DOCUMENT RESUME

ED 186 215 SE 030 378

AUTHOR	Anderson, R. D.; And Others
TITLE	Matematicas Para El Primer Ciclo Secundario, Volumen II (Parte 1). Traduccion Preliminar de la Edicion en Ingles Revisada. (Mathematics for Junior High School, Volume II, Part 1. Preliminary Translation of the Revised English Edition).
INSTITUTION	Stanford Univ., Calif. School Mathematics Study Group.
SPONS AGENCY	National Science Foundation, Washington, D.C.
PUB DATE	63
NOTE	288p.; For related documents in Spanish, see SE 030 376-379. Contains occasional light and broken type.
LANGUAGE	Spanish
EDRS PRICE	MF01/PC12 Plus Postage.
DESCRIPTORS	*Bilingual Education; Geometry; *Instructional Materials; Mathematics Curriculum; *Mathematics Education; *Mathematics Instruction; Number Concepts; Percentage; Secondary Education; *Secondary School Mathematics; *Textbooks
IDENTIFIERS	*School Mathematics Study Group

ABSTRACT

This is part one of a two-part SMSG mathematics text for junior high school students. Key ideas emphasized are structure of arithmetic from an algebraic viewpoint, the real number system as a progressing development, and metric and non-metric relations in geometry. Chapter topics include number line and coordinates, equations, scientific notation, applications of percent, and congruence and the Pythagorean property. (RH)

GRUPO DE ESTUDIO DE LA MATEMATICA ESCOLAR

MATEMATICAS PARA EL PRIMER CICLO SECUNDARIO

VOLUMEN II (Parte 1)

(Traducción preliminar de la edición en inglés revisada)

MATEMATICAS PARA EL PRIMER CICLO SECUNDARIO

VOLUMEN II (Parte 1)

(Traducción preliminar de la edición en inglés revisada)

Texto preparado bajo la supervisión del Personal para los Grados de Estudio 7° y 8°, del Grupo de Estudio de la Matemática Escolar:

R.D. Anderson, Universidad del Estado de Luisiana

J.A. Brown, Universidad de Delaware

Lenore John, Universidad de Chicago

B.W. Jones, Universidad de Colorado

P.S. Jones, Universidad de Michigan

J.R. Mayor, Asociación Americana para el Avance de la Ciencia

P.C. Rosenbloom, Universidad de Minnesota

Veryl Schult, Supervisor de Matemáticas, Washington, D.C.

El apoyo financiero para el Grupo de Estudio de la Matemática Escolar provino de la Fundación Nacional de Ciencias.

La edición preliminar de este volumen fue preparada en una convención realizada en la Universidad de Míchigan durante el verano de 1959 y se basó, en parte en el material preparado durante la primera convención del Grupo de Estudio de la Matemática Escolar (en inglés, SMSG) realizada en la Universidad de Yale, en el verano de 1958. La presente revisión se hizo en la Universidad de Stanford en el verano de 1960, teniendo en cuenta las experiencias de clase adquiridas con la edición preliminar durante el año escolar de 1959 - 60.

Participaron en la preparación de este volumen las siguientes personas:

R.D. Anderson, Universidad del Estado de Luisiana
B.H. Arnold, Colegio del Estado de Oregón
J.A. Brown, Universidad de Delaware
Kenneth E. Brown, Oficina Estadounidense para la Educación
Mildred B. Cole, Escuela K.D. Waldo de Primer Ciclo Secundario, Aurora, Illinois
B.H. Colvin, Laboratorios Boeing para la Investigación Científica
J.A. Cooley, Universidad de Tennessee
Richard Dean, Instituto Tecnológico de California
H.M. Gehman, Universidad de Búffalo
L. Roland Genise, Escuela de Primer Ciclo Secundario de Brentwood, Nueva York
E. Glenadine Gibb, Colegio para Maestros del Estado de Iowa
Richard Good, Universidad de Maryland
Alice Hach, Escuelas Públicas de Racine, Wisconsin
S.B. Jackson, Universidad de Maryland
Lenore John, Escuela Secundaria de la Universidad de Chicago
B.W. Jones, Universidad de Colorado
P.S. Jones, Universidad de Míchigan
Houston Karnes, Universidad del Estado de Luisiana
Mildred Keiffer, Escuelas Públicas de Cincinnati, Ohío
Nick Lovdjieff, Escuela Anthony de Primer Ciclo Secundario, Minneápolis, Minnesota
J.R. Mayor, Asociación Americana para el Avance de la Ciencia
Sheldon Meyers, Servicio de Control Educacional
Muriel Mills, Escuela Hill de Primer Ciclo Secundario, Dénver, Colorado
P.C. Rosenbloom, Universidad de Minnesota
Elizabeth Roudebush Mitchell, Escuelas Públicas de Seattle, Wáshington
Veryl Schult, Escuelas Públicas de Wáshington, D.C.
George Schaefer, Escuela Secundaria Alexis I. DuPont, Wilmington, Delaware
Allen Shields, Universidad de Míchigan
Rothwell Stephens, Colegio Knox
John Wagner, Grupo de Estudio de la Matemática Escolar, New Haven, Connecticut
Ray Walch, Escuelas Públicas de Westport, Connecticut
G.C. Webber, Universidad de Delaware
A.B. Wilcox, Colegio Amherst

Proyecto de Traducción al Español

Comisión Consultiva

Edward G. Begle, Universidad de Stánford

Howard F. Fehr, Universidad de Columbia

Mariano García, Universidad de Puerto Rico

Max Kramer, San Jose State College

6

5

PROLOGO

La creciente contribución de las matemáticas a la cultura del mundo moderno, y su importancia como parte vital de la educación científica y humanística, han hecho necesario que las matemáticas del programa escolar se seleccionen juiciosamente y que se enseñen bien en nuestras escuelas.

Tomando esto en consideración, las organizaciones de matemáticas en los Estados Unidos cooperaron en la formación del Grupo de Estudio de la Matemática Escolar (SMSG). Este grupo lo constituyen matemáticos de colegios y universidades, maestros de matemáticas de todos los niveles, expertos en educación y representantes de la ciencia y la tecnología. El propósito general del SMSG es el mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas en las escuelas de los Estados Unidos. La Fundación Nacional de Ciencias ha provisto fondos sustanciales para el financiamiento de esta labor.

Uno de los prerrequisitos para el mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas en nuestras escuelas es un mejor programa de estudios, un programa que tome en consideración el uso creciente de las matemáticas en la ciencia, la tecnología y otros campos del conocimiento y que, a la vez, refleje los avances recientes de las matemáticas mismas. Uno de los primeros proyectos del SMSG fue reclutar un grupo de matemáticos y maestros de matemáticas distinguidos para preparar una serie de libros de texto ilustrativos de un programa de estudios como el ya mencionado.

Los matemáticos profesionales en el SMSG creen que el contenido matemático presentado en este texto es valioso para todos los ciudadanos cultos de nuestra sociedad, y que su aprendizaje es importante para los estudiantes que van a ingresar en universidades, como preparación para estudios avanzados en este campo. Al mismo tiempo, los maestros en el SMSG creen que la forma en que aquí se presenta el material de estudio facilita al estudiante su asimilación.

En la mayoría de los casos el material parecerá familiar, pero su presentación y punto de vista serán diferentes. Algún material será completamente nuevo en relación con los programas de estudios tradicionales. Así debe ser, porque las matemáticas constituyen una disciplina viva y en constante crecimiento y no un producto inerte y rígido de la antigüedad. Esta fusión saludable entre lo antiguo y lo nuevo debe guiar a los estudiantes hacia una mejor comprensión de los conceptos básicos y de la estructura de las matemáticas y ofrecer una base sólida para la comprensión y el uso de las matemáticas en una sociedad científica.

No pretendemos que este libro se considere como la única manera definitiva de presentar correctamente las matemáticas a los estudiantes en este nivel. En cambio debe considerarse como una muestra de la clase de programa de estudios que necesitamos y como una fuente de sugerencias para los autores de textos comerciales. Esperamos sinceramente que estos textos señalen el camino hacia una enseñanza más inspirada y significativa de las matemáticas, disciplina que es la reina y sierva de las ciencias.

TABLA DE MATERIAS

Capítulo

NOTA: Algunos ejercicios han sido marcados con un asterisco (*) para orientar al maestro en la selección de los mismos.

PREFACIO

Las ideas fundamentales de las matemáticas para el primer ciclo secundario sobre las que se insiste en este texto son: la estructura de la aritmética desde un punto de vista algebraico; el sistema de los números reales como un desarrollo progresivo; relaciones métricas y no métricas en geometría. A lo largo del texto esas ideas se asocian á sus aplicaciones. En este nivel, es importante la experiencia con los conceptos abstractos y la apreciación de los mismos, ási como la del papel de la definición, del desarrollo de un pensamiento y un vocabulario precisos, de la experimentación y de la demostración. En la escuela secundaria de primer ciclo se pueden hacer progresos sustanciales.

En el verano de 1958 se escribieron para los grados de estudio séptimo y octavo, catorce libros que fueron probados por aproximadamente 100 maestros en 12 centros de educación de varias partes del país durante el año escolar de 1958 - 59. Se revisaron luego esos libros, sobre la base de las observaciones de los maestros, durante el verano de 1959. Con algunos libros nuevos, se imprimió una parte de los textos modelos para el 7º grado y un volumen de textos experimentales para el 8º grado. Durante el año escolar de 1959 - 60 unos 175 maestros de varias partes del país enseñaron matemáticas en los grados séptimo y octavo a base de estos libros, que luego se revisaron en el verano de 1960.

Las matemáticas fascinan a muchas personas tanto por las oportunidades que brindan a la creación y al descubrimiento como por su utilidad. Crecen continua y rápidamente con el doble estímulo de la curiosidad intelectual y de la utilidad práctica. Aun los estudiantes del primer ciclo secundario pueden formular preguntas e hipótesis matemáticas que pueden comprobar o establecer; pueden desarrollar intentos sistemáticos para resolver problemas matemáticos tengan o no éstos, soluciones rutinarias o fáciles de determinar. En gran parte, la selección del contenido y del método de este texto se basó en el reconocimiento de estos importantes factores.

Creemos firmemente que las matemáticas pueden y deben estudiarse con éxito y agrado. Esperamos que este texto pueda ayudar a todos los maestros que lo usen, en el logro de este muy deseable fin.

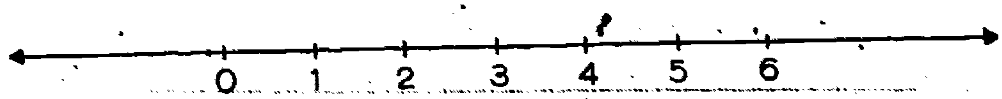
Capítulo 1

NUMEROS RACIONALES Y COORDENADAS

1-1. La recta numérica

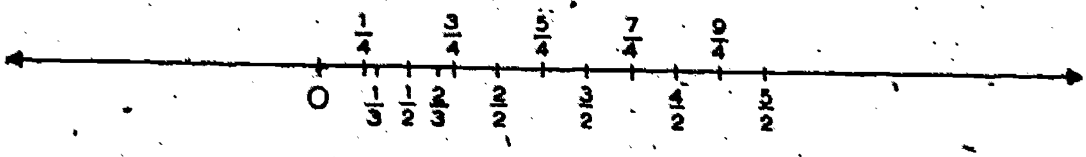
La idea de número es abstracta. En la historia de la civilización, el desarrollo de un buen sistema numérico ha necesitado muchos siglos. Se han utilizado muchos esquemas para ayudar a comprender los números y sus aplicaciones, pero uno de los mejores es el de la recta numérica. Vamos a repasar la construcción de la recta numérica cómo punto de partida para un análisis ulterior de los números.

Imaginemos que la recta que se muestra en la siguiente figura



se extiende ilimitadamente en ambas direcciones. Escogemos un punto cualquiera sobre ella y lo llamamos 0. Luego tomamos otro punto a la derecha de 0 y lo llamamos 1, determinando así una unidad de longitud de 0 a 1. Partiendo de 0, colocamos repetidamente esta unidad de longitud sobre la recta numérica, avanzando hacia la derecha. Se determina así la posición de los puntos que corresponden a los números naturales 2, 3, 4, 5, ...

Asociamos el número $\frac{1}{2}$ con el punto que está a mitad de camino entre 0 y 1. Colocando repetidamente hacia la derecha el segmento cuya longitud es la mitad de la unidad adoptada, determinamos los puntos adicionales correspondientes a $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$. De manera análoga, localizamos los puntos de la recta numérica que están a la derecha de cero, correspondientes a fracciones que tienen denominadores 4, 5, 6, 7, ..., como se ve en la figura que aparece a continuación:



Mediante este procedimiento natural asociamos un punto de la recta con cada número racional, de manera que a cada número racional le corresponda un solo punto de la recta. Tenemos, pues, una correspondencia biunívoca entre los números racionales y algunos puntos de la recta. Denominamos los puntos de la recta numérica por los nombres de sus números correspondientes (por ejemplo, el punto 2 corresponde al número 2). Podemos hacer esto en virtud de la correspondencia biunívoca que hemos mencionado. Esta es una de las mayores ventajas de la recta numérica, pues nos permite identificar puntos y números. Nos ayuda a servirnos de los puntos geométricos para describir relaciones entre números, como se ilustra en los párrafos que siguen.

Observación. Podrías pensar que esta correspondencia biunívoca asigna un número a cada punto de la recta, que se halle a la derecha de 0. Esto está muy lejos de ser cierto. En efecto, hay sobre la recta muchísimos más puntos sin marcar, fuera de los que hemos marcado por el procedimiento indicado anteriormente. Esos puntos no marcados corresponden a números como π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$, que no son números racionales. En el Capítulo 6 estudiaremos más acerca de estos números.

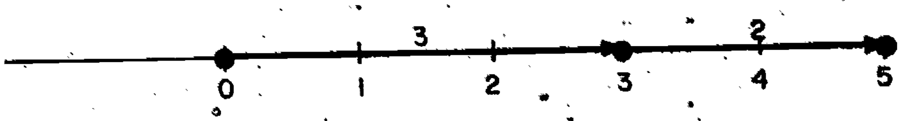
Propiedades de la recta numérica

La recta numérica localiza los números de una manera muy natural, por medio de puntos. La construcción de la recta numérica sitúa los números racionales según el orden creciente de sus magnitudes. En consecuencia, podemos siempre saber dónde debemos colocar un número sobre la recta. El mayor de dos números irá siempre a la derecha. Como $5 > 3$ (5 es mayor que 3), 5 estará a la derecha de 3 sobre la recta numérica. A un número mayor que 3 le corresponde un punto a la derecha de 3. Como $2 < 4$, el punto 2 estará a la izquierda del punto 4. Siempre podemos comprobar fácilmente las posiciones relativas de números como $3, 0, \frac{5}{4}, 1, \frac{4}{3}$ y $\frac{3}{2}$. Una vez que hemos localizado los puntos correspondientes sobre la recta, es fácil darse cuenta a simple vista si un número es mayor o menor que otro.

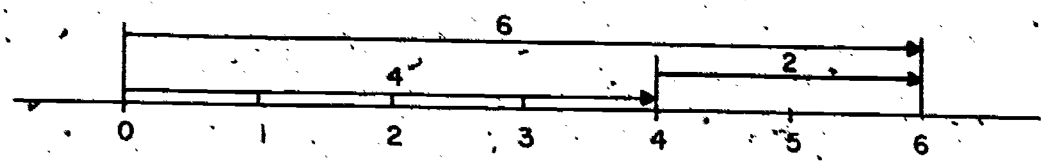
El punto correspondiente a cero se escoge como punto de referencia y se le llama el <u>origen</u>. La semirrecta que se extiende desde el origen hacia la derecha sobre la recta numérica, se llama semirrecta positiva. Cualquier número mayor que cero está sobre esta semirrecta positiva y se llama <u>número positivo</u>. En particular, de los números naturales 1, 2, 3, 4, ..., decimos que son los enteros positivos. Decir que un número es positivo simplemente significa que dicho número está a la derecha de cero sobre la recta numérica.

<u>Adición sobre la recta numérica</u>

Se puede describir fácilmente la suma de dos números sobre la recta numérica. Para sumar 2 y 3, comenzamos con 3 y nos desplazamos dos unidades hacia la derecha. De esta manera, la operación $3 + 2 = 5$ se representa por un movimiento a lo largo de la recta numérica. El movimiento termina en el punto correspondiente a la suma.



Podemos también pensar en el número 3 como si determinara una flecha (o segmento de recta dirigido) que parte de cero y termina en 3. Para representar la suma de 2 y 3, dibujamos simplemente una flecha de longitud 2 que comience en 3 y no en 0. Entonces, la flecha (segmento de recta dirigido) que representa la suma $3 + 2$, comienza en 0 y termina en 5. Para evitar confusiones, dibujamos frecuentemente las flechas un poco más arriba de la recta numérica, como se indica en la página siguiente en la figura para la suma $4 + 2$.

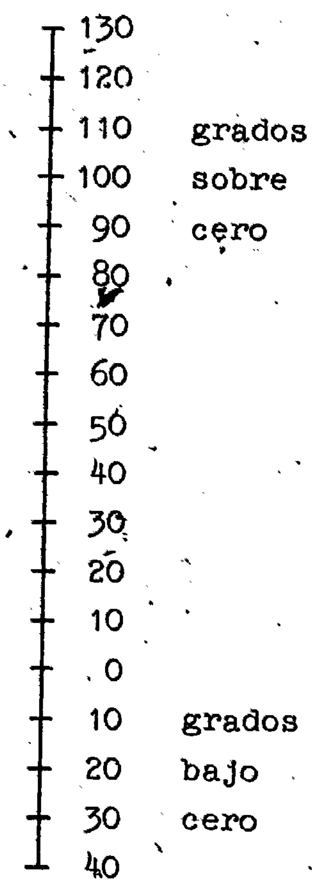


Las flechas sugieren un movimiento de 4 unidades seguido de otro movimiento de 2 unidades para alcanzar el punto (4 + 2). También interpretamos la figura como si sugiriera la suma de dos segmentos de recta dirigidos, de longitudes 4 y 2, para formar el segmento suma, de longitud 6.

Aplicaciones de la recta numérica

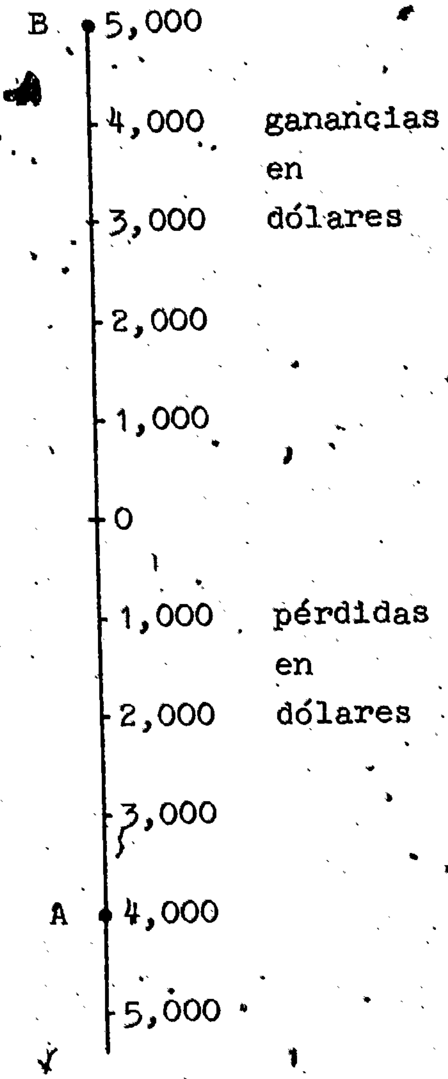
La recta numérica se usa de muchas maneras en la vida diaria. Un buen ejemplo de ello es una regla. Los números de las casas que se alinean a lo largo de las calles rectas de una ciudad forman una recta numérica. (¡Si vives en una calle curva, debes aprender un poco más de matemáticas antes de estudiar las distancias y la numeración a lo largo de una curva!)

Una de las aplicaciones más comunes de la recta numérica se puede ver en un termómetro. En este caso se usan dos escalas numéricas a lo largo de la recta, una en cada dirección. Las temperaturas sobre cero aparecen en la recta encima de cero, mientras que las temperaturas bajo cero se miden por debajo de cero.



Temperatura

Para comparar las ganancias y pérdidas ocurridas en varios departamentos de una empresa grande durante un mes dado, podemos usar escalas como se muestra a la derecha. El departamento A, que perdió 4,000 dólares, aparecería en el punto marcado A, mientras que el departamento B, que tuvo una ganancia de 5,000 dólares, aparece en B.



¿Qué otros ejemplos referentes al uso de la recta numérica puedes imaginar?

Ejercicios 1-1

1. Dibuja una recta numérica para cada uno de los números que se dan al pie de esta página. Utiliza una pulgada como unidad de longitud. Escoge un punto de la recta como origen y localiza el punto que corresponde al número. Dibuja encima de la recta numérica las flechas correspondientes.

   (a) 4 (c) $\frac{17}{8}$ (e) 3.75

   (b) $\frac{1}{2}$ (d) $2\frac{1}{4}$ (f) 1.125

2. Representa por medio de flechas marcadas sobre la recta numérica, cada una de las sumas que siguen. (Utiliza una recta numérica diferente para cada suma.)

(a) $2 + 3$ (d) $\frac{3}{8} + \frac{9}{8}$

(b) $1 + 6$ (e) $\frac{3}{4} + 1.25$

(c) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}$ (f) $4 + 2\frac{1}{2}$

3. Sitúa los números de este ejercicio sobre la recta numérica y determina cuál es el mayor en cada conjunto.

(a) $1, \frac{9}{8}, \frac{3}{2}$.

(b) $\frac{3}{4}, \frac{8}{8}, \frac{13}{16}$

(c) $\frac{13}{4}, 3, \frac{7}{2}$

4. En algunos automóviles recientes, los velocímetros tienen la forma de una recta numérica para indicar la velocidad en millas por hora. En tales velocímetros se indica la velocidad mediante una recta semejante a una flecha. Escoge una unidad de longitud conveniente y construye una recta numérica con velocidades hasta de 70 millas por hora. Marca sobre esa recta los puntos correspondientes a las velocidades que se indican más abajo. Dibuja encima de la recta numérica, las flechas correspondientes a cada uno de estos números:

(a) 10 m.p.h. (c) 35 m.p.h.

(b) 15 m.p.h. (d) 60 m.p.h.

5. Localiza sobre una recta numérica los puntos medios de los siguientes segmentos:

(a) De 0 hasta 2. (c) De $\frac{1}{2}$ hasta $\frac{7}{2}$.

(b) De $\frac{1}{8}$ hasta $\frac{5}{8}$. (d) De 2 hasta 6.5.

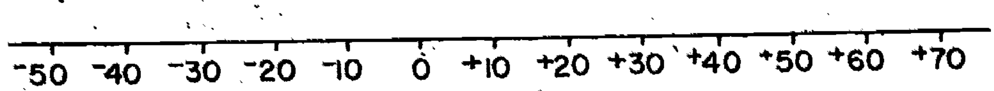
6. Utiliza un diagrama que represente la suma mediante flechas puestas sobre la recta numérica, para mostrar que $2 + 3 = 3 + 2$. ¿Qué propiedad de la adición se manifiesta así?

7. Utilizando flechas para representar la adición sobre la recta numérica, muestra que $(2 + 3) + 1 = 2 + (3 + 1)$. ¿Qué propiedad de la adición pone de manifiesto este ejercicio?
8. Imagina una forma de representar el producto $3 \cdot 2$ mediante flechas puestas sobre la recta numérica. Ensáyalo también en las multiplicaciones $5 \cdot 2$ y $6 \cdot \frac{1}{4}$.
9. ¿Cómo podrías mostrar que $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$ por medio de flechas sobre la recta numérica? ¿Qué propiedad de la multiplicación ilustra este ejemplo?

