar, efectuamos la operación con los números 14 y 6. La sustracción no se efectúa con canicas. No restamos canicas; restamos números. Sin embargo, después que restamos los números, podemos aplicar el resultado a las canicas.

A medida que los estudiantes encuentran más y más casos que comprenden la sustracción (como el que se describió referente a canicas) aprenderán a utilizar los datos para escribir enunciados matemáticos.

Examinemos algunos problemas de aplicación práctica y formulemos los enunciados matemáticos que los describen:

(a) El equipo A tenía como puntuación 7. ¿Cuántos puntos más debería anotar para obtener una puntuación de 14? ($7 + n = 15$, ó $n = 15 - 7$.)

(b) Un niño recibió 10¢. Ahora, tiene 25¢. ¿Cuánto tenía originalmente? ($p + 10 = 25$, ó $p = 25 - 10$. Observen que no se utilizó el símbolo que representa centavos.)

(c) En una clase de 25 estudiantes, 12 fueron a la biblioteca. ¿Cuántos estudiantes se quedaron en el salón? ($12 + s = 25$, ó $s = 25 - 12$.)

Debe observarse que en cada uno de los ejemplos (a), (b) y (c) anteriores, cualquiera de los dos enunciados es correcto. No debe obligarse a los estudiantes a emplear una forma con preferencia a la otra. <u>Deberán formular el enunciado matemático que sea el resultado de su propio razonamiento.</u>

Pídase a la clase que den otro ejemplo del uso de la sustracción. Las siguientes preguntas pueden servir como guía en el análisis:

(1) ¿Qué pregunta se hace en el problema?
(2) ¿Qué datos se dan en el problema?
(3) ¿Cuál es la relación entre la información y la pregunta?
(4) ¿Qué enunciado matemático podemos escribir para representar esto?
(5) En el enunciado matemático, utilizamos una letra para representar un número. ¿Qué operación utilizamos para obtener dicho número?
(6) ¿Cómo puede utilizarse ese número para contestar la pregunta

que se plantea en el problema?

Recuérdese que el enunciado matemático que formule un alumno es el resultado de la manera de considerar la pregunta. Por ejemplo, si un alumno escribe $2 + n = 8$, entonces, puede razonar así: ¿Dos y qué número es, 8? Si escribe $n = 8 - 2$, puede pensar así: ¿Qué número es ocho menos dos?

El maestro debe emplear los ejemplos que sean necesarios para ayuda a los estudiantes a comprender mejor la idea de la adición y la sustracción como operaciones con números y como procedimientos para obtener la suma o el sumando desconocido. Varios problemas deben resolverse como sigue: los números se separan de las situaciones concretas, se obtienen los resultados y se utilizan los mismos para interpretar los problemas.

El maestro debe hacer que los estudiantes lean y analicen los pasos sugeridos en la página E97. Los estudiantes deben utilizar la forma que se muestra al final de la página E97, para escribir las respuestas a los problemas del Conjunto de problemas 13.

USO DE ENUNCIADOS MATEMATICOS PARA RESOLVER PROBLEMAS

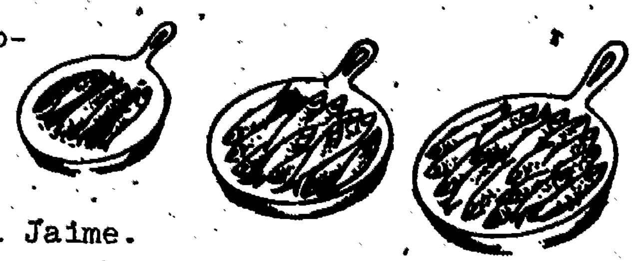
Hemos aprendido acerca de la reunión de conjuntos de objetos. Hemos aprendido acerca de conjuntos de objetos dentro de un conjunto de objetos.

¿Cómo nos ayudó la reunión de dos conjuntos a entender la adición?

¿Cómo nos ayudaron los conjuntos contenidos en un conjunto a entender la sustracción?

Ahora veamos cómo podemos utilizar estas ideas para ayudarse a contestar preguntas acerca de problemas concretos.

1. He aquí nuestro primer problema:



Ricardo tenía 4 peces.
Jaime tenía 12 peces.
Ricardo le dio sus peces a Jaime.
Entonces, ¿cuántos peces tiene Jaime? (16)

(a) ¿Es el conjunto de peces que Jaime tiene ahora, la reunión de dos conjuntos de peces? (Sí)

(b) ¿Se ajusta este enunciado matemático al problema $12 + 4 = n$? (Sí) ¿Por qué? (Indica que el conjunto de 4 peces se reunió con el conjunto de 12 peces.)

¿Se ajusta este enunciado matemático al problema $4 + 12 = n$? (Sí) ¿Por qué? (Porque, por la propiedad conmutativa de la adición, $12+4=4+12$.)

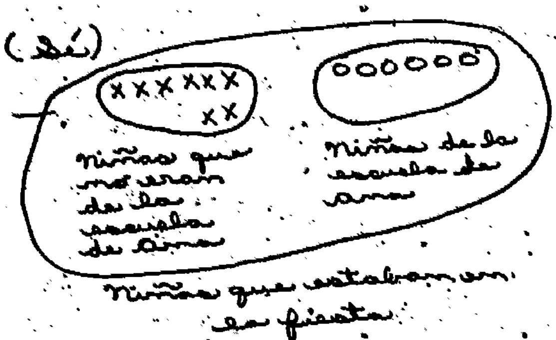
(c) Ahora, piensa solamente acerca del siguiente enunciado matemático: $12 + 4 = n$ ó $4 + 12 = n$. ¿Cómo hallas n? (Se suman 12 y 4.)

(d) Hallamos que $n = 16$.

Podemos contestar la pregunta de nuestro problema. Jaime tiene ahora 16 peces. (Esta oración se llama un "enunciado de respuesta".)

2. He aquí nuestro segundo problema:
Ana celebró una fiesta de cumpleaños: 14 niñas vinieron a la fiesta. 6 de las niñas eran de la escuela de Ana. ¿Cuántas no eran de su escuela?

(a) ¿Es el conjunto de niñas en la fiesta de Ana la reunión de dos conjuntos? (Sí)



(b) ¿Sabemos el número de niñas en uno de los conjuntos? (Sí, hay 6 niñas.)

(c) ¿Podemos representar el número de niñas en el otro conjunto por n? (Sí)

(d) ¿Se ajustan los siguientes enunciados matemáticos al problema? $14 - 6 = n$; $n + 6 = 14$. (Sí)

(e) ¿Qué operación utilizamos para hallar n? (La sustracción)
Ahora, podemos hallar $n = 8$. (La respuesta es: Había 8 niñas que no eran de la escuela de Ana.)

Resumen

Los enunciados matemáticos son útiles para resolver problemas. Ellos nos ayudan a representar relaciones numéricas de una manera abreviada. He aquí uno de los modos de emplear un enunciado matemático al resolver un problema:

Hay 22 alumnos en una clase. 10 de los alumnos son niñas. ¿Cuántos niños hay?	Utilizando un enunciado matemático, podemos también escribir:
$10 + n = 22$ $\begin{array}{r} 22 \\ -\ \underline{10} \\ 12 \end{array}$	$n = 22 - 10$ ó $22 - 10 = n$ ó $n + 10 = 22$
	Se halla n
Hay 12 niños en la clase.	Se contesta la pregunta, escribiendo una oración como respuesta.

Conjunto de problemas 13

Halla la respuesta a cada una de los siguientes problemas; ordena el trabajo como se recomendó en la página E97:

1. Ana practicó el piano 35 minutos el viernes. Practicó 40 minutos el sábado. ¿Cuántos minutos practicó en los dos días? ($35+40=m$. $\begin{array}{r}35\\+40\\\hline 75\end{array}$ Ana practicó 75 minutos en los dos días.)

2. María leyó dos libros. Un libro tenía 42 páginas. El otro tenía 26 páginas. ¿Cuántas páginas leyó en estos libros? ($42+26=m$. $\begin{array}{r}42\\+26\\\hline 68\end{array}$ Leyó 68 páginas en los dos libros.)

3. Norma tiene 9 tizas en su caja. La caja tiene capacidad para 12. ¿Cuántas tizas más necesita para llenar la caja? ($9+m=12$ ó $12-9=m$. $\begin{array}{r}12\\-9\\\hline 3\end{array}$ Necesita tres tizas más para llenar la caja.)

4. En un estanque de peces, hay 25 peces negros y 20 dorados. ¿Cuántos peces hay en el estanque? ($25+20=m$. $\begin{array}{r}25\\+20\\\hline 45\end{array}$ Hay 45 peces en el estanque.)

5. Jaime tiene una ruta para repartir periódicos. Ha entregado 35 de sus 49 periódicos. ¿Cuántos periódicos más tiene que entregar? ($35+m=49$ ó $49-35=m$. $\begin{array}{r}49\\-35\\\hline 14\end{array}$ Tiene que entregar 14 periódicos más.)

6. Había 25 niñas en una fiesta. 15 de ellas estaban viendo televisión. Las otras estaban jugando. ¿Cuántas niñas estaban jugando? ($15+m=25$ ó $25-15=m$. $\begin{array}{r}25\\-15\\\hline 10\end{array}$ Diez niñas estaban jugando.)

7. José tiene 59 sellos en dos sobres. En un sobre, tiene 24 sellos. ¿Cuántos sellos hay en el otro sobre? ($24+m=59$ ó $59-24=m$. $\begin{array}{r}59\\-24\\\hline 35\end{array}$ Hay 35 sellos en el otro sobre.)

8. Susana está ahorrando para comprar un libro que cuesta 98 centavos. Tiene 75 centavos. ¿Cuánto dinero más tiene que ahorrar para comprar el libro? ($75 + m = 98$ ó $98 - 75 = m$. Tiene que ahorrar 23 centavos más.)

$$\begin{array}{r} 98 \\ -\ 75 \\ \hline 23 \end{array}$$

9. Tomás deletreó correctamente 16 palabras en una prueba. Deletreó 20 palabras correctamente en otra prueba. ¿Cuántas palabras deletreó Tomás correctamente en ambas pruebas? ($16 + 20 = m$. $\begin{array}{r} 16 \\ +\ 20 \\ \hline 36 \end{array}$ Deletreó 36 palabras correctamente.)

10. Nuestro auditorio estaba decorado con globos rojos y globos blancos. Había 63 globos en total. Si 41 eran rojos, ¿cuántos eran blancos? ($41 + m = 63$ ó $63 - 41 = m$. $\begin{array}{r} 63 \\ -\ 41 \\ \hline 22 \end{array}$ Había 22 globos blancos.)

11. En una venta de rosetas de maíz, se vendieron 25 saquitos en un día. Si por la mañana se vendieron 12, ¿cuántos saquitos se vendieron por la tarde? ($12 + m = 29$ ó $29 - 12 = m$. $\begin{array}{r} 29 \\ -\ 12 \\ \hline 17 \end{array}$ Se vendieron 17 saquitos por la tarde.)

12. David pesa 60 libras. Su hermano pequeño pesa 20 libras. ¿Cuántas libras pesan los dos juntos? ($60 + 20 = m$. $\begin{array}{r} 60 \\ +\ 20 \\ \hline 80 \end{array}$ Los dos juntos pesan 80 libras.)

PROBLEMAS DIFICILES

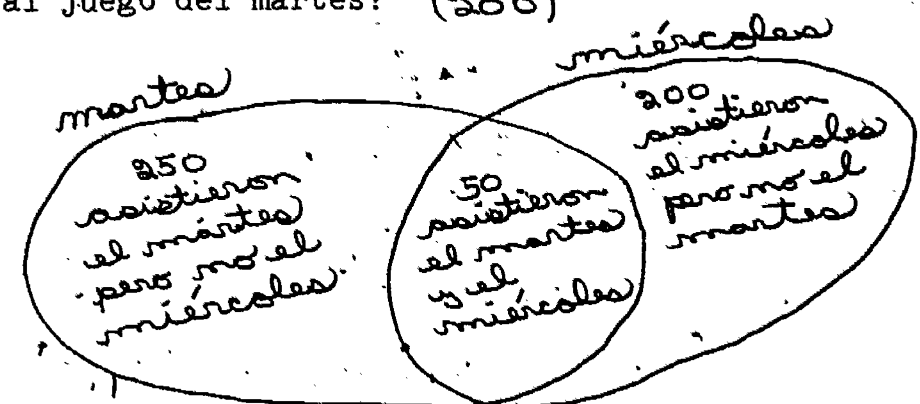
13. Hay 20 alumnos en una clase. La clase tiene solamente dos comités para organizar una fiesta. El comité de refrescos tiene 7 miembros. El comité de juegos tiene 5 miembros. Jaime, María y Roberto están en ambos comités.
¿Cuántos alumnos están en un comité solamente? (6)
¿Cuántos alumnos están en uno o dos comités? (9)
¿Cuántos alumnos de la clase no están en ningún comité? (11)

E100

14. 300 estudiantes asistieron el martes al juego de fútbol de la escuela. 250 estudiantes asistieron el miércoles al juego de fútbol de la escuela. 50 estudiantes asistieron a ambos juegos.

¿Cuántos alumnos asistieron solamente a uno de los juegos? (450)

¿Cuántos alumnos asistieron al juego el miércoles y no asistieron al juego del martes? (200)



HACER Y DESHACER - ADICION Y SUSTRACCIÒN

Objetivo: Ayudar a los estudiantes a comprender que sumar un número y restar el mismo número se neutralizan entre sí.

Los matemáticos utilizan un lenguaje más preciso. Así, dicen que la adición de un número y la sustracción del mismo número son operaciones inversas. Probablemente, es más conveniente no utilizar el término "inverso" con los estudiantes. Sin embargo, la idea es muy importante.

Vocabulario: Hacer, deshacer

Sugerencias para la enseñanza:

Será conveniente introducir la idea de operaciones inversas, mediante situaciones prácticas de "hacer y deshacer" que sean familiares para los estudiantes.

Puede empezarse, escribiendo en la pizarra varios pares de enunciados como los siguientes, utilizando nombres de estudiantes de la clase:

> Susana caminó tres pasos hacia adelante.
> Susana caminó tres pasos hacia atrás.
>
> José abrió la ventana.
> José cerró la ventana.

Para cada par de enunciados, pregúntese si la segunda acción "neutraliza" o no a la primera.

Pídase a los estudiantes que den pares de enunciados acerca de actos que se neutralizan.

Ahora, pueden escribirse en la pizarra enunciados sueltos como los siguientes:

> Juana se ganó 24 centavos.
> Guillermo se montó en su bicicleta.

Para cada enunciado, pídase a los estudiantes que sugieran un enunciado que lo "neutralice"; por ejemplo, Juana gastó 24 centavos; Guillermo se apeó de su bicicleta.

El maestro puede utilizar las páginas E101 y E102 del Texto del estudiante para explicar mejor las ideas de hacer y deshacer. Los ejercicios deben analizarse y completarse en clase. Sin embargo, cada estudiante debe preparar su propia copia de la tabla que aparece en el ejercicio 1. Después de estudiar las páginas E101 y E102, deberán asignarse los Conjuntos de problemas 14 y 15.

Si los estudiantes de una clase particular pueden entender el simbolismo utilizado más adelante, el maestro puede utilizarlo para resumir la idea de la adición y la sustracción como operaciones que se neutralizan:

Si a y b representan dos números cardinales,

(1) $(a - b) + b = a$

(2) $(a + b) - b = a$.

Al estudiar el Problema difícil que aparece con el número 10 en la página E105, pídase a los estudiantes que busquen el significado de la palabra identidad en el diccionario. Procúrese que escojan el significado apropiado. Uno de los que podría encontrarse es: "el estado de ser exactamente lo mismo". En la adición, llamamos al 0 elemento identidad, porque si 0 es un sumando, la suma resulta ser el mismo número que el otro sumando.

E101

HACER Y DESHACER - ADICION Y SUSTRACCION

Hay muchas acciones que deshacen otras acciones. Por ejemplo, José encontró una moneda de diez centavos; más tarde, perdió esa moneda.

1. Completa la tabla de abajo con las acciones de "hacer" y "deshacer" que faltan.

Hacer	Deshacer
1. sentarse	levantarse
2. abrir	cerrar
3. vestirse	(desvestirse)
4. (atar)	desatar
5. abotonar	(desabotonar)

2. Da algunos enunciados, como el siguiente, que tratan de ambas acciones, hacer y deshacer:

"Elena abrió su libro y, luego, lo cerró".

Hemos visto que una acción puede deshacer o anular otra acción. Este ejercicio nos ayudará a ver si el restar un número deshace la adición del mismo número.

3. (a) Piensa en 8. Agrega 3 y, entonces, resta 3. ¿Cuál es tu resultado? (8)
   Completa este enunciado: $(8 + 3) - 3 =$ (8)
   (b) Piensa en 10. Resta 6 y, luego, agrega 6. ¿Cuál es tu resultado? (10)
   Completa este enunciado: $(10 - 6) + 6 =$ (10)
   (c) ¿Qué debes hacer a $6 + 4$ para obtener 6? (Restar 4)
   (d) ¿Qué debes hacer a $6 - 4$ para obtener 6? (Sumar 4)

<u>Sumar un número y restar ese mismo número se neutralizan mutuamente</u>. Por ejemplo, si empezamos con 9, luego agregamos 2, y después restamos 2, el resultado es 9, el número con el cual comenzamos. Restar 2 deshizo el sumar 2. Podemos escribir

$$(9 + 2) - 2 = 9$$

<u>Restar un número y sumar ese mismo número se neutralizan mutuamente</u>. Por ejemplo, si empezamos con 5, luego le restamos 3, y entonces le sumamos 3, el resultado es 5, el número con el cual empezamos. Sumar 3 deshizo el restar 3. Podemos escribir

$$(5 - 3) + 3 = 5$$

Conjunto de problemas 14

Contesta Sí o No a los problemas del 1 al 3:

1. ¿Es el resultado el mismo número para (a) y (b), a continuación? (Sí)
   (a) Empieza con 8, suma 2 y luego resta 2.
   (b) Empieza con 8 y agrega 0.
   (c) Será $(8 + 2) - 2 = 8 + 0$? (Sí)

2. ¿Es el resultado el mismo número para (a) y (b), a continuación? (Sí)
   (a) Empieza con 14, resta 6, y luego suma 6.
   (b) Empieza con 14 y suma 0.
   (c) ¿Será $(14 - 6) + 6 = 14 + 0$? (Sí)

3. ¿Es el resultado el mismo para (a) y (b), a continuación? (Sí)
   (a) Empieza con n, suma 6 y luego resta 6.
   (b) Empieza con n, y suma 0.
   (c) ¿Será $(n + 6) - 6 = n + 0$? (Sí)

4. Escribe enunciados matemáticos que correspondan a (a) y (b).
   (a) Empieza con 9, suma 5, y luego resta 5.
   (b) Empieza con 9, y agrega cero.
   (c) ¿Son los resultados los mismos para (a) y (b)? (Sí)
   $((9+5)-5=9,\ 9+0=9)$

5. Escribe enunciados matemáticos para (a) y (b):
   (a) Empieza con n, suma 7, y luego resta 7.
   $((n+7)-7=n)$
   (b) Empieza con n, y agrega cero. $(n+0=n)$
   (c) ¿Son los resultados para (a) y (b) los mismos? (Sí)

6. ¿Es cierto que si empiezas con un número cardinal cualquiera y sumas 0, el resultado es ese mismo número? (Sí)
   Da algunos ejemplos. ($9+0=9$, $11+0=11$, etc.)

7. Aplica la idea de "deshacer" a estas operaciones; se hacen dos ejercicios (a) y (b) como ejemplo:

HACER	DESHACER
(a) $5 + 2$	$5 + 2 - 2$
(b) $6 - 4$	$6 - 4 + 4$
(c) $5 + 3$	$(5 + 3 - 3)$
(d) $18 - 10$	$(18 - 10 + 10)$
(e) $25 + 20$	$(25 + 20 - 20)$
(f) $3 + n$	$(3 + n - n)$
(g) $n - 2$	$(n - 2 + 2)$
(h) $p - n$	$(p - n + n)$

8. ¿Qué operación se usa para hallar n en cada uno de los siguientes enunciados matemáticos ciertos?

(a) $5 + 6 = n$	(adición)
(b) $n = 7 - 4$	(sustracción)
(c) $5 + n = 6$	(sustracción)
(d) $n + 2 = 43$	(sustracción)
(e) $n = 32 + 65$	(adición)
(f) $91 - 60 = n$	(sustracción)
(g) $75 = n + 31$	(sustracción)
(h) $83 + 81 = n$	(adición)
(i) $126 - 100 = n$	(sustracción)

9. ¿Qué número es n, para cada uno de los ejercicios del (a) al (i) en el problema 8?

(a) m=11 (d) m=41 (g) m = 44
(b) m=3 (e) m=97 (h) m= 164
(c) m=1 (f) m=31 (i) m= 26

10. PROBLEMA DIFICIL: El matemático llama al 0 el elemento identidad de la adición. ¿Cuál es el significado de identidad? (identidad significa uno y el mismo.) ¿Qué crees que significa el elemento identidad para la adición? (si se suma cero a un número cualquiera, el resultado es el número mismo.)

11. PROBLEMA DIFICIL: (a) Dos números con los cuales se va a efectuar una operación son 8 y (10 - 10). La operación es la adición. ¿Cuál es el resultado? (8)

(b) En el ejercicio (a), si (10 - 10) se remplaza por 0, ¿cuál es el resultado? (8)

(c) Dos números con los cuales se va a efectuar una operación son a y (6 - 6). La operación es la adición. ¿Cuál es el resultado? (a)

(d) Dos números cardinales con los cuales se va a efectuar una operación son m y (n - n). La operación es la adición. ¿Cuál es el resultado? (m)

12. PROBLEMA DIFICIL: En el problema 11, remplaza la palabra adición por la palabra sustracción. Contesta cada una de las cuatro partes del problema 11.
(a) 8
(b) 8
(c) a
(d) m

E106

Conjunto de problemas 15

Escribe un enunciado matemático para cada uno de los siguientes problemas; luego, resuélvelo:

1. (a) Tomás y Pedro tienen 72 galletitas para una jira de su clase. Los niños se comieron 12 en el camino. ¿Cuántas quedaron para la jira? ($72 = m + 12$ ó $72 - 12 = m$; $m = 60$. Quedaron 60 galletitas.)

   (b) La madre de Pedro tenía que traer una docena más de galletitas para la jira de la clase. ¿Cuántas galletitas había para la clase? ($60 + 12 = m$; $m = 72$. Había 72 galletitas para la clase.)

   (c) Utilizando un enunciado matemático, expresa cómo la operación del ejercicio (b) deshace la operación del ejercicio (a). ($(72 - 12) + 12 = 72$)

2. (a) Margarita tiene que hacer 12 ejercicios de adición. Su maestro le dio 3 ejercicios más.

   (b) Margarita hace 3 ejercicios.

   (c) Utilizando un enunciado matemático, expresa cómo la operación de la parte (b) deshace la operación de la parte (a). ($(12 + 3) - 3 = 12$)

3. (a) Juan tenía \$45 en el banco. Gastó \$20 durante el verano en clases de natación.

   (b) Juan ganó \$20 y los puso en el banco.

   (c) Utilizando un enunciado matemático, expresa cómo la operación de la parte (b) deshace la operación de la parte (a). ($(45 - 20) + 20 = 45$)

ALGO MAS ACERCA DE LA ADICION Y SUSTRACCION DE NUMEROS CARDINALES

Objetivo: Ayudar a los estudiantes a comprender que la operación de adición es siempre posible dentro del conjunto de los números cardinales, pero que la operación de sustracción no siempre es posible dentro del conjunto de los números cardinales.

Vocabulario: Clausura, cerrado

Sugerencias para la enseñanza:

Si nosotros, como los estudiantes de cuarto grado, conociéramos y utilizáramos los números cardinales solamente, podríamos obtener la suma de un par cualquiera de números cardinales. Sin embargo, no podríamos restar un par cualquiera de números cardinales; como, por ejemplo, (2 - 5). Esto ilustra que el conjunto de los números cardinales es cerrado respecto de la adición y no lo es respecto de la sustracción.

Un matemático, al describir la propiedad de clausura, diría: "El conjunto de los números cardinales es cerrado respecto de la operación de adición", para expresar el que cuando se suman dos números cardinales, siempre obtendremos un elemento del conjunto de los números cardinales. Al seguir describiendo la propiedad de clausura, el matemático diría: "El conjunto de los números cardinales no es cerrado respecto de la sustracción", para expresar el que cuando se restan dos números cardinales, podrá haber o no un resultado dentro del conjunto de los números cardinales.

Probablemente, no conviene utilizar el término "clausura" con los estudiantes, pero la propiedad es importante para la comprensión de las operaciones de adición y sustracción. Para los estudiantes, esto significa que "Siempre se puede encontrar un número cardinal como resultado de sumar dos números cardinales cualesquiera. Pero, no siempre es posible hallar un número cardinal que sea un sumando, si se conocen la suma y el otro sumando". Por ejemplo, si la suma es 15 y un sumando es 18, no hay número cardinal alguno que pueda ser el sumando desconocido.

Para afianzar la idea de que algunas cosas son posibles y otras imposibles en ciertas condiciones, deben estudiarse detalladamente los ejercicios 1 y 2 de la página E107. Para obtener las respuestas a los ejercicios 3 y 4 de la página E107, puede utilizarse el análisis que presentamos a continuación:

Los números que utilizamos ahora en nuestra clase son los del conjunto de todos los números cardinales: 0, 1, 2, 3, etc. ¿Creen que hay un número cardinal que corresponda a la suma de un par cualquiera de números cardinales?

Para ayudarnos a contestar esta pregunta, efectuemos la operación con algunos pares de números cardinales y escribamos nuestros resultados en la pizarra. (Utilícese una tabla como la que aparece más adelante.) ¿Hay siempre un número cardinal que sea la suma de los números de cada uno de los pares de números cardinales que sumamos? ¿Creen que podrían encontrar un par de números cardinales cuya suma no fuera un número cardinal?

Pares sumados	¿Hay un número cardinal que es la suma?
57, 93	Sí
2, 9	Sí
0, 6	Sí
99, 100	Sí
100, 99	Sí
0, 0	Sí

¿Cuántos pares que carezcan de suma dentro del conjunto de los números cardinales tendrían que descubrir para poder decir que no siempre podemos sumar dentro del conjunto de los números cardinales? (Uno) ¿Creen que siempre podemos sumar dentro del conjunto de los números cardinales? (Sí) Describimos esto, diciendo que el conjunto de los números cardinales es cerrado respecto de la adición. Esto significa simplemente que la suma de dos números cardinales es siempre un número cardinal.

Ahora, sígase un procedimiento parecido, utilizando pares de números cardinales y la operación de sustracción, como se indica en la tabla de la derecha. Recálquese que el orden es importante. Cuando se dan 9, 5, escribimos $9 - 5 = n$ y pensamos: "¿Qué número sumado a 5 dará 9?"

Pares restados	¿Hay un número cardinal que es el sumando desconocido?
9, 5	Sí
5, 9	No
256, 40	Sí
40, 256	No
0, 3	No
3, 0	Sí
6, 6	Sí

Aquí, debe conducirse a los estudiantes a que vean que no fue posible sumar algunos pares de números cardinales, porque no había número cardinal alguno para representar el sumando desconocido. De modo que no siempre podemos restar dentro del conjunto de los números cardinales. Los estudiantes deberán darse cuenta de que esto significa que el conjunto de los números cardinales no es cerrado respecto de la sustracción.

Quizás, los estudiantes puedan hacer las siguientes generalizaciones: Cuando se utiliza solamente el conjunto de los números cardinales, siempre podemos sumar, pero no siempre podemos restar. Podemos restar únicamente cuando la suma es mayor o igual que el sumando desconocido. Esto se resume en la página E107.

La siguiente explicación deberá presentarse antes de asignar los Conjuntos de problemas 16 y 17:

Trabajemos con el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ e imaginémonos que no conocemos otros números.

¿Podremos sumar un par cualquiera de estos números y obtener una suma que esté en este conjunto? Ensayemos con algunos ejemplos. ($2 + 2 = 4$; $3 + 2 = 5$; $3 + 4 = 7$; $3 + 3 = 6$) No hay número alguno <u>del conjunto</u> para representar la suma de 3 y 4 y la suma de 3 y 3. ¿Se puede encontrar en el conjunto la suma de algunos pares? (Sí, pero no se pueden encontrar dentro del conjunto las sumas de algunos pares.) Tratemos con cada par, incluyendo sumas de un número consigo mismo. Entonces, ¿será cierto que si conocemos solamente el conjunto de números 1, 2, 3, 4 y 5, podemos encontrar en el conjunto una suma para cada par de sumandos?

¿Creen que podemos restar un par cualquiera de tales números? Ensayemos con algunos pares. (5 - 2 = 3; 4 - 3 = 1; 3 - 3 = 0. No hay número alguno en el conjunto para expresar el sumando desconocido para 3 - 3 = 0.) ¿Se podrá restar un número cualquiera del conjunto de otro número cualquiera del mismo y obtener un número del conjunto?

Entonces, ¿será cierto que si conocemos solamente el conjunto de los números 1, 2, 3, 4 y 5 no siempre podemos encontrar un sumando desconocido en un enunciado de adición?

Obsérvese que si conociéramos solamente los números 1, 2, 3, 4 y 5, no siempre sería posible encontrar un número del conjunto como resultado en la adición o en la sustracción. De modo que podemos decir que el conjunto {1, 2, 3, 4, 5} no es cerrado respecto de la adición ni de la sustracción.

En la operación de adición con los números del conjunto {1, 2, 3, 4, 5}, siempre podemos obtener la suma de dos números cualesquiera. Pero la suma no siempre está en el conjunto {1, 2, 3, 4, 5}. Como la suma no siempre está en el conjunto, entonces, el conjunto no es cerrado respecto de la adición.

> No siempre es posible restar dos números cualesquiera del conjunto {1, 2, 3, 4, 5}. Por ejemplo, los estudiantes no pueden encontrar n en 2 - 5 = n, puesto que no conocen número alguno que sumado a 5 dé 2 como suma. Entonces, ciertamente el número que debe sustituir a n no está en {1, 2, 3, 4, 5} y el conjunto no es cerrado respecto de la sustracción.
>
> Los Conjuntos de problemas 16 y 17 pueden utilizarse ahora. El maestro deberá escoger cuidadosamente los problemas que van a utilizarse para los grupos de estudiantes sobresalientes de su clase.

ALGO MAS ACERCA DE LA ADICION Y LA SUSTRACCION DE NUMEROS CARDINALES

1. Piensa acerca del conjunto A de los primeros 5 números cardinales, A = {0, 1, 2, 3, 4}.
   (a) Suma 2 cualesquiera de estos números. Se permite sumar cualquiera de estos números a sí mismo. ¿Qué números obtienes por sumas? (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)
   (b) ¿Está cada una de las sumas en el conjunto A? (no)
   (c) ¿Qué sumas están en el conjunto A? (0, 1, 2, 3, 4)
   (d) ¿Por qué no están las otras sumas en el conjunto A?
   (Porque las otras sumas son 5, 6, 7 y 8 y esos números no son miembros del conjunto A.)
2. Supongamos que tienes solamente los números del conjunto S = {8, 9, 10, 11}.
   Halla la suma de dos números cualesquiera del conjunto S.
   ¿Son algunas de estas sumas miembros del conjunto S? (no)
   ¿Es el conjunto S cerrado respecto de la adición? (no)
3. Si se suman dos números cardinales, ¿es el resultado siempre un número cardinal? (sí) Trata algunos ejemplos.
   (4+5=9, 0+12=12, etc.)
4. ¿Si se restan dos números cardinales, ¿resulta siempre un número cardinal? (no) Trata algunos ejemplos. ¿Obtienes a veces un número cardinal? (sí)
   (8-5=3
   5-8=? no hay número cardinal alguno para esta sustracción.)

Siempre es posible sumar dos números cardinales, porque siempre hay un número cardinal que se puede utilizar como una suma. Esto significa que el conjunto de los números cardinales es <u>cerrado</u> respecto de la adición.

No siempre es posible restar dos números cardinales, porque no siempre hay un número cardinal que pueda usarse como otro sumando. No hay ningún número cardinal n tal que $3 - 5 = n$. Esto significa que el conjunto de los números cardinales <u>no es cerrado</u> respecto de la sustracción.

Conjunto de problemas 16

1. Supongamos que conoces solamente el conjunto de los números cardinales pares. Escribe algunos de los miembros del conjunto. {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...}

   (a) Escoge seis pares del conjunto. Súmalos, por ejemplo, como se indica a la derecha. (Recuerda que sólo puedes usar números cardinales pares como sumandos.)

26	par
14	par
40	par

   (b) ¿Qué puedes decir acerca de la suma para cada uno de los ejemplos que trataste? (Todas las sumas son pares.)

   (c) Cuando sumas dos números cardinales pares, ¿esperas obtener una suma que sea siempre impar? (No) ¿Siempre par? (Sí) ¿Algunas veces impar y otras par? (No)

   (d) ¿Cuántos pares de números trataste? Ensaya con pares suficientes para que estés seguro de tu respuesta en (c).

   (e) ¿Es la suma de dos números cardinales pares cualesquiera un número del conjunto de números cardinales pares? (Sí) ¿Es el conjunto de los números cardinales pares cerrado respecto de la adición? (Sí)

2. PROBLEMA DIFICIL: Se da el conjunto A = {0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ...}. Piensa en todos los pares del conjunto A, tales como 0 y 3, 3 y 3, 6 y 9, y así sucesivamente. Piensa en la suma de cada par. Llama a este conjunto de sumas el conjunto B. Escribe el conjunto B. ¿Es cada miembro del conjunto B un miembro del conjunto A? (sí) (Conjunto B = {0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ...})

3. Piensa en el conjunto de los números cardinales impares. Escribe algunos de los miembros del conjunto.
({1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ...})

(a) Escoge seis pares del conjunto. Súmalos. Hazlo como se indica a la derecha. Recuerda que sólo puedes utilizar los números cardinales impares como sumandos.

11	impar
19	impar
30	par

(b) Tienes solamente números impares en este conjunto. ¿Hay un número que se pueda usar como suma en cada par que escojas? (no) ¿Es la suma un número cardinal impar? (no)

(c) Cuando sumas un par de números impares, ¿esperas obtener un resultado que sea siempre impar? (no) ¿Siempre par? (sí) ¿Algunas veces impar y algunas veces par? (no)

(d) ¿Cuántos pares de números trataste? Trata suficientes pares de modo que estés seguro de tu respuesta en (c).

(e) ¿Es la suma de dos números cardinales impares cualesquiera un número del conjunto de los números cardinales impares? (no) ¿Es el conjunto de todos los números cardinales impares cerrado respecto de la adición? (no)

4. PROBLEMA DIFICIL: Se da el conjunto A = {1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, ...}. Piensa en algunos pares del conjunto A, tales como 1 y 4, 4 y 10, 7 y 7, y así sucesivamente. Piensa en la suma de cada par. Llama a este conjunto de sumas el conjunto B. Escribe el conjunto B. ¿Es un miembro cualquiera del conjunto B un miembro del conjunto A? (no) ¿Es el conjunto A cerrado respecto de la adición? (no) (El conjunto B = {2, 5, 8, 11, 14, 17, ...})

Conjunto de problemas 17

CONJUNTO DE PROBLEMAS DIFICILES

1. Supongamos que conoces solamente el conjunto de números {1, 2, 3, 4}. Esto significa que en este ejercicio puedes usar solamente los números 1, 2, 3, 4.
   (a) Copia y completa, siempre que sea posible, la tabla de adición de la derecha.

+	1	2	3	4
1	(2)	(3)	(4)	
2	(3)	(4)		
3	(4)			
4				

   (b) ¿Llenaste cada espacio de la tabla? (no)
   (c) Si no, ¿por qué no?
   (Algunas de las respuestas son mayores que 4; el conjunto no es cerrado respecto de la adición.)

2. Supongamos que conoces solamente el conjunto de números {6, 8, 10, 12, 14}.
   (a) Copia y completa, siempre que sea posible, la tabla de adición de la derecha.

+	6	8	10	12	14
6	(12)	(14)			
8	(14)				
10					
12					
14					

   (b) ¿Llenaste cada espacio de la tabla? (no)
   (c) Si no, ¿por qué no?
   (Algunas de las respuestas son mayores que 14; el conjunto no es cerrado respecto de la adición.)

3. Supongamos que conoces solamente el conjunto de números {1, 3, 5, 7}.

+	1	3	5	7
1				
3				
5				
7				

(a) Copia y completa, siempre que sea posible, la tabla de adición de la derecha.

(b) ¿Llenaste cada espacio de la tabla? (no)

(c) Si no, ¿por qué no? (Ninguna de las sumas es un número impar.)

4. (a) En el problema 1, ¿es el conjunto cerrado respecto de la adición? (no)

(b) En el problema 2, ¿es el conjunto cerrado respecto de la adición? (no)

(c) En el problema 3, ¿es el conjunto cerrado respecto de la adición? (no)

MAS SOBRE LA RESOLUCION DE PROBLEMAS

Objetivo: Ayudar a los estudiantes a mejorar su habilidad para resolver problemas, mediante el uso de enunciados matemáticos en casos o situaciones que requieran la adición y la sustracción de números cuyos numerales tengan varias cifras.

Para los estudiantes, la resolución de problemas debe ser un proceso de hallar la respuesta a la pregunta que se plantea en el problema. Para hallar la respuesta, debe identificarse primero la relación implicada en el problema.

Vocabulario: Relación

Sugerencias para la enseñanza:

Aquí, por la <u>relación</u> implicada en un problema, entendemos una descripción de cómo están relacionados los elementos dados en él. Los elementos pueden ser números, ideas geométricas, u otros conceptos. En la descripción, pueden utilizarse palabras o enunciados matemáticos. En el problema de más adelante, la descripción expresada mediante símbolos matemáticos es un enunciado matemático.

La <u>resolución de problemas</u> debe estudiarse, destacando la <u>relación implicada en el problema</u>. Esta relación se caracteriza y se formula como un enunciado matemático. El enunciado se estudia para poder determinar un método que permita obtener una respuesta a la pregunta que se plantea en el problema. Se efectúa una operación y se utiliza el resultado para contestar la pregunta. Se dice que la respuesta al problema es "el enunciado de la respuesta".

Los estudiantes deben pensar en la relación implicada en el problema en todas las etapas del proceso para su resolución. Esta es la clave para la resolución de problemas.

Para aprender más acerca de la resolución de problemas, estudiaremos algunos ejemplos para determinar la relación entre los números dados en el problema. Cuando escribimos un enunciado matemático, describimos cómo están relacionados los números.

Quizás, el maestro desee elegir uno o dos problemas del Conjunto de problemas 18 y seguir el procedimiento que se sugiere más adelante o, quizás, desee emplear otros problemas y dejar que los estudiantes resuelvan el Conjunto de problemas 18 por sí mismos. De cualquier modo, presentamos aquí algunas preguntas que pueden servir de guía en el análisis.

Utilizando el primer problema en el Conjunto de problemas 18, pregúntese:

1. ¿Qué pregunta debe contestarse?
   (a) ¿Qué distancia recorrió la familia López en su viaje de ida y vuelta?
2. ¿Qué datos se dan en el problema?
   (a) La familia López recorrió 2140 millas en el viaje de ida.
   (b) La familia López recorrió 2037 millas en el viaje de vuelta.
3. <u>¿Qué enunciado matemático podemos escribir para expresar la relación</u> entre la pregunta y los datos?

   $2,140 + 2,037 = n$

   No debe esperarse que todos los estudiantes escriban el mismo enunciado matemático.

Después de esto, los estudiantes pueden utilizar la forma calculatoria para determinar el resultado.

$$\begin{array}{r} 2,140 \\ +\ \underline{2,037} \\ 4,177 \end{array}$$

Entonces, podrán contestar la pregunta que se plantea en el problema.

La familia López recorrió 4,177 millas.

De manera parecida, la clase podría resolver el siguiente problema:

Margarita ha leído 113 páginas. Su libro tiene 247 páginas. ¿Cuántas páginas le quedan por leer?

1. ¿Qué pregunta hay que contestar? ¿Cuántas páginas le quedan por leer?
2. ¿Qué datos se dan en el problema? Margarita ha leído 113 páginas de un libro. El libro tiene 247 páginas.
3. ¿Qué enunciado podemos escribir para expresar la relación entre la pregunta y los datos?

$$113 + n = 247 \quad ó$$

$$n = 247 - 113$$

Después de esto, los estudiantes pueden utilizar la forma calculatoria para determinar el resultado.

$$\begin{array}{r} 247 \\ -\underline{113} \end{array}$$

Entonces, podrán contestar la pregunta que se plantea en el problema.

Margarita tiene que leer 134 páginas más.

Quizás, el maestro desee explorar otras maneras de resolver otros problemas, antes de que los estudiantes traten de resolver independientemente los del Conjunto de problemas 18.

Debe destacarse la importancia de la relación implicada en el problema, así como la respuesta a la pregunta planteada y no los pasos que se utilicen para la resolución.

Debe recordase que se efectúan las operaciones con números solamente, que un enunciado matemático contiene solamente los números sacados de un problema y que el número que es la respuesta debe utilizarse para contestar la pregunta planteada. La respuesta no debe expresarse mediante una o dos palabras, como "25 libros"; el enunciado de la respuesta debe ser una oración corta y completa como, por ejemplo, "Quedaron 25 libros sobre la mesa".

E112

MAS SOBRE LA RESOLUCION DE PROBLEMAS

Resolver problemas escritos es un ejercicio para razonar cuidadosamente. Puedes necesitar leer un problema varias veces. Debes asegurarte bien de que entiendes cuál es la pregunta que se hace en el problema.

Busca los enunciados en el problema que te dan información. Esta información puede estar en más de un enunciado.

Escribe un enunciado matemático para expresar las relaciones que se plantean en el problema. (Tal vez quieras darle una ojeada a las páginas 97 - 99.)

Estudia el enunciado matemático y decide cuál es la operación que debe utilizarse. Luego, efectúa la operación.

Redacta una oración para explicar que el resultado de la operación es una respuesta a la pregunta del problema.

<u>Ejemplo</u>.

José tiene 438 sellos y Guillermo tiene 326.
¿Cuántos sellos más tiene José que Guillermo?
¿Qué enunciado matemático expresa las relaciones dadas en el problema?

$438 - 326 = n$ ó $326 + n = 438$

¿Qué operación utilizamos para hallar n? (la sustracción)
¿Es $n = 112$? (Sí)
La oración de la respuesta es "José tiene 112 más sellos que Guillermo".

Conjunto de problemas 18

1. Durante el verano, la familia López recorrió 2,140 millas en su ruta hacia el Parque Yellowstone. Recorrieron 2,037 millas a su regreso al hogar. ¿Cuál fue el total de millas recorridas? (2140 + 2037 = m. $\begin{array}{r} 2140 \\ +\,2037 \\ \hline 4177 \end{array}$ La familia López recorrió 4,177 millas.)

2. Margarita ha leído 113 páginas. Su libro tiene 247 páginas. ¿Cuántas páginas le quedan por leer? (247 = 113 + m ó 247 − 113 = m. $\begin{array}{r} 247 \\ -\,113 \\ \hline 134 \end{array}$ Le quedan 134 páginas por leer.)

3. El automóvil de la familia Méndez ha recorrido 12,547 millas. El automóvil de la familia Cortés ha recorrido 11,325 millas. ¿Cuántas millas más ha recorrido el automóvil de la familia Méndez que el de la familia Cortés? (12,547 = 11,325 + m ó 12,547 − 11,325 = m. $\begin{array}{r} 12,547 \\ -\,11,325 \\ \hline 1,222 \end{array}$ El automóvil de la familia Méndez ha recorrido 1,222 millas más.)

4. ¿Cuánto más grande es tres mil doscientos setenta y cinco que dos mil, ciento treinta y tres? (2133 + m = 3275 ó 3275 − 2133 = m. $\begin{array}{r} 3275 \\ -\,2133 \\ \hline 1142 \end{array}$ 3275 es 1142 mayor que 2133.)

5. María y su hermana coleccionan botones viejos. La hermana de María tiene 275. María acaba de empezar su colección y tiene 124. ¿Cuántos botones tienen María y su hermana en conjunto? (275 + 124 = m. $\begin{array}{r} 275 \\ +\,124 \\ \hline 399 \end{array}$ En conjunto, tienen 399 botones.)

6. La Escuela Bolívar tiene 225 cajas de la Cruz Roja. Llenaron 114 de sus cajas. ¿Cuántas cajas más hay para llenar? (225 = 114 + m ó 225 − 114 = m. $\begin{array}{r} 225 \\ -\,114 \\ \hline 111 \end{array}$ Hay que llenar 111 cajas más.)

7. El sábado, 1,462 personas compraron boletos para los juegos de las series de Pequeñas Ligas. El domingo, 2,526 personas compraron boletos para el juego. ¿Cuántos boletos se vendieron para los juegos de estos dos días? (1462+2526=m. Se vendieron 3,988 boletos.)

8. Elena nació en el año 1950. ¿Cuántos años cumplirá este año? (La respuesta dependerá del año.)

LA PROPIEDAD ASOCIATIVA DE LA ADICION

Debe recalcarse que la adición es una operación binaria, es decir, se pueden sumar solamente dos números a la vez. En consecuencia, para sumar tres números, hay que efectuar la operación dos veces. Esto puede hacerse, agrupando o asociando los números que van a sumarse. Por ejemplo, para calcular $9 + 8 + 11$, debemos calcular $(9 + 8) + 11$ ó $9 + (8 + 11)$. Los estudiantes se darán cuenta de la necesidad de la propiedad asociativa, a medida que se utilicen ejemplos como los siguientes:

$$14 + 27 + 36$$
$$136 + 12 + 18$$
$$2136 + 164 + 295$$

Esto les ayuda a ver que se pueden sumar solamente dos números a la vez; también, que se puede simplificar la adición, utilizando una agrupación con preferencia a otra. En los ejemplos anteriores:

	$(14 + 36) + 27 = 50 + 27$
pero	$14 + (36 + 27) = 14 + 63$
	$136 + (12 + 18) = 136 + 30$
pero	$(136 + 12) + 18 = 148 + 18$
y	$(2136 + 164) + 295 = 2300 + 295$
pero	$2136 + (164 + 295) = 2136 + 459$

En cada uno de los ejemplos, la primera agrupación evidentemente simplifica la operación.

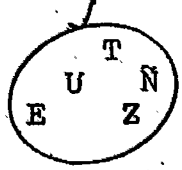
La cuestión tratada también puede introducirse, utilizando el concepto de la reunión de tres conjuntos cada dos de los conjuntos no tengan miembro común alguno.

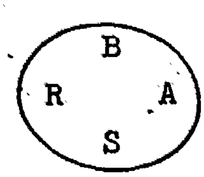
Actividad	Conjuntos que van a reunirse	¿Afecta la agrupación de miembros el resultado?
Reunión	5 miembros de la familia Túñez, 4 miembros de la familia Bras, 6 miembros de la familia Mongil	(No. Si la familia Bras se reúne con la familia Túñez y, entonces, todos se reúnen con la familia Mongil, estarán presentes las mismas personas que si la familia Túñez se reúne con la familia Mongil y, entonces, todos se reúnen con la familia Bras.

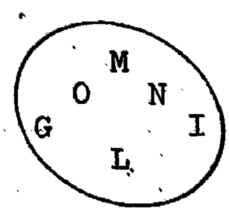
En este ejemplo, pídase a los estudiantes que representen la reunión de las familias Túñez y Bras y, entonces, la reunión de este conjunto con la familia Mongil. La representación podría verse así: TB M TBM

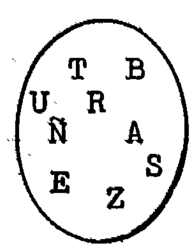
Otra manera de representar la reunión de estos tres conjuntos disyuntos (la reunión de las tres familias) sería designar los miembros de cada familia por letras. Por ejemplo, los cinco miembros de la familia Túñez por T, U, Ñ, E, Z; los cuatro miembros de la familia Bras por B, R, A, S y los seis miembros de la familia Mongil por M, O, N, G, I, L.

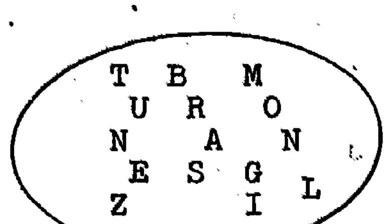
Entonces:

T


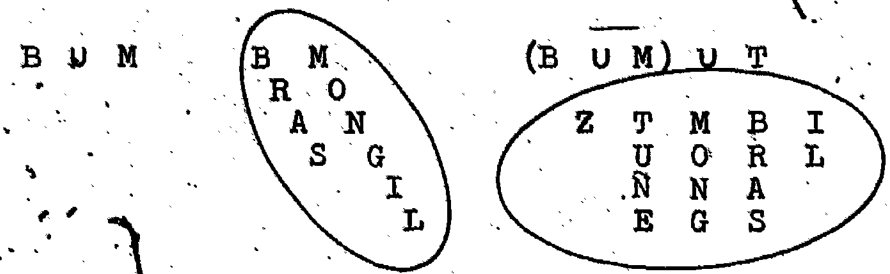
B


M


$T \cup B$


$(T \cup B) \cup M$


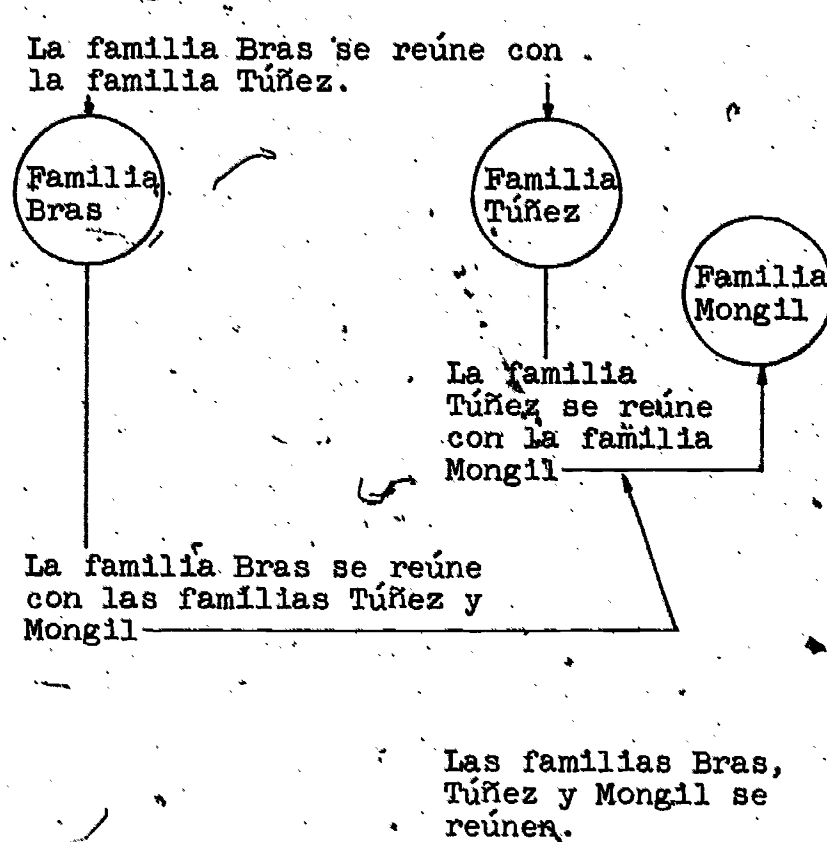
Utilícese el siguiente diagrama para representar T ∪ (B ∪ M).



Así, (T ∪ B) ∪ M = T ∪ (B ∪ M).

Por familias:

La familia Bras y la familia Túñez se reúnen con la familia Mongil.



Ahora, pueden estudiarse las páginas E115, E116 y E117 y los alumnos pueden trabajar en el Conjunto de problemas 19 independientemente. Sería conveniente analizar estos problemas en clase, una vez los estudiantes los hayan resuelto.

LA PROPIEDAD ASOCIATIVA DE LA ADICION

1. Supongamos que se te dijo que sumaras 6, 7 y 5.
   (a) ¿Puedes sumar tres números de una vez? (No, podemos sumar sólo dos números a la vez. En la adición, consideramos solamente dos números para obtener un tercer número.) El tercer número se llama la suma.)
   (b) Podemos sumar 6 y 7, puesto que podemos sumar solamente dos números. Escribamos (6 + 7) + 5. Esto significa que sumaremos 6 y 7. Obtenemos 13. Entonces, sumamos 13 y 5 y obtenemos 18. Tenemos la suma de los tres números 6, 7, 5. ¿Cuántos números sumamos a la vez? (Dos)
   (c) Podemos, también, escribir 6 + (7 + 5). Esto significa que sumamos 7 y 5. Obtenemos 12. Luego, sumamos 6 y 12.
   (d) ¿Son las sumas finales en (b) y (c) las mismas? (Sí, 18)

No es posible sumar más de dos números a un tiempo. Si tenemos más de dos números que sumar, debemos agrupar solamente dos números. Por ejemplo, si deseamos sumar 536, 451 y 612, no podemos sumar los tres en una operación. Podemos sumar 536 y 451 y, entonces añadir 612 a esta suma. O podemos sumar 451 y 612 y, luego, añadir esta suma a 536. Podríamos escribir (536 + 451) + 612 ó 536 + (451 + 612), para indicar cómo sumamos los tres números.

En el ejemplo al principio de esta página, podremos sumar solamente dos números de una vez. Debemos agrupar solamente dos números. Para hacer esto con 6 + 7 + 5, podemos escribir (6 + 7) + 5 = n.

El paréntesis significa que estamos agrupando el 6 y el 7 y consideramos a 6 + 7 como un número, 13. Entonces, la suma es 13 + 5 ó 18. Podríamos escribir 6 + (7 + 5). Esto significa que estamos agrupando el 7 y el 5 y los consideramos como un número, 12. Entonces, la suma es 6 + 12 ó 18.

$(6 + 7) + 5$ y $6 + (7 + 5)$ son cada uno nombres para el mismo número, 18. La forma en que agrupamos los números no alteró la suma. Cuando agrupamos $6 + 7 + 5$ como $(6 + 7) + 5$ o como $6 + (7 + 5)$, estamos utilizando la <u>propiedad asociativa</u> de la adición. Debemos agrupar los números dos a dos, puesto que podemos sumar <u>solamente dos</u> números de una vez.

2. Si utilizamos la propiedad asociativa de la adición para escribir $3 + 2 + 4 = n$, podríamos escribir

$$\begin{aligned}(3 + 2) + 4 &= n\\ 5 + 4 &= n\\ 9 &= n\end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned}3 + (2 + 4) &= n\\ 3 + 6 &= n\\ 9 &= n\end{aligned}$$

Halla cada suma. Utiliza la propiedad asociativa de la adición, como se hizo anteriormente.

(a) $2 + 1 + 5 = n$
(b) $6 + 3 + 2 = n$
(c) $8 + 2 + 3 = n$

a) $2+1+5=n$
$(2+1)+5=n$
$3+5=n$
$8=n$

o

$2+1+5=n$
$2+(1+5)=n$
$2+6=n$
$8=n$

b) $6+3+2=n$
$(6+3)+2=n$
$9+2=n$
$11=n$

o

$6+3+2=n$
$6+(3+2)=n$
$6+5=n$
$11=n$

c) $8+2+3=n$
$(8+2)+3=n$
$10+3=n$
$13=n$

o

$8+2+3=n$
$8+(2+3)=n$
$8+5=n$
$13=n$

3. (a) Di cómo efectuar esta operación: $(6 + 7) + 5$.
(Se suman primero 6 y 7. Después, se suman 13 y 5.)
(b) Di cómo efectuar esta operación: $6 + (7 + 5)$.
(Se suman primero 7 y 5. Después, se suman 6 y 12.)
(c) ¿Por qué debemos agrupar dos de los números al sumar 6, 7, 5? (Porque la adición es una operación que se efectúa con dos números solamente.)

4. (a) ¿Cuál es el resultado de $(6 + 7) + 5$? (18)
(b) ¿Cuál es el resultado de $6 + (7 + 5)$? (18)
(c) ¿Es $(6 + 7) + 5 = 6 + (7 + 5)$? (Sí)

5. (a) ¿Es $(3 + 4) + 5 = 3 + (4 + 5)$? (Sí)
(b) ¿Son $(3 + 4) + 5$ y $3 + (4 + 5)$ nombres diferentes para el mismo número? (Sí)
(c) ¿En qué difiere $(3 + 4) + 5$ de $3 + (4 + 5)$? (Los sumandos se agruparon de manera diferente).

Resumen

La suma de tres números debe hacerse en dos etapas. Puedes sumar 63, 24 y 82 de dos maneras, si el orden no se cambia.

$$(63 + 24) + 82 = 87 + 82 = 169$$
$$63 + (24 + 82) = 63 + 106 = 169$$

La suma es la misma, aun cuando agrupemos los sumandos de manera diferente. Así, podemos escribir

$$(63 + 24) + 82 = 63 + (24 + 82).$$

Conjunto de problemas 19

1. La propiedad asociativa se utiliza al hallar la suma de 14 y 5. No la has llamado por este nombre, pero la has utilizado.

$14 + 5 = (10 + 4) + 5$		Paso I
$= 10 + (4 + 5)$		Paso II
$= 19$		Paso III

(a) ¿Es $(10 + 4) + 5 = 10 + (4 + 5)$ un ejemplo de la propiedad asociativa de la adición? (Sí)

(b) ¿Es 19 un nombre diferente para $10 + (4 + 5)$? (Sí)

2. La propiedad asociativa puede ayudarte a hacer más fáciles algunas adiciones. Las siguientes son maneras de sumar $15 + 9 + 11$:

(a)

$$15 + 9 + 11 = (15 + 9) + 11$$
$$= 24 + 11$$
$$= 35$$

(b)

$$15 + 9 + 11 = 15 + (9 + 11)$$
$$= 15 + 20$$
$$= 35$$

¿Es la suma la misma utilizando el método (a) que utilizando el (b)? (Sí) A muchos alumnos les gusta más el método (b) cuando suman sin papel ni lápiz. ¿Por qué?
(Es más fácil obtener mentalmente los resultados de 9+11 y 15+20 que los resultados de 15+9 y 24+11.)

3. ¿Qué propiedad de la adición se verifica en

$$4 + (1 + 6) = (4 + 1) + 6?$$

(La propiedad asociativa de la adición.)

4. ¿Qué propiedades de la adición se verifican en

$$(3 + 5) + 8 = 3 + (8 + 5)?$$

(Las propiedades asociativa y conmutativa)

$$(3+5) + 8 = 3 + (5+8)$$
$$3 + (5+8) = 3 + (8+5)$$

5. (a) ¿Es $(5 - 3) - 2 = 5 - (3 - 2)$? (no)
   (b) ¿Es $(9 - 4) - 3 = 9 - (4 - 3)$? (no)
   (c) ¿Es ~~la sustracción~~ una operación asociativa? (no)

6. Para hallar la suma $4 + 2 + 7$, un muchacho escribió $4 + 2 = 6 + 7 = 13$. El enunciado que escribió es incorrecto. ¿Por qué? (Porque 4+2 no es igual a 6+7.)