1-2. <u>Números racionales negativos</u>

En el estudio anterior de la recta numérica hay una omisión muy seria: no hemos marcado los puntos situados a la izquierda de cero. Hemos usado solamente la semirrecta desde el origen, en la dirección positiva. Para sugerir la manera de marcar esos puntos (¡y el porqué queremos hacerlo!), veamos el ejemplo de las temperaturas, que nos es familiar.

Las rectas numéricas que representan temperaturas, tales como aparecen en los termómetros, son así:

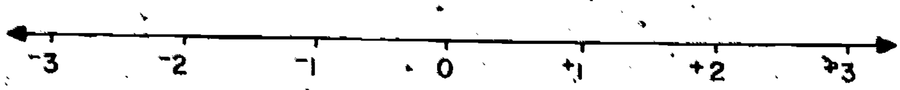


Temperatura en grados Fahrenheit

Las temperaturas bajo cero se representan aquí por números colocados a la izquierda del origen, precedidos del signo " $^-$ ". Las temperaturas sobre cero se indican con el signo " $^+$ ". Entonces, $^-10$ se refiere a una temperatura de 10 grados bajo cero (a la izquierda de cero), y $^+10$ se refiere a una temperatura de 10 grados sobre cero (a la derecha de cero). Realmente, <u>sobre cero</u> y <u>bajo cero</u> son términos más adecuados a las escalas verticales.

Esta idea de distancia (o de puntos) a lo largo de una recta, a ambos lados de un punto fijo, se usa con mucha frecuencia. Piensa cuán a menudo hablamos de distancias hacia la izquierda o hacia la derecha, de posiciones al norte o al sur de un punto dado, de alturas sobre o bajo el nivel del mar, de longitudes al este o al oeste, o de tiempos antes o después de un cierto acontecimiento. En cada una de estas expresiones se sugieren puntos situados en lados opuestos de un punto (o número) dado, o distancias medidas en direcciones opuestas a partir de un punto (o número) dado. Todas ellas presuponen el uso de una recta numérica que utilice puntos tanto a la izquierda como a la derecha del origen.

Se ve fácilmente la manera natural de describir esa recta numérica. Comenzamos con la recta numérica para los racionales positivos, que ya hemos utilizado. Con la misma unidad de longitud medimos luego distancias marcadas a la izquierda de cero, como se muestra a continuación:



Colocamos $^{-}1$ como opuesto a $^{+}1$, en el sentido de que está a 1 unidad a la izquierda de cero. De modo análogo, $^{-}2$ es opuesto a $^{+}2$, $^{-}(\frac{1}{4})$ está situado como opuesto a $^{+}\frac{1}{4}$, $^{-}(\frac{5}{2})$ es opuesto a $^{+}\frac{5}{2}$, etc. Llamamos <u>números negativos</u> a los números "opuestos" que corresponden a puntos colocados a la izquierda de cero. Todo número negativo está a la izquierda de cero y corresponde al número positivo opuesto. Esta dirección "hacia la izquierda" se llama la dirección negativa.

Denotamos los números negativos como $^{-}1$, $^{-}2$, $^{-}(\frac{1}{4})$, $^{-}(\frac{3}{2})$, $^{-}(\frac{9}{8})$, etc., utilizando el guión en la parte superior izquierda. Leemos $^{-}2$ como "dos negativo". Este símbolo negativo " $^{-}$ " nos dice que el número es menor que cero (está a la izquierda de cero). Algunas veces recalcamos que un número es positivo (mayor que cero) escribiendo el símbolo " $^{+}$ " en la parte superior izquierda, como en $^{+}2$, $^{+}\frac{3}{2}$, etc. Habitualmente no lo hacemos, a menos que queramos subrayar el carácter positivo de un número.

Los nuevos números que hemos introducido por este procedimiento son los números racionales negativos. Al conjunto que consiste en los números racionales positivos, los números racionales negativos y el número cero, lo llamamos el conjunto de los <u>números racionales</u>.

El conjunto especial que consiste en los enteros positivos (que antes hemos llamado simplemente enteros), los enteros negativos y cero se llama el conjunto de los <u>números enteros</u>. Frecuentemente denotamos tal conjunto así:

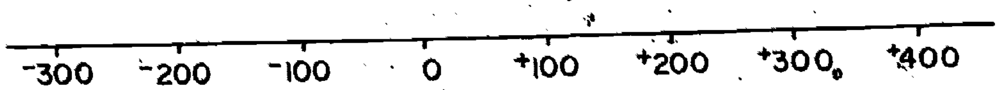
$$I = \{\ldots, {}^{-}4, {}^{-}3, {}^{-}2, {}^{-}1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Observa que el conjunto de los enteros consta sólo de los números naturales, sus opuestos y cero.

<u>Ejemplos del uso de los números negativos</u>

Los números negativos son tan reales y útiles como los números positivos que hemos empleado antes. En efecto, los hemos usado muchas veces sin llamarlos números negativos. Son de especial utilidad para denotar la idea de "opuesto" o "dirigido en sentido opuesto", como hemos mencionado.

Utilicemos los números positivos para denotar distancias al este de Chicago. Los números negativos denotarán distancias al oeste de Chicago. Una recta numérica como la que sigue



Distancia desde Chicago, en millas

puede usarse para marcar la posición de un aeroplano que vuela de este a oeste, pasando sobre Chicago. ¿Cómo interpretarías esta recta numérica para un aeroplano que vuela de norte a sur, pasando sobre Chicago?

El tiempo anterior y posterior al lanzamiento de un satélite puede ser indicado sobre una recta numérica como la siguiente:

$^{-}6$ $^{-}5$ $^{-}4$ $^{-}3$ $^{-}2$ $^{-}1$ 0 $^{+}1$ $^{+}2$ $^{+}3$ $^{+}4$ $^{+}5$ $^{+}6$

(Segundos antes del lanzamiento) (Segundos después del lanzamiento)

Observa que la recta numérica que utilizamos no tiene por qué ser siempre horizontal. Si nos referimos a las altitudes sobre el nivel del mar como positivas y a las profundidades bajo el nivel del mar como negativas, sería más natural el uso de una recta numérica vertical.

También, para representar las distancias de norte a sur desde Mayagüez podrías usar una recta vertical.

$^{+}50$
$^{+}40$
$^{+}30$
$^{+}20$
$^{+}10$
0 Distancia en millas desde Mayagüez
$^{-}10$
$^{-}20$
$^{-}30$
$^{-}40$
$^{-}50$

5,000
4,000
3,000
2,000
1,000
0 Altitud en pies con referencia al nivel del mar
$^{-}1,000$
$^{-}2,000$
$^{-}3,000$
$^{-}4,000$
$^{-}5,000$

Las rectas verticales son más convenientes que las horizontales para representar las ganancias y pérdidas en los negocios. Una posición más alta en la recta corresponde, de manera natural, a una mayor ganancia. En otra clase de problemas puede convenir más una recta numérica en alguna posición que no sea ni horizontal ni vertical.

Ejercicios 1-2

1. Localiza sobre la recta numérica los puntos que corresponden a los siguientes números:

   (a) $^{-}8$ (d) $\frac{4}{8}$

   (b) $^{-}(\frac{7}{4})$ (e) 1.5

   (c) $1\frac{3}{4}$ (f) $^{-}(\frac{1}{2})$

   ¿Hay algunos pares de "opuestos" en esta lista?

2. Dibuja las flechas determinadas por los siguientes números racionales:

   (a) 6 (d) $\frac{12}{8}$

   (b) $^{-}4$ (e) $^{-}(\frac{20}{8})$

   (c) $^{-}5.5$ (f) $\frac{3}{4}$

3. Dispón en el orden en que aparecerían sobre la recta numérica, los siguientes números: $^{-}4$, $\frac{1}{4}$, $^{-}(\frac{7}{4})$, $\frac{5}{8}$, $^{-}6$, $^{-}(\frac{3}{8})$ y $\frac{3}{4}$. ¿Cuál es el mayor? ¿Cuál es el menor?

4. ¿Cómo podrías representar por medio de números positivos y negativos las siguientes cantidades?

   (a) Una ganancia de \$2,000; una pérdida de \$6,000.

   (b) Una altitud de 100 pies sobre el nivel del mar; una profundidad de 50 pies bajo el nivel del mar.

   (c) Un retroceso de 15 yardas; un avance de 10 yardas.

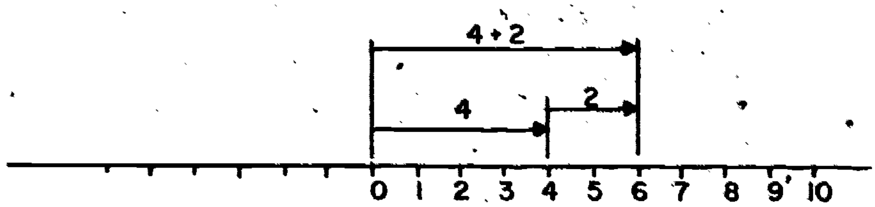
   (d) Una distancia de 2 millas hacia el este; una distancia de 4 millas hacia el oeste.

5. El tablero de control de los ascensores de una casa comercial indica los pisos B 2, B 1, G, 1, 2 y 3. G se refiere a la planta baja, y B 1, B 2 a los sótanos. ¿Cómo puedes usar los números positivos y negativos para designar esos pisos?

6. Dibuja una recta numérica para indicar las altitudes desde $^{-}1{,}000$ pies hasta $^{+}10{,}000$ pies, utilizando intervalos de 1,000 pies. Localiza las altitudes de $^{-}800$ pies, $^{+}100$ pies, $^{+}2{,}500$ pies y $^{-}500$ pies.

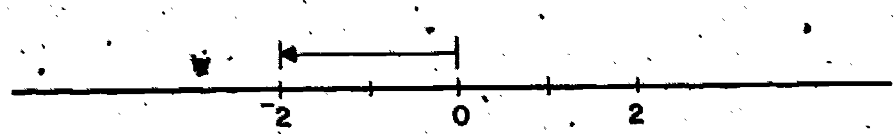
1-3. <u>Adición de números racionales</u>

Hemos visto que sobre la recta numérica se representa fácilmente la adición de dos números positivos. Para refrescar la memoria, trata de obtener las sumas $2 + 4$, $3 + 2$ y $1 + 7$ sobre la recta numérica. La suma $4 + 2$ se representa sobre la recta numérica por un punto situado 2 unidades más allá de 4 (ó 4 unidades más allá de 2, pues da lo mismo comenzar con uno ú otro número). Observa que cuando sumamos un número positivo a otro número positivo, nos movemos siempre hacia la derecha (en la dirección positiva) a lo largo de la recta numérica. Describimos este procedimiento de adición diciendo que para sumar 2 y 4, partimos de 4 y nos movemos 2 unidades hacia la derecha, ó 2 unidades en la dirección positiva. Hemos visto que una manera conveniente de representar este método de sumar es usar flechas (segmentos de recta dirigidos) de longitud apropiada. Entonces, la suma $4 + 2$ corresponde a la siguiente figura:



Para imaginar el movimiento de 0 a 4, dibujamos el segmento dirigido correspondiente a 4. Luego, comenzando en 4, dibujamos el segmento dirigido de longitud 2, correspondiente a 2. De esta manera encontramos una flecha de longitud 6, correspondiente a (4 + 2).

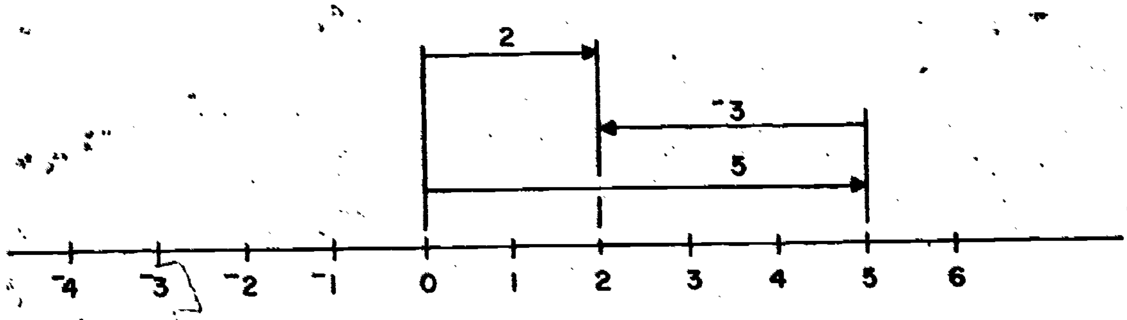
Volvamos ahora a nuestra construcción de los números negativos en la recta numérica. Recuerda que $^-2$ es el opuesto de 2. Decir que $^-2$ es el opuesto de 2 significa que $^-2$ está a la misma distancia de cero que 2, pero en la dirección negativa, como se muestra a continuación:



La flecha asociada a $^-2$ tiene 2 unidades de longitud y especifica la dirección negativa mediante la saeta de su extremo, como se ve en la figura. ¿Cómo dibujarías $^-4$, $^-(\frac{1}{2})$, $^-3$ y $^-(\frac{5}{3})$?

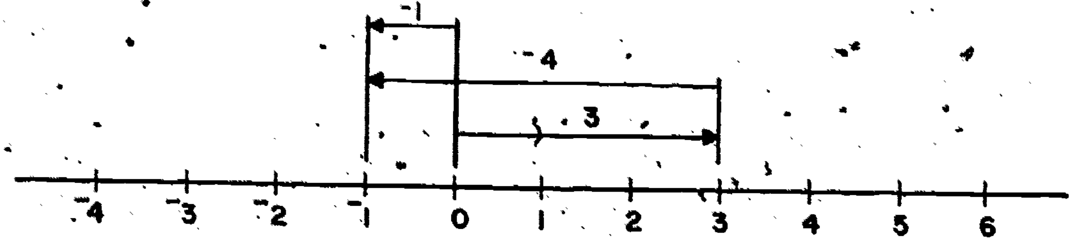
<u>Observación</u>. Muchas veces basta indicar la posición aproximada de los números sobre la recta numérica, para comparar sus posiciones relativas. En tales casos se necesita sólo un dibujo aproximado, y no están justificadas las mediciones cuidadosas de longitudes. Estos dibujos aproximados se llaman croquis o esquemas.

¿Qué significaría la suma $5 + (^-3)$? Utilizando las flechas dirigidas, podemos encontrar el punto que corresponde a $5 + (^-3)$ partiendo de 0, moviéndonos 5 unidades en la dirección positiva y luego 3 unidades en la dirección negativa (opuesta). Entonces, $5 + (^-3) = 2$, como se ve en el siguiente esquema:



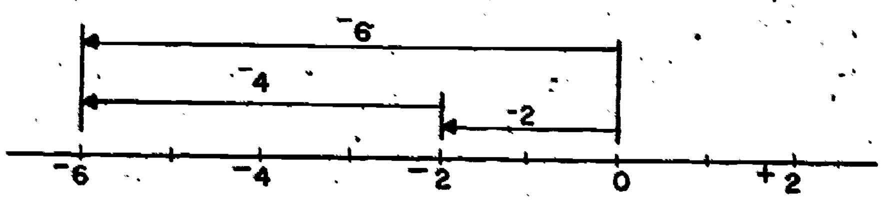
En este caso, se asocia $^{-}3$ a una flecha de 3 unidades de longitud en la dirección negativa. Para sumar $^{-}3$ y 5, basta dibujar la flecha para $^{-}3$ partiendo de 5 (es decir, partiendo del extremo de la flecha que corresponde a 5).

Para sumar 3 y $^{-}4$, dibuja un croquis como el siguiente:



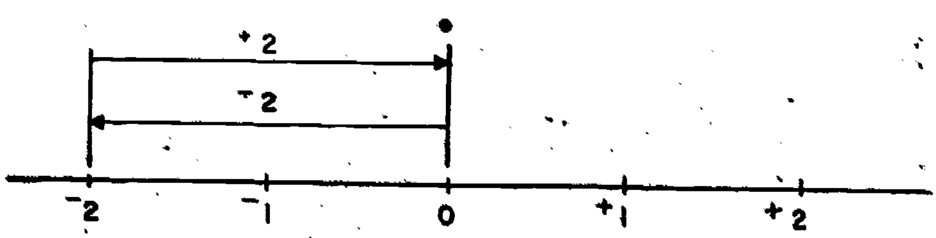
Entonces, $3 + (^{-}4) = {}^{-}1$. Halla la suma $2 + (^{-}5)$ de la misma manera.

Considera ahora la suma $(^{-}2) + (^{-}4)$, en que las dos flechas correspondientes a los sumandos están en la dirección negativa. En el esquema vemos que $(^{-}2) + (^{-}4) = {}^{-}6$.



De la misma manera, halla las sumas $(^{-}3) + (^{-}2)$, $(^{-}1) + (^{-}6)$ y $(^{-}6) + {}^{+}2$.

Una propiedad de interés especial se manifiesta con la suma $(^{-}2) + {}^{+}2$.



En éste caso, $^-2$ corresponde a una flecha de longitud 2 unidades en la dirección negativa. La suma de $^-2$ y $^+2$ corresponde a los movimientos siguientes: 2 unidades hacia la izquierda de cero y 2 unidades de regreso a 0. Entonces $(^-2) + 2 = 0$. Comprueba que $(^-1) + 1 = 0$, $3 + (^-3) = 0$ y $(^-8) + 8 = 0$.

Mediante el uso de la recta numérica vemos que la adición de números, sean positivos o negativos, es realmente muy simple. Para efectuar la operación, necesitamos solamente tener presente la posición de los números sobre la recta. Vemos que:

Si ambos números son positivos, la suma es positiva,
como en $^+5 + {}^+3 = {}^+8$;

y si ambos números son negativos, la suma es negativa,
como en $(^-5) + (^-3) = {}^-8$.

Si un número es positivo y el otro es negativo, el número más lejano del origen es el que determina si la suma es positiva o negativa.

Por ejemplo:

En $(^-5) + {}^+3 = {}^-2$
la suma es negativa porque $^-5$, un número más lejano de cero que $^+3$, es negativo.

En $^+5 + (^-3) = {}^+2$
la suma es positiva, porque $^+5$, que está más lejos de cero que $^-3$, es positivo.

Otra manera de decir lo mismo es: la flecha más larga determina si la suma es positiva o negativa. En efecto, esta regla también se aplica en el caso en que ambos números son positivos y en el caso en que ambos son negativos. Observa que en casos como $(^-2) + 2$ y $3 + (^-3)$, las flechas tienen igual longitud pero direcciones opuestas. En tales casos la suma será cero.

Ejercicios 1-3a

1. Halla las sumas que siguen y usa flechas sobre la recta numérica para dibujar los croquis correspondientes.

   (a) $9 + (^-5)$
   (b) $10 + (^-7)$
   (c) $(^-8) + 11$
   (d) $5 + (^-10)$
   (e) $(^-12) + 7$
   (f) $3 + (^-11)$

2. A fin de que cada proposición resulte verdadera, escribe los números que faltan en cada una de las siguientes expresiones:

   (a) $3 + (^-3) = (\quad)$
   (b) $(\quad) + (^-4) = 0$
   (c) $^+6 + (\quad) = 0$
   (d) $(^-75) + 74 = (\quad)$
   (e) $^-(\frac{1}{2}) + (\quad) = 0$
   (f) $\frac{1}{3} + (\quad) = 1$
   (g) $14 + (^-2) = (\quad)$
   (h) $(^-0.45) + 0.45 = (\quad)$

3. Determina la suma en cada uno de los siguientes ejercicios:

   (a) $25 + (^-6)$
   (b) $(^-5) + (^-7)$
   (c) $(^-8) + 3$
   (d) $(^-20) + (^-10)$
   (e) $17 + (^-23)$
   (f) $(^-6) + 9$

4. Escribe un número en cada uno de los espacios vacíos de manera que la suma sea correcta.

   (a) $7 + (\quad) = 2$
   (b) $9 + (\quad) = 0$
   (c) $10 + (\quad) = ^-1$
   (d) $(^-4) + (\quad) = ^-2$
   (e) $(^-8) + (\quad) = ^-16$
   (f) $(^-4) + (\quad) = ^-10$

5. Una compañía informa sobre sus ingresos durante los seis primeros meses de un año, de la siguiente manera:

Enero,	$5,000	de utilidad.	Abril,	$1,000	de utilidad.
Febrero,	$2,000	de utilidad.	Mayo,	$4,000	de pérdida.
Marzo,	$6,000	de pérdida.	Junio,	$3,000	de pérdida.

(a) ¿Cómo podrías expresar estos ingresos mediante números positivos y negativos?

(b) ¿Cuál es el ingreso total durante el período de los seis meses?

(c) ¿Cuál es el ingreso total durante los tres primeros meses del año?

(d) ¿Cuál es el ingreso total durante el cuatrimestre que comprende marzo, abril, mayo y junio?

6. Un joven rema aguas arriba a una velocidad de 4 millas por hora, en un río cuya corriente tiene una velocidad de 2 millas por hora.

(a) ¿Cómo puedes utilizar los números positivos y negativos para representar esas velocidades?

(b) ¿Qué representaría su velocidad real aguas arriba?

7. En cuatro jugadas sucesivas, partiendo de la línea de 20 yardas en su propio territorio, el equipo de fútbol de la Escuela Franklin hace

un avance de 17 yardas, después
un retroceso de 6 yardas, luego
un avance de 11 yardas, y finalmente
un retroceso de 3 yardas.

(a) Representa los avances y retrocesos mediante números positivos y negativos.

(b) ¿Dónde está la pelota después de la cuarta jugada?

(c) ¿Cuál es el avance neto después de las cuatro jugadas?

8. Un aeroplano que viaja a 13,000 pies de altitud sube primero 5,000 pies y baja luego 3,000 pies.
   (a) Representa la altitud final del aeroplano como suma de números positivos y negativos.
   (b) ¿Cuál es la altitud del aeroplano después de la bajada?
9. (a) Imagina una manera de representar el producto $3(^-2)$ por medio de flechas dibujadas sobre la recta numérica. Haz lo mismo en los siguientes ejercicios:
   (b) $5 \cdot (^-1)$
   (c) $2 \cdot {}^-(\frac{1}{4})$

<u>Elementos inversos respecto de la adición</u>

Recuerda que $^+2 + (^-2) = 0$. Esta proposición dice que $^-2$ es el número que, sumado a $^+2$, da cero. Hemos visto en el Volumen I que 0 es el elemento neutral para la adición. Dos números cualesquiera cuya suma es 0 se llaman elementos inversos respecto de la adición. En consecuencia, $^-2$ es el elemento inverso respecto de la adición correspondiente a $^+2$. Llamamos a $^-2$ el <u>inverso aditivo</u> de $^+2$. De igual modo, $^+2$ es el inverso aditivo de $^-2$, y se dice que $^+2$ y $^-2$ son inversos aditivos.

<u>Ejercicios de clase 1-3a</u>

1. Halla el inverso aditivo de cada uno de los números que siguen:

   $7,\ ^-9,\ 11,\ ^-12,\ ^-6,\ 15,\ ^-20,\ 0,\ ^-(\frac{2}{3}),\ \frac{4}{9},\ ^-(\frac{7}{8}),\ \frac{30}{31}.$

2. ¿Cuáles de los siguientes pares son inversos aditivos?
   (a) $^+20,\ ^+20$
   (b) $^-5,\ ^-5$
   (c) $0.5,\ ^-(\frac{1}{2})$
   (d) $^-(\frac{1}{2}),\ \frac{2}{4}$

Sobre la recta numérica vemos que cualquier número y su inverso aditivo están representados por flechas de la misma longitud y en direcciones opuestas, como se indica en el esquema para $^{+}2$ y $^{-}2$.