En los problemas del 7 al 11 escribe las palabras, los numerales y los enunciados matemáticos correctos, para completar la siguiente tabla; recuerda que los numerales entre paréntesis nombran un número:

	Números con los cuales se efectúa la operación	Resultado	Operación utilizada	Enunciado matemático
7.	87, 56	(31)	Sustracción	(87-56=31)
8.	(8 + 6), 5	19	(Adición)	((8+6)+5=19)
9.	11, (9 + 6)	(26)	Adición	(11+(9+6)=26)
10.	(6 + 5), (8 + 4)	(23)	Adición	((6+5)+(8+4)=23)
11.	27, (8 + 8)	11	(Sustracción)	(27-(8+8)=11)

12. Escribe + o − en cada blanco de manera que cada enunciado sea cierto:
   (a) (12 (+) 8) (−) 7 = 13
   (b) 13 (+) (8 (−) 6) = 15
   (c) (42 (+) 61) (+) 52 = 155
   (d) 54 (−) (38 (+) 11) = 5

13. Escribe paréntesis como ayuda para efectuar las siguientes sumas:
   (a) $4 + 6 + 19$
   (b) $11 + 9 + 25$
   (c) $17 + 3 + 29$
   (d) $59 + 12 + 8$

((a) (4+6)+19 (c) (17+3)+29
(b) (11+9)+25 (d) 59+(12+8))

REPASO

Objetivo: Ayudar a los estudiantes a repasar los conceptos principales presentados en el capítulo y a practicar con las reglas importantes.

Sugerencias para la enseñanza:

> El maestro deberá decidir qué modo de utilizar el material es el más apropiado para su clase. Si los alumnos hacen los problemas independientemente, sería conveniente analizar en clase varias maneras de resolver dichos problemas. Otro método podría ser analizar algunas partes de cada problema y dejar que los estudiantes hagan lo que falta independientemente. El Conjunto de problemas 20 se preparó para ayudar a los estudiantes a mejorar su habilidad para resolver problemas, escribiendo preguntas que requieran efectuar las operaciones de adición o sustracción con los números dados en el problema. Aquí, los estudiantes tendrán la oportunidad de formular el lenguaje que indica la operación que debe efectuarse.
>
> Problema 16, página E123: Hay cinco números naturales (20, 21, 22, 23 y 24) entre 19 y 25. Si $n = 25 - 19$, entonces $n = 6$.

REPASO

Conjunto de problemas 20

Más adelante, se repasan algunas de las propiedades que has estudiado. Di si cada uno de los enunciados siguientes es siempre cierto, cierto algunas veces, o nunca cierto; da ejemplos:

Propiedad de la adición

1. (a) Si se añade 0 a un número cardinal, el resultado es ese mismo número cardinal.
   (Siempre cierto)
2. (a) Si se suman dos números cardinales, el resultado es un número cardinal.
   (Siempre cierto).
3. (a) Si se altera el orden al sumar dos números cardinales, la suma no cambia.
   (Siempre cierto)

Propiedad de la sustracción

1. (b) Si se resta 0 de un número cardinal, el resultado es ese mismo número cardinal.
   (Siempre cierto)
2. (b) Si se restan dos números cardinales, el resultado es un número cardinal.
   (Cierto algunas veces).
3. (b) Si se cambia el orden al restar dos números cardinales, el sumando desconocido no cambia.
   (Cierto algunas veces)

4. Halla n de manera que cada enunciado matemático sea cierto:

   (a) $5 + n = 5 + 9$ (9)

   (b) $12 + n = 14 + 12$ (14)

   (c) $n + 21 = 21 + 42$ (42)

   (d) $(8 + 8) + n = 8 + (9 + 4)$ (5)

   (e) $(12 + 8) - n = 12 + (8 - 3)$ (3)

   (f) $(3 + 5) + (n + 2) = (6 + 2) + (3 + 5)$ (6)

5. Coloca paréntesis en 18 - 12 + 2 para que el resultado sea 4. ¿Es (18 - 12) + 2 = 4? (no)
¿Es 18 - (12 + 2) = 4? (sí)

6. Coloca paréntesis de modo que los siguientes enunciados sean ciertos:

(a) 26 - (12 + 9) = 5
(b) (57 - 37) - 20 = 0
(c) (26 - 12) + 9 = 23
(d) 57 - (37 - 20) = 40

7. En tu libreta, escribe la letra que está al lado de cada enunciado matemático cierto: (a, b, c, d, f, h)

(a) 15 + 19 = 19 + 15
(b) 15 + 19 > 15 + 18
(c) 15 + 19 < 16 + 19
(d) 18 + 6 = 6 + 18
(e) 18 + 6 > 6 + 18
(f) 18 + 6 < 18 + 7
(g) 118 + 394 = 493 + 811
(h) 118 + 394 = 394 + 118

8. ¿Es (36 + 75) + 19 = 19 + (36 + 75)? (sí) Sin sumar, sabemos que el enunciado matemático es cierto, por la propiedad conmutativa de la adición. ¿Te das cuenta de que (36 + 75) y 19 son los dos sumandos? Determina qué propiedad se verifica en cada uno de los siguientes ejercicios:

(a) 2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4 (Propiedad asociativa de la adición)

(b) (18 + 19) + (39 + 12) = (39 + 12) + (18 + 19) (Propiedad conmutativa de la adición)

(c) (8 + 9) + 6 = 6 + (8 + 9) (Propiedad conmutativa de la adición)

(d) (8 + 9) + 6 = (9 + 8) + 6 (Propiedad conmutativa de la adición)

(e) (8 + 9) + 6 = 8 + (9 + 6) (Propiedad asociativa de la adición)

9. (a) ¿Es $(2 + 7) - 2 = 2 + (7 - 2)$? (Sí)
   (b) ¿Es $2 + (7 - 2) = 7 + (2 - 2)$? (Sí)
   (c) ¿Es $(2 + 7) - 2 = 7 + (2 - 2)$? (Sí)

10. Copia las letras de la (a) a la (d) en tu libreta. Al lado de cada letra, escribe las palabras, los numerales y enunciados matemáticos correctos necesarios para completar la siguiente tabla:

	Números con los cuales se efectúa la operación	Resultados	Operación utilizada	Enunciado matemático
(a)	(7 + 4), 8	3	(Sustracción)	((7+4)-8=3)
(b)	20, (40 + 30)	(90)	Adición	(20+(40+30)=90)
(c)	(30 - 30), (40 - 40)	(0)	Sustracción	((30-30)-(40-40)=0)
(d)	(83 - 61), (199 + 1)	(222)	Adición	((83-61)+(199+1)=222)

11. Colocar paréntesis te ayudará a efectuar la suma 23 + 19 + 11, sin papel ni lápiz. Examina el encasillado de la derecha. Utiliza paréntesis como ayuda para efectuar las siguientes sumas:

23 + 19 + 11 = n
23 + (19 + 11) = n
23 + 30 = n
53 = n

(a) (12 + 8) + 16
(b) 87 + (8 + 92)
(c) (18 + 982) + 767
(d) (13 + 17) + 26
(e) 78 + (36 + 14)
(f) (59 + 11) + 68

12. Halla lo que el número n representa para que cada enunciado matemático sea cierto. Sé cuidadoso. Puede que no haya respuesta, que haya una respuesta, o hasta más de una respuesta.

(a) $(3 + 2) + 8 = n$ ($n = 13$)

(b) $(3 + 2) + n = 8$ ($n = 3$)

(c) $(3 + 2) - n = 8$ (No hay respuesta.)

(d) $1 + n = n$ (No hay respuesta.)

(e) $2 + n = n$ (No hay respuesta.)

(f) $3 + n = n$ (No hay respuesta.)

(g) $n = n$ (Un número cualquiera)

(h) $1 + n = n + 1$ (Un número cualquiera)

(i) $7 + n = n + 7$ (Un número cualquiera)

13. ¿Es $(6 - 4) - 1 = 6 - (4 + 1)$? ¿Por qué? (Sí, porque los dos numerales representan el mismo número)

14. ¿Es $(6 - 4) - 1 = 6 - (4 - 1)$? (No, porque $1 \neq 3$.)

15. PROBLEMA DIFICIL: Construye dos ejemplos análogos a los problemas 13 y 14. ¿Cuál de ellos es cierto y cuál es falso? (Hay varias respuestas posibles.)

16. PROBLEMA DIFICIL: ¿Cuántos números naturales son mayores que 19 y menores que 25? (cinco) ¿Es $n = 25 - 19$ la relación correcta para este problema? (No)

Conjunto de problemas 21

Para cada uno de los problemas del 1 al 3, redacta una pregunta que requiera sumar. (Se dan algunas respuestas como ejemplos.)

1. Tomás y Roberto estaban recogiendo ropas viejas para la campaña de la iglesia. Roberto trabajó durante 45 minutos el lunes y 30 minutos el martes. (¿Cuánto tiempo trabajó Roberto en los dos días?)

2. Tomás visitó 12 casas y Roberto visitó 17 casas. (¿Cuántas casas visitaron en conjunto?)

3. Roberto recogió 15 chaquetas y 21 vestidos. (¿Cuántas piezas de ropa recogió?)

4. Para cada uno de los problemas del 1 al 3, redacta [illegible] pregunta que requiera restar.

Para cada uno de los problemas del 5 al 7 escribe: (a) los números con los cuales se efectúa la operación; (b) el enunciado matemático; (c) el resultado. Dispón tu trabajo en una tabla como la siguiente:

	Números con los cuales se efectúa la operación	Enunciado matemático	Resultado
5.	(12, 8)	(8+m=12 ó 12-8=m)	(4)
6.	(37, 23)	(23+m=37 ó m= 37-23)	(14)
7.	(28, 5)	(5 +m= 28 ó m= 28-5)	(23)

5. ¿Cuánto menos que una docena es 8?

6. Roberto tenía una colección de 37 aeroplanos de juguete. Un día, sólo pudo encontrar 23. ¿Cuántos se habían perdido?

7. Cinco de las 28 niñas en el patio se fueron temprano al interior del edificio escolar. ¿Cuántas se quedaron en el patio?

Conjunto de problemas 22

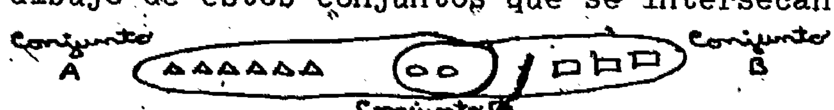
1. Estudia el siguiente enunciado: $(6 - n) - 1 = 6 - (n + 1)$.
   (a) ¿Cuál es el mayor número cardinal que n puede representar? (5)
   (b) ¿Cuál es el menor número cardinal que n puede representar? (0)
   (c) Halla todos los números cardinales que n puede representar. {0, 1, 2, 3, 4, 5}
2. PROBLEMA DIFICIL: Determina qué número cardinal es n para que cada enunciado matemático sea cierto. Sé cuidadoso. Puede que no haya respuesta, una respuesta, o más de una respuesta.
   (a) $n - 1 = 1 - n$ (1)
   (b) $n - 10 = 10 - n$ (10)
   (c) $6 + n = n + 6$ (Un número cardinal cualquiera)
   (d) $n + 50 = 50 + n$ (Un número cardinal cualquiera)
   (e) $n = n - 1$ (Ningún número)
   (f) $10 - n = n$ (5)

Conjunto de problemas 23

CONJUNTO DE PROBLEMAS DIFICILES

Supongamos que tienes dos conjuntos, A y B. El conjunto A tiene 8 miembros y el conjunto B tiene 5 miembros. La intersección de los conjuntos A y B es el conjunto C. El conjunto C tiene dos miembros.

1. Haz un dibujo de estos conjuntos que se intersecan.

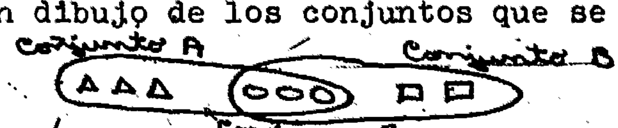


2. ¿Cuántos miembros del conjunto A no están en el conjunto B? (6)
3. ¿Cuántos miembros están en el conjunto B y no están en el conjunto A? (3)
4. ¿Cuántos miembros están en la reunión de los conjuntos A y B? (11)
5. Escribe el enunciado matemático del cual obtuviste la respuesta al problema 4. ($8+5-2=11$ ó $6+3+2=11$)

Supongamos que tienes dos conjuntos, D y E. El conjunto D tiene 8 miembros. El conjunto E tiene 5 miembros. La intersección de los conjuntos D y E es el conjunto F. El conjunto F es un conjunto vacío.

6. Haz un dibujo de estos conjuntos que no se intersecan.

7. ¿Cuántos miembros en el conjunto D no están en el conjunto E? (8)
8. ¿Cuántos miembros en el conjunto E no están en D? (5)
9. ¿Cuántos miembros están en la reunión de los conjuntos D y E? (13)
10. Escribe el enunciado matemático del cual obtuviste la respuesta al problema 9. (8+5 = 13)
11. PROBLEMA MUY DIFICIL: En la Escuela Central hay un club de matemáticas. Los miembros del club son también miembros de ciertos conjuntos. Los miembros del conjunto A han leído la revista, Matemática Popular. Los miembros del conjunto B han leído el libro, La Matemática es Divertida. Los miembros del conjunto C han leído tanto el libro como la revista. El conjunto A tiene 6 miembros, el conjunto B tiene 5 miembros, y el conjunto C tiene 3 miembros.
    (a) ¿Son todos los miembros del conjunto C también miembros del conjunto A? (sí)
    (b) ¿Son todos los miembros del conjunto C también miembros del conjunto B? (sí)
    (c) ¿Cuántos miembros del conjunto C son también miembros del conjunto A? (3)
    (d) ¿Cuántos miembros del conjunto C son también miembros del conjunto B? (3)
    (e) ¿Cuántos miembros tiene la intersección de los conjuntos A y B? (3)
    (f) Haz un dibujo de los conjuntos que se intersecan.



    (g) ¿Cuántos miembros hay en el club? (8)

Capítulo 4

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACION Y DE LA DIVISION

PROPOSITO DE LA UNIDAD

El propósito de esta unidad es ayudar a los estudiantes a entender la naturaleza y las propiedades de la multiplicación y de la división como operaciones de la matemática. Suponemos que los estudiantes tienen alguna práctica de la multiplicación y la división. Necesitan considerar detenidamente la naturaleza de estas operaciones, con el fin de entender más tarde las técnicas para multiplicar y dividir números con numerales de varias cifras. También, necesitan saber de memoria varias combinaciones básicas de la multiplicación. Un propósito de esta unidad es el logro de este conocimiento.

Generalmente, se enseña la multiplicación como un caso especial de la adición, cuando los sumandos son iguales. Aquí, se enseña, principalmente, como una operación matemática con ciertas propiedades características. La costumbre de considerar la multiplicación como una operación de por sí será de gran valor para los estudiantes. Les será muy útil más adelante, cuando estudien la multiplicación de números racionales, donde su relación con la adición es menos directa.

En esta unidad, se destaca el estudio de la multiplicación como una operación. La operación de división se define en términos de la multiplicación. Vemos que la división es una operación con dos números, un producto y un factor, para determinar un factor desconocido. Este enfoque destaca el papel de las combinaciones básicas de la multiplicación. Si los alumnos saben las combinaciones básicas de la multiplicación, no tienen que aprender combinaciones básicas de la división.

Se estudiarán las siguientes propiedades: la propiedad conmutativa de la multiplicación, las propiedades del cero y del uno, la propiedad de clausura, la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición y la propiedad asociativa de la multiplicación.

Una propiedad de la división se estudia detalladamente, a saber, la propiedad distributiva de la división respecto de la adición, porque será de gran utilidad más tarde, cuando se estudie el algoritmo de la "división larga".

BASE MATEMATICA

En la sección Base matemática al comienzo del Capítulo 3 de este libro se definió y se estudió el concepto de una operación matemática. Esta unidad trata, principalmente, de la operación de multiplicación. La división se describe como la operación que trata de obtener un factor desconocido de una multiplicación. En un enunciado matemático de la forma $a \times b = c$, a y b se llaman factores de c, y c es el producto de a y b. Si se dan a y b, se multiplican para obtener c. Si se dan c y a, entonces, c dividido por a es b. Esta operación se denota mediante enunciados de la forma $b = c \div a$.

En relación con esto, se sugiere que el maestro evite el uso del término "cociente". Este término no se necesita y, quizás, tienda a desligar el concepto de la división del de la multiplicación. La división no debe indicarse mediante una raya, como por ejemplo, $6 = \frac{48}{8}$, hasta que se introduzca más adelante la relación de la división con los números racionales.

En toda la unidad, se destacan las analogías y los contrastes entre la adición, la multiplicación, la sustracción y la división. Por ejemplo, la adición y la multiplicación poseen las propiedades conmutativa y asociativa. El conjunto de los números cardinales no es cerrado respecto de la sustracción ni de la división.

Lo mismo que restar un número es lo inverso de sumar el mismo número, dividir por un número (distinto de 0) es lo inverso de multiplicar por el mismo número. Aunque el término "inverso" no se emplea con los estudiantes, éstos pueden entender que dividir por un número "neutralizará" el multiplicar por ese número y que multiplicar por un número "neutralizará" el dividir por ese número. Por ejemplo, si empezamos con el 6 y efectuamos la multiplicación 6×8, obtenemos el producto 48. Si, entonces, dividimos 48 por 8, obtenemos nuevamente el 6. $(6 \times 8) \div 8 = 6$. Análogamente, $(12 \div 3) \times 3 = 4 \times 3 = 12$. Es en este sentido, de hacer y deshacer o neutralizar, que esperamos que los alumnos entiendan la relación inversa que hay entre la multiplicación y la división.

El cero y el uno juegan papeles especiales en la multiplicación y la división. La propiedad caracterísitca del 0 es que, para todo número cardinal a, $0 \times a = a \times 0 = 0$. También, $1 \times a = a \times 1 = a$ es una propiedad característica del número uno.

La situación para la división es más complicada. Si c denota un número cardinal cualquiera, entonces, $c \div 1 = c$. Si c denota un número natural cualquiera, entonces, $0 \div c = 0$, pero $c \div 0$ no tiene sentido. La expresión $0 \div 0$ es ambigua. Estas propiedades se deducen de la definición de $c \div a = b$ como otra manera de escribir $a \times b$.

Debido a que el producto de todo par de números cardinales es un número cardinal, decimos que el conjunto de los números cardinales es <u>cerrado</u> respecto de la multiplicación. El conjunto de los números cardinales <u>no</u> es cerrado respecto de la división. Los estudiantes no utilizarán este lenguaje, pero podrán entender que en el conjunto de los números cardinales, aunque la operación de multiplicación es siempre posible, la operación de división no lo es siempre.

Debe repetirse con insistencia que en esta unidad <u>efectuamos operaciones con números cardinales para obtener otro número cardinal</u>. $13 \div 6$ no tiene sentido como operación con números cardinales. El que el conjunto de los números fraccionarios es cerrado respecto de la operación de división es inaplicable al contexto de esta unidad.

Invertir el orden de los factores (7×9 ó 9×7), no altera el producto. Esta propiedad se llama la propiedad conmutativa de la multiplicación. Reduce efectivamente el número de combinaciones básicas de la multiplicación que hay que recordar y es muy útil para simplificar los cálculos.

La propiedad distributiva establece la relación entre la multiplicación y la adición. Es la proposición más general acerca del papel de la adición en la determinación de productos. La mejor manera de explicarla es utilizando ejemplos y una fórmula simbólica general. Por ejemplo, 7×13 puede escribirse en la forma $7 \times (10 + 3)$. La relación

$$7 \times (10 + 3) = (7 \times 10) + (7 \times 3)$$

ilustra la propiedad distributiva y muestra cómo puede utilizarse dicha propiedad para reducir un problema a combinaciones básicas de la multiplicación y de la adición. La propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición puede enunciarse de un modo general, así:

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

Debido a que la multiplicación es una operación conmutativa, también, podemos escribir

$$(b + c) \times a = (b \times a) + (c \times a).$$

Hay, también, una propiedad distributiva de la división que viene dada por la fórmula $(b + c) \div a = (b \div a) + (c \div a)$. Un ejemplo es el siguiente:

$$(9 + 6) \div 3 = (9 \div 3) + (6 \div 3).$$

Esto es cierto, pues $15 \div 3 = 3 + 2$.

Se debe tener precaución al dar ejemplos de esta propiedad. Si efectuamos la operación con miembros del conjunto de los números racionales, el enunciado $(8 + 7) \div 3 = (8 \div 3) + (7 \div 3)$ tiene sentido y es cierto, porque dice que $\frac{15}{3} = \frac{8}{3} + \frac{7}{3}$. No tiene sentido, si se refiere al conjunto de los números cardinales, porque las divisiones $8 \div 3$ y $7 \div 3$ no pueden efectuarse, utilizando números cardinales solamente.

Hay dos maneras de multiplicar los números 7, 9 y 2, tomando los números en ese orden. Una, se indica mediante la expresión $(7 \times 9) \times 2$. La otra es $7 \times (9 \times 2)$. El que en los dos casos se obtenga el mismo resultado ($63 \times 2 = 126$ y $7 \times 18 = 126$) es un ejemplo de la aplicación de la propiedad asociativa de la multiplicación. El enunciado general viene dado por

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

En consecuencia, podemos interpretar la expresión $a \times b \times c$ de cualquiera de las dos maneras, sin que esto altere el producto.

ENSEÑANZA DE LA UNIDAD

Este capítulo está organizado de la siguiente manera:

1. Se presentan exploraciones que aparecen solamente en el Comentario para el maestro.
2. Hay varias exploraciones y secciones tituladas Trabajo en grupo que aparecen en el Texto del estudiante.

Se recomienda que el maestro siga la Exploración del Comentario para el maestro antes de la Exploración y la parte titulada Trabajo en grupo que aparecen en el Texto del estudiante. Este material se planeó para ser leído y analizado con los estudiantes. En muchos casos, la Exploración y las secciones titulados Trabajo en grupo sirven como resúmenes y ofrecen a los alumnos un resumen de las ideas estudiadas en la unidad. No se espera que los alumnos hagan todos los problemas. Por otra parte, quizás, haya que suplementar algunos conjuntos de problemas, en algunos casos, con trabajo adicional.

Durante todo el estudio de la multiplicación, se utilizan disposiciones en cuadro como modelos reales con los cuales se asocia esta operación. El uso de disposiciones en cuadro no implica que los alumnos dejen de aprender algunas combinaciones básicas de la multiplicación para uso inmediato. Las disposiciones sirven simplemente de ayuda para facilitar la comprensión. El conocimiento de combinaciones básicas de la multiplicación es necesario, antes de que se estudien divisiones y multiplicaciones más complicadas.

LAS DISPOSICIONES EN CUADRO

Objetivo: Ayudar a los estudiantes a comprender cómo pueden utilizarse las disposiciones en cuadro para describir:

1. el apareamiento de dos conjuntos de objetos
2. la ordenación de objetos o elementos de un conjunto

Materiales: Discos de papel engomado para presentar disposiciones en cuadro; papel cuadriculado con cuadrados de $\frac{1}{4}$ de pulgada de lado, para que los estudiantes construyan disposiciones; regla; lápices de colores.

Vocabulario: Disposición en cuadro, fila, columna, elementos

Exploración: Susana tiene tres blusas nuevas, una blanca, otra gris y otra verde. Tiene dos faldas nuevas, una roja y otra azul.

¿Cuántas veces puede venir a la escuela usando una combinación distinta de falda y blusa? (Puede usar una blusa blanca y una falda roja un día. Puede usar una blusa blanca y una falda azul otro día, etc. Puede ir a la escuela 6 veces, usando una combinación distinta de blusa y falda.)

> Quizás, los alumnos necesiten ver representadas las diferentes combinaciones o apareamientos antes de disponerlas en una tabla. Una manera de representarlas es la siguiente:
>
> RB, RG, RU
> AB, AG, AV
>
> El uso de trozos de franela sobre un tablero de fieltro puede también resultar eficaz.

Construyamos una tabla:

	Blusa blanca	Blusa gris	Blusa verde
Falda roja			
Falda azul			

Susana puede usar una falda roja y una blusa blanca una vez. Pondré una marca en la tabla debajo de <u>Blusa blanca</u> y a la derecha de Falda roja. Describan otros apareamientos posibles y coloquen las marcas en la tabla. (Susana puede usar una falda azul y una blusa blanca, etc.)

Debe continuarse este análisis hasta que se haya completado la tabla.

El número de apareamientos representados por todas las marcas en la tabla puede determinarse, contando o sumando. Algunos estudiantes, quizás, utilicen lo que ya saben acerca de la multiplicación para ver rápidamente que el número total de marcas es el producto del número de marcas en cada fila por el número de marcas en cada columna. Sin embargo, convendrá en cada clase, analizar la tabla en términos de contar y sumar. Hay varias maneras de determinar el número de marcas en una tabla cualquiera. Una de ellas se ilustra del modo siguiente:

. 1	. 3	. 5
. 2	. 4	. 6

Otra se ilustra mediante la tabla siguiente:

. 1	. 2	. 3
. 4	. 5	. 6

Los elementos en cada una de las tablas (disposiciones en cuadro) utilizadas en las sugerencias presentadas en el resto de esta Exploración pueden contarse de varias maneras. Cuando, por primera vez, se construyen tablas en la pizarra o las construyen los estudiantes, deben escribirse numerales al lado de cada marca. Esta práctica resultará útil más adelante, cuando, en vez de contar, se sume. Si al principio algunos estudiantes cuentan los miembros de las disposiciones, el maestro debe permitirlo. El objetivo principal del trabajo en clase es lograr que se hagan observaciones como las siguientes: (1) Hay 6 apareamientos de 2 faldas con 3 blusas. (2) Esto significa que una tabla (disposición en cuadro) con 2 filas y 3 columnas consiste en 6 elementos. Obsérvese que se acostumbra nombrar primero las filas y, después, las columnas. En la disposición

hay 2 filas y 3 columnas. Esta es una disposición 2 por 3.

Continúese haciendo preguntas hasta que se vea claramente que los estudiantes han comprendido la explicación. Pueden hacerse preguntas como las siguientes:

1. ¿Cuántos apareamientos diferentes podría hacer Susana con la falda roja y las 3 blusas?
2. ¿Cuántos apareamientos diferentes podría hacer con la falda azul y las 3 blusas?
3. ¿Cuántos apareamientos diferentes podría hacer con las 2 faldas y las 3 blusas?
4. ¿Cómo se puede representar cada apareamiento en la pizarra?

Si la mamá de Susana le compra una blusa marrón, tendría 2 faldas y 4 blusas. Ahora, ¿cuántas veces podría ir a la escuela vistiendo una combinación diferente de falda y blusa?

	Blusa blanca	Blusa gris	Blusa verde	Blusa marrón
Falda roja	.	.	.	.
Falda azul	.	.	.	.

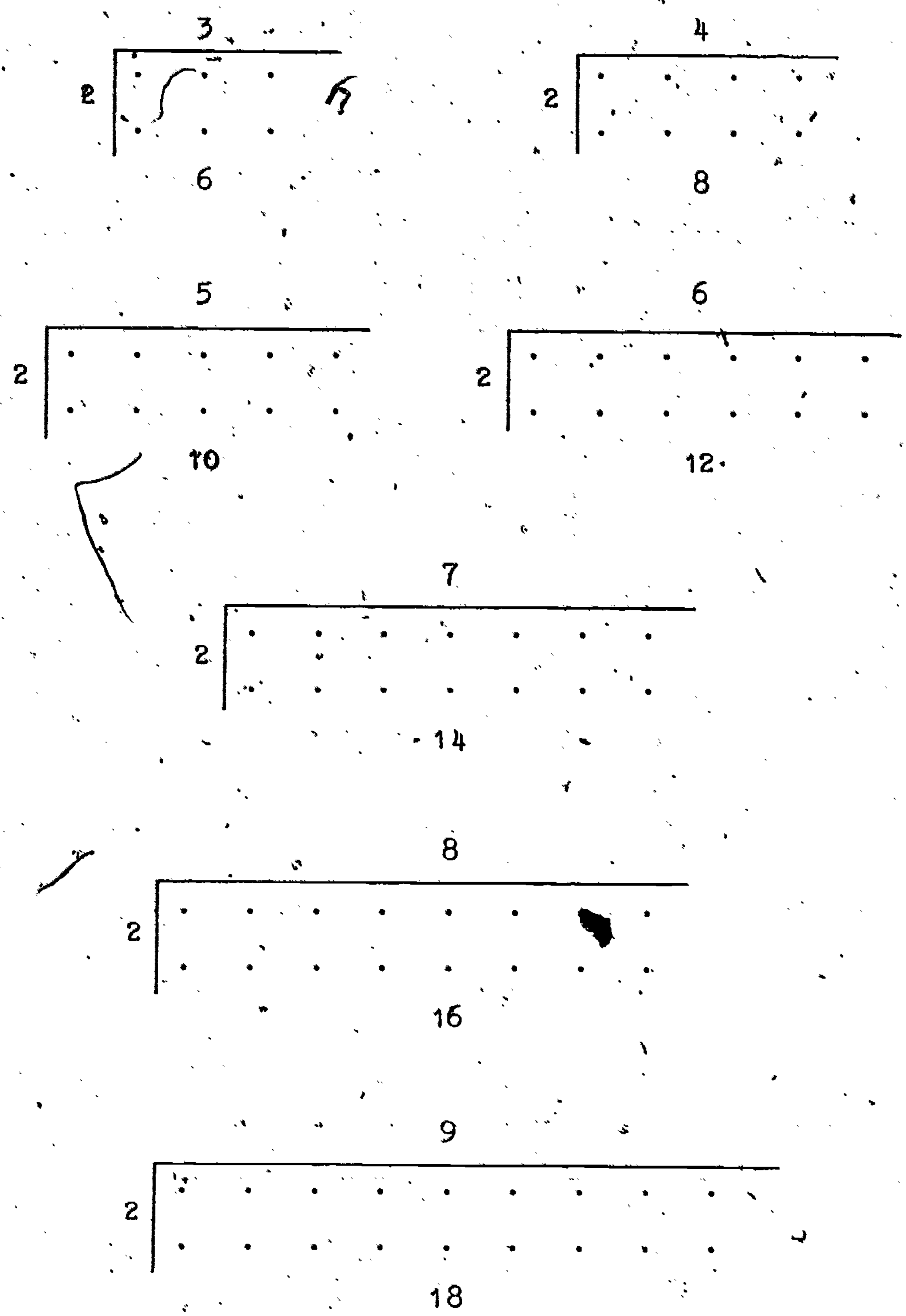
El mismo tipo de preguntas que se hicieron al estudiar la disposición anterior pueden emplearse en el caso de esta disposición.

Hagamos una tabla con marcas para indicar el apareamiento de 2 faldas y 5 blusas. Hagamos una marca para cada par.

Utilícense las preguntas anteriores.

Examinemos todas las tablas que hemos construido. Las pondré en la pizarra en forma ordenada, empezando con la que corresponde al caso en que Susana tenía 2 faldas y 3 blusas, después la que corresponde al caso en que Susana tenía 2 faldas y 4 blusas, etc. Indicaré con un numeral el número de filas y columnas de marcas.

He aquí las tablas; hagamos otras tablas para representar los casos para los cuales Susana tenga 6 blusas, 7 blusas, etc.



Respecto de la primera tabla, ¿qué preguntas podríamos contestar? (¿Cuántas veces puede Susana ir a la escuela vistiendo una combinación diferente de falda y blusa, si tiene 2 faldas y 3 blusas?)

Estúdiense otras tablas de manera parecida.

¿Son parecidas las tablas anteriores? (Sí, cada una tiene 2 filas de marcas.) ¿Son diferentes las tablas anteriores? (Sí, cada una tiene un número de columnas diferentes.) ¿Podrían reunirse todas en una sola tabla, de manera que pudiera utilizarse esta tabla para contestar todas nuestras preguntas acerca de Susana? (Sí, necesitamos solamente la última tabla. Utilizando esta tabla, podemos contestar todas las preguntas. Podemos utilizar solamente la parte de la tabla que necesitemos.) Borraré todas las tablas, salvo la última, si Uds. convienen en que no las necesitamos. ¿Convienen en ello? Borraré también los numerales 9 y 18.

En esta tabla, hemos omitido las palabras faldas y blusas. ¿Podrían todavía contestar preguntas acerca del número de veces que Susana puede ir a la escuela vistiendo diferentes combinaciones de falda y blusa? (Sí, si Susana tiene 2 faldas y 7 blusas, puede ir a la escuela vistiendo 14 combinaciones diferentes de falda y blusa.)

E127

Capítulo 4

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACION Y DE LA DIVISION

DISPOSICIONES

Exploración

Juan fue a la tienda de helados a comprar bizcocho y helado. En la tienda, se venden 3 clases de bizcocho, de chocolate, de ángel y de coco; y 4 sabores de helado, vainilla, chocolate, fresa y cereza. ¿Cuántas elecciones de una clase de bizcocho y una clase de helado puede hacer? Copia los siguientes títulos en la pizarra y haz una gráfica de sus elecciones:

	Helado de vainilla	Helado de chocolate	Helado de fresa	Helado de cereza
Bizcocho de chocolate	·	·	·	·
Bizcocho de ángel	·	·	·	·
Bizcocho de coco	·	·	·	·

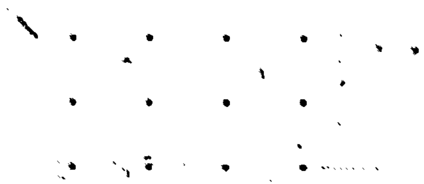
Utiliza la gráfica para contestar las siguientes preguntas:

¿Cuántas elecciones podrá hacer con 1 clase de bizcocho y 4 sabores de helado? (4)

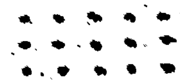
¿Cuántas elecciones podrá hacer con 2 clases de bizcocho y 4 sabores de helado? (8)

¿Cuántas elecciones podrá hacer con 3 clases de bizcocho y 4 clases he helado? (12)

¿Podríamos hacer una gráfica de sus elecciones, sin usar las palabras bizcocho y helado y representando dichas elecciones mediante puntos? (Sí) ¿Se vería la gráfica así? (Sí)

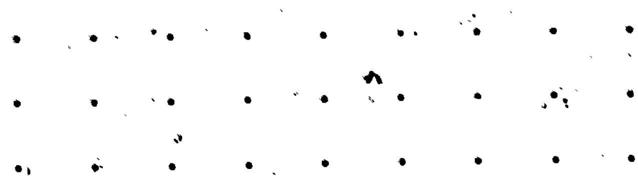


Si se añadiera el helado de menta a sus posibles elecciones de sabores de helado, ¿cuántas elecciones de tres clases de bizcocho y cinco sabores de helado podría hacer? (15) Haz una gráfica para contestar la pregunta.



Haz otras gráficas para mostrar que Juan tiene 6 posibles elecciones de sabores de helado, 7 posibles elecciones de sabores de helado, 8 posibles elecciones de sabores de helado y 9 posibles elecciones de sabores de helado. Mediante estas gráficas, ¿qué preguntas puedes contestar? (Preguntas acerca de las elecciones de Juan) ¿En qué se parecen las gráficas? (Se parecen en que todas tienen 3 filas de puntos) ¿En qué difieren? (Difieren en que cada gráfica tiene un número diferente de columnas) ¿Puedes usar una gráfica para contestar todas las preguntas acerca de las posibles elecciones de Juan? (Sí, necesitamos solamente una gráfica. Podemos utilizar sólo la parte de la gráfica que necesitemos.)

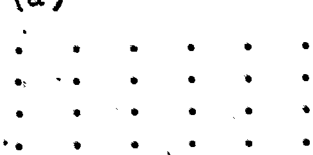
¿Resultaría tu gráfica así?



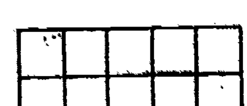
Esta gráfica se llama una disposición en cuadro. Es un arreglo ordenado de objetos en filas y columnas. En esta disposición en cuadro hay 3 filas y 9 columnas. Hay 27 elementos en la disposición.

¿Qué disposiciones en cuadro se muestran a continuación? (La disposición (a) es una disposición 4 por 6. La disposición (b) es una disposición 2 por 5.)

(a)



(b)



¿Cuántas filas hay en la disposición (a)? (4 filas)

¿Cuántas columnas hay en la disposición (a)? (6 columnas)

¿Cuántas filas hay en la disposición (b)? (2 filas)

¿Cuántas columnas hay en la disposición (b)? (5 columnas)

¿Cuántos elementos hay en cada disposición? (En la disposición (a) hay 24 elementos. En la disposición (b) hay 10 elementos.)

Hemos visto que una disposición en cuadro puede utilizarse para representar todos los apareamientos de los elementos de un conjunto con los de otro. Las disposiciones en cuadro son útiles en otros casos. Algunos conjuntos de objetos están arreglados de por sí en disposiciones en cuadro. He aquí algunos ejemplos:

a) huevos en su envase
b) vidrieras en una tienda
c) asientos en un auditorio
d) dulces en una caja
e) losetas de linolium en el piso de un cuarto, etc.

¿Puedes pensar en algunos conjuntos de objetos arreglados en disposiciones en cuadro que puedan agregarse a la lista de los ejemplos?

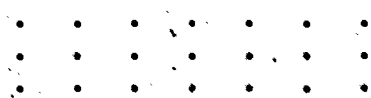
Dibuja una disposición de puntos que represente un posible arreglo de 15 vidrieras en una tienda. ¿Cuántas vidrieras hay en una tienda, formando una disposición 3 por 4? (12)

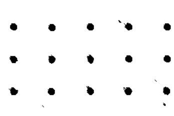
> El maestro deberá estar dispuesto a contestar preguntas relacionadas con los dos usos diferentes de las disposiciones en cuadro, para representar apareamientos de helados y bizcochos, sin describir los helados ni los bizcochos. Sin embargo, en los ejemplos anteriores, los objetos que se estudian forman de por sí una disposición en cuadro y las marcas redondas que se utilizan en tal disposición representan efectivamente esos objetos.

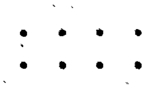
Conjunto de problemas 1

1. Copia la siguiente tabla; utiliza las disposiciones en cuadro que aparecen más adelante, para ayudarte a completar la tabla:

Ejercicio	Filas	Columnas
Ejemplo:	3	7
a.	4	5
b.	3	4
c.	4	2
d.	4	1
e.	6	6
f.	5	8

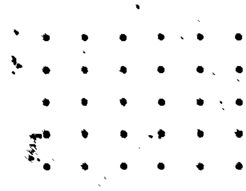
Ejemplo: 

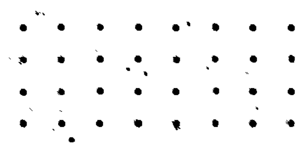
a. 

b. 

c. 

d. 

e. 

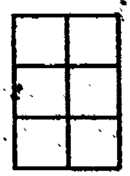
f. 

2. Copia y llena la tabla que sigue:

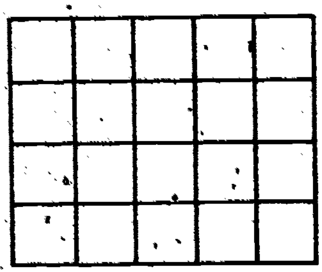
Ejercicio	Filas	Columnas	Elementos
Ejemplo:	2	5	10
a.	3	2	6
b.	4	5	20
c.	3	5	15
d.	5	5	25
e.	7	4	28

Ejemplo:

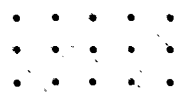
a.



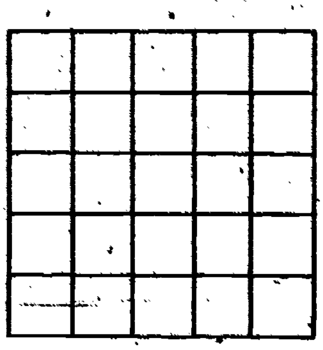
b.



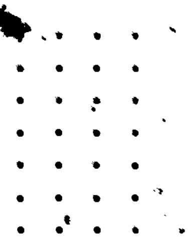
c.



d.



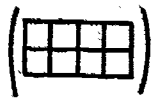
e.



CONSTRUCCION DE DISPOSICIONES EN CUADRO

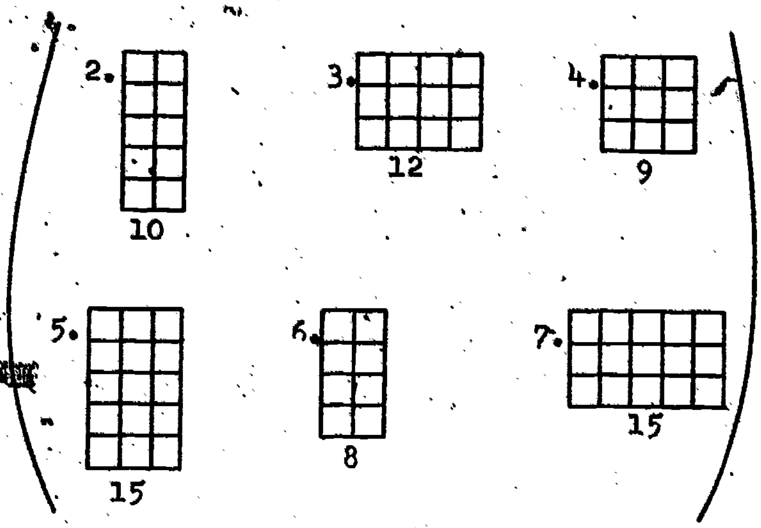
Conjunto de problemas 2

1. Dibuja una disposición en cuadro que tenga 2 filas y 4 columnas.



Para cada uno de los siguientes pares de números, dibuja una disposición en cuadro. El primer número dice el número de filas y el segundo número dice el número de columnas. Debajo de cada disposición, escribe el número de elementos en la misma.

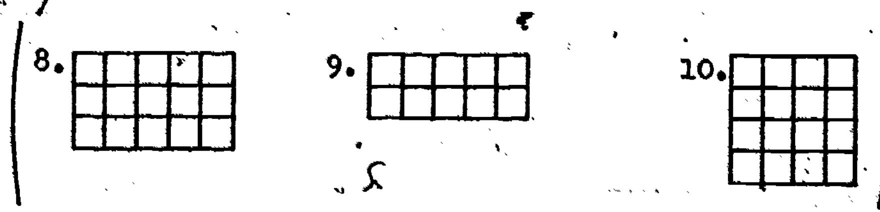
2. 5 , 2
3. 3 , 4
4. 3 , 3
5. 5 , 3
6. 4 , 2
7. 3 , 5



8. Dibuja una disposición en cuadro de 15 elementos que tenga 3 filas.

9. Dibuja una disposición en cuadro que conste de 10 elementos y 5 columnas.

10. Dibuja una disposición en cuadro que conste de 16 elementos y 4 filas.



LA MULTIPLICACION

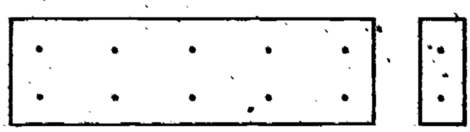
Objetivo: Ayudar a los estudiantes a comprender que la multiplicación es una operación con dos números para obtener un tercer número.

Materiales: Tablero de fieltro y figuras recortadas para utilizarse con la tabla de la página 255

Vocabulario: Multiplicación, operación

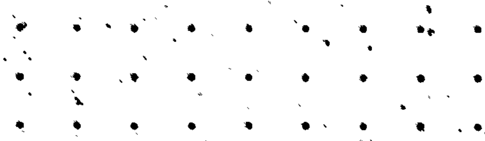
Exploración: ¿Tendremos que contar las marcas en una disposición en cuadro 2 por 5, o en una 2 por 6, o en una 2 por 7, para determinar el número de apareamientos de un conjunto de 2 elementos con otros conjuntos? ¿Habrá una manera más corta de determinarlo? Una disposición 2 por 5 puede descomponerse en 5 disposiciones 2 por 1.

Por tanto, la disposición tiene 2 + 2 + 2 + 2 + 2, o sea, 10 elementos. Una disposición 2 por 6 puede descomponerse en una disposición 2 por 5 y una disposición 2 por 1.



De este modo, vemos que tiene 10 + 2 ó 12 elementos. ¿Ve alguno de Uds. una manera más corta de emplear la adición para determinar el número de elementos de una disposición 2 por 6? (Se descompone en dos disposiciones 1 por 6. Esto muestra que hay 6 + 6 ó 12 elementos.)

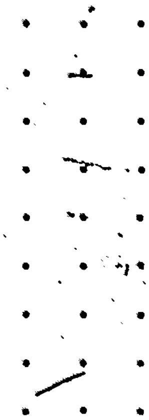
Consideremos ahora dos disposiciones. Una de ellas tiene 2 filas y 9 columnas. La otra tiene 3 filas y 9 columnas. ¿Cómo podemos utilizarlas? (Podemos utilizar la disposición 2 por 9, para determinar el número de apareamientos de un conjunto de 2 elementos con un conjunto cualquiera de 9 elementos o menos. Podemos utilizar la disposición 3 por 9, para hallar el número de apareamientos de una disposición compuesta por un conjunto de 3 elementos con un conjunto cualquiera de 9 elementos o menos.)



Disposición A

Disposición B

Construiré otras dos disposiciones en la pizarra.



Disposición C

Disposición D

¿Qué notan en las disposiciones A y C? (Tienen el mismo número de elementos.) La disposición A tiene 2 filas y 9 columnas. La disposición C tiene 9 filas y 2 columnas.) ¿Podríamos utilizar A para indicar la disposición de 8 sillas en un salón? (Sí, podrían colocarse, de manera que formen una disposición 2 por 4.) ¿Podríamos utilizar la disposición C? (Sí, podríamos pensar en cuatro filas de sillas con 2 sillas en cada fila. En realidad, no hay diferencia. Lo que necesitamos es una disposición en cuadro con 2 elementos en un lado y 4 elementos en el otro.) ¿Podríamos utilizar las dos disposiciones para contestar otras preguntas? (Sí)

¿Qué notan en las disposiciones B y D? (Pueden utilizarse para contestar las mismas preguntas. Cada una tiene 3 elementos en un lado y 9 elementos en el otro.)

Examinen las dos disposiciones y contesten las preguntas siguientes:

a) ¿Cuántos apareamientos pueden hacer de un conjunto de 3 elementos con un conjunto de 4 elementos? (12)

b) ¿Cuántos apareamientos pueden hacerse con un conjunto de 5 elementos y un conjunto de 2 elementos? (10)

c) ¿Cuántas marcas contendrá una disposición en cuadro, si los dos conjuntos que se aparean tienen 5 elementos y 3 elementos? (15)

d) ¿Cuántas marcas contendrá una disposición en cuadro, si los dos conjuntos que se aparean tienen 3 elementos y 6 elementos? (18)

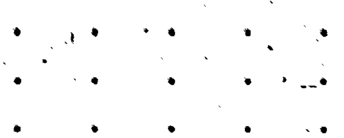
En estas preguntas, les dije el número de elementos que contenía cada uno de los dos conjuntos. ¿Qué me dijeron ustedes a mí? (El número de elementos en una disposición en cuadro que
7 representa el apareamiento de los miembros de 2 conjuntos.)

Ahora, presentamos una tabla que da el número de elementos de cada uno de los dos conjuntos. Escriban el número de elementos de la disposición en cuadro que indica los apareamientos de los dos conjuntos.

Número de elementos en cada uno de los dos conjuntos	Número de apareamientos en la disposición en cuadro
2, 2	4
2, 3	6
2, 4	8
2, 5	10
.	.
.	.
.	.
6, 2	12
7, 2	14
8, 2	16
9, 2	18

Al construir esta tabla, dados 2 números, puede obtenerse un tercer número. Dados 6 y 2, puede obtenerse 12. ¿Cómo podríamos pensar en 3 y 5 para obtener 15? Tenemos frase que describe la acción de "Pensar en dos números para obtener un tercer número". ¿Cuál es esa frase? (Cuando pensamos en dos números para obtener un tercer número, efectuamos una operación con los dos números.)

Cuando consideramos el número de elementos de un conjunto y el número de elementos de otro y pensamos en los apareamientos de los mismos, asociamos el número de apareamientos con la operación llamada multiplicación. Estos apareamientos pueden disponerse en forma ordenada, donde el número de filas corresponde al número de elementos de un conjunto, y el número de columnas al número de elementos del otro conjunto.

> Puesto que la mayoría de los grupos habrán considerado la multiplicación como una operación derivada de la adición, será necesario identificar las dos descripciones de la operación:
>
> a) se piensa en 3 y 5 y se obtiene la suma 5 + 5 + 5, y
>
> b) se piensa en 3 y 5 y se obtiene el número de elementos en una disposición 3 por 5. Puede ser útil, analizar varios diagramas parecidos al siguiente, basados en los casos ya considerados:
>
> 
>
> $$\begin{array}{r} 5 \\ 5 \\ \underline{5} \\ 15 \end{array}$$

Empecemos con un conjunto de 5 elementos y un conjunto de 4 elementos y formemos una disposición en cuadro para representar los apareamientos.

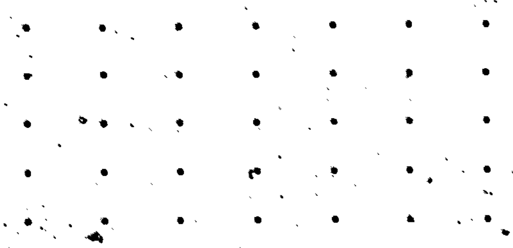
¿Cuántos elementos hay en la disposición? (20) ¿Con qué dos números empezamos? (5 y 4) ¿Qué número es el resultado? (20) ¿Qué operación utilizamos? (La multiplicación)

Examinemos un problema en el que se utilice una disposición en cuadro y la operación de multiplicación: "En un salón, hay 5 filas de sillas. En cada fila, hay 7 sillas.

¿Cuántas sillas hay en el salón?

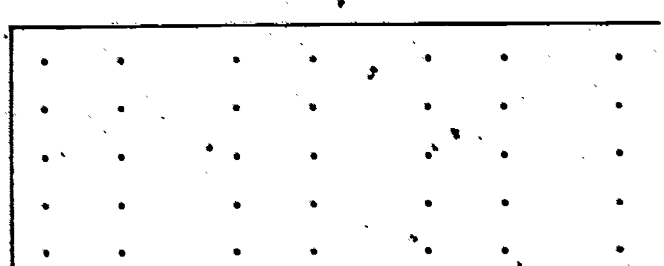
Dibujemos una disposición en cuadro para indicar cómo están dispuestas las sillas.

7

5  $5 \times 7 = r$

Escriban el enunciado matemático que expresa la operación con los dos números 5 y 7 y el resultado, r. ($5 \times 7 = r$)

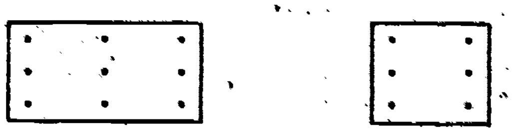
¿Saben el número que r representa? (35) ¿Cómo determinaron que era 35? (Véase la siguiente nota para el maestro.)

> Debe procurase que los alumnos describan todos los métodos que conocen para determinar 5×7, incluyendo "saber que $5 \times 7 = 35$".
>
> Para obtener 35, pueden descomponer la disposición, como se muestra a continuación:
>
> 2 2 2 1
>
> 5 

Podemos determinar de varias maneras el número de marcas en la disposición 5×7. Algunas son más fáciles que otras; pero una vez sabemos que $5 \times 7 = 35$, podemos dejar a un lado los demás métodos. Cada vez que tenemos una disposición de 5 filas y 7 columnas, sabemos que tiene 35 elementos. Simplemente, es más fácil y más rápido recordar esto.

$5 \times 7 = 35$ es una de las combinaciones básicas de la multiplicación. Ya conocen varias combinaciones básicas de la multiplicación. Nombren algunas. ($2 \times 3 = 6$, $5 \times 6 = 30$, etc.)

Muy pronto aprenderemos otras, que harán más fácil y más rápido nuestro trabajo.

> Para determinar productos que no conocen, los alumnos pueden descomponer las disposiciones en cuadro por columnas y utilizar productos conocidos. Por ejemplo: para determinar 3×5, se puede descomponer una disposición 3 por 5, así:
>
> 
>
> $3 \times 3 = 9$ $\quad$ $3 \times 2 = 6$
>
> De modo que $3 \times 5 = (3 \times 3) + (3 \times 2) = 9 + 6 = 15$. Si se sabe que $3 \times 4 = 12$, la descomposición puede hacerse en la última columna, mostrando que $3 \times 5 = (3 \times 4) + (3 \times 1) = 12 + 3 = 15$.
>
> Advertencia: Esta formulación escrita sólo es para la consideración del maestro y no debe presentárseles a los estudiantes en este momento.

Si empezáramos con un conjunto de 36 elementos y un conjunto de 424 elementos, ¿podríamos construir una disposición en cuadro para indicar sus apareamientos? Necesitaríamos una hoja de papel muy grande y tendríamos que emplear mucho tiempo para construir una disposición en cuadro con los dos conjuntos.

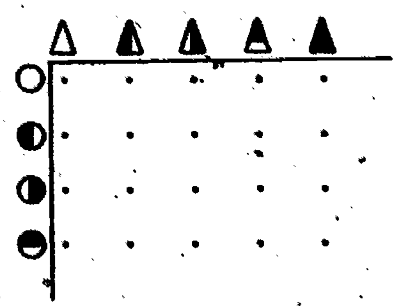
Aprenderemos a multiplicar números, sin tener que construir disposiciones en cuadro. Esto no requerirá tanto papel ni tanto tiempo. Así es como la matemática nos es útil. Nos ayuda a pensar acerca de los números, de manera sencilla.

MULTIPLICACION

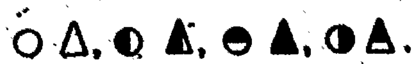
Una operación con números es una forma de relacionar dos números para obtener un número y sólo uno. Cuando pensamos en 4 y 5 y obtenemos 20, llamamos a esta operación, multiplicación.

Usamos disposiciones en cuadro como ayuda para entender la multiplicación.

¿Cuál es una disposición en cuadro que muestra todos los apareamientos de un conjunto de 4 elementos con un conjunto de 5 elementos? Hay 20 apareamientos.



Algunos ejemplos de estos apareamientos son:



Observa que se necesitan dos objetos para hacer 1 apareamiento. Trata de dibujar algunos otros apareamientos posibles.

La disposición en cuadro nos da una representación del enunciado matemático, $4 \times 5 = 20$. Leemos esto "4 por 5 es igual a 20". Primero, escribimos el número de filas y, después, el número de columnas.

$$\underset{\text{filas}}{4} \times \underset{\text{columnas}}{5} = \underset{\text{elementos}}{20}$$

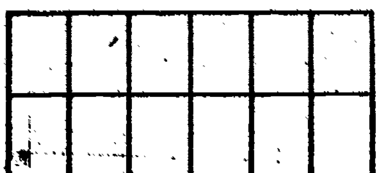
> Quizás, el maestro quiera utilizar un tablero de fieltro para ampliar esta explicación.

REDACCION DE ENUNCIADOS MATEMATICOS

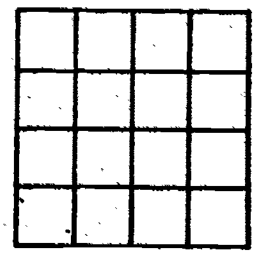
Conjunto de problemas 3

Escribe el enunciado matemático que corresponde a cada una de estas disposiciones en cuadro.

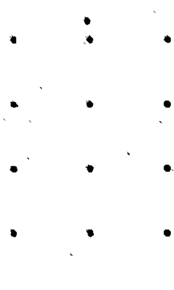
> En todos los casos, hemos dado primero el número de filas. Los alumnos deben pensar de esta manera: Por ejemplo, en el problema 1, hay 2 filas y 6 columnas. El enunciado matemático tiene que ser $2 \times 6 = 12$.

1. 

($2 \times 6 = 12$)

2. 

($4 \times 4 = 16$)

3. 

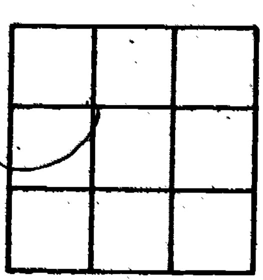
($5 \times 3 = 15$)

4. 

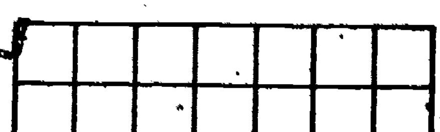
($4 \times 5 = 20$)

5. 

($5 \times 2 = 10$)

6. 

($3 \times 3 = 9$)

7. 

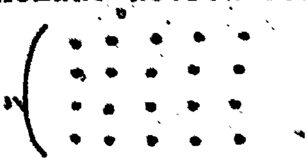
($2 \times 7 = 14$)

EL USO DE LAS DISPOSICIONES EN CUADRO

Conjunto de problemas 4

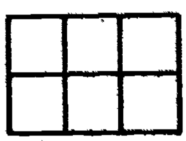
> Quizás, el maestro quiera hacer de este ejercicio una tarea de clase, dependiendo del nivel de adelanto.

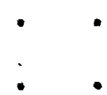
1. Cuatro escuelas elementales tienen cada una un equipo de baloncesto de 5 jugadores. Dibuja una disposición en cuadro en la que un punto represente a cada jugador. Mediante una disposición en cuadro, representa el número de jugadores. Escribe el enunciado matemático. ¿Qué dice este enunciado acerca del número total de jugadores en el equipo?



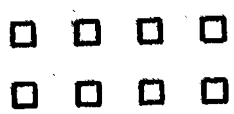
$4 \times 5 = 20$
Hay 20 jugadores en el equipo

Para cada una de las siguientes disposiciones en cuadro, redacta un problema en el cual se pueda utilizar la disposición como auxiliar para hallar la respuesta.

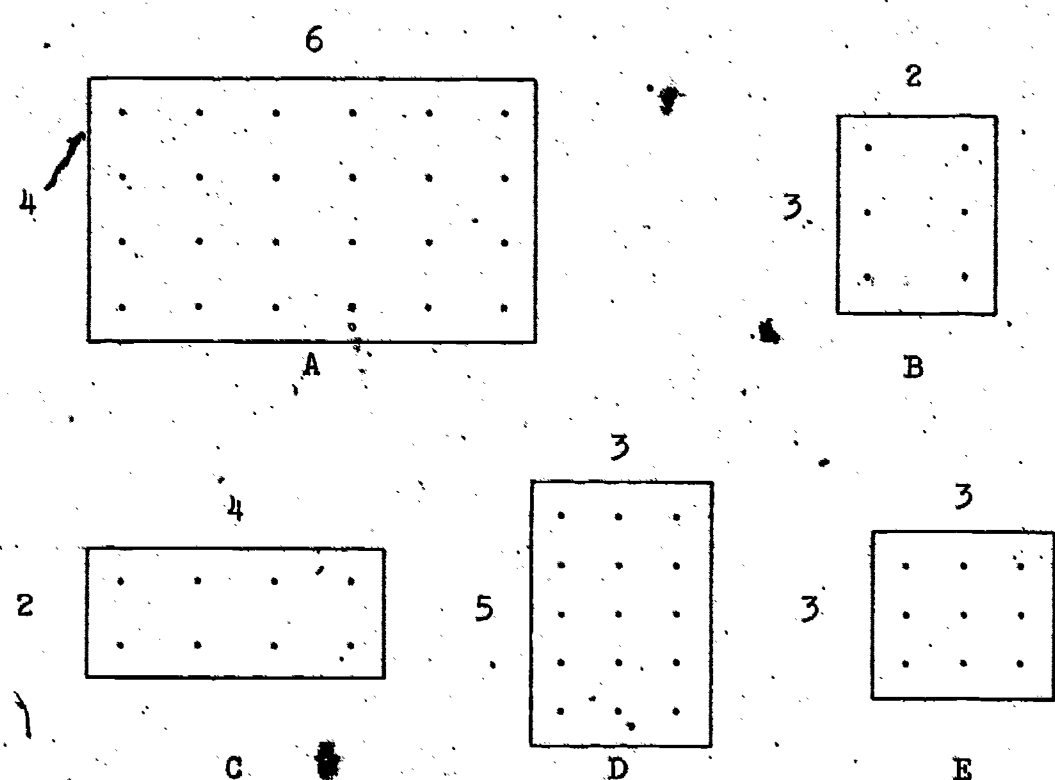
2. 