Si se suman estas flechas "opuestas" de igual longitud, se obtiene siempre cero. Para sumar $^{+}2$ y $^{-}2$, imaginamos un movimiento de 2 unidades desde cero en la dirección negativa, y luego 2 unidades de regreso, en la dirección positiva. Los dos movimientos son uno opuesto del otro y nos vuelven al punto de partida. Los movimientos descritos son realmente "inversos" uno del otro, pues cuando se añade el uno al otro, el resultado final es 0. La recta numérica proporciona, pues, una imagen geométrica del significado de los inversos aditivos; la suma de dos flechas (movimientos) de igual longitud y opuestas es cero.

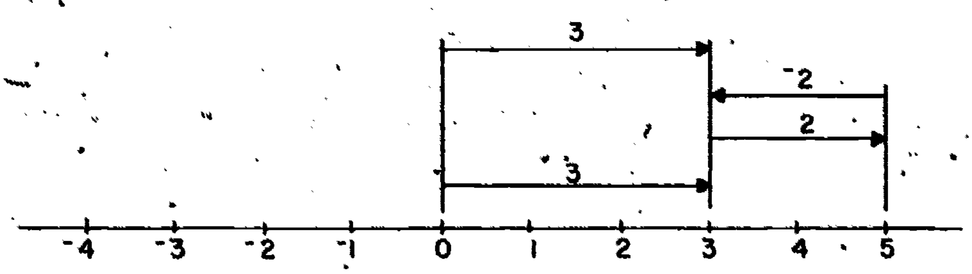
En la adición de un número positivo y un número negativo hemos notado que la flecha más larga determina si la suma es positiva o negativa. La longitud de la flecha de la suma puede obtenerse en la figura de los inversos aditivos. Por ejemplo, en la suma $5 + (^{-}2) = 3$ podemos escribir

$$5 + (^{-}2) = 3 + 2 + (^{-}2)$$

introduciendo la inversa aditiva de la flecha más corta. Entonces, como $2 + (^{-}2) = 0$, tenemos

$$5 + (^{-}2) = 3 + 2 + (^{-}2) = 3 + 0 = 3.$$

Observa que la otra flecha de las dos que componen 5, representa la suma 3.



Este procedimiento es general, como lo ilustran los siguientes ejemplos:

$$8 + (^-7) = 1 + 7 + (^-7) = 1 + 0 = 1$$

$$(^-8) + 7 = (^-1) + (^-7) + 7 = (^-1) + 0 = {}^-1$$

$$19 + (^-26) = 19 + (^-19) + (^-7) = 0 + (^-7) = {}^-7$$

En cada caso, la adición de inversos aditivos da cero, y el número que queda es la suma.

Ejercicios de clase 1-3b

1. Dibuja las flechas correspondientes a los números de los tres ejemplos anteriores. En cada caso, determina la flecha correspondiente a la suma.
2. Efectúa las adiciones que siguen, introduciendo la inversa aditiva de la flecha más corta, y dibuja la operación sobre la recta numérica.

   (a) $10 + (^-5)$ (c) $(^-4) + 3$

   (b) $8 + (^-6)$ (d) $(^-13) + 9$

Ejercicios 1-3b

1. Completa las siguientes expresiones:

   (a) $10 + (^-7) = (\quad) + 7 + (^-7)$

   (b) $(^-14) + 54 = (^-14) + 14 + (\quad)$

   (c) $12 + (^-14) = 12 + (\quad) + (^-2)$

   (d) $23 + (^-18) = (\quad) + (\quad) + (^-18)$

   (e) $(^-36) + 20 = (\quad) + (\quad) + 20$
2. Usando el inverso aditivo, efectúa las sumas que siguen.

   Ejemplo. $28 + (^-20) = 8 + 20 + (^-20) = 8 + 0 = 8$

   (a) $42 + (^-12)$ (d) $6 + (^-17)$

   (b) $(^-12) + 8$ (e) $344 + (^-140)$

   (c) $(^-7) + 35$ (f) $(^-172) + 96$

3. Indica si cada una de las sumas que siguen va a resultar positiva o negativa.

Ejemplo. $(^-172) + 37 \longrightarrow$ negativa.

(a) $26 + (^-24)$

(b) $72 + (^-92)$

(c) $(^-376) + 374$

(d) $(^-4,312) + 4,324$

(e) $1,436,312 + (^-1,436,310)$

(f) $\frac{3}{8} + {}^-(\frac{1}{4})$

(g) ${}^-(\frac{15}{16}) + 0.75$

(h) $\frac{3}{10} + {}^-(\frac{2}{5})$

(i) $\frac{4}{7} + {}^-(\frac{7}{14})$

(j) $(^-0.132) + 0.0132$

(k) $(^-3.172) + 3.1724$

(l) $0.0012 + (^-9)$

(m) $(^-3.025) + 3\frac{1}{4}$

(n) $\frac{5}{12} + {}^-(\frac{7}{16})$

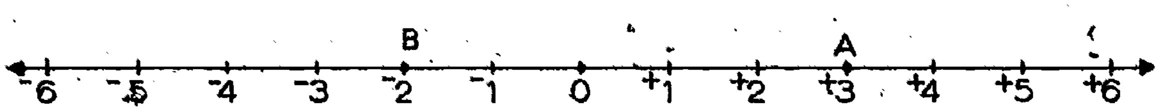
4. Si sabemos que $^+3 > {}^-17$, ¿es verdadera o falsa la siguiente proposición: "La suma de un número positivo y un número negativo siempre tiene el signo del mayor número"? Explica tu respuesta.

5. La suma de un número positivo y un número negativo es cero cuando ____________________.

1-4. Coordenadas

Coordenadas sobre una recta

Consideremos la recta numérica desde un punto de vista diferente. Como hemos visto, siempre se puede asociar un número racional con un punto de la recta. El número asociado de esta manera con un punto de la recta se llama coordenada del punto. En la próxima figura, el número cero se asocia con el punto de referencia llamado origen.



El punto A se denota con el número $^{+}3$, y el punto B con el número $^{-}2$. Escribimos $A(^{+}3)$ para indicar que A es el punto de coordenada $^{+}3$. Del mismo modo, $B(^{-}2)$ significa que B es el punto de coordenada $^{-}2$ sobre la recta.

Recuerda que todo número racional positivo se asocia con un punto de la semirrecta positiva. A todo número racional negativo le corresponde un punto sobre la semirrecta negativa. La coordenada que hemos asignado a un punto de esta manera, nos da dos informaciones: la <u>distancia</u> del origen al punto, y la <u>dirección</u> del origen al punto.

<u>Ejercicios 1-4a</u>

1. Dibuja un segmento de recta numérica de 6 pulgadas de longitud. Marca puntos con separaciones de una pulgada y coloca el origen en el punto medio del segmento. Sobre la recta, fija los siguientes puntos:

$$A(^{-}1),\quad B(\tfrac{5}{2}),\quad C(1),\quad T(0),\quad L\left(^{-}(\tfrac{3}{2})\right),\quad P(^{-}2).$$

2. (a) En el problema 1, ¿qué distancia hay, en pulgadas, entre el punto marcado con T y el punto marcado con L?
   (b) ¿Qué distancia hay entre P y B?
   (c) ¿Qué distancia hay entre L y B?
   (d) ¿Qué distancia hay del origen a A?

3. Utilizando una recta numérica con una pulgada como unidad de longitud, marca los puntos siguientes:

$$R(\tfrac{1}{3}),\quad S(\tfrac{5}{6}),\quad D\left(^{-}(\tfrac{3}{2})\right),\quad F(0),\quad E(\tfrac{3}{2}).$$

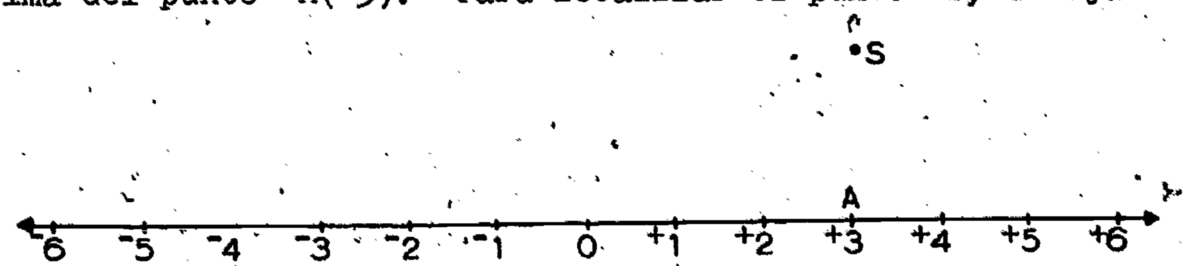
4. Si el segmento de recta del problema 3 fuera una carretera y se la dibujara a una escala tal que 1 pulgada represente 1 milla, ¿qué distancia en millas habría entre los siguientes puntos de la carretera?
   (a) F y R (b) D y E

5. Dibuja una recta numérica en posición vertical en vez de horizontal. Marca tu escala numérica con números positivos por encima del origen y negativos debajo del origen. Marca los puntos que corresponden a los números racionales 0, 1, 2, 3, $^-1$, $^-2$, $^-3$ y $^-4$.

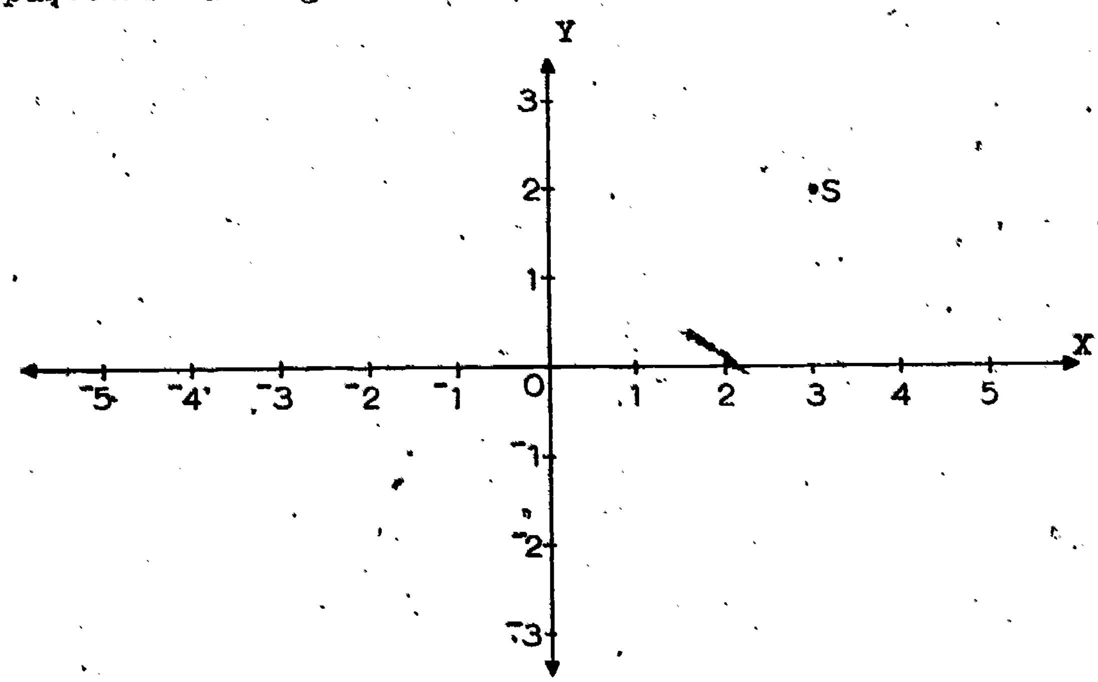
Coordenadas en el plano

Del trabajo previo que has hecho en el presente capítulo, se deduce que las rectas numéricas pueden dibujarse tanto vertical como horizontalmente.

Has aprendido que una coordenada localiza un punto sobre la recta numérica. Un punto tal como S en la figura que sigue, no está sobre la recta numérica y no puede ser individualizado por una sola coordenada. Sin embargo, vemos que S está exactamente encima del punto A($^+3$). Para localizar el punto S, dibuja una



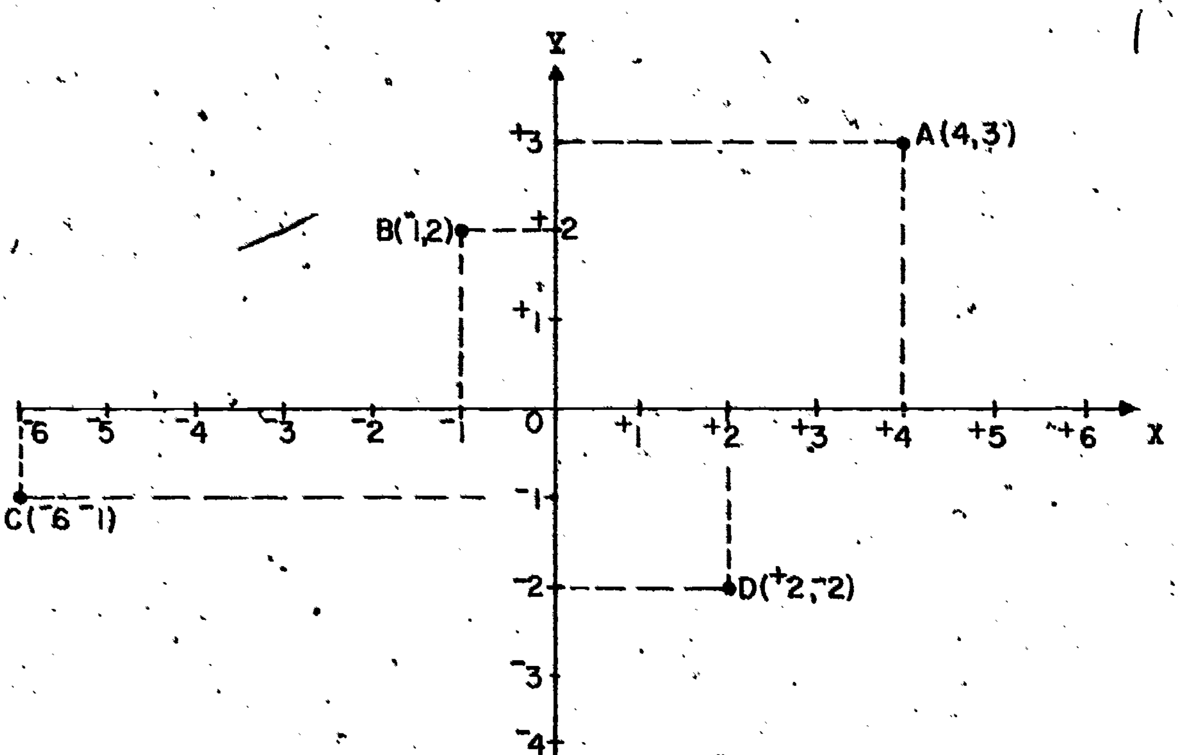
recta numérica vertical, perpendicular a la recta numérica horizontal y de manera que se intersequen en sus orígenes. Tu dibujo debe parecerse al siguiente:



La recta numérica horizontal se llama <u>eje de las abscisas</u> o <u>eje X</u> o <u>primer eje</u> y la recta numérica vertical se llama <u>eje de las ordenadas</u> o <u>eje Y</u> o <u>segundo eje</u>. Cuando nos referimos a ambas rectas, las llamamos <u>ejes coordenados</u> o simplemente <u>ejes</u>.

Para determinar las <u>coordenadas</u> del punto S, traza desde el punto S un segmento de recta perpendicular al eje X en $^+3$. Luego traza desde S una perpendicular al eje Y que lo interseca en $^+2$. Se dice que el punto S tiene una abscisa $^+3$ o una coordenada $^+3$ según X, y una ordenada $^+2$ o una coordenada $^+2$ según Y, lo que se escribe $(^+3, ^+2)$. Usamos paréntesis y siempre escribimos la abscisa antes que la ordenada.

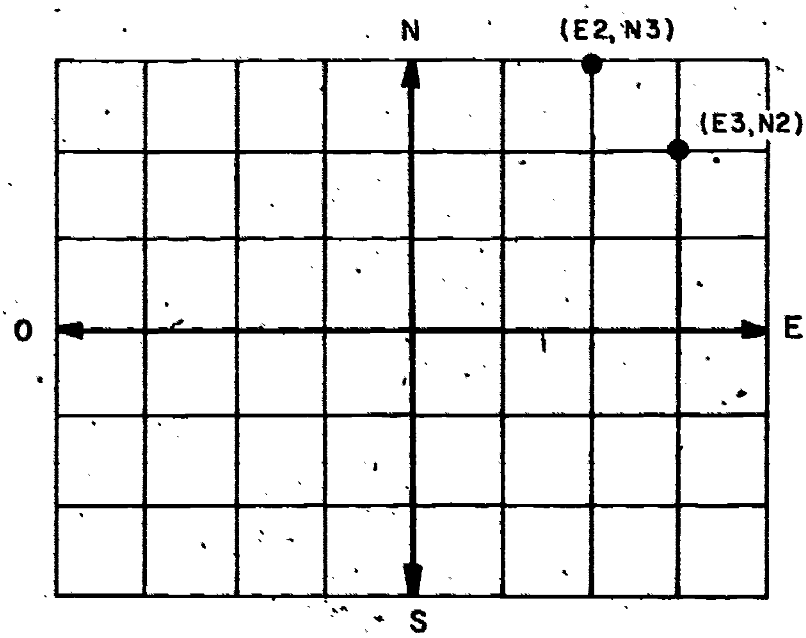
Observa cómo se han situado las coordenadas de los puntos A, B, C y D en el diagrama siguiente:



Entonces P(x, y) representa al punto P en términos de sus coordenadas. Esto se puede repetir para todo punto del plano. Este sistema de coordenadas se llama sistema rectangular porque los ejes forman ángulos rectos y las distancias de los puntos a los ejes se miden a lo largo de las perpendiculares bajadas desde los puntos a los ejes. A todo par ordenado de números racionales le corresponde un punto en el plano coordenado. Al lugar en que está colocado el punto con respecto a los ejes X e Y se le llama marca o traza del punto.

La idea de sistema coordenado no te es nueva. Cuando localizas un punto sobre la superficie de la tierra, lo haces determinando su longitud y su latitud. Observa que el orden en que escribes estos números es importante. Por ejemplo, suponte que tienes la longitud y la latitud de la ciudad donde vives, y accidentalmente cambias los números entre sí. Es posible que resulte la ciudad en medio del océano.

Imagínate que escribes a un amigo para ayudarlo a localizar cierto lugar en una ciudad en que las manzanas de casas son rectangulares (las calles están en ángulos rectos unas respecto de otras). Le indicas que debe partir del centro de la ciudad, caminar 3 cuadras hacia el este y luego 2 hacia el norte (mira la figura). ¿Sería lo mismo decirle que camine 2 cuadras hacia el este y luego 3 hacia el norte? ¡Naturalmente que no! ¿Ves por qué se debe tener mucho cuidado al escribir un par de coordenadas?



Ejercicios 1-4b

1. Dado el conjunto que sigue de pares ordenados de números racionales, localiza los puntos del plano correspondientes a esos pares:

   $\{(4, 1), (1, 0), (0, 1), (2, 4), (4, 4), ({}^{-}1, {}^{-}1), ({}^{-}3, 3), (4, {}^{-}3), ({}^{-}5, 3), (0, {}^{-}5), ({}^{-}6, 0)\}$

2. Traza en papel cuadriculado un par de ejes y dales nombre. Localiza los puntos de los conjuntos siguientes, marcando cada punto con sus coordenadas. Emplea un par de ejes diferentes para cada conjunto.

   Conjunto $A = \{(6, {}^{-}3), ({}^{-}7, {}^{-}1), ({}^{-}9, {}^{-}7), (5, {}^{-}1), ({}^{-}8, 10), (0, 0), ({}^{-}1, {}^{-}1), (4, 3)\}$

   Conjunto $B = \{(1, 1), (6, {}^{-}5), ({}^{-}3, {}^{-}3), (4, {}^{-}10), ({}^{-}9, {}^{-}6), ({}^{-}8, 0), (0, {}^{-}5), ({}^{-}2, {}^{-}5)\}$

3. (a) Marca los puntos del siguiente conjunto:

   $C = \{(0, 0), ({}^{-}1, 0), ({}^{+}1, 0), ({}^{-}2, 0), ({}^{+}2, 0), ({}^{-}3, 0), ({}^{+}3, 0)\}$

   (b) ¿Te parece que todos los puntos indicados en el conjunto C están sobre una misma recta?

   (c) ¿Qué observas acerca de la ordenada de cada uno de esos puntos?

   (d) ¿Hay algún punto de esa recta para el cual la ordenada es diferente de cero?

4. (a) Marca los puntos del siguiente conjunto:

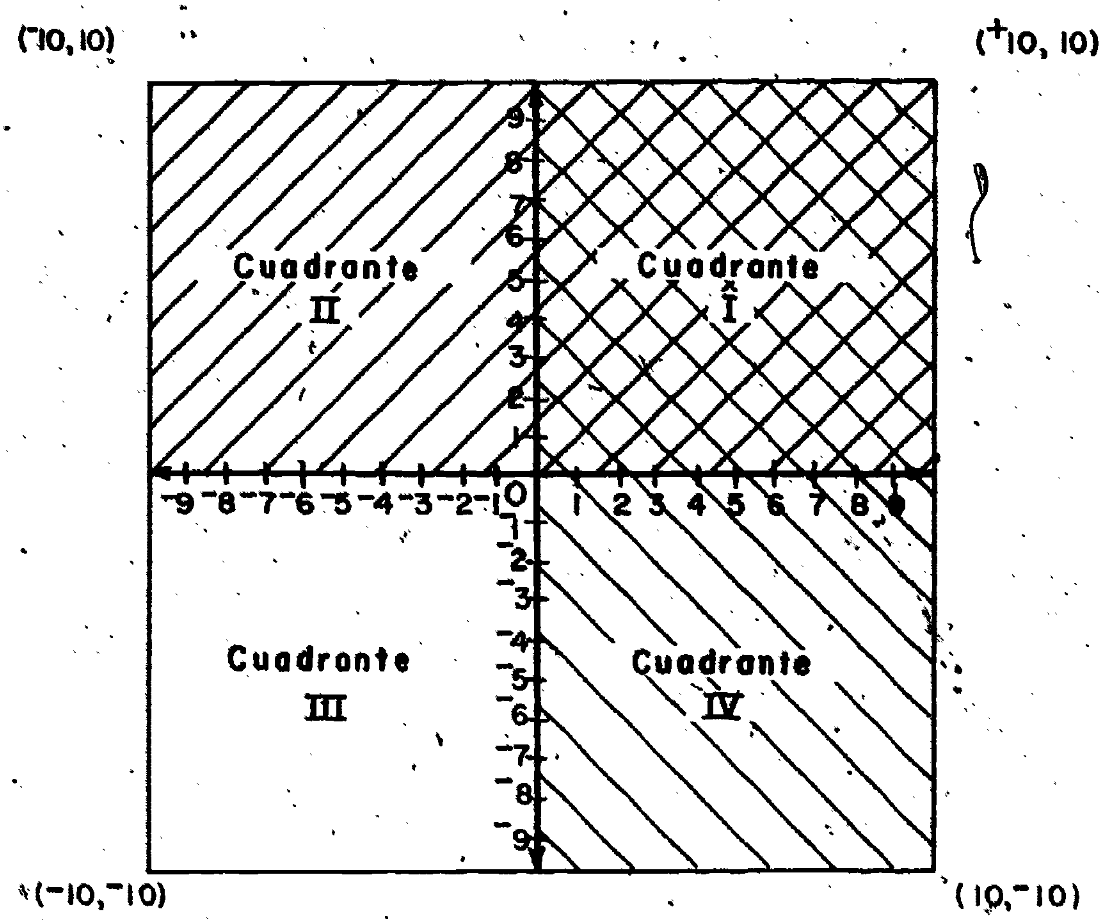
   $D = \{(0, 0), (0, {}^{-}1), (0, {}^{+}1), (0, {}^{-}2), (0, {}^{+}2), (0, {}^{-}3), (0, {}^{+}3)\}$

   (b) ¿Te parece que todos los puntos indicados en el conjunto D están sobre una misma recta?