3. 

4. 

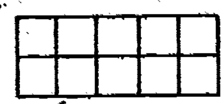
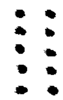
5. 

Quizás, el maestro quiera analizar las siguientes disposiciones, antes de resolver los problemas del 8 al 11. Ejemplo: La disposición A tiene 4 filas, 6 columnas y 24 elementos.

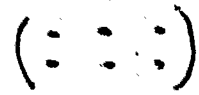


6. Tres equipos de la escuela Campos van a jugar. Tres equipos de la escuela Las Américas van a jugar. ¿Cuál de las disposiciones en cuadro anteriores indica el número de juegos que pueden concertarse si cada equipo de la escuela Campos juega una vez nada más con cada equipo de la escuela Las Américas? (E)
7. El Sr. Ortiz va a comprar un automóvil. La compañía ofrece capotas en 5 colores y carrocerías en 3 colores. ¿Cuál de las disposiciones en cuadro anteriores expresan el número posible de combinaciones de colores? (D)
8. María tiene 4 muñecas y 6 vestidos. ¿Cuál de las disposiciones en cuadro anteriores indica cuántos apareamientos de muñecas y vestidos puede hacer María? (A)

9. Tres niños tocan el violín y otros dos niños tocan el piano. ¿Cuál de las disposiciones en cuadro anteriores indica cuántos duetos se pueden tocar, de manera que cada violinista toque con cada pianista? (B)

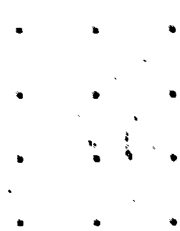
10. Susana tiene 2 relojes y 5 pulseras de colores diferentes. Construye una disposición en cuadro para indicar de cuántas maneras puede Susana combinar sus relojes y sus pulseras. ( ó )

   a. ¿Cuántas filas debe tener la disposición? (2 ó 5)
   b. ¿Cuántas columnas debe tener la disposición? (5 ó 2)
   c. ¿De cuántas maneras puede Susana combinar sus relojes y sus pulseras? (10)

11. Pablo tiene 2 corbatas y 3 pañuelos de colores. Dibuja una disposición en cuadro para expresar de cuántas maneras puede combinar sus corbatas y sus pañuelos. 

   a. ¿Cuántas filas tiene la disposición? (2)
   b. ¿Cuántas columnas tiene la disposición? (3)
   c. ¿Cuántas combinaciones puede hacer Pablo? (6)

12. Linda tiene algunos collares y algunos brazaletes. He aquí una disposición en cuadro que muestra todas las maneras de aparear sus collares y sus brazaletes.



   a. Si Linda tiene 4 collares, ¿cuántos brazaletes tiene? (3)
   b. Escribe un enunciado matemático que corresponda a esta disposición. ($4 \times 3 = 12$)
   c. ¿De cuántas maneras puede Linda aparear sus collares y brazaletes? (12)

PROBLEMAS

Conjunto de problemas 5

Escribe un enunciado matemático que corresponda a cada problema. Dibuja una disposición en cuadro, si la necesitas. Empezando con el problema 4, debes asegurarte de que contestas cada pregunta mediante un enunciado completo.

1. Escribe el enunciado matemático que expresa los apareamientos de un conjunto de 2 cosas con un conjunto de 9 cosas. ($2 \times 9 = 18$)

2. Escribe el enunciado matemático que expresa los apareamientos de un conjunto de 2 objetos y un conjunto de 3 objetos. ($2 \times 3 = 6$)

3. ¿En cuántas disposiciones en cuadro pueden arreglarse 12 puntos? (6) Escribe los enunciados matemáticos.

$$\left(\begin{array}{ll} 1 \times 12 = 12 & 12 \times 1 = 12 \\ 2 \times 6 = 12 & 6 \times 2 = 12 \\ 3 \times 4 = 12 & 4 \times 3 = 12 \end{array}\right)$$

4. El calendario se arregla en 5 filas de cuadrados. Cada fila se divide en 7 cuadrados. ¿Cuántos cuadrados se presentan en el calendario? ($5 \times 7 = m$
$m = 35$
se presentan 35 cuadrados.)

5. Algunos adornos de Navidad se empacaron en cajas de 4 filas. Había 3 adornos en cada fila. ¿Cuántos adornos había en la caja? ($4 \times 3 = t$. $12 = t$. En la caja, había 12 adornos.)

6. Una barra de chocolate se dividió en 2 filas de 4 cuadrados cada una. ¿Cuántos cuadrados de chocolate había en la barra? ($2 \times 4 = s$. $8 = s$. En la barra, había 8 cuadrados de chocolate.)

7. Hay 3 filas de ventanas en nuestra habitación. Cada fila tiene 5 ventanas. ¿Cuántas ventanas hay en nuestra habitación? ($3 \times 5 = w$. $15 = w$. En nuestra habitación, hay 15 ventanas.)

8. En una caja, se colocaron dulces en 5 filas, con 9 dulces en cada fila. ¿Cuántos dulces había en la caja? ($5 \times 9 = c$. $45 = c$. En la caja, había 45 dulces.)

9. Para el retrato de nuestra clase, los niños se agruparon en 4 filas. Había 8 niños en cada fila. ¿Cuántos niños había en el retrato? ($4 \times 8 = p$. $p = 32$. En el retrato, había 32 niños.)

10. En una caja, había 2 filas de borradores, con dos borradores en cada fila. ¿Cuántos borradores había en la caja? ($2 \times 2 = e$. $e = 4$. En la caja, había 4 borradores.)

PROBLEMA DIFICIL: ¿Cuántas posibles disposiciones en cuadro de 24 puntos podrías hacer? (Dibújalas, si es necesario.) Describe cada disposición, escribiendo un enunciado matemático.

Hay 8 posibilidades.

$1 \times 24 = 24$	$6 \times 4 = 24$
$2 \times 12 = 24$	$8 \times 3 = 24$
$3 \times 8 = 24$	$12 \times 2 = 24$
$4 \times 6 = 24$	$24 \times 1 = 24$

COMO REPRESENTAR LA MULTIPLICACION

Objetivo: Ayudar a los estudiantes a aprender el uso de los símbolos orales y escritos de la multiplicación

Vocabulario: Factor, producto

> El maestro deberá utilizar la Exploración en el Texto del estudiante como una tarea de la clase para presentar los símbolos orales y escritos de la multiplicación.

COMO REPRESENTAR LA MULTIPLICACION

Exploración

Cuando pensamos, hablamos y escribimos acerca de la operación de la adición, tenemos ciertas maneras de indicarla con palabras y otros símbolos.

Escribe un enunciado matemático que represente la adición de 4 y 5. ($4 + 5 = 9$)

¿Cómo lees este enunciado matemático? (Cuatro más cinco es igual a nueve.)

¿Cómo se llaman los números 4 y 5? (Sumandos)

¿Cómo se llama el número 9? (Suma)

La suma, 9, es el resultado de operar con los sumandos, 4 y 5.

Hay, también, un enunciado matemático para indicar la multiplicación. Si los dos números con los cuales se opera son 4 y 5 y el resultado es 20, podemos escribir el enunciado matemático

$$4 \times 5 = 20.$$

Los números 4 y 5 se llaman <u>factores</u> de 20. El número 20 se llama el <u>producto</u> de 4 y 5.

El producto, 20, es el resultado de operar con los factores 4 y 5.

Compara los siguientes enunciados matemáticos:

a) $4 + 5 = s$ b) $4 \times 5 = p$

¿En qué se asemejan los enunciados? (Empiezan con los mismos números, 4 y 5.)

¿En qué difieren los enunciados? (Los resultados son diferentes. En uno de los enunciados, utilizamos la operación de adición y en el otro, utilizamos la operación de multiplicación.)

273

Es confuso llamar a las partes de los enunciados con los ~~mismos nombres, porque las operaciones son diferentes. El 4~~ y el 5 del enunciado (b) deben tener nombres especiales. ¿Cómo se llaman? (Factores de 20) ¿Cómo llamamos al 20? (Producto de 4 y 5)

He aquí algunos otros enunciados matemáticos:

c) $5 \times 8 = 40$ d) $36 \times 424 = p$

¿Cómo llamamos al 5 en el enunciado (c)? (Factor)

¿Cómo se llama el 8? (Factor)

¿Cómo se llama el 40? (Producto)

Cuando operamos con dos factores y obtenemos un producto, multiplicamos.

¿Cuáles son los dos factores en el enunciado (d)? (36 y 424)

¿Cuál es el producto? (p)

¿Qué número es el nombre del producto p? (No sabemos.)

No lo sabemos ahora, pero pronto aprenderemos cómo hallarlo.

Resumen

Escribimos un enunciado de multiplicación así:

$$5 \times 4 = 20$$

Leemos un enunciado de multiplicación así:

5 por 4 es igual a 20

Los nombres de las partes de un enunciado de multiplicación son:

5	×	4	=	20
↑		↑		↑
factor	por	factor	es igual a	producto

Cuando operamos con <u>dos factores</u> y obtenemos un <u>producto</u>, <u>multiplicamos</u>.

E143 8

EL USO DE LAS DISPOSICIONES EN CUADRO EN LA MULTIPLICACION

Conjunto de problemas 6

Cada par de números de la lista siguiente indica el número de filas y el número de columnas en una disposición en cuadro. Escribe el enunciado matemático que dice cuántos elementos hay en cada disposición.

Ejemplo: 5, 3 $5 \times 3 = 15$

1.	4, 2	(4×2=8)	9.	2, 5	(2×5=10)
2.	4, 3	(4×3=12)	10.	3, 5	(3×5=15)
3.	4, 4	(4×4=16)	11.	4, 5	(4×5=20)
4.	5, 4	(5×4=20)	12.	5, 5	(5×5=25)
5.	6, 4	(6×4=24)	13.	5, 6	(5×6=30)
6.	7, 4	(7×4=28)	14.	5, 7	(5×7=35)
7.	8, 4	(8×4=32)	15.	5, 8	(5×8=40)
8.	9, 4	(9×4=36)	16.	5, 9	(5×9=45)

276

E144

Haz una tabla con dos columnas como aparece abajo. Completa la tabla. Se da un ejemplo.

Número de filas y número de columnas en cada disposición en cuadro	Enunciado matemático que describe el número de elementos en cada disposición en cuadro
Ejemplo 5, 2	5 × 2 = 10
17. 6, (3)	6 × (3) = 18
18. 3, 4	3 × 4 = (12)
19. 7, 5	(7) × (5) = 35
20. (6), 4	(6) × 4 = 24
21. 8, (5)	40 = 8 × (5)
22. (7), 4	(7) × 4 = 28
23. 6, 5	(6 × 5 = 30)
24. (8), 3	24 = (8 × 3)
25. 5, p	(5) × p = 15
26. n, 3	n × (3) = 15
27. n, p	(n) × (p) = 15

COMBINACIONES BASICAS DE LA MULTIPLICACION

Objetivo: Ayudar a los estudiantes a descubrir y aprender las combinaciones básicas de la multiplicación.

Materiales: Copias sin llenar de una tabla de multiplicación parecida a la que se da en la página 271. Léase la nota en las rayas verticales.

Exploración:

Las combinaciones básicas de la multiplicación incluyen 100 combinaciones que resultan de la determinación del producto de cada par de números del conjunto de números del 0 al 9.

Los alumnos pueden averiguar las combinaciones mediante diversos métodos y, después, deben aprendérselas. El maestro debe procurar que los alumnos se aprendan de memoria las combinaciones, porque saberlas es la manera más fácil y rápida de multiplicar. Es necesario que se den instrucciones individuales para ayudar a cada estudiante a aprender de memoria las combinaciones.

Para averiguar combinaciones básicas nuevas de la multiplicación, se le pedirá a los estudiantes (1) que descompongan una disposición en cuadro en dos disposiciones en cuadro, asociadas con combinaciones básicas conocidas, después (2) que sumen el número de elementos de las dos disposiciones pequeñas. La práctica con las disposiciones en cuadro deberá proporcionar una manera más lógica de pensar en las combinaciones básicas de la multiplicación. Ayudará a muchos estudiantes a aprender las combinaciones. Por ejemplo, un estudiante puede considerar a (7×6) como $(7 \times 3) + (7 \times 3)$, o sea, $(21 + 21) = 42$.

Tres tipos de disposiciones en cuadro, diferentes de las que se han dibujado en la pizarra, se necesitan como referencia.

Primero, el maestro considerará conveniente tener una disposición en cuadro de 9 columnas cada una de dos, tres, ..., nueves marcas como referencia. Es mejor que sean lo bastante grandes para poderlas exponer pero aún así de un tamaño adecuado para que los estudiantes puedan trabajar con ellas. Una hoja de cartulina sin marcar, del mismo tamaño, es también necesaria para cubrir algunas secciones de la disposición.

En segundo término, el maestro necesitará la misma disposición dibujada sobre trozos de tela o de papel. Estas disposiciones deben hacerse, de manera que puedan doblarse en secciones, cuando los alumnos averigüen combinaciones básicas nuevas o hallen una manera nueva de representar una combinación. Por ejemplo, una disposición de 9 columnas de seis marcas puede doblarse en dos disposiciones, una de 5 columnas de seis elementos y otra de 4 columnas de seis marcas. Los alumnos pueden, ahora, sumar 30 y 24, para obtener $6 \times 9 = 54$.

En tercer lugar, el maestro puede hacer una colección de varios ejemplos de disposiciones en cuadro. Pueden utilizarse envases de cartón para huevos, secciones de cajas de dulces, cajas de cartón y de madera para colocar refrescos embotellados, hojas de sellos postales, sellos de canjeo, cellos de Navidad o de Pascua Florida, ilustraciones de objetos ordenados en una disposición en cuadro, etc.

Manteniendo los estudiantes sus libros cerrados, analícese con ellos la Exploración de la página E145 que corresponde a la página 273 de este *Comentario*. La página del *Texto del estudiante* servirá entonces como un resumen de la tarea de clase y como repaso.

Por conveniencia, al cubrir las disposiciones en cuadro que se utilizan para construir el conjunto de las combinaciones básicas de la multiplicación, empezamos trabajando con la disposición 2 por 9. Se recomienda que se vaya haciendo una lista de las combinaciones básicas, según se van descubriendo.

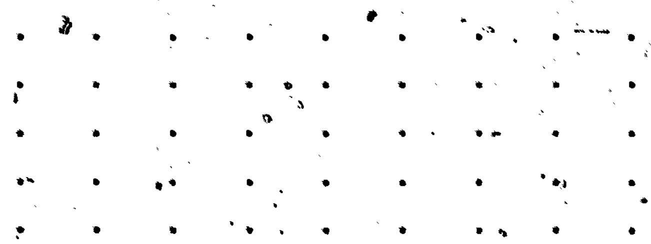
Es conveniente que los alumnos utilicen papel cuadriculado para construir las disposiciones. También, pueden utilizarse tarjetas de estudio como las siguientes:

$\boxed{7 \times 6 = n}$	$\boxed{7 \times 6 = 42}$
Frente	Dorso

Exploración

En la exploración siguiente, se obtiene una tabla de multiplicación:

Esta disposición en cuadro se analiza muy fácilmente. ¿Cuántas cosas saben acerca de columnas de cinco marcas?



Cubran parte de esta disposición con un trozo de cartulina. ¿Cuántas marcas hay en la parte que ven?

> El maestro debe cubrir varias columnas de la disposición. Luego, cúbrase una columna adicional cada vez, hasta que se hayan cubierto todas las columnas. Descúbrase toda la disposición, descubriendo una columna cada vez. En cada caso, los estudiantes deberán indicar el número que ven en la disposición. Este ejercicio debe conducirse rápidamente, pero debe ser significativo. El maestro debe señalar claramente que el número de elementos en las filas y las columnas que forman la disposición son factores y que el número de elementos en la disposición es el producto.
>
> El maestro deberá cubrir también las filas de la disposición una cada vez y pedir a los estudiantes que indiquen el número de elementos en la parte de la disposición que pueden ver.

Describan la disposición. (Tiene 5 filas de 9 marcas cada una, o sea, 45 marcas.)

> El análisis aquí debe ser parecido al que se hizo, cuando se estudiaron las combinaciones básicas de la multiplicación de tres y cuatro elementos. Las prácticas deben efectuarse con rapidez y deben ser variadas, de manera que no les parezcan aburridas a los estudiantes. Tales prácticas deben tener un objetivo claro, para que ayuden a los estudiantes

a aprender y utilizar las combinaciones básicas sin vacilar.

Las combinaciones básicas de la multiplicación que nos quedan por aprender son las dieciséis combinaciones que comprenden 6, 7, 8 y 9. El propósito del material que sigue es estudiar esas combinaciones.

Deben hacerse copias de la siguiente tabla de multiplicación (sin las respuestas) en un material resistente, de manera que todos los estudiantes de la clase puedan participar en este ejercicio:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30				
7	0	7	14	21	28	35				
8	0	8	16	24	32	40				
9	0	9	18	27	36	45				

Anteriormente, construimos una tabla de adición y una tabla de sustracción. Ahora, estamos preparados para construir una tabla de multiplicación.

Ya saben el producto de varios pares de números y los escribiremos en una tabla. Si necesitan algunas disposiciones en cuadro como ayuda para determinar algunos productos, dibújenlas en hojas de papel.

Busquen la fila con 4 a la izquierda y la columna con 3 en la parte superior. El producto de 4 y 3 debe escribirse en el espacio donde la fila 4 interseca a la columna 3. Háganlo ahora.

Elijan otros pares de números y escriban sus productos en los espacios apropiados, hasta que hayan completado la tabla.

El maestro debe señalar la importancia de saber los productos, de manera que puedan recordarse rápidamente, cuando sea necesario. El juego "clave" puede ayudar a los estudiantes a aprender las combinaciones básicas de la multiplicación más rápidamente. El juego puede utilizarse como un ejercicio de toda la clase, pero es más efectivo con grupos más pequeños. Puede usarse con diferentes múltiplos.

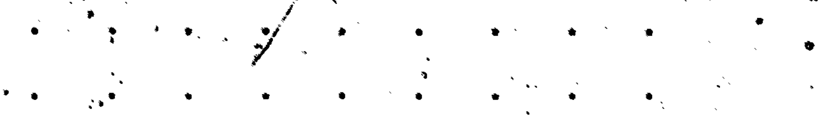
En este juego, cada persona, por turno, dice un número. La primera persona dice 1, la siguiente persona dice 2, etc. El grupo decide de antemano al llegar a qué número debe decirse "clave". Si el número elegido es 5 o un múltiplo de 5, el estudiante al cual le toque el turno responderá con "clave". La cuenta será 1, 2, 3, 4, clave, 6, 7, 8, 9, clave, 11, 12, 13, 14, clave, etc.

Antes de pasar a la próxima página del Texto del estudiante, el maestro debe asegurarse de que todos los alumnos saben el significado de la palabra cifra. Una cifra es uno cualquiera de los diez numerales indoarábigos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. En el sistema decimal de numeración, hablamos de la cifra de las unidades, la cifra de las decenas, etc. Un numeral decimal como 436 se dice que tiene tres cifras: la cifra de las unidades es 6; la de las decenas es 3; la cifra de las centenas es 4.

COMBINACIONES BASICAS DE LA MULTIPLICACION

Exploración

Es importante que aprendas a multiplicar números rápido y correctamente. Esto te ayudará a tratar ejercicios en que se pueda hacer una disposición en cuadro para ilustrar el problema. Ya has aprendido algunos productos, contando y usando la adición. Ahora, debes aprender cómo multiplicar estos números pequeños y cómo recordar bien estas combinaciones básicas sin tener que mirar las disposiciones en cuadro. Al multiplicar, relacionamos dos números y obtenemos un producto. Ya conoces muchos productos. Piensa en algunos de ellos. ¿Qué productos obtienes con sólo mirar esta disposición en cuadro? (2 × 1 = 2, 2 × 3 = 6. Hay varias respuestas posibles.)



¿Utilizaste toda la disposición o parte de ella? (Para algunos productos, utilicé parte de la disposición y para un producto, utilicé toda la disposición)

Cuando miras la parte formada por un conjunto de 2 filas y 8 columnas, ¿cuántas marcas ves? (16)

Cuando miras la parte de la disposición formada por un conjunto de 2 filas y 7 columnas, ¿cuántas marcas ves?

Cuando miras la parte de la disposición en cuadro, formada por un conjunto de 2 filas y 1 columna, ¿cuántas marcas ves?

Completa los siguientes enunciados matemáticos:

2 × 9 = (18)	2 × 4 = (8)
2 × 8 = (16)	2 × 3 = (6)
2 × 7 = (14)	2 × 2 = (4)
2 × 6 = (12)	2 × 1 = (2)
2 × 5 = (10)	

¿Qué tipos de cosas vienen en grupos de a 2? ¿Formarán una disposición en cuadro? (Sí) (Huevos dentro de un envase, sellos en tiras de a dos cada uno, etc.)

He aquí una disposición en cuadro con 3 filas y 9 columnas:

. . . .

. . . .

. . . .

¿Cuántas marcas hay en la disposición? (27)

Cubre una columna. ¿Cuántas marcas hay en la disposición que ves? (24)

Cubre una columna adicional. ¿Cuántas marcas hay en la disposición que ves? (21)

Usando tu disposición 3 por 9, ¿puedes escribir todos los enunciados matemáticos como lo hiciste con la disposición 2 por 9? (Sí)

Nombra algunas cosas que vienen en grupos de a 3. (Huevos en un envase, sellos, etc.) ¿Forman una disposición en cuadro? (Sí)

Nos damos cuenta de que no podríamos tener una disposición en cuadro sin tener a la vez filas y columnas. Sin embargo, al tratar con la disposición 3 por 9, hallamos que cada vez que cubrimos una columna, estamos restando tres elementos del número total de elementos. Compara la información en la gráfica.

			$3 \times 9 = 27$	Tienes un total de 27 elementos.
Cubre	1	columna	$3 \times 8 = 24$	$27 - 3 = 24$
Cubre	2	columnas	$3 \times 7 = 21$	$24 - 3 = 21$
Cubre	3	columnas	$3 \times 6 = 18$	$21 - 3 = 18$
Cubre	4	columnas	$3 \times 5 = 15$	$18 - 3 = 15$
Cubre	5	columnas	$3 \times 4 = 12$	$15 - 3 = 12$
Cubre	6	columnas	$3 \times 3 = 9$	$12 - 3 = 9$
Cubre	7	columnas	$3 \times 2 = 6$	$9 - 3 = 6$
Cubre	8	columnas	$3 \times 1 = 3$	$6 - 3 = 3$
Cubre	9	columnas	$3 \times 0 = 0$	$3 - 3 = 0$

Cubriendo la última columna, puedes imaginar una disposición 3 por 0 o puedes pensar en restar 3 elementos. En cualquiera de estos casos, no habría elementos sobrantes. Sabemos que $3 - 3 = 0$, así, podemos suponer que $3 \times 0 = 0$.

> Mediante el siguiente razonamiento, podemos explicar que $2 \times 0 = 0$. A medida que obtengamos las combinaciones básicas de la multiplicación, observaremos que un número cualquiera multiplicado por 0 dará el producto 0: $n \times 0 = 0$.
>
> Utilizando la propiedad conmutativa, se deduce que si $n \times 0 = 0$, entonces, $0 \times n = 0$. $n \times 0 = 0 \times n$.

He aquí una disposición en cuadro. Descríbela.

1(Disposición 4 por 9)

Utilizando una hoja de papel, cubre las columnas de la disposición una a la vez. ¿Cuántos elementos hay en la parte que ves? Empieza de nuevo con la disposición completa. Descubre en la disposición una columna cada vez. Di cuántos elementos hay en la parte que ves cada vez.

Nombra algunas cosas que vienen en grupos de a 4 y di si forman una disposición en cuadro. Usando tu disposición 4 por 9, escribe las combinaciones básicas de la multiplicación con factores 4.

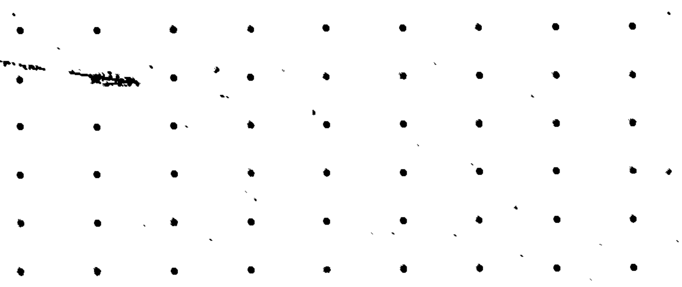
Exploración: (Ampliación de la tabla de multiplicación hasta 9×9)

> En esta unidad, los alumnos aprenderán las combinaciones básicas de la multiplicación. Al completar la tabla de multiplicación, se recomienda continuar adelante, sin esperar que todos los alumnos sepan las combinaciones. El maestro necesitará utilizar ejercicios de práctica adicionales, tarjetas con las combinaciones escritas y otros recursos para ayudar a los alumnos a aprenderse de memoria las combinaciones.

Examinemos nuevamente la tabla de multiplicación. ¿Por qué está sin completar parte de ella? (No hemos averiguado las combinaciones básicas de la multiplicación que corresponden a esa parte de la tabla.) ¿Podrían hacerlo ustedes? (Sí)

¿Cuántos espacios quedan por llenar? En la parte que falta por llenar, ¿qué pares de números pertenecen a la fila 6? (6×6, 6×7, 6×8, 6×9)

Observen que hay un factor 6 en cada producto indicado en la primera fila. Dibujen una disposición en cuadro 6 por 5. ¿Cuántos elementos hay en la disposición? (30) ¿Qué tendrían que hacerle a la disposición 6 por 6 para convertirla en una disposición 6 por 7? (Añadirle una columna más de marcas.) ¿Cuántos elementos hay en la disposición? (42) Ahora, añadan otra columna de 6 marcas a la disposición. ¿Cuál es el tamaño de la disposición que tenemos ahora? (Tenemos una disposición 6 por 8 con 48 elementos.) Añadan otra columna de 6 marcas a la disposición. ¿Cuál es el tamaño de la disposición que tenemos ahora? (Tenemos una disposición 6 por 9 con 24 elementos.) La disposición debe verse así:



Escriban todos los enunciados matemáticos que puedan deducirse de la disposición 6 por 9. ($6 \times 0 = 0$, $6 \times 1 = 6$, $6 \times 2 = 12$, $6 \times 3 = 18$, $6 \times 4 = 24$, $6 \times 5 = 30$, $6 \times 6 = 36$, $6 \times 7 = 42$, $6 \times 8 = 48$, $6 \times 9 = 54$.) Si aún no lo han hecho, pueden completar la fila 6 de la tabla.

> Antes de completar la tabla de multiplicación, es conveniente pensar acerca de cómo puede obtenerse un producto plegando una disposición en cuadro. Así, el maestro logrará que los alumnos entiendan mejor las relaciones entre los números en la multiplicación. Por ejemplo, para obtener 6×9,
>
> (1) Pliéguese la disposición en 2 partes, una de 5 columnas de seis marcas y otra de 4 columnas de seis marcas. Entonces, la disposición contendrá 30 y 24, o sea, 54 marcas.
>
> (2) Pliéguese la disposición en 2 partes, una de 6 columnas de seis marcas y otra de 3 columnas de seis marcas. Entonces, la disposición contendrá 36 y 18, o sea, 54 marcas.
>
> (3) Considérense otras posibilidades.

¿Cuál es el mejor método para saber que hay 54 marcas en una disposición? (El mejor método es saber la combinación básica de la multiplicación $6 \times 9 = 54$.)

> Utilizando el mismo procedimiento sugerido para la disposición 6 por 9, estúdiense otras combinaciones básicas. Complétese la tabla de multiplicación.
>
> Estas últimas combinaciones son de gran importancia. A los alumnos, les será más difícil recordarlas. Necesitan obtener los productos de varias maneras, nombrarlos y utilizarlos varias veces.
>
> El maestro deberá ayudar a los estudiantes a darse cuenta de que es más fácil y rápido saber los productos de memoria que tener que pensar en una disposición en cuadro en cada caso.

E148

USO DE LA TABLA DE MULTIPLICACION

Trabajo en grupo

Has completado la tabla de multiplicación que te dio tu maestro. Utilizando esta tabla, contesta las siguientes preguntas:

1. ¿Por qué están todos los productos 0 en la primera fila y en la primera columna? (Cualquier número multiplicado por cero es cero. $0 \times n = n \times 0$.)
2. ¿Por qué son todos los productos de la segunda columna los mismos que los numerales de la primera columna? ¿Por qué son los productos de la segunda fila los mismos que los numerales a lo largo de la parte superior de la tabla? (Cualquier número multiplicado por 1 es el número mismo. $1 \times n = n \times 1$.)
3. Lee los productos de la columna 9.
   Lee los productos de la fila 9.
   a. Lee en orden los dígitos que ocupan el lugar de las unidades de estos productos. (0, 9, 8, 7, 6, 5)
   b. ¿Cómo cambian los dígitos que ocupan el lugar de las unidades? (Los dígitos en el lugar de las unidades disminuyen en 1, empezando con 9, del producto 9×6)
   c. Lee en orden los dígitos que ocupan el lugar de las decenas de los productos que leas. (1, 2, 3, 4)
   d. ¿Cómo cambian los dígitos que ocupan el lugar de las decenas? (Los dígitos en el lugar de las decenas aumentan en 1, empezando con 1, del producto 9×2.)
4. ¿Qué suma obtienes si sumas los números representados por los dígitos de cada uno de los productos en la columna 9?
   (9)

5. Completa los siguientes enunciados usando una de las frases "es siempre" o "no es siempre".
   a. El producto de dos números pares (es siempre) un número par.
   b. El producto de dos números impares (es siempre) un número impar.
   c. El producto de un número impar y un número par (es siempre) un número par.
6. El producto de cualquier número y uno $(n \times 1)$ es (n).
   El producto de cualquier número y cero $(n \times 0)$ es (0).

EL USO DE LAS OPERACIONES

Conjunto de problemas 7

Haz una tabla con 4 columnas, como se muestra a continuación. Estudia y completa la tabla.

Números con los que se opera	Número que resulta	Operación utilizada	Enunciado matemático que expresa la operación utilizada
Ejemplos:			
4, 2	6	Adición	$4 + 2 = 6$
7, 4	3	Sustracción	$7 - 4 = 3$
4, 3	12	Multiplicación	$4 \times 3 = 12$
1. 12, 5	7	(Sustracción)	($12 - 5 = 7$)
2. 6, 4	24	(Multiplicación)	($6 \times 4 = 24$)
3. 7, 5	(35)	Multiplicación	($7 \times 5 = 35$)
4. 4, (8)	32	Multiplicación	($4 \times 8 = 32$)
5. (7), (1)	7	Multiplicación	($7 \times 1 = 7$)
6. 9, (7)	16	(Adición)	($9 + 7 = 16$)
7. 8, 5	40	(Multiplicación)	($8 \times 5 = 40$)
8. 5, (0)	0	(Multiplicación)	($5 \times 0 = 0$)
9. (5), (3)	15	Multiplicación	($5 \times 3 = 15$)

> Puesto que, quizás, a los alumnos de cuarto grado les cueste mucho tiempo hacer una tabla de este tamaño, tal vez, el maestro quiera hacer copias de la misma para distribuirlas.

Ampliación del uso de las disposiciones en cuadro

Algunas veces, resulta difícil para los estudiantes ver que la multiplicación es una operación que se utiliza para resolver algunos problemas. Si los estudiantes no se dan cuenta de que la multiplicación es la operación apropiada, sería conveniente construir una disposición en cuadro. Por ejemplo, considérese el problema 15 del Conjunto de problemas 8. El problema es el siguiente:

> Hay 8 niños que se proponen cocinar al aire libre. Cada niño debe traer 3 salchichas. ¿Cuántas salchichas tendrán que cocinar, si las cocinan todas?

El maestro podría pedirles a los estudiantes que dibujen una disposición en cuadro para indicar que 8 niños trajeron 3 salchichas cada uno. Hay dos posibilidades:

```
. . . . . . . .
. . . . . . . .
. . . . . . . .
```

$3 \times 8 = n$

```
. . .
. . .
. . .
. . .
. . .
. . .
. . .
. . .
```

$8 \times 3 = n$

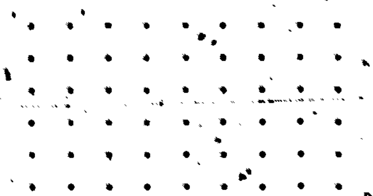
En la primera disposición, 3 salchichas se representan mediante una columna; pero, en la segunda disposición, 3 salchichas se representan mediante una fila. Cada fila en la primera disposición o cada columna en la segunda, representa 8 niños. En las disposiciones, podemos ver que los niños tendrán que cocinar 24 salchichas. $3 \times 8 = 24$ ó $8 \times 3 = 24$.

El problema 17 trata acerca de algo más abstracto. Tendremos que imaginar que varias marcas arregladas ordenadamente en una hoja de papel pueden representar minutos o viajes de ida y vuelta. El problema es el siguiente:

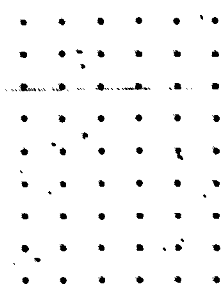
> Un niño empleó 9 minutos en ir en su bicicleta hasta la tienda y volver a su casa

(en viaje de ida y vuelta). Si hizo 6 viajes de ida y vuelta en un día, ¿cuántos minutos empleó en ir de su casa a la tienda y volver?

Las disposiciones que se construyan deben ser como una de las siguientes:



$6 \times 9 = n$



$9 \times 6 = n$

Contando los elementos en las dos disposiciones (o sabiendo las combinaciones básicas de la multiplicación, vemos que hay 54 elementos en cada disposición. Esto significa que $6 \times 9 = 54$ y $9 \times 6 = 54$. El niño empleó 54 minutos en ir de su casa a la tienda y volver.

PRACTICA EN MULTIPLICACION

Conjunto de problemas 8

Completa los ejercicios del 1 al 14 de modo que formen enunciados matemáticos ciertos.

1. $5 \times 7 =$ (35)
2. $6 \times 2 =$ (12)
3. $4 \times 6 =$ (24)
4. $6 \times 7 =$ (42)
5. $8 \times 3 =$ (24)
6. $7 \times 7 =$ (49)
7. $7 \times 8 =$ (56)
8. $6 \times 8 =$ (48)
9. $8 \times 9 =$ (72)
10. $7 \times 9 =$ (63)
11. $6 \times 6 =$ (36)
12. $9 \times 6 =$ (54)
13. $8 \times 8 =$ (64)
14. $9 \times 9 =$ (81)

Escribe un enunciado matemático que corresponda a cada uno de los problemas y resuélvelo. Debes asegurarte de que contestas la pregunta mediante un enunciado completo.

15. Hay 8 niños que se proponen cocinar al aire libre. Cada niño debe traer 3 salchichas. ¿Cuántas salchichas tendrán que cocinar, si las cocinan todas?
(8×3=h ó 3×8=h. Tendrán que cocinar
24=h 24 salchichas.)

16. Una barra de dulce cuesta 7¢. ¿Cuánto costarían 8 barras de dulce? (8×7=c ó 7×8=c Ocho barras de dulce
56=c costarían 56¢.)

17. Un niño empleó 9 minutos en ir en su bicicleta hasta la tienda y volver a su casa (en viaje de ida y vuelta). Si hizo 6 viajes de ida y vuelta en un día, ¿cuántos minutos empleó en ir de su casa a la tienda y volver?
(6×9=m ó 9×6=m Empleó 54 minutos en ir de su
54=m casa a la tienda y volver.)

18. Jaime nadó de un extremo al otro del estanque en 9 segundos. Si nadara con la misma velocidad, ¿cuánto tiempo emplearía en nadar 8 veces la distancia de un extremo a otro?
(8×9=l ó 9×8=l Emplearía 72 segundos en nadar
72=l 8 veces la distancia de un extremo a otro.)

19. Hay 6 pares de medias de gimnasia en una caja. Si un vendedor tiene 8 cajas de medias de gimnasia, ¿cuántos pares tiene? ($8 \times 6 = a$ ó $6 \times 8 = a$: Tiene 48 pares)
$48 = a$

20. Hay 9 filas de tiza en una caja, y hay 7 barras de tiza en cada fila. ¿Cuántas barras de tiza hay en la caja? ($9 \times 7 = c$ Hay 63 barras de tiza en la
$63 = c$ caja.)

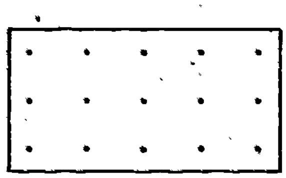
LA PROPIEDAD CONMUTATIVA DE LA MULTIPLICACION

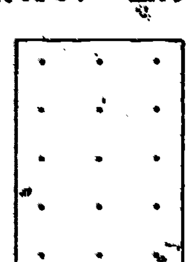
Objetivo: Ayudar a los estudiantes a comprender el uso de la propiedad de la multiplicación, ilustrada por $5 \times 7 = 7 \times 5$ y enunciada por la fórmula $a \times b = b \times a$.

Exploración

> Es importante que los alumnos entiendan que en la multiplicación de números cardinales, puede alterarse el orden de los factores, sin que se altere el producto.
>
> Los estudiantes deberán entender sin dificultad que, si a y b son números cardinales, $a \times b = b \times a$. Esto es evidente por las combinaciones básicas que ya saben. La importancia de la propiedad conmutativa se pone de manifiesto más tarde, cuando los estudiantes aprenden el algoritmo para multiplicar números cuyos numerales tienen varias cifras.
>
> La propiedad conmutativa de la adición ayudará a los estudiantes a comprender la propiedad conmutativa de la multiplicación.
>
> Las disposiciones en cuadro que el maestro y los alumnos han construido y conservado deben utilizarse en esta exploración. Las disposiciones pueden girarse un ángulo recto para intercambiar sus filas y columnas. Los alumnos pueden describir esto como un giro de la disposición alrededor de su centro. Esto da dos combinaciones básicas de la multiplicación para cada disposición; como, por ejemplo, $7 \times 8 = 56$ y $8 \times 7 = 56$.

Más adelante, aparecen dos disposiciones en cuadro. ¿Podremos considerarlas como la misma disposición? (Sí, se puede girar la disposición A alrededor de su centro. Entonces, resulta ser igual a la disposición B.)





Escriban los enunciados matemáticos que sugieren las dos disposiciones de la página anterior. ($3 \times 5 = 15$ y $5 \times 3 = 15$.)

Cuando consideraron las dos disposiciones como una misma, ¿tuvieron que saber que había 15 marcas en cada disposición, antes de que pudieran imaginarse que eran la misma? (No, su forma es la misma. Una tiene 5 filas y 3 columnas; la otra tiene 3 filas y 5 columnas.) ¿Podremos redactar un enunciado matemático que exprese la relación entre la disposición A y la disposición B? (Sí) ¿Cuál es ese enunciado?

$$3 \times 5 = 5 \times 3$$

Ahora, les voy a pedir que usen su imaginación. Supongamos que C es una disposición en cuadro muy grande. Imagínense que tiene 37 filas y 59 columnas. Supongan que D tiene la misma forma que C, salvo que se giró alrededor de su centro. ¿Cuántas filas y cuántas columnas tendrá D? Recuerden que tiene exactamente la misma forma que C. (59 filas y 37 columnas) ¿Podrían escribir un enunciado matemático que indique que C y D tienen el mismo número de elementos?

$$37 \times 59 = 59 \times 37$$

¿Tienen que determinar los productos desconocidos 37×59 y 59×37, para estar seguros de que son iguales? (No, basta saber la forma.) Quizás, quieran comprobar todo esto con otras disposiciones y productos.

> El maestro deberá continuar pidiendo a los estudiantes que describan pares de disposiciones en cuadro iguales, con dos posiciones distintas (intercambiando las filas y las columnas) y que escriban enunciados matemáticos sugeridos por las disposiciones. Esto debe continuarse, hasta que tengan en la pizarra varios enunciados matemáticos como los siguientes:
>
> $3 \times 5 = 5 \times 3$ $\quad$ $7 \times 9 = 9 \times 7$
>
> $8 \times 5 = 5 \times 8$ $\quad$ $10 \times 4 = 4 \times 10$
>
> $3 \times 4 = 4 \times 3$ $\quad$ $5 \times 10 = 10 \times 5$

Examinen los enunciados que han construido. ¿Cómo podrían escribir un enunciado análogo, si se construyera una disposición en cuadro de un conjunto de 6 elementos y un conjunto de a mentos? $(6 \times a = a \times 6)$

¿Cómo podrían escribir un enunciado análogo, si se construyera una disposición de un conjunto de b elementos y un conjunto de 8 elementos?

$$(b \times 8 = 8 \times b)$$

¿Cómo podrían escribir un enunciado análogo, si se construyera una disposición con un conjunto de a elementos y un conjunto de b elementos?

$$(a \times b = b \times a)$$

Cuando escribimos 3×5 y 5×3, ¿qué operación utilizamos? (Multiplicación)

¿Cómo llamamos a los números 3 y 5? (Factores) ¿Qué nombre le damos a los resultados? (Producto)

Examinen nuevamente la lista de enunciados que hemos redactado. ¿Qué observan acerca de los factores 3 y 5 en el enunciado matemático $3 \times 5 = 5 \times 3$? (Su orden está cambiado) ¿Se alteró el orden de los factores en $8 \times 5 = 5 \times 8$? (Sí)

> Los alumnos deberán contestar la misma pregunta para varios otros enunciados.

¿Qué le sucede al producto, cuando se altera el orden de los factores? ¿Se altera el producto? (No) Muéstrese esto mediante una disposición en cuadro y mediante un enunciado. (Basándome en esta disposición, escribo $6 \times 7 = 42$. La giro para formar una disposición diferente y escribo $7 \times 6 = 42$. Puesto que es la misma disposición, $6 \times 7 = 7 \times 6$.)

Este enunciado ilustra la <u>propiedad conmutativa de la multiplicación</u>. Examina la tabla de multiplicación que hicieron. Den ejemplos de la propiedad conmutativa. El enunciado $6 \times 7 = 7 \times 6$ es una aplicación del enunciado $a \times b = b \times a$. Podemos encontrar otras aplicaciones del mismo enunciado en la tabla.

Señalen con un dedo de una mano el producto de 6×7 y con otro de la otra mano el producto de 7×6. Busquen otros ejemplos de la propiedad conmutativa, como $5 \times 4 = 4 \times 5$, etc., y señalen con un dedo de una mano un producto y con otro dedo de la otra mano el segundo producto.

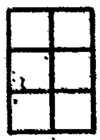
El maestro deberá pedir a los estudiantes que den varios ejemplos como los anteriores, hasta que se den cuenta de que los dos productos ocupan posiciones parecidas a lados opuestos de una diagonal, dibujada desde la esquina superior izquierda hasta la esquina inferior derecha de la tabla.

Al ir señalando estos productos, ¿han omitido algunos? (Sí, no hemos considerado 0, 1, 4, 9, ..., 81.) ¿Por qué no los han considerado? (Sus factores son idénticos. $9 = 3 \times 3$; $49 = 7 \times 7$. No podríamos decir si su orden ha sido alterado.)

¿Habrá una manera de plegar la hoja de papel en la cual se construyó la tabla, para que los productos que tengan sus factores iguales coincidan unos con otros? Trátenlo. ¿Coincide 42 con 42, 20 con 20, etc. (Sí, para lograr esto, se pliega la hoja de papel a lo largo de la línea en que están 0, 1, 4, 9, ..., 81.) ¿Coinciden los productos iguales unos con otros? (Sí, la tabla es simétrica. Una sección refleja la otra.)

LA PROPIEDAD CONMUTATIVA DE LA MULTIPLICACION

Una disposición 3 por 2 puede convertirse en una disposición 2×3.



Disposición 3 por 2
$3 \times 2 = 6$

Disposición 2 por 3
$2 \times 3 = 6$

Esto muestra que $2 \times 3 = 3 \times 2$.

Una disposición 78 por 65 puede convertirse en una disposición 65 por 78. Esto muestra que

$$65 \times 78 = 78 \times 65.$$

Cuando escribimos 65×78 en lugar de 78×65, estamos usando la <u>propiedad conmutativa de la multiplicación</u>. Podemos utilizar la propiedad conmutativa para reducir el número de combinaciones básicas de la multiplicación que debemos recordar.

Conjunto de problemas 9

1. a. Examina el producto en cada uno de los siguientes enunciados matemáticos:

   $3 \times 5 = m$, $\quad 5 \times 3 = n$

   b. ¿Es $m = n$? (sí)

   c. Utilizando los dos enunciados matemáticos en (a), construye un enunciado. $(3 \times 5 = 5 \times 3)$.

2. Decide si cada uno de los enunciados siguientes es cierto o falso; escribe C si el enunciado es cierto y F si el enunciado es falso:

   a. $(4 + 3) = (3 + 4)$ (C)

   b. $(7 \times 4) = (4 \times 7)$ (C)

   c. $(12 - 5) = (5 - 12)$ (F)

   d. $(6 + 9) = (9 + 6)$ (C)

   e. $(5 \times 8) = (8 \times 5)$ (C)

   f. $(4 - 10) = (10 - 4)$ (F)

3. Examina tus respuestas al problema 2 y contesta estas preguntas:

   a. ¿Posee la adición la propiedad conmutativa? (sí)

   b. ¿Posee la multiplicación la propiedad conmutativa? (sí)

   c. ¿Posee la sustracción la propiedad conmutativa? (no)

USO DE LA RECTA NUMERICA

Objetivo: Proporcionar a los estudiantes un nuevo enfoque de la multiplicación.

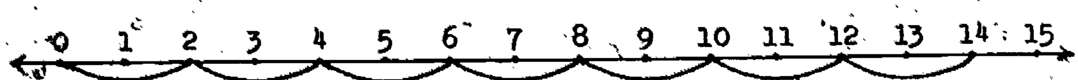
Materiales: Una recta numérica con los números cardinales de 0 al 100, construida en un material duradero

Exploración

El maestro deberá tener preparada una recta numérica en la pizarra. Dibújese la recta numérica en la parte superior de la pizarra, de manera que sobre espacio para que los alumnos o el maestro puedan dibujar rectas como la que se presenta más adelante, para destacar algunas ideas de la explicación.

Hallaremos que al contar de dos en dos, se desarrolla un ritmo particular. Los estudiantes deberán observar que cada número considerado tendrá el factor 2. Esos números que tienen el factor 2 se llaman múltiplos de 2.

He aquí una recta numérica con los números cardinales del 0 al 100. Observen que si contamos de 2 en 2, empezando con el cero, marcaremos solamente los números que son múltiplos de 2. (0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...)



Ahora, tratemos de contar de 3 en 3, utilizando la recta numérica. Nuevamente, observen que los numerales marcados representan los números que son múltiplos de 3. (0, 3, 6, 9, 12, 15, ...)

Después que los estudiantes hayan repasado la recta numérica utilizando las combinaciones que conocen, pídaseles que cuenten de 6 en 6, de 7 en 7, de 8 en 8 y de 9 en 9, utilizando la recta numérica y empezando con el cero. Deberá utilizarse el siguiente procedimiento:

En la recta numérica, indiquen los productos que tienen el factor 6. Empezando con el cero, nombren el producto, a la vez que señalan la recta numérica. (0, 6, 12, 18, 24, ..., 54, ..., 96) Si extendiéramos la recta numérica, ¿cuál sería el producto que seguiría a 96? (102)

> Pídase a los estudiantes que repitan este ejercicio, de manera que pueda notarse el ritmo de los intervalos de 6, para que los estudiantes se familiaricen con los productos que tienen el factor 6. Estos son los múltiplos de 6.

Utilizando la recta numérica, completen los enunciados matemáticos siguientes; traten de recordar los productos:

6 × 9 = 54	7 × 9 = 63	8 × 9 = 72	9 × 9 = 81
6 × 8 = 48	7 × 8 = 56	8 × 8 = 64	9 × 8 = 72
6 × 7 = 42	7 × 7 = 49	8 × 7 = 56	9 × 7 = 63
6 × 6 = 36	7 × 6 = 42	8 × 6 = 48	9 × 6 = 54
6 × 5 = 30	7 × 5 = 35	8 × 5 = 40	9 × 5 = 45
6 × 4 = 24	7 × 4 = 28	8 × 4 = 32	9 × 4 = 36
6 × 3 = 18	7 × 3 = 21	8 × 3 = 24	9 × 3 = 27
6 × 2 = 12	7 × 2 = 14	8 × 2 = 16	9 × 2 = 18
6 × 1 = 6	7 × 1 = 7	8 × 1 = 8	9 × 1 = 9
6 × 0 = 0	7 × 0 = 0	8 × 0 = 0	9 × 0 = 0

> Quizás, el maestro desee utilizar nuevamente el juego "clave". Por ejemplo, puede usarse el número siete como clave. Tal vez, se quieran utilizar diversos procedimientos. Primero, contando 1, 2, 3, 4, 5, 6, clave, 8, 9, 10, 11, 12, 13, clave, etc. Entonces, quizás, el maestro quiera identificar con la palabra "clave", también, los números en los que aparezca la cifra 7, como 17, 27, etc. Si el grupo de alumnos es sobresaliente, quizás, se pueda incluir los números cuyas cifras suman 7, como 16, 25, 34, etc. Ahora, el juego sería así: 1, 2, 3, 4, 5, 6, clave, 8, 9, 10, 11, 12, 13, clave, 15, clave, clave, 18, 19, 20, clave, 22, 23, 24, clave, 26, clave, clave, 29, 30.

E155

COMPARACION DE PRODUCTOS

Conjunto de problemas 10

Completa cada uno de los siguientes enunciados matemáticos con uno de los símbolos >, <, o =, de manera que el enunciado sea cierto:

1. 1×12 (=) 4×3
2. 4×4 (<) 4×5
3. 2×6 (=) 4×3
4. 6×4 (=) 3×8
5. 5×5 (<) 4×8
6. 3×8 (=) 6×4
7. 7×4 (>) 9×3
8. 6×8 (=) 8×6
9. 9×4 (=) 6×6
10. 9×5 (<) 6×8
11. 7×5 (>) 7×3
12. 6×3 (=) 9×2
13. 9×6 (<) 8×7
14. 8×5 (<) 6×7
15. 7×8 (>) 6×9
16. 7×9 (>) 8×6
17. 6×9 (<) 7×8
18. 6×7 (>) $20 + 20$
19. 8×9 (>) 8×8
20. $94 - 40$ (=) 6×9
21. 9×9 (>) 8×9
22. 8×8 (>) 7×7
23. 8×7 (<) 10×6
24. $8 \times n$ (>) $2 \times n$, donde $n \neq 0$
25. $n \times 6$ (=) $n \times 8$, donde $n = 0$
26. $8 \times n$ (>) $7 \times n$, donde $n \neq 0$
27. $n \times 4$ (>) $n + 4$, donde $n > 1$
28. $n \times 4$ (<) $n \times 5$, donde $n > 0$

PROBLEMA DIFICIL: 29. 6×6 (>) 5×7 (>) 8×4

30. 8×5 (<) 7×6 (<) 5×9

DETERMINACION DE FACTORES DESCONOCIDOS

Objetivo: Ayudar a los estudiantes a comprender que la operación numérica llamada división puede describirse como la determinación de un factor desconocido, cuando el producto y uno de los factores son conocidos. Conducir a los estudiantes a conclusión de que se pueden multiplicar, también pueden dividir.

Vocabulario: División.

> El maestro observará que un estudio de problemas basados en las combinaciones básicas de la multiplicación precede la introducción de la notación habitual.
> Podemos representar la división mediante disposiciones en cuadro. Si el maestro cree que esto pueda ser útil para su clase, a continuación se presentan algunas sugerencias:

El enunciado matemático $3 \times n = 12$, indica que tenemos 12 objetos dispuestos en 3 filas. Tenemos que determinar el número de <u>columnas</u>. Construyamos una disposición en cuadro en la pizarra (o en el tablero de fieltro). Tomaremos 12 objetos y formaremos la primera columna, . Ahora, añadiremos la segunda columna . Hasta ahora, hemos utilizado seis objetos. Añadiendo una columna cada vez, podemos ver que una disposición 3 por n con 12 objetos tiene el aspecto siguiente:

Hay 4 columnas. Esto significa que $n = 4$ en el enunciado matemático $3 \times 4 = 12$.

Si el enunciado fuera $n \times 4 = 12$, tendríamos 4 columnas y tendríamos que determinar el número de filas. Como tenemos 4 columnas, empezamos con la primera fila . Ahora, añadimos la segunda y la tercera columnas. La disposición resultará así:

Vemos, ahora, que utilizaríamos 3 filas para representar 12 objetos, ordenados en 4 columnas. $3 \times 4 = 12$.

Exploración:

Anteriormente, en esta unidad, construimos una tabla de multiplicación indicando todas las combinaciones básicas de la multiplicación relacionadas con los números cardinales hasta $9 \times 9 = 81$. Ahora, volvamos a referirnos a esa tabla y repasemos los factores y productos en ella. Mediante una ojeada a la tabla, podemos hallar respuestas a preguntas que comprenden factores y productos.

> Con ejemplos como $5 \times 6 = p$, $5 \times n = 30$ y $t \times 6 = 30$, repásese el procedimiento para determinar estas respuestas en la tabla.

Examinando la tabla de multiplicación, ¿podremos determinar todos los productos (distintos de cero) con factores iguales? (Sí, $1 \times 1 = 1$, $2 \times 2 = 4$, ..., $9 \times 9 = 81$.) ¿Podrán construir una disposición en cuadro para representar cada una de estas combinaciones? (Sí) ¿Qué observan acerca de cada una de las disposiciones de este tipo? (Cada disposición tiene el mismo número de filas que de columnas.) Si construyeran la disposición utilizando cuadrados, ¿qué forma tendría dicha disposición? (La disposición formaría un cuadrado con el mismo número de cuadrados en las filas que en las columnas.) Los números como 1, 4, 9, 16, ..., se llaman "números cuadrados" o "cuadrados". ¿Por qué? (Los factores son iguales. Así, la disposición en cuadro que representa a uno cualquiera de los números cuadrados es una disposición cuadrada con el mismo número de filas que de columnas.) Ahora, podemos decir que "4 es el cuadrado de 2", "25 es el cuadrado de 5", etc. ¿Cuál es el cuadrado de 3? (9) ¿Cuál es el cuadrado de 6? (36)

Utilizando como referencia la tabla de multiplicación, construyan otra tabla (como la siguiente) indicando los números del 1 al 9 y sus cuadrados.

Número	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cuadrado	1	4	9	16	25	36	49	64	81

E156

DETERMINACION DE FACTORES DESCONOCIDOS

Exploración

Anteriormente, hablamos acerca de una operación considerando dos números para obtener un tercer número. Si pensamos en 4 y 6, y obtenemos 24, estamos utilizando la multiplicación. Podemos escribir el enunciado matemático:

$$4 \times 6 = 24$$

¿Cuáles son los números con los cuales se va a operar? (4 y 6) ¿Cuál es el resultado? (24) ¿Qué operación se utilizó? (multiplicación)

Examina los siguientes enunciados matemáticos:

$3 \times 5 = p$ y $3 \times n = 15$

$7 \times 2 = q$ $m \times 2 = 14$

¿En qué difieren estos dos conjuntos de enunciados matemáticos? (En los primeros dos, los productos son desconocidos. Los otros dos tienen factores desconocidos.)

¿En qué se parecen los cuatro enunciados? (Los cuatro enunciados indican multiplicación.)

¿Multiplicas los dos factores para hallar el número desconocido en el enunciado $3 \times 5 = p$? (Sí) ¿Multiplicas los dos factores para hallar el número desconocido en el enunciado $7 \times 2 = q$? (Sí)

¿Multiplicas los dos factores para hallar el número desconocido en el enunciado $3 \times n = 15$? (No) ¿Sabes qué número representa n? (Sí, n=5.) ¿Cómo lo sabes? (Porque $3 \times 5 = 15$.) ¿Sabes qué número representa m en el enunciado matemático $m \times 2 = 14$? (Sí, m=7.) ¿Cómo lo sabes? (Porque $7 \times 2 = 14$.)

En el enunciado $5 \times r = 10$, para hallar r, pregúntate qué factor multiplicado por 5 da 10.

Ensayemos algunos otros.

$$6 \times n = 12$$

$$t \times 3 = 15$$

¿Qué número representa n? (2) ¿Cómo lo sabes? (Porque $6 \times 2 = 12$.)

¿Qué número representa t? (5) ¿Cómo lo sabes? (Porque $5 \times 3 = 15$.)

> Es importante que los alumnos se den cuenta de que tienen que saber bien las combinaciones básicas de la multiplicación. Mientras mejor las sepan, más fácil les será comprender la división. Necesitamos conocer bien las combinaciones básicas de la multiplicación para poder multiplicar y dividir. Podemos efectuar ambas operaciones con un mismo conjunto de combinaciones.

E158

Conjunto de problemas 11

Halla el factor desconocido en los enunciados siguientes:

Ejemplo: $6 \times n = 24$

$n = 4$

1. $n \times 8 = 24$ — $n = 3$
2. $2 \times t = 16$ — $t = 8$
3. $p \times 4 = 16$ — $p = 4$
4. $n \times 1 = 16$ — $n = 16$
5. $p \times 6 = 48$ — $p = 8$
6. $8 \times p = 48$ — $p = 6$
7. $n \times 3 = 18$ — $n = 6$
8. $8 \times n = 0$ — $n = 0$
9. $n \times n = 25$ — $n = 5$
10. $n \times m = 23$ — $n = 1,\ m = 23$ ó $n = 23,\ m = 1$
11. $(3 \times n) \times 2 = 24$ — $n = 4$
12. $785 \times n = 7{,}850$ — $n = 10$
13. $(n \times n) \times 4 = 36$ — $n = 3$
14. $(n \times n) \times n = 27$ — $n = 3$
15. $p \times p = p$ — $p = 0$ ó 1

    (Aquí falta todo)

Conjunto de problemas 12

Escribe un enunciado matemático que corresponda a cada problema. Halla el factor desconocido. Dibuja una disposición en cuadro, si la necesitas. Asegúrate de que contestas la pregunta con un enunciado completo.

Ejemplo: Coloca 24 sillas en filas de 6 sillas cada una. ¿Cuántas filas habrá?

$n \times 6 = 24$

$n = 4$

Habrá 4 filas.

1. Una clase de 32 niños se dividió en grupos de 8 para participar en un baile típico. ¿Cuántos grupos había?
   ($m \times 8 = 32$ ó $8 \times m = 32$ Había 4 grupos.)
   $m = 4$
2. Distribuye 15 niños en 3 equipos iguales para una carrera de relevo. ¿Cuántos niños habrá en cada equipo?
   ($b \times 3 = 15$ ó $3 \times b = 15$ En cada equipo habrá 5 niños.)
   $b = 5$
3. María va a llenar 3 canastas con huevos. Tiene una docena de huevos. ¿Cuántos huevos puede poner en cada canasta?
   ($3 \times m = 12$ ó $m \times 3 = 12$ Puede poner 4 huevos en cada canasta.)
   $m = 4$
4. Roberto arregló su colección de 28 mariposas en 7 filas. ¿Cuántas mariposas tenía en cada fila?
   ($7 \times m = 28$ Tenía 4 mariposas en cada fila.)
   $m = 4$
5. En un juego de cartas, se colocaron 32 cartas en filas de 4 cartas cada una. ¿Cuántas filas había?
   ($4 \times c = 32$ Había 8 filas.)
   $c = 8$
6. Los 36 niños que dirigen el tránsito se dividieron en pelotones de 6. ¿Cuántos pelotones había?
   ($6 \times a = 36$ ó $a \times 6 = 36$ Había 6 pelotones.)
   $a = 6$
7. ¿Cuántas semanas hay en 35 días?
   ($7 \times m = 35$ ó $m \times 7 = 35$ En 35 días, hay 5 semanas)
   $m = 5$

PARA APRENDER A DIVIDIR ACERCA DE LA DIVISION

Exploración

Observa estos enunciados matemáticos.