   (c) ¿Qué observas acerca de la abscisa de cada uno de esos puntos?

   (d) ¿Hay algún punto de esa recta cuya abscisa es diferente de cero?

¿Has observado que los semiplanos que están por encima y por debajo del eje X intersecan a los semiplanos de la derecha y de la izquierda del eje Y? Estas intersecciones se llaman cuadrantes y se numeran en dirección contraria al movimiento de las agujas del reloj comenzando con el cuadrante I en la intersección del semiplano superior del eje X con el semiplano de la derecha del eje Y. Este cuadrante no incluye los puntos del eje positivo de las abscisas ni los puntos del eje positivo de las ordenadas ni el origen.



Los puntos del conjunto intersección de estos dos semiplanos están en el primer cuadrante o cuadrante I. La intersección del semiplano superior del eje de las abscisas con el semiplano que está a la izquierda del eje de las ordenadas es el cuadrante II. El cuadrante III es la intersección del semiplano inferior del eje de las abscisas con el semiplano que está a la izquierda del eje de las ordenadas. El cuadrante IV es la intersección del semiplano inferior del eje de las absicsas con el semiplano que está a la derecha del eje de las ordenadas. Observa que los ejes coordenados no forman parte de ningún cuadrante.

Los números de los pares ordenados pueden ser positivos, negativos o cero, como has visto en los ejercicios. Ambos números de un par pueden ser positivos, o negativos, uno puede ser positivo y otro negativo, uno puede ser cero o ambos pueden ser cero.

Ejercicios de clase 1-4

1. Dados los pares ordenados que siguen, escribe el número del cuadrante en el cual está el punto representado por cada par ordenado.

Pares ordenados	Cuadrante
(a) $(3, 5)$	______
(b) $(1, {}^{-}4)$	______
(c) $({}^{-}4, 4)$	______
(d) $({}^{-}3, {}^{-}1)$	______
(e) $(8, 6)$	______
(f) $(7, {}^{-}1)$	______
(g) $({}^{-}3, {}^{-}5)$	______

2. (a) Si ambos números del par ordenado de coordenadas son positivos, el punto está en el cuadrante ______.
   (b) Si ambos números del par ordenado de coordenadas son negativos, el punto está en el cuadrante ______.
   (c) Si la abscisa de un par ordenado es negativa y la ordenada es positiva, el punto está en el cuadrante ______.
   (d) Si la abscisa de un par ordenado es positiva y la ordenada es negativa; el punto está en el cuadrante ______.

3. (a) Si la abscisa de un par ordenado es cero y la ordenada no es cero, ¿dónde está el punto?
   (b) Si la abscisa de un par ordenado no es cero y la ordenada es cero, ¿dónde está el punto?
   (c) Si ambas coordenadas de un par ordenado son cero, ¿dónde está el punto?

4. Los puntos que están sobre el eje de las abscisas o sobre el eje de las ordenadas no están en ninguno de los cuatro cuadrantes. ¿Por qué no?

Ejercicios 1-4c

1. (a) Marca los puntos del conjunto $L = \{A(^+2, ^+1), B(^+2, ^+3)\}$.
   (b) Utiliza una regla rectilínea para unir A con B. Prolonga el segmento de recta $\overline{AB}$.
   (c) ¿Te parece que la recta $\overleftrightarrow{AB}$ es paralela a alguno de los ejes?
2. (a) Marca los puntos del conjunto $M = \{A(^+2, ^+3), B(^+5, ^+3)\}$.
   (b) Utiliza una regla rectilínea para unir A con B. Prolonga el segmento de recta $\overline{AB}$.
   (c) ¿Te parece que la recta $\overleftrightarrow{AB}$ es paralela a alguno de los ejes?
3. (a) Marca los puntos del conjunto $N = \{A(0, 0), B(^+2, ^+3)\}$.
   (b) Une A con B. Prolonga el segmento de recta $\overline{AB}$.
   (c) ¿Es la recta $\overleftrightarrow{AB}$ paralela a alguno de los ejes?
4. (a) Marca los puntos del conjunto $P = \{A(^+4, ^+4), B(^+2, 0)\}$.
   (b) Une A con B. Prolonga el segmento de recta $\overline{AB}$.
   (c) Marca los puntos del conjunto $Q = \{C(^+6, ^+3), D(0, ^+1)\}$.
   (d) Une C con D. Prolonga el segmento de recta $\overline{CD}$.
   (e) ¿Cuál es el conjunto intersección de las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$?
5. (a) Marca los puntos del conjunto $R = \{A(0, 0), B(^+6, 0), C(^+3, ^+4)\}$ en el plano coordenado.
   (b) Utiliza una regla rectilínea para unir A con B, B con C, y C con A.
   (c) ¿Es este triángulo escaleno, isósceles o equilátero?
6. (a) Marca los puntos del conjunto $S = \{A(^+2, ^+1), B(^-2, ^+1), C(^-2, ^-3), D(^+2, ^-3)\}$.
   (b) Utiliza una regla rectilínea para unir A con B, B con C, C con D, y D con A.
   (c) ¿Es la figura un cuadrado?
   (d) Dibuja las diagonales de la figura.
   (e) Las coordenadas del punto de intersección de las diagonales parecen ser ________.
7. (a) Marca los puntos del conjunto $T = \{A(^+2, ^+1), B(^+3, ^+3), C(^-2, ^+3), D(^-3, ^+1)\}$.
   (b) Utiliza una regla rectilínea para unir A con B, B con C, C con D, y D con A.

(c) ¿Cuál es el nombre del cuadrilátero formado?

(d) Traza las diagonales del cuadrilátero ABCD.

(e) Parecen ser __________ las coordenadas del punto de intersección de las diagonales.

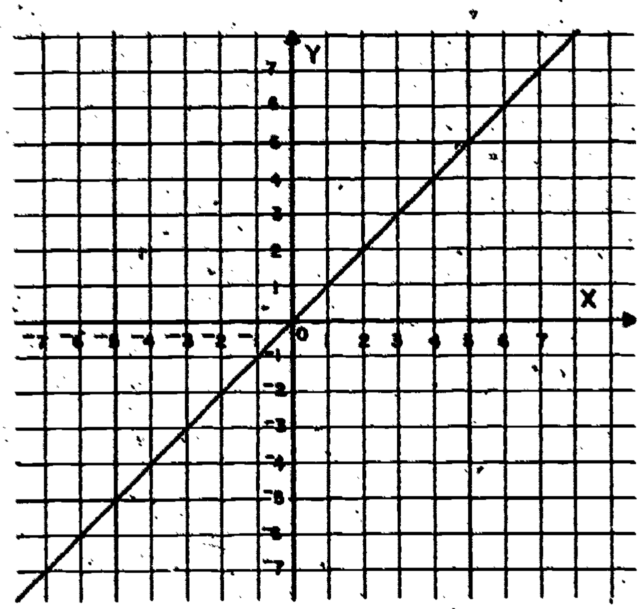
1-5. Gráficas

Consideremos el conjunto de puntos cuyas coordenadas (x, y) satisfacen esta condición:

$$y = x$$

Dibuja un par de ejes coordenados y dales nombre. Localiza los siguientes puntos: $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(5, 5)$, $(^-2, ^-2)$ y $(^-4, ^-4)$. La condición $y = x$ es satisfecha por cada uno de estos puntos porque en cada caso la abscisa es igual a la ordenada. ¿Puedes hallar otro punto del plano cuyas abscisa y ordenada sean iguales?

Si has marcado correctamente los puntos de la lista anterior, podrás trazar una recta que los contiene, la que también contiene otros puntos para los cuales $y = x$.

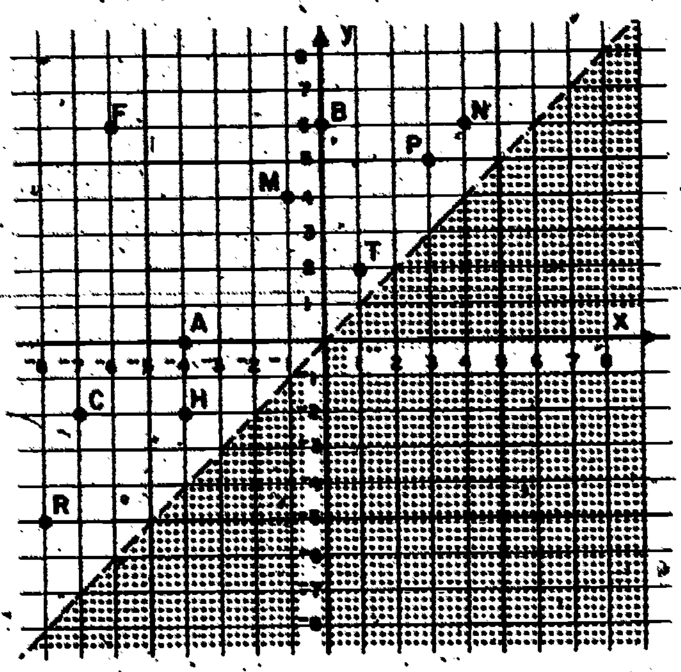


Gráfica de $y = x$

¿Hay algún punto sobre esta recta cuya ordenada sea diferente de su abscisa? La gráfica del conjunto de puntos descrito por la condición $y = x$ es la recta que pasa por el origen, se extiende por los cuadrantes I y III, y forma ángulos de igual medida con los ejes coordenados.

Ejercicios de clase 1-5

Para estos ejercicios, usa la figura de la derecha.



1. Acabamos de ver que una recta contiene todos los puntos que satisfacen la condición $y = x$. Consideremos ahora la condición $y > x$. El par ordenado $(3, 5)$ satisface esta condición. ¿Qué letra lo designa en la figura? Otro par ordenado que satisface la condición $y > x$ es $(^-1, 4)$. ¿Qué letra designa este punto en la figura? Algunos otros pares que satisfacen esa condición son: $(1, 2)$, $(4, 6)$, $(^-4, 0)$, $(0, 6)$ y $(^-6, 6)$. ¿Qué letras se han empleado para designar esos puntos?

2. Hasta ahora todos los puntos cuyos pares ordenados satisfacen la condición $y > x$ parecen estar colocados encima de la recta. Deberemos también examinar las coordenadas de los puntos C, H y R, pues también están encima de la recta. ¿Es $(^-2, ^-4)$ ó $(^-4, ^-2)$ el par ordenado designado con H?

Naturalmente, dices que es $(^-4,\ ^-2)$. No olvides que esto significa $x = {}^-4$ e $y = {}^-2$. ¿Satisfacen estos valores la condición $y > x$? Verifica si los puntos C y R "pertenecen" a la condición $y > x$. ¿Hay alguna diferencia entre la condición $y > x$, y la condición $x < y$?

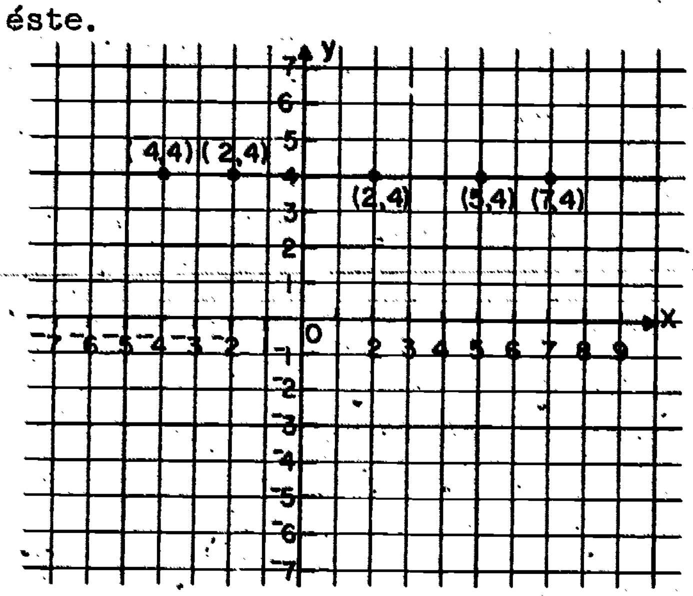
3. Debes recordar que una recta en un plano determina dos semiplanos. ¿Cómo se puede usar esta idea para describir el conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen la condición $y > x$?

4. ¿Dónde están los puntos cuyas coordenadas satisfacen $y < x$? Comprueba marcando mentalmente los puntos correspondientes a los pares ordenados $(1,\ ^-3)$, $(4,\ 1)$, $(2,\ 0)$, $(^-5,\ ^-2)$ y $(4,\ ^-7)$. ¿Encuentras que todos estos puntos están en el semiplano por debajo de la recta?

5. ¿Dónde están los puntos cuyas coordenadas satisfacen $x > y$? ¿Están los puntos cuyas coordenadas satisfacen $x = y$ en alguno de los semiplanos determinados por esta recta? Explica tu respuesta.

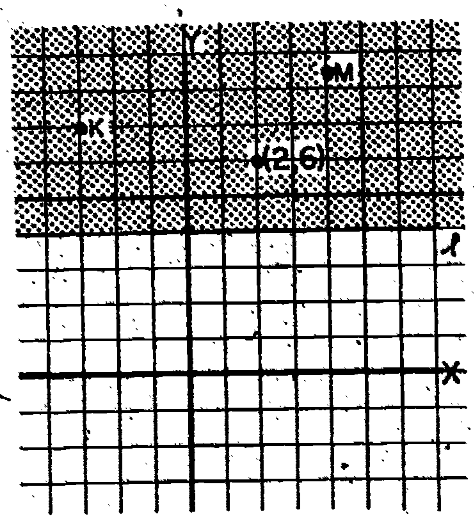
Considera la condición $y = 4$, que se satisface para los pares ordenados: $(2,\ 4)$, $(5,\ 4)$, $(^-2,\ 4)$, $(7,\ 4)$ y $(^-4,\ 4)$. La condición se satisface para cualquier par ordenado cuya ordenada es 4, independientemente del valor de su abscisa.

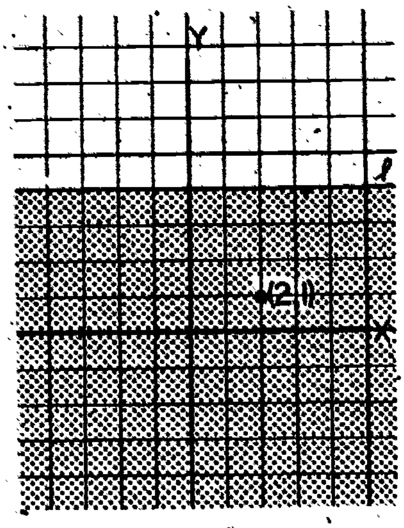
La gráfica del conjunto de puntos descrito por la condición $y = 4$ es una recta paralela al eje de las abscisas, 4 unidades por encima de éste.



Consideremos ahora las siguientes condiciones:

(a) $y > 4$ (b) $y < 4$





En el diagrama (a), la recta ℓ es la gráfica del conjunto de puntos descrito por la condición $y = 4$. ¿Describe la condición $y = 4$ al par ordenado $(2, 6)$? Como la ordenada de este par ordenado es mayor que 4, lo describe la condición $y > 4$. ¿Hay otros puntos del plano cuyas ordenadas son mayores que 4? Localiza dos puntos más, K y M, cuyas ordenadas sean mayores que 4. ¿Están estos puntos por encima de la recta ℓ? Sí, están en la región sombreada, que es uno de los semiplanos determinados por la recta $y = 4$.

La gráfica del conjunto de puntos descrito por la condición $y > 4$ está en el semiplano superior de la recta paralela al eje de las abscisas, y 4 unidades por encima de este eje. La recta no es parte de la gráfica.

En la parte sombreada del diagrama (b) están los puntos que satisfacen la condición $y < 4$. Localiza el punto $(2, 1)$ en esa región. Como su ordenada es menor que 4, lo describe la condición $y < 4$. Localiza en el plano otros puntos de ordenadas menores que 4. ¿Están esos puntos en el semiplano inferior de la recta ℓ? Toma otros puntos del semiplano inferior determinado por la recta ℓ

para ver si satisfacen la condición $y < 4$.

La gráfica del conjunto de puntos descrito por la condición $y < 4$ está en el semiplano inferior determinado por la recta paralela al eje de las abscisas y situada 4 unidades más arriba de este eje.

Ejercicios 1-5

1. Dibuja la gráfica del conjunto de puntos determinado por cada una de las condiciones que se indican a continuación. Usa ejes de coordenadas diferentes para cada gráfica.

(a) $y = {}^{+}2$	(g) $x = {}^{-}3$
(b) $y > {}^{+}2$	(h) $x > {}^{-}3$
(c) $y < {}^{+}2$	(i) $x < {}^{-}3$
(d) $x = 3$	(j) $y = {}^{-}2$
(e) $x > 3$	(k) $y > {}^{-}2$
(f) $x < 3$	(l) $y < {}^{-}2$

(m) Compara las gráficas obtenidas en (a), (b) y (c).

(n) Compara las gráficas obtenidas en (d), (e) y (f).

2. Los pares ordenados $(0, 3)$, $(2, 5)$, $({}^{-}3, 0)$, $({}^{-}1, 2)$ y $({}^{-}7, {}^{-}4)$ son algunos de los que satisfacen la condición $y = 3 + x$.

   (a) Marca los puntos correspondientes a estos pares ordenados.

   (b) Traza la recta que pasa por esos puntos.

   (c) Pinta con un lápiz de color el semiplano que contiene los puntos cuyas coordenadas satisfacen la condición $y > 3 + x$.

1-6. Multiplicación de números racionales

En la sección precedente hemos dibujado gráficas de algunas ecuaciones simples. Si deseamos construir la gráfica de una ecuación como $y = ({}^{-}2)x$, utilizando números positivos y negativos para x, necesitaremos encontrar productos tales como $({}^{-}2) \cdot 3$

y $(^-2) \cdot (^-4)$. El trabajo que hemos realizado en este capítulo y en los precedentes nos ha preparado para efectuar multiplicaciones en las cualès uno o más de los factores sean números negativos. En los Ejercicios 1-3, empleaste en varios casos la recta numérica para hallar productos que contenían números negativos. En el problema 12 de esta sección, se te pedirá que calcules productos como $(^-2) \cdot 3$ empleando la recta numérica. Sin embargo, consideremos primero este problema desde otro punto de vista.

En tus estudios anteriores debes haber considerado el conjunto de los múltiplos de 2. Si los elementos de este conjunto S se escriben ordenadamente, cada número puede ser obtenido sumando 2 al que le precede.

$$S = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$$

De manera semejante, cualquier número (excepto el primero) del conjunto ordenado de los múltiplos de 7, puede obtenerse sumando 7 al que le precede.

$$T = \{0, 7, 14, 21, 28, \ldots\}$$

Para el conjunto T, también podemos decir que cada número se puede obtener restando 7 del que le sigue. Por ejemplo, 28 sigue a 21, y $21 = 28 - 7$.

Probablemente has construído tablas de multiplicar como la siguiente:

×	3	4	5
4	12	16	20
5	15	20	25
6	18	24	30
7	21	28	35

En esta tabla, 30 es el resultado del producto $6 \cdot 5$. Esta tabla de multiplicar sugiere una manera de imaginar los productos de dos números racionales cuando uno de ellos, o ambos, son números negativos.

×	$^{-}2$	$^{-}1$	0	1	2	3
$^{-}2$			0			
$^{-}1$			0			
0	0	0	0	0	0	0
1			0	1	2	3
2			0	2	4	6
3			0	3	6	9

Nuestros conocimientos de aritmética nos han permitido llenar algunas de las casillas de la tabla anterior. También hemos utilizado la propiedad de que el producto de un número negativo por 0 es 0. Para completar la tabla observemos, por ejemplo, que cuando vamos de abajo hacia arriba en la columna de la derecha, cada número es 3 unidades menor que el número que está inmediatamente debajo de él. A esta columna la llamaremos "columna 3". Entonces, la "columna 3" resultará del siguiente modo:

$^{-}6$
$^{-}3$
0
3
6
9

De manera análoga, la "fila 3" será.

$^{-}6$	$^{-}3$	0	3	6	9

Aplicando esta noción al resto de las casillas, la tabla se completa como se ve en la siguiente página.

$\times$	$^{-}2$	$^{-}1$	0	1	2	3
$^{-}2$	4	2	0	$^{-}2$	$^{-}4$	$^{-}6$
$^{-}1$	2	1	0	$^{-}1$	$^{-}2$	$^{-}3$
0	0	0	0	0	0	0
1	$^{-}2$	$^{-}1$	0	1	2	3
2	$^{-}4$	$^{-}2$	0	2	4	6
3	$^{-}6$	$^{-}3$	0	3	6	9

En particular, vemos que la fila superior, que es la "fila $^{-}2$", se completa así:

4	2	0	$^{-}2$	$^{-}4$	$^{-}6$

Con otras palabras, si conservamos las propiedades para la multiplicación de los números naturales, como las hemos recordado para los múltiplos de 2 y de 7, debemos aceptar los siguientes productos:

$$(^{-}2) \cdot (^{-}2) = 4 \quad \text{y} \quad (^{-}2) \cdot 3 = {}^{-}6$$

Debes observar resultados semejantes en otras partes de la tabla. Para cada columna y cada fila, la diferencia entre dos números consecutivos es un número fijo. En lo que a esta tabla se refiere, el producto de dos números negativos es un número positivo, y el producto de un número negativo por un número positivo (en cualquier orden) es un número negativo. Estas conclusiones son efectivamente correctas para todos los números racionales positivos y negativos. Sin embargo, está claro que no hemos demostrado estos resultados ni los hemos dado como parte de una definición. Solamente hemos mostrado una razón por la cual las conclusiones son plausibles.

Otra razón para adoptar las reglas anteriores en la multiplicación es que estas reglas nos permiten conservar las propiedades conmutativa, distributiva y asociativa usuales. Por ejemplo:

$$3 + (^-3) = 0$$
$$2 \cdot [3 + (^-3)] = 2 \cdot 0 = 0$$
$$2 \cdot [3 + (^-3)] = 2 \cdot 3 + 2 \cdot (^-3) = 6 + 2 \cdot (^-3)$$
$$6 + 2 \cdot (^-3) = 0$$

Aquí vemos que $2 \cdot (^-3)$ es el inverso aditivo de 6. Además, sabemos que $^-6$ es el inverso aditivo de 6.

Por consiguiente, debemos tener $2 \cdot (^-3) = {}^-6$. En general, el producto de un número negativo por un número positivo debe ser un número negativo.

También $4 + (^-4) = 0$
$$(^-5) \cdot [4 + (^-4)] = (^-5) \cdot 0 = 0$$
$$(^-5) \cdot [4 + (^-4)] = (^-5) \cdot 4 + (^-5) \cdot (^-4)$$

Hemos mostrado anteriormente que $(^-5) \cdot 4 = 4 \cdot (^-5) = {}^-20$, y por consiguiente, $(^-20) + (^-5) \cdot (^-4) = 0$.

Esto significa que $(^-5) \cdot (^-4)$ es el inverso aditivo de $^-20$. Sabemos que $^+20$ es el inverso aditivo de $^-20$, luego estos dos números deben ser iguales y $(^-5) \cdot (^-4) = {}^+20$; es decir, el producto de dos números negativos debe ser un número positivo.

Ejercicios 1-6

1. Observa la tabla de multiplicar más grande que hemos completado en esta sección. ¿En qué filas crecen los productos cuando vamos de izquierda a derecha?
2. Respecto de la misma tabla, ¿en qué columnas decrecen los productos cuando vamos hacia abajo?
3. Da, en orden correcto, los productos de 7 por los enteros desde $^-4$ hasta 6.
4. Da, en orden correcto, los productos de $^-4$ por los enteros desde $^-5$ hasta 5.
5. Completa la tabla que aparece a continuación. Si lo necesitas para darte cuenta del modelo, suma las columnas apropiadas de la derecha, o suma las filas apropiadas del

final de la tabla. Puede convenirte completar primero las filas y columnas para 0 y 1.