(a) $5 \times 2 = n$ (b) $5 \times n = 10$

¿Qué representa n en el enunciado $5 \times 2 = n$? (10)

¿Cómo lo sabes? (Porque sé la combinación básica de la multiplicación $5 \times 2 = 10$.)

¿Qué representa n en el enunciado $5 \times n = 10$? (2)

¿Cómo lo sabes? (Sé que $5 \times 2 = 10$.)

¿Qué operación se utiliza para hallar un producto? (multiplicación)

En el enunciado $5 \times n = 10$, n es un factor desconocido. Esta operación de pensar acerca de un número y uno de sus factores y hallar un factor desconocido se llama división.

Para dividir, pensamos en qué número multiplicado por el factor conocido da el producto, o el factor conocido multiplicado por qué número da el producto.

Examina los siguientes enunciados matemáticos:

(a) $5 \times 8 = n$
(b) $5 \times r = 40$
(c) $p \times 3 = 21$

En el enunciado $5 \times 8 = n$, 5 y 8 son factores, ¿cómo llamamos a n? (Producto)

¿Qué operación se usa para hallar n en el enunciado $5 \times 8 = n$? (multiplicación)

¿Qué número representa n? (40)

En el enunciado $5 \times r = 40$, 5 es un factor conocido del producto 40.

¿Cómo se llama r? (Factor desconocido)

E161

¿Qué operación se utilizó para hallar r en el enunciado $5 \times r = 40$? (División)

¿Qué número representa r? (8)

¿Qué pensaste para hallar r en el enunciado $5 \times r = 40$? ($5 \times 8 = 40$. $r = 8$.)

En el enunciado $p \times 3 = 21$, 3 es un factor conocido el producto 21. ¿Qué número es p? (El factor desconocido)

¿Qué operación se utilizó para hallar p en el enunciado $p \times 3 = 21$? (División)

¿Qué número es p? (7)

¿Qué pensaste para hallar p en el enunciado $p \times 3 = 21$? ($7 \times 3 = 21$. $p = 7$)

La división no siempre se escribe como $5 \times n = 15$, ó $n \times 5 = 15$ ó $15 = n \times 5$. Estos enunciados expresan multiplicación.

Esta misma relación puede expresarse como un enunciado matemático que expresa división. Puede escribirse $n = 15 \div 5$. Este enunciado se lee "n es igual a 15 dividido por 5". Aquí, n es el factor <u>desconocido</u>; 15 es el <u>producto</u> y 5 es el <u>factor</u> <u>conocido</u>.

¿Cómo podemos describir la división? (La división se utiliza para hallar un factor desconocido en un problema de multiplicación.)

¿Qué debe darse para encontrar un factor desconocido? (Debemos conocer el producto y un factor. Hallamos el factor desconocido, dividiendo.)

¿Puedes encontrar el factor desconocido en los siguientes enunciados?

$7 \times m = 14$ $\quad\quad$ $p \times 5 = 35$ $\quad\quad$ $40 = 8 \times q$

(Sí; $m = 2$, $p = 7$, $q = 5$.)

¿Cómo los supiste? (Sé que $7 \times 2 = 14$, etc.)

Pensaste en una combinación básica de la multiplicación para dividir. Si puedes multiplicar, puedes dividir. Esto economiza tiempo.

310

Para cada combinación básica de la multiplicación que conoces, puedes determinar algunas combinaciones básicas de la división. Vamos a hacer la prueba. Expresa algunas combinaciones básicas de la división que conoces como consecuencia de que

$6 \times 8 = 48$	$48 \div 6 = 8$	$48 \div 8 = 6$
$5 \times 9 = 45$	$45 \div 9 = 5$	$45 \div 5 = 9$
$8 \times 9 = 72$	$72 \div 8 = 9$	$72 \div 9 = 8$

Escribe cada uno de los siguientes enunciados matemáticos como un enunciado matemático que expresa división:

a. $6 \times n = 24$ $\quad n = 24 \div 6$

b. $a \times n = 12$ $\quad n = 12 \div a$

c. $a \times n = b$ $\quad n = b \div a$

Resumen

Cuando pensamos en 6 y 2 y obtenemos 3, estamos dividiendo. Cuando pensamos en un número y en uno de sus factores y obtenemos el otro factor, estamos dividiendo.

Hay dos maneras de sugerir la división mediante enunciados matemáticos.

1. Podemos sugerir la división mediante un enunciado de multiplicación con un factor desconocido:

2	$\times$	n	$=$	6
(factor)		(factor desconocido)		(producto)

o

n	$\times$	2	$=$	6
(factor desconocido)		(factor)		(producto)

2. También podemos sugerir la división mediante un enunciado matemático como el siguiente:

$$6 \div 2 = n$$

Este enunciado se lee

6 dividido por 2 es igual a n.

Si pensamos en 6 y 2 y obtenemos 3, podemos expresar

$$6 \div 2 = 3.$$

311

Conjunto de problemas 12

Para cada uno de las combinaciones básicas de multiplicación que siguen, escribe dos combinaciones básicas de la división:

Ejemplo: $8 \times 6 = 48$ $\quad 48 \div 6 = 8$
$48 \div 8 = 6$

1. $9 \times 8 = 72$ $\quad 72 \div 8 = 9$ $\quad 72 \div 9 = 8$
2. $7 \times 9 = 63$ $\quad 63 \div 9 = 7$ $\quad 63 \div 7 = 9$
3. $6 \times 9 = 54$ $\quad 54 \div 6 = 9$ $\quad 54 \div 9 = 6$

Vuelve a escribir cada enunciado de multiplicación como un enunciado de división y halla el factor desconocido.

Ejemplo: $7 \times n = 28$ $\quad 28 \div 7 = n$
$4 = n$

4. $5 \times n = 25$ $\quad 25 \div 5 = n,$ $\quad n = 5$
5. $n \times 8 = 24$ $\quad 24 \div 8 = n,$ $\quad n = 3$
6. $2 \times t = 16$ $\quad 16 \div 2 = t,$ $\quad t = 8$
7. $p \times 4 = 16$ $\quad 16 \div 4 = p,$ $\quad p = 4$
8. $n \times 1 = 16$ $\quad 16 \div 1 = n,$ $\quad n = 16$
9. $9 \times 1 = 72$ $\quad 72 \div 9 = n,$ $\quad n = 8$
10. $p \times 6 = 48$ $\quad 48 \div 6 = p,$ $\quad p = 8$
11. $8 \times q = 48$ $\quad 48 \div 8 = q,$ $\quad q = 6$
12. $n \times 3 = 18$ $\quad 18 \div 3 = n,$ $\quad n = 6$
13. $8 \times n = 0$ $\quad 0 \div 8 = n,$ $\quad n = 0$
14. $n \times 5 = 25$ $\quad 25 \div 5 = n,$ $\quad n = 5$
15. $8 \times n = 64$ $\quad 64 \div 8 = n,$ $\quad n = 8$

E165

Conjunto de problemas 13

Enunciado matemático	Operación utilizada	Número desconocido
Ejemplo: 5 × 8 = n	×	40
1. 5 × p = 40	÷	8
2. 15 - 13 = q	-	2
3. 16 ÷ 8 = r	÷	2
4. 5 × n = 40	÷	8
5. 43 = n + 20	-	23
6. p = 6 × 9	×	54
7. 35 - n = 12	-	23
8. t × 9 = 81	÷	9
9. 48 ÷ 6 = n	÷	8
10. 56 ÷ 8 = y	÷	7
11. 75 + 28 = n	+	103
12. 49 ÷ 7 = n	÷	7
13. 49 - 7 = n	-	42
14. 49 + 7 = n	+	56

USO DE UNA TABLA DE MULTIPLICACION PARA DIVIDIR

Trabajo en grupo

En la tabla de multiplicación, los números en la parte superior y en el lado izquierdo son factores. Los números en el cuerpo de la tabla son productos.

La tabla de multiplicación puede ser muy útil para determinar combinaciones básicas de la división. Para hallar n en $48 \div 6 = n$, por ejemplo, se puede utilizar cualquiera de las siguientes formas:

1. Pensar en $6 \times n = 48$. Empezar con la fila "6", y seguirla hasta llegar a 48. Observa que 48 cae en la columna "8". Así, $6 \times 8 = 48$, de modo que $48 \div 6 = 8$.
2. Pensar en $n \times 6 = 48$. Empezar con la columna "6". Seguir la columna "6" hacia abajo hasta llegar a 48. Observa que 48 cae en la fila "8". Así, $8 \times 6 = 48$, de modo que $48 \div 6 = 8$.

Utiliza tu tabla de multiplicación para hallar el número desconocido en cada uno de los siguientes enunciados de división:

(a) $42 \div 6 = n$ (c) $54 \div 9 = r$

(b) $78 \div 8 = p$ (d) $63 \div 7 = t$

> **ADVERTENCIA:** Dijimos que $m \div n$ representa el único número p tal que $p \times 0 = 6$. Como no hay tal número, $6 \div 0$ no tiene sentido. También, puesto que hay una infinidad de números n tales que $n \times 0 = 0$, entonces, convenimos en que el símbolo $0 \div 0$ no representa número alguno.

Conjunto de problemas 14

Utiliza la tabla de multiplicación para hallar el número desconocido.

1. Completa los siguientes enunciados de división, utilizando la tabla.

a. $72 \div 9 = (8)$

b. $63 \div 7 = (9)$

c. $45 \div 5 = (9)$

d. $56 \div 8 = (7)$

e. $81 \div 9 = (9)$

f. $18 \div 2 = (9)$

g. $32 \div 8 = (4)$

h. $28 \div 7 = (4)$

i. $64 \div 8 = (8)$

j. $48 \div 6 = (8)$

El número 4 aparece en la tabla de multiplicación 3
veces. Un enunciado matemático diferente corresponde al 4
cada vez que aparece. Estos enunciados matemáticos son:

$$1 \times 4 = 4$$

$$2 \times 2 = 4$$

$$4 \times 1 = 4$$

2. ¿Cuántas veces aparece el 36 en la tabla? (Tres veces)
Escribe los enunciados matemáticos que corresponden al 36.
Asegúrate de que primero indicas el número de filas.

$$\begin{pmatrix} 4 \times 9 = 36 \\ 9 \times 4 = 36 \\ 6 \times 6 = 36 \end{pmatrix}$$

3. ¿Cuántas veces aparece el 24 en la tabla? (Cuatro veces)
Escribe los enunciados matemáticos que corresponden al 24.

$$\begin{pmatrix} 3 \times 8 = 24 \\ 8 \times 3 = 24 \\ 6 \times 4 = 24 \\ 4 \times 6 = 24 \end{pmatrix}$$

4. ¿Cuántas veces aparece el 47 en la tabla? ¿Por qué?
(No aparece. No tiene dos factores que sean números cardinales, excepto 1 y él mismo.)

RELACION ENTRE LA MULTIPLICACION Y LA DIVISION

Objetivo: Ayudar a los alumnos a comprender que la multiplicación y la división se "neutralizan" la una a la otra.

> El maestro recordará que dividir por un número (distinto de 0) es lo inverso de multiplicar por el mismo número. Se recomienda que el término inverso no se utilice con los alumnos del cuarto grado. Sin embargo, la idea es importante para el significado de las operaciones. El objeto de la exploración es ayudar a los estudiantes a descubrir la relación que hay entre la multiplicación y la división.
> Introdúzcase en este momento la idea de que una expresión como $3 \times 4 = 12$, puede leerse: "3 <u>por</u> 4 es igual a 12", ó "3 <u>multiplicado</u> por 4 es igual a 12". Proporciónese práctica en la lectura de ambos modos de expresiones parecidas.

Materiales: Una disposición de 6 × 20 para utilizarse en la explicación

Exploración:

Estudien los dos problemas que aparecen en la pizarra. Escriban un enunciado matemático para cada uno.

(a) Había 6 filas de personas sentadas en un salón. Había 8 personas en cada fila. ¿Cuántas personas había sentadas en el salón?

$$6 \times 8 = p$$

(b) Había 48 personas sentadas en filas con 8 personas en cada fila. ¿Cuántas filas de personas había?

$$48 = n \times 8$$

de modo que,

$$n = 48 \div 8$$

He aquí una disposición en cuadro para representar el problema (a). Descríbanla. (Hay 6 filas de 8 marcas.) ¿Cuántas marcas hay en la disposición? (48) Entonces, p = 48.

¿Podremos utilizar la misma disposición para representar el problema (b)? (Sí, necesitamos 48 marcas, con 8 marcas en cada fila.)

Para determinar el valor de p en el problema (a), ¿qué operación utilizamos? (Multiplicamos 6 por 8. El producto era 48.) Para determinar n en el problema (b), ¿qué operación utilizamos? (Dividimos 48 por 8. El factor desconocido era 6.)

¿Hallaron que $(6 \times 8) \div 8 = 6$? (Sí)

Esto mismo sucede, cuando trabajamos con la adición y la sustracción. Hallamos que $2 + 7 = 9$. Entonces, resultará que $9 - 7 = 2$. Así, volvemos a 2. ¿Cómo describimos esta relación entre la adición y la sustracción? (Decimos que se neutralizan una a la otra $(7 - 5) + 5 = 7$ ó $(8 + 3) - 3 = 8$.)

¿Se neutralizan una a la otra, la multiplicación y la división? (Sí) Tratemos algunos ejercicios y veamos.

$$(8 \times 3) \div 3 = 8$$
$$(12 \div 3) \times 3 = 12$$
$$(9 \times 4) \div 4 = 9$$

Los estudiantes deberán explicar cada uno de los ejercicios anteriores, como, por ejemplo, $8 \times 3 = 24$, $24 \div 3 = 8$. También, deberán dar algunos ejemplos en los que la multiplicación y la división se neutralizan entre sí y repasar la idea de que la adición y la sustracción se neutralizan una a la otra.

RELACION ENTRE LA MULTIPLICACION Y LA DIVISION

La multiplicación neutralizará la división. Piensa en 8, divide por 2 y, entonces, multiplica por 2. El resultado es 8. La multiplicación por 2 neutralizó la división por 2.

$$(\underline{8} \div 2) \times 2 = \underline{8}$$

La división neutralizará la multiplicación. Piensa en 8, multiplica por 2 y, luego, divide por 2. El resultado es 8. La división por 2 neutralizó la multiplicación por 2.

$$(\underline{8} \times 2) \div 2 = \underline{8}$$

Conjunto de problemas 15

1. Copia y completa la tabla que sigue:

EFECTUAR	NEUTRALIZAR
Ejemplos: $2 \times 3 = 6$ $12 \div 3 = 4$	$6 \div 3 = 2$ $4 \times 3 = 12$
a. $1 + 4 = 5$	$5 - 1 = 4$ ó $5 - 4 = 1$
b. $5 - 2 = 3$	$3 + 2 = 5$
c. $n \times 6 = 24$	$24 \div 6 = n$ $24 \div n = 6$
d. $15 \div 5 = n$	$n \times 5 = 15$
e. $5 \times n = 10$	$10 \div n = 5$ $10 \div 5 = n$

2. Para cada enunciado matemático di qué operación se utiliza para hallar n.

a. $2 \times n = 8$ (División)
b. $n \div \cancel{4} = 4$ (Multiplicación)
c. $n = 8 - 3$ (Sustracción)
d. $28 = n \times 4$ (División)
e. $7 \times n = 42$ (División)
f. $36 \div 6 = n$ (División)
g. $48 - n = 8$ (Sustracción)
h. $27 = n \times 9$ (División)

Escribe un enunciado matemático que corresponda a cada problema. Halla el factor desconocido. Asegúrate de que contestas la pregunta mediante un enunciado completo.

3. a. Un tablero de damas tiene 8 filas con 8 cuadrados en cada fila. ¿Cuántos cuadrados hay en el tablero de damas? ($8 \times 8 = n$, $64 = n$ Hay 64 cuadrados en el tablero.)

b. Hay 64 cuadrados en un tablero de damas. Hay 8 cuadrados en una fila. ¿Cuántas filas de cuadrados hay?
($n \times 8 = 64$, $n = 8$ Hay 8 filas de cuadrados.)

4. a. Un ábaco tiene 5 cuentas en cada uno de sus cuatro alambres. ¿Cuántas cuentas tiene el ábaco?
(5 × 4 = b ó 4 × 5 = b El ábaco tiene 20
b = 20 cuentas.)

b. 20 cuentas están distribuidas por igual en cada uno de los 4 alambres de un ábaco. ¿Cuántas cuentas hay en cada alambre?
(4 × a = 20 ó a × 4 = 20 En cada alambre hay
a = 5 5 cuentas.)

5. a. En la biblioteca, el catálogo de tarjetas tiene 4 filas de gavetas con 6 gavetas en cada fila. ¿Cuántas gavetas hay en el catálogo de tarjetas?
(4 × 6 = g Hay 24 gavetas en el catálogo de
g = 24 tarjetas.)

b. Las 24 gavetas del catálogo de tarjetas de la biblioteca están divididas en 4 filas. ¿Cuántas gavetas hay en cada fila? En cada fila hay 6 gavetas.)
(4 × n = 24
n = 6

6. a. Guillermo tenía 30 tronchos de lechuga en su huerto. Se repartieron por igual en 5 filas. ¿Cuántos tronchos de lechuga había en cada fila?
(5 × t = 30 En cada fila hay 6 tronchos de lechuga.)
t = 6

b. Guillermo tenía 5 filas de lechuga en su huerto. Había 6 tronchos de lechuga en cada fila. ¿Cuántos tronchos de lechuga tenía en su huerto?
(5 × 6 = l Guillermo tenía 30 tronchos
l = 30 de lechuga en su huerto.)

PROPIEDADES DEL UNO Y DEL CERO

Objetivo: Ayudar a los estudiantes a comprender las propiedades especiales del uno y del cero en relación con la multiplicación y la división.

Exploración:

Consideremos el enunciado matemático que aparece en la pizarra y aprendamos algo acerca de los factores.

$$a \times n = 12$$

¿Qué números cardinales podrían representar a y n, si el enunciado indica una combinación básica de la multiplicación? Escribamos esos números.

a	n	producto
12	1	12
6	2	12
4	3	12
3	4	12
2	6	12
1	12	12

¿Cuál es el número mayor que a puede representar? (12) ¿Cuál es el número menor que puede representar? (1)

Podemos decir que 12 es un factor de 12, porque $12 = 12 \times 1$.

También, 6 es un factor de 12, porque $12 = 6 \times 2$.

¿Conocen otros factores de 12? (Sí, 4, 3, 2 y 1 son, también, factores de 12.)

¿Es 5 un factor de 12? (No. No existe un número cardinal n tal que $12 = 5 \times n$. ¿Conocen otros números cardinales que no sean factores de 12? (Sí, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, ...)

Indiquen un factor de 15. (5) Mencionen algunos otros. (3, 15 y 1)

Indiquen los factores de 24. (1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24)

Examinen la tabla de los factores de 12. ¿Es 0 un factor de 12? (No, porque $0 \times n = 0$. $0 \times n$ nunca puede ser igual a 12.)

¿Puede ser 0 un factor de 20? (No, porque $0 \times n = 0$. $0 \times n$ nunca puede ser igual a 20.)

¿Puede ser 0 un factor de algún número cardinal? (Puede ser un factor de 0 solamente.)

¿Es 1 un factor de 12? (Sí, porque $1 \times 12 = 12$.)

¿Es 1 un factor de 9? (Sí, porque $1 \times 9 = 9$.)

¿Es 1 un factor de algún número cardinal, de todos los números cardinales o de algunos? (Es un factor de todos los números cardinales. $1 \times 0 = 0$, $1 \times 3 = 3$, etc., o $1 \times n = n$.)

Si un número n se multiplica por 1, ¿cuál es el resultado? (n).

Escriban esta relación en forma de un enunciado matemático. ($n \times 1 = n$)

Si un número n se multiplica por 0, ¿cuál es el resultado? (0) Escriban esta relación como un enunciado matemático. ($n \times 0 = 0$)

Hemos convenido en que 1 es un factor de un número cardinal cualquiera. Si es así, cualquier número cardinal puede dividirse por uno para obtener un factor desconocido. Den algunos ejemplos. ($12 \div 1 = 12$; $6 \div 1 = 6$; $928 \div 1 = 928$.)

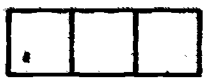
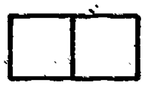
También, averiguamos que 0 no es un factor de ningún número cardinal, salvo el cero. Debido a que 0 no es un factor de ningún otro número cardinal, no podemos dividir ningún otro número cardinal por cero.

> Con los estudiantes sobresalientes, quizás, sea conveniente analizar las preguntas siguientes:
>
> ¿Por qué número puede sustituirse n para que $0 \times n = 0$ sea un enunciado cierto? (Cualquier número)
>
> ¿Habrá algún número que pueda sustituir a n para hacer de $0 \times n = 1$ un enunciado cierto? (No hay tal número.)

UNO O CERO COMO FACTOR

Conjunto de problemas 16

1. ¿Qué número es miembro de todo conjunto de factores? ¿Por qué? (1, porque $1 \times n = n$.)
2. Escribe un enunciado matemático sugerido por cada una de las siguientes disposiciones:

   a.  b.  c. 

   ($1 \times 3 = 3$) ($1 \times 2 = 2$) ($1 \times 6 = 6$)

3. Halla el factor desconocido:

   a. $1 \times n = 9$ $n = 9$

   b. $n \times 4 = 4$ $n = 1$

   c. $1 \times n = 53$ $n = 53$

   d. $72 \times n = 72$ $n = 1$

   e. $923 \times n = 923$ $n = 1$

4. Escribe el enunciado de multiplicación que corresponde a una disposición 1 por 287. ($1 \times 287 = 287$)
5. Escribe dos de los factores de 2,877. (1 y 2,877)
6. Completa los enunciados siguientes:

   Ejemplo: $2 \times 5 = 10$

   a. $1 \times 5 =$ (5) e. $3 \times 0 =$ (0)

   b. $0 \times 5 =$ (0) f. $1 \times 0 =$ (0)

   c. $3 \times 2 =$ (6) g. $0 \times 2 =$ (0)

   d. $3 \times 1 =$ (3) h. $2 \times 0 =$ (0)

7. a. ¿Cuánto es $0 \times 9{,}728$? (0)

   b. ¿Qué producto obtienes siempre que uno de los factores es 0? ¿Por qué? (0, porque 0 por un número cualquiera es 0)

   c. ¿Qué números son factores de 0? (Todos los números)

   d. ¿Es 0 un factor de 0? ¿Por qué? (Sí, $0 \times 1 = 0$ es un ejemplo que indica esto.)

8. ¿Cuántas disposiciones admiten 11 elementos? (Solamente dos disposiciones admiten 11 elementos; una disposición 11 por 1. Esto se debe a que 1 y 11 son únicos factores de 11.)

CLAUSURA

Objetivo: Ayudar a los estudiantes a comprender que la operación de multiplicación es siempre posible dentro del conjunto de los números cardinales y que la operación de división no es siempre posible dentro del conjunto de los números cardinales.

> Dentro del sistema de los números cardinales, dos números cualesquiera multiplicados uno por otro nos darán un número cardinal como producto. Esto no es siempre cierto, si efectuamos la operación de división. Si dividimos 6 por 3, obtenemos el número cardinal 2, pero si dividimos 9 por 2, no obtenemos un número cardinal y si dividimos 5 por 0, no obtenemos número alguno.
>
> Para describir la propiedad de clausura, decimos que el conjunto de los números cardinales es cerrado respecto de la operación de multiplicación; el conjunto de números cardinales no es cerrado respecto de la división.

Exploración:

¿Cuál es el número cardinal más pequeño que conocen? (0) ¿Cuál es el más grande? (999; 1,000,000; etc.) ¿Cuántos números cardinales hay? (Hay más de los que se pueden contar.)

Cuando tomamos dos números cardinales cualesquiera, ¿podremos sumarlos? (Sí) Ensayen con algunos. (7 + 9 = 16; 25 + 62 = 87, etc.) ¿Es siempre posible sumar dos números cardinales? (Sí) ¿Es siempre posible restar dos números cardinales? (No) Ensayen con algunos. (7 - 2 = 5; 2 - 7 = n; 5 - 5 = 0; 1 - 8 = n)

¿Es siempre posible multiplicar dos números cardinales? (Sí) ¿Cómo lo saben? (Podemos imaginarnos una disposición con un número cualquiera de filas y columnas.)

Describimos esto, diciendo que el conjunto de los números cardinales es <u>cerrado</u> respecto de la multiplicación. Esto significa simplemente que el producto de dos números cardinales es un número cardinal.

¿Es siempre posible dividir dos números cardinales? (No)

Eligiré algunos pares de números y los colocaré en una tabla. Si para algún par obtienen un número cardinal, escriban ese número en la columna del factor desconocido. Si no lo obtienen, escriban "ningún número cardinal".

	Par de números	Factor desconocido
(a)	12, 3	4
(b)	3, 12	ningún número cardinal
(c)	15, 5	3
(d)	5, 15	ningún número cardinal
(e)	0, 3	0
(f)	3, 0	ningún número cardinal

¿Podrán efectuar la división con cada par? (No) Expliquen por qué no se puede siempre dividir y obtener un número cardinal como resultado. (3 no puede dividirse por 12, porque 12 no es un factor de 3, etc.)

¿Es siempre posible dividir un par de números cardinales cualesquiera? (No). Den otros ejemplos.

¿Es el conjunto de los números cardinales cerrado respecto de la división? (No, porque no es siempre posible dividir y obtener un número cardinal como respuesta.)

E173

MULTIPLICACION Y DIVISION DE NUMEROS CARDINALES

Si se multiplican dos números cardinales, obtenemos siempre otro número cardinal. No siempre podemos dividir dos números cardinales, si queremos obtener un número cardinal como respuesta.

No siempre hay un número cardinal que se pueda emplear como factor desconocido. Por ejemplo,

$$7 \neq 3 \times n$$

y

$$4 \neq n \times 8$$

no importa lo que el número cardinal n represente.

Siempre es posible multiplicar dos números cardinales, porque siempre hay un tercer número cardinal que puede utilizarse como producto. Esto significa que el conjunto de los números cardinales es <u>cerrado</u> respecto de la multiplicación.

No siempre es posible dividir dos números cardinales, porque no siempre hay un tercer número cardinal que pueda utilizarse como factor desconocido. Por ejemplo, no hay número cardinal n alguno tal que $10 \div 3 = n$. Esto significa que el conjunto de números cardinales <u>no es cerrado</u> respecto de la división.

E174

Conjunto de problemas 17

1. Si es posible, completa cada enunciado matemático, de manera que sea un enunciado cierto. Si no hay número cardinal alguno que pueda servir como resultado, contesta "no".

   Ejemplo: $36 \div 9 = 4$

   a. $15 + 15 =$ (30)

   b. $5 - 0 =$ (5)

   c. $8 \div 24 =$ (no)

   d. $7,285 \times 0 =$ (0)

   e. $15 - 25 =$ (no)

   f. $5 \div 5 =$ (1)

   g. $6 \times 7 =$ (42)

2. Completa los siguientes enunciados, utilizando "es siempre" o "no siempre es"; da un ejemplo del problema 1:

   a. En el conjunto de los números cardinales, la adición (es siempre) posible.

   b. En el conjunto de los números cardinales, la multiplicación (es siempre) posible.

   c. En el conjunto de los números cardinales, la sustracción (no siempre es) posible. Da un ejemplo.
   ($15 - 25 \neq$ un número cardinal.)

   d. En el conjunto de los números cardinales, la división (no siempre es) posible. Da un ejemplo.
   ($8 \div 24 \neq$ un número cardinal)

3. Utiliza lo que descubriste en los problemas 1 y 2 para completar los siguientes enunciados utilizando las frases "es cerrado" o "no es cerrado":

   a. El conjunto de los números cardinales (es cerrado) respecto de la multiplicación.

   b. El conjunto de los números cardinales (no es cerrado) respecto de la división.

   c. El conjunto de los números cardinales (no es cerrado) respecto de la sustracción.

   d. El conjunto de los números cardinales (es cerrado) respecto de la adición.

PROPIEDAD DISTRIBUTIVA DE LA MULTIPLICACION RESPECTO DE LA ADICION

Objetivo: Ayudar a los estudiantes a comprender el uso de la propiedad de la multiplicación ilustrada por la expresión $7 \times (10 + 3) = (7 \times 10) + (7 \times 3)$ y enunciada por la fórmula

$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

Materiales: Una disposición 6 por 8 y otra 9 por 4

Vocabulario: Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición

Antes de introducir la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición, deberá repasarse la estructura del sistema decimal, destacando el estudio de los numerales de dos cifras. Deberá darse mayor atención a los múltiplos de 10, como, 2×10, 3×10, etc.

La propiedad distributiva tiene una gran importancia práctica. Se utiliza implícitamente siempre que calculamos productos como 23×37 mediante el algoritmo corriente de la multiplicación.

Generalmente, no se nos da un factor expresado en forma de suma, pero podemos escribirlo como una suma de varias maneras. Por ejemplo, consideremos el problema de multiplicación $7 \times 13 = n$. Podemos escribir 13 como $12 + 1$, $11 + 2$, $10 + 3$, etc. Entonces, en virtud de la propiedad distributiva, tenemos

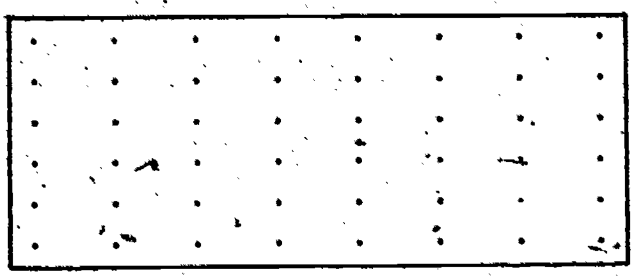
$$\begin{aligned} 7 \times 13 &= 7 \times (12 + 1) \\ &= (7 \times 12) + (7 \times 1) \\ 7 \times 13 &= 7 \times (11 + 2) \\ &= (7 \times 11) + (7 \times 2) \\ 7 \times 13 &= 7 \times (10 + 3) \\ &= (7 \times 10) + (7 \times 3), \text{ etc.} \end{aligned}$$

Cada nuevo nombre de 13 nos da un nombre del producto 7×13. Esta es una de las razones por las cuales la propiedad distributiva es tan útil. De este modo, podemos convertir multiplicaciones complicadas en combinaciones básicas de la multiplicación y de la adición.

Los estudiantes darán varios nombres del factor que se va a expresar como una suma. Al trabajar con los estudiantes, diríjalos de manera que se den cuenta de que generalmente hay una forma de expresar el factor que es la más conveniente. Por ejemplo, las expresiones 6 + 7, 8 + 5, 9 + 4, 10 + 3, 11 + 1 y 12 + 1, son todas nombres de 13; pero 10 + 3 es la que conviene utilizar.

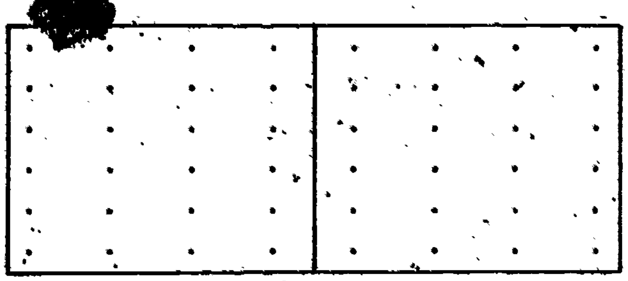
Exploración:

Examinemos una disposición 6 por 8. Utilizando la siguiente disposición, podemos descubrir un método para obtener un producto que no conocemos.

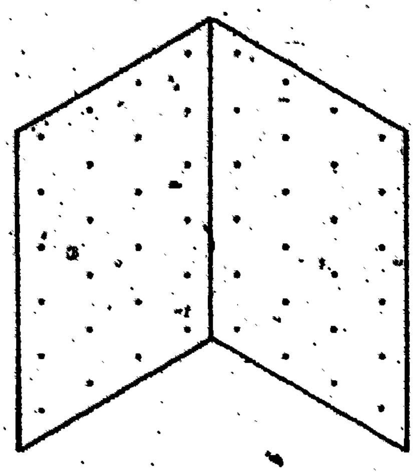


Si no sabemos que $6 \times 8 = 48$, pero sabemos cuánto es 6×1, 6×2, ..., 6×7, ¿podremos obtener 6×8, examinando la disposición? (Podemos considerar la disposición como descompuesta en dos partes iguales. Cada una tendrá 6 filas y 4 columnas. Entonces, $6 \times 8 = 24 + 24 = 48$.)

Cuando razonamos de esta manera, realmente descomponemos la disposición 6 por 8 en dos disposiciones. Indicaremos esto en la pizarra.



Podemos mostrar la descomposición de una disposición en dos disposiciones, simplemente, plegando la disposición 6 por 8 de la manera siguiente:



También, podemos trazar una recta que indique por dónde dividimos la disposición.

Digan un enunciado matemático que dé una relación entre el número de <u>columnas</u> de la disposición 6 por 8 y el número de <u>columnas</u> de las dos disposiciones 4 por 4. $(8 = 4 + 4)$

Escribiré este enunciado en la pizarra, de manera que podamos referirnos a él más tarde.

¿Podríamos descomponer la disposición 6 por 8 en otras dos disposiciones de otra manera? (Sí, podríamos descomponerla en una disposición 6 por 2 y una disposición 6 por 6.) Indicaré esta descomposición, plegando la disposición. ¿Cómo obtenemos el producto 6×8 mediante esta descomposición? $(6 \times 8 = 6 \times (2 + 6),\ \ 6 \times 8 = (6 \times 2) + (6 \times 6),\ \ 6 \times 8 = 12 + 36 = 48.)$

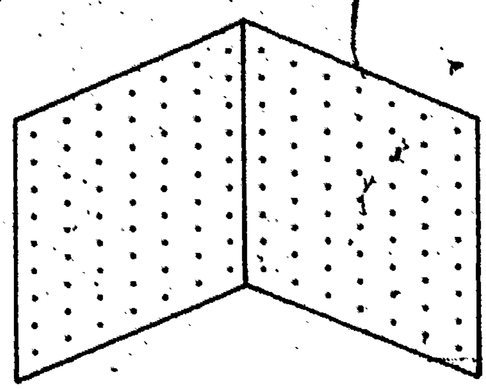
¿Cuál es la relación entre el número de columnas de la disposición 6 por 8 y el número de columnas de las dos disposiciones en que se descompuso esta vez? $(8 = 2 + 6)$

Escribiré este enunciado en la pizarra, debajo del enunciado $8 = 4 + 4$.

> Quizás, los estudiantes quieran descomponer la disposición de otras maneras, para indicar que $6 \times 8 = 48$; como, por ejemplo, $6 \times 8 = 6 \times (3 + 5)$, $6 \times 8 = (6 \times 3) + (6 \times 5)$. En la pizarra (para referencia), escríbase la relación entre el número de columnas de la disposición 6 por 8 y el número de columnas en las dos disposiciones en que se descomponga.

> Pregúntese a los estudiantes, si la disposición 6 por 8 pudo haberse plegado en más de dos partes. Este análisis deberá conducir a la clase a enunciados como $6 \times 8 =$
> $6 \times (2 + 2 + 4) =$
> $(6 \times 2) + (6 \times 2) + (6 \times 4) =$
> $12 + 12 + 24 = 48$.

Examinemos una disposición de la cual no sabemos el número de marcas. Tiene 9 filas y 14 columnas. ¿Podremos descomponer esta disposición en dos disposiciones, de tal manera que sepamos el número de marcas en cada una? Indíquese la descomposición plegando la disposición:



(Sí, se pueden formar dos disposiciones 9 por 7. Cada disposición contendrá 63 marcas. $9 \times 14 = (9 \times 7) + (7 \times 7)$.
$9 \times 14 = 63 + 63 = 126$.)

¿Puede alguno de ustedes descomponer la disposición de otra manera?

> El maestro deberá explicar cómo obtener el producto 9×14, resumiendo primero las maneras de descomponer 14 columnas: $14 = 7 + 7$; $14 = 6 + 8$; $14 = 5 + 9$; $14 = 10 + 4$. Luego, deberá resumir las maneras de descubrir el producto de 9 y 14.

$$9 \times 14 = 9 \times (7 + 7) = (9 \times 7) + (9 \times 7) = 63 + 63 = 126$$
$$9 \times 14 = 9 \times (9 + 5) = (9 \times 9) + (9 \times 5) = 81 + 45 = 126$$
$$9 \times 14 = 9 \times (8 + 6) = (9 \times 8) + (9 \times 6) = 72 + 54 = 126$$
$$9 \times 14 = 9 \times (10 + 4) = (9 \times 10) + (9 \times 4) = 90 + 36 = 126$$

> En los ejemplos anteriores y en otros

ejemplos, se entiende que toda multiplicación debe efectuarse antes que la adición.

Tratemos de describir en el lenguaje de la matemática cómo obtenemos los productos 6×8 y 9×14. Si podemos hacer esto, sabremos cómo obtener otros productos, sin tener que gastar tiempo en hacer disposiciones y descomponerlas para representar los productos.

Primero, consideremos el producto 6×8. Examinemos los enunciados matemáticos $8 = 4 + 4$, $8 = 2 + 6$, $8 = 3 + 5$ que están en la pizarra. Cada enunciado da otro nombre del número de columnas de la disposición. Con cada nombre, hallamos una manera de obtener el producto 6×8. Digan nuevamente cuáles son esas maneras. ($6 \times 8 = 6 \times (4 + 4) = (6 \times 4) + (6 \times 4) = 24 + 24 = 48$, etc.) ¿Pueden pensar en otras maneras de representar 8? ($8 = 1 + 7$; $8 = 2 + 2 + 4$; $8 = 10 - 2$.)

La propiedad de la multiplicación que estudiamos se llama la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición. Para hacerlo más claro, escribiré lo que hemos considerado así:

(a) $6 \times (4 + 4) = (6 \times 4) + (6 \times 4)$

(b) $6 \times (2 + 6) = (6 \times 2) + (6 \times 6)$

(c) $6 \times (3 + 5) = (6 \times 3) + (6 \times 5)$

La propiedad distributiva es muy útil para hallar productos desconocidos mediante otros productos conocidos. Podemos ilustrar esto, considerando el producto 9×14.

Los alumnos deberán seguir un análisis parecido con disposiciones 8 por 13, 6 por 15, etc. Las disposiciones deberán plegarse y, entonces, deberá escribirse el enunciado matemático correspondiente; como, por ejemplo, $8 \times 13 = (8 \times 7) + (8 \times 6) = 56 + 48 = 104$. En la pizarra, deberá escribirse una columna de enunciados referentes a las maneras de escribir cada producto. Una de las columnas podría ser igual a la que aparece en la página 325 para 9×14. Otra columna podría ser como la siguiente, para obtener 8×13:

$$
\begin{array}{l}
8 \times 13 = 8 \times (4 + 9) = (8 \times 4) + (8 \times 9) = 32 + 72 = 104 \\
8 \times 13 = 8 \times (5 + 8) = (8 \times 5) + (8 \times 8) = 40 + 64 = 104 \\
8 \times 13 = 8 \times (6 + 7) = (8 \times 6) + (8 \times 7) = 48 + 56 = 104 \\
8 \times 13 = 8 \times (10 + 3) = (8 \times 10) + (8 \times 3) = 80 + 24 = 104
\end{array}
$$

Hemos indicado varios modos de obtener un producto. Todos ellos ilustran la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición.

Repasemos el método que utilizamos para obtener 8×13. Este producto se representó por $4 + 9$, $5 + 8$, $6 + 7$ y $10 + 3$.

¿Cuál sería otra manera de representar 25 en 7×25? Recuérdese que debe representarse, de manera que conozcamos las combinaciones básicas de la multiplicación necesarias para obtener el producto 7×25. (25 podría representarse con $8 + 8 + 9$ ó $10 + 10 + 5$.)

Si necesitamos obtener un producto rápidamente, es conveniente tener un plan para hallar otro nombre de uno de los factores. Examinen todos los factores que hemos representado de otra manera y traten de pensar en una manera conveniente de representar un factor.

¿Cuál es la manera más conveniente de representar 25 en 7×25? $(10 + 10 + 5)$

¿Cuál es la manera más conveniente de representar 13 en 8×13? $(10 + 3)$

¿Pueden decir cuál parece ser la manera más conveniente de representar un factor para ayudarnos a obtener un producto? (Parece que es más conveniente representarlo por medio de decenas y unidades.)

¿Cuál sería una manera conveniente de representar 34 para obtener 9×34? $(10 + 10 + 10 + 4$ ó $30 + 4)$ Calculen 9×34.

¿Cómo se representaría 215 para obtener 8×215? $(100 + 100 + 10 + 5$ ó $200 + 10 + 5)$ Calculen 8×215.

Utilizaremos la propiedad distributiva de la multiplicación más y más, a medida que aprendamos a multiplicar números cuyos numerales tienen muchos dígitos.

> Hasta ahora, hemos utilizado la propiedad distributiva tal como se enunció al comienzo de esta sección; es decir, el

factor de la derecha se ha representado en forma de suma. Esto corresponde a la descomposición de una disposición en columnas. Si bien es más fácil al principio representar de otra manera sólo los factores de la derecha y descomponer las disposiciones en columnas, hay otra forma de la propiedad distributiva; a saber

$$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c).$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned}(18 \times 7) &= (10 + 8) \times 7 \\ &= (10 \times 7) + (8 \times 7)\end{aligned}$$

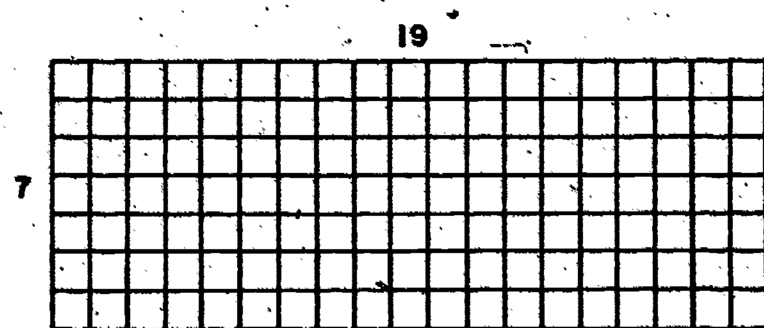
utiliza esta propiedad, representando de otra manera el factor de la izquierda. Corresponde a la descomposición de una disposición 18 por 7, en filas.

Probablemente, el maestro podrá lograr que la clase decida qué factor debe representarse de otra manera en ejemplos como 18×7 ó 7×18. Es importante que los estudiantes observen que la elección es sólo cuestión de conveniencia. Algunos señalarán que, como $18 \times 7 = 7 \times 18$, en realidad, se necesita solamente una forma de la propiedad distributiva.

LA PROPIEDAD DISTRIBUTIVA DE LA MULTIPLICACION RESPECTO DE LA ADICION

Trabajo en grupo

En una hoja de papel que puedas plegar, construye una disposición en cuadro como la siguiente:

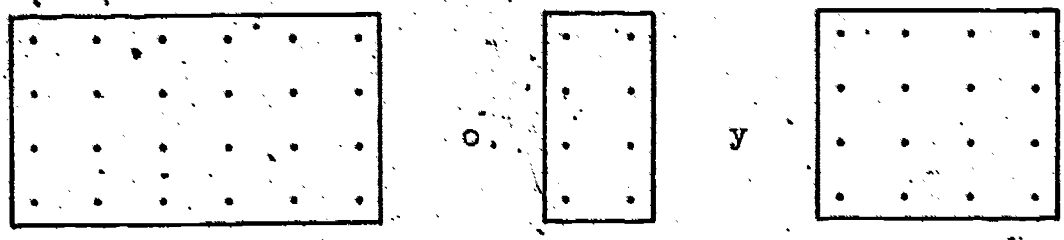


1. Plegando la disposición, puedes separar las 19 columnas de la misma en dos partes. Esto puede hacerse de 18 maneras diferentes. Escribe un enunciado matemático que corresponda a cada doblez que hagas.

   Ejemplo: $19 = 7 + 12$

   $19 = 3 + 16$, etc.

2. He aquí una disposición en cuadro separada en dos disposiciones en cuadro más pequeñas.



($n = 4 \times 6$) ($p = 4 \times 2$) ($q = 4 \times 4$)

Disposición A   Disposición B   Disposición C

a. La letra n representa el número de marcas en la disposición A. ¿Cuántas marcas hay en la disposición A?
(24 marcas)

b. La letra p representa el número de marcas en la disposición B. ¿Cuántas marcas hay en la disposición B?
(8 marcas)

c. La letra q representa el número de marcas en la disposición C. ¿Cuántas marcas hay en la disposición C?
(16 marcas)

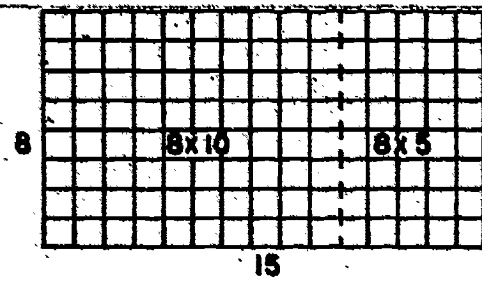
d. Cuando sumas el número de elementos de la disposición B y el de la disposición C, ¿es el resultado igual a n?
(sí)

e. ¿Es $n = p + q$? (sí)

f. ¿Es $24 = 8 + 16$? (sí)

g. ¿Es $4 \times 6 = (4 \times 2) + (4 \times 4)$? (sí)

3.



$$8 \times 15 = (8 \times 10) + (8 \times 5)$$

La recta de trazos indica una manera posible de plegar la disposición en cuadro. El enunciado que aparece debajo de la figura expresa la relación entre la disposición entera y las dos disposiciones más pequeñas que produce el pliegue. La disposición se puede doblar de varias otras maneras. Halla 6 maneras diferentes de descomponer la disposición. Escribe los enunciados matemáticos para cada descomposición.

$8 \times 15 = (8 \times 2) + (8 \times 13)$
$8 \times 15 = (8 \times 3) + (8 \times 12)$
$8 \times 15 = (8 \times 4) + (8 \times 11)$
etc.

4. Con papel cuadriculado, construye una disposición en cuadro para representar el producto de 9×13. Halla 6 maneras diferentes de separar la disposición. Escribe el enunciado matemático para cada separación.

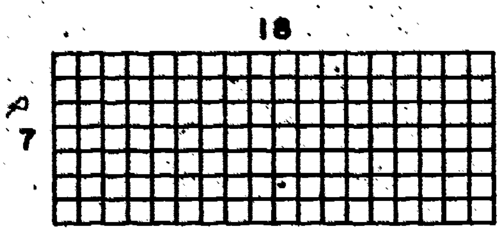
$9 \times 13 = (9 \times 10) + (9 \times 3)$
$9 \times 13 = (9 \times 11) + (9 \times 2)$
etc.

5. ¿Cuál de los enunciados que escribiste es el más fácil de utilizar para hallar el producto de 8 y 15? (Hay varias respuestas posibles. Si se pueden justificar, deberán aceptarse; sin embargo, debe tratarse que los alumnos se den cuenta de que para muchas personas, es más fácil representar 15 como $10 + 5$.)

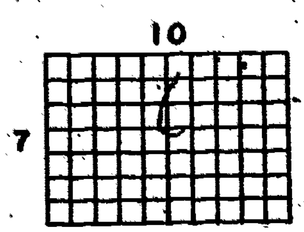
6. ¿Cuál de los enunciados que escribiste es el más fácil para utilizarse al hallar el producto de 9 y 13? (Como en el ejercicio 5, hay varias respuestas posibles. $9 \times 13 = (9 \times 10) + (9 \times 3)$ es, probablemente, la más fácil.)

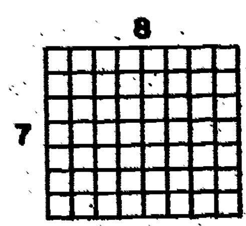
Resumen

Para hallar el producto de 7 y 18, piensa en una disposición en cuadro 7 por 18.



Descompónla en dos disposiciones que muestren productos que ya conoces. Por ejemplo,





Halla los productos por separado y súmalos para conseguir el número total de elementos de la disposición 7 por 18.

$$\begin{aligned} 7 \times 18 &= 7 \times (10 + 8) \\ &= (7 \times 10) + (7 \times 8) \\ &= 70 + 56 \\ &= 126 \end{aligned}$$

Al escribir $(7 \times 10) + (7 \times 8)$ en lugar de 7×18, utilizamos la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición.

EL USO DE LA PROPIEDAD DISTRIBUTIVA DE LA MULTIPLICACION RESPECTO DE LA ADICION

Conjunto de problemas 18

Halla otro nombre del segundo factor de cada uno de los siguientes productos, de manera que sea conveniente para multiplicar. Utiliza la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición para hallar el producto. Estudia el ejemplo antes de empezar.

Ejemplo: $4 \times 17 = 4 \times (10 + 7)$
$= (4 \times 10) + (4 \times 7)$
$= 40 + 28$
$= 68$

1. $3 \times 15 =$ $3 \times (10+5) = (3 \times 10) + (3 \times 5) = 30 + 15 = 45$
2. $7 \times 12 =$ $7 \times (10+2) = (7 \times 10) + (7 \times 2) = 70 + 14 = 84$
3. $5 \times 16 =$ $5 \times (10+6) = (5 \times 10) + (5 \times 6) = 50 + 30 = 80$
4. $6 \times 19 =$ $6 \times (10+9) = (6 \times 10) + (6 \times 9) = 60 + 54 = 114$
5. $8 \times 13 =$ $8 \times (10+3) = (8 \times 10) + (8 \times 3) = 80 + 24 = 104$

Ejemplo: $7 \times 26 = 7 \times (20 + 6)$
$= (7 \times 10) + (7 \times 10) + (7 \times 6)$
$= 70 + 70 + 42$
$= 182$

6. $7 \times 26 = 7 \times (20 + 6) = (7 \times 20) + (7 \times 6) = 140 + 42 = 182$
7. $5 \times 34 =$ $5 \times (30+4) = (5 \times 30) + (5 \times 4) = 150 + 20 = 170$
8. $6 \times 28 =$ $6 \times (20+8) = (6 \times 20) + (6 \times 8) = 120 + 48 = 168$
9. $9 \times 22 =$ $9 \times (20+2) = (9 \times 20) + (9 \times 2) = 180 + 18 = 198$

Ejemplo: $4 \times 153 = 4 \times (100 + 50 + 3)$

$= (4 \times 100) + (4 \times 50) + (4 \times 3)$

$= 400 + 200 + 12$

$= 612$

10. $3 \times 162 = 3 \times (100 + 60 + 2) = (3 \times 100) + (3 \times 60) + (3 \times 2) =$
$300 + 180 + 6 = 486$

11. $4 \times 147 = 4 \times (100 + 40 + 7) = (4 \times 100) + (4 \times 40) + (4 \times 7) = 400 + 160 + 28 = 588$

12. $5 \times 112 = 5 \times (100 + 10 + 2) = (5 \times 100) + (5 \times 10) + (5 \times 2) = 500 + 50 + 10 = 560$

13. $7 \times 120 = 7 \times (100 + 20) = (7 \times 100) + (7 \times 20) = 700 + 140 = 840$

14. $6 \times 132 = 6 \times (100 + 30 + 2) = (6 \times 100) + (6 \times 30) + (6 \times 2) = 600 + 180 + 12 = 792$

15. $9 \times 111 = 9 \times (100 + 10 + 1) = (9 \times 100) + (9 \times 10) + (9 \times 1) = 900 + 90 + 9 = 999$

16. $3 \times 243 = 3 \times (200 + 40 + 3) = (3 \times 200) + (3 \times 40) + (3 \times 3) = 600 + 120 + 9 = 729$

17. $2 \times 361 = 2 \times (300 + 60 + 1) = (2 \times 300) + (2 \times 60) + (2 \times 1) = 600 + 120 + 2 = 722$

PROPIEDAD DISTRIBUTIVA DE LA DIVISION RESPECTO DE LA ADICION

Objetivo: Ayudar a los estudiantes a entender el uso de la propiedad de la división ilustrada por el ejemplo

$$(40 + 8) \div 4 = (40 \div 4) + (8 \div 4)$$

y enunciada en general por la fórmula

$$(b + c) \div a = (b \div a) + (c \div a).$$

Materiales: Una disposición en cuadro 3 por 13

Exploración

La propiedad distributiva de la división respecto de la adición es tan importante como la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición. Es la base para el algoritmo de la "división larga", que utilizamos corrientemente. Si los alumnos entienden el uso de esta propiedad en problemas sencillos, les será más fácil entender el algoritmo de la división larga.

La propiedad distributiva de la división respecto de la adición es una consecuencia directa de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición. Lo mismo que la división es una manera de considerar la multiplicación, la propiedad distributiva de la división respecto de la adición es una manera de considerar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición. En un caso típico, calculamos $48 \div 4$, descomponiendo una disposición de 4 filas, con 48 elementos, en dos disposiciones de 4 filas con un número conocido de elementos; como, por ejemplo, una disposición de 40 elementos y una de 8 elementos.

Entonces, observamos que el número de columnas en la disposición A es la suma del número de columnas de las disposiciones B y C. En el lenguaje de la división, esto significa

Número de columnas de la disposición A	Número de columnas de la disposición B	Número de columnas de la disposición C

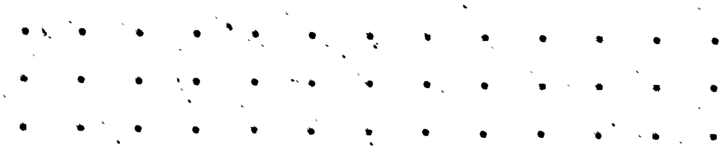
$$48 \div 4 = (40 + 8) \div 4 = (40 \div 4) + (8 \div 4)$$

En el lenguaje de la multiplicación, esto nos dice que $4 \times$ (número de columnas de A) $= 4 \times$ (número de columnas de B) $+ 4 \times$ (número de columnas de C).

El diagrama en la página 337 y las sugerencias de la explicación siguiente podrán servir de ayuda para ilustrar la idea básica. Es importante para el maestro observar que el procedimiento de descomponer una disposición de 4 filas, con 48 elementos, corresponde a escribir 48 como suma de números cada uno con el factor 4, y uno de los cuales es un múltiplo de 10.

Hay muchas cosas interesantes que podemos averiguar acerca de la división, estudiando disposiciones y enunciados matemáticos que indiquen división.

Estudiemos una disposición y los enunciados matemáticos que la describen.



$3 \times n = 39$
ó
$n = 39 \div 3$

La mayoría de ustedes puede determinar n en $n = 39 \div 3$. ¿Qué representa n? (13)

¿Qué representa n en el enunciado $n = 744 \div 3$? (No lo sabemos.) ¿Qué representa n en el enunciado $5225 \div 65$? (No lo sabemos.) La mayoría de ustedes no puede determinar n. Pronto podrán, pero, primero, debemos hallar un procedimiento. Por eso, estudiamos la disposición y el enunciado matemático $n = 39 \div 3$.

¿Conocen alguna combinación básica de la multiplicación que nos sirva de ayuda? (No). No es una de las combinaciones básicas.

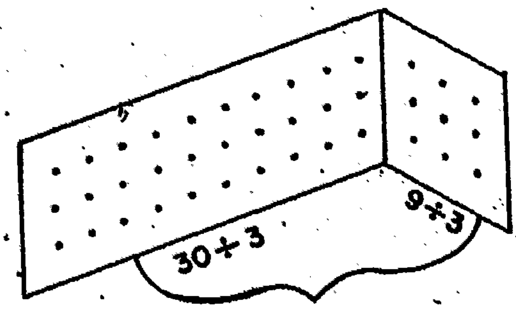
Utilicemos aquí el mismo método empleado, cuando tratamos de obtener un producto que no conocíamos. Utilizaremos parte de una disposición cada vez. La plegaremos en varias partes, de modo que el número de marcas en cada parte pueda dividirse por 3.

¿En cuántas partes podemos descomponer una disposición de 39 elementos, de manera que cada parte pueda dividirse por 3? ($30 + 9$, $15 + 15 + 9$, $18 + 18 + 3$, $21 + 18$, $12 + 12 + 12 + 3$, etc.)

Los alumnos pueden plegar la disposición y escribir diversos nombres de 39.

Hemos indicado varias de las maneras de plegar la disposición, de modo que se pueda dividir cada parte por 3. Examinemos algunas de esas maneras.

Pléguese la disposición en partes de 30 y 9. ¿Qué es $30 \div 3$? (10) ¿Qué es $9 \div 3$? (3) Si sumamos 10 y 3, la suma de los dos factores es 13. ¿Qué representa 13 en $n = 39 \div 3$? (El factor desconocido)



$$\begin{aligned} n &= 39 \div 3 = (30 + 9) \div 3 \\ &= (30 \div 3) + (9 \div 3) \\ &= 10 + 3 \\ &= 13 \end{aligned}$$

Otra manera de plegar sugerida es formar partes de 15, 15 y 9. Plieguen la disposición e indiquen la división.

Los alumnos bajo la dirección del maestro deben hacer los pliegues y escribir este tipo de trabajo en la pizarra.

$$\begin{aligned} n &= 39 \div 3 \\ &= (15 + 15 + 9) \div 3 \\ &= (15 \div 3) + (15 \div 3) + (9 \div 3) \\ &= 5 + 5 + 3 \\ &= 13 \end{aligned}$$

Supongamos que no tenemos una disposición para plegar, ¿pueden decirme otro nombre de 48 que podamos utilizar, para determinar n en $n = 48 \div 4$? (Sí, 24 + 24; 12 + 12 + 24;

40 + 8; etc.).

> Los estudiantes deberán determinar n en $n = 48 \div 4$, utilizando varios de estos nombres de 48 y dividiendo cada parte de 48 por 4, para calcular $48 \div 4$.

Esta parece ser una buena manera de dividir, cuando no conocemos una combinación básica de la multiplicación que podamos utilizar. ¿Qué hicieron ustedes? (Escribimos el producto como suma. Dividimos cada sumando y, después, sumamos los resultados.)

En $n = 39 \div 3$, ¿cuál es la manera más conveniente de representar 39 para dividirlo por 3? $(30 + 9)$

En $n = 48 \div 4$, ¿cuál es la manera más conveniente de representar 48 para dividirlo por 4? $(40 + 8)$

En $n = 486 \div 2$, ¿cuál es la manera más conveniente de representar 486 para dividirlo por 2? $(400 + 80 + 6)$

¿Cuál es la manera más conveniente de representar cada uno de esos productos para dividirlo por un número? (Lo más conveniente es representarlos mediante centenas, decenas y unidades.)