×	$^{-}3$	$^{-}2$	$^{-}1$	0	1	2
$^{-}5$						
$^{-}4$						
$^{-}3$						
$^{-}2$						
$^{-}1$						
0						
1						

6. Empleando la tabla anterior, verifica la propiedad conmutativa de la multiplicación en estos ejemplos:
   (a) $^{-}2$ y 1 (b) $^{-}3$ y 0 (c) $^{-}2$ y $^{-}3$ (d) $^{-}1$ y $^{-}3$
7. Ilustra la propiedad asociativa de la multiplicación, empleando estos números: $^{-}2$, $^{-}1$ y 5.
8. Usando como una suma los dos últimos números de cada conjunto, ilustra la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición para los siguientes conjuntos de números:
   (a) $^{-}4$, 3, 8 (b) $^{-}2$, $^{-}3$, 6 (c) $^{-}10$, $^{-}8$, $^{-}1$
9. Halla los siguientes productos:

(a) $(^{-}4)\cdot 0$ (f) $49\cdot(^{-}5)$ (k) $4\cdot 3\cdot(^{-}5)$

(b) $(^{-}4)\cdot 2$ (g) $(^{-}6)\cdot(^{-}9)$ (l) $(^{-}6)\cdot 8\cdot(^{-}12)$

(c) $(^{-}4)\cdot 5$ (h) $(^{-}10)\cdot(^{-}60)$ (m) $(^{-}3)\cdot(^{-}2)\cdot(^{-}11)$

(d) $8\cdot(^{-}3)$ (i) $(^{-}21)\cdot(^{-}43)$ (n) $(^{-}10)\cdot(^{-}8)\cdot{}^{-}(\frac{2}{3})$

(e) $17\cdot(^{-}2)$ (j) $(^{-}0.6)\cdot(^{-}1.4)$ (o) ${}^{-}(\frac{4}{3})\cdot(^{-}16)\cdot{}^{-}(\frac{3}{4})$

10. Halla los siguientes productos:

(a) $(^-1) \cdot 4$
(b) $(^-1) \cdot 5$
(c) $(^-1) \cdot 11$
(d) $8 \cdot (^-1)$
(e) $77 \cdot (^-1)$

11. Muestra el uso de la recta numérica para determinar los productos por adición repetida.

(a) $3 \cdot (^-2)$ (b) $5 \cdot (^-2)$ (c) $4 \cdot (^-3)$

12. Di con tus propias palabras cómo se podría usar la recta numérica para hallar el producto $(^-4) \cdot 3$. (Sugerencia: Emplea la propiedad conmutativa de la multiplicación.)

13. Un equipo de fútbol tiene la pelota en su propia línea de 45 yardas y pierde luego dos yardas en cada una de las próximas tres jugadas sucesivas.

(a) ¿Cuál será su nueva posición?
(b) Escribe una expresión que contenga números negativos para obtener la respuesta a (a).

14. ¿Cuánto debe ser n para que $2n = {}^-18$?

15. ¿Cuánto es n en cada una de las siguientes ecuaciones?

(a) $3n = {}^-36$
(b) $5n = {}^-75$
(c) $(^-2)n = 10$
(d) $(^-3)n = 30$
(e) $(^-2)n = {}^-8$
(f) $(^-6)n = {}^-12$

16. En estos ejercicios de multiplicación, escribe un número en el paréntesis de manera que el enunciado sea correcto.

(a) $(\ ) \cdot 6 = {}^-12$
(b) $5 \cdot (\ ) = {}^-15$
(c) $(^-10) \cdot (\ ) = 100$
(d) $(^-5) \cdot (\ ) = 20$
(e) $(^-5) \cdot (\ ) = {}^-20$
(f) $11 \cdot (\ ) = {}^-110$
(g) $(^-1) \cdot (\ ) = 1$
(h) $(^-7) \cdot (\ ) = 0$
(i) $1 \cdot (\ ) = {}^-1$
(j) $6 \cdot (\ ) = {}^-36$
(k) $(^-9) \cdot (\ ) = 81$
(l) $5 \cdot (\ ) = {}^-30$
(m) $(\ ) \cdot (^-10) = {}^-90$
(n) $(\ ) \cdot (^-50) = 100$
(o) $(^-6) \cdot (\ ) = {}^-60$
(p) ${}^-(\frac{1}{2}) \cdot (\ ) = {}^-1$

17. En estos ejercicios, halla los productos:

(a) $(^-6) \cdot (^-10)$

(b) $(^-3) \cdot (^-4)$

(c) $\frac{5}{2} \cdot 6$

(d) $^-(\frac{21}{3}) \cdot (^-6)$

(e) $^-(\frac{23}{4}) \cdot (^-4)$

(f) $(^-75) \cdot (^-4)$

(g) $(^-4) \cdot (^-10)$

(h) $4 \cdot (^-10)$

(i) $(^-10) \cdot 4$

(j) $(^-6) \cdot (^-7)$

(k) ($^-$[illegible]5) $\cdot (^-4)$

(l) $(^-20) \cdot {^-(\frac{11}{2})}$

(m) $16 \cdot (^-12)$

(n) $(^-16) \cdot (^-12)$

(o) $(^-45) \cdot (^-3)$

(p) $25 \cdot (^-3)$

(q) $(^-27) \cdot 0$

(r) $(^-16) \cdot 1$

(s) $20 \cdot (^-10) \cdot (^-5)$

(t) $(^-3) \cdot (^-5) \cdot (^-4)$

(u) $(^-5) \cdot 6 \cdot (^-2)$

(v) $(^-4) \cdot (^-5) \cdot 3$

(w) $(^-2) \cdot (^-1) \cdot (^-3)$

(x) $(^-4) \cdot (^-2) \cdot {^+2}$

(y) $(^-3) \cdot (^-3) \cdot (^-3)$

(z) $(^-2) \cdot 2 \cdot (^-2)$

1-7. División de números racionales

Sabemos que si $3 \cdot n = 39$, entonces $n = 13$, pues $3 \cdot 13 = 39$. Además, en la definición de número racional (Capítulo 6, Volumen I), hemos llamado a $\frac{39}{3}$ (ó $39 \div 3$) el número racional n para el cual $3 \cdot n = 39$.

$$\frac{39}{3} = 39 \div 3 = 13.$$

Apliquemos los métodos que hemos utilizado en la división de números racionales en el séptimo grado, a la división de números racionales que contienen números positivos y negativos.

Halla n si $2n = {}^-18$.

Sabemos que $2({}^-9) = {}^-18$.

Entonces $n = {}^-9$ ó $(\frac{{}^-18}{2})$.

También $({}^-18) \div 2 = {}^-9$.

En esta sección, estudiaremos la división solamente como la operación inversa de la multiplicación. Para hallar $({}^-8) \div ({}^-2)$, imaginamos que

$$({}^-8) \div ({}^-2) = n \quad ó \quad ({}^-2) \cdot n = {}^-8$$

$n = 4$, puesto que $({}^-2) \cdot 4 = {}^-8$

$$({}^-8) \div ({}^-2) = 4$$

La pregunta "¿Cuánto es 16 dividido por ${}^-4$?" significa lo mismo que esta otra: "¿Por qué número se puede multiplicar ${}^-4$ para obtener 16?" Sabemos que $({}^-4) \cdot ({}^-4) = 16$. Entonces,

$$16 \div ({}^-4) = {}^-4$$

¿Cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos?

(a) $({}^-63) \div ({}^-9) = 7$

(b) $45 \div ({}^-5) = 9$

(c) $({}^-8) \cdot ({}^-13) = 104$

(d) $({}^-2) \cdot {}^-(\frac{3}{2}) = 3$

(e) $({}^-2) \div 3 = {}^-(\frac{3}{2})$

(f) $3 \div {}^-(\frac{3}{2}) = {}^-2$

Podrás mostrar que todos estos enunciados son verdaderos, salvo (b) y (e).

Antes de comenzar los ejercicios, estudia los enunciados que se dan a continuación y cerciórate de que sabes por qué son verdaderos.

$({}^-7) \cdot ({}^-5) = 35$	$35 \div ({}^-7) = {}^-5$	$35 \div ({}^-5) = {}^-7$
$({}^-7) \cdot 5 = {}^-35$	$({}^-35) \div ({}^-7) = 5$	$({}^-35) \div 5 = {}^-7$
$7 \cdot \frac{5}{7} = 5$	$5 \div 7 = \frac{5}{7}$	$5 \div \frac{5}{7} = 7$
$7 \cdot {}^-(\frac{5}{7}) = {}^-5$	$({}^-5) \div 7 = {}^-(\frac{5}{7})$	$({}^-5) \div {}^-(\frac{5}{7}) = 7$

¿Cuál es el <u>inverso multiplicativo</u> de $^-(\frac{4}{3})$? Sabemos que $^-(\frac{4}{3})$ <u>y</u> n son inversos multiplicativos si

$$^-(\tfrac{4}{3}) \cdot n = 1$$

Puesto que $$(\tfrac{4}{3}) \cdot (\tfrac{3}{4}) = 1$$

y $$^-(\tfrac{4}{3}) \cdot {^-(\tfrac{3}{4})} = 1$$

tenemos $$n = {^-(\tfrac{3}{4})}$$

Por consiguiente, $^-(\frac{3}{4})$ es el inverso multiplicativo de $^-(\frac{4}{3})$.

<u>Ejercicios 1-7</u>

1. Determina los productos:

   (a) $(^-4) \cdot 7$ (d) $3 \cdot (^-24)$ (g) $^-(\frac{3}{4}) \cdot 4$

   (b) $(^-4) \cdot (^-3)$ (e) $(^-8) \cdot (^-9)$ (h) $(^-10) \cdot {^-(\frac{2}{5})}$

   (c) $2 \cdot (^-6)$ (f) $(^-21) \cdot (^-35)$ (i) $^-(\frac{5}{6}) \cdot {^-(\frac{12}{25})}$

2. Determina los cocientes:

   (a) $(^-28) \div 7$ (d) $(^-72) \div 3$ (g) $(^-3) \div 4$

   (b) $12 \div (^-3)$ (e) $72 \div (^-9)$ (h) $4 \div {^-(\frac{2}{5})}$

   (c) $(^-12) \div 2$ (f) $735 \div (^-35)$ (i) $\frac{2}{5} \div {^-(\frac{5}{6})}$

3. Completa la tabla:

x	$\frac{1}{2}x$
4	
	1
0	
$^-2$	
	$^-2$
$^-5$	
$^-6$	

4. Completa la tabla:

x	^-4x
2	
	$^-6$
1	
	0
	2
$^-(\frac{3}{2})$	
$\frac{3}{4}$	

5. Halla r de manera que se conviertan en enunciados verdaderos las siguientes proposiciones:

(a) $3r = 17$ (d) $(^-3)r = {}^-21$ (g) $(^-7)r = 8$

(b) $5r = {}^-10$ (e) $2r = \frac{3}{8}$ (h) $(^-6)r = {}^-(\frac{18}{3})$

(c) $(^-2)r = 6$ (f) $3r = {}^-(\frac{3}{2})$ (i) $10r = {}^-(\frac{25}{30})$

6. Escribe el inverso multiplicativo de cada número del conjunto P:

$$P = \{6, \frac{3}{2}, 1, \frac{5}{6}, {}^-1, {}^-(\frac{3}{2}), {}^-(\frac{7}{3})\}$$

7. Efectúa las divisiones indicadas a continuación:

(a) $\frac{^-18}{^-9}$ (g) $\frac{^-100}{^-20}$ (m) $\frac{64}{^-16}$

(b) $\frac{^-25}{5}$ (h) $\frac{^-36}{^-12}$ (n) $\frac{750}{^-30}$

(c) $\frac{^-30}{6}$ (i) $\frac{^-432}{12}$ (o) $\frac{0}{^-6}$

(d) $\frac{^-30}{^-6}$ (j) $\frac{^-441}{^-21}$ (p) $\frac{^-39}{^-3}$

(e) $\frac{30}{^-6}$ (k) $\frac{^-484}{22}$ (q) $\frac{72}{^-6}$

(f) $\frac{30}{6}$ (l) $\frac{^-169}{^-13}$ (r) $\frac{90}{^-15}$

8. Halla n en cada una de las siguientes ecuaciones:

   (a) $(^-2) + 3 = n$ (b) $2 + (^-3) = n$

9. Escribe $^-(\frac{2}{3})$ como cociente, de dos maneras distintas.

10. Halla n, si

    (a) $7n = {}^-6$ (b) $(^-7)n = 6$

11. Escribe dos proposiciones, empleando n, en las cuales $n = {}^-(\frac{7}{6})$ convertiría cada proposición en un enunciado verdadero.

12. Halla n, si

    (a) $(^-25)n = {}^-92$ (c) $(^-4)n = {}^-(\frac{4}{3})$

    (b) $(^-92) + (^-25) = n$ (d) $^-(\frac{4}{3}) + (^-4) = n$

13. Escribe $\frac{92}{25}$ de otra manera como cociente, empleando dos de estos números: 92, $^-92$, 25 ó $^-25$.

14. Escribe dos proposiciones numéricas que empleen n, de manera que $n = \frac{92}{25}$ convierta cada proposición en un enunciado verdadero.

15. Completa estos enunciados:

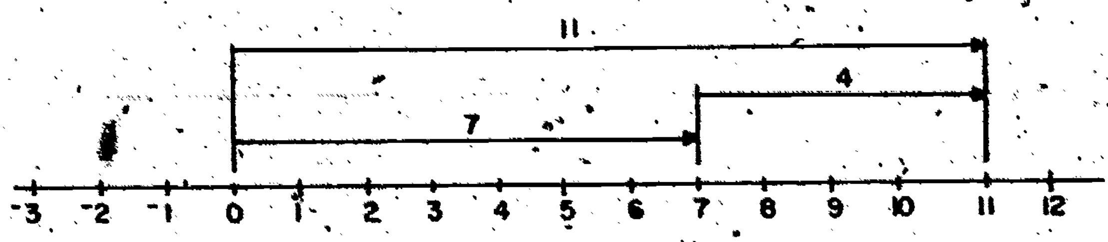
    (a) Si a y b son enteros positivos o negativos, entonces $\frac{a}{b}$ es el número racional x para el cual ________.

    (b) Si $\frac{a}{b}$ es un número racional, entonces $\frac{a}{b}$ es positivo si a y b son ________________.

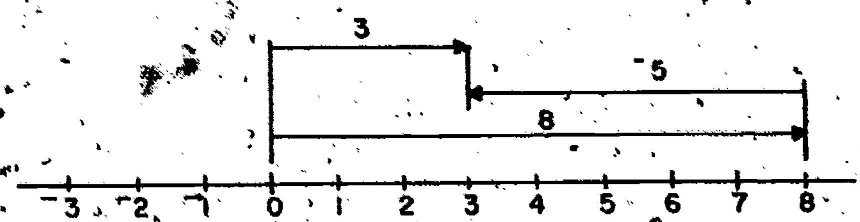
    (c) Si $\frac{a}{b}$ es un número racional, entonces $\frac{a}{b}$ es negativo si a ó b es ____________ y el otro es ____________.

1-8. Sustracción de números racionales

La recta numérica será útil en la comprensión de la sustracción de números racionales. En aritmética hemos aprendido, por ejemplo, que si $7 + 4 = 11$, entonces $11 - 4 = 7$. Este enunciado puede explicarse mediante la siguiente figura:



Usaremos también esta propiedad para los números negativos. Como $8 + (^-5) = 3$, entonces $3 - (^-5) = 8$. La figura te puede ayudar a comprender esto.



La propiedad que estamos utilizando dice que si $a + b = c$, entonces $c - b = a$. Para hallar $7 - 4$ debemos encontrar el número que sumado a 4 dé 7. Como $4 + 3 = 7$, se concluye que $7 - 4 = 3$.

Para hallar $(^-7) - 4$, debemos imaginar un número que sumado a 4, dé $^-7$. Como $(^-11) + 4 = {^-7}$, resulta que $(^-7) - 4 = {^-11}$.

En virtud de la propiedad conmutativa de la adición, $a + b = b + a$, todo enunciado referente a una adición da dos enunciados referentes a la sustracción. Por ejemplo:

$3 + (^-2) = 1$, de manera que $1 - (^-2) = 3$ y $1 - 3 = {^-2}$

Observa también que $3 - 2 = 1$ y $3 + (^-2) = 1$. Entonces vemos que $3 - 2 = 3 + (^-2)$.

Con otras palabras, el resultado de restar 2 es el mismo que el de <u>sumar</u> el inverso aditivo de 2. Los ejemplos anteriores pueden servir para verificar esta propiedad general.

Como $3 - (^-5) = 8$ y $3 + 5 = 8$,
entonces $3 - (^-5) = 3 + 5$.
Como $7 - 4 = 3$ y $7 + (^-4) = 3$,
entonces $7 - 4 = 7 + (^-4)$.

Como $(^-7) - 4 = {}^-11$ y $(^-7) + (^-4) = {}^-11$,
entonces $(^-7) - 4 = (^-7) + (^-4)$.
Como $1 - (^-2) = 3$ y $1 + 2 = 3$,
entonces $1 - (^-2) = 1 + 2$.
Como $1 - 3 = {}^-2$ y $1 + (^-3) = {}^-2$,
entonces $1 - 3 = 1 + (^-3)$.

En cada uno de estos casos vemos que restar un número es lo mismo que sumar su inverso aditivo.

Ejercicios 1-8

1. Suma los números de cada uno de los siguientes conjuntos:

   (a) $^-2$, 5 (d) $^-4$, 1, 8 (g) $^-8$, $^-13$, $^-24$

   (b) 7, $^-7$ (e) $^-2$, $^-3$, 15 (h) $^-7$, 50, $^-119$

   (c) $^-5$, $^-2$ (f) 21, $^-6$, $^-7$ (i) $^-23$, $^-19$, 14

2. Halla la suma de $^-(\frac{3}{4})$ y $\frac{7}{2}$ y escribe dos ecuaciones que contengan sustracciones, y que puedan obtenerse de esta suma.

3. Halla x en las siguientes ecuaciones:

   (a) $(^-5) + 2 = x$ (e) $^-(\frac{2}{3}) + {}^-(\frac{3}{2}) = x$

   (b) $(^-3) + x = 8$ (f) $^-(\frac{2}{3}) + x = {}^-(\frac{13}{6})$

   (c) $8 + x = {}^-3$ (g) $^-(\frac{1}{2}) + x = \frac{9}{2}$

   (d) $x + (^-4) = 11$ (h) $x + \frac{4}{3} = {}^-(\frac{11}{4})$

4. Completa los números que faltan en cada uno de los ejemplos que sigúen:

   (a) $8 + 5 + (\quad) = 8$

   (b) $6 + (^-3) + (\quad) = 6$

   (c) $(^-11) + 6 + (\quad) = {}^-11$

   (d) $(^-11) + (^-6) + (\quad) = {}^-11$

   (e) $(^-3) + (\quad) + (^-8) = {}^-8$

(f) $(^{-}3) + (^{-}7) + (\quad) = {}^{-}7$

(g) $\frac{1}{2} + {}^{-}(\frac{1}{4}) + (\quad) = \frac{1}{2}$

(h) $\frac{1}{4} + (\quad) + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

5. Efectúa las siguientes sustracciones:

(a) $(^{-}4) - 2$
(b) $(^{-}6) - (^{-}1)$
(c) $8 - (^{-}3)$
(d) $(^{-}11) - (^{-}13)$
(e) ${}^{-}(\frac{5}{4}) - \frac{1}{4}$
(f) ${}^{-}(\frac{3}{2}) - {}^{-}(\frac{7}{2})$
(g) $\frac{35}{3} - (^{-}2)$
(h) $\frac{75}{7} - (^{-}6)$

6. Halla los inversos aditivos de estos números:

(a) 10
(b) $^{-}100$
(c) $\frac{1}{2}$
(d) $\frac{7}{9}$
(e) ${}^{-}(\frac{8}{5})$
(f) ${}^{-}(\frac{49}{51})$

7. Convierte cada pregunta del problema 5 en un problema de sumar el inverso aditivo. Por ejemplo, $(^{-}4) - 2 = (^{-}4) + (^{-}2)$.

8. Efectúa las siguientes sustracciones:

(a) $(^{-}10) - (^{-}3)$
(b) $4 - 6$
(c) $16 - 12$
(d) $8 - (^{-}2)$
(e) $(^{-}8) - 2$
(f) $(^{-}8) - (^{-}2)$
(g) $(^{-}9) - 2$
(h) $9 - (^{-}3)$
(i) $7 - 5$
(j) $7 - (^{-}5)$
(k) $2 - 9$
(l) $2 - (^{-}9)$
(m) $3 - 10$
(n) $3 - (^{-}10)$

9. Completa las siguientes tablas:

(a)

x	$2x$	$2x - 3$
$^{-}1$		
2		1
$^{-}4$	$^{-}8$	
	0	
$^{-}7$		
$^{-}9$		$^{-}21$

(b)

x	$(^{-}2)x$	$(^{-}2)x - (^{-}1)$
$^{-}1$		
0		1
	$^{-}6$	
4		
5	$^{-}10$	$^{-}9$
$^{-}2$		

Capítulo 2

ECUACIONES

2-1. Redacción de frases numéricas

¿Te gustan las novelas de misterio? ¿Te has imaginado alguna vez que eres un detective como Sherlock Holmes o Nancy Drew? Algunas veces un matemático necesita determinar uno o más números desconocidos a partir de ciertos datos. En tales casos el matemático actúa como un detective que trata de aclarar un misterio.

Por ejemplo, imagínate que estás tratando de buscar cierto número, que llamaremos x. Los matemáticos usan frecuentemente letras tales como x, y, v, etc., para representar números desconocidos. Se te da el siguiente dato:

$$x + 5 = 7$$

Verbalmente podíamos decir que 7 es 5 unidades mayor que el número desconocido. En este ejemplo, ¿puedes determinar el número desconocido? Probablemente sí.

Algunas veces el número desconocido no es tan fácil de encontrar. Por ejemplo, suponte que tienes este problema:

> Tomás ha comprado un boleto para un partido de fútbol. En total ha pagado \$1.10 (ó 110 centavos), incluyendo el impuesto. Si el costo del boleto es \$1.00 más que el total del impuesto, ¿cuál es el monto del impuesto para este boleto?

¿Te parece que 10 centavos podría ser una buena respuesta? Recuerda que el costo total es 110 centavos. Si el impuesto fuera 10 centavos, el costo del boleto sería \$1.10 - \$0.10, es decir, \$1.00. Pero esto no es correcto, pues si el costo del boleto fuera \$1.00, este costo sería solamente \$0.90 más que el impuesto.

Comprobemos nuevamente los datos del problema. Debes utilizarlos correctamente para obtener la respuesta. Con el fin de ayudarte a encontrar el monto del impuesto, emplea los datos para redactar una proposición numérica. Usemos x para representar el número de centavos del impuesto. Como el costo del boleto es 100 centavos (\$1.00) más que el impuesto, debemos añadir esta cantidad a x para obtener el costo del boleto. Entonces, el costo del boleto puede ser representado por $(x + 100)$. Si sumamos el costo del boleto, $(x + 100)$ al impuesto, x, obtenemos el costo total del boleto, $x + (x + 100)$. Entonces obtenemos esta proposición numérica:

$$x + (x + 100) = 110$$

¿Puedes hallar ahora el monto del impuesto? La respuesta correcta es 5 centavos (\$0.05). El precio correcto del boleto es \$1.05. ¿Es \$1.05 - \$0.05 = \$1.00?

Con muy pocos conocimientos de aritmética se pueden resolver algunos problemas acerca de números. Los problemas difíciles, sin embargo, se resuelven más fácilmente escribiendo una proposición numérica que establece las condiciones del problema. En los dos problemas anteriores hemos empleado los datos para escribir proposiciones numéricas. Cada condición era un enunciado acerca de números. Algunos de esos números eran conocidos y otros desconocidos. Por último, tratábamos de hallar qué número x satisfacía la condición $x + (x + 100) = 110$.

En este capítulo aprenderemos primero a escribir las proposiciones numéricas referentes a los problemas. Al final del capítulo aprenderemos a usar las varias propiedades de los números para resolver las proposiciones numéricas más difíciles.

Una proposición que se refiere a números puede ser escrita en esta forma:

$$x + 7 = 9$$

Esta proposición referente a números dice:

> "Si siete se suma a cierto número x, el resultado es nueve".

El "9" es una parte de la proposición numérica anterior. Otra parte de la proposición es "$x + 7$". Estas expresiones, $x + 7$ y 9, no son proposiciones. Son solamente partes de proposiciones, y se llaman frases.

Una frase no hace afirmaciones. En una proposición referente a números una frase representa a un número. Una frase que describe o representa a un número se llama frase numérica.

Algunas frases numéricas representan números particulares. Por ejemplo, las frases numéricas $(3 + 5)$, 9, $\frac{16}{2}$, III + V y 10 representan números particulares. En cada uno de estos ejemplos, el valor de la frase numérica es conocido sin más, o puede ser determinado. Una frase numérica que representa a un número particular se llama <u>frase numérica cerrada</u>, o simplemente <u>frase cerrada</u>.

¿Qué número está representado por $x - 4$? No podemos determinar el número a menos que conozcamos el valor de x. Entonces, $x - 4$ puede tener varios valores diferentes. Las frases numéricas que no representan un número particular se llaman <u>frases numéricas abiertas</u>, o más simplemente <u>frases abiertas</u>. Podemos imaginar una frase abierta como una frase cuyo valor está "abierto" a varias posibilidades. Son ejemplos de frases abiertas, $(x - 4)$, $7y$, $(2 + z)$, $\frac{B}{4}$ y $(3x + 2x)$.

A fin de resolver problemas utilizando proposiciones numéricas, debes ser capaz de traducir las condiciones dadas en el problema en una proposición abierta. Para hacer esto, debes expresar los números del problema como frases numéricas. Al comienzo de ésta sección, hemos empleado la proposición numérica

$$x + 5 = 7$$

¿Es conocido el valor de 7? ¿Y el de $x + 5$? ¿Es 7 una frase abierta? ¿Lo es $x + 5$?

Para trabajar con frases numéricas, debes ser también capaz de traducir las frases verbalmente. La frase $x + 5$ puede ser traducida como "el número x aumentado en cinco". ¿Se puede traducir $7x$ como "siete veces el número x"?

Algunos alumnos se confunden porque una frase abierta como $x + 7$ puede tener diferentes traducciones, por ejemplo:

"El número siete sumado <u>a</u> x",

o "el número x aumentado en siete",

o "la suma de x <u>y</u> siete",

o "siete unidades más que el número x".

Sin embargo, todas estas traducciones tienen el mismo sentido matemático. Además, todas estas traducciones verbales significan lo mismo que "$x + 7$". Con la práctica aprenderás a comprender las diferentes maneras de expresar una frase numérica.

Ejercicios de clase 2-1

1. Traduce cada una de las siguientes frases numéricas:
   (a) La suma de x y 5.
   (b) El número x disminuido en 3.
   (c) El producto de 8 y x.
   (d) Un cuarto del número x.
   (e) El número x aumentado en 10.
   (f) El número 7 multiplicado por x.
   (g) El número que es 11 restado de x.
   (h) El número x dividido por 2.
   (i) El número que es 6 menos que x.
   (j) El número x disminuido en 9.
2. Para cada una de las frases numéricas en el problema 1, halla el número representado por la frase si $x = 12$ en cada pregunta.
3. Traduce verbalmente cada una de las siguientes frases:
   (a) $x + 1$
   (b) $x - 3$
   (c) $2x$
   (d) $\frac{18}{x}$
   (e) $4x$
   (f) $(^{-}6) + x$
4. Halla el número representado por cada una de las frases numéricas del problema 3, si $x = 6$.
5. Halla el número representado por cada una de las frases numéricas del problema 3, si $x = {}^{-}2$.
6. Suponte que durante enero has ahorrado d dólares. En febrero has ahorrado 5 dólares más de lo que habías ahorrado en enero.
   (a) Escribe una frase abierta que represente el número de dólares que has ahorrado en febrero.
   (b) Escribe una frase abierta que represente el número total de dólares que has ahorrado.

7. Escribe frases abiertas para representar cada una de las siguientes:
   (a) El número de centavos en d "dimes".
   (b) El número de galones en c cuartillos.
   (c) El número de pies en y yardas.
   (d) El número de centavos en n más uno "nickels".
   (e) El número de pulgadas en tres pies menos que en p pies.
8. Escribe frases abiertas que representen cada una de las siguientes:
   (a) Un número más cuatro.
   (b) La suma de un número y del doble del número.
   (c) Un número aumentado en siete.
   (d) Cinco sustraído de un número.
   (e) Un número sustraído de cinco.
   (f) El producto de nueve y un número.
   (g) El cociente de un número dividido por diez.
   (h) El cociente de diez dividido por un número.
   (i) Un número sustraído del doble del mismo número.
   (j) Tres veces un número dividido por dos veces el mismo número.

Ejercicios 2-1

1. No siempre representamos por x el número desconocido. Traduce en símbolos cada una de las frases numéricas que siguen, empleando la letra de cada pregunta como número desconocido. Por ejemplo, en la pregunta (a) emplea "a" como el número desconocido.
   (a) La suma de seis y un número.
   (b) Ocho veces un número.
   (c) Ocho veces un número y ese resultado aumentado en 1.
   (d) Tres restado de ocho veces un número.
   (e) El monto representado por ocho veces un número dividido por 4.
   (f) Dos veces un número y ese resultado aumentado en 3.
   (g) Cinco multiplicado por la suma de un número y 2.
   (h) Diez unidades menos que siete veces un número.

(i) Doce dividido por la suma de un número y 1.

(j) El producto de dos factores, uno de los cuales es la suma de 3 y cierto número, siendo el otro la suma de 4 y el mismo número.

2. Halla el número representado por cada una de las frases numéricas del problema 1, si el número desconocido es $^{-}3$.

3. Traduce verbalmente cada una de las próximas frases numéricas abiertas. Escribe la palabra "número" para representar el número desconocido en cada frase.

<u>Ejemplo</u>. $y + 3$ Un número aumentado en tres.

(a) $2n + 5$

(b) $6 - 3q$

(c) $7(b - 1)$

(d) $\frac{5 - d}{2}$

(e) $15 + 2w$

4. Halla el número representado por la frase abierta $2n + 5$ cuando n toma los siguientes valores:

(a) $n = 5$ (c) $n = 0$

(b) $n = {}^{-}5$ (d) $n = {}^{-}1$

5. Halla el número representado por la frase abierta $6 - 3q$ cuando q toma los siguientes valores:

(a) $q = 0$ (c) $q = {}^{+}1$

(b) $q = {}^{-}1$ (d) $q = 5$

6. Escribe una frase numérica abierta para representar cada una de las siguientes condiciones:

(a) La edad de Ana, si Ana es tres años mayor que su hermano, quien a su vez tiene x años de edad.

(b) El costo de diez lápices a razón de z centavos cada uno.

(c) El número de centavos en q cuartos.

(d) La edad que tendrá un niño dentro de cinco años si actualmente tiene z años de edad.

(e) La edad que tenía una niña hace seis años si tiene ahora z años de edad.

(f) El número total de puntos que alcanza Roberto en dos partidos de baloncesto, si ha logrado g puntos en el primer partido y el doble de este número en el segundo.

(g) El número de dólares que tiene María después de gastar 6 dólares, si tenía al principio n dólares.

(h) La suma de las tres edades, si la edad del padre de Catalina es cuatro veces mayor que la edad de ella, y la edad de la madre es veinte años más que la edad de Catalina.

(i) El número total de centavos que tiene Miguel, si tiene k "nickels" y el número de "dimes" que tiene excede al número de "nickels" en 1.

7. Las frases numéricas cerradas, $1 + 2$, $2 + 3$, $3 + 4$ y $4 + 5$, representan las sumas de pares de números consecutivos. Escribe una frase abierta que represente la suma de dos números consecutivos cualesquiera. (Sugerencia: Ni n representa el menor de esos dos números, ¿se puede representar el mayor por $(n + 1)$?)

8. Escribe una frase abierta que represente la suma de dos números impares consecutivos cualesquiera.

9. Escribe una frase abierta que represente la suma de tres números pares consecutivos cualesquiera.

10. Escribe una frase abierta que represente dos múltiplos de diez consecutivos cualesquiera.

2-2. Redacción de proposiciones numéricas

Todos usamos diariamente las proposiciones. Hablamos mediante las proposiciones. Cuando leemos, leemos proposiciones. En matemáticas necesitamos tratar con muchas clases de proposiciones. Para explicar y estudiar las matemáticas, empleamos proposiciones. Algunas proposiciones matemáticas establecen enunciados referentes a números, y las proposiciones que estudiaremos en este capítulo son de esta clase especial. Considera las siguientes proposiciones:

"La suma de 8 y 7 es 15".
"$x + 3 = 8$".
"Cinco es mayor que la suma de uno y dos".
"$3 < 2 + 4$".
"La suma de 3 y 4 no es igual al producto de 3 y 4".

Cada una de estas proposiciones consiste en dos frases numéricas conectadas por un verbo o frase verbal. En las proposiciones numéricas los verbos o frases verbales se representan por los símbolos " $=$ ", " $<$ ", " $>$ " y " $\neq$ ".

Una proposición numérica que emplea el signo $=$ indica igualdad. La proposición, $x + 3 = 8$, enuncia que $x + 3$ y 8 son nombres diferentes para el mismo número. Llamamos <u>ecuación</u> a una proposición tal. Si $x = 5$, el enunciado $x + 3 = 8$ es verdadero y cuando x no es 5, el enunciado es falso.

Considera la proposición $x - 4 > 7$. ¿Es esta proposición una ecuación? ¿Qué representa el signo $>$? Tiene el mismo significado que $=$? Esta proposición indica que el número representado por $x - 4$ <u>es mayor que</u> el número representado por 7. Tal proposición se llama una <u>desigualdad</u> o una <u>inecuación</u>. Otros ejemplos de inecuaciones son "$x + 1 \not< 15$" y "$2x \neq 18$".

Algunas proposiciones son verdaderas, como éstas: "$4 + 5 = 3 \cdot 3$" y "El sol se pone en el oeste". Sin embargo, puede haber proposiciones que no sean verdaderas; por ejemplo: "$3 > 2 + 4$" y "Abraham Lincoln fue el primer presidente de los Estados Unidos".

Considera estos enunciados:

"Jaime estuvo en la playa todo el día de ayer".
"$x + 3 = 8$".

¿Son verdaderas? ¿Son falsas? Puedes responder: "No sé. [illegible] qué Jaime se trata? ¿A qué número se refiere x?" Estos enunciados no son verdaderos ni falsos, porque contienen palabras o símbolos que no se refieren a una única cosa. "Jaime" puede referirse a cualquier persona que tenga ese nombre; x puede representar a cualquier número. Podrías consultar las listas de los varones que fueron a la playa y decir que, si "Jaime" significa Jaime Pérez (de San Juan), la primera proposición es verdadera; pero, si se refiere a Jaime López (de Ponce), es falsa. La segunda proposición es verdadera si $x = 5$, pero es falsa si $x = 6$ ó si x es cualquier otro número diferente de 5.

¿Qué puedes decir acerca de la verdad o falsedad de las tres siguientes proposiciones?

"$13 - x = 7$".
"Jorge fue el primer presidente de los Estados Unidos".
"$3 + x = x + 3$".

Estas proposiciones son semejantes en el sentido de que cada una contiene una palabra o símbolo que puede referirse a uno cualquiera de varios objetos. ¿Ves alguna diferencia entre las dos primeras proposiciones y la tercera? ¿Pueden las dos primeras proposiciones ser verdaderas? ¿Pueden ser falsas las dos primeras proposiciones? ¿Puede ser falsa en algún caso la tercera proposición?

Supónte que una proposición numérica contiene un símbolo como x ó z. Si el símbolo puede referirse a uno cualquiera de varios objetos, la proposición se llama <u>proposición abierta</u>. En este caso se dice que las letras x, z, etc., representan a la incógnita ó número desconocido. Una proposición abierta no es necesariamente una proposición verdadera. Tampoco es necesariamente una proposición falsa. Deja abierta la posibilidad de mayor discusión.

Observa la siguiente ecuación:

$$x + 7 = \frac{10}{x - 2}$$

Esta ecuación se compone de tres partes: un verbo, $=$, y dos frases abiertas, $x + 7$ y $\frac{10}{x - 2}$. La ecuación establece que para cierto número x estas dos frases abiertas representan el mismo número. ¿Puedes descubrir ese número x? ¿Puedes encontrar más de uno? Prueba algunos números. Después de trabajar un momento podrías decir: "La proposición es verdadera si $x = 3$ ó $x = {}^-8$, pero es falsa si x es cualquier otro número". Los números 3 y ${}^-8$ se llaman <u>soluciones</u> de la proposición abierta.

El conjunto $\{3, ^-8\}$ se llama conjunto de soluciones de la proposición abierta.

Cuando hallamos el conjunto completo de las soluciones de una proposición abierta, decimos que hemos resuelto la proposición. Una ecuación es una clase particular de proposiciones numéricas que contienen el símbolo $=$. Resolver una ecuación significa hallar el conjunto total de sus soluciones. El conjunto de soluciones de una ecuación puede tener un elemento o varios elementos. Puede ser aún el conjunto vacío.

Probablemente has usado ya alguna clase especial de ecuaciones. Por ejemplo, para hallar el número de unidades cuadradas de área de un rectángulo has usado la siguiente expresión:

$$A = \ell w$$

Esta es la abreviación de una regla, que en palabras reza así:

> "El número de unidades cuadradas de área de un rectángulo es (o, es igual a) el producto del número de unidades de largo por el número de unidades de ancho".

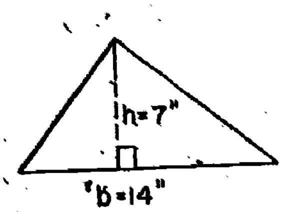
Cuando una regla como ésta se abrevia y se escribe en la forma de una ecuación, se le llama fórmula. Si se conocen el largo y el ancho de un rectángulo, entonces se puede utilizar esta fórmula para hallar el área de ese rectángulo.

¿Puedes determinar el conjunto de soluciones de la inecuación $x - 4 > 7$? ¿Qué valor debe tener x para que la inecuación sea verdadera? ¿Es $5 - 4 > 7$? ¿Es $7 - 4 > 7$? ¿Es $12 - 4 > 7$? ¿Observas que $x - 4 > 7$ es verdadera para todo número mayor que 11? También $x - 4 > 7$ es falsa para todo otro valor de x. Entonces el conjunto de soluciones de esta inecuación es el conjunto de todos los números que son mayores que 11.

Ejercicios de clase 2-2a

En los problemas 1 hasta 4 que siguen, usa tus conocimientos de aritmética para hallar el conjunto de soluciones de cada una de las proposiciones numéricas. Recuerda que cada elemento del conjunto de soluciones debe ser tal que, sustituido por la incógnita, haga que la proposición sea verdadera.

1. (a) $x + 3 = 5$
   (b) $y + 3 > 5$
   (c) $k + 13 = {}^{-}15$
   (d) $m + 25 = 31$
   (e) $s + 25 < 31$
   (f) $t + 10 \neq 5$
2. (a) $x + ({}^{-}7) = 2$
   (b) $y + ({}^{-}7) > 2$
   (c) $n + ({}^{-}9) = {}^{-}2$
   (d) $x + ({}^{-}3) = 6$
   (e) $p + ({}^{-}15) = {}^{-}1$
   (f) $x + ({}^{-}15) < {}^{-}1$
3. (a) $4b = 12$
   (b) $4a \neq 12$
   (c) $5w = 35$
   (d) $5m < 35$
   (e) $13x = {}^{-}13$
   (f) $7y = {}^{-}56$
4. (a) $\frac{n}{3} = 2$
   (b) $\frac{a}{3} < 2$
   (c) $\frac{k}{8} = {}^{-}2$
   (d) $\frac{d}{9} > 2$
   (e) $\frac{h}{{}^{-}3} = 5$
   (f) $\frac{s}{{}^{-}3} = {}^{-}7$
5. Una fórmula para hallar el perímetro de un rectángulo es $p = 2\ell + 2w$. Halla el perímetro de un rectángulo cuyo largo es 7 pies y cuyo ancho es 4 pies.
6. Emplea la fórmula $a = \frac{1}{2}bh$ para hallar el número de unidades cuadradas de área en el triángulo que se muestra a la derecha.



Las ecuaciones se usan de muchas maneras y en muchos campos diferentes. Resolvemos ecuaciones para hallar las corrientes en una red eléctrica cuando conocemos los voltajes y las resistencias, para diseñar aeroplanos o naves espaciales, para saber lo que está pasando en una célula cancerosa.

También empleamos las ecuaciones para predecir el tiempo. Se conocen ahora métodos que pueden predecir con mucha aproximación el tiempo que hará mañana. El único problema está en que esos métodos requieren la solución de unas cien ecuaciones con el mismo número de incógnitas. Aun con las mejores calculadoras modernas de alta velocidad, se necesitarían dos semanas para calcular el pronóstico del tiempo que hará mañana. Por consiguiente, los meteorólogos (busca esta palabra en el diccionario) efectúan muchas aproximaciones. Simplifican las ecuaciones de tal manera que pueden calcular el pronóstico en un tiempo suficientemente corto. Podrán hacer mejores pronósticos cuando conozcamos métodos más eficaces para resolver muchas ecuaciones con muchas incógnitas.

Muchos matemáticos de primera fila están trabajando sobre tales problemas y continúan la búsqueda de nuevos métodos para resolver ecuaciones. En los laboratorios universitarios, gubernamentales e industriales hay actualmente miles de matemáticos que trabajan diariamente en la resolución de ecuaciones. Algunos de ellos emplean grandes máquinas de calcular. Otros usan métodos semejantes a los que estás aprendiendo ahora y trabajan con lápiz y papel como lo haces tú.

Ejercicios 2-2a

1. Traduce en símbolos cada una de las siguientes proposiciones numéricas:
   (a) El número x aumentado en 5 es igual a 13.
   (b) El número 3 restado de x es igual a 7.
   (c) El producto de 8 y x es igual a 24.
   (d) Cuando x se divide por 4 el cociente es 9.
   (e) Diez más que el número x es 21.
   (f) El número x multiplicado por 7 es igual a $^-35$.
   (g) El número 11 restado de x es $^-5$.
   (h) 6 menos que x es 15.
   (i) El número x dividido por 2 es igual a $^-7$.
2. Determina el conjunto de soluciones de cada una de las ecuaciones que has escrito en el problema 1, empleando tus conocimientos de aritmética.

3. Traduce en símbolos cada una de las siguientes proposiciones numéricas:
   (a) El número x aumentado en 2 es mayor que 4.
   (b) El número x multiplicado por 5 es menor que 10.
   (c) El resultado de dividir x por 7 es mayor que 2.
   (d) Tres menos que el número x es mayor que 6.
   (e) El número x disminuido en 5 es menor que 13.
   (f) El producto de 3 y el número x es mayor que $^-9$.
4. Utiliza tus conocimientos de aritmética para hallar el conjunto de soluciones de cada una de las desigualdades que has escrito en el problema 2.
5. Traduce en palabras cada una de las proposiciones numéricas que siguen. Emplea el término "un número" o "cierto número" para representar la incógnita.

(a)	$y + 2 = 5$	(f)	$7 + (^-k) = 2$
(b)	$z + (^-3) = 7$	(g)	$d + (^-3) < 4$
(c)	$2a = {}^-10$	(h)	$\frac{w}{3} > 9$
(d)	$h + (^-5) < 9$	(i)	$k + (^-7) = {}^-2$
(e)	$5m < 15$	(j)	$\frac{c}{^-30} = 6$

6. Valiéndote de tus conocimientos de aritmética, halla el conjunto de soluciones de cada una de las proposiciones numéricas del problema 5.
7. ¿Cuál es el área de un cuadrado cuyo lado mide 15 pulgadas? Utiliza $A = s^2$ como fórmula para el área.
8. La fórmula $i = prt$ se usa para hallar el interés simple, donde

   i es el interés en dólares,
   p es el capital (o monto del préstamo),
   r es el tipo de interés (o porcentaje de interés) anual y
   t es el tiempo en años.

   Determina el interés de un préstamo bancario de $750 por 3 años al 6% de interés.

9. Se puede usar la fórmula $C = 2\pi r$ para hallar la longitud de una circunferencia, donde r representa el radio. Determina la longitud de una circunferencia cuyo radio mide 10 pulgadas. (Usa $\frac{22}{7}$ ó 3.14 como una aproximación para π.)

10. La fórmula $d = rt$ puede emplearse para hallar la distancia total recorrida con movimiento uniforme, donde d es la medida de la distancia, t es la medida del tiempo y r es la velocidad. Por ejemplo, si d está medida en millas y t en horas, r debe estar en millas por hora. Halla la distancia que ha viajado un automóvil que se mueve a una velocidad de 45 millas por hora (m.p.h.) durante 13 horas.

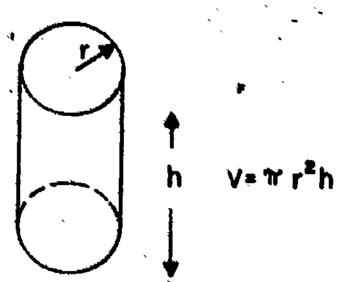
*11. Para hallar 19% de \$750 puedes usar la fórmula del porcentaje,

$$p = rb$$

donde p es el porcentaje; r es el tanto por ciento; y b es la base. En este problema, $r = 19\%$ ó 0.19 y $b = \$750$. Determina el valor de p para este problema.

*12. Determina el área del piso de una habitación circular cuyo radio es 13 pies. La fórmula es $A = \pi r^2$. (Toma $\frac{22}{7}$ ó 3.14 para π.)

*13. (a) Calcula el volumen del tanque cilíndrico dibujado a la derecha si el radio es 1 pie y la altura es $3\frac{1}{2}$ pies. (Toma $\frac{22}{7}$ para π.)



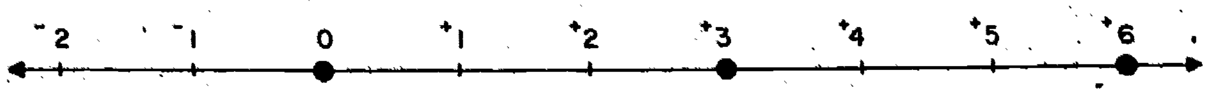
(b) Calcula la capacidad del tanque en galones. Un pie cúbico contiene $7\frac{1}{2}$ galones.