Para determinar n en $n = 369 \div 3$, representamos 369 como $300 + 60 + 9$ y dividimos por 3 cada uno de los números 300, 60 y 9. Entonces,

$$\begin{aligned} n = (300 + 60 + 9) \div 3 &= (300 \div 3) + (60 \div 3) + (9 \div 3) \\ &= 100 + 20 + 3 \\ &= 123 \end{aligned}$$

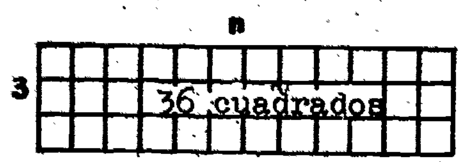
Estos son ejemplos del uso de la <u>propiedad distributiva de la división respecto de la adición</u>.

> Puesto que se está comparando la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición y la propiedad distributiva de la división respecto de la adición, hay una pregunta que podría plantearse. Sabemos que $3 \times (6 + 9) = (6 + 9) \times 3$, porque la propiedad conmutativa es válida para la multiplicación. Sin embargo, la propiedad conmutativa no es válida para la división; sabemos que $(6 + 9) \div 3 \neq 3 \div (6 + 9)$. La propiedad distributiva de la división respecto de la adición solamente se puede utilizar en la forma siguiente: $(a + b) \div c$.

EL USO DE LA PROPIEDAD DISTRIBUTIVA DE LA DIVISION RESPECTO DE LA ADICION

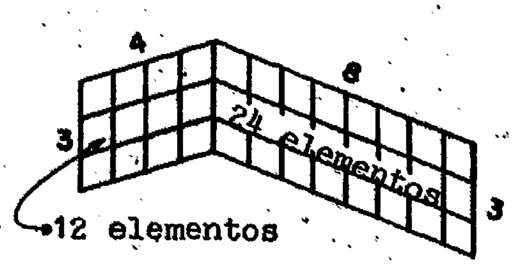
Trabajo en grupo

1. Construye una disposición en cuadro, de 36 cuadrados. Utiliza una hoja de papel que se pueda doblar. Construye tu disposición como la siguiente:



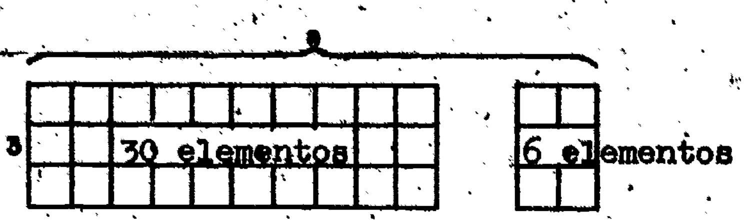
Doblando la disposición, halla 5 maneras de descomponer en dos partes 36 cuadrados, de modo que el número de cuadrados en cada parte se pueda dividir por 3. Escribe un enunciado matemático para expresar lo que has hecho.

Ejemplo:



$$36 = 12 + 24$$

2. Supongamos que descompusiste la disposición en el problema 1 así:



$$36 = 30 + 6$$

Entonces, podemos pensar:

$36 + 3 = n$

$36 + 3 = (30 + 6) + 3$

$36 + 3 = (30 + 3) + (6 + 3)$

$36 + 3 = 10 + 2$

$36 + 3 = 12$

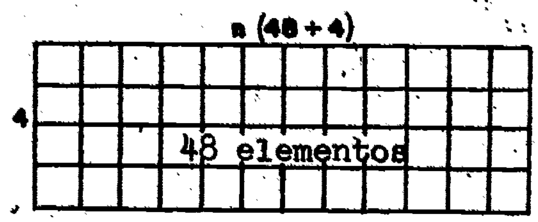
3. Elige otra manera de descomponer la disposición de 36 elementos del problema 1. Empleando el método que utilizamos en el problema 2, verifica que $36 + 3 = 12$, cuando se utiliza esa otra descomposición.
4. ¿Crees que alguna de las maneras de descomponer la disposición hace más fácil hallar $36 + 3$ que otras maneras de descomponer dicha disposición? ¿Por qué?

Resumen

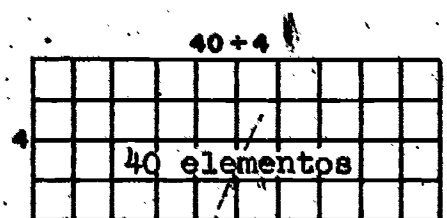
Para hallar un factor desconocido n como en

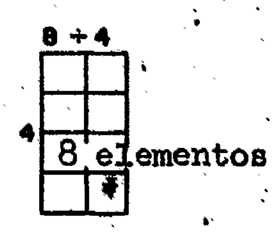
$$48 = 4 \times n,$$

podemos pensar en una disposición con 48 elementos en 4 filas y n columnas. Si $48 = 4 \times n$, entonces $n = 48 \div 4$.



Piensa en descomponer esta disposición en dos disposiciones, de manera que el número de elementos en cada parte se pueda dividir fácilmente por 4; por ejemplo:





Halla el número de columnas en cada disposición; suma estos números para hallar el número de columnas en la disposición de 48 elementos.

$$\begin{aligned} 48 \div 4 &= (40 + 8) \div 4 \\ &= (40 \div 4) + (8 \div 4) \\ &= 10 + 2 \\ &= 12 \end{aligned}$$

Cuando escribimos $(40 \div 4) + (8 \div 4)$ en lugar de $48 \div 4$, utilizamos la <u>propiedad distributiva de la división respecto de la adición</u>.

PRACTICA DE LA PROPIEDAD DISTRIBUTIVA DE LA DIVISION RESPECTO DE LA ADICION

Conjunto de problemas 19

Utilizando la propiedad distributiva de la división respecto de la adición, halla el factor desconocido.

Ejemplo: $28 \div 2 = (20 + 8) \div 2$

$= (20 \div 2) + (8 \div 2)$

$= 10 + 4$

$= 14$

1. $66 \div 3 = (60+6) \div 3 = (60 \div 3) + (6 \div 3) = 20 + 2 = 22$
2. $84 \div 4 = (80+4) \div 4 = (80 \div 4) + (4 \div 4) = 20 + 1 = 21$
3. $62 \div 2 = (60+2) \div 2 = (60 \div 2) + (2 \div 2) = 30 + 1 = 31$
4. $96 \div 3 = (90+6) \div 3 = (90 \div 3) + (6 \div 3) = 30 + 2 = 32$
5. $88 \div 4 = (80+8) \div 4 = (80 \div 4) + (8 \div 4) = 20 + 2 = 22$
6. $86 \div 2 = (80+6) \div 2 = (80 \div 2) + (6 \div 2) = 40 + 3 = 43$
7. $69 \div 3 = (60+9) \div 3 = (60 \div 3) + (9 \div 3) = 20 + 3 = 23$

E185

PROBLEMA DIFICIL: Estudia los ejemplos antes de tratar los problemas del 8 al 12.

Ejemplo: $284 \div 2 = (200 + 80 + 4) \div 2$

$= (200 \div 2) + (80 \div 2) + (4 \div 2)$

$= 100 + 40 + 2$

$= 142$

Ejemplo: $369 \div 3 = (300 + 60 + 9) \div 3$

$= (300 \div 3) + (60 \div 3) + (9 \div 3)$

$= 100 + 20 + 3$

$= 123$

8. $468 \div 2 =$ $(400+60+8) \div 2 = (400 \div 2) + (60 \div 2) + (8 \div 2) =$ $200 + 30 + 4 = 234$
9. $999 \div 9 =$ $(900 + 90 + 9) \div 9 = (900 \div 9) + (90 \div 9) + (9 \div 9) =$ $100 + 10 + 1 = 111$
10. $693 \div 3 =$ $(600 + 90 + 3) \div 3 = (600 \div 3) + (90 \div 3) + (3 \div 3) =$ $200 + 30 + 1 = 231$
11. $840 \div 8 =$ $(800 + 40) \div 8 = (800 \div 8) + (40 \div 8) = 100 + 5 = 105$
12. $75 \div 3 =$ $(60 + 15) \div 3 = (60 \div 3) + (15 \div 3) = 20 + 5 = 25$

LA PROPIEDAD ASOCIATIVA DE LA MULTIPLICACION

Objetivo: Ayudar a los estudiantes a comprender

(1) que el producto de tres factores a, b y c puede representarse por $(a \times b) \times c$ o por $a \times (b \times c)$;

(2) que podemos escribir $a \times b \times c$ sin ambigüedad, porque $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.

Exploración:

> Debe hacerse hincapié en que la multiplicación es una operación binaria. Con otras palabras, pueden multiplicarse <u>solamente dos números</u> en una operación de multiplicación. En consecuencia, al querer multiplicar tres números, es necesario efectuar la operación dos veces. Esto puede hacerse, agrupando o asociando los números que se van a multiplicar. Por ejemplo, para calcular $3 \times 4 \times 5$, podemos calcular $(3 \times 4) \times 5$ ó $3 \times (4 \times 5)$. En este ejemplo, el maestro debe asegurarse de qué denota los productos parciales 3×4 y 4×5, de tal modo que los estudiantes comprendan que una multiplicación es 12×5 y la otra es 3×20. Desde luego, ambos productos se representan por 60.
>
> El maestro debe tener cuidado de no alterar el orden de los factores, cuando explique la propiedad asociativa a los estudiantes. Escríbase
>
> $(3 \times 2) \times 4 = 3 \times (2 \times 4)$, $6 \times 4 = 3 \times 8$
>
> no $(3 \times 2) \times 4 = 2 \times (3 \times 4)$, $6 \times 4 = 2 \times 12$.
>
> Desde luego, la última forma es correcta; pero utiliza la propiedad conmutativa y la propiedad asociativa de la multiplicación.

Hemos estado descubriendo propiedades de la multiplicación. Hemos hallado que la multiplicación, lo mismo que la adición, posee la propiedad conmutativa. Una pregunta que debemos considerar es la siguiente: "¿Tiene la multiplicación, lo mismo que la adición, una propiedad asociativa?"

Repasemos primero la propiedad asociativa de la adición. Ilústrenla con los siguientes sumandos: 3, 4, 5.

$(3 + 4) + 5 = 3 + (4 + 5)$ Ilustren la propiedad con varios números a, b y c. $(a + b) + c = a + (b + c)$

En el enunciado $a + (b + c) = (a + b) + c$, hay que sumar tres números cardinales a, b y c. Era muy importante conocer la propiedad, cuando estábamos aprendiendo a sumar números grandes.

Escriban el enunciado que indica la agrupación de tres sumandos. En cada lugar donde hay un símbolo que indica adición, escribiremos un símbolo que indique multiplicación.

$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

Debemos investigar la validez de este enunciado, sustituyendo los factores a, b y c por números cardinales. Escriban el enunciado con $a = 3$, $b = 3$ y $c = 2$. $(3 \times 3) \times 2 = 3 \times (3 \times 2)$.

¿Es cierto ese enunciado? (Sí, $9 \times 2 = 18$, $3 \times 6 = 18$, $9 \times 2 = 3 \times 6$)

> Continúese sustituyendo a, b y c por otros números, para comprobar la validez del enunciado matemático $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.

¿Parece ser válida para la multiplicación la propiedad asociativa? (Sí, se verificó para todos los enunciados a los que la aplicamos.) Es una propiedad muy importante de la multiplicación.

Hemos utilizado varios ejemplos de la propiedad asociativa de la multiplicación. Ahora, tenemos que decidir si nuestro enunciado original que indica agrupación es un enunciado correcto. He aquí el enunciado: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ (Sí, ya lo comprobamos; a, b y c pueden ser números cardinales cualesquiera.)

Ahora, supongamos que escribo

$$3 \times 3 \times 2.$$

¿Existe alguna duda acerca de qué número representa esa expresión? (No, una persona podría pensar que significa $3 \times (3 \times 2)$. Otra persona podría pensar que significa $(3 \times 3) \times 2$, pero estas dos expresiones son nombres de 18.) ¿Podrían calcular $3 \times 3 \times 2$? (Se puede obtener 18, calculando $3 \times 3 = 9$ y, luego, $9 \times 2 = 18$ o calculando $3 \times 2 = 6$ y, después, $3 \times 6 = 18$.) De ahora en adelante, no escribiremos los paréntesis, a menos que tengamos alguna razón para indicar una agrupación particular.

Hemos utilizado números menores que 9 como factores. ¿Podría aplicarse la propiedad asociativa a números más grandes? (Sí) Trabajaremos uno o dos ejercicios juntos.

¿Conocen los productos 1×10, 2×10, ..., 10×10, ..., 1×100, 2×100, ..., 9×100?

Si los conocen, podemos calcular $n = 3 \times 20$.

$3 \times 20 = 3 \times (2 \times 10)$ Representen 20 como (2×10).

$= (3 \times 2) \times 10$ Utilicen la propiedad asociativa:

$= 6 \times 10$

$= 60$

Otro ejemplo en el que se utilizan la propiedad asociativa y la propiedad conmutativa de la multiplicación es $30 \times 20 = n$.

$n = 30 \times 20$

$= (3 \times 10) \times (2 \times 10)$ Dando otros nombres a 30 y 20.

$= [(3 \times 10) \times 2] \times 10$ Utilizando la propiedad asociativa.

$= [3 \times (10 \times 2)] \times 10$ Utilizando la propiedad asociativa.

$= [3 \times (2 \times 10)] \times 10$ Utilizando la propiedad conmutativa.

$= (3 \times 2) \times (10 \times 10)$ Utilizando la propiedad asociativa.

$= 6 \times 100$

$= 600$

Quizás, el maestro desee dar algunos otros ejemplos, como 3×20, 30×30, etc.

Tal vez, sea necesario explicar el uso de corchetes. Utilizamos corchetes en los casos en que se necesita un conjunto de paréntesis dentro de otro. Para mayor claridad, es preferible utilizar corchetes y no otro par de paréntesis.

> Los estudiantes deberán tener la oportunidad de resumir, utilizando números particulares y números generales (a, b, c, etc.), cada uno de los siguientes datos propiedades:
> 1. La relación entre la multiplicación y la división
> 2. Cero y uno como factores y productos
> 3. La propiedad de clausura
> 4. La propiedad distributiva de la división respecto de la adición
> 5. La propiedad conmutativa de la multiplicación
> 6. La propiedad asociativa de la multiplicación
> 7. La propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición

LA PROPIEDAD ASOCIATIVA DE LA MULTIPLICACION

Trabajo en grupo

1. Supongamos que se te dijo que multiplicaras 2, 3 y 4:

$$2 \times 3 \times 4 = n$$

   (a) ¿Puedes multiplicar los tres números al mismo tiempo?
   (b) Halla el producto cuando multiplicas 2×3 y, luego, multiplica el resultado por 4.
   (c) Halla el producto cuando multiplicas 3 por 4 y, luego, multiplica el resultado por 2.
   (d) ¿Son iguales los productos finales?

No es posible multiplicar más de dos números cada vez. Si tenemos más de dos números para multiplicar, debemos agrupar solamente dos números.

Al multiplicar $2 \times 3 \times 4 = n$, debemos multiplicar solamente dos números cada vez. Para hacer esto en el caso de $2 \times 3 \times 4 = n$, podemos escribir

$$(2 \times 3) \times 4 = n.$$

El paréntesis significa que agrupamos el 2 y el 3 y pensamos en 2×3 como un número, 6. Entonces, el producto es 6×4 ó 24. Podríamos escribir

$$2 \times (3 \times 4) = n.$$

Esto significa que agrupamos el 3 y el 4 y pensamos en esto como un número, 12. Entonces, el producto es 2×12 ó 24. $(2 \times 3) \times 4$ y $2 \times (3 \times 4)$ son nombres para el mismo número, 24. La manera de agrupar los números no alteró el producto. Cuando agrupamos $2 \times 3 \times 4$ como $(2 \times 3) \times 4$ como $2 \times (3 \times 4)$, utilizamos la propiedad asociativa de la multiplicación.

2. Si utilizamos la propiedad asociativa de la multiplicación para determinar $n = 3 \times 2 \times 5$, escribimos

$$\begin{aligned} n &= (3 \times 2) \times 5 \\ &= 6 \times 5 \\ &= 30 \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} n &= 3 \times (2 \times 5) \\ &= 3 \times 10 \\ &= 30 \end{aligned}$$

Halla cada producto. Utiliza la propiedad asociativa de la multiplicación, como se hizo anteriormente.

(a) $3 \times 2 \times 3$ $\quad n = (3 \times 2) \times 3 = 6 \times 3 = 18$ $\quad$ o $\quad n = 3 \times (2 \times 3) = 3 \times 6 = 18$

(b) $4 \times 2 \times 3$ $\quad n = (4 \times 2) \times 3 = 8 \times 3 = 24$ $\quad$ o $\quad n = 4 \times (2 \times 3) = 4 \times 6 = 24$

(c) $5 \times 2 \times 4$ $\quad n = (5 \times 2) \times 4 = 10 \times 4 = 40$ $\quad$ o $\quad n = 5 \times (2 \times 4) = 5 \times 8 = 40$

3. (a) Di cómo se efectúa esta operación: $(2 \times 4) \times 5$
(Se multiplica primero 2×4. Después, se multiplica 8×5.)

(b) Di cómo se efectúa esta operación: $2 \times (4 \times 5)$
(Se multiplica primero 4×5. Después, se multiplica 2×20.)

(c) ¿Por qué debemos agrupar dos de los números al multiplicar? (Debemos agrupar dos números porque la multiplicación se efectúa con sólo dos números.)

4. (a) ¿Cuál es el resultado de $(3 \times 5) \times 2$? (30)

(b) ¿Cuál es el resultado de $3 \times (5 \times 2)$? (30)

(c) ¿Es $(3 \times 5) \times 2 = 3 \times (5 \times 2)$? (Sí)

5. (a) ¿Es $(3 \times 2) \times 4 = 3 \times (2 \times 4)$? (Sí)

(b) ¿Son $(3 \times 2) \times 4$ y $3 \times (2 \times 4)$ nombres diferentes para el mismo número? (Sí)

(c) ¿En qué difieren las expresiones $(3 \times 2) \times 4$ y $3 \times (2 \times 4)$? (Los factores se agruparon de manera diferente.)

Resumen

Podemos multiplicar los tres factores 2, 3 y 4 en ese orden de cualquiera de las dos maneras:

$(2 \times 3) \times 4$	ó	$2 \times (3 \times 4)$
6×4		2×12
24		24

Estas dos maneras dan siempre el mismo producto. Cuando remplazamos una manera por la otra, utilizamos la <u>propiedad asociativa de la multiplicación</u>. Debido a que ambos grupos de factores dan el mismo producto, podemos eliminar los paréntesis y escribir simplemente

$$2 \times 3 \times 4 = 24.$$

E189

EL USO DE LA PROPIEDAD ASOCIATIVA DE LA MULTIPLICACION

Conjunto de problemas 20

Muestra cómo utilizar la propiedad asociativa para "comprobar" las respuestas.

> Ejemplo: $3 \times 2 \times 5 = (3 \times 2) \times 5$
> $= 6 \times 5$
> $= 30$
>
> ó
>
> $3 \times 2 \times 5 = 3 \times (2 \times 5)$
> $= 3 \times 10$
> $= 30$

7

1. $2 \times 3 \times 4$
2. $4 \times 2 \times 6$
3. $3 \times 3 \times 2$
4. $4 \times 2 \times 3$
5. $2 \times 5 \times 4$
6. $3 \times 4 \times 2$

Utiliza la propiedad asociativa de la multiplicación para hallar los siguientes productos:

> Ejemplo: $3 \times 40 = 3 \times (4 \times 10)$
> $= (3 \times 4) \times 10$
> $= 12 \times 10$
> $= 120$

7. 8×30
8. 9×40
9. 6×80
10. 5×40
11. 6×60
12. 8×40
13. 3×70
14. 4×20
15. 5×90
16. 4×40
17. 7×80
18. 3×60

Respuestas al Conjunto de problemas 20

1. $$\begin{aligned} 2 \times 3 \times 4 &= (2 \times 3) \times 4 \\ &= 6 \times 4 \\ &= 24 \end{aligned}$$ ó $$\begin{aligned} 2 \times 3 \times 4 &= 2 \times (3 \times 4) \\ &= 2 \times 12 \\ &= 24 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} 4 \times 2 \times 6 &= (4 \times 2) \times 6 \\ &= 8 \times 6 \\ &= 48 \end{aligned}$$ ó $$\begin{aligned} 4 \times 2 \times 6 &= 4 \times (2 \times 6) \\ &= 4 \times 12 \\ &= 48 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} 3 \times 3 \times 2 &= (3 \times 3) \times 2 \\ &= 9 \times 2 \\ &= 18 \end{aligned}$$ ó $$\begin{aligned} 3 \times 3 \times 2 &= 3 \times (3 \times 2) \\ &= 3 \times 6 \\ &= 18 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} 4 \times 2 \times 3 &= (4 \times 2) \times 3 \\ &= 8 \times 3 \\ &= 24 \end{aligned}$$ ó $$\begin{aligned} 4 \times 2 \times 3 &= 4 \times (2 \times 3) \\ &= 4 \times 6 \\ &= 24 \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} 2 \times 5 \times 4 &= (2 \times 5) \times 4 \\ &= 10 \times 4 \\ &= 40 \end{aligned}$$ ó $$\begin{aligned} 2 \times 5 \times 4 &= 2 \times (5 \times 4) \\ &= 2 \times 20 \\ &= 40 \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} 3 \times 4 \times 2 &= (3 \times 4) \times 2 \\ &= 12 \times 2 \\ &= 24 \end{aligned}$$ ó $$\begin{aligned} 3 \times 4 \times 2 &= 3 \times (4 \times 2) \\ &= 3 \times 8 \\ &= 24 \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} 8 \times 30 &= 8 \times (3 \times 10) \\ &= (8 \times 3) \times 10 \\ &= 24 \times 10 \\ &= 240 \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} 9 \times 40 &= 9 \times (4 \times 10) \\ &= (9 \times 4) \times 10 \\ &= 36 \times 10 \\ &= 360 \end{aligned}$$

9. $$\begin{aligned} 6 \times 80 &= 6 \times (8 \times 10) \\ &= (6 \times 8) \times 10 \\ &= 48 \times 10 \\ &= 480 \end{aligned}$$

10. $$\begin{aligned} 5 \times 40 &= 5 \times (4 \times 10) \\ &= (5 \times 4) \times 10 \\ &= 20 \times 10 \\ &= 200 \end{aligned}$$

11. $$\begin{aligned} 6 \times 60 &= 6 \times (6 \times 10) \\ &= (6 \times 6) \times 10 \\ &= 36 \times 10 \\ &= 360 \end{aligned}$$

12. $$\begin{aligned} 8 \times 40 &= 8 \times (4 \times 10) \\ &= (8 \times 4) \times 10 \\ &= 32 \times 10 \\ &= 320 \end{aligned}$$

13. $3 \times 70 = 3 \times (7 \times 10)$
$= (3 \times 7) \times 10$
$= 21 \times 10$
$= 210$

14. $4 \times 20 = 4 \times (2 \times 10)$
$= (4 \times 2) \times 10$
$= 8 \times 10$
$= 80$

15. $5 \times 90 = 5 \times (9 \times 10)$
$= (5 \times 9) \times 10$
$= 45 \times 10$
$= 450$

16. $4 \times 40 = 4 \times (4 \times 10)$
$= (4 \times 4) \times 10$
$= 16 \times 10$
$= 160$

17. $7 \times 80 = 7 \times (8 \times 10)$
$= (7 \times 8) \times 10$
$= 56 \times 10$
$= 560$

18. $3 \times 60 = 3 \times (6 \times 10)$
$= (3 \times 6) \times 10$
$= 18 \times 10$
$= 180$

USO DE LAS PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACION

Conjunto de problemas 21

1. Estudia el ejemplo que sigue. Después, copia el enunciado matemático, escribiendo los números desconocidos. Escribe <u>C</u> si el enunciado es cierto y <u>F</u> si el enunciado es falso.

   Ejemplo: $(5 + 6) + 1 = 5 + (6 + 1)$

   $11 + 1 = 5 + 7$

   $12 = 12$ C

   (a) $(2 \times 5) \times 3 = 2 \times (5 \times 3)$

   $10 \times 3 = 2 \times \underline{(15)}$

   $30 = \underline{(30)}$ C

   (b) $(18 - 9) - 2 = 18 - (9 - 2)$

   $\underline{(9)} - 2 = 18 - \underline{(7)}$

   $\underline{(7)} = \underline{(11)}$ F

   (c) $(25 + 5) + 5 = 25 + (5 + 5)$

   $\underline{(5)} + 5 = 25 + \underline{(1)}$

   $\underline{(1)} = \underline{(25)}$ F

2. Utiliza las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación para facilitar la determinación de los siguientes productos:

   Ejemplo: $5 \times (2 \times 19)$ $\quad 5 \times (2 \times 19) = (5 \times 2) \times 19$

   $= 10 \times 19$

   $= 190$

   (a) $(2 \times 27) \times 5 = (27 \times 2) \times 5 = 27 \times (2 \times 5) = 27 \times 10 = 270$

   (b) $(11 \times 4) \times 5 = 11 \times (4 \times 5) = 11 \times 20 = 11 \times (10 \times 2) = (11 \times 10) \times 2 =$
   $110 \times 2 = 220$

   (c) $[(5 \times 5) \times 7] \times (2 \times 2) = [(5 \times 5) \times (2 \times 2)] \times 7 =$
   $[(5 \times 2) \times (5 \times 2)] \times 7 =$
   $[10 \times 10] \times 7 = 100 \times 7 = 700$

3. Utiliza las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación para hallar los siguientes productos:

(a) $20 \times 40 = (2\times10)\times(4\times10) = (2\times4)\times(10\times10) = 8\times100 = 800$

(b) $30 \times 30 = (3\times10)\times(3\times10) = (3\times3)\times(10\times10) = 9\times100 = 900$

(c) $30 \times 40 = (3\times10)\times(4\times10) = (3\times4)\times(10\times10) = 12\times100 = 1200$

4. Utiliza la propiedad distributiva para verificar que $8 \times 25 = 200$.

$$\begin{aligned} 8\times25 &= 8\times(10+10+5) \\ &= (8\times10)+(8\times10)+(8\times5) \\ &= 80+80+40 \\ &= 200 \end{aligned}$$

5. En una tabla que muestre todos los productos desde 0×0 hasta 9×9, hay $10 \times 10 = 100$ combinaciones básicas de la multiplicación. Si conoces la propiedad conmutativa de la multiplicación, ¿qué parte de la tabla necesitas realmente? (La parte que está por encima o la que está por debajo de la diagonal desde la esquina superior izquierda hasta la esquina inferior derecha)

¿Cuántas combinaciones básicas se dan en esta parte de la tabla? $(1+2+3+\dots+10=55)$

DESCRIPCION DE DISPOSICIONES

Objetivo: Introducir disposiciones con las cuales podamos asociar un enunciado matemático de la forma

$$a = (b \times c) + d$$

donde a, b, c y d representan números cardinales.

Vocabulario: disponer, dispuesto, disposición

Sugerencias para la enseñanza:

Resumen: El material que se presenta al concluir este capítulo proporciona diversos grados de "preparación" para lo que llamamos a menudo "división con residuo". El objetivo del material presente es destacar las ideas, más bien que las técnicas. En el Capítulo 7, se presenta un estudio más explícito de la "división con residuos".

La Exploración de las páginas 356 a 358 se utiliza como base para iniciar este trabajo de "preparación". Antes de empezarlo, el maestro debe asegurarse de que los alumnos entienden palabras como disponer, dispuesto y disposición, de la manera que se aplican a conjuntos de objetos, etc. A medida que sea necesario, pónganse ejemplos sencillos de conjuntos pequeños dispuestos de diversas maneras.

Antes de estudiar la página 356, hágase algunos comentarios acerca de ~~coleccionar~~ sellos que sean apropiados para la clase.

El estudio de la página 356 debe ser enteramente oral.

En relación con las páginas 356 y 358, quizás, el maestro crea conveniente representar en la pizarra las disposiciones de los sellos de Samuel, Elena y Juanita.

Obsérvese que las disposiciones de los sellos de José y Samuel implican la formación de subconjuntos equivalentes de una manera y las disposiciones de los sellos de Elena y Juanita implican la formación de subconjuntos equivalentes de otra manera. También, debe observarse la ausencia deliberada de "sellos extras", en relación con las disposiciones de Juanita.

DESCRIPCION DE DISPOSICIONES

Exploración

José, Samuel, Elena y Juanita eran miembros de un club filatélico. Cada uno de ellos tenía algunos sellos para colocar en un libro de sellos.

José puso 46 sellos en una página de su libro.

Puso 8 sellos en una fila.

Formó tantas filas de 8 sellos como pudo.

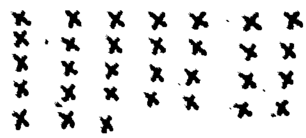
He aquí una ilustración de la forma en que José arregló sus sellos:

```
*   *   *   *   *   *   *   *
*   *   *   *   *   *   *   *
*   *   *   *   *   *   *   *
*   *   *   *   *   *   *   *
*   *   *   *   *   *   *   *
*   *   *   *   *   *
```

1. (a) ¿Hay 8 sellos en cada fila? (no)
   (b) ¿Cuántas filas de 8 sellos hay? (5)
   (c) ¿Cuántos sellos hay en la última fila? (6)

2. Determina si cada uno de los siguientes enunciados es cierto:
   (a) Los 46 sellos están dispuestos en 5 filas de 8 sellos, con 6 sellos sobrantes. (Cierto)
   (b) El conjunto de 46 sellos está dispuesto en 5 conjuntos de 8 y un conjunto de 6. (Cierto)
   (c) $46 = (5 \times 8) + 6$ (Cierto)

3. Samuel colocó 31 sellos en una página de su libro. Puso 7 sellos en una fila. Trató de poner tantas filas de 7 sellos como pudo. Utiliza fichas o haz un dibujo para indicar cómo Samuel dispuso sus 31 sellos.

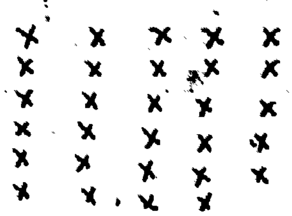


4. Expresa de varias maneras cómo dispuso sus sellos Samuel.
(Hay 4 filas de 7 sellos y 3 sellos sobrantes.
Hay 4 conjuntos de 7 y un conjunto de 3, etc.)

5. Completa este enunciado matemático para descubrir de qué manera dispuso Samuel sus sellos:

$$31 = (\underset{?}{4} \times 7) + \underset{?}{3}$$

6. Elena colocó 29 sellos en una página de su libro. Colocó tantos de ellos como pudo en 6 filas, con el mismo número de sellos en cada fila. Utiliza fichas o dibuja un cuadro para mostrar cómo dispuso Elena sus sellos.



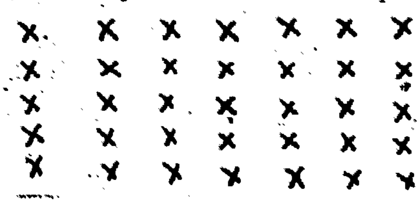
7. Completa cada uno de los siguientes enunciados de modo que resulte cierto:

(a) Los 29 sellos se dispusieron en 6 filas de $\underset{?}{4}$ sellos, con $\underset{?}{5}$ sellos sobrantes.

(b) El conjunto de 29 sellos se dispuso en 6 conjuntos de $\underset{?}{4}$ y un conjunto de $\underset{?}{5}$.

(c) $29 = (6 \times \underset{?}{4}) + \underset{?}{5}$

8. Juanita colocó 35 sellos en una página de su libro. Colocó tantos de ellos como pudo en 5 filas, con el mismo número de sellos en cada fila. Utiliza fichas o haz un dibujo para mostrar cómo dispuso Juanita sus sellos.



9. Completa cada uno de los siguientes enunciados de modo que sea cierto:

   (a) Los 35 sellos se dispusieron en 5 filas de $\overset{7}{\underline{\ ?\ }}$ sellos, con $\overset{0}{\underline{\ ?\ }}$ sellos sobrantes.

   (b) El conjunto de 35 sellos se podía disponer en 5 conjuntos de $\overset{7}{\underline{\ ?\ }}$ y un conjunto que tuviera $\overset{0}{\underline{\ ?\ }}$ miembros.

   (c) $35 = (5 \times \overset{7}{\underline{\ ?\ }}) + \overset{0}{\underline{\ ?\ }}$

Utiliza fichas o dibujos, si se necesitan, para ayudarte a completar cada uno de estos enunciados, de manera que sea cierto:

10. $23 = (\overset{5}{\underline{\ ?\ }} \times 4) + \overset{3}{\underline{\ ?\ }}$

11. $34 = (4 \times \overset{8}{\underline{\ ?\ }}) + \overset{2}{\underline{\ ?\ }}$

12. $28 = (\overset{4}{\underline{\ ?\ }} \times 7) + \overset{0}{\underline{\ ?\ }}$

DESCOMPOSICION DE CONJUNTOS

Objetivos: 1. Destacar dos tipos de situaciones que impliquen la descomposición de conjuntos en subconjuntos equivalentes:

a. Las situaciones en las que sabemos el número de miembros en el conjunto y el número de miembros en cada subconjunto y queremos saber el número de subconjuntos que pueden formarse y el residuo (si hay alguno);

b. Las situaciones en las que conocemos el número de miembros del conjunto y el número de subconjuntos que pueden formarse y queremos saber el número de miembros que puede haber en cada subconjunto y el residuo (si hay alguno)

2. Aprender a asociar con cada caso que implica descomposición, un enunciado matemático de la forma

$$a = (b \times c) + d$$

donde a, b, c y d representan números cardinales.

Vocabulario: Descomposición, descomponer

Sugerencias para la enseñanza:

Exploración:

Escríbase el siguiente enunciado matemático en la pizarra:

$$13 = (2 \times n) + r.$$

El maestro deberá colocar 13 libros en su escritorio. Dígase a los alumnos que se desea separar o descomponer los libros en dos grupos y que podemos utilizar el enunciado matemático que aparece en la pizarra para describir cómo se hace esto.

Comiéncense a formar dos pilas de libros, colocando 1 libro en cada una, dejando así 11 sobrantes. Entonces, escribe lo siguiente debajo del primer enunciado matemático:

$$13 = (2 \times 1) + 11$$

Pídale a alguno de los estudiantes que explique cómo este enunciado describe lo que se ha hecho con los 13 libros hasta ahora.

Continúe, distribuyendo uno a uno los libros en las dos pilas. Cada vez que se coloque 1 libro en una pila, escriba en la pizarra el enunciado matemático que describe la descomposición hasta ese momento. Finalmente, la sucesión de enunciados matemáticos será así:

$$13 = (2 \times 1) + 11$$
$$13 = (2 \times 2) + 9$$
$$13 = (2 \times 3) + 7$$
$$13 = (2 \times 4) + 5$$
$$13 = (2 \times 5) + 3$$
$$13 = (2 \times 6) + 1$$

Recálquese que 6 es el máximo de libros que se puede colocar en cada pila, si hemos de tener el mismo número de libros en cada una, y que había 1 libro sobrante.

Ayúdese a los estudiantes a ver mediante el uso de un enunciado matemático por qué no puede haber hasta 7 libros en cada pila: Si escribimos $13 = (2 \times 7) + r$, 2×7 ya es más que 13.

Recuérdese a los alumnos que han estado descomponiendo un conjunto en varios subconjuntos.

Es conveniente que el maestro guíe a los estudiantes en el estudio de las páginas 361 y 362. En relación con los problemas acerca de los lápices de Tomás y Beatríz, utilícense diagramas de fichas, según sea necesario.

Analícese oralmente la tabla al final de la página 361, para que los alumnos entiendan cómo interpretarla.

Dése particular atención a la interpretación de las dos tablas de la página 362, insistiendo especialmente en los casos en que n es 0, 8 y 9. En el análisis de estas tablas, el maestro debe asegurarse de que se incluyen las siguientes cuestiones:

a. Para la tabla de la izquierda, ¿qué nos dice cada par de números cardinales acerca de la descomposición del conjunto de los lápices de Tomás?

b. Hágase lo mismo con la tabla de la derecha, que se refiere al conjunto de lápices de Beatríz.

E195

DESCOMPOSICION DE CONJUNTOS

Trabajo en grupo

Podemos descomponer un conjunto de cosas en subconjuntos. Cuando hacemos esto, podemos decir que descomponemos el conjunto.

Podemos tratar de descomponer un conjunto de manera que cada subconjunto tenga el mismo número de miembros.

Examina con atención los problemas y la tabla que sigue. Nos pueden ayudar a ver dos maneras diferentes de tratar de descomponer un conjunto, de modo que cada subconjunto tenga el mismo número de miembros.

Tomás tenía 23 lápices. Deseaba ponerlos en 3 cajas, con el mismo número de lápices en cada caja. Quería que cada caja tuviera tantos lápices como fuera posible. ¿Cuántos lápices debería poner en cada caja? ¿Cuántos lápices sobrantes tendría?

Beatriz también tenía 23 lápices. Quería ponerlos en cajas pequeñas, con 3 lápices en cada caja. Quería tener tantas de esas cajas como fuera posible. ¿Cuántas cajas de 3 lápices podía tener? ¿Cuántos lápices sobrantes tendría?

	Tomás	Beatriz
Número de lápices en el conjunto que se iba a descomponer	23	23
Número de subconjuntos, con el mismo número de lápices en cada subconjunto	3	n
Número de lápices en cada subconjunto	n	3
Número de lápices sobrantes	r	r

Podemos utilizar el enunciado matemático siguiente para ayudarnos a pensar acerca de la descomposición del conjunto de lápices de Tomás:

$$23 = (3 \times n) + r$$

Copia y completa la siguiente tabla para mostrar pares de números cardinales que harán cierto el enunciado matemático:

n	r
0	23
1	20
2	17
3	14
4	11
5	8
6	5
7	2
8	—
9	—

Podemos utilizar el enunciado matemático siguiente para ayudarnos a pensar acerca de la descomposición del conjunto de lápices de Beatriz:

$$23 = (n \times 3) + r$$

Copia y completa la siguiente tabla para mostrar pares de números cardinales que harán cierto el enunciado matemático:

n	r
0	[illegible]
1	20
2	17
3	14
4	11
5	8
6	5
7	2
8	—
9	—

Tu maestro hablará contigo acerca de algunas de las cosas que hemos aprendido de esas tablas. Después de esto, escribe de nuevo cada enunciado matemático, de modo que sea cierto, utilizando para n el mayor número cardinal posible.

$23 = (3 \times 7) + 2$ $23 = (7 \times 3) + 2$

RESUMEN DE LO QUE PENSAMOS

Objetivo: Introducir varios algoritmos (modos de indicar los pasos que efectuamos mentalmente) que pueden utilizarse como ayuda para obtener los sustitutos de n y r en enunciados matemáticos como

$$32 = (9 \times n) + r,$$

$$\text{o } 32 = (n \times 9) + r$$

Hacer cierto cada enunciado, utilizando el mayor número cardinal posible que sustituya a n.

Vocabulario: Residuo

Sugerencias para la enseñanza:

Resumen: Los alumnos han utilizado dibujos y fichas para descomponer conjuntos en subconjuntos equivalentes. Han visto que mediante enunciados matemáticos como los anteriores pueden describir estas descomposiciones. En cualquier caso, hay un número cardinal máximo que puede utilizarse para sustituir a n, si el enunciado es cierto.

Ahora, los estudiantes necesitan métodos más eficaces para tratar situaciones como éstas. Saber las combinaciones básicas de la multiplicación, sirve de ayuda para decidir cuál es el número cardinal máximo que puede utilizarse para sustituir a n. Entonces, el residuo, r, se puede determinar, mediante la sustracción.

Aunque algunos estudiantes pueden hacer tales determinaciones "mentalmente", es ventajoso para todos aprender una forma escrita de anotar los pasos que efectúan mentalmente. Esto es particularmente cierto, a medida que los números son más grandes y los ejemplos más complicados.

En las páginas 366 y 367, se explican dos algoritmos (modos de anotar). Queremos que los estudiantes se familiaricen con cada uno de ellos y, entonces, elijan uno como su forma preferida. Algunos alumnos elegirán una forma y otros pueden elegir otra. La elección debe hacerla cada estudiante individualmente, de acuerdo con su propia preferencia. Sin embargo, no debe hacerse inmediatamente.

Es conveniente que se tenga aunque sea una práctica limitada con cada forma, como la que se proporciona en las dos páginas mencionadas.

Exploración

Escríbase el siguiente enunciado matemático en la pizarra: $42 = (5 \times n) + r$

Plantéese la cuestión de cómo obtener los números que pueden sustituir a n y r, de manera que (1) el enunciado sea cierto y (2) n sea el mayor número cardinal posible.

Explíquese esto, siguiendo el método utilizado en la página E197 del Texto del estudiante. Trabájese primero con una forma del algoritmo (Método I) y después con la otra (Método II). Introdúzcase el uso de la palabra residuo en la forma que se aplica al número 2 en el ejemplo anterior: $42 = (5 \times 8) + 2$. Pídase a los alumnos que verifiquen la verdad de este enunciado, utilizando dibujos o fichas.

Trabajo en grupo

Guíese a los estudiantes en el estudio de las páginas 366 y 367. Explíquese cada algoritmo en la pizarra, junto con lo que se indica en el Texto del estudiante. El maestro debe asegurarse de que aplica el término residuo al número 3 en cada una de las dos descomposiciones que se explican en la página 367.

Conjuntos de problemas 22 y 23

Utilícense estos conjuntos de problemas, tan pronto como sea conveniente, después que se haya estudiado la sección Trabajo en grupo. En cada Conjunto de problemas, el maestro deberá asegurarse de que los estudiantes comprenden la naturaleza de la información dada y que sea necesaria para completar la tabla. Esto puede aclararse por medio del ejemplo inicial.

Se espera que los estudiantes utilicen uno de los algoritmos explicados anteriormente como ayuda para completar la tabla. Pueden utilizar una forma para algunos ejemplos y la otra para otros. Debe recomendárseles que empiecen a utilizar mayormente la forma de su preferencia.

Si algunos estudiantes pueden "hacer los cálculos mentalmente, sin utilizar algoritmos, puede permitírseles. Sin embargo, el maestro debe aseguarse de que estos estudiantes comprenden y pueden utilizar alguna de las formas de notación de lo que piensan. Es muy necesario que adquieran esta habilidad para su trabajo ulterior en este curso.

En cada Conjunto de problemas, el maestro deberá prestar particular atención a la interpretación del problema 10, una vez lo hayan completado. En el problema 10 del Conjunto de problemas 22, no puede construirse subconjunto alguno de 4 miembros de un conjunto de 3. En el problema 10 del Conjunto de problemas 23, 3 objetos no pueden descomponerse en 5 subconjuntos.

ANOTACION DE LO QUE PENSAMOS

Trabajo en grupo.

Hemos estado usando enunciados matemáticos como éstos cuando descomponemos conjuntos de cosas de ciertas maneras:

$$47 = (n \times 6) + r$$

$$47 = (6 \times n) + r$$

Tratamos de hacer cada enunciado cierto, usando para n el mayor número cardinal que podamos. Conocer nuestras combinaciones básicas de la de multiplicación nos ayudará a hacer enunciados ciertos en los cuales utilizamos para n el mayor número que podamos.

Examina el enunciado matemático de la derecha: $47 = (n \times 6) + r$.

Sabemos que $7 \times 6 = 42$ y que $8 \times 6 = 48$. Así, 7 es el mayor número cardinal n que podemos considerar: $47 = (7 \times 6) + r$

Ahora, tengamos en cuenta que $47 = 42 + r$, con lo cual sabemos que $r = 47 - 42$, o sea, $r = 5$.

Ahora, podemos escribir: $47 = (7 \times 6) + 5$.

Podemos llamar a 5 el <u>resto</u> o <u>residuo</u>. He aquí dos maneras de anotar lo que pensamos:

Método A

Escribe primero:	Luego, escribe:	Por último, escribe:
$6 \overline{)47}$	$\begin{array}{r} 7 \\ 6 \overline{)47} \\ \underline{42} \end{array}$	$\begin{array}{r} 7 \\ 6 \overline{)47} \\ \underline{42} \\ 5 \end{array}$

Método B

Escribe primero:	Luego, escribe	Por último, escribe:
$6\overline{)47}$	$\begin{array}{r@{\;}r|l} 6 & \overline{)47} & \\ & 42 & 7 \end{array}$	$\begin{array}{r@{\;}r|l} 6 & \overline{)47} & \\ & \underline{42} & 7 \\ & 5 & \end{array}$

Explica cada una de estas maneras de anotar lo que pensamos.
(La explicación debe poner de manifiesto el tipo de razonamiento ilustrado en el medio de la página.)

Ahora, veamos cómo podemos emplear cada una de estas maneras para anotar lo que pensamos cuando descomponemos los conjuntos.

Tenemos 27 naranjas. Deseamos llenar tantos sacos de 4 naranjas como sea posible.

$27 = (n \times 4) + r$

Usemos el Método A para anotar lo que pensamos.

$$\begin{array}{r@{\;}rl} & 6 & (n) \\ 4 & \overline{)27} & \\ & \underline{24} & \\ & 3 & (r) \end{array}$$

Así, $27 = (6 \times 4) + 3$.

Ahora, sabemos que con las (27) naranjas podemos llenar (6) sacos de (4) naranjas cada uno y tendremos (3) naranjas sobrantes.

¿Hubiéramos obtenido lo mismo si empleamos el Método B en vez del Método A para registrar lo que pensamos? (sí)

Tenemos 27 naranjas. Deseamos ponerlas en 4 sacos, con el mismo número de naranjas en cada saco.

$27 = (4 \times n) + r$

Usemos el Método B para registrar lo que pensamos.

$$\begin{array}{r@{\;}r|l} 4 & \overline{)27} & \\ & \underline{24} & 6 \;(n) \\ & 3 & \;\;\;(r) \end{array}$$

Así, $27 = (4 \times 6) + 3$.

Ahora, sabemos que con las (27) naranjas podemos llenar (4) sacos de (6) naranjas cada uno y tendremos (3) naranjas sobrantes.

¿Hubiéramos obtenido lo mismo si empleamos el Método A en vez del Método B para registrar lo que pensamos? (sí)

A medida que trates más problemas, seguramente hallarás que te gusta más un método que el otro. Aprende a utilizar el que prefieras.

Conjunto de problemas 22

Copia y completa la tabla siguiente:

Número en el conjunto completo	Número en cada subconjunto	Número de subconjuntos (n)	Residuo (r)	Enunciado matemático
Ejemplo: 38	5	7	3	38 = (7 x 5) + 3
1. 34	4	8	2	34 = (8 x 4) + 2
2. 42	7	6	0	42 = (6 x 7) + 0
3. 17	3	5	2	17 = (5 x 3) + 2
4. 43	9	4	7	43 = (4 x 9) + 7
5. 58	6	9	4	58 = (9 x 6) + 4
6. 14	2	7	0	14 = (7 x 2) + 0
7. 51	7	7	2	51 = (7 x 7) + 2
8. 29	8	3	5	29 = (3 x 8) + 5
9. 32	5	6	2	32 = (6 x 5) + 2
10. 3	4	0	3	3 = (0 x 4) + 3

Conjunto de problemas 23

Copia y completa la siguiente tabla:

Número en el conjunto completo.	Número de subconjuntos	Número en cada subconjunto (n)	Residuo (r)	Enunciado matemático
Ejemplo: 48	9	5	3	48 = (9 × 5) + 3
1. 53	7	7	4	53 = (7×7) + 4
2. 39	8	4	7	39 = (8×4) + 7
3. 45	5	9	0	45 = (9×5) + 0
4. 27	4	6	3	27 = (4×6) + 3
5. 56	8	7	0	56 = (8×7) + 0
6. 43	5	8	3	43 = (5×8) + 3
7. 28	6	4	4	28 = (6×4) + 4
8. 36	7	5	1	36 = (7×5) + 1
9. 51	8	6	3	51 = (8×6) + 3
10. 3	5	0	3	3 = (5×0) + 3

EJERCICIOS SUPLEMENTARIOS

Con la excepción del Conjunto A, los ejercicios suplementarios podrán ser resueltos por los estudiantes sobresalientes. No se propusieron para que todos los estudiantes los resuelvan, ni siquiera para que los trabajen todos.

A continuación, se presentan varias sugerencias relacionadas con el uso de dichos conjuntos de ejercicios:

1. Posponga el conjunto de ejercicios completo para más adelante en el curso. Quizás se quiera volver al mismo como repaso.
2. Pídase a los alumnos sobresalientes que trabajen en grupo estos ejercicios.
3. Después que el maestro haya estudiado los ejercicios, quizás quiera utilizar algunos en sus explicaciones en clase, a medida que se estudian partes individuales de la unidad.
4. Dentro de un conjunto dado, un problema puede que dependa de problemas anteriores, pero cada conjunto es prácticamente independiente de los demás.

359

Conjunto de problemas suplementarios A

1. Completa los siguientes enunciados matemáticos:

   a. $54 \div (9) = 6$

   b. $49 = 7 \times (7)$

   c. $8 + (9) = 17$

   d. $28 = 7 \times (4)$

   e. $(8) = 64 \div 8$

   f. $9 \times (8) = 72$

   g. $7 \times 8 = (56)$

   h. $12 \times 5 = (60)$

2. Copia y completa la tabla que sigue:

Enunciado matemático	Número desconocido
a. $5 \times t = 30$	a. $t = (6)$
b. $6 + n = 15$	b. $n = (9)$
c. $12 \div p = 4$	c. $p = (3)$
d. $q \div 7 = 6$	d. $(q = 42)$
e. $9 \times 9 = m$	e. $(m = 81)$
f. $w \times 6 = 36$	f. $(w = 6)$
g. $7 + 8 = y$	g. $(y = 15)$
h. $54 \div 6 = v$	h. $(v = 9)$

Conjunto de problemas suplementarios B

1. Si m tiene como factor 3 y n tiene como factor 2, ¿qué factores tiene con seguridad m × n? (1, 2, 3, 6, m, n, m × n)

2. a. ¿Cómo puedes decir que 7,485 tiene como factor 5? (El último dígito es 5.)

   b. ¿Puedes remplazar el dígito 5 por otro dígito y todavía tener un número con 5 como factor? (Sí, 0)

   c. ¿Tiene 7,485 como factor 2? (No, el último dígito es impar.)

3. Eres un multiplicador "estrella". Puedes multiplicar dos números cualesquiera. Se te pide que halles el número de asientos en un auditorio muy grande. Los asientos forman una disposición en cuadro. ¿Cómo lo harías? (Se halla el número de asientos en una fila y el número de filas; entonces, se multiplican esos dos números.)

4. Una banda siempre forma una disposición en cuadro cuando marcha. Al director le gusta usar varias disposiciones diferentes. La banda tiene 59 miembros. El director está tratando con mucho empeño de encontrar un miembro más. ¿Por qué? (Con 59 miembros, la banda cuando marcha puede formar solamente una columna o una fila. Con 60 miembros, se pueden formar varias disposiciones diferentes.)

5. ¿Cierto o falso? Cada número con 6 como factor tiene también como factor 3. (Cierto) Explica tu respuesta. (Del enunciado 30 = 5 × 6, podemos obtener 30 = 5 × (2 × 3) = 10 × 3.)

6. Si, ni m ni n tienen como factor 4, entonces, ¿qué sabes acerca de los factores de m × n? (Nada podemos saber. 6 × 6 tiene como factor 4, pero 6 no lo tiene.)

7. ¿Cómo usarías la combinación básica 6 × 9 = 54 para hallar el factor desconocido en 3 × n = 54?
   (6 × 9 = (3 × 2) × 9 = 3 × (2 × 9) = 3 × 18)

8. Se te da la combinación básica de la multiplicación $7 \times 15 = 105$.

   a. Halla 7×16, partiendo de 7×15.

   $$\begin{pmatrix} 7 \times 16 = 7 \times (15 + 1) \\ = (7 \times 15) + (7 \times 1) \\ = 105 + 7 \\ = 112 \end{pmatrix}$$

   b. ¿Puedes hallar 7×18, sin hallar primero 7×17?

   Sí. $7 \times 18 = 7 \times (16 + 2)$
   $= (7 \times 16) + (7 \times 2)$
   $= 112 + 14$
   $= 126$

   c. ¿Hay alguna manera correcta de llenar el blanco en

   $$7 \times \_\_\_\_ = 101?$$

   ¿Por qué? (No, porque $101 + 4 = 105$. La diferencia entre 105 y 101 no es 7. [$7 \times 15 = 105$])

9. Multiplica un número por 6. Divide el producto por 3. El resultado es siempre un número par. ¿Por qué es esto cierto? (La operación equivale a multiplicar por 2.)

Conjunto de problemas suplementarios C

1. Completa los siguientes enunciados matemáticos:

   a. $(6 \times 6) \div 9 = \underline{(4)}$

   b. $(6 \times 8) \div \underline{(8)} = 6$

   c. $(4 \times \underline{(9)}) \div 6 = 6$

   d. $(120 \div 12) \div 5 = \underline{(2)}$

   e. $(63 \div 7) \times 6 = \underline{(54)}$

   f. $(56 \div 8) \times \underline{(6)} = 42$

2. Observa que $(24 \div 3) \div 2 = 8 \div 2 = 4$.
   También, $24 \div 6 = 24 \div (3 \times 2) = 4$.

   a. ¿Es $36 \div 12 = (36 \div 4) \div 3$? (Sí)

   b. ¿Es $40 \div 8 = (40 \div 4) \div 2$? (Sí)

   ¿Puedes ver una regla general? (Dividir por 4 y después, dividir el resultado por 3 equivale a dividir por 12, etc.)
   ¿Puedes explicar por qué es válida? (Quizás, se puede explicar mediante el siguiente enunciado: $[(36 \div 4) \div 3] \times 3 \times 4 = (36 \div 4) \times 4 = 36.$)

3. Usa el artificio que encontramos en el problema 2 para hallar los resultados.

   Ejemplo: $72 \div 24$

   $$\begin{aligned} 72 \div 24 &= 72 \div (8 \times 3) \\ &= (72 \div 8) \div 3 \\ &= 9 \div 3 \\ &= 3. \end{aligned}$$

   a. $80 \div 16 = 80 \div (8 \times 2) = (80 \div 8) \div 2 = 10 \div 2 = 5$

   b. $64 \div 16 = 64 \div (8 \times 2) = (64 \div 8) \div 2 = 8 \div 2 = 4$

   c. $120 \div 20 = 120 \div (10 \times 2) = (120 \div 10) \div 2 = 12 \div 2 = 6$

   d. $144 \div 24 = 144 \div (12 \times 2) = (144 \div 12) \div 2 = 12 \div 2 = 6$

Observa que $(36 \div 6) \times 2 = 6 \times 2 = 12$.

También, $36 \div (6 \div 2) = 36 \div 3 = 12$.

He aquí otro: $(18 \div 2) \times 6 = 9 \times 6 = 54$.

También, $18 \times (6 \div 2) = 18 \times 3 = 54$.

4. En cada ejercicio, da una forma más simple para obtener el mismo resultado.

   a. Multiplica por 6. Divide, luego, el resultado por 3. (multiplica por 2.)

   b. Divide por 10. Luego, multiplica por 5. (Divide por 2.)

   c. Divide por 4. Luego, divide por 3. (Divide por 12.)

   d. Multiplica por 2. Luego, multiplica por 3. (multiplica por 6.)

   e. Multiplica por 3. Luego, divide por 6. (Divide por 2.)

5. En cada ejercicio, escribe un par de numerales que llenen el blanco correctamente. (El mismo número puede usarse dos veces, pero no uses el número 1.)

   a. $(5 \times \underline{18}) \div \underline{2} = 45$ (también, 27, 3; 36, 4; etc.)

   b. $(6 \div \underline{3}) \times \underline{27} = 54$ (también, 2, 18; 6, 54)

   c. $(12 \div \underline{3}) \div \underline{4} = 1$ (también 4, 3; 2, 6 ó 6, 2)

   d. $(3 \times \underline{2}) \times \underline{6} = 36$ (números cuyo producto sea 12)

6. Utiliza lo que hiciste en el ejercicio 4 para hallar los siguientes cocientes:

   Ejemplo: $288 \div 24$

   $$288 \div 24 = (144 + 144) \div 24 = (144 \times 2) \div 24$$
   $$= 144 \div 12$$
   $$= 12$$

   a. $144 \div 18 = (72 \times 2) \div 18 = 72 \div 9 = 8$

   b. $144 \div 16 = (72 \times 2) \div 16 = 72 \div 8 = 9$

   c. $108 \div 18 = (54 \times 2) \div 18 = 54 \div 9 = 6$

7. Escribe los numerales que llenan los blancos correctamente. En uno de ellos, llena todos los blancos con el <u>MISMO</u> numeral.

a. $(\underline{\ 32\ } \div 8) \times 16 = 64$

b. $(\underline{\ 40\ } \div 8) \times 12 \div 6 = 10$ (Las operaciones indicadas equivalen a dividir por 8 y, luego, multiplicar por 2; es decir, a dividir por 4.)

c. $(5 \times \underline{\ 3\ }) \times \underline{\ 3\ } = 45$ (Se utiliza la asociatividad)

d. $(4 \times \underline{\qquad}) \div \underline{\qquad} = 8$ (No puede completarse correctamente el enunciado con ningún número. Multiplicar y después, dividir 4 por el mismo número dará 4.)

e. $(4 \times \underline{\ 2\ }) + (6 \times \underline{\ 2\ }) = 20$

Sugerencia: Utiliza la propiedad distributiva.

f. $(\underline{\ 8\ } \times 4) + (6 \times \underline{\ 8\ }) = 80$

g. $(3 \times \underline{\ 2\ }) + (\underline{\ 2\ } \times 7) = 20$

h. $(\underline{\ 5\ } \times 4) + (\underline{\ 5\ } \times 5) = 45$

i. $(\underline{\ 7\ } \times 5) + (2 \times \underline{\ 7\ }) + (3 \times \underline{\ 7\ }) = 70$

j. $6 \times (\underline{\ 4\ } + \underline{\ 4\ }) = 48$

k. $(\underline{\ 6\ } \times \underline{\ 6\ }) \div 9 = 4$

Conjunto de problemas suplementarios D

1. La tabla de multiplicar a continuación tiene ciertas filas y columnas fuera de lugar. Pon los números correctos en el margen de la izquierda y en el superior.

	1	0	3	2
~~2~~	2	0	6	4
0	0	0	0	0
1	1	0	3	2
3	3	0	9	6

2. $n + 7$ es impar y es menor que 10. El conjunto de todos los factores de n tiene 3 elementos. ¿Qué número es n?
(7, 14, 21, 35, 42, 49, . . . , son múltiplos de 7. De éstos sólo 49 tiene 3 factores (1, 7, 49). De modo que $n = 49$.)

3. Estoy pensando en un número natural. Lo llamaré n.

   a. $3 \times n$ es un número par. (n tiene que ser par.)

   b. $n \times 8 < 50$ (n es 0, 2, 4 ó 6.)

   c. n tiene como factor 3. ¿Qué número es n? (De los números anteriores, solamente 6 tiene como factor 3. $n = 6$.)

4. Halla un modelo en la lista de productos.
1×2, 2×3, 3×4, ..., 9×10. (Sus diferencias sucesivas son 4, 6, 8, 10, . . .)

5. Halla un modelo en la lista de productos.
1×3, 2×4, 3×5, ..., 8×10. (Sus diferencias sucesivas son 5, 7, 9, 11, . . .)