*14. La fórmula $F = \frac{9}{5}C + 32$ sirve para convertir una temperatura leída en un termómetro Centígrado a una temperatura leída en un termómetro Fahrenheit. Determina la temperatura Fahrenheit correcta para cada una de las siguientes lecturas en un termómetro Centígrado:

(a) 0° (b) 100° (c) 37°

Gráficas de los conjuntos de soluciones

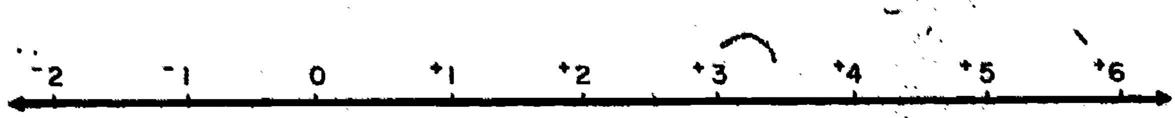
Podemos dibujar una figura para representar un conjunto de números, asociando los números con los puntos de una recta./ Considera el conjunto $\{0, 3, 6\}$. Cada elemento es un número asociado con un punto de la recta numérica. Dibujamos una figura para representar este conjunto particular marcando puntos gruesos sobre la recta numérica como se muestra a continuación:



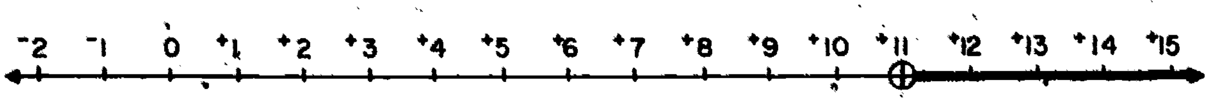
Esta figura se llama gráfica del conjunto $\{0, 3, 6\}$. Algunas veces es útil dibujar gráficas de los conjuntos de soluciones de las proposiciones abiertas.

La proposición abierta, $x + 3 = 8$, tiene el conjunto de soluciones $\{5\}$. La gráfica de este conjunto muestra un punto grueso solamente en la posición correspondiente a 5.

¿Cuál es el conjunto de soluciones de $x + 3 = 3 + x$? Esta proposición es verdadera para todo número que tomemos en vez de x. El conjunto de soluciones de esta ecuación es el conjunto de todos los números. La gráfica de este conjunto se construye dibujando una línea gruesa a lo largo de toda la recta numérica, como se muestra a continuación:



Considera la inecuación $x - 4 > 7$. El conjunto de soluciones de esta desigualdad es el conjunto de todos los números que son mayores que 11. Este conjunto de soluciones se representa sobre la recta numérica como se muestra en seguida:

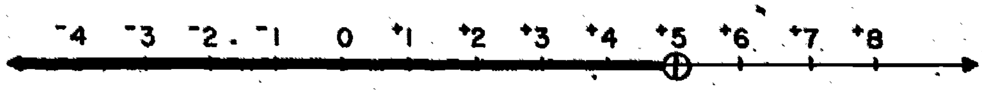


El número 11 no está en el conjunto, lo que se indica dibujando una circunferencia alrededor del punto correspondiente a 11 en la recta numérica. La parte de la recta numérica que está a la derecha de 11 se dibuja más gruesa para mostrar que todos los puntos colocados a la derecha de 11 están en el conjunto de soluciones.

¿Cuál es el conjunto de soluciones de la inecuación que se muestra a continuación?

$$x - 4 < 1$$

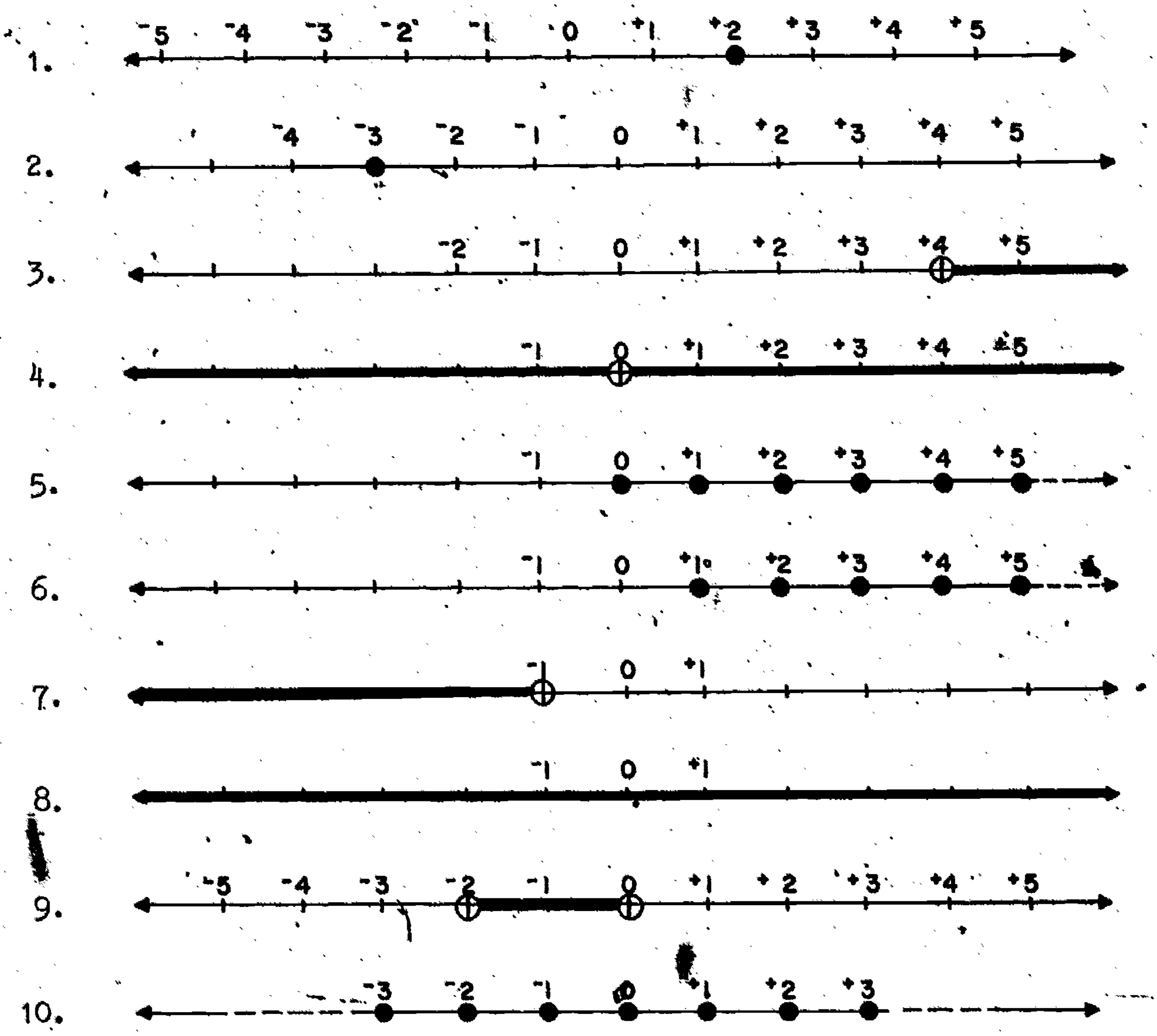
Debes encontrar que el conjunto de soluciones es el conjunto de todos los números menores que $^{+}5$. Sobre la recta numérica esto se representa con una circunferencia alrededor del punto correspondiente a $^{+}5$ y una línea gruesa dibujada a lo largo de todos los puntos de la recta numérica que están a la izquierda de $^{+}5$. He aquí la figura:



Hemos encontrado que los conjuntos de soluciones para diferentes proposiciones numéricas pueden ser diferentes. Algunos de los conjuntos de soluciones contienen solamente un número. Tales conjuntos pueden ser representados por un punto grueso en la recta numérica. El punto grueso se dibuja sobre el punto que corresponde al número en el conjunto de soluciones. Si el conjunto de soluciones es el conjunto de todos los números, dibujamos una línea gruesa a lo largo de toda la recta numérica. En este caso, la solución está representada por toda la recta numérica. Los conjuntos de soluciones para las inecuaciones se representan por una parte de la recta numérica. Todas las inecuaciones que hemos estudiado se representaban por semirrectas en la recta numérica. Se ha empleado una circunferencia para indicar un punto que no está incluido en el conjunto de las soluciones.

Ejercicios de clase 2-2b

¿Cuál es el conjunto de soluciones dibujado en cada una de las gráficas siguientes?



Aún no estamos en condiciones de resolver ecuaciones o inecuaciones muy complicadas. Por ejemplo, es mucho más difícil hallar el conjunto de soluciones de la proposición numérica

$$x^2 < 9$$

que los conjuntos de soluciones de las ecuaciones e inecuaciones que hemos estudiado antes. Otras proposiciones numéricas pueden ser más complicadas todavía. Aprenderás mucho más acerca de estas proposiciones numéricas complicadas al final de este capítulo y cuando estudies álgebra el año próximo.

Ejercicios 2-2b

1. Aplicando tus conocimientos de aritmética, halla el conjunto de soluciones para cada una de las siguientes proposiciones numéricas:

(a) $x + 2 = 6$ (e) $x + (^-4) > 1$

(b) $4 + x = 0$ (f) $\frac{x}{5} = {}^-1$

(c) $2x = 6$ (g) $2x < 10$

(d) $3x < 3$ (h) $4 - x > 1$

2. Para cada una de las proposiciones numéricas del problema 1, representa el conjunto de soluciones sobre una recta numérica.

3. Empleando tus conocimientos de aritmética, halla el conjunto de soluciones para cada una de las siguientes proposiciones numéricas:

(a) $x + 1 = 1 + x$ (e) $3w = {}^-15$

(b) $y + (^-1) > 0$ (f) $14 + x = 13$

(c) $1 - b > 0$ (g) $13 - x = 14$

(d) $a + 2 = 1 + a$ (h) $\frac{2}{x} = {}^-1$

4. Para cada una de las proposiciones numéricas del problema 3, representa el conjunto de soluciones sobre una recta numérica.

5. Algunas veces las ecuaciones o inecuaciones son solamente partes de una proposición. Así como puedes construir proposiciones largas empleando otras más cortas—utilizando palabras como "y", "o" y "pero"—puedes unir varias proposiciones numéricas para construir otras más largas. Tales proposiciones se llaman <u>proposiciones compuestas</u>. Considera la siguiente proposición numérica compuesta:

$$"x + (^-4) < 7 \ \underline{y} \ x + (^-1) > 0"$$

Para que un número x sea solución de esta proposición, debe ser solución de ambas proposiciones, "$x + (^-4) < 7$" y "$x + (^-1) > 0$".

Los elementos del conjunto de soluciones de la proposición son los números que están en ambos conjuntos de soluciones, en el de $x + (^-4) < 7$ y en el de $x + (^-1) > 0$.

El conjunto de soluciones de $x + (^-4) < 7$ es el conjunto de todos los números menores que 11.

El conjunto de soluciones de $x + (^-1) > 0$, es el conjunto de todos los números mayores que 1.

¿Cuál es el conjunto de las soluciones de la proposición compuesta? Indícalo sobre la recta numérica.

6. El conjunto de soluciones de la proposición compuesta del problema 5, ¿es la intersección de los conjuntos de soluciones de las dos inecuaciones, o es la reunión de los dos conjuntos de soluciones?

7. Determina el conjunto de soluciones de cada una de las siguientes proposiciones compuestas:

   (a) $x + (^-2) < 7$ y $x + 4 > 6$

   (b) $x + (^-3) = 6$ y $x + (^-3) > 6$

   (c) $2x > 6$ y $\frac{x}{2} < 3$

8. Representa sobre la recta numérica el conjunto de soluciones de cada una de las proposiciones compuestas del problema 7.

*9. (a) Halla el conjunto de soluciones de $x^2 = 9$. (Hay dos soluciones posibles.)

   (b) Representa sobre la recta numérica el conjunto de soluciones de la parte (a).

*10. (a) Halla el conjunto de soluciones de $x^2 < 9$.

   (b) Representa sobre la recta numérica el conjunto de soluciones de la parte (a).

*11. (a) Halla el conjunto de soluciones de la siguiente proposición compuesta:

$$x + 7 = 6 \quad ó \quad 2x + (^-1) = 5$$

   (Nota: En matemáticas, "o" significa, o bien el primero, o bien el segundo, o bien ambos: el primero y el segundo.)

   (b) Representa sobre la recta numérica el conjunto de soluciones de la parte (a).

*12. (a) Halla el conjunto de soluciones para $x + (^-1) = 4$ ó $x + (^-1) > 4$. (Esta proposición compuesta se abrevia algunas veces: $x + (^-1) \geq 4$.)

(b) Indica sobre la recta numérica el conjunto de soluciones de la parte (a).

*13. Halla el conjunto de soluciones para $x < 10$ ó $x + (^-9) > 0$.

La tarea más importante en la resolución de problemas es, frecuentemente la traducción de proposiciones numéricas del lenguaje ordinario, en palabras, al lenguaje matemático, o en símbolos. A menudo es también la parte más difícil. Cuando te encuentres con un problema como los que hemos visto antes, piensa en él cuidadosamente. A menudo encontrarás que el problema solamente exige, de una manera complicada, la resolución de una proposición numérica. Escribiendo la proposición en símbolos, el conjunto de soluciones puede ser más fácil de encontrar.

Es importante que comprendas que las proposiciones abiertas que escribes se refieren siempre a números. Los problemas podrán referirse a pulgadas, a libras, a años o a dólares, pero las proposiciones abiertas deben tratar solamente de números.

Considera este problema: "La suma de cierto número y ocho es igual a dos más que el producto de cuatro y ese número. ¿Cuál es el número?" El problema nos pide hallar cierto número, que representaremos con una letra como la x. Debemos definir el significado de x, esto es, establecer qué representa la letra x. Esta es la primera etapa en la escritura de una proposición abierta, y es una parte muy importante del trabajo que se efectúa para hallar la solución. En este caso el significado de x es obvio: "Sea x la letra que representa al número desconocido". (En problemas más difíciles, la definición de las letras empleadas puede ser más complicada.)

La siguiente etapa es describir los números de la proposición, empleando el símbolo para la incógnita donde se necesite para escribir las frases. Las frases para este problema son:

"la suma de un número y ocho" - - - - - - $\underline{x + 8}$

"dos más que el producto de cuatro y el número" - - - - - - - - - - - - $\underline{4x + 2}$

Ya tenemos dos frases abiertas. Para otros problemas puede haber más de dos frases. Empleando estas frases, escribimos la proposición abierta que sigue:

$$x + 8 = 4x + 2$$

¿Es esta proposición una ecuación o una inecuación? ¿Puedes conjeturar qué número hará verdadera la proposición? La solución es 2.

Muchos de los problemas de esta sección pueden resolverse fácilmente utilizando la aritmética, y probablemente preguntarás por qué es necesario escribir proposiciones abiertas para expresar la condición de problemas tan fáciles. Recuerda que en esta sección lo que más nos interesa no son las soluciones. Debes concentrarte en la escritura de las proposiciones abiertas. Posteriormente en este capítulo aprenderás a emplear las propiedades de los números para hallar el conjunto de soluciones de problemas más difíciles.

Ejercicios de clase 2-2c

Escribe una proposición abierta que establezca la condición expresada en cada uno de los problemas que siguen.

1. Un tren viaja a 80 millas por hora. ¿Cuánto tiempo necesitará para hacer un viaje de 560 millas?

   Primero: Representemos por t el número de horas de viaje del tren.

   (Observa que t representa un número. En este caso representa el número de horas de viaje del tren. No es suficiente decir: "Representemos por t el tiempo".)

   Segundo: Escribe una frase que represente el número de millas que el tren viaja en t horas.

   Tercero: Escribe una ecuación que establezca la condición del problema.

2. María tiene catorce años, y es cinco años mayor que su hermano. ¿Qué edad tiene el hermano?
3. Un niño es cuatro años menor que su hermana. Si el niño tiene diez años, ¿qué edad tiene su hermana?
4. Un niño compra cierto número de herramientas para aeromodelismo que cuestan 25 centavos cada una. Gasta 75 centavos. ¿Cuántas herramientas ha comprado?
5. Un niño tendrá 20 años dentro de siete años. ¿Qué edad tiene actualmente?
6. ¿Cuántos pies tiene una tabla cuya longitud es de 72 pulgadas?
7. ¿Cuántos pies tiene una tabla de 5 yardas de longitud?
8. Hace diez años, Ana tenía 3 años. ¿Qué edad tiene actualmente?
9. ¿Cuántos dólares pueden obtenerse al cambiar un total de 450 peniques?
10. Si se agregan tres dólares al doble del dinero que tiene Pedro, el resultado es menor que veintitrés dólares. ¿Qué cantidad de dinero tiene Pedro? (¿Será una ecuación o una inecuación la proposición abierta que establezcas para las condiciones de este problema?)
11. A cierta velocidad, un aeroplano recorrerá más de 500 millas en dos horas. ¿Para qué velocidades será esto cierto?
12. Si se agrega uno al doble de la edad de una niña, el resultado es diecinueve. ¿Cuál es la edad de la niña?
13. Una persona recorre en un automóvil una distancia total de 240 millas a una velocidad media de 40 millas por hora. ¿Qué tiempo le lleva el viaje?
14. Si una niñera gana 65 centavos por hora, ¿cuánto ganará en 5 horas?

Ejercicios 2-2c

Escribe proposiciones abiertas para cada una de las condiciones establecidas en los problemas 1, 2 y 3.

1. Un niño es 7 años mayor que su hermana.

Representemos por x el número de años de edad del niño.

La edad de su hermana se representará por $x - 7$.

Escribe ecuaciones en que se muestre que:

(a) La suma de sus edades es 21.

(b) La edad del niño es igual al doble de la edad de su hermana.

(c) El triple de la edad de la hermana es igual a siete más la edad del niño.

(d) El producto de 2 por la edad del niño es igual al producto de 4 por la edad de la niña.

2. Juana tiene el doble de dinero que Catalina.

Representemos con m el número de dólares que tiene Catalina; entonces, $2m$ representará el número de dólares que tiene Juana.

Escribe ecuaciones para mostrar que:

(a) Las dos juntas tienen $15.

(b) Si Juana gasta $5, ella y Catalina tendrán la misma cantidad de dinero.

(c) Si Catalina gasta tres dólares, Juana tendrá cinco veces más dinero que ella.

3. El largo de un rectángulo es cuatro pies más que su ancho.

Sea w el número de pies de su ancho.
Entonces $w + 4$ es el número de pies de largo.

Escribe ecuaciones para mostrar que:

(a) El doble del ancho es el mismo que el largo aumentado en tres.

(b) Suponte que el largo se duplica. Para tener la misma medida, debe incrementarse en 1 el producto de 3 por el ancho.

(c) El doble del ancho sumado al doble del largo es 36. (Este es el perímetro del rectángulo.)

Para los problemas 4 hasta 14, escribe proposiciones abiertas que expresen la condición del problema.

4. En diez años más el señor Sosa tendrá cuarenta años. ¿Qué edad tiene ahora?

5. Si Guillermo hubiera ganado cinco dólares más, habría ganado en total doce dólares. ¿Cuánto ha ganado ya?
6. Una niña es el doble de alta que su hermano. Si la estatura de la niña es 64 pulgadas, ¿cuál es la estatura de su hermano?
7. Pablo tenía 14 años de edad en 1958. ¿En qué año nació?
8. El veinte por ciento de un número es 10. ¿Cuál es ese número? (Sugerencia: $20\% = \frac{1}{5}$.)
9. Un carpintero corta una tabla de 50 pulgadas de largo en dos piezas. Una pieza es 10 pulgadas más larga que la otra. Halla la longitud de la pieza más corta.
10. En una elección escolar, Margarita recibió 5 votos más que Julio. ¿Cuántos votos recibió Julio si había 35 votantes en la clase? (Suponte que cada votante votó o bien por Margarita o bien por Julio, pero no por ambos.)
11. Si un número se suma al doble de sí mismo, la suma es menor que 27. ¿Para qué números es esto cierto?
12. Las poblaciones de Minneápolis y de San Pablo reunidas, tienen más del doble de habitantes que San Pablo sólo. ¿Cuál es la población de San Pablo si ambas poblaciones reunidas tienen un millón de habitantes?
13. Patricia y Miguel son mellizos, pero no tienen el mismo peso. Si Patricia pesa 105 libras, ¿cuánto pesa Miguel?
14. El año pasado un niño ganó más de ciento veinte dólares vendiendo periódicos. ¿Cuánto ganó mensualmente como media?
*15. El señor Sosa es 4 veces mayor que su hijo. Dentro de 16 años será sólo dos veces mayor. ¿Cuáles son sus edades ahora? (Sugerencia: Si el hijo tiene x años de edad, ¿qué edad tendrá dentro de 16 años?)
*16. En cierto triángulo, un ángulo tiene amplitud doble que otro. El tercer ángulo es tres veces mayor que el menor de los otros dos angulos. ¿Cuántos grados mide cada ángulo? (Sugerencia: ¿Cuántos grados hay en la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo?)
*17. La suma de tres números cardinales consecutivos es 123. ¿Cuáles son estos tres números?

*18. Roberto tiene \$1.25 en "nickels" y "dimes". Tiene tres veces más "nickels" que "dimes". Determina cuántas monedas tiene de cada clase.

2-3. Determinación de los conjuntos de soluciones

Sabemos que hay muchas maneras diferentes de expresar cualquier número. Por ejemplo, $25 = \frac{50}{2} = \frac{75}{3} = 30 - 5 = 5^2 = (31 - 6)$. De todas estas maneras de expresar el número veinticinco, 25 es la más simple. Considera las siguientes ecuaciones:

$$x + 3 = 8, \quad x + 1 = 6, \quad 2x = 10,$$

$$x + (^-2) = 3, \quad 10 = 2x \quad \text{y} \quad 8 = 3 + x$$

Cada una de estas ecuaciones tiene como solución $x = 5$; es decir, si en cada ecuación reemplazamos x por 5, obtenemos una proposición verdadera y si reemplazamos x por cualquier otro número diferente de 5, obtenemos una proposición falsa. Estas ecuaciones se llaman equivalentes porque sus conjuntos de soluciones son el mismo conjunto. En realidad, la ecuación $x = 5$ podría también incluirse en la lista. Así como 25 es la manera más simple de expresar los varios números que se indican al comienzo de esta sección, $x = 5$ es la ecuación más simple equivalente a la lista de ecuaciones dada anteriormente.

Ejercicios de clase 2-3a

1. Determina seis ecuaciones equivalentes a la ecuación $x + 1 = 4$.
2. Determina seis ecuaciones equivalentes a la ecuación $x = 3$.
3. Determina seis ecuaciones equivalentes a la ecuación $2x = 12$.
4. ¿Qué métodos se te ocurren para obtener una o más ecuaciones equivalentes a una ecuación dada?
5. Si una ecuación es equivalente a una segunda ecuación, ¿es ésta equivalente a la primera? ¿Por qué?

*6. ¿Son equivalentes las dos ecuaciones siguientes: $x = x + 3$ y $x = x - 1$?

Considera, por ejemplo, la ecuación

$$x + 3 = 7$$

Si x se reemplaza por una solución de esta ecuación, $x + 3$ y 7 son dos nombres diferentes para el mismo número. Luego, por ejemplo, $(x + 3) + 4$ y $7 + 4$ deben ser nombres del mismo número, cada vez que x se reemplaza por una solución de la ecuación dada. Como probablemente esto es más fácil de ver primero en términos numéricos, considera lo siguiente:

$$10 = (15 - 5)$$

Entonces,

$$10 + 5 = (15 - 5) + 5$$

Hemos sumado un mismo número a un número dado, 10, expresado de dos maneras. Estos son ejemplos de la siguiente propiedad:

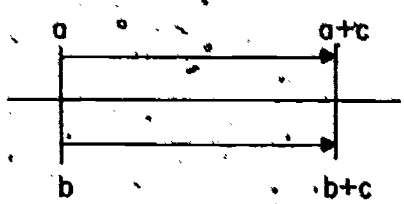
<u>Propiedad aditiva de la igualdad</u>. <u>Si dos números, a y b, son iguales (es decir, si a y b son dos nombres diferentes para un mismo número), y sumas un mismo número a cada uno de ellos, las dos sumas serán iguales.</u>

Esto es,

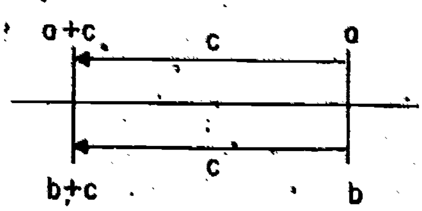
si $a = b$, entonces $a + c = b + c$.