EJERCICIOS DE PRACTICA

I. Halla n en cada uno de los siguientes enunciados:

a) $28 + 7 = n$ $(n = 35)$

b) $183 - 70 = n$ $(n = 113)$

c) $56 + 21 = n$ $(n = 77)$

d) $177 - n = 64$ $(n = 113)$

e) $n + 28 = 60$ $(n = 32)$

f) $173 + n = 184$ $(n = 11)$

g) $68 + n = 159$ $(n = 91)$

h) $137 - 34 = n$ $(n = 103)$

i) $n - 55 = 102$ $(n = 157)$

j) $44 + 72 = n$ $(n = 116)$

k) $38 + n = 56$ $(n = 18)$

l) $23 + 32 = n$ $(n = 55)$

m) $49 - n = 25$ $(n = 24)$

n) $42 + 65 = n$ $(n = 107)$

o) $n - 81 = 144$ $(n = 225)$

p) $88 + n = 159$ $(n = 71)$

q) $24 + 56 = n$ $(n = 80)$

r) $50 + 90 = n$ $(n = 140)$

s) $n - 28 = 39$ $(n = 67)$

t) $88 - 47 = n$ $(n = 41)$

II. Utiliza la propiedad asociativa para hallar n en los siguientes enunciados

Ejemplo: $9 + 8 + 7 = n$ ó $9 + 8 + 7 = n$

$$(9 + 8) + 7 = n \qquad 9 + (8 + 7) = n$$

$$17 + 7 = n \qquad 9 + 15 = n$$

$$24 = n \qquad 24 = n$$

a) $8 + 7 + 6 = n$ $(n = 21)$

b) $26 + 9 + 14 = n$ $(n = 49)$

c) $13 + 7 + 15 = n$ $(n = 35)$

d) $24 + 16 + 11 = n$ $(n = 51)$

e) $63 + 24 + 82 = n$ $(n = 169)$

f) $19 + 16 + 14 = n$ $(n = 49)$

g) $25 + 15 + 9 = n$ $(n = 49)$

h) $46 + 17 + 3 = n$ $(n = 66)$

i) $81 + 16 + 11 = n$ $(n = 108)$

j) $23 + 17 + 43 = n$ $(n = 83)$

k) $6 \times 3 \times 4 = n$ $(n = 72)$

l) $5 \times 4 \times 2 = n$ $(n = 40)$

m) $7 \times 2 \times 4 = n$ $(n = 56)$

n) $8 \times 5 \times 2 = n$ $(n = 80)$

o) $7 \times 3 \times 3 = n$ $(n = 63)$

p) $4 \times 6 \times 2 = n$ $(n = 48)$

q) $9 \times 3 \times 2 = n$ $(n = 54)$

r) $7 \times 4 \times 2 = n$ $(n = 56)$

s) $3 \times 5 \times 4 = n$ $(n = 60)$

t) $6 \times 4 \times 8 = n$ $(n = 192)$

III. Utiliza la propiedad distributiva para hallar s en los siguientes enunciados:

Ejemplo:

$$5 \times 35 = s$$
$$5 \times (30 + 5) = s$$
$$(5 \times 30) + (5 \times 5) = s$$
$$150 + 25 = s$$
$$s = 175$$

$$36 \div 6 = s$$
$$(30 + 6) \div 6 = s$$
$$(30 \div 6) + (6 \div 6) = s$$
$$5 + 1 = s$$
$$s = 6$$

a) $7 \times 18 = s$ $(s = 126)$

b) $9 \times 12 = s$ $(s = 108)$

c) $8 \times 15 = s$ $(s = 120)$

d) $25 \times 6 = s$ $(s = 150)$

e) $43 \times 6 = s$ $(s = 258)$

f) $16 \times 9 = s$ $(s = 144)$

g) $12 \times 12 = s$ $(s = 144)$

h) $37 \times 8 = s$ $(s = 296)$

i) $7 \times 83 = s$ $(s = 581)$

j) $93 \times 4 = s$ $(s = 372)$

k) $28 \div 7 = s$ $(s = 4)$

l) $42 \div 6 = s$ $(s = 7)$

m) $66 \div 6 = s$ $(s = 11)$

n) $54 \div 6 = s$ $(s = 9)$

o) $72 \div 8 = s$ $(s = 9)$

p) $36 \div 4 = s$ $(s = 9)$

q) $32 \div 8 = s$ $(s = 4)$

r) $24 \div 4 = s$ $(s = 6)$

s) $36 \div 6 = s$ $(s = 6)$

t) $18 \div 3 = s$ $(s = 6)$

IV. Halla el número desconocido en cada uno de los siguientes enunciados:

a) $876 - 420 = t$ $(t = 456)$

b) $678 + n = 989$ $(n = 311)$

c) $445 + 458 = n$ $(n = 903)$

d) $963 - 431 = a$ $(a = 532)$

e) $86 + 94 + 77 = b$ $(b = 257)$

f) $364 \div 4 = c$ $(c = 91)$

g) $27 \times 8 = b$ $(b = 216)$

h) $30 \div 5 = a$ $(a = 6)$

i) $325 + 62 + 94 = t$ $(t = 481)$

j) $35 \div n = 7$ $(n = 5)$

k) $37 + 15 + 29 = r$ $(r = 81)$

l) $36 \div 9 = s$ $(s = 4)$

m) $309 + k = 466$ $(k = 157)$

n) $9 \times r = 72$ $(r = 8)$

o) $28 \div t = 7$ $(t = 4)$

p) $a \div 6 = 7$ $(a = 42)$

q) $118 \times 5 = m$ $(m = 590)$

r) $54 \div p = 9$ $(p = 6)$

s) $28 + 14 + 73 = r$ $(r = 115)$

t) $s \div 8 = 8$ $(s = 64)$

REPASO

Conjunto I

Parte A

1. Escribe los símbolos para Reunión o Intersección que se necesitan para llenar los blancos entre los nombres de los conjuntos. Ejemplo: a)

   Conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$

   Conjunto $B = \{e, f, g, h, i, j\}$

   Conjunto $C = \{a, b, c, x, y, z\}$

   a) $A \underline{\ \cap\ } B = \{e, f\}$

   b) $B \underline{\ \cap\ } C = \{\ \ \}$

   c) $A \underline{\ \cup\ } C = \{a, b, c, d, e, f, x, y, z\}$

   d) $A \underline{\ \cup\ } B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$

   e) $A \underline{\ \cap\ } C = \{a, b, c\}$

   f) $B \underline{\ \cup\ } C = \{a, b, c, e, f, g, h, i, j, x, y, z\}$

2. Escribe la palabra "par" o "impar", que haga cierto cada uno de los siguientes enunciados, Ejemplo: a) par

   a) La suma de dos números pares cualesquiera es un número <u>par</u>.

   b) La suma de dos números impares cualesquiera es un número <u>par</u>.

   c) El producto de un número par cualquiera y un número impar cualquiera es un número <u>par</u>.

   d) La suma de un número impar cualquiera y un número par cualquiera es un número <u>impar</u>.

   e) El producto de dos números pares cualesquiera es un número <u>par</u>.

   f) El producto de dos números impares cualesquiera es un número <u>impar</u>.

3. Escribe la palabra "par" o "impar", que haga cierto cada uno de los siguientes enunciados:

a) $37 + 21 = n$ n es un número par.

b) $13 \times 4 = n$ n es un número par.

c) $14 + 5 = n$ n es un número impar.

d) $472 \times 2 = n$ n es un número par.

e) $10 + 3 = n$ n es un número impar.

f) $22 + 14 = n$ n es un número par.

g) $18 \times 32 = n$ n es un número par.

4. Aplica la idea de "neutralizar" a las siguientes operaciones; se han hecho algunos ejercicios:

	Hacer	Neutralizar
a)	$16 - 6$	$(16 - 6) + 6$
b)	$15 + 9$	$(15 + 9) - 9$
c)	4×3	$(4 \times 3) \div 3$
d)	$12 - n$	$(12 - n) + n$
e)	8×2	$(8 \times 2) \div 2$
f)	$32 \div 4$	$(32 \div 4) \times 4$
g)	14×2	$(14 \times 2) \div 2$
h)	$25 + 5$	$(25 + 5) - 5$
i)	$17 - 7$	$(17 - 7) + 7$
j)	$27 \div 9$	$(27 \div 9) \times 9$

5. Llena los blancos:

a) 6 millares + 26 centenas + 2 decenas + ninguna unidad =
8 millares + 6 centenas + 2 decenas + ninguna unidad
El número es 8,620.

b) 2 millares + 24 centenas + 6 decenas + 9 unidades =
4 millares + 4 centenas + 6 decenas + 9 unidades
El número es 4,469.

c) 4 centenas + 18 decenas + 11 unidades =
5 centenas + 9 decenas + 1 unidad.
El número es 591.

6. Lee con atención:

a) María dijo: "Cuando yo trabajo mis problemas aritméticos, utilizo solamente los numerales 0, 1, 2, 3, 4 y 5". ¿Qué base utiliza María? (Base seis)

b) Conjunto B = {0, 1, 2, 3}
Cuando Guillermo hace su trabajo de aritmética en la casa, utiliza solamente los numerales del Conjunto B. ¿Qué base numérica usa? (Base cuatro)

c) Tengo los valores posicionales de tres, nueve, veintisiete, ochenta y uno, ..., etc. ¿Qué base numérica se está usando? (Base tres)

Parte B.

Escribe un enunciado matemático (o dos enunciados, si es necesario) para cada problema y resuélve éste. Escribe una oración como respuesta.

1. En una prueba de deletreo de 50 palabras, María deletreó 38 palabras correctamente. ¿Cuántas palabras deletreó María incorrectamente? ($38 + n = 50$. $n = 12$. María deletreó incorrectamente 12 palabras.)

2. Hay seis bolas en una caja. Nuestra escuela compra cuatro cajas de bolas. ¿Cuántas bolas compran? ($6 \times 4 = n$. $n = 24$. Compran 24 bolas.)

3. Rafael distribuye periódicos. Entrega 82 periódicos cada día. ¿Cuántos periódicos entrega desde el lunes hasta el viernes? ($5 \times 82 = n$. $n = 410$. Entrega 410 periódicos.)

4. Ricardo quería una gorra que costaba $1.25, un bate que costaba $2.19 y un guante que costaba $4.63. ¿Cuánto costarían las tres cosas? ($\$1.25 + \$2.19 + \$4.63 = n$. $n = \$8.07$. Las tres cosas costarían $8.07.)

5. El señor Vélez recorre en su automóvil 12 millas para ir al trabajo cada mañana. Recorre 12 millas hacia su casa cada tarde. ¿Cuántas millas recorre cada día? ¿Cuántas millas recorre en una semana de 5 días laborables? ($12 + 12 = d$. $d = 24$. $5 \times 24 = n$. $n = 120$. Recorre 120 millas cada semana.)

6. Juana mide cuatro pies con tres pulgadas de estatura. ¿Cuántas pulgadas de estatura tiene? ($4 \times 12 = n$. $n = 48$, $48 + 3 = n$, $n = 51$ ó $(4 \times 12) + 3 = n$, $n = 51$. Juana mide 51 pulgadas de estatura.)

REPASO

Conjunto II

PARTE A

1. Utilizando los símbolos $>$, $<$, o $=$, haz ciertos los enunciados siguientes:

a) $7 \underline{>} 6$

b) $0 \underline{<} 1$

c) $5 \times 5 \underline{<} 125$

d) $3 + 199 \underline{<} 200 + 10$

e) $264 \underline{<} 268 - 2$

f) $120 \underline{<} 189 - 9$

g) $6 + 8 \underline{<} 15$

h) $2 + 6 \underline{=} 2 + 6$

i) $8 - 1 \underline{<} 3 \times 3$

j) $5 - 2 + 3 \underline{=} 6 + 2 - 2$

2. Escribe los siguientes numerales en base diez:

a) seis mil cuatrocientos = 6,400

b) cuatro mil uno = 4,001

c) setecientos siete = 707

d) mil diez = 1,010

e) novecientos trece = 913

f) ciento ocho = 108

3. Escribe cada uno de los conjuntos siguientes en notación conjuntista:

a) El conjunto de números pares mayores que 40, pero menores que 55. {42, 44, 46, 48, 50, 52, 54}

b) El conjunto de números impares menores que 28, pero mayores que 16. {27, 25, 23, 21, 19, 17}

c) El conjunto de números naturales entre 45 y 51. {46, 47, 48, 49, 50}

d) El conjunto de números cardinales menores que 12. {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11}

e) El conjunto de los días de la semana cuyos nombres empiezan con la letra "m". {martes, miércoles}

f) El conjunto de niños en este salón que tenga dos años de edad. { }

4. En la tabla que sigue, di qué propiedad pone de manifiesto el enunciado numérico de la izquierda. Escribe la primera letra de cada palabra que nombre la propiedad, en vez de escribir las palabras. Por ejemplo, escribe p c m por propiedad conmutativa de la multiplicación.

Enunciado numérico	Propiedad ilustrada
a) $4 \times 3 = 3 \times 4$	p c m
b) $6 + 18 = 18 + 6$	p c a
c) $5 \times (2 \times 1) = (5 \times 2) \times 1$	p a m
d) $8 \times 3 = 3 \times 8$	p c m
e) $(9 + 1) + 6 = 9 + (1 + 6)$	p a a
f) $(2 \times 6) \times 2 = 2 \times (6 \times 2)$	p a m
g) $7 \times 13 = (7 \times 10) + (7 \times 3)$	p d m
h) $35 \div 5 = (30 \div 5) + (5 \div 5)$	p d d

5. Halla qué número representa "y" en cada uno de los siguientes enunciados. Di qué operación se necesita para hallar y. Emplea A para adición, M para multiplicación, S para sustracción y D para división. El ejercicio a) se resolvió como ejemplo.

a) $6 + 9 = y$ $y = 15$ A

b) $y = 8 \times 5$ $y = 40$ M

c) $19 - y = 14$ $y = 5$ S

d) $y + 9 = 19$ $y = 10$ S

e) $y = 8 + 4$ $y = 12$ A

f) $4 \times 6 = y$ $y = 24$ M

g) $24 \div 8 = y$ $y = 3$ D

h) $7 \times y = 21$ $y = 3$ D

6. A = {José, Jaime, Tomás}
   B = {David, Daniel}
   ¿Qué operación podrías utilizar para hallar el número de elementos en A ∪ B? (Adición)
   Nombra los miembros del Conjunto A ∪ B. (José, Jaime, Tomás, Daniel, David)
7. W = {1, 2, 3, 4}
   R = {0, 2, 5}
   ¿Podrías utilizar la adición para hallar el número de elementos en W ∪ R? (No)
   Nombra los miembros del Conjunto W ∪ R. (0, 1, 2, 3, 4, 5)
8. N ∪ P = {a, b, c, d, e, f, g}
   P = {a, b, c}
   ¿Podrías usar la sustracción para hallar el número de elementos en el Conjunto N? (No)
   Nombra los miembros del Conjunto N. (No puede hacerse.)

PARTE B

Escribe un enunciado matemático (o dos enunciados, si es necesario) para cada problema y resuelve éste. Escribe un enunciado como respuesta.

1. El sábado, 60 personas presenciaron el juego. Cuarenta y cuatro personas compraron salchichas. ¿Cuántas personas no compraron salchichas? ($n + 44 = 60$, $60 - 44 = n$. 16 personas no compraron salchichas.)
2. El Sr. Pérez hizo un viaje. El lunes recorrió 360 millas, el martes 419 millas y el miércoles 284 millas. ¿Cuántas millas recorrió en total? ($360 + 419 + 284 = n$, $n = 1{,}063$. Recorrió 1,063 millas.)
3. Carolina compró tres cajas de lápices. Pagó 99 centavos, en total. ¿Cuánto pagó por cada caja? ($3 \times n = 99$, $n = 33$. Pagó 33 centavos por cada caja de lápices.)

4. Luis tiene 15 pastillas de goma. Las reparte por igua con dos de sus amigos. ¿Cuántas pastillas de goma recibe cada muchacho? ($3 \times n = 15$ ó $15 \div 3 = n$, $n = 5$. Cada muchacho recibe 5 pastillas de goma.)

5. La madre de Jaime lo envió a la tienda a comprar una libra de pan que costaba 31 centavos, una lata de maíz que costaba 23 centavos y dos barras de dulce que costaban 5 centavos cada una. ¿Cuánto tendría que pagarle al dependiente? ($31 + 23 + 10 = n$, $n = 64$. Jaime tendría que pagarle al dependiente 64 centavos.)
Jaime le dio al dependiente un billete de un dólar. ¿Cuánto cambio deberán devolverle? ($64 + n = 100$ ó $100 - 64 = n$, $n = 36$. El dependiente deberá devolverle 36 centavos.)

E218

REPASO

Conjunto III

PARTE A

1. Representa los siguientes números como numerales en base diez:

   a) 6 centenas + 3 decenas + 8 unidades = 638

   b) 5 centenas + 13 decenas + 8 unidades = 638

   c) 46 centenas + 0 decenas + 4 unidades = 4,604

   d) 4 millares + 6 centenas + 0 decenas + 4 unidades = 4,604

   e) 4 millares + 12 centenas + 8 decenas + 3 unidades = 5,283

   f) 16 centenas + 0 decenas + 11 unidades = 1,611

2. En la tabla a continuación, di qué propiedad ilustra el enunciado numérico de la izquierda. Escribe la primera letra de cada palabra del nombre de la propiedad en vez de escribir las palabras. Por ejemplo, escribe p a m por propiedad asociativa de la multiplicación.

Enunciado numérico	Propiedad ilustrada
a) $(4 + 5) + 1 = 4 + (5 + 1)$	p a a
b) $8 \times (1 \times 2) = (8 \times 1) \times 2$	p a m
c) $15 + 10 = 10 + 15$	p c a
d) $4 \times 5 = 5 \times 4$	p c m
e) $(3 + 12) + 5 = 3 + (12 + 5)$	p a a
f) $12 + 42 = 42 + 12$	p c a
g) $(4 \times 3) \times 2 = 4 \times (3 \times 2)$	p a m
h) $28 \div 7 = (14 \div 7) + (14 \div 7)$	p d d
i) $12 \times 4 = (10 \times 4) + (2 \times 4)$	p d m

3. Efectúa la operación indicada. Determina si la respuesta es un número impar o un número par.

a)	37 + 21	58	par	e)	13 × 117	1521	impar
b)	13 × 4	52	par	f)	14 + 5	19	impar
c)	22 + 14	36	par	g)	10 + 3	13	impar
d)	18 × 32	576	par	h)	472 × 3	1416	par

4. Después de cada enunciado escribe: siempre cierto, algunas veces cierto, o nunca cierto.

a) Un número par sumado a un número impar es un número impar. siempre cierto

b) Un número cardinal multiplicado por un número cardinal es un número cardinal. siempre cierto

c) Un número cardinal dividido por un número cardinal es un número cardinal. algunas veces cierto

d) Cuando se suma cero a un número cardinal, el resultado no es un número cardinal. nunca cierto

e) Si se altera el orden de sumar dos números cardinales, se altera la suma. nunca cierto

f) Un número cardinal restado de un número cardinal es un número cardinal. algunas veces cierto

g) Un número par multiplicado por un número par es un número par. siempre cierto

h) Un número par sumado a un número par es un número impar. nunca cierto

i) Si se altera el orden de restar un número cardinal de otro número cardinal, el sumando desconocido cambia. algunas veces cierto

j) Si se altera el orden de multiplicar dos números cardinales, se altera el producto. nunca cierto

PARTE B.

Escribe un enunciado matemático (o dos enunciados, si es necesario) para cada problema y resuelve éste. Escribe un enunciado como respuesta.

1. Cuando Guillermo fue a la fiesta de la escuela, contó los niños presentes. Después que salieron 14 niños, volvió a contar y encontró que todavía quedaban 35. ¿Cuántos había contado la primera vez? (35 + 14 = n, n = 49. Guillermo contó 49 niños la primera vez.)

2. Los 851 niños de la Escuela Central vinieron a ver un programa que ofrecieron 183 niños de quinto grado de la Escuela San Carlos. ¿Cuántos niños había en el anfiteatro durante el programa? (851 + 183 = n, n = 1,034. Había 1,034 niños en el anfiteatro.)

3. Hay 423 niños en una escuela. Sesenta y cuatro niños están en el cuarto grado. ¿Cuántos niños no están en cuarto grado? (64 + b = 423; 423 - 64 = b, b = 359. 359 niños no están en cuarto grado.)

4. La señorita Solá tiene 33 alumnos en su clase. Diecisiete son niñas. ¿Cuántos niños hay en la clase? (17 + c = 33, ó 33 - 17 = c. c = 16. Hay 16 niños en la clase.)

5. Juan tiene 116 bolitas. Su hermano menor tiene 77 bolitas. ¿Cuántas bolitas tienen conjuntamente los dos niños? (116 + 77 = m, m = 193. Los niños tienen conjuntamente 193 bolitas.)
¿Cuántas bolitas más tiene Juan que su hermano?
(77 + n = 116; 116 - 77 = n, n = 39. Juan tiene 39 bolitas más.)

6. En una venta de dulces, se vendieron cincuenta cajas de dulces en un día. Marcos vendió cinco cajas. Luis vendió cuatro cajas y Tomás vendió ocho cajas. ¿Cuántas cajas de dulces vendieron los tres niños? (4 + 5 + 8 = s, s = 17. Los tres niños vendieron 17 cajas de dulces.)
¿Cuántas cajas de dulces vendieron los otros niños?
(17 + t = 50; 50 - 17 = t, t = 33. Los otros niños vendieron 33 cajas de dulces.)

SUGERENCIAS PARA ACTIVIDADES

Proyectos de grupo

Solución por etapas de un problema

El primer miembro de cada equipo trabaja una etapa de un problema dado en la pizarra y luego regresa a su puesto. El próximo niño trabaja la etapa dos, etc. Cualquier niño que encuentre un error cometido por un compañero de equipo puede corregirlo, antes de hacer su cálculo. El primer equipo que complete un problema con la respuesta correcta el el ganador.

Ejemplo en que se muestra una etapa completa:

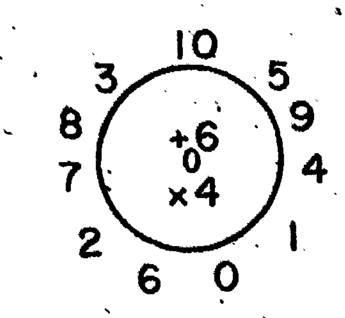
$$\begin{array}{r} 4368 \\ 9712 \\ 877 \\ +\ \underline{5645} \\ 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9712 \\ -\ \underline{4368} \\ 4 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 315 \times 7 = (300 \times 7) + \\ \\ 126 + 6 = (120 + 6) + \end{array}$$

El grado de dificultad puede ajustarse a la habilidad de la clase.

Juego "clave", sugerido en el Capítulo 4.

Curso del reloj

Dibuja una circunferencia en la pizarra. Escribe numerales alrededor, desde el 0 hasta el 10. Selecciona un miembro de la clase, indícale un punto de partida, y haz que complete la vuelta a la cara del reloj, utilizando el proceso indicado. Puede utilizarse para multiplicación o adición.



Proyectos individuales

1. Inventa nuevos símbolos para un sistema numérico. Utilizando tus nuevos símbolos, construye algunos ejemplos (una tabla, la recta numérica, etc.) para presentar y explicar a la clase.
2. Busca en la enciclopedia sistemas numéricos usados por otros países. Haz una tabla que explique uno (o más).
3. Haz tu propio cuadrado, círculo o triángulo "mágico". Pónlo en la pizarra para que la clase lo compruebe.

Rompecabezas

1. Cada uno de los cuadrados a continuación no es absolutamente mágico. Se puede cambiar un número en cada uno. Tacha el número que deba combinarse y escribe el número correcto.

a.

12	5	10
11	13	3
4	~~12~~ 9	14

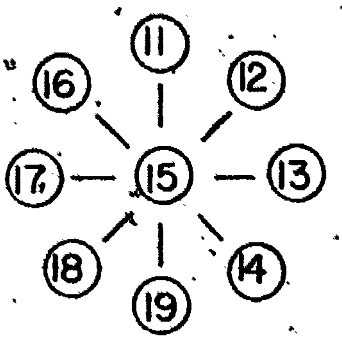
b.

10	~~31~~ 8	15
20	9	4
3	16	14

c.

8	5	15
17	10	~~0~~ 1
3	13	12

2. En cada círculo, escribe uno de los números 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19. La suma de los tres números en cada línea recta debe ser 45.



3. Halla los dígitos que faltan. No te des por vencido muy pronto. Para cada uno de estos ejemplos, escribe en cada blanco solamente uno de los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, para que el ejemplo sea correcto.

a)	b)	c)	d)
6 0 4 5	1 0 4 6 3	5 0 6	3 6 9
− 1 5 8 7	− 8 3 6 8	7	6 6 0
4 4 5 8	2 0 9 5	5 9	1 3
		4 9 7	5 6 4
		1 0 6 9	1 6 0 6

e)	f)	g)	h)
9 6	8 7 6	9 6	7 2
3	× 4	5	5
2 8 8	3 5 0 4	4 8 0	3 6 0

PROBLEMAS DIFICILES

1. Mi hermano tiene $5_?$ años de edad. En su próximo cumpleaños, cumplirá $10_?$. ¿Qué base numérica estoy usando? (Base seis)

2. El perro de Juan pesó $7_?$ libras el lunes. Cuando se pesó otra vez, dos semanas más tarde, pesó $11_?$ libras. El perro había aumentado $2_?$ libras. ¿Qué base numérica está usando Juan? (Base ocho)

3. El número de pájaros en una jaula se duplica cada minuto. La jaula se llena en media hora. ¿Cuándo estaba la jaula a medio llenar? (Estaba a medio llenar en 29 minutos.)

4. Una hormiga está subiendo un poste de treinta pies de alto. Sube tres pies cada día y baja dos pies cada noche. ¿Cuánto tiempo empleará la hormiga en llegar a lo alto del poste? (28 días)

Capítulo 5

CONJUNTOS DE PUNTOS

PROPOSITO DE LA UNIDAD

El propósito de esta unidad es introducir algunos de los conceptos fundamentales de lo que podríamos llamar adecuadamente geometría física.

La geometría que se ha incluido tradicionalmente en el programa de estudios de la escuela elemental y en el primer ciclo secundario estaba íntimamente relacionada con el proceso de medición. Los alumnos han calculado perímetros, áreas y volúmenes. En la escuela secundaria, la geometría se ha tratado como un sistema deductivo. Ciertos términos se consideran no definidos, ciertos enunciados (axiomas o postulados) acerca de esos términos se aceptan sin demostración y, entonces, se definen otros términos y se demuestran otros enunciados (teoremas) mediante deducción lógica.

No se trata la geometría de ninguna de estas maneras en esta unidad. La idea de medición juega un papel de poca importancia y, de hecho, se emplea sólamente en la explicación del concepto de circunferencia. Aunque el razonamiento lógico tiene gran importancia para entender la matemática en cualquier grado, el objetivo no es explicar los conceptos geométricos y sus relaciones como un sistema deductivo formal.

Más bien, se trata de dirigir la atención hacia lo que podríamos considerar como las propiedades geométricas de objetos familiares que no dependen de la idea de medición. Queremos empezar la explicación de ciertas ideas matemáticas como punto, espacio, recta, curva, plano, ángulo y curva (plana) cerrada simple. Estudiaremos algunas representaciones de estas ideas en las cosas que vemos a nuestro alrededor. Queremos desarrollar la habilidad de utilizar estos conceptos y sus representaciones para conocer y describir el mundo en que vivimos.

A ciertos términos lingüísticos familiares que aparecerán en la unidad, se les darán significados matemáticos que no son familiares. Uno de los más importantes es el término "punto".

BASE MATEMATICA

Si buscamos en un diccionario, el significado de un término, hallaremos que el término se define mediante otros términos. Si continuamos buscando los significados de los términos utilizados en la definición, quizás, pronto encontraríamos alguno de estos términos definido mediante el término original cuyo significado buscábamos. Conocemos esto con el nombre de definición circular. Para que un diccionario sea útil, hay que conocer el significado de alguna palabra usada en la definición circular, antes de utilizar el diccionario.

Se evita un razonamiento circular en la matemática con el uso de ciertos términos que no se definen. Dos de éstos son punto y recta. Damos significado a estos términos, suponiendo ciertas propiedades en ellos. Un enunciado que suponemos cierto se llama un axioma o postulado. Un axioma que podríamos utilizar es que por dos puntos pasa una recta y sólo una.

Las ideas de "razonamiento circular" y axiomas no se mencionan en el Texto del estudiante. Más bien, un punto se describe como una posición exacta o precisa. Un punto no puede verse ni sentirse, ni tiene tamaño. El maestro debe recordar que hay términos descriptivos que el estudiante puede entender, pero que no hemos dado, en realidad, una definición de punto. En efecto, ni aún en libros de matemáticas más avanzadas, podríamos encontrar una definición de punto.

Los puntos se representan de manera visible, mediante marcas redondas pequeñas en una hoja de papel y de manera tangible mediante una esquina o rincón de un salón donde se encuentran dos paredes y el techo o como el extremo de un objeto de punta afilada. Todas éstas son representaciones en el sentido siguiente: La marca de punto en una hoja de papel es simplemente un intento de dibujar la entidad geométrica ideal que llamamos punto. En realidad, la marca cubre no un punto sino un número infinito de puntos (con esto, queremos decir más de los que se pueden contar). Si se examina la marca con un instrumento óptico de aumento, como un microscopio, se verá claramente que ésta cubre un número infinito de lugares o posiciones. Por tanto, nos vemos obligados a concluir que no hay instrumento alguno con el cual se pueda marcar un punto, exactamente.

También, vemos que un punto constituye una posición fija. Un punto no se mueve. Si se borrara la marca hecha en una hoja de papel, aún quedaría la posición anteriormente marcada. También, si se llevara la hoja de papel a otro sitio, el punto marcado originalmente permanecería fijo. Quizás, la demolición de un edificio es una demostración más gráfica de la permanencia de un punto geométrico. Los puntos ocupados por las esquinas de cada salón permanecen inalterados. La diferencia es que ya no están representados por objetos reales llamados esquinas. Ahora, hay que describirlos mediante un conjunto de instrucciones que conducen a la posición, como 10 pies directamente al norte de algún punto marcado y, luego, 10 pies hacia arriba. Finalmente, imaginemos un lápiz mantenido en una cierta posición. Su punta representa un punto geométrico. Si movemos el lápiz, su punta representará un punto geométrico distinto.

Una vez se entiende el significado geométrico del término <u>punto</u>, estamos preparados para definir el <u>espacio geométrico</u> o, simplemente, el espacio como <u>el conjunto de todos los puntos</u>. Con esto, queremos decir el conjunto de todas las posiciones posibles en el universo. Por lo dicho acerca de los puntos, nos damos cuenta de que un objeto real, no importa cuán pequeño sea, ocupa más puntos del espacio de los que se pueden contar. Por tanto, el conjunto de todos los puntos tiene que ser un conjunto cuyos miembros no puedan contarse todos. El espacio geométrico no es ni un espacio vacío ni el espacio sideral; incluye más. Ahora, debemos pensar en posiciones exactas. Los objetos reales ocupan solamente partes del espacio.

Ahora, examinemos de manera formal y también intuitiva, la idea del camino entre dos puntos del espacio. Esto es una preparación para el importante concepto de segmento de recta. Un camino es un conjunto particular de puntos del espacio y puede considerarse como el conjunto de puntos que se recorren al ir directamente de un punto a otro. Todos esos caminos (sean rectos o no) se consideran en la geometría como <u>curvas</u>. Una cuerda tensa entre dos puntos, una "curva" dibujada en una hoja de papel, la carretera de una ciudad a otra son todas representaciones de curvas. (Así, pues, el significado matemático del término "curva" difiere del significado corriente.) En estos ejemplos, observamos que una curva contiene más puntos de los que pueden contarse.

Un segmento de recta (A•————•B , cuyo símbolo es $\overline{AB}$) es el camino especial o curva que puede representarse mediante una cuerda tensa entre dos puntos. Otra representación de un segmento de recta sería un camino dibujado con una regla y un lápiz para unir dos puntos. La curva incluye estos dos puntos que se llaman los extremos del segmento rectilíneo. Puede considerarse como la línea de mira o rayo de luz entre dos puntos y describirse como el camino más corto. Desde luego, la idea de segmento de recta es independiente de cualquiera de sus representaciones. Por ejemplo, si se elimina la cuerda tensa, el segmento de recta permanecería inalterado, pues es un conjunto de posiciones.

Una recta (←—A•———•B—→ , cuyo símbolo es $\overleftrightarrow{AB}$) puede considerarse como la prolongación en ambos sentidos de un segmento de recta. Es un conjunto de puntos que contiene segmentos rectilíneos todo lo largos que se quiera, pero nunca puede representarse dibujando segmentos rectilíneos, por largos que sean. Con un gran número de reglas dispuestas de manera que sus longitudes se sumen, podemos representar segmentos rectilíneos cada vez más largos, contenidos en una recta. Más allá de esto, tenemos que dejar a nuestra imaginación la concepción de la infinitud de la recta.

No obstante, de la representación de un segmento de recta, podemos abstraer ciertas propiedades de la recta. La más importante de éstas es que por dos puntos pasa solamente una recta. Con otras palabras, dados dos puntos, hay, exactamente, una recta que los contiene. Al representar dos puntos con marcas pequeñas, quizás, sea posible dibujar dos o más rectas distintas entre los puntos, si las marcas no se hacen desde el principio suficientemente pequeñas. Sin embargo, el darnos cuenta de que sencillamente consideramos una aproximación de las nociones ideales de punto y recta, debe servir para aclararnos esta contradicción aparente. Sólo necesitamos hacer las marcas más pequeñas, para obtener la conclusión que esperamos.

La sección siguiente trata acerca del concepto de rayo. Un rayo ($\overset{A}{\bullet}\!\!\longrightarrow\!\!\overset{B}{\bullet}\!\!\longrightarrow$, cuyo símbolo es $\overrightarrow{AB}$) se define como una parte de una recta que contiene un punto de ella llamado el extremo del rayo y todos los puntos de la recta en el mismo sentido, a partir de dicho extremo. Un haz de luz que emana de un foco luminoso es una buena representación de un conjunto de rayos para el cual el foco de luz es el extremo de cada rayo. De lo que conocemos acerca de una recta, sabemos que contiene más rayos de los que pueden contarse, puesto que un punto cualquiera de la recta puede servir como el extremo de un rayo en ella. Sin embargo, puesto que en una recta hay solamente dos sentidos, también hay, solamente, dos rayos distintos de la recta con un punto dado como extremo común.

En un plano (por tanto, en el espacio), hay un número infinito de rayos con un extremo común. Finalmente, en virtud de la unicidad de la recta que pasa por dos puntos, vemos que hay un rayo único (es decir, uno y solamente uno) que pasa por dos puntos dados con uno de estos puntos como extremo.

El plano se considera como una extensión ilimitada de ciertos conjuntos de puntos que como mejor se representan es mediante tableros de mesas, paredes, pisos o cualquier superficie llana. Tales representaciones lo son solamente de partes de planos. Un tablero de mesa que podemos imaginar creciendo indefinidamente nos proporciona una representación cada vez mejor de un plano, aunque siempre, de nuevo tenemos que seguir haciendo uso de nuestra imaginación. También, tenemos que recordar que representamos solamente ciertos conjuntos de puntos del espacio. Si se quita el tablero, el conjunto de puntos (posiciones) no se mueve.

Un plano del cual el tablero es una representación parcial, también puede considerarse como el conjunto de todas las rectas que se obtienen prolongando los segmentos rectilíneos con extremos en el tablero. De esta manera, se pone de manifiesto que un plano contiene más rectas de las que pueden contarse. Sin embargo, observamos que si dos puntos de una recta están contenidos en un plano, entonces, la recta completa está contenida en ese plano.

Ahora, descubrimos, mediante la observación de las representaciones de los elementos geométricos—puntos, rectas y planos—las siguientes relaciones:

1. Por dos puntos del espacio, pasan una infinidad (con esto queremos decir más de los que pueden contarse) de planos; por tanto, por una recta del espacio pasan una infinidad de planos.

2. No obstante, si se consideran tres puntos que no están alineados, entonces, hay solamente un plano que pasa por ellos. Algunas veces, expresamos esto así: "tres puntos que no están alineados determinan un plano único". El ejemplo de un libro muy delgado cuyo lomo se considera como un segmento y sus páginas como varios planos que contienen el segmento, es muy útil para explicar las relaciones mencionadas.

El enunciado "Tres puntos que no están alineados determinan un plano único" es un ejemplo de un axioma. (El significado del término axioma se da en la página 396 de este <u>Comentario</u>.) El enunciado "Dos puntos determinan una recta única", también es un axioma.

Ahora, se considerarán las intersecciones de rectas y planos. Recordemos que la intersección de dos conjuntos es el conjunto compuesto de los miembros que están en ambos conjuntos. Así, la intersección de dos conjuntos de puntos consiste en los puntos que están en los dos conjuntos. El examen de representaciones de rectas y planos conduce a tres relaciones muy importantes:

1. Si dos rectas distintas del espacio se intersecan, su intersección es un punto.
2. Si una recta y un plano se intersecan, su intersección es un punto o la recta completa.
3. Si dos planos se intersecan, su intersección es una recta.

El próximo concepto que estudiaremos es el de curva cerrada simple. El concepto de curva cerrada simple incluye ciertas curvas en el espacio (por ejemplo, las curvas alabeadas), lo mismo que curvas en un plano. Nos interesaremos en las curvas cerradas simples planas solamente. Este último nombre es seguramente demasiado largo, de modo que emplearemos sólo la frase curva cerrada simple para designar tales curvas planas.

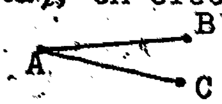
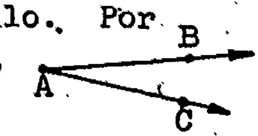
Volvemos primero al concepto de curva y restringimos el estudio a las curvas en un plano. Consideramos una representación de una curva como un conjunto de puntos que puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel. Con esta idea de una curva, vemos que los segmentos de recta, los rayos y las rectas son curvas. Luego, consideramos la curva cerrada, una curva en que el primero y último punto son un mismo punto. Es posible empezar a dibujar una curva cerrada simple en un punto cualquiera y volver al punto de partida sin levantar el lápiz. Por curva cerrada simple queremos significar un conjunto de puntos de un plano representado por el dibujo de un camino que empieza y termina en el mismo punto y no se cruza a sí mismo. Entonces, podemos hablar libremente acerca de movernos alrededor de la curva cerrada simple plana, porque volveremos al punto de partida. Al hacer esto, observamos que por un punto, se pasa solamente una vez (salvo el punto de partida). Nótese que este tipo de camino se cierra sobre sí mismo (vuelve al punto donde empezó) sin entrecruzarse. En una representación, vemos que hay una parte que podríamos llamar el interior, también está la curva misma y hay otra parte que podríamos llamar el exterior. Para pasar del interior de una curva cerrada simple al exterior de la misma sin salir del plano que contiene la curva, tenemos forzosamente que atravesar la curva.

Después de unos pocos experimentos con representaciones de este tipo de curvas, dirigimos nuestra atención a dos tipos especiales, el polígono y la circunferencia. Un polígono se define como una curva cerrada simple que es la reunión de segmentos rectilíneos. Algunos ejemplos familiares son el triángulo, un polígono, que es la reunión de tres segmentos rectilíneos, y el cuadrilátero, que es la reunión de cuatro segmentos rectilíneos.

Un examen detallado del triángulo pone de manifiesto que cada dos segmentos de recta tienen un extremo común y, como consecuencia de esto, hay tres extremos distintos que llamamos los vértices del triángulo.

Después de familiarizarnos un poco con el triángulo y el cuadrilátero, dirigimos nuestra atención a otra curva cerrada simple plana que no puede representarse con precisión mediante una regla y un lápiz, solamente. Esta curva es la circunferencia para la cual necesitamos un compás. De la representación de una circunferencia hecha con el compás, observamos que hay un punto (donde se coloca la punta metálica del compás) llamado centro, tal que la distancia del centro a cada punto de la circunferencia permanece siempre la misma. Esto parece ser cierto debido a que la distancia entre la punta metálica y la punta del lápiz en el compás no se altera, mientras se hace el dibujo. Esto conduce a la caracterización de una circunferencia como una curva cerrada simple en un plano cuyos puntos equidistan de un punto fijo del mismo plano llamado centro. Por tanto, el centro no es un punto de la circunferencia. Un segmento de recta, uno de cuyos extremos es el centro de una circunferencia y el otro un punto de la misma, se llama un radio. Evidentemente, todos los radios de una circunferencia dada tienen la misma longitud.

Hemos observado que una curva cerrada simple divide al plano en la parte del plano dentro de la curva, la curva misma y la parte del plano fuera de la curva. Ahora, llamamos a estas partes del plano el interior de la curva, la curva, y el exterior de la curva. Los puntos de la curva misma no están ni en el interior ni en el exterior. La reunión del conjunto de puntos de la curva cerrada simple y del conjunto de puntos de su interior se llama una región plana. Los dos tipos de regiones determinadas por un triángulo y una circunferencia se llaman una región triangular y una región circular, respectivamente.

La reunión de dos rayos que no están en la misma recta y que tienen el mismo extremo se llama un ángulo. El extremo común se llama el vértice del ángulo. Aunque los segmentos rectilíneos no están implicados en la definición de un ángulo, vemos que dos segmentos rectilíneos con un extremo común (pero no en una misma recta), en efecto, sugieren un ángulo. Por ejemplo, la figura  sugiere el ángulo 

Obsérvese que el vértice del ángulo es el extremo común de los segmentos de recta. También, obsérvese que los segmentos representan porciones de los rayos sugeridos, pero no los rayos completos. Este ángulo tiene el extremo común como vértice y contiene los segmentos. En este caso, los segmentos son partes de los rayos. Aceptar esta idea, nos permite asociar con cada triángulo tres ángulos cuyos vértices son los tres extremos de los segmentos de recta que forman el triángulo. Evidentemente, los tres ángulos no son parte del triángulo, sino que simplemente están asociados con él. El que haya tres ángulos implicados explica el uso del término triángulo para nombrar esta figura. (Un nombre más apropiado sería trilátero, pero este término no se ha usado corrientemente.)

ENSEÑANZA DE LA UNIDAD

CONOCIMIENTO ACERCA DEL ESPACIO

Objetivo: Iniciar el estudio de la geometría y especialmente el concepto de conjunto de puntos.

Materiales: Ninguno

Vocabulario: Geometría, imaginación, babilonios, pirámides, segmentos, polígonos.

Sugerencias para la enseñanza:

Cada maestro puede utilizar su propio método para explicar los conceptos presentados en esta unidad.

Al preparar una lección, se sugiere que el maestro lea primero la información dada en el Comentario para el maestro y, después, examine detalladamente el Texto del estudiante.

En el texto, ciertas secciones se designaron Trabajo en grupo. Se prepararon con el fin de utilizarse en clase para desarrollar el conocimiento de ciertas relaciones o la habilidad para descubrirlas. (Sin embargo, quizás, el maestro quiera dejar para otras ocasiones el que los alumnos razonen por sí mismos durante el estudio de la Exploración.) No se espera que los alumnos hagan los ejercicios de la sección Trabajo en grupo independientemente. El maestro y los alumnos deberán trabajar estos ejercicios juntos, ya sea con los libros abiertos o cerrados, según el maestro lo crea conveniente. Si se han mantenido los libros cerrados durante esta parte, el maestro podría decir: "Ahora, abran sus libros en la página tal y examinen la sección Trabajo en grupo. ¿Es esto lo que averiguamos que era cierto?" Si los alumnos han entendido las ideas presentadas, entonces, se espera que se emplee muy poco tiempo en examinar esta sección. Es decir, no es nuestro propósito que los estudiantes trabajen tediosamente los ejercicios de esta sección, si el maestro ha explicado previamente las ideas, cuando los alumnos tenían sus libros cerrados. Entonces, los alumnos pasarán directamente a la sección Conjunto de problemas y trabajarán independientemente.

El contenido de las secciones tituladas Trabajo en grupo se escribió en la mayoría de los casos de manera que los alumnos pudieran llegar a conclusiones con la ayuda del maestro. Los problemas que los alumnos deben trabajar independientemente se incluyen en las secciones tituladas Conjuntos de problemas. Se espera que estos problemas sirvan para afianzar las ideas presentadas en las secciones tituladas Trabajo en grupo. Las respuestas deberán analizarse con los estudiantes, después que éstos hayan resuelto todos los problemas.

Quizás, el maestro quiera iniciar la unidad, empleando el material presentado en las páginas 406 y 407 de la sección CONOCIMIENTO ACERCA DEL ESPACIO, antes de que los alumnos examinen sus textos.

Tal vez, algunos alumnos quieran buscar en un diccionario el significado de la palabra geometría. También, podrían preparar un informe acerca de las pirámides o de Euclides, quien escribió el primer libro de geometría. Un repaso del lenguaje relacionado con los conjuntos podría ser útil. No se espera que en este momento los alumnos puedan contestar la pregunta "¿Pueden hacer alguna conjetura acerca de lo que es un conjunto de puntos?" Esta idea se estudiará en la sección siguiente titulada PUNTOS.

Capítulo 5

CONJUNTOS DE PUNTOS

CONOCIMIENTO ACERCA DEL ESPACIO

Vivimos en la era del espacio. El hombre ha viajado ya en el espacio extraterrestre y se harán más exploraciones de él.

Suponte que planeáramos un viaje a Marte. Nuestra nave espacial tendrá que seguir una ruta que conduzca a Marte. Marte se está moviendo constantemente. Para llegar a él, debemos conocer su posición en el espacio, su velocidad en el espacio, y la dirección y sentido de su movimiento.

El estudio del espacio y la posición es parte de la matemática. Esta parte de la matemática se llama <u>geometría</u>. Las cosas que hemos estado aprendiendo acerca del sistema numérico y acerca de la adición y la sustracción pertenecen a la parte de la matemática llamada <u>aritmética</u>.

Para estudiar geometría, necesitamos buena imaginación. Construimos modelos y dibujamos figuras como ayuda para aprender acerca de cosas que no podemos ver. Pero nuestra imaginación debe ayudarnos también. ¿Está lista tu "facultad de imaginar"?

La geometría no es nueva. Hace miles de años que los egipcios y los babilonios utilizaban ideas de la geometría. Les ayudaba a planear pirámides, localizar sus campos, y estudiar acerca de la Luna, las estrellas y los planetas.

El primer libro de geometría se escribió hace alrededor de 2,200 años. Contenía la mayor parte de las ideas que se utilizan todavía al estudiar el espacio. Sin embargo, aún se están descubriendo nuevas ideas acerca de la geometría. Quizás, seas uno de los que descubran una idea nueva.

Al principio, "geometría" significó "medida de la tierra". Pero, ahora, la geometría también utiliza ideas que no tienen relación con medidas. En esta unidad llamada Conjuntos de puntos, vamos a estudiar algunas de estas ideas.

Sabemos que un "conjunto" es una colección de cosas. ¿Puedes imaginar lo que sería un conjunto de "puntos"? Primero, necesitarías conocer lo que es un "punto". En esta unidad, aprenderemos acerca de puntos, espacio, curvas, segmentos de recta, rayos, circunferencias, polígonos y ángulos.

PUNTOS

Objetivos: Explicar la idea de que un punto puede describirse como una posición o un lugar en el espacio y, también, que un punto no tiene tamaño ni forma.

Materiales: Lápiz con punta afilada, lápiz de punta roma, lápiz de color, hojas de papel, tiza, caja de proyección (las instrucciones se dan en la página 447)

Vocabulario: Punto, localización exacta, lugar exacto, posición exacta, representar

Sugerencias para la enseñanza:

Ahora, introducimos un concepto nuevo, pero empleamos palabras corrientes como punto. Nos damos cuenta de que la palabra punto significa varias cosas para los alumnos. Sin embargo, tenemos en la mente una noción particular, del lugar o localización. En efecto, queremos que la palabra conlleve la idea de localización exacta. Un punto en este sentido no tiene tamaño. Sin embargo, utilizaremos marcas para representar puntos, con el propósito de explicar la idea de localización exacta tan bien como sea posible. La marca más pequeña posible será la mejor representación de un punto. El material descriptivo en el Texto del estudiante se preparó para aclarar esta nueva idea de punto.

Los alumnos pueden analizar los ejercicios del 1 al 4 juntos, con sus libros abiertos. Otro método de enseñanza podría ser que el maestro explicara el concepto de punto como una posición exacta, antes de que los alumnos abran sus libros. Esto podría hacerse, señalando varias representaciones de puntos en el salón y explicando las ideas referentes al concepto de punto contenidas en la sección Base matemática.

El ejercicio 3 es muy importante, porque conduce a la idea de que un punto no se mueve.

En este momento, es importante que se hable acerca de la permanencia de una posición en el espacio. Para recalcar que los puntos existen independientemente de los objetos reales que ocupan las posiciones, el maestro puede hablar de un punto a

2 pies de una pared, a 3 pies de una pared adyacente y a 6 pies del piso. Podría resultar más interesante preguntar si, con el fin de dispararle a un avión enimigo, deberíamos apuntar directamente al avión o al punto donde estará el avión, cuando llegue el proyectil.

No debe emplearse mucho tiempo en la explicación de los conceptos de punto y espacio. Algunos alumnos comprenderán rápidamente la noción abstracta. Otros seguirán pensando que un punto tiene tamaño y hay que representarlo mediante objetos reales. Sin embargo, si aceptan, al menos, la idea de que un punto es más pequeño que cualquiera de las cosas que se estudien de aquí en adelante, probablemente, no tendrán dificultad en entender el material subsiguiente basado en los puntos. Su comprensión del concepto de punto continuará refinándose, a medida que progrese su conocimiento de la geometría.

Obsérvese que se utilizan letras mayúsculas solamente para denotar los puntos.

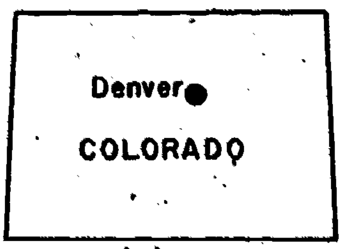
E226

PUNTOS

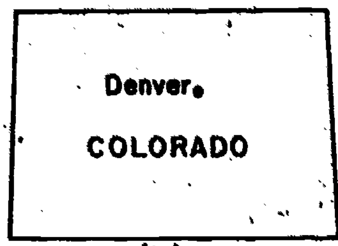
¿Qué es un punto? ¿Será el extremo de un lápiz afilado? ¿Será el extremo de una aguja? ¿Será la marca que hace un lápiz? Veamos lo que significa "punto" en geometría.

Trabajo en grupo

1. Usa tu lápiz más afilado para marcar un punto cerca del centro de una hoja de papel. Ahora, marca un punto con un lápiz de color. Después, marca un punto con un lápiz con punta roma. ¿Parecen iguales todos estos puntos? (No)
   ¿En qué difieren? (Difieren en tamaño y en localización)
   ¿En qué se parecen? (Cada uno marca un lugar.)
2. ¿Cuál de estos mapas de Colorado muestra mejor la localización de la capital del estado? (b) ¿Por qué? (La marca redonda es más pequeña y, por tanto, da una localización más exacta.)



(a)



(b)

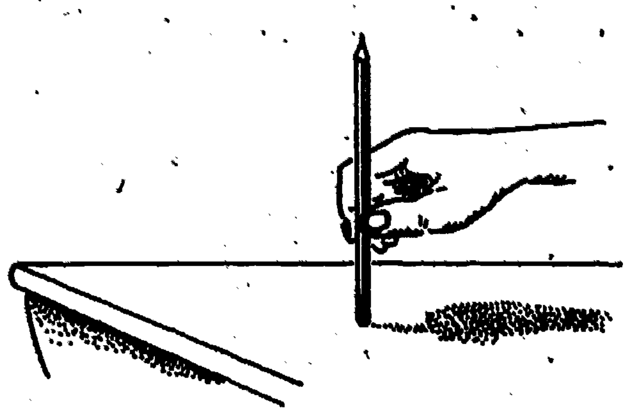
Los puntos que hiciste en el primer ejemplo y los puntos en los mapas de Colorado son intentos para indicar una localización exacta. La marca pequeña identifica la localización más exactamente. En geometría, a menudo hacemos que una marca pequeña represente un <u>punto</u>. Sin embargo, la marca pequeña no es más <u>punto</u> que una representación de una vaca <u>es</u> una vaca.

Un punto en geometría significa un lugar exacto en el espacio. ¿Puedes imaginar algo tan pequeño que no lo puedas ver? Un punto es tan pequeño que en realidad no tiene tamaño.

A menos que tengas un microscopio, no puedes ver un microbio. Sin embargo, un microbio cubre muchos puntos, según nuestro concepto de los mismos. Si fueras a marcar en una hoja de papel el espacio cubierto por un microbio, necesitarías un lápiz bien afilado. La marca hecha con el lápiz cubriría todos estos lugares.

Una marca muy pequeña hecha con un lápiz bien afilado se usa para representar (o estar en lugar de) un punto, aunque un punto es más pequeño que cualquier marca que pueda hacerse.

3. Mantén tu lápiz apoyado por su punta sobre tu escritorio como en el dibujo.



¿Podría la punta afilada del lápiz representar un punto? (نعم) Mueve tu lápiz hacia otra parte de tu escritorio. ¿Representa ahora la punta un punto diferente? (نعم) Los puntos no se mueven. Se mantienen siempre en el mismo lugar.

En geometría, generalmente nombramos los puntos con letras mayúsculas, así:

A. B. C.

Los puntos representados por A, B y C constituyen lo que podemos llamar un "conjunto de puntos". Aprenderemos luego muchas cosas interesantes acerca de conjuntos de puntos.

4. Describe en tu salón un conjunto de tres puntos. (Hay varias respuestas posibles.)

5. Describe en tu salón un conjunto de dos puntos. (Hay varias respuestas posibles). Alguien puede sugerir un conjunto con dos de los puntos utilizados en el ejercicio 4. Si es así, recordaremos algo acerca de los conjuntos dentro de conjuntos.)

6. Describe en tu salón un conjunto de ocho puntos. (Hay varias respuestas posibles. Las ocho esquinas de un salón de clases o de una caja sugieren un ejemplo.)

421

E229

Conjunto de problemas 1

1. ¿Cuál de las siguientes es la mejor representación de un punto? (Punto B)

   A•   B·   C●   D●

2. Marca en tu hoja de papel un conjunto de cinco puntos, usando marcas pequeñas. Designa estas representaciones, utilizando las cinco primeras letras del alfabeto.
   (A. B. C. E. D. o cualquier respuesta parecida.)

3. Escribe la letra de la mejor respuesta. (d)
   Una marca hecha con un lápiz cubre
   a) un punto
   b) cien puntos
   c) varios puntos
   d) más puntos de los que se pueden contar

4. ¿Cuál de los siguientes describe mejor un punto? (c)
   a) una marca hecha con un lápiz
   b) una marca muy pequeña
   c) un lugar exacto en el espacio
   d) una marquita

ESPACIO

Objetivo: Explicar la idea de que el espacio es el conjunto de todos los puntos (es decir, el conjunto de todas las posiciones).

Materiales: Un vaso o una taza, varios bloques de madera, una caja con granos pequeños u otros objetos que sirvan para explicar la idea de espacio, por ejemplo, una caja de proyección.

Vocabulario: Espacio, partícula

Sugerencias para la enseñanza:

Puede empezarse con un análisis en clase, como el siguiente:

¿Qué es lo más pequeño que conocen? Han oído hablar de pequeñas partículas de materia, llamadas átomos. Nadie ha visto un átomo, ni aún con un microscopio. No obstante, por la idea que tenemos de lo que es un átomo, creemos que ocupa espacio. Un átomo no es más pequeño que un punto, porque un punto no ocupa espacio. Un punto, de acuerdo con la idea que tenemos del mismo, no tiene tamaño. Un átomo ocupa más puntos del espacio de los que pueden contarse.

¿Cuántos puntos hay en el espacio en nuestro salón de clase?

a. ¿Habrá más de cien?
b. ¿Habrá más de mil?
c. ¿Habrá más de los que podrían contarse?

Respuesta: Hay más de los que podrían contarse.

¿Qué es el espacio?

Permítase a los estudiantes que den sus ideas y hagan comentarios, después que se haya definido el espacio como el conjunto de todos los puntos. Mediante este análisis, el maestro puede conducir a los estudiantes a las siguientes ideas:

El interior de una bola de baloncesto es un ejemplo de una porción del espacio. Otros ejemplos son: el interior de un salón de clase, la atmósfera de la tierra o una porción cualquiera del universo. El maestro debe tratar de eliminar la idea de los estudiantes de que espacio es lo que está fuera de la atmósfera de la tierra. Se les debe conducir hacia la idea de que <u>el espacio es el conjunto de todos los puntos</u>; es decir de todos los lugares o posiciones. Cualquier lugar en el universo es un punto. Por tanto, un vaso, una taza, una manzana o un bloque de madera ocupan puntos del espacio. El espacio es el conjunto de todos los puntos (posiciones).

Después de este análisis preliminar de lo que es el espacio, los alumnos pueden abrir sus textos y leer la sección <u>Trabajo en grupo</u>. Sería apropiado hacer preguntas como la siguiente: "¿Indica esto lo que ya sabemos acerca del espacio?"

E230

ESPACIO

¿Qué es el espacio? ¿Es aire? ¿Es un sitio vacío? ¿Es la distancia de la Tierra a Marte? No es ninguna de estas cosas, según nuestro concepto del "espacio" en geometría.

He aquí algunos ejemplos de cosas que ocupan conjuntos de puntos en el espacio:

La goma de tu lápiz

La puerta de tu salón de clase

Tu dedo meñique

Trabajo en grupo

1. Ahora, ¿puedes imaginarte lo que es el "espacio"? ¿Qué respuesta escogerías? (c)

   (a) El espacio es algo hueco.

   (b) El espacio es un objeto como una puerta.

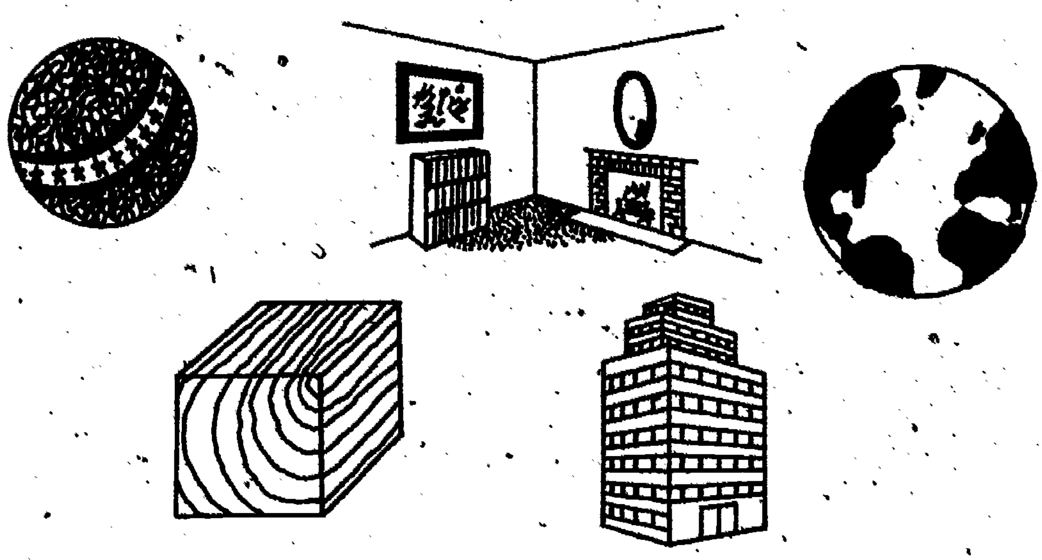
   (c) El espacio es el conjunto de todas las localizaciones exactas en todas partes.

Si escogiste la respuesta (c), estuviste acertado. <u>El espacio es el conjunto de todos los puntos.</u>

Esto significa todos los puntos en todas partes. Todos los lugares en la cabeza de un alfiler, en tu casa, en tu ciudad y arriba en el cielo, en tu país, en el mundo, y en el universo entero son puntos en el espacio.

E231

El espacio como lo concebimos ahora es probablemente muy diferente de la idea que tenías. Cualquier objeto en que puedas pensar cubre u ocupa muchos puntos del espacio. Por ejemplo, una bola, un bloque de madera, un cuarto, un edificio, la Tierra, todos son partes ocupantes del espacio.



2. ¿Debe una parte del espacio estar llena de aire solamente? (no).

3. ¿Contiene un bloque de madera un punto del espacio, mil puntos, o más puntos del espacio de los que se pueden contar? (Más puntos de los que se pueden contar.)

4. Coloca una taza sobre un escritorio. Representa muchos puntos. Mueve la taza a algún otro lugar. ¿Representa ahora el mismo conjunto de puntos que antes? (No, porque los puntos no se mueven.)

5. Coloca un bloque de madera sobre un escritorio. Representa muchos puntos. Muévelo a algún sitio. ¿Representa ahora el mismo conjunto de puntos que antes? (No, porque los puntos no se mueven.)

Conjunto de problemas 2

Escribe la letra de la contestación correcta.

1. ¿Cuál de los siguientes dice mejor lo que es el espacio? (c)

   a) El espacio es todos los lugares vacíos.

   b) El espacio es un conjunto de puntos.

   c) El espacio es el conjunto de todos los puntos.

   d) El espacio es el aire alrededor de la Tierra.

2. En un camión lleno de granos, hay (b)

   a) justamente tantos puntos como granos.

   b) más puntos que granos.

3. ¿Cuáles de los siguientes representan una parte del espacio? (a, c, d, f)

   a) Una marca que haces en tu hoja de papel

   b) La idea de la verdad

   c) Tu maestro

   d) Un árbol

   e) La idea de la belleza

   f) Un pliegue en un pedazo de papel

CURVAS

Objetivo: Explicar la idea de que una curva es un conjunto de puntos sugerido por el camino que traza la punta de un lápiz al moverse de un punto a otro; explicar la idea de que un segmento de recta es un tipo especial de curva, es decir, un segmento de recta es la curva más directa que une dos puntos.

Materiales: Cuerda, regla, papel, lápices, tablero para clavijas, tablero para prender objetos, un globo, varios bloques de madera, limpiadores de pipas, tizas de colores, caja de proyección

Vocabulario: Curva, camino, segmento de recta, extremos

Sugerencias para la enseñanza:

Puede seguirse la explicación tal como se presenta en el Texto del estudiante. Un tablero para clavijas o un tablero para prender objetos puede utilizarse para representar segmentos de recta, colocando una cuerda tensa entre dos puntos. Los estudiantes pueden utilizar el globo o un mapa para indicar cómo se puede ir de un lugar a otro, trazando así un camino o una curva.

En los ejercicios 1 y 2 de la sección Trabajo en grupo, considérense también caminos que no estén enteramente sobre el pupitre o el papel, es decir, caminos que se salen del plano representado por el pupitre o el papel.

En el ejercicio 3, podría utilizarse una tiza de color para indicar el camino más directo o curva más directa (segmento de recta) entre dos puntos marcados en la pizarra, aclarando así la explicación dada en el texto. Otra manera de representar un segmento de recta es, doblando un trozo de papel. La marca que deja el doblez sugiere un segmento de recta.

En el ejercicio 4, se sugiere que se utilicen limpiadores de pipas o alambres para representar el camino.

El símbolo para representar un segmento de recta es uno de los varios símbolos utilizados en esta unidad. El segmento de recta del ejercicio 4 podría también llamarse el segmento de recta BA y se escribe $\overline{BA}$. Este método de denotar los segmentos de recta se utiliza en el ejercicio 6.

E233

CURVAS

Trabajo en grupo

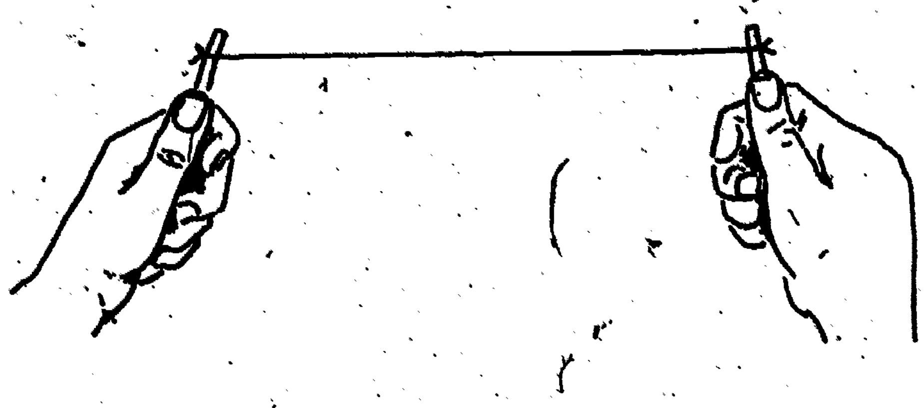
1. Utiliza dos pedacitos de papel para marear dos puntos en tu escritorio. Haz un trazo con un dedo para indicar algunas maneras de ir de un punto al otro. ¿Cuántas trayectorias podrías seguir para ir de un punto al otro? (Más de las que se pueden contar) ¿Puedes trazar la manera más directa de ir de un punto al otro? (Sí, un segmento rectilíneo marca el camino más directo de un punto a otro, pero los alumnos no conocen todavía el concepto de segmento rectilíneo)

2. Hay muchas maneras de ir de A a B. Veamos la representación de dos de esas maneras:

Marca dos puntos en una hoja de papel. Desígnalos con A y B. Indica 5 maneras de ir de A a B en tu papel. No tenemos necesariamente que mantenernos sobre el papel. Piensa cómo puedes ir de A a B y tocar el papel solamente en los puntos. (Este camino no estaría en el plano representado por la hoja de papel.)

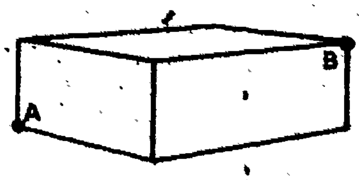
Al ir de un punto al otro, has trazado una curva con la punta de tu dedo o con tu lápiz. Pensamos en una curva como un conjunto de puntos. Consiste en todos los lugares diferentes por los que pasa la punta de tu dedo o tu lápiz al ir de un punto a otro.

3. Pensemos un poco más acerca de las curvas entre dos puntos. Supongamos que se usa un trozo de cuerda atado a dos lápices en los extremos que tienen las gomas. Podemos marcar con las gomas de los lápices dos lugares. Localicemos estos puntos todo lo separados que la cuerda lo permita. ¿Indica la cuerda la trayectoria más directa? (sí)



Esta trayectoria directa es un modo de presentar un tipo especial de curva. La llamamos un <u>segmento de recta</u> o <u>rectilíneo</u>. Dibuja marcas redondas en esta cuerda utilizando tiza, lápiz, o una pluma. Estas marquitas representan puntos para nosotros. Consideramos un <u>segmento de recta</u> como un conjunto de puntos. Es el conjunto de todos los puntos que hemos marcado y todos los demás puntos de nuestra cuerda mantenida tensa. Contiene también los dos puntos representados por las gomas. Podemos representar segmentos de recta de otras maneras.

4. Marca sobre un bloque de madera los puntos A y B, según se indica en la figura.



En el bloque, dibuja dos curvas desde el punto A hasta el punto B, usando dos lápices de distintos colores.

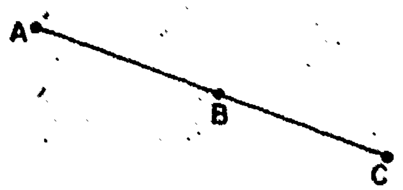
¿Contienen las dos curvas que dibujaste algunos segmentos de recta? (Las respuestas dependerán de las curvas que dibujen los alumnos.)

Una manera excelente de representar un segmento de recta es dibujarlo con una regla y un lápiz. En tu hoja de papel, dibuja un segmento uniendo los dos puntos, como se muestra en la figura que sigue; representaremos de esta forma un segmento de recta:

Damos a esto el nombre de "segmento de recta AB". Una manera abreviada de escribir "el segmento de recta AB" es $\overline{AB}$. $\overline{AB}$ significa segmento de recta AB. El segmento de recta termina en los puntos A y B. Por tanto, los puntos A y B se llaman los extremos.

5. Imagina que la esquina de tu salón de clase representa un punto. ¿Qué tres cosas sugieren segmentos de recta con dicho punto como un extremo? (La intersección de dos paredes o la intersección de una pared y el piso o la intersección de una pared y el techo)

6. Nombra todos los segmentos de recta, con extremos en el conjunto de puntos {A, B, C}, que ves representados en esta figura: ($\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$) ($\overline{AB}$ podría denotarse también con $\overline{BA}$, $\overline{AC}$ con $\overline{CA}$ y $\overline{BC}$ con $\overline{CB}$. Hay 3 segmentos pero hay seis nombres posibles para los tres segmentos.)



7. Marca un punto en tu hoja de papel. Llámalo el punto A. ¿Cuántos segmentos de recta diferentes puedes dibujar con A como un extremo? (Más de los que pueden contarse.)

8. Da algunos ejemplos de representaciones de segmentos de recta sugeridas por objetos en tu salón de clases. (Hay varias respuestas posibles.)

9. ¿Tiene la frontera de tu estado segmentos de recta en alguna de sus partes? (Depende del estado.)

10. Marca un punto en tu hoja de papel. ¿Llamarías a tu marca un segmento de recta? (No. Un segmento de recta no es un punto.)

11. Marca algo como esto  en tu hoja de papel. ¿Es un segmento de recta? (No)

12. Marca algo en tu papel que no represente un segmento de recta. (Hay varias respuestas posibles. Procúrese que los alumnos dibujen cosas diferentes a la línea torcida del ejemplo 11 o el punto del ejemplo 10.)

Conjunto de problemas 3

1. Marca dos puntos en tu hoja de papel, como se indica aquí:

Dibuja tres curvas diferentes de A a B.

Anota la letra de la mejor respuesta. (d)

Cada curva entre estos dos puntos A y B pasa por

a) un punto

b) tres puntos

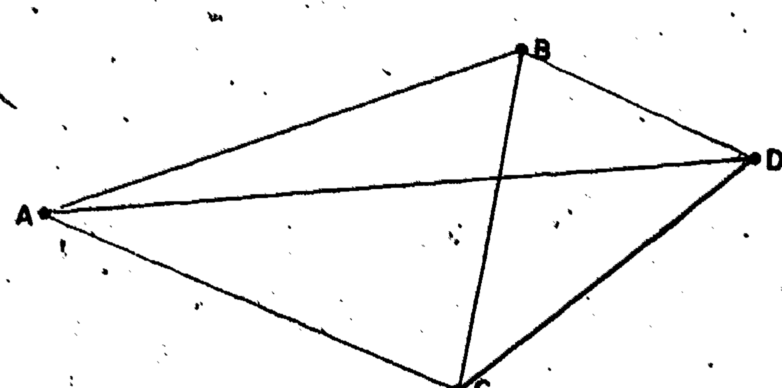
c) muchos puntos

d) más puntos de los que se pueden contar.

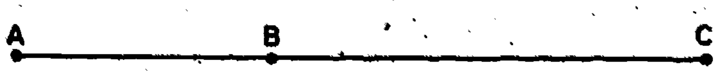
2. El conjunto de puntos {A, B} se representa a continuación. Copia este conjunto en tu papel. Dibuja todos los segmentos de recta posibles que tengan ambos extremos en este conjunto. ¿Cuántos hay? (uno)

3. Copia el conjunto de puntos {A, B, C} en tu hoja de papel. Dibuja todos los segmentos de recta que tienen ambos extremos en {A, B, C}. ¿Cuántos segmentos de recta hay? (tres)

4. Copia el conjunto de puntos {A, B, C, D} en tu hoja de papel. ¿Cuántos segmentos de recta puedes dibujar, cada uno con dos de los puntos nombrados como extremos? (seis) Asegúrate de dibujar todos los segmentos de recta. Nombra los segmentos de recta que dibujaste. ($\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{DC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AD}$)

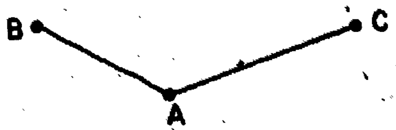


5. Nombra todos los segmentos de recta que ves en esta figura. Ambos extremos deben estar en el conjunto {A, B, C}.
($\overline{AB}$ o $\overline{BA}$, $\overline{AC}$ o $\overline{CA}$, $\overline{BC}$ o $\overline{CB}$; tres segmentos de recta, cada uno con 2 nombres.)



6. Marca un punto en tu hoja de papel y márcalo con la letra A, según se indica a continuación. Dibuja dos segmentos de recta que tengan A como un extremo.

(Una posibilidad)

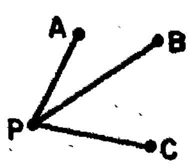


($\overline{AB}$ es un segmento)
($\overline{AC}$ es otro segmento)

(Otra posibilidad)

7. Marca un punto en tu hoja de papel y desígnalo con la letra P. Dibuja tres segmentos de rectas que tienen a P como un extremo.

(Una posibilidad)



(Otra posibilidad)

(PA, PB y PC son segmentos de recta.)

8. Completa los siguientes enunciados en tu hoja de papel:

a) Esta es una representación de un (segmento de recta).

b) Escribimos su nombre ($\overline{XY}$ o $\overline{YX}$).

RECTAS

Objetivo: Explicar que una recta contiene segmentos de recta de longitud cada vez mayor. Una recta no tiene extremos. Se prolonga indefinidamente en dos sentidos.

Materiales: Papel, lápiz, regla, tiza

Vocabulario: Prolongar, describir

Sugerencias para la enseñanza:

> Puede seguirse la explicación dada en el <u>Texto del estudiante</u>; el maestro y los alumnos deberán trabajar juntos con los libros abiertos.
>
> Un método de enseñanza diferente podría ser pedir a los alumnos que tengan sus libros cerrados, mientras se explican las ideas en la pizarra y con la participación de la clase. Entonces, puede examinarse el contenido del texto y hacerse preguntas como la siguiente: "¿Se presenta aquí una buena explicación de lo que acabamos de ver?"

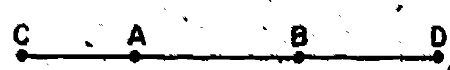
E240

RECTAS

Trabajo en grupo

1. Usa una regla para dibujar en tu hoja de papel un segmento de recta como $\overline{AB}$.

Dibuja un segmento de recta más largo, que contenga el punto A y el punto B, prolongando $\overline{AB}$ en ambos sentidos. Marca los extremos de este segmento con las letras C y D. ¿Resulta tu dibujo así?



¿Está $\overline{AB}$ contenido en $\overline{CD}$? (Sí)

2. Dibuja un segmento de recta aún más largo, que contenga los puntos A y B, prolongando $\overline{CD}$ en ambos sentidos. Marca los extremos de este segmento con las letras E y F. Ahora, tu dibujo podría resultar así:

¿Está $\overline{AB}$ contenido en $\overline{EF}$? (Sí)

Si tuvieras un pedazo de papel más grande y una regla más larga, podrías dibujar un segmento de recta aún más largo que contendría al punto A y al punto B. Imagina cómo se vería este segmento de recta, si dibujaras segmentos cada vez más y más largos que contengan los puntos A y B.

¿Puedes imaginar cómo resultaría tu dibujo, si lo prolongaras indefinidamente? Esto es lo que tenemos en la mente cuando pensamos en una <u>recta</u>. Una <u>recta</u> no tiene extremos. Contiene segmentos de recta de longitudes todo lo grandes que se quiera.

3. A continuación, damos una representación de una recta:

Las flechas se usan para indicar que continúa indefinidamente en ambos sentidos. Solamente parte de la recta puede representarse en esta página. La recta dibujada podemos llamarla AB. Una manera breve de denotar la recta AB es $\overleftrightarrow{AB}$.

Las letras A y B nombran puntos de la recta. Sabemos que C y D nombran otros puntos de la recta. Llamaremos también a esta recta la recta CD, o la recta AC, o la recta AD.

La recta AB es lo mismo que la recta BA. ¿Qué otros nombres puede tener esta recta? Utiliza solamente los puntos mencionados. ($\overleftrightarrow{BC}$ o $\overleftrightarrow{CB}$, $\overleftrightarrow{BD}$ o $\overleftrightarrow{DB}$, $\overleftrightarrow{CA}$, $\overleftrightarrow{DA}$, $\overleftrightarrow{DC}$)

4. He aquí una ilustración de $\overline{KS}$. M, P, L y R, nombran otros puntos de este segmento de recta.

Copia $\overline{KS}$ y sus puntos marcados.

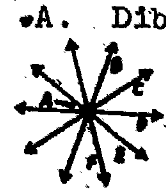
a) Dibuja un segmento de recta que represente más de la recta PS e incluya también al segmento de recta KS. ¿Puedes dibujar una representación <u>completa</u> de la recta PL? (No, la recta se prolonga indefinidamente.)

b) Dibuja una representación de la recta AB. En tu hoja de papel, indica un método abreviado de denotar la recta AB.
($\overleftrightarrow{AB}$ o $\overleftrightarrow{BA}$)

Recuerda que un segmento de recta es un conjunto de muchos puntos y una recta también es un conjunto de muchos puntos.

5. Sigue las siguientes instrucciones cuidadosamente:

a) Marca un punto en tu hoja de papel y denótalo A. Dibuja una recta que pase por el punto A.
(El dibujo será algo así:



b) Ahora, dibuja una recta diferente que pase por el punto A.

c) Luego, dibuja tres rectas diferentes más que pasen por el punto A.

d) Marca un punto distinto del punto A en cada una de las rectas que dibujaste. Denota los puntos por las letras B, C, D, E, F.

e) ¿Podemos dibujar más rectas que pasen por el punto A?
(Sí, más de las que se pueden contar.)

f) ¿Cuál es la terminación correcta del enunciado a continuación? Por el punto A, podemos trazar: (más rectas de las que se pueden contar)

una recta.

más rectas de las que se pueden contar.

g) Describe la posición de un segmento de recta que pasa por A y que no está en tu hoja de papel. (Este segmento no estaría en el plano representado por la hoja de papel. De estos segmentos de recta, habrá más de los que pueden contarse.)

6. En tu papel marca dos puntos, A y B.

B

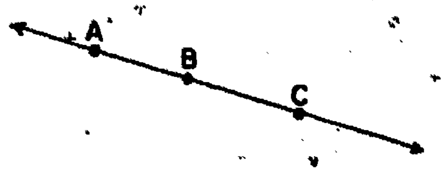
A

a) ¿Cuántos segmentos de recta puedes dibujar con extremos A y B? (Uno)

b) ¿Cuántos segmentos de recta puedes dibujar que pasen por A y B? (Más de los que pueden contarse.)

c) ¿Cuántas rectas hay que contienen los dos puntos A y B? (Uno)

7. A continuación, hemos representado una recta y tres puntos de la misma:



¿Llamaremos a esta recta $\overleftrightarrow{AB}$ o $\overleftrightarrow{AC}$? (Cualquiera de los dos nombres es correcto. También podríamos llamarla $\overleftrightarrow{BA}$, $\overleftrightarrow{CA}$, $\overleftrightarrow{BC}$ o $\overleftrightarrow{CB}$.)

En el problema 6, vimos que con una regla y un lápiz se podía dibujar solamente una recta que pase por los puntos A y B. De ahora en adelante, piensa en este enunciado como un hecho: Se puede dibujar solamente una recta que pase por los puntos A y B.

RAYOS

Objetivo: Explicar que un rayo es parte de una recta. Es la reunión de su extremo y todos los puntos de la recta que están a un lado del extremo.

Materiales: Lápiz, papel, regla, tiza, lápiz de color

Vocabulario: Rayo, símbolo

Sugerencias para la enseñanza:

Puede seguirse la explicación presentada en el <u>Texto del estudiante</u>, pues contiene detalles suficientes. El maestro puede explicar los conceptos en la pizarra, mientras los estudiantes mantienen sus libros cerrados. Después de esta explicación, los estudiantes pueden abrir sus libros y leer para determinar la respuesta a la pregunta: "¿Se indica aquí lo que acabamos de hacer?"

El maestro puede elegir estudiar con los alumnos la sección <u>Trabajo en grupo</u> como una tarea de clase, manteniendo los libros abiertos. El maestro decidirá qué método de enseñanza utilizará, puesto que ya sabe cuál será más eficaz con su grupo.

En el ejercicio 1 de la sección <u>Trabajo en grupo</u>, el maestro podría hacer hincapié en que en el símbolo para denotar el rayo AB, la cola de la flecha está encima de la letra que designa el extremo del rayo.

Quizás, algunos estudiantes necesiten más práctica como la que se proporciona en el ejercicio 2, para comprender el concepto de rayo. Tal vez, los estudiantes estén interesados en observar que un rayo "empieza" en el extremo y "sigue" indefinidamente en un sentido. Desde luego, en realidad no se mueve; hablamos de lo que pensamos acerca de las representaciones del rayo en la pizarra o en una hoja de papel.

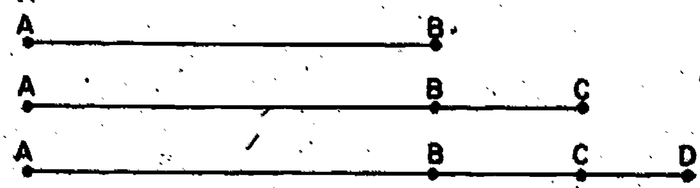
E244

RAYOS

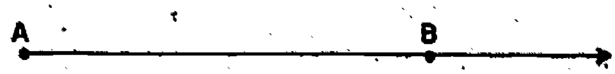
Trabajo en grupo

1. Utiliza una regla para dibujar en tu hoja de papel un segmento de recta AB.

Supongamos, ahora, que se dibujan segmentos de recta cada vez más largos, pero siempre conservamos A como uno de los extremos, así:



Supongamos, luego, que no tenemos un segundo extremo, como en la representación que sigue:

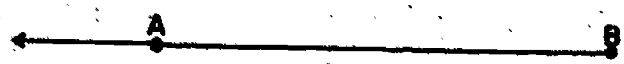


Esto nos da una idea de lo que se llama un <u>rayo</u>.

En esta página, podemos mostrar solamente una parte de un <u>rayo</u>. Podemos llamar a este rayo, el rayo AB. Las letras A y B nombran puntos del rayo.

Un rayo tiene un extremo. A es el nombre del extremo del rayo. Un método abreviado para denotar el rayo AB es $\overrightarrow{AB}$. El extremo se escribe primero.

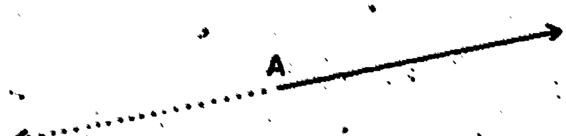
He aquí una representación del rayo BA. ¿Cuál es su extremo? (El punto B)



El rayo BA no es lo mismo que el rayo AB. ¿Puedes decir por qué? ($\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$ tienen extremos diferentes.)
El extremo de $\overrightarrow{BA}$ es B. ¿Cuál es el extremo de $\overrightarrow{AB}$?
(El punto A)

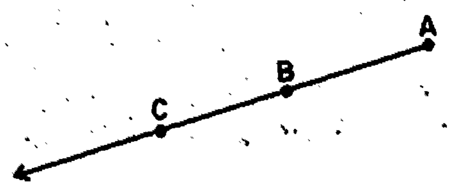
Podemos decir que un <u>rayo</u> es la reunión del extremo y todos los puntos de una recta que estén a un mismo lado de dicho extremo.

Por ejemplo, fíjate en la recta representada más adelante y el punto de la misma denotado A. Un rayo se representa por la parte llena de la recta. El otro rayo se representa por la parte punteada de la recta. El punto A pertenece a ambos rayos representados y se llama el <u>extremo</u> de uno u otro rayo.



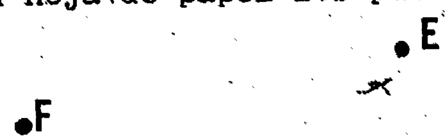
Un rayo es siempre parte de una recta. Un conjunto de rayos se representa perfectamente mediante un haz de luz procedente de una linterna eléctrica. Cada rayo parte de la linterna y se prolonga sin fin en un solo sentido.

2. $\overrightarrow{AB}$ se representa más adelante.
   a) ¿Es $\overrightarrow{AC}$ otro nombre para este rayo? (Sí)
   b) ¿Es $\overrightarrow{BC}$ otro nombre para este rayo? (No, puesto que $\overrightarrow{BC}$ no tiene a A como su extremo.)
   c) ¿Se representa el rayo $\overrightarrow{BA}$? (no)
   d) ¿Se representa el rayo $\overrightarrow{BC}$? (Sí)

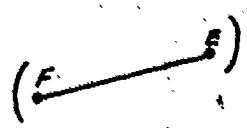


Conjunto de problemas 4

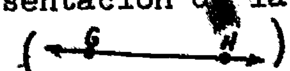
1. a) Marca en tu hoja de papel los puntos F y E.



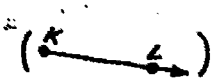
Dibuja una representación del segmento de recta FE.



b) Marca dos puntos en tu hoja de papel y llámalos G y H. Dibuja una representación de la recta que pasa por G y H.



c) Dibuja una representación de un rayo. Llámalo $\overrightarrow{KL}$.

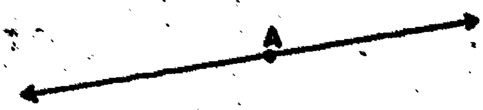


d) Escribe el símbolo para el segmento de recta FE; ($\overline{FE}$) para la recta GH; ($\overleftrightarrow{GH}$) para el rayo KL. ($\overrightarrow{KL}$)

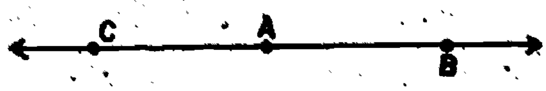
e) ¿Cuál es el extremo de $\overrightarrow{KL}$? (K)

f) ¿Representa $\overrightarrow{KL}$ el mismo rayo que $\overrightarrow{LK}$? (no) ¿Por qué? (No tienen el mismo extremo.)

2. Sea A el nombre de un punto de la recta representada a continuación. ¿Cuántos rayos que son parte de esta recta ~~pueden tener a A como un extremo? (Dos)~~



3. Dibuja en tu hoja de papel una representación de una recta. Sea A un punto de esta recta.



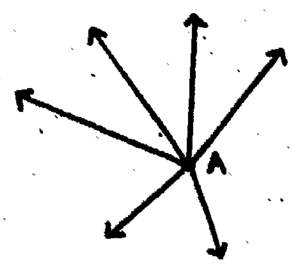
a) Elige un punto de la recta diferente de A y, a un lado de A, y llámalo B.

b) Elige otro punto de la recta al otro lado de A y llámalo C.

c) Nombra dos rayos con extremo A que son parte de esta recta. ($\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$)

d) ¿Hay algunos rayos más en esta recta que tienen a A como un extremo? (no)

4. Marca un punto en tu hoja de papel y llámalo A.



a) Dibuja un rayo con el extremo A.

b) Dibuja otro rayo con el extremo A.

c) Dibuja cuatro rayos más con el extremo A. (El dibujo podría verse así)

d) ¿Cuántos rayos podría haber con A como extremo? (Una infinidad, más de las que pueden contarse)

5. Dibuja un rayo en tu hoja de papel. Denótalo $\overrightarrow{AB}$. ¿Cuál es su extremo? (A) ¿Cuántos rayos hay con el extremo A que contienen al punto B? (Uno) ()

6. Dibuja un rayo en tu hoja de papel con el extremo A.
   a) Elige un punto en el rayo diferente de A y llámalo B.
   b) ¿Está $\overline{AB}$ contenido en $\overrightarrow{AB}$? (Sí). 

   c) ¿Cuántos segmentos podría haber en AB que tengan a A como extremo? (Más de los que pueden contarse.)

7. Marca dos puntos en tu hoja de papel y denótalos R y S.

   a) ¿Cuántas rectas puedes trazar que contienen al punto R? (Más de las que pueden contarse.)
   b) ¿Cuántas rectas puedes trazar que contienen al punto S? (Más de las que pueden contarse.)
   c) ¿Cuántas rectas puedes trazar que contienen a ambos R y S? (Una)

Completa correctamente los enunciados en los ejercicios del 8 al 10.

8. Una recta tiene (c)
   a) exactamente un extremo.
   b) dos extremos.
   c) ningún extremo.

9. Un rayo tiene (a)
   a) exactamente un extremo.
   b) dos extremos.
   c) ningún extremo.

10. Un segmento de recta tiene (b)
   a) exactamente un extremo.
   b) dos extremos.
   c) ningún extremo.

PLANOS

Objetivo: Explicar que una parte de un plano es el conjunto de puntos del espacio que están en una superficie llana como una hoja de papel lisa, un tablero de una mesa, un piso, una pared; explicar el concepto de plano, partiendo de esta idea de una parte de un plano; explicar la idea de que un plano contiene más puntos y más rectas de las que pueden contarse.

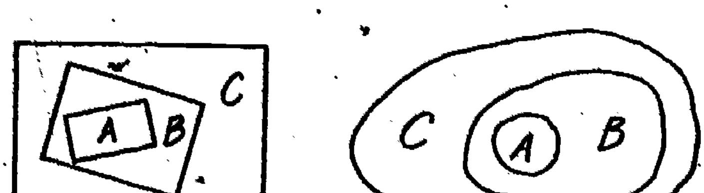
Materiales: Hojas de papel, lápiz, tiza, regla, pequeños trazos de cartulina para cada alumno.

Vocabulario: Superficie, plano, región

Sugerencias para la enseñanza:

Quizás, el maestro quiera explicar la idea de una parte de un plano y, después, el plano entero de la manera que se presenta en el Texto del estudiante, antes de que los alumnos abran sus libros. Luego de esta explicación, los alumnos pueden abrir sus libros y contestar una pregunta como: "¿Es ésta una buena descripción de lo que acabamos de hacer?

El objetivo del ejercicio 4 de la sección Trabajo en grupo es explicar el concepto de plano. Esto se hace de manera parecida a como se explicó el concepto de recta. Al tratar la recta, empezamos con un segmento de recta y mostramos que se podían dibujar segmentos de recta más y más largos que contenían dos puntos dados. Entonces, imaginamos un "segmento de recta" tan largo que no tuviera extremos y le llamamos una recta. Al considerar el concepto del plano, empezamos con una parte de un plano y, después, dibujamos partes de un plano más y más grandes. Entonces, imaginamos una parte de un plano (un tablero de una mesa) creciendo más y más indefinidamente y le llamamos un plano. Los dibujos de los estudiantes en el ejercicio 4 podrían verse así:



Se puede admitir cualquier dibujo que represente la región C más grande que la región B y la región B más grande que la región A.

A la palabra <u>región</u>, se le da aquí el significado corriente. El significado matemático del término región se explica en la sección, REGIONES EN UN PLANO.

E249

PLANOS

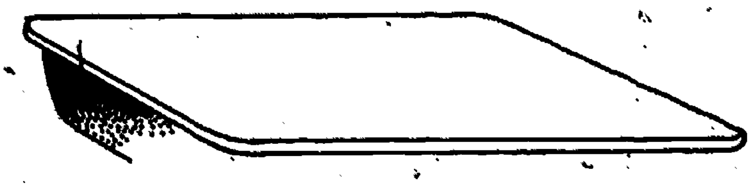
Trabajo en grupo

1. ¿Puedes hallar algunas superficies planas en tu salón de clase? Nombra todas las que puedas. (El tablero de un pupitre, el piso, la pizarra, los cristales de la ventana, etc.)

¿Sabes el nombre geométrico de un conjunto de puntos sugerido por una superficie plana? Plano. Cada superficie plana que has nombrado representa parte de un plano.

2. Pon un dedo sobre un punto en el tablero de tu pupitre. Ahora, ponlo en un punto diferente. ¿Cuántos puntos diferentes puedes encontrar en el tablero plano de tu pupitre? (Más de los que pueden contarse.)

¿Cuántos puntos crees que hay en un plano? (Más de los que pueden contarse.)

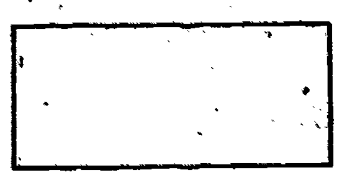


3. Pon un dedo sobre un punto del tablero de tu pupitre, y, luego, en un punto por debajo del tablero. ¿Hay muchos puntos que no están en el plano representado por el tablero de tu pupitre? (Sí, más de los que pueden contarse.)

De ahora en adelante, consideraremos una parte de un plano como un conjunto de puntos en el espacio. Es la clase de conjunto sugerido por todos los puntos sobre el tablero de una mesa plana, o en una muralla, o en el piso. Una hoja de papel que permanezca plana sobre tu pupitre sugiere, también, una parte de un plano.

4. Para tener una mejor idea de lo que entendemos por un plano, sigue las instrucciones siguientes:

a) Observa la figura de más adelante. Dibuja una igual cerca del centro de un trozo de papel. (V. la página 439.)



b) Traza la figura con un lápiz de color (rojo). Colorea la parte del plano dentro de la figura con el mismo color. Da a esta parte coloreada el nombre A. ¿Es esta región coloreada la representación de parte de un plano? (Sí)

c) Dibuja una figura más grande que incluya la región coloreada A. Colorea de rojo la figura más grande y, también, su interior. Dále a esta nueva región coloreada el nombre B.

¿Representa la nueva región coloreada una parte del mismo plano que A? (Sí)

¿Representa la región coloreada A ó la región coloreada B algo más de este plano? (La región B)

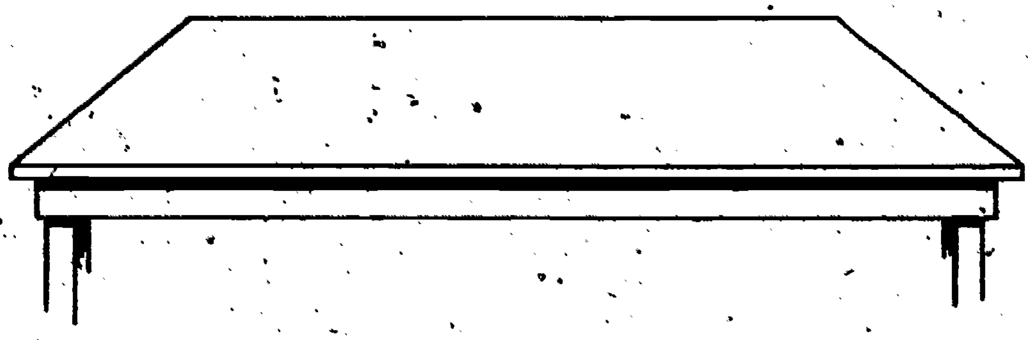
d) Dibuja una tercera figura que incluya la región coloreada B. Colorea de rojo esta figura y su interior. Dále a esta nueva región coloreada el nombre C.

¿Representa la nueva región coloreada una parte del mismo plano que A? (Sí)

¿Representa la región coloreada A, la región coloreada B o la región coloreada C algo más de este plano? (La región C)

e) ¿Puedes dibujar una representación del plano completo sugerido por las regiones A, B y C? (No. Un plano se extiende indefinidamente.)

Del mismo modo que pensamos en una recta que contiene segmentos más y más largos, así pensaremos en <u>un plano entero</u> como conteniendo superficies planas cada vez más grandes. Imagínate el tablero de tu mesa creciendo más y más por todos sus lados. Tendrías entonces un tablero de mesa sobre el cual podrías andar todo lo lejos que quieras en cualquier dirección y sentido.



5. ¿Se mueve el conjunto de puntos representado por el tablero de la mesa cuando la mesa se mueve? (No. Los puntos o los conjuntos de puntos no se mueven.)

6. Nombra algunos otros objetos que representan partes de planos. (Hay varias respuestas posibles)

7. ¿Hay más de un plano en el espacio? (Sí, hay más de los que pueden contarse.)

A menudo, usaremos una hoja de papel colocada en el tablero de una mesa plana o de un escritorio para representar una parte de un plano. Puede considerarse que el tablero de la mesa contiene aún más puntos de este mismo plano.

E253

Conjunto de problemas 5

1. ¿Contiene un plano, según lo imaginamos, un punto o más puntos de los que se pueden contar? (Más de los que pueden contarse.)

2. Toma una hoja de papel. Considérala como parte de un plano. ¿Es posible trazar más de una recta en este plano? (Sí)

   Si es así, dibuja dos rectas.

   Ahora dibuja tres rectas más.

   Dibuja diez rectas más.

   (Los estudiantes dibujarán rectas diferentes. Quizás algunas de esas rectas se intersequen. Cada estudiante deberá dibujar quince rectas.)

3. ¿Contiene un plano a una recta, a dos rectas, o a más rectas de las que se pueden contar? (Más de las que pueden contarse.)

4. Considera el tablero de tu pupitre como una parte de un plano. Describe la localización de un punto que no esté en este plano. Describe la localización de una recta que no esté en este plano. (Admítanse todas las respuestas razonables. Por ejemplo, si se considera un plano horizontal, será apropiado un punto por encima o un punto por debajo del plano. Lo mismo es válido para las rectas.)

5. ¿Contiene un plano a todos los puntos del espacio? (No)

6. ¿Contiene un plano a algunas rectas pero no a todas las rectas del espacio? (Sí)

7. Toma una hoja de papel. Considérala como parte de un plano. Describe una recta que no está en este plano. Dibuja un rayo que esté en el plano. (⟶ Hay varias respuestas posibles) Describe un rayo que no esté en este plano. (Hay varias respuestas posibles.)

8. Si el extremo de un rayo no está en un cierto plano, ¿está el rayo en ese plano? (No)

E254

9. Si el extremo de un rayo está en un cierto plano, entonces, ¿debe el rayo estar en ese plano? (no)

10. Si dos puntos de un rayo están en el plano, entonces, ¿debe el rayo estar en el plano? (sí)

RECTAS Y PLANOS

Objetivo: Explicar las siguientes ideas:

1. Si dos puntos de una recta están en un cierto plano, la recta entera estará en el mismo plano.

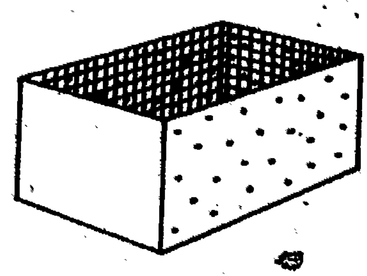
2. Por dos puntos, pasan más planos de los que pueden contarse.

3. Por tres puntos que no están alineados, pasa un plano y sólo uno.

Materiales: Cartulina y hojas de papel que puedan utilizarse para representar planos, lápices, alambres o varillas que puedan utilizarse para representar rectas, una caja de proyección con varillas de bambú o pajas de escoba o alguna otra representación de rectas.

Una caja de proyección que sirva de ayuda en la explicación se puede hacer fácilmente.

Consígase una caja de cartón bastante duro y háganse agujeros en la tapa y en tres lados, como se muestra en la figura. Utilícense tarjetas para representar planos y varillas de bambú, pajas o alambres para representar rectas. Pasando las varillas, etc., por los agujeros, podemos indicar intersecciones de rectas. También, podemos indicar que tres puntos no alineados determinan un plano e ilustrar que varios planos pueden pasar por una recta.



Vocabulario: Lomo, observación, geométrica

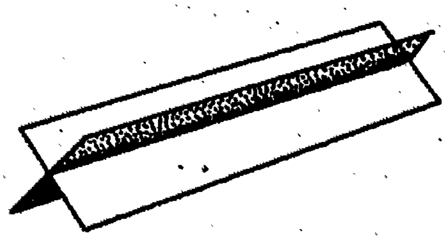
Sugerencias para la enseñanza:

En los ejercicios 1 y 2 de la sección Trabajo en grupo, se explica la idea de que si dos puntos de una recta están en un plano, entonces, la recta completa está en el mismo plano. Se necesitarán varios ejemplos parecidos al ejercicio 1. En esta sección y la que sigue, INTERSECCIONES DE RECTAS Y PLANOS, hay varias ilustraciones reales y tareas para que los alumnos comprendan los conceptos un tanto difíciles que se presentan.

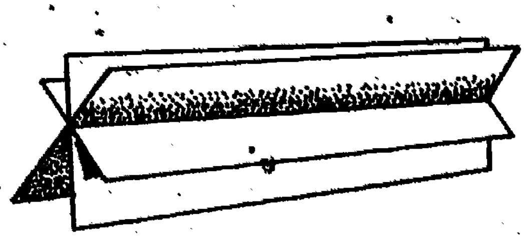
Para ampliar la explicación del concepto que se analiza en el ejercicio 1, elíjanse dos puntos de una pared, de la cubierta de un libro, de la caja de proyección, de una cara de la caja de proyección, de un trozo de cartulina, etc.

El objetivo de los ejercicios 3 al 10 es que los alumnos comprendan que por dos puntos, pasa un número infinito de planos (y por tanto, por una recta pueden pasar un número infinito de planos).

De nuevo, se necesitarán varios ejemplos. Si cada estudiante tiene varios trozos de cartulina para representar planos, puede disponerlos de manera que representen un número de planos pasando por una recta. Por ejemplo, en el ejercicio 4, podría colocarlos como se indica en la siguiente figura:



Otra manera de representar esta idea sería hacer una ranura en un trozo de cartulina. La ranura representa una recta. Por esta ranura, se pasan varios trozos de cartulina, disponiéndolos en diversas posiciones como se indica en la siguiente figura:



457

Los alumnos deben practicar repetidas veces con tarjetas que representen planos, a fin de familiarizarse con la idea de que "Por una recta pueden pasar más planos de los que pueden contarse. De lo contrario, simplemente, repetirán de memoria esta proposición, sin realmente entender la idea que implica.

En el ejercicio 11, se trata de explicar la idea de que tres puntos no alineados determinan un plano y sólo uno. Los alumnos pueden hacer varios ejercicios como los a) y b), para comprender que por tres puntos no alineados pasa un plano y solamente uno. Una pizarra montada en un pequeño eje de manera que pueda girarse es muy conveniente para ilustrar este concepto.

RECTAS Y PLANOS

Trabajo en grupo

Pensemos acerca de una recta y un plano. Supongamos que la recta tiene dos de sus puntos en el plano. Por ejemplo, considera los puntos A y B representados en esta página. La página sugiere parte de un plano que contiene a A y B.

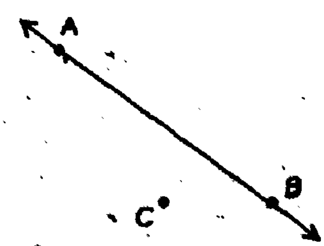
A•   •B

1. Contesta las siguientes preguntas cuidadosamente:

a) ¿Cuántas rectas contienen ambos puntos, A y B? (Una)

b) ¿Están todos los puntos de $\overleftrightarrow{AB}$ contenidos en un plano que contiene a A y B? (Sí)

c) Piensa en un tercer punto en el plano y llámalo C. Traza la recta CA. ¿Está $\overleftrightarrow{CA}$ en el plano? (Sí)



d) Dibuja la recta CB. ¿Está $\overleftrightarrow{CB}$ en el plano? (Sí)

Supongamos que se tienen dos puntos, A y B. Supongamos, también, que tenemos un plano llamado E. Si el punto A está en el plano E y el punto B está en el plano E, entonces la recta completa AB está en el plano E.

2. Completa correctamente el siguiente enunciado: (b)

Una recta que tiene dos de sus puntos contenidos en un plano

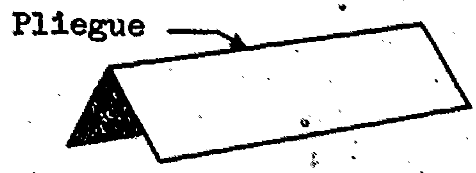
a) tiene algunos, pero no todos, sus puntos contenidos en ese plano.

b) tiene todos sus puntos contenidos en ese plano.

459

3. ¿Puede haber más de un plano que contenga a dos puntos dados? (25) Si hay más de un plano, da un ejemplo. (Hay más de dos que pueden contarse.) Recuerda que hay solamente una recta que contiene a esos dos puntos.

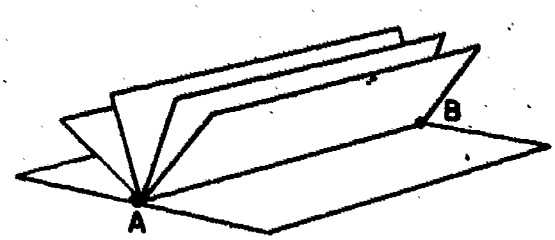
4. Pliega en dos un trozo de papel. Consideramos el pliegue como un segmento de recta. Coloca el papel plegado en tu escritorio de manera que el pliegue no lo toque. El papel forma una tienda de campaña.



¿Sugiere esto partes de dos planos que contienen al segmento de recta representado por el pliegue? (26) Si es así, indícalos.

5. Da un ejemplo de dos puntos y tres planos que pasan por los dos puntos. (admítase cualquier respuesta razonable)

6. Abre un libro de manera que veas las páginas, como en la figura de más adelante. El lomo del libro sugiere un segmento. Dále el nombre $\overline{AB}$.



E257

a) ¿Qué sugiere cada página? (Una parte de un plano)

b) ¿Pasa cada página por el lomo del libro? (Sí)

7. Elige dos puntos en el espacio. Ahora, ¿cuántos planos crees que contienen a los mismos dos puntos? (Más de los que pueden contarse.)

8. Elige un segmento de recta en el espacio. ¿Cuántos planos crees que contienen a este segmento de recta? (Más de los que pueden contarse.)

9. Elige una recta en el espacio. ¿Cuántos planos crees que contienen a esta recta? (Más de los que pueden contarse.)

10. En cada uno de los siguientes ejercicios, completa correctamente el enunciado, utilizando una de las frases dadas:

a) Dos puntos en el espacio están contenidos en (3)

1) solamente un plano.
2) muchos planos, pero los podríamos contar.
3) más planos de los que se pueden contar.

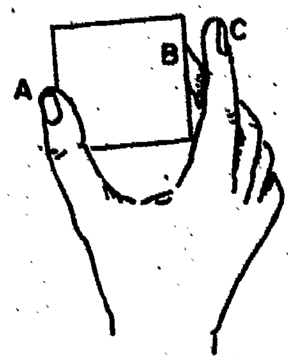
b) Un segmento de recta está contenido en (3)

1) solamente un plano.
2) muchos planos, pero los podríamos contar.
3) más planos de los que se pueden contar.

c) Una recta está contenida en (3)

1) solamente un plano.
2) muchos planos, pero los podríamos contar.
3) más planos de los que se pueden contar.

11. Hagamos, ahora, una observación muy importante. Sostén un pedazo de cartón por la mitad de los bordes del lado mediante el dedo pulgar y el mediano, según se muestra a continuación:



Sin mover el pulgar y el dedo mediano, es posible usar la otra mano para darle vueltas al cartón en muchas posiciones mostrando muchos planos que pasan por $\overleftrightarrow{AB}$.

a) Ahora, dále vueltas al cartón hasta que toque la yema de tu dedo índice. Considera la yema de este dedo como el punto C.

El cartón representa ahora un plano que pasa por los puntos A, B y C.

¿Parece haber otro plano que pasa por los puntos A, B, y C? (no)

Esto sugiere que por tres puntos no alineados, pasa solamente un plano. Consideraremos esto como un hecho geométrico.

b) Piensa en una puerta representando parte de un plano y las bisagras representando dos puntos. A medida que la puerta se abre, ¿sugiere muchos planos pasando por estos puntos? (sí)

Ahora, apoya la yema de un dedo contra la puerta. La yema de tu dedo representa un tercer punto que mantiene la puerta abierta en una posición.

Esto sugiere otra vez que por tres puntos que no están en una recta, pasa solamente un plano.

12. Repaso

a) Un plano contiene más puntos y más rectas de las que se pueden contar.

b) Si dos puntos de una recta están en un plano, la recta completa está contenida en el plano.

c) Por dos puntos, pasan más planos de los que se pueden contar.

d) Por tres puntos que no están en una recta, pasa un plano y solamente uno.

INTERSECCIONES DE RECTAS Y PLANOS

Objetivo: Explicar las siguientes ideas:

1. Si dos rectas distintas de un plano se cortan, su intersección es un punto.
2. Si dos planos distintos en el espacio se cortan, su intersección es una recta.
3. Si una recta y un plano se cortan, la intersección es o bien un punto o la recta completa.

Materiales: Cartulina o trozos de papel que puedan utilizarse para representar planos, lápiz, alambre, varillas o pajas que puedan utilizarse para representar rectas; una caja de proyección.

Vocabulario: Intersección, reunión

Sugerencias para la enseñanza:

La idea de intersección de rectas y planos puede ser difícil para los alumnos y para los adultos. El uso amplio de objetos reales resultará de gran utilidad.

En los ejercicios 1 al 3 de la sección Trabajo en grupo, se repasan los conceptos de reunión e intersección. Los ejercicios 4 al 7 muestran que la intersección de dos rectas es un punto. El ejercicio 8 muestra que la intersección de dos rectas puede ser el conjunto vacío, si las rectas son paralelas o alabeadas.

La caja de proyección sirve para ilustrar y explicar estas ideas con claridad.

El ejercicio 9 muestra que la intersección de una recta y un plano

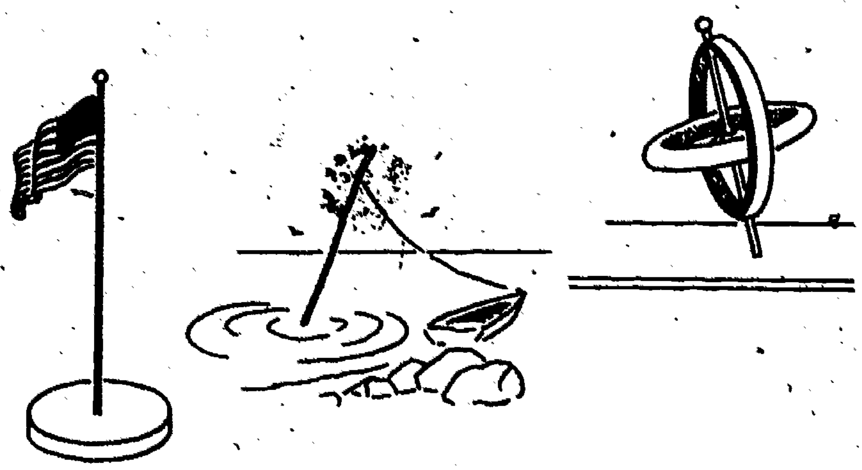
a) puede ser un punto. (Desde luego, el lápiz no necesariamente tiene que ser perpendicular a la hoja de papel.)

b) puede no contener punto alguno. (El lápiz y la pizarra están en planos paralelos.)

c) nunca puede consistir en dos puntos solamente.

d) puede consistir en varios puntos. (La recta puede estar en el plano.)

Dibujos como los siguientes podrían servir de ayuda para representar la intersección de una recta y un plano:



El ejercicio 10 muestra que la intersección de dos planos:

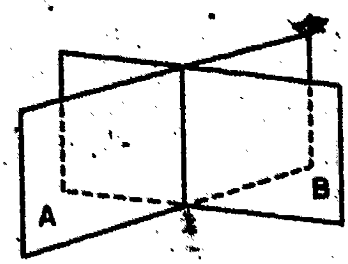
a) no puede ser un solo punto. (No es posible que dos planos se intersequen de manera que su intersección sea un punto solamente.)

b) no puede consistir en dos puntos.

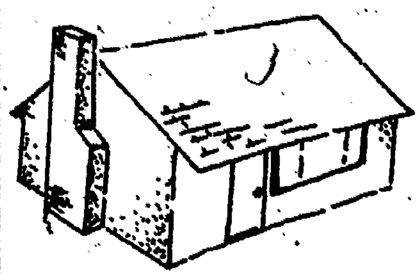
c) puede consistir en más de dos puntos. (La intersección de dos planos siempre será una recta, a menos que los planos sean paralelos, en cuyo caso la intersección será el conjunto vacío.)

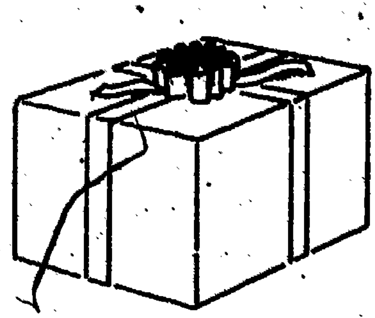
d) puede no contener punto alguno.

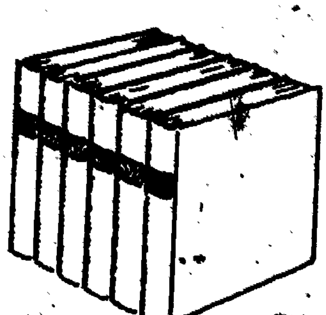
Para mostrar la parte c), puede hacerse una ranura en una tarjeta A y pasar por dicha ranura otra tarjeta B, hasta la mitad. Se ve la ranura representa una recta y que la tarjeta B puede pasarse por esta ranura en varias posiciones diferentes. La intersección del plano A y el plano B es una recta.



Dibujos como los siguientes pueden servir de ayuda para mostrar que la intersección de dos planos es una recta:







INTERSECCIONES DE RECTAS Y PLANOS

Trabajo en grupo

¿Recuerdas lo que significa la intersección de dos conjuntos?

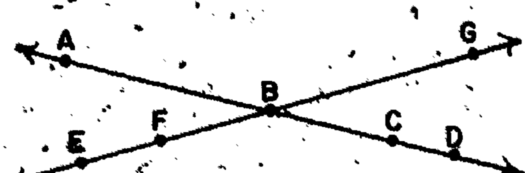
1. El conjunto A = {2, 3, 5, 9}.
El conjunto B = {1, 2, 3, 4, 9}. La intersección de A y B es {2, 3, 9}.

2. El conjunto R = {M, A, R, Y}.
El conjunto S = {C, A, N, D, Y}. La intersección de R y S es {A, Y}. La reunión de R y S es {M, A, R, Y, C, N, D}.

3. El conjunto E = {5, 6, 7, 8}.
El conjunto F = {9, 10, 11, 12}. La intersección de E y F es { }. (El conjunto vacío)
La reunión de E y F es {5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}.

Sabes que una recta es un conjunto de puntos y que un plano es un conjunto de puntos. Determinemos la intersección de dos rectas.

Observa los puntos nombrados en las rectas de la figura siguiente:



4. ¿Qué puntos de $\overleftrightarrow{AC}$ están marcados? ¿Y de $\overleftrightarrow{EG}$?
(A, B, C, D) (E, F, B, G)

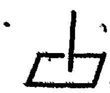
5. ¿Hay algún punto que esté en ambas rectas? (sí)

6. ¿Cuál es la intersección de $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{EG}$? (El punto B)
¿Cuál es la intersección de $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BG}$? (El punto B)
¿Cuál es la intersección de $\overrightarrow{FE}$ y $\overrightarrow{BG}$? (El conjunto vacío)

7. ¿Cuántos puntos hay en la intersección de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{EF}$?
(uno)

8. ¿Puedes disponer dos lápices de modo que representen rectas tales que ningún punto esté en ambas rectas? (Sí)
¿Puedes hacer ésto de más de una manera? (Sí. Los lápices pueden sostenerse de manera que sean paralelos o alabeados.)

9. Utiliza una tarjeta para representar un plano y un lápiz para representar una recta. Indica si puedes disponerlos de manera que su intersección consiste en:

a) un punto. (Sí, por ejemplo, de esta manera: , o de esta otra: .)

b) ningún punto. (Sí, sosteniéndolos en posición paralela)

c) solamente dos puntos. (No)

d) muchos puntos. (Sí, sosténgase el lápiz de manera que esté en el plano.)

10. Utiliza dos tarjetas para representar dos planos. Indica si puedes sostenerlas de manera que la intersección de los planos que representan consista en

a) solamente un punto. (No)

b) solamente dos puntos. (No)

c) más de dos puntos. (Sí)

d) ningún punto. (Sí, si son paralelos.)

11. Determina cuáles de las siguientes figuras muestran que:

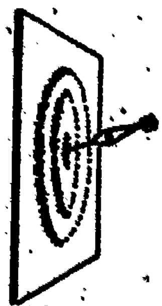
a) la intersección de una recta y un plano es un punto.
(1,2,5)

b) la intersección de una recta y un plano es una recta..
(1,2,3,4,5)

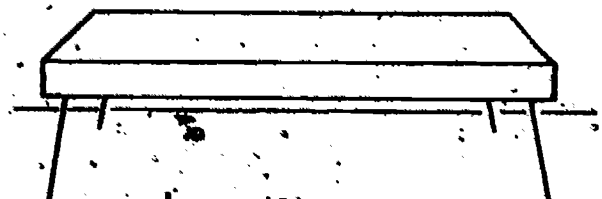
c) la intersección de dos planos es una recta. (2,5)

d) la intersección de dos rectas es un punto. (1,2,3,4,5,6)

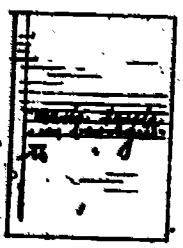
e) la intersección de dos rectas es el conjunto vacío.
(1,2,3,4,5,6)



(1)

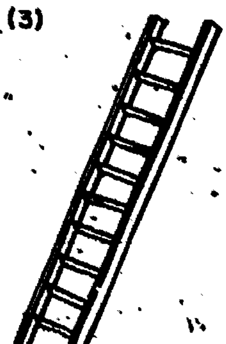


(2)

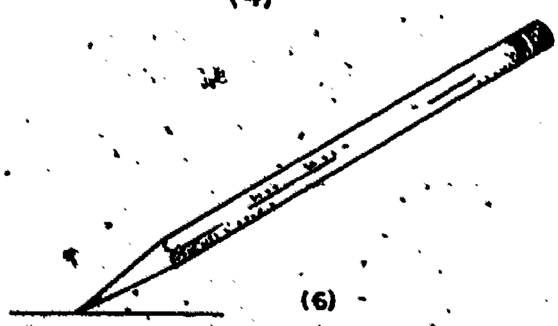


(3)

(4)



(5)



(6)

Conjunto de problemas 6

1. Marca un punto en tu hoja de papel y llámalo A. Traza dos rectas diferentes por A.

¿Cuál es la intersección de las dos rectas? (El punto A)

2. Marca dos puntos diferentes en tu hoja de papel y llámalos B y C. ¿Puedes trazar dos rectas diferentes, que pasen ambas por B y C? (No) ¿Puedes trazar una recta que pase por B y C? (Sí)

3. ¿Qué palabra hará lo siguiente un enunciado cierto? Si dos rectas diferentes de un plano se cortan o intersecan su intersección es (un) punto.

4. ¿Puedes hacer un dibujo para representar dos rectas cuya intersección parezca ser el conjunto vacío? (Sí) Si es así, dibújalo. (Las rectas pueden ser paralelas o alabeadas.)

5. Observa las paredes, el piso y el techo de tu salón de clase. ¿Cuáles representan pares de planos que se cortan o intersecan? (a, d)

a) la pared del lado y la pared de en frente (Sí)

b) el piso y el techo (No)

c) la pared de atrás y la pared de enfrente (No)

d) la pared de enfrente y el techo (Sí)

6. ¿Cuáles de las paredes, piso y techo representan planos que no se cortan o intersecan? (b, c)

   a) el piso y la pared lateral

   b) el piso y el techo

   c) la pared de atrás y la pared de enfrente

   d) la pared de enfrente y el techo

7. Imagínate que has doblado una hoja de papel y la has abierto para formar una tienda de campaña, como lo hicimos antes. ¿Sugiere la hoja doblada dos planos que se intersecan? (sí) ¿En qué consiste la intersección en este caso? (El pliegue que representa una recta.)

8. Completa el siguiente enunciado: Dos planos que se intersecan en el espacio se intersecan en (una recta).

9. Si tres puntos diferentes de una recta están en un plano, ¿qué puedes decir acerca de la recta y el plano? (Toda la recta está en el plano.)

10. Repaso

    Hemos aprendido las siguientes propiedades:

    a) Si dos rectas diferentes en un plano se cortan o intersecan, su intersección es un punto.

    b) Si dos planos diferentes en el espacio se cortan o intersecan, su intersección es una recta.

    c) Si una recta y un plano se cortan, la intersección es o un punto o la recta completa.

CURVAS CERRADAS SIMPLES

Objetivo: Explicar que una curva cerrada simple es un camino con las propiedades siguientes:

1. Todos sus puntos están en un plano.
2. Si trazamos el camino, al final volveremos al punto de partida.
3. El camino no se interseca a sí mismo; es decir, al recorrer el camino, se pasa una sola vez por cada punto (salvo el punto de partida).

Materiales: Papel, lápiz, tiza

Vocabulario: Curva cerrada, curva cerrada simple, frontera

Sugerencias para la enseñanza:

En el ejercicio 2 de la sección <u>Trabajo en grupo</u>, se repasa la idea de que un segmento de recta es una curva; desde luego, una curva especial.

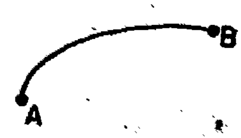
Para el ejercicio 3, los alumnos presentarán diversos dibujos. Quizás, algunos dibujen curvas cerradas simples. Estos dibujos podrían utilizarse como base para los ejercicios 4 y 5. Quizás, el maestro quiera dibujar en la pizarra varias curvas cerradas, algunas de las cuales sean curvas cerradas simples. Entonces, los alumnos pueden determinar cuáles son las curvas cerradas simples.

A los estudiantes, les gustará hacer figuras que representen curvas cerradas simples, como las siguientes:

CURVAS CERRADAS SIMPLES

Trabajo en grupo

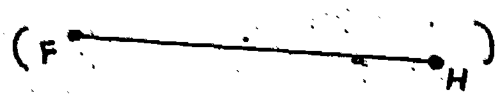
En la sección sobre curvas, trazamos un camino de un punto A a un punto B. Llamamos una <u>curva</u> el conjunto de puntos por los cuales pasó la punta del lápiz.



1. Marca dos puntos en tu hoja de papel y llámalos T y R. Traza una representación de una curva desde T a R.

(T R Hay varias respuestas posibles.)

2. Marca dos puntos F y H. Dibuja $\overline{FH}$. También llamamos a $\overline{FH}$ una curva.



3. a) Marca un punto K. Traza una curva que empiece en K y regrese a K, recorriendo un camino. ¿Podrías trazar la curva utilizando segmentos de recta? (Sí)

Puesto que tu curva empieza y termina en el mismo punto, es una <u>curva cerrada</u>.

b) Marca un punto diferente en la curva que contiene a K y llámalo M. ¿Puedes empezar en M y trazar la curva y regresar a M? (Sí) ¿Trazaste cada punto de la curva? (Sí)

4. Marca un punto A y un punto B. Traza una curva que empieza en A, pasa por B y, luego, regresa a A sin cortarse a sí mismo. (Las sugerencias para este problema y para el problema 5 se presentan como el ejercicio 8 de la página 468, para evitar dar aquí la respuesta.)

La curva que pasa A y B se llama una <u>curva cerrada simple</u>. Empieza en un punto y regresa a él, sin intersecarse a sí misma. Todos los puntos de una curva cerrada simple están en el mismo plano.

5. Marca un punto C y un punto D. Traza una curva que empieza en C, pasa dos veces por D y, luego, regresa a C.

Esta curva que pasa por C y D no es una curva cerrada simple, porque se interseca a sí misma en D.

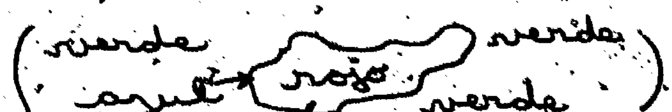
6. La curva indicada a continuación no se interseca a sí misma. ¿Por qué <u>no</u> es una curva cerrada simple? (No es cerrada; es decir, no vuelve al punto de partida.)

7. ¿Es la figura que sigue una curva cerrada simple? (No) ¿Por qué? (No empieza en un punto y vuelve a este punto sin intersecarse a sí misma.)

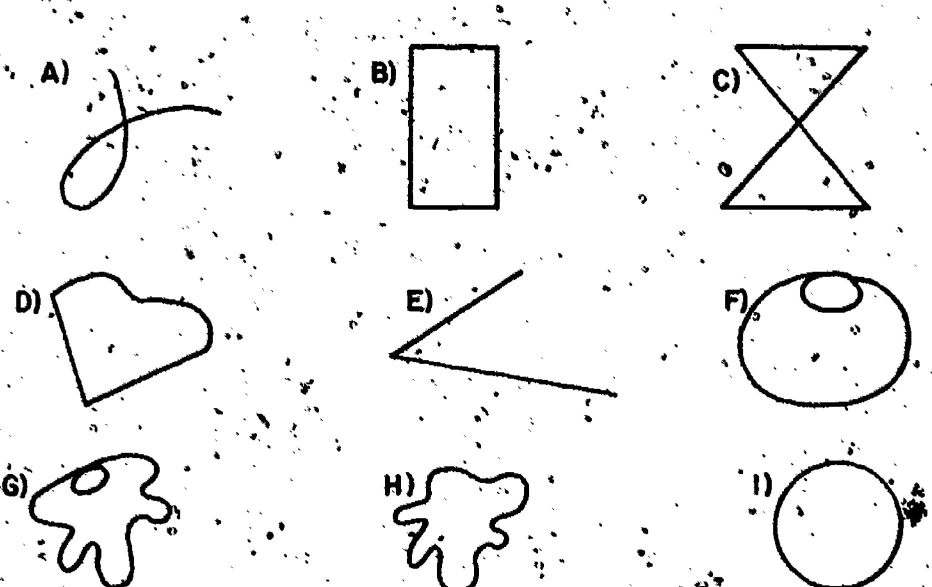
8. Un marco alrededor de un cuadro sugiere una curva cerrada simple. Menciona algunas otras cosas que sugieren curvas cerradas simples. (Una cerca alrededor de un terreno, una rueda de bicicleta, etc.)

Conjunto de problemas 7

1. Dibuja una curva cerrada simple en tu hoja de papel. Dibújala con un lápiz azul. Colorea de rojo la parte del plano dentro de la curva. Colorea de verde la parte del plano fuera de la curva. (¿Puedes colorear el plano completo?) (No)

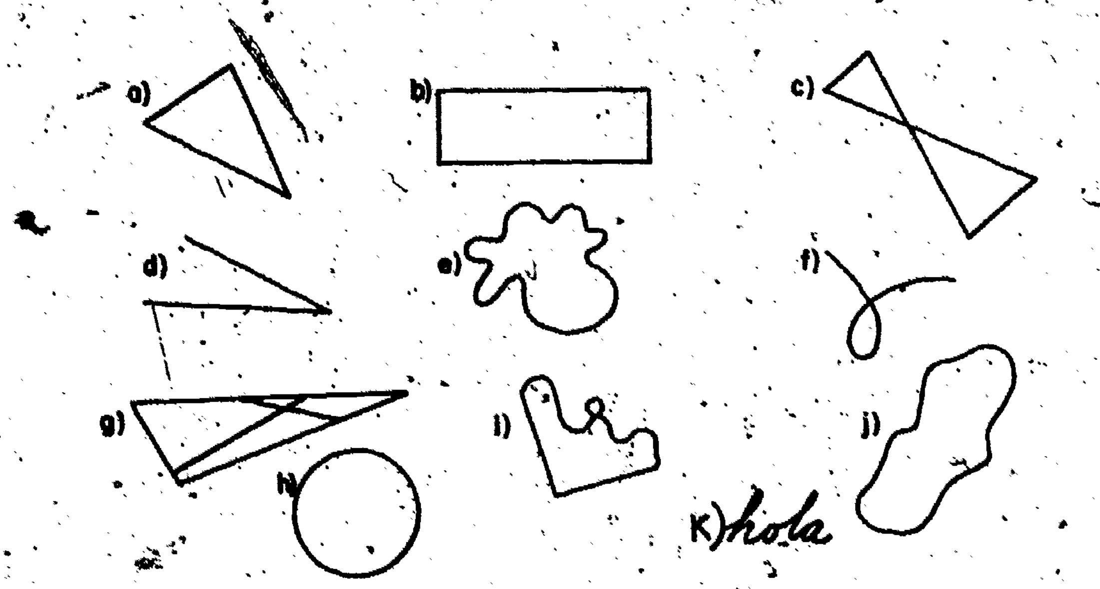


2. Di cuáles de las siguientes son representaciones de curvas cerradas simples: (B, D, H, I)



475

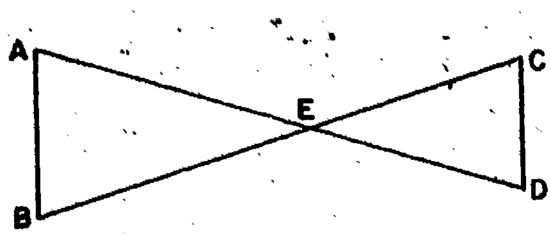
3. ¿Cuáles de las siguientes representaciones no son curvas cerradas simples? (c, d, f, g, i, k)



4. ¿Representan curvas cerradas simples las fronteras de la mayor parte de los estados en un mapa de los Estados Unidos? (sí)

5. Nombra un estado cuya frontera en el mapa de los Estados Unidos no representa una curva cerrada simple. Nombra otro estado como ése. (Por ejemplo, Michigan)

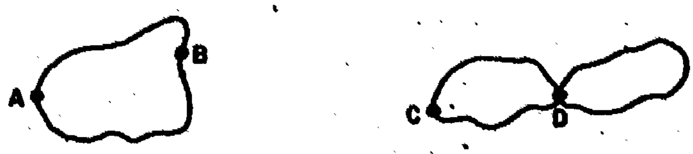
6. ¿Representa la figura que sigue una curva cerrada simple? (no)



¿Representa la reunión de curvas cerradas simples? (sí)
¿Cuántas curvas cerradas simples representa? (dos)

7. Observa las curvas en el ejemplo 3. Da otros nombres para algunas de las curvas cerradas simples. (a es un triángulo; b es un cuadrilátero o un rectángulo; h parece una circunferencia.)

8. Las curvas para los ejemplos 4 y 5 de la página E266, ¿se ven así?



4??

POLIGONOS

Objetivo: Explicar que un polígono es un tipo especial de curva cerrada simple, es decir, es la reunión de varios segmentos de recta.

Materiales: Papel, lápiz, regla, tiza

Vocabulario: Polígono, cuadrilátero

Sugerencias para la enseñanza:

Hay un paso natural de la sección anterior CURVAS CERRADAS SIMPLES a esta sección.

Permítase a los estudiantes que representen en la pizarra sus ideas sobre curvas cerradas simples y expliquen a la clase por qué creen que sus representaciones son curvas cerradas simples. Pídase que dibujen algunas figuras que no representen curvas cerradas simples y expliquen por qué no lo son.

1. En este momento, introdúzcase la idea de que una curva cerrada simple, formada por segmentos de rectas, se llama un polígono. Quizás, sea conveniente explicar a la clase que la palabra polígono se compone de poli, que significa varios y gono, que significa ángulo.

2. Un polígono formado por tres segmentos de recta se llama un triángulo. (Tri que significa tres y la palabra ángulo.) Los estudiantes se interesarán en dar otros ejemplos de palabras que empiezan con tri y explicar sus significados. Algunos ejemplos son: triciclo, trípode, trilogía, etc.

3. Un polígono formado por cuatro segmentos de recta es un cuadrilátero. Una vez más, el maestro puede aclarar el significado de la palabra cuadrilátero, asociándola con palabras del vocabulario de los estudiantes como cuarto y cuarteto.

En el ejercicio 4 de la sección Trabajo en grupo, quizás, el maestro desee también señalar varios objetos en el salón, como libros, cajas, marcos de cuadros, etc., que pueden representar polígonos formados por segmentos de recta.

POLIGONOS

Trabajo en grupo

1. Traza una curva cerrada simple que sea la reunión de

a) tres segmentos de recta. ¿Cuál es un nombre para esta figura? (un triángulo)

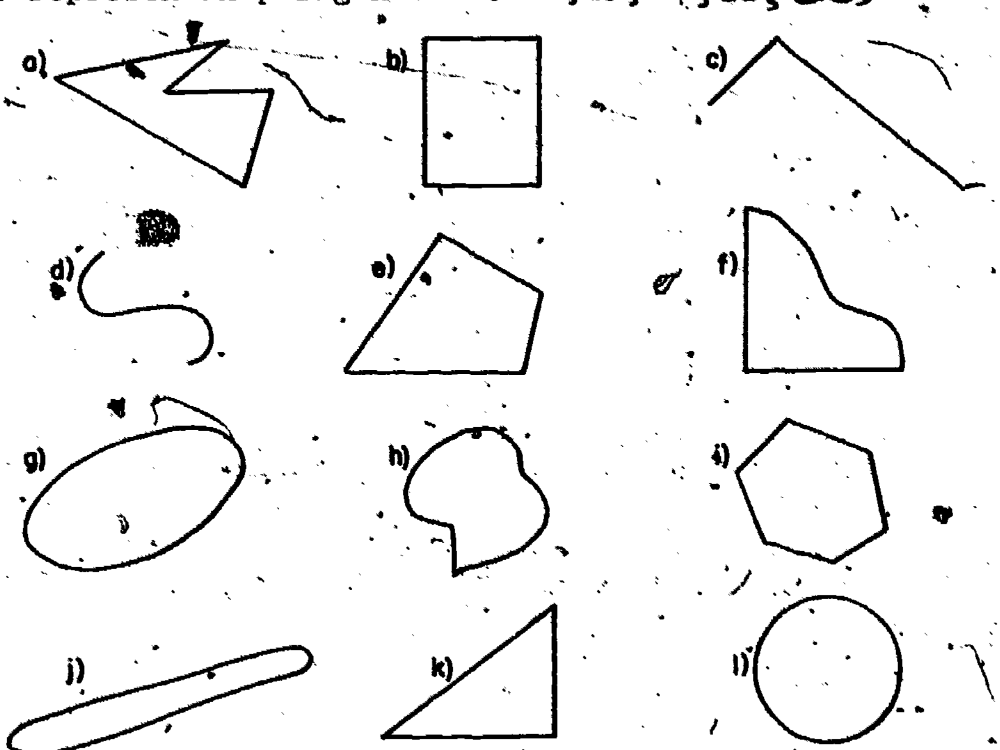
b) cuatro segmentos de recta. ¿Cuál es un nombre para esta figura? (un cuadrilátero)

c) cinco segmentos de recta. ¿Cuál es un nombre para esta figura? (un pentágono)

2. ¿Puedes trazar una curva cerrada simple con dos segmentos de recta? (No) ¿Por qué? (Porque no empieza en un punto y vuelve a este punto sin intersecarse a sí mismo.)

Una curva cerrada simple que consiste en la reunión de segmentos de recta se llama un polígono.

3. ¿Cuáles de las siguientes figuras representan curvas cerradas simples? (Todas con la excepción de c y d.) ¿Cuáles representan polígonos? (a, b, e, i, k)



4. Describe algunos segmentos de recta en tu salón de clases que forman polígonos. (marcos de retratos, marcos de puerta, marcos de ventanas, etc.)

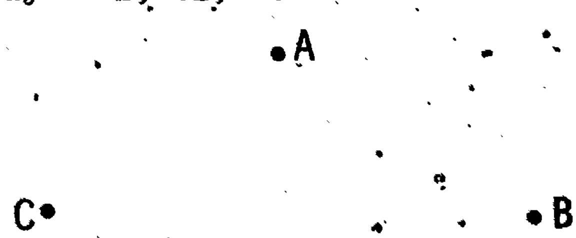
Un polígono que es la reunión de tres segmentos de recta es un <u>triángulo</u>.

Un polígono que es la reunión de cuatro segmentos de recta es un <u>cuadrilátero</u>.

5. ¿Cuáles de las figuras en el ejemplo 3 representan triángulos? (a)

6. ¿Cuáles de las figuras en el ejemplo 3 representan cuadriláteros? (b, c)

7. Marca tres puntos en tu hoja de papel como los siguientes; dibuja $\overline{AB}$, $\overline{CB}$, $\overline{AC}$:



a) ¿Representa la figura un polígono? (sí)

b) ¿Representa la figura un triángulo? (sí)

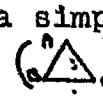
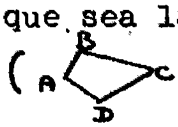
c) ¿Qué palabras deberían completar este enunciado?

Un triángulo está formado por ___(tres)___ segmentos de recta y estos segmentos de recta tienen ___(tres)___ extremos diferentes.

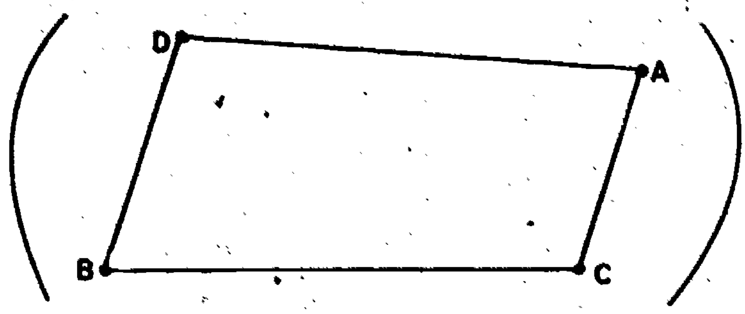
Generalmente, denotamos los extremos de los segmentos en un triángulo con letras mayúsculas, tales como A, B, C, y usamos el nombre o símbolo $\triangle ABC$. Otro nombre igualmente bueno es $\triangle BAC$.

8. ¿Puedes dar otro nombre para el triángulo?
   ($\triangle BCA$ o $\triangle ACB$
   $\triangle CAB$ o $\triangle CBA$)

Conjunto de problemas 8

1. a) Dibuja la figura de una curva cerrada simple que sea la reunión de tres segmentos de recta. ( y otro triángulo cualquiera)
   b) Marca los extremos de los tres segmentos de recta.
   c) ¿Cuántos extremos diferentes hay? (3 tres)
   d) ¿Cuáles son dos nombres para esta clase de curva cerrada simple? (Triángulo, polígono)
2. a) Dibuja una representación de una curva cerrada simple que sea la reunión de cuatro segmentos de recta.
   ( y otro cuadrilátero cualquiera.)
   b) Marca los extremos de los cuatro segmentos de recta. ¿Cuántos extremos hay? (Cuatro)
   c) ¿Cuáles son dos nombres para ésta clase de curva cerrada simple? (Cuadrilátero, polígono)
3. a) Dibuja una representación de una curva cerrada simple que sea la reunión de cinco segmentos de recta.
   ()
   b) ¿Cuál es un nombre para esta clase de curva cerrada simple? (Polígono) (su nombre especial es pentágono.)

4. Sitúa en tu hoja de papel puntos como los que aparecen más adelante. Dibuja $\overline{AD}$, $\overline{DB}$, $\overline{CB}$ y $\overline{AC}$.



5. ¿Cuáles de los siguientes son nombres para la figura anterior? (a, b, d)

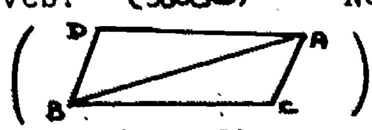
   a) curva cerrada simple

   b) polígono

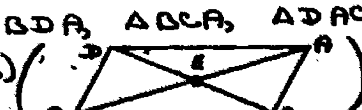
   c) triángulo

   d) cuadrilátero

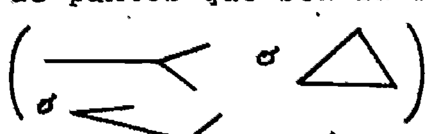
6. Dibuja $\overline{AB}$ en la figura correspondiente al ejemplo 4. ¿Cuántos triángulos ves? (dos) Nómbralos. ($\triangle BDA$, $\triangle BCA$)



7. Ahora, dibuja $\overline{CD}$ en la misma figura. Marca la intersección de $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$. Llámala E. ¿Cuántos triángulos ves ahora? (ocho) Nómbralos. ($\triangle BDA$, $\triangle BCA$, $\triangle DAC$, $\triangle DBC$, $\triangle BDE$, $\triangle EDA$, $\triangle EAC$, $\triangle ECB$)



8. Dibuja un conjunto de puntos que sea la reunión de tres segmentos de recta. Dibuja una curva cerrada que sea la reunión de tres segmentos de recta. ¿Pueden ser diferentes estos dibujos? (sí) ¿Pueden ser estos dibujos los mismos? (sí)



483

9. ¿Podría un polígono tener exactamente 8,999 lados? (Sí)

10. ¿Podría un polígono ser la reunión de dos segmentos de recta y parte de la letra O? (No, un polígono es una curva simple que es la reunión de segmentos de recta solamente.)

11. ¿Es la letra O un polígono? (No, la letra O no es la reunión de segmentos de recta.)

CIRCUNFERENCIAS

Objetivo: Explicar que una <u>circunferencia</u> es una curva cerrada simple con todos sus puntos a la misma distancia de un punto llamado centro y con todos sus radios de la misma longitud.

Materiales: Lápices, papel, compás o cuerda, regla, pizarra, tiza y otros objetos que sirvan para representar circunferencias, como ruedas, monedas, etc.

Vocabulario: Exactitud, compás, circunferencia, centro, radio.

Sugerencias para la enseñanza:

En los ejercicios 1 al 7, se explica la idea de circunferencia. Mientras mayor sea el número de puntos que se marquen, mejor será la representación de la circunferencia.

En el párrafo que precede al ejercicio 8, se dan instrucciones para el uso del compás. Los estudiantes de cuarto grado necesitan práctica para aprender a usarlo correctamente.

Debe darse a los niños la oportunidad de dibujar varias circunferencias de diversos tamaños. Insístase en que éstas son solamente representaciones de circunferencias. La explicación del uso del compás debe incluir los siguientes puntos.

1. El compás debe sostenerse por la parte superior con el dedo índice y el pulgar.
2. Inclínese un poco el compás en la dirección que se va a dibujar.
3. El compás debe manipularse sin hacer mucha presión.
4. La circunferencia debe dibujarse en un solo movimiento.

Quizás, algunos alumnos adquieran gran destreza en el uso del compás. Tal vez, quieran practicar, haciendo varios modelos para decorar el salón como parte de un proyecto artístico.

E275

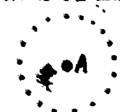
CIRCUNFERENCIAS

Trabajo en grupo

1. Marca un punto en tu hoja de papel y denótalo con la letra A. Marca otro punto a dos pulgadas del punto A.

2. Marca muchos otros puntos que estén a dos pulgadas del punto marcado A.

3. Marca algunos puntos más que estén a dos pulgadas del punto marcado A. Asegúrate de que están distribuidos en todas direcciones alrededor del punto A.



4. ¿Sugieren los puntos que marcaste una curva cerrada simple? (sí) (No uses el punto marcado A.) Si no, marca algunos puntos más que estén a dos pulgadas de A. Dibuja ahora una curva cerrada simple que pase por esos puntos.

5. Marca algunos más en tu dibujo que también estén a dos pulgadas del punto marcado A.

6. ¿Están estos nuevos puntos en la representación de la curva cerrada simple que dibujaste? Si no, modifica tu curva cerrada simple para que estos nuevos puntos estén en ella.
(sí, sin embargo, hay varias respuestas posibles debido a medidas o dibujos inexactos.)

7. ¿Sugiere tu dibujo una curva cerrada simple que tiene un nombre especial? (sí)

E276

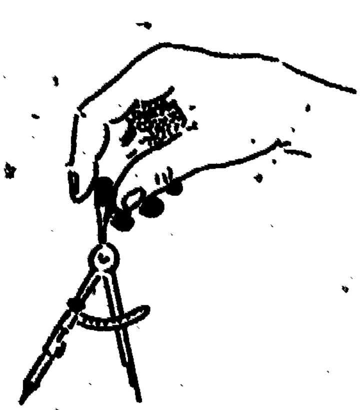
El nombre de la curva es <u>circunferencia</u>.

Una circunferencia no puede representarse con absoluta exactitud dibujando con un lápiz y una regla. Se necesita un compás.

La manera más fácil de dibujar una circunferencia con un compás es tomar el compás entre los dedos pulgar e índice, por la charnela. Si presionas suavemente, el compás dibujará mejor. Presiona un poco más fuerte en la punta aguda del compás que en el portalápiz.

Cuando empieces a dibujar una circunferencia, no levantes el compás del papel hasta que la circunferencia esté terminada. No olvides inclinar el compás en la dirección en que estás dibujando la circunferencia.

Practica el uso correcto de tu compás.



8. Instrucciones para dibujar una circunferencia.

a) Marca un punto en tu hoja de papel y llámalo B. B no pertenecerá a la circunferencia.

b) Coloca tu compás de manera que la punta metálica esté a dos pulgadas de la punta del lápiz.

c) Apoya la punta metálica en el punto marcado B. Ahora, mueve la punta del lápiz de manera que se dibuje una curva cerrada simple. No dejes que la distancia entre la punta del lápiz y la punta del metal varíe, mientras estés dibujando.

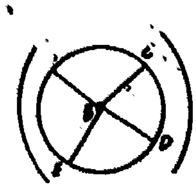
Has dibujado una representación de una circunferencia.

El punto marcado B se llama el <u>centro</u> de la circunferencia. El punto B <u>no</u> es parte de la circunferencia.

9. Marca dos puntos en la circunferencia. Llámalos puntos C y D. Dibuja una representación de $\overline{BC}$.

B representa el centro de la circunferencia y C representa un punto de la misma.

$\overline{BC}$ se llama un <u>radio</u> de la circunferencia.



10. Dibuja una representación de $\overline{BD}$ en tu dibujo. $\overline{BD}$ es, también, un radio de la circunferencia. ¿Por qué? (Sus extremos están en el centro (B) y en un punto de la circunferencia (D).)

a) ¿Puedes dibujar otro radio? (sí) Si es así, hazlo. Llámalo $\overline{BE}$.

b) ¿Puedes dibujar otro radio más? (sí) Si es así, hazlo.

c) ¿Cuántos radios tiene una circunferencia? (más de los que pueden contarse.)

11. Son ciertos los enunciados siguientes? Utiliza la representación para ayudarte a decidir.

a) Una circunferencia tiene todos sus puntos a la misma distancia de un punto del interior que se llama el centro. (cierto)

b) B representa el centro de esta circunferencia. (cierto)

c) Todos los radios de una circunferencia tienen la misma longitud. (cierto)

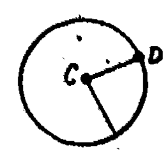
d) $\overline{BD}$ es un radio de la circunferencia. (cierto)

e) $\overline{BC}$ y $\overline{BE}$ son, también, radios de la circunferencia. (cierto)

Conjunto de problemas 9

1. a) Marca un punto en tu hoja de papel y llámalo C. Dibuja una circunferencia con C como centro.

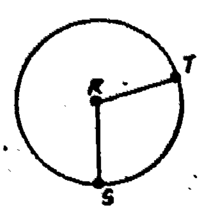
   b) Dibuja un radio de tu circunferencia.



   c) Marca un punto de tu circunferencia y llámalo D. Dibuja $\overline{CD}$.

   d) $\overline{CD}$ es un (radio) de la circunferencia.

2. Examina esta figura.

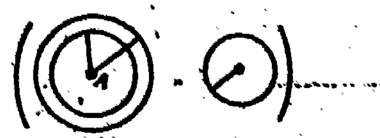


   a) Dále nombre al centro de la circunferencia. (R)

   b) Dále nombre a un radio de la circunferencia. ($\overline{RS}$ y $\overline{RT}$)

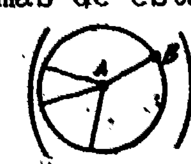
   c) ¿Qué es cierto acerca de las longitudes de $\overline{RT}$ y $\overline{RS}$? (son iguales.)

3. Marca dos puntos que disten aproximadamente dos pulgadas entre sí. Llámalos A y B.
   a) Dibuja una circunferencia con centro en el punto A. (Hay varios dibujos posibles.)
   b) Dibuja una circunferencia distinta con el punto A como centro.
   c) Dibuja una tercer circunferencia con el punto B como centro.
   d) Dibuja un radio de cada circunferencia.



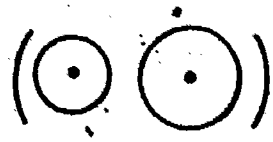
4. Marca dos puntos R y S que disten aproximadamente dos pulgadas entre sí.
   a) Dibuja una circunferencia con centro en el punto R y que pase por el punto S.
   b) Dibuja una circunferencia con centro S y que pase por R.
   c) ¿Es $\overline{RS}$ un radio de ambas circunferencias? (Sí)

5. Marca dos puntos A y B en tu hoja de papel.
   a) Dibuja una circunferencia con centro A y que tenga $\overline{AB}$ como radio.
   b) Dibuja tres radios más de esta circunferencia.

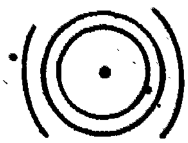


6. Dibuja dos circunferencias diferentes de manera que un radio de una tenga la misma longitud que un radio de la otra.

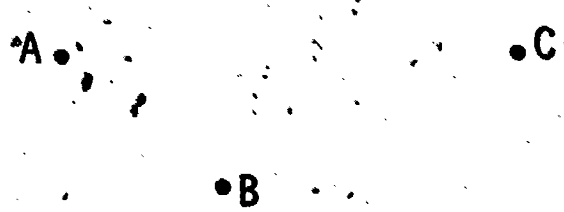
7. Dibuja dos circunferencias diferentes de manera que una tenga un radio de longitud diferente al de la otra.



8. Dibuja dos circunferencias diferentes con el mismo centro.



9. Marca los puntos del conjunto {A, B, C} en tu hoja de papel.



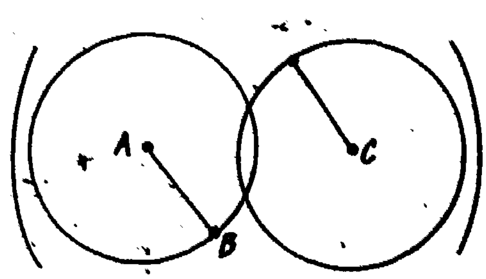
a) Dibuja $\overline{AB}$.

b) Dibuja la circunferencia con centro A y que pase por B.

c) Dibuja una circunferencia con centro C y un radio cuya longitud sea igual a la longitud de $\overline{AB}$.

d) Dibuja un radio de la circunferencia que acabas de construir.

e) ¿Es la longitud de este radio igual a la longitud de $\overline{AB}$? (sí)



10. a) ¿Podría la intersección de dos circunferencias ser el conjunto vacío? (Sí) Dibuja una figura para verificar tu respuesta. ()

b) ¿Podría la intersección de dos circunferencias ser un conjunto que contenga un punto solamente? (Sí) Dibuja una figura para verificar tu respuesta. ()

c) ¿Podría la intersección de dos circunferencias ser un conjunto que contenga exactamente dos puntos? (Sí) Dibuja una figura para verificar tu respuesta. ()

11. a) ¿Podría la intersección de una circunferencia y una recta ser el conjunto vacío? (Sí) Dibuja una figura para verificar tu respuesta. ()

b) ¿Podría la intersección de una circunferencia y una recta ser un conjunto que contiene un punto solamente? (Sí) Dibuja una figura para verificar tu respuesta.

()

c) ¿Podría la intersección de una circunferencia y una recta ser un conjunto que contiene dos puntos solamente? (Sí) Dibuja una figura para verifica tu respuesta.

()

PROBLEMA DIFICIL

12. a) ¿Podría la intersección de dos circunferencias ser un conjunto que contiene tres puntos solamente? (No. Si las circunferencias tienen tres puntos comunes, entonces las circunferencias son idénticas y, por tanto, todos sus puntos son puntos comunes.)

b) ¿Podría la intersección de una circunferencia y una recta ser un conjunto que contiene 3 puntos solamente? (No)

REGIONES DE UN PLANO

Objetivo: Estudiar los conceptos de interior y exterior de una curva cerrada simple; explicar que la reunión de una curva cerrada simple y su interior se llama una región.

Materiales: Papel, lápiz, regla, compás, tiza

Vocabulario: Región, interior, exterior, región triangular, región circular

Sugerencias para la enseñanza:

La explicación en el Texto del estudiante contiene detalles suficientes y puede seguirse.

En los ejercicios 1 al 7, se explican las ideas de interior y exterior. En los ejercicios 1 al 3, realmente, hablamos acerca de tres conjuntos de puntos: el triángulo es un conjunto de puntos, su interior es un conjunto de puntos y su exterior es un conjunto de puntos. En los ejercicios 4 al 6 relacionados con la circunferencia, de nuevo consideramos tres conjuntos de puntos. En el ejercicio 7, se comprueba si los alumnos han comprendido qué son los tres conjuntos de puntos.

En los ejercicios 8 y 9, se explica que la reunión de una curva cerrada simple y su interior se llama una región.

En el problema 2b del Conjunto de problemas 10, quizás, los alumnos no puedan contestar uno a uno que la parte en cuestión se llama una región circular. Se espera que algunos estudiantes, sin embargo, puedan hacerlo. En los ejercicios 8, 9 y 11, utilícese el término región circular.

E282

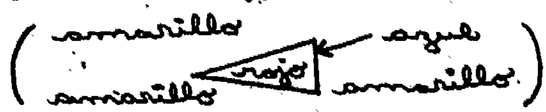
REGIONES DE UN PLANO

Trabajo en grupo

1. Dibuja una representación de un triángulo. Traza el triángulo con un lápiz azul.

2. Colorea de rojo la parte del plano dentro del triángulo. El conjunto de puntos que coloreaste de rojo se llama el <u>interior</u> del triángulo.

3. Colorea de amarillo la parte de la hoja exterior al triángulo. Este conjunto de puntos que coloreaste de amarillo es parte del <u>exterior</u> del triángulo.

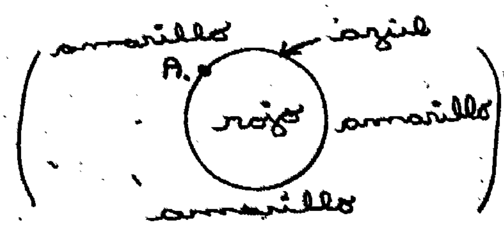


El conjunto de puntos del triángulo <u>no</u> está en el interior y <u>no</u> está en el exterior del triángulo.

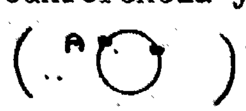
4. Usa tu compás para dibujar una circunferencia. Traza la circunferencia con un lápiz azul.

5. Colorea de rojo el interior de la circunferencia.

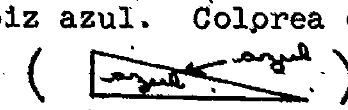
6. Colorea de amarillo el exterior de la circunferencia.



7. Marca un punto de la circunferencia. Llámalo A. ¿Está el punto A en el exterior de la circunferencia? (No) ¿Está A en el interior de la circunferencia? (No) Marca otro punto que no esté en el interior de la circunferencia y que no esté en el exterior de la circunferencia.



8. Dibuja un triángulo con lápiz azul. Colorea de azul también el interior del triángulo.



9. La parte del plano coloreada de azul es la reunión de dos conjuntos de puntos. ¿Qué dos conjuntos? (El conjunto de puntos representado por el triángulo y el conjunto de puntos representado por el interior del triángulo.)

La reunión de una curva cerrada simple y su interior se llama una <u>región plana</u>. La que coloreaste de azul se llama una <u>región triangular</u>.

E283

Conjunto de problemas 10

1. a) Dibuja un triángulo. Colorea de rojo el triángulo y su interior.

   b) ¿Cuál es el nombre de la parte del plano que es roja? (Región triangular)

   c) ¿Cuál es el nombre de la parte del plano que no es roja? (El exterior del triángulo)

2. a) Dibuja una circunferencia. Colorea de azul la circunferencia y su interior.

   b) ¿Cuál crees que debería ser el nombre de la parte del plano que es azul? (Región circular)

   c) ¿Cuál es el nombre de la parte del plano que no es azul? (El exterior de la circunferencia)

3. Examina la figura y los puntos marcados.

¿Cuáles de los siguientes enunciados son ciertos? (b, d)

E es: a) un punto del triángulo.

b) un punto del interior del triángulo.

c) un punto del exterior del triángulo.

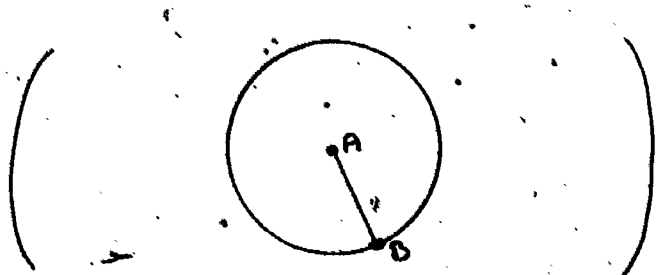
d) un punto de la región triangular.

4. F es: a) un punto del triángulo.
   b) un punto del interior del triángulo.
   c) un punto del exterior del triángulo.
   d) un punto de la región triangular.

5. G es: a) un punto del triángulo.
   b) un punto del interior del triángulo.
   c) un punto del exterior del triángulo.
   d) un punto de la región triangular.

6. A es: a) un punto del triángulo.
   b) un punto del interior del triángulo.
   c) un punto del exterior del triángulo.
   d) un punto de la región triangular.

7. Marca un punto A y un punto B que diste dos pulgadas de A. Dibuja una circunferencia con centro A y con radio AB.



Con referencia al ejercicio 7, determina qué términos completan correctamente cada uno de los enunciados en los ejercicios 8 y 9.

8. A es un punto de
   a) la circunferencia.
   b) el interior de la circunferencia.
   c) el exterior de la circunferencia.
   d) la región circular.

9. B es un punto de (a, d)

   a) la circunferencia.

   b) el interior de la circunferencia.

   c) el exterior de la circunferencia.

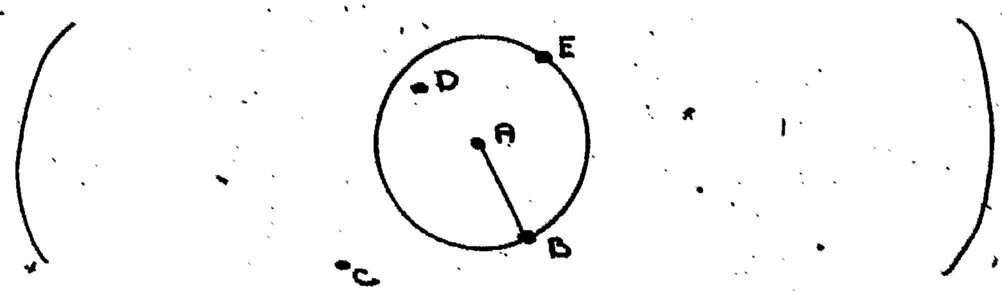
   d) la región circular.

10. Marca un punto del exterior de la circunferencia. Denótalo con C.

11. Marca un punto de la región circular. Llámalo D.

12. Marca un punto que no esté en el interior ni en el exterior de la circunferencia. Llámalo E.

C



407

ANGULOS

Objetivo: Explicar que un <u>ángulo</u> es un conjunto de puntos que satisface las siguientes condiciones:

1. Es la reunión de dos rayos con un extremo común.
2. Los rayos están en un mismo plano.
3. El extremo común de los rayos se llama el vértice. También, es el único miembro de la intersección de los rayos.
4. Cada rayo se llama un lado del ángulo.

Materiales: Papel, lápiz, regla, tiza, pizarra, una tabla de corcho o de material esponjoso, palillos, compás

Vocabulario: Angulo, vértice

Sugerencias para la enseñanza:

El maestro deberá señalar partes de ángulos representados por objetos que vea en el salón. Puede pedir a los alumnos que indiquen otros ejemplos de partes de ángulos que vean en el salón. Estos ejemplos pueden ser partes de ángulos representados por los bordes de un pupitre que se intersecan, los segmentos de recta que se intersecan en los rincones del salón, los bordes de un libro que se intersecan, los ángulos distintos que representan parcialmente un compás, cuando cambia su abertura. Quizás, los alumnos recuerden varios ángulos que han visto representados en puentes y en intersecciones de calles. Quizás, piensen en el ángulo que sugiere el travesaño de un poste telefónico; tal vez, puedan indicar los ángulos que representan parcialmente algunas letras del alfabeto. El maestro o los alumnos pueden hacer representaciones de estos ejemplos, mediante dibujos en la pizarra o con palillos clavados en una tabla de corcho o de material esponjoso. En este momento, quizás, el maestro crea conveniente explicar cómo se pliegan trozos de papel para hacer representaciones de ángulos.

Debe dar a los alumnos la oportunidad de marcar partes de un ángulo con la notación o el nombre correctos; por ejemplo: ángulo, vértice, rayo.

Ahora, podría estudiarse la sección Trabajo en grupo como una tarea de clase.

En el ejercicio 2 de la sección mencionada anteriormente, el segundo rayo no debe dibujarse en la recta RS. Si se hiciera así, resultaría que los dos rayos estarían en la misma recta y no se formaría un ángulo de la manera que lo hemos definido.

En el ejercicio 6, se presenta el símbolo para representar un ángulo y se indica cómo deben nombrarse los ángulos.

Al dibujar representaciones de ángulos, quizás, sea una buena idea representarlos en varias posiciones, de manera que los alumnos no adquieran la idea de que uno de los rayos de un ángulo tiene que ser paralelo al borde inferior de la hoja de papel en que se dibuja.

499

E286

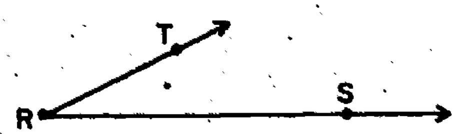
ANGULOS

Trabajo en grupo

1. Marca un punto R en tu hoja de papel. Dibuja un rayo con R como extremo. Marca otro punto en el rayo y llámalo S.

2. Dibuja un segundo rayo con R como extremo. No lo traces en $\overrightarrow{RS}$. Marca un punto en este rayo y llámalo T.

¿Se parece tu dibujo a algo como lo siguiente?



Este dibujo representa una nueva figura geométrica llamada ángulo.

Un ángulo es la reunión de dos rayos que tienen el mismo extremo pero que no están en la misma recta.

En la figura, R es el vértice del ángulo. El extremo de ambos rayos se llama el vértice del ángulo.

Cada rayo es un <u>rayo del ángulo</u>. $\overrightarrow{RT}$ y $\overrightarrow{RS}$ son rayos del ángulo en el dibujo.

3. Parte de un ángulo está representado por dos bordes de tu pupitre que se encuentran en una esquina.

a) ¿Qué representa el vértice del ángulo? (La esquina; es decir, el punto donde se encuentran los bordes.)

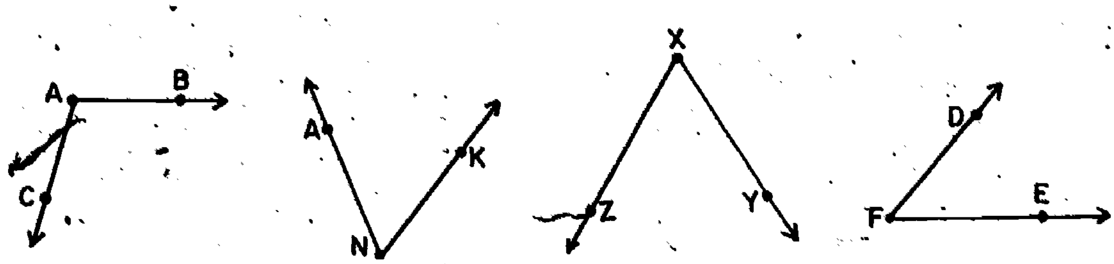
b) ¿Qué representan los rayos del ángulo? (Los bordes del tablero del pupitre)

c) ¿Por qué decimos que éstos son solamente partes del ángulo? (Los rayos se extienden indefinidamente, los bordes del tablero terminan.)

4. ¿Sugieren un ángulo las manecillas de un reloj? Si es así, ¿qué representa el vértice?; ¿y qué representan los rayos? (El centro del reloj donde se unen las manecillas representa el vértice. Las manecillas representan los rayos.)

5. Describe otras cosas en tu salón de clases que sugieren un ángulo. (Hay varias respuestas posibles.)

6. En cada ángulo representado a continuación, nombra el vértice y los rayos:

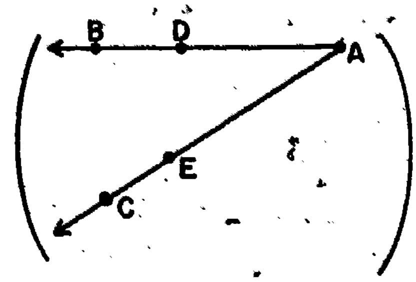


(El vértice es A, los rayos son $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$) (El vértice es N, los rayos son $\overrightarrow{NA}$ y $\overrightarrow{NK}$) (El vértice es X, los rayos son $\overrightarrow{XZ}$ y $\overrightarrow{XY}$) (El vértice es F, los rayos son $\overrightarrow{FD}$ y $\overrightarrow{FE}$)

Al primer ángulo de la figura le llamamos $\angle BAC$ o $\angle CAB$. Ambos son correctos. La letra del medio debe representar el vértice.

7. Dibuja un ángulo. Llámalo $\angle SRT$. ¿Le pusiste la letra correcta al vértice? (R)

8. El $\angle BAC$ se representa a continuación; copia la figura en tu hoja de papel:



a) Elige un punto de $\overrightarrow{AB}$ diferente de A y de B y llámalo D.

b) Elige un punto de $\overrightarrow{AC}$ diferente de A y de C y llámalo E.

c) ¿Es $\overrightarrow{AB}$ el mismo rayo que $\overrightarrow{AD}$? (sí)

d) ¿Es $\overrightarrow{AC}$ el mismo rayo que $\overrightarrow{AE}$? (sí)

e) ¿Es $\angle BAC$ el mismo ángulo que $\angle DAE$? (sí)

De cualquier manera que designemos un ángulo, la letra del medio siempre representa el vértice.

9. A continuación se dan tres puntos:

Escribe en una hoja de papel las palabras que completan los siguientes enunciados:

a) Hay ___(uno)___ rayo pasando por D y F con extremo F.

b) Hay ___(uno)___ rayo pasando por F y E con extremo F.

c) Hay ___(uno)___ ángulo conteniendo a D y a E, con vértice F. Este ángulo se llama ___(∠DFE)___ o ___(∠EFD)___.

Conjunto de problemas 11

1. He aquí tres rayos. Cada uno tiene el extremo A. Nombra tres ángulos.

(∠BAD o ∠DAB
∠BAC o ∠CAB
∠CAD o ∠DAC)

2. a) Marca un punto C en tu hoja de papel. Dibuja una figura de dos ángulos que tengan el punto C como vértice.

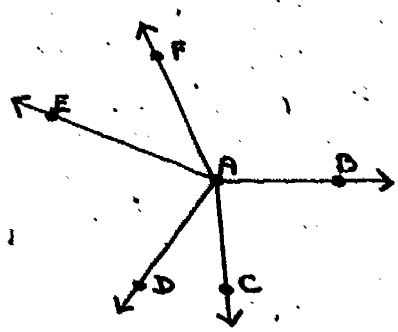
   b) Nombra los rayos de cada ángulo.

   ($\overrightarrow{CB}$ y $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{CB}$ y $\overrightarrow{CE}$)

3. a) Marca un punto A en tu hoja de papel. Dibuja una figura que tenga al menos 4 ángulos, con el punto A como vértice. Haz esto, dibujando cinco rayos diferentes, que no estén en la misma recta, y que tengan A como extremo. Elige un punto diferente de A en cada rayo. Denota estos puntos con las letras mayúsculas B, C, D, E y F.

   b) Nombra los rayos de cada ángulo.

   c) Nombra cada ángulo.



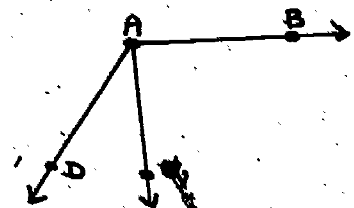
$\angle BAC \begin{cases} \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} \end{cases}$, $\angle CAD \begin{cases} \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AD} \end{cases}$, $\angle DAE \begin{cases} \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AE} \end{cases}$, $\angle EAF \begin{cases} \overrightarrow{AE} \\ \overrightarrow{AF} \end{cases}$

también $\angle BAD$, $\angle BAF$, $\angle CAE$, $\angle BAE$, $\angle CAF$, $\angle DAF$

PROBLEMAS DIFICILES

4. Trata de repetir al ejemplo 3, usando solamante 3 rayos (sin que estén dos de ellos en la misma recta) con A como extremo. ¿Obtuviste una figura de cuatro ángulos? (no) ¿Cuántos ángulos representa tu figura?

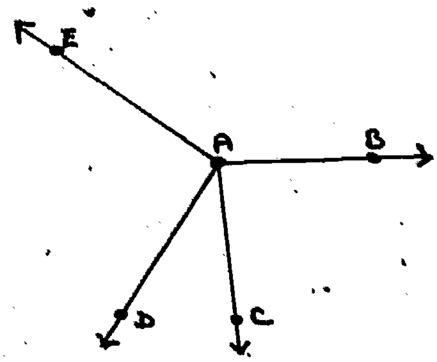
(3, puesto que



muestra los ángulos ∠BAC, ∠CAD y ∠BAD.)

5. Trata de repetir el ejemplo 3, usando solamente 4 rayos (sin que estén dos de ellos en la misma recta) con A como extremo. ¿Obtuviste una figura de cuatro ángulos exactamente? (no) ¿Cuántos ángulos representa tu figura?

(6, puesto que



muestra los ángulos ∠BAC, ∠CAD, ∠DAE, ∠BAD, ∠CAE y ∠BAE.)

ANGULOS DE TRIANGULOS

Objetivo: Explicar que a pesar de que un triángulo determina tres ángulos, estos ángulos tienen puntos que no forman parte del triángulo. Esto es cierto, debido a que los ángulos están formados por la reunión de rayos, mientras que los triángulos están formados por la reunión de segmentos de recta.

Materiales: Papel, lápiz, regla, tiza

Vocabulario: Vértices

Sugerencias para la enseñanza:

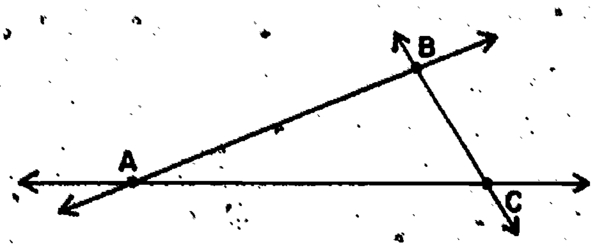
> El objetivo de esta sección, de la manera que se ha enunciado, es difícil de entender. La parte de la sección titulada <u>Trabajo en grupo</u> se preparó para lograr este objetivo mediante varias tareas. Se obtendrán los mejores resultados, siguiendo la explicación tal como se da en el <u>Texto del estudiante</u>.
>
> Quizás, el maestro quiera estudiar la parte de la sección titulada <u>Trabajo en grupo</u>, utilizando la pizarra y haciendo que los estudiantes mantengan sus libros cerrados.

E292

ANGULOS DE UN TRIANGULO

Trabajo en grupo

1. Examina los puntos dados más adelante marcados A, B y C. No están en la misma recta. Marca tres puntos como éstos en tu hoja de papel y desígnalos con la letra correspondiente:



2. Dibuja: $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AC}$

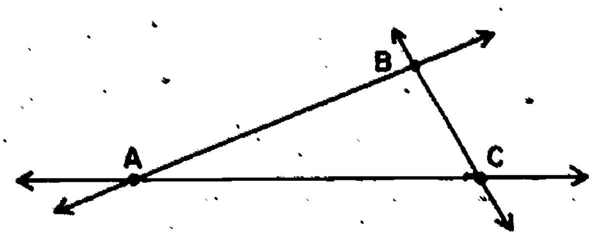
$\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{CA}$

3. ¿Resulta tu dibujo así?



507

E293

Escribe en una hoja de papel las palabras que completan los siguientes enunciados:

a) $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ forman un (triángulo).

b) El ángulo con vértice A que contiene a B y a C se llama (∠BAC o ∠CAB).

c) El ángulo con vértice B que contiene a A y a C se llama (∠ABC o ∠CBA).

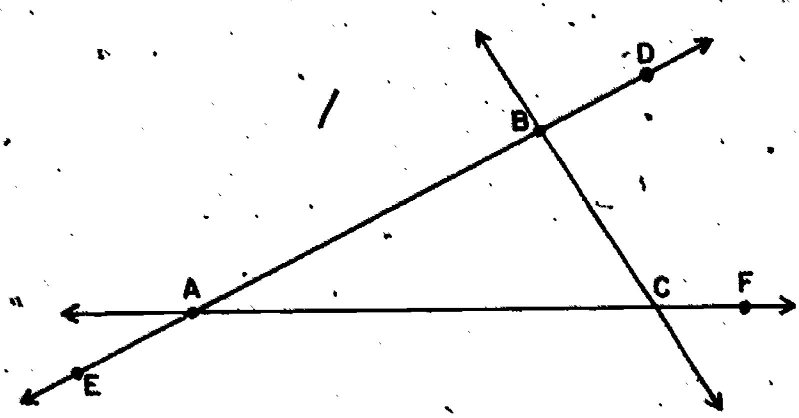
d) El ángulo con vértice C que contiene a A y a B se llama (∠ACB o ∠BCA).

4. Elige un punto de $\overrightarrow{AB}$ que no sea un punto de $\overline{AB}$. Llámalo D.

5. Elige un punto de $\overrightarrow{BA}$ que no sea un punto de $\overline{AB}$. Llámalo E.

6. Elige un punto de $\overrightarrow{AC}$ que no sea un punto de $\overline{AC}$. Llámalo F.

¿Resulta tu figura así? (Sí)



7. ¿Son D, E y F puntos de los rayos de los ángulos que nombraste en el ejemplo 3? (sí)

8. a) ¿Son D, E y F puntos del triángulo? (no)

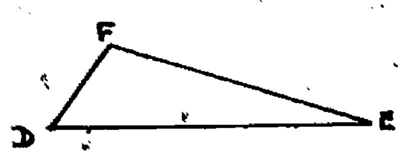
b) ¿Son D, E y F puntos del interior del triángulo? (no)

c) ¿Son D, E y F puntos del exterior del triángulo? (sí)

El ejercicio 3 muestra que un triángulo nos presenta tres ángulos. Estos ángulos no son parte del triángulo. Esto es cierto, porque un triángulo está formado por segmentos y un ángulo lo está por rayos.

Recuerda que cuando estudiamos las circunferencias, hablamos del centro de una circunferencia. El centro no es parte de la circunferencia.

Análogamente, decimos que $\angle$ABC, $\angle$ BCA y $\angle$ CAB son ángulos del triángulo, aunque no son parte del triángulo. Llamamos a los vértices de estos ángulos los vértices del triángulo. Los vértices de un triángulo son los extremos de los segmentos del triángulo.



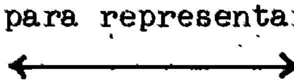
9. Dibuja un triángulo. Denota sus vértices con D, E, F.

a) Nombra los tres ángulos del triángulo. ($\angle$DFE, $\angle$FDE, $\angle$DEF)

b) ¿Cuántos rayos nos presentan los tres ángulos de un triángulo? (seis)

Conjunto de problemas 12

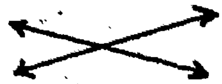
Haz dibujos para representar:

1. Una recta 
2. Un rayo
3. Un segmento
4. Una curva cerrada simple 

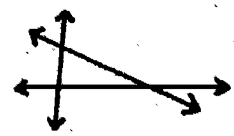
5. Un triángulo 

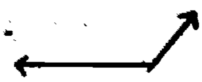
6. Una circunferencia 

7. Un polígono  u otro polígono cualquiera

8. Dos rectas que se cortan 

9. Un cuadrilátero 

10. Tres rectas que se cortan, pero no todas en el mismo punto. 

11. Un ángulo 

12. La reunión de un triángulo y un ángulo de dicho triángulo 

13. Una región triangular 

Usando el dibujo que va a continuación, nombra:

14. la intersección de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ (El punto B)

15. tres triángulos diferentes (△ABC, △ACD, △ABD)

16. un segmento que no es un lado de un triángulo ($\overline{DF}$ o $\overline{AE}$ o $\overline{BC}$)

17. un punto del interior de algún triángulo (E en el interior del △ABD)

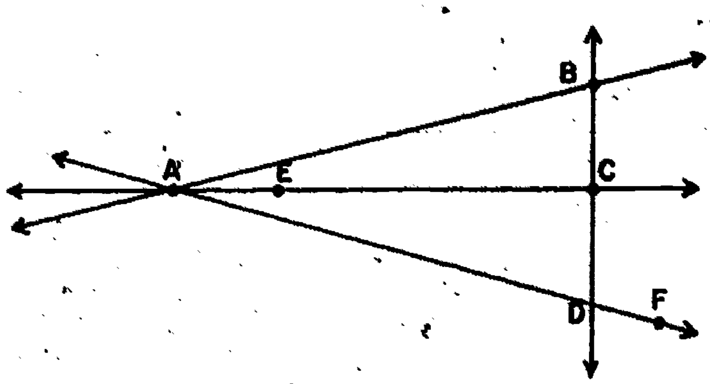
18. un punto del exterior del triángulo ABD (F)

19. la intersección de $\overleftrightarrow{AF}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ (El punto D)

20. la intersección de $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{DF}$ (El conjunto vacío; las rectas no se intersecan.)

21. la intersección de $\overline{AE}$ y $\overline{BD}$ (El conjunto vacío; los segmentos no se intersecan.)

22. el extremo de $\overline{AE}$ (A)



¿Cuáles de los siguientes enunciados son ciertos?

23. La intersección de dos planos diferentes puede ser:
   a) una recta
   b) el conjunto vacío
   c) un conjunto que tiene exactamente un punto
   d) un plano

24. La intersección de una recta y un plano puede ser:
   a) un conjunto que tiene exactamente dos puntos
   b) el conjunto vacío
   c) la recta
   d) el plano
   e) un conjunto que tiene exactamente un punto

PROBLEMAS DIFICILES

25. La intersección de un triángulo y un plano puede ser:
   a) un conjunto que tiene exactamente un punto
   b) el conjunto vacío
   c) el triángulo
   d) un conjunto que tiene exactamente tres puntos
   e) un conjunto que tiene más puntos del triángulo que los que se pueden contar, pero no todos los puntos del triángulo

26. La intersección de una circunferencia y un plano puede ser:
   a) un conjunto que tiene exactamente un punto
   b) el conjunto vacío
   c) un conjunto que tiene exactamente dos puntos
   d) un conjunto que tiene exactamente tres puntos
   e) la circunferencia