Gráficamente, tendríamos las siguientes figuras:

Si $c > 0$



Si $c < 0$



Para ver cómo se aplica esto a la ecuación $x + 3 = 7$, observa que si x denota una solución de esta ecuación, $x + 3$ y 7 son dos nombres de un mismo número. Luego, en la propiedad aditiva,

$x + 3$ desempeña el papel de la letra a,
7 desempeña el papel de la letra b,

si x es una solución de la ecuación. Entonces, si x es solución de

$$x + 3 = 7$$

también es solución de

$$(x + 3) + c = 7 + c$$

para todo número c. Una manera breve de describir esto es decir que obtenemos la segunda ecuación de la primera "sumando el mismo número, c, a ambos miembros de la ecuación".

La elección más útil para "c" en el ejemplo anterior es $^-3$, pues

$$(x + 3) + (^-3) = 7 + (^-3)$$

Luego, por la propiedad asociativa de la adición, esto es equivalente a

$$x + [3 + (^-3)] = 7 + (^-3)$$

Luego

$$x + 0 = 4$$

$$x = 4$$

Por consiguiente, por la propiedad aditiva de la igualdad, si un número es solución de $x + 3 = 7$, es solución de $x = 4$. Recíprocamente, si un número es solución de $x = 4$, podemos sumar 3 a ambos miembros de la ecuación para obtener

$$x + 3 = 7$$

y ver que si un número es solución de $x = 4$, también es solución de $x + 3 = 7$. Entonces las ecuaciones

$$x = 4 \quad \underline{y} \quad x + 3 = 7$$

son ecuaciones equivalentes; es decir, sus conjuntos de soluciones son uno mismo.

Por este medio podemos mostrar que

$$a = b \quad \underline{y} \quad a + c = b + c$$

son ecuaciones equivalentes; es decir, si $a = b$, entonces $a + c = b + c$, y si $a + c = b + c$, entonces $a = b$.

Haciendo uso de este resultado, se sigue que $x = 3$ y

$x + 7 = 10$ son ecuaciones equivalentes, pues obtenemos la segunda sumando 7 a ambos miembros de la ecuación $x = 3$.

Ejercicios de clase 2-3b

1. Determina el conjunto de soluciones de cada una de las ecuaciones que siguen y comprueba tus soluciones.

   (a) $x + 4 = 10$
   (b) $x + (^{-}2) = 5$
   (c) $3 = x + 4$
   (d) $^{-}2 = x + (^{-}3)$

2. Emplea la propiedad distributiva para simplificar cada una de las siguientes expresiones:

   (a) $2x + 3x = ?$
   (b) $x + 5x = ?$
   (c) $(^{-}2)x + 3x = ?$
   (d) $(^{-}x) + 7x = ?$
   (e) $(^{-}x) + (^{-}2)x = ?$
   (f) $(^{-}2)x + (^{-}5)x = ?$

Suponte que en lugar de sumar un número conocido a ambos miembros de la ecuación $x + 7 = 10$, sumamos la expresión $2x$ que contiene la incógnita. Entonces tendríamos

$$2x + (x + 7) = 2x + 10$$

Mediante la propiedad asociativa, podríamos escribir el miembro de la izquierda como

$$(2x + x) + 7$$

Puesto que $x = 1 \cdot x$, también $2x + x = 2x + 1 \cdot x = (2 + 1)x = 3x$, empleando la propiedad distributiva. Entonces, si sumamos $2x$ a ambos miembros de la ecuación $x + 7 = 10$, tenemos que

$$3x + 7 = 2x + 10$$

Todo esto está muy bien, pero suponte que se nos hubiera dado la última ecuación. ¿Cómo podríamos volver a la primera? Como obtuvimos la última ecuación sumando $2x$ a los dos miembros de la primera, podemos obtener la primera sumando $^{-}(2x)$ a ambos miembros de la última. Veamos si esto es así. Entonces

$$^{-}(2x) + 3x + 7 = {^{-}(2x)} + 2x + 10$$

Pero $^{-}(2x) + 2x = 0$, pues $^{-}(2x)$ es el inverso aditivo de $2x$.

Pero, ¿a cuánto es igual $^-(2x) + 3x$? Lo sabremos gracias a la propiedad distributiva, procediendo de esta manera:

$$^-(2x) + 3x = (^-2)x + 3x = (^-2 + 3)x = 1 \cdot x = x$$

Entonces, sumando $^-(2x)$ a ambos miembros de la ecuación $3x + 7 = 2x + 10$, obtenemos $x + 7 = 10$ como ecuación equivalente. Como la solución de esta ecuación es 3, la solución de $3x + 7 = 2x + 10$ también es 3. Debes comprobar esto para mostrar que no nos hemos equivocado.

Ahora podemos encontrar la solución de una ecuación como

$$4x + 5 = 3x + 2$$

Queremos hallar una ecuación equivalente en la cual x aparezca en un miembro solamente. Para conseguirlo, podemos sumar $^-(3x)$ a ambos miembros, para obtener

$$^-(3x) + 4x + 5 = ^-(3x) + 3x + 2$$

Resulta la proposición

$$x + 5 = 2$$

(Debes completar los cálculos necesarios para llegar a este resultado.) Entonces, si sumamos $^-5$ a los dos lados de esta ecuación (pues queremos tener a x sola en un miembro), tenemos

$$(x + 5) + (^-5) = (^-5) + 2$$

$$x + [5 + (^-5)] = (^-5) + 2$$

$$x + 0 = ^-3$$

$$x = ^-3$$

Entonces $x = ^-3$ es equivalente a la ecuación $4x + 5 = 3x + 2$, lo que muestra que $^-3$ es su solución.

La solución de la ecuación $x = ^-3$ es obvia y, como es equivalente a la ecuación $4x + 5 = 3x + 2$, ésta también tiene la solución $^-3$. En realidad, un método para resolver ecuaciones es hallar un equivalente de la ecuación propuesta que tenga una solución evidente—es decir, de la forma $x =$ algún número. Revisemos el procedimiento que hemos seguido. Primero hemos sumado $^-(3x)$ a ambos miembros de la ecuación para obtener una ecuación equivalente en la cual x aparezca en un solo miembro: $x + 5 = 2$. Como queríamos una ecuación en la forma $x =$ algún número, hemos sumado luego $^-5$ a ambos miembros.

Para estar seguros de que no hemos cometido ningún error, comprobemos que $^-3$ es realmente una solución de la ecuación

$$4x + 5 = 3x + 2$$

Si $x = {}^-3$, el miembro de la izquierda de la ecuación es

$$(^-3) \cdot 4 + 5 = (^-12) + 5 = {}^-7$$

Si $x = {}^-3$, el miembro de la derecha de la ecuación es

$$3(^-3) + 2 = (^-9) + 2 = {}^-7$$

Entonces, para este valor de x, el número del miembro de la izquierda es igual al número del miembro de la derecha. Esta es nuestra prueba.

Por supuesto, hay ecuaciones que no tienen solución. Una de tales ecuaciones es $x + 3 = x$, cuya imposibilidad de solución puede considerarse como obvia, pues ningún número puede ser 3 unidades mayor que sí mismo. Podemos sumar ^-x a ambos lados y tener

$$(^-x) + (x + 3) = (^-x) + x$$

ó

$$[(^-x) + x] + 3 = (^-x) + x$$

$$0 + 3 = 0$$

$$3 = 0$$

(Recuerda que así como $^-3$ es el número con la propiedad $(^-3) + 3 = 0$, también ^-x es el número con la propiedad $(^-x) + x = 0$.)

Entonces la ecuación dada es equivalente a $3 = 0$. Esta no tiene solución y, por tanto, la ecuación dada no tiene solución.

Otras ecuaciones pueden tener varias soluciones. Considera $2x = x + x$. Esto es cierto para todo valor de x. Probablemente querrás mostrar que esta ecuación es equivalente a $0 = 0$.

Ejercicios 2-3a

1. Empleando los métodos de la sección anterior, halla cuatro ecuaciones equivalentes a cada una de las siguientes ecuaciones:

   (a) $x + 7 = 13$

   (b) $17 = x + ({}^{-}3)$

   (c) $x = 7$

2. Emplea la propiedad aditiva para resolver las ecuaciones que se dan más abajo. Comprueba tus resultados.

   Ejemplo. $x + ({}^{-}3) = 11$. Primero usa la propiedad aditiva y suma 3 a ambos miembros de la ecuación. Resulta:

   $$[x + ({}^{-}3)] + 3 = 11 + 3$$

   Por la propiedad asociativa de la adición, esto es equivalente a

   $$x + [({}^{-}3) + 3] = 14$$

   $$x + 0 = 14$$

   $$x = 14$$

   Para comprobar este resultado, observa que si $x = 14$, $x + ({}^{-}3)$ es $14 + ({}^{-}3)$, lo que es igual a 11.

   (a) $x + 5 = 6$

   (b) $x + 6 = 5$

   (c) $x + ({}^{-}7) = 7$

   (d) $x + ({}^{-}7) = {}^{-}7$

   (e) $t + 6 = {}^{-}13$

   (f) $4 = x + 3$

   (g) ${}^{-}2 = ({}^{-}4) + x$

   (h) $x + \frac{3}{2} = 10$

   (i) $y + {}^{-}(\frac{3}{2}) = \frac{5}{2}$

   (j) $u + 14 = \frac{9}{5}$

   (k) $\frac{13}{7} = 1 + x$

   (l) $x + {}^{-}(\frac{4}{9}) = {}^{-}(\frac{7}{13})$

3. Aplica la propiedad aditiva a estas ecuaciones, sumando los números indicados, y escribe la ecuación resultante.

<u>Ejemplo</u>. $3x + 4 = 5$ (suma $^{-}4$)

$(3x + 4) + (^{-}4) = 5 + (^{-}4)$ por la propiedad aditiva

$3x + [4 + (^{-}4)] = 1$ por la propiedad asociativa

La ecuación resultante es $3x = 1$.

(a) $2x + 5 = 10$ (suma $^{-}5$)

(b) $3x + 10 = 5$ (suma $^{-}10$)

(c) $5x + 2 = {}^{-}2$ (suma $^{-}2$)

(d) $10x + (^{-}1) = 9$ (suma 1)

(e) $2u + 1 = 11$ (suma $^{-}1$)

(f) $2x + (^{-}3) = 9$ (suma 3)

(g) $(^{-}4)y + (^{-}3) = \frac{9}{2}$ (suma 3)

4. (a) ¿Qué número sumas (empleando la propiedad aditiva) para resolver $x + 3 = 2$?

(b) ¿Qué número sumas (empleando la propiedad aditiva) para resolver $x + (^{-}7) = 4$?

(c) ¿Qué relación hay entre 3 y $^{-}3$ respecto de la adición?

(d) ¿Qué relación hay entre 7 y $^{-}7$ respecto de la adición?

5. (a) Si $x = 3$, ¿cuánto es ^{-}x?

(b) Si $x = \frac{1}{2}$, ¿cuánto es ^{-}x?

(c) Si $x = {}^{-}3$, ¿cuánto es ^{-}x? Respuesta: por ^{-}x, entendemos el número que tiene la propiedad $x + (^{-}x) = 0$. Entonces para $x = {}^{-}3$, tenemos

$$(^{-}3) + (^{-}x) = 0$$

Pero sabemos que $(^{-}3) + 3 = 0$. Entonces ^{-}x debe ser igual a 3. Con otras palabras, $^{-}(^{-}3) = 3$.

(d) Si $x = {}^{-}(\frac{1}{2})$, ¿cuánto es ^{-}x?

(e) Si $x = {}^{-}7$, ¿cuánto es ^{-}x?

6. Al comienzo de esta sección hemos resuelto la ecuación

$$4x + 5 = 3x + 2$$

sumando $^{-}(3x)$ a ambos miembros de la ecuación. Suponte que hubiéramos comenzado sumando $^{-}(4x)$ a los dos miembros. ¿Se podría encontrar la solución de esta manera? ¿Te parece que es un método más simple para resolver la ecuación?

7. Simplifica cada una de las siguientes expresiones:

   (a) $(^{-}x) + 3x = ?$

   (b) $3x + (^{-}x) = ?$

   (c) $^{-}(2x) + 3x = ?$

8. Resuelve esta ecuación: $2x + 7 = x$.
9. Resuelve esta ecuación: $2x + 3 = x + 2$.
10. Resuelve esta ecuación: $x = 2x + 6$.
11. Resuelve esta ecuación: $3x + 5 = 2x$.

El sumar un mismo número a los dos miembros de una ecuación no es el único método para obtener una ecuación equivalente. Podemos también multiplicar ambos miembros por un mismo número. Por ejemplo,

$$5 + 2 = 7$$

es una proposición verdadera. Si multiplicamos ambos miembros por 3, obtenemos

$$3(5 + 2) = 3 \cdot 7$$

Esta proposición es también verdadera. Este es un ejemplo de la propiedad multiplicativa de la igualdad:

<u>Propiedad multiplicativa de la igualdad.</u> <u>Si</u> a <u>y</u> b <u>son dos números iguales, entonces</u> $ca = cb$.

¿Es cierto que $ca = cb$ implica que $a = b$? Antes de responder a esta pregunta, consideremos la solución de una ecuación empleando la propiedad multiplicativa. Como nuestro método de solución es muy parecido al que emplea la propiedad aditiva de la igualdad, en la columna de la izquierda resolveremos una ecuación empleando la propiedad aditiva y en la columna de la derecha resolveremos una ecuación semejante, empleando la propiedad multiplicativa.

Problema. Resolver $3 + x = 6$.

Suma primero el inverso aditivo de 3 a ambos miembros de la ecuación, para obtener

$$(^{-}3) + (3 + x) = (^{-}3) + 6$$

Usando la propiedad asociativa de la adición,

$$[(^{-}3) + 3] + x = (^{-}3) + 6$$
$$0 + x = 3$$
$$x = 3$$

Problema. Resolver $3x = 6$.

Primero multiplica ambos miembros de la ecuación por $\frac{1}{3}$, que es el inverso multiplicativo de 3, para obtener

$$\frac{1}{3}(3x) = \frac{1}{3}(6)$$

Usando la propiedad asociativa de la multiplicación,

$$(\frac{1}{3} \cdot 3)x = \frac{1}{3} \cdot 6$$
$$1 \cdot x = 2$$
$$x = 2$$

Podemos emplear este mismo tratamiento paralelo para mostrar que

si $ca = cb$, y $c = 0$, entonces $a = b$.

Problema. Demostrar que, si $c + a = c + b$, entonces $a = b$.

Primero suma a ambos miembros de la igualdad ^{-}c, el inverso aditivo de c, para obtener

$$(^{-}c) + (c + a) = (^{-}c) + (c + b)$$

Usando la propiedad asociativa de la adición,

$$[(^{-}c) + c] + a = [(-c) + c] + b$$
$$0 + a = 0 + b$$
$$a = b$$

Problema. Para $c \neq 0$ demostrar que, si $ca = cb$, entonces $a = b$.

Primero multiplica ambos miembros por $\frac{1}{c}$, el inverso multiplicativo de c (observa que este inverso existe solamente si $c \neq 0$), para obtener

$$\frac{1}{c} \cdot (ca) = \frac{1}{c} \cdot (cb)$$

Usando la propiedad asociativa de la multiplicación,

$$(\frac{1}{c} \cdot c)a = (\frac{1}{c} \cdot c)b$$
$$1 \cdot a = 1 \cdot b$$
$$a = b$$

Entonces, hemos mostrado que si $c \neq 0$, $ca = cb$ y $a = b$ son ecuaciones equivalentes. Esto significa que si $c \neq 0$ y $ca = cb$, entonces $a = b$; también que si $c \neq 0$ y $a = b$, entonces $ca = cb$.

Apliquemos ahora este resultado a la resolución de la ecuación

$$3x + 1 = 13$$

Queremos dejar solamente $3x$ en un miembro de la ecuación, lo que podemos hacer sumando $^{-}1$ a ambos miembros, como al comienzo de esta sección. Resulta:

$$3x + 1 + (^{-}1) = 13 + (^{-}1)$$
$$3x + 0 = 12$$
$$3x = 12$$

Como queremos encontrar una ecuación de la forma $x =$ algún número, podemos conseguirlo multiplicando ambos miembros por $\frac{1}{3}$, inverso (es decir, inverso multiplicativo) de 3. Entonces la ecuación

$$3x = 12$$

es equivalente a $\frac{1}{3} \cdot (3x) = \frac{1}{3} \cdot (12)$

ó $(\frac{1}{3} \cdot 3) \cdot x = 4$

ó $x = 4$

Hemos mostrado que la ecuación $3x + 1 = 13$ es equivalente a $x = 4$. Como $x = 4$ tiene la solución evidente 4, entonces 4 es solución de $3x + 1 = 13$. Por lo que sabemos, podemos estar seguros de que si no hemos cometido algún error en las operaciones, $x = 4$ es la solución de la ecuación $3x + 1 = 13$. Pero como conviene estar seguro, es una buena práctica verificar la respuesta para cerciorarse de que es realmente una solución. Si reemplazamos x por 4 en $3x + 1$, obtenemos $3 \cdot 4 + 1$, que es igual a 13. Esta es la verificación que queríamos.

<u>Ejercicios de clase 2-3c</u>

1. Indica cuál de las propiedades, aditiva o multiplicativa, de la igualdad debe usarse y qué número debe sumarse o multiplicarse para resolver las siguientes ecuaciones:

(a) $x + 10 = 22$

(b) $6.2 + x = 1.12$

(c) $(^-2) + x = 10$

(d) $5x = 15$

(e) $6 = \frac{x}{18}$

(f) $14 - x = 0$

(g) $\frac{1}{2}x = 17$

(h) $18 + y = 8.6$

(i) $y + 6 = 5 + 3$

(j) $0.08d = 73$

(k) $19 = 6 - y$

(l) $\frac{2}{3}n = 15 + 0.4$

(m) $45 \cdot b = 4$

(n) $\frac{7}{c} = 1,\ c \neq 0$

2. Halla los inversos de cada uno de los siguientes números:

(a) 7. Respuesta: $\frac{1}{7}$ es el inverso, puesto que $7(\frac{1}{7}) = 1$.

(b) 5

(c) $^-3$

(d) $\frac{1}{2}$. Respuesta: el inverso de un número b se define como el número $\frac{1}{b}$ tal que $b(\frac{1}{b}) = 1$. Como $\frac{1}{2}(2) = 1$, 2 es el inverso de $\frac{1}{2}$.

(e) $\frac{1}{4}$

(f) $\frac{2}{3}$

(g) $^-(\frac{1}{2})$

3. Halla el inverso aditivo y el inverso multiplicativo de cada uno de los números que siguen, teniendo cuidado de indicar cuál es cuál.

(a) 3 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{5}{7}$

Ejercicios 2-3b

1. Halla los inversos, aditivo y multiplicativo, de cada uno de los números que siguen, teniendo cuidado de indicar cuál es cuál.

(a) 7

(b) $\frac{3}{4}$

(c) $^-2$

(d) $\frac{1}{2}$

2. Indicando siempre dónde empleas las propiedades aditiva y multiplicativa de la igualdad, resuelve cada una de las siguientes ecuaciones:

(a) $3x + 2 = 14$

(b) $7x = 2$

(c) $(^{-}3)x + 7 = 22$

(d) $\frac{1}{2}x = 7$

(e) $^{-}(\frac{1}{2})x = 14$

Probemos nuestros métodos con esta ecuación más complicada:

$$^{-}(\tfrac{1}{2})x + 2 = 2x + \tfrac{1}{2}$$

Primero queremos encontrar una ecuación equivalente en la cual todos los términos en x están en un solo miembro. Empleamos la propiedad aditiva, sumando $\frac{1}{2}x$ a ambos miembros:

$$\tfrac{1}{2}x + [^{-}(\tfrac{1}{2})x + 2] = \tfrac{1}{2}x + (2x + \tfrac{1}{2})$$

Usando la propiedad asociativa de la adición, tenemos esta ecuación que llamaremos (A):

$$[\tfrac{1}{2}x + {}^{-}(\tfrac{1}{2})x] + 2 = (\tfrac{1}{2}x + 2x) + \tfrac{1}{2}$$

Ahora $\frac{1}{2}x + {}^{-}(\frac{1}{2})x = 0$, pues $^{-}(\frac{1}{2})x$ es el inverso aditivo de $\frac{1}{2}x$. También por la propiedad distributiva,

$$\tfrac{1}{2}x + 2x = (\tfrac{1}{2} + 2)x$$

Entonces la ecuación (A) es equivalente a

$$0 + 2 = (\tfrac{1}{2} + 2)x + \tfrac{1}{2}$$

es decir,

$$2 = \tfrac{5}{2}x + \tfrac{1}{2}$$

Como queremos que el término en x esté aislado en un miembro de la ecuación, podemos emplear aún la propiedad aditiva y sumar $^{-}(\frac{1}{2})$ a ambos miembros de la ecuación para obtener

$$\tfrac{3}{2} = \tfrac{5}{2}x$$

Como queremos una ecuación de la forma, un número = x, podemos usar la propiedad multiplicativa y multiplicar ambos miembros por $\frac{2}{5}$, el inverso de $\frac{5}{2}$, para obtener

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2}x$$

Finalmente (necesitarás efectuar algunas etapas del cálculo), tenemos

$$\frac{3}{5} = x$$

Entonces $\frac{3}{5}$ es la solución de la ecuación $^{-}(\frac{1}{2})x + 2 = 2x + \frac{1}{2}$.

La obtención de este resultado ha exigido un largo proceso y hemos corrido el riesgo de equivocarnos. Deberemos, pues, verificar nuestro resultado.

Si $x = \frac{3}{5}$, el miembro de la izquierda de la ecuación, $^{-}(\frac{1}{2})x + 2$, se transforma en $^{-}(\frac{1}{2}) \cdot \frac{3}{5} + 2 = {}^{-}(\frac{3}{10}) + 2 = {}^{-}(\frac{3}{10}) + \frac{20}{10} = \frac{17}{10}$.

Si $x = \frac{3}{5}$, el miembro de la derecha de la ecuación, $2x + \frac{1}{2}$, se transforma en $2 \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} = \frac{6}{5} + \frac{1}{2} = \frac{12}{10} + \frac{5}{10} = \frac{17}{10}$.

Esto muestra que para $x = \frac{3}{5}$, $^{-}(\frac{1}{2})x + 2$ es igual a $2x + \frac{1}{2}$.

Hay otros métodos para resolver esta ecuación. Uno de ellos comenzaría multiplicando ambos miembros de la ecuación por 2, para hacer desaparecer las fracciones. En uno de los ejercicios siguientes se te pedirá que uses este método.

<u>Ejercicios de clase 2-3d</u>

1. ¿Qué propiedad se usa, y cómo se usa, para obtener la segunda ecuación de la primera?

<u>Ejemplo</u>. (1) $2x + 4 = 7$

(2) $2x = 3$ propiedad aditiva, sumando $^{-}4$

(a) (1) $\frac{1}{8}k + 1 = 1$
    (2) $\frac{1}{8}k = 0$

(b) (1) $1.6 = 4y$
    (2) $0.4 = y$

(c) (1) $\frac{2(m + 5)}{3} = 6$
    (2) $2(m + 5) = 18$

(d) (1) $^-x = 5$
    (2) $x = {}^-5$

(e) (1) $2(y + 4) = 8$
    (2) $y + 4 = 4$

(f) (1) $\frac{2}{5}x = 10$
    (2) $\frac{1}{5}x = 5$

(g) (1) $0.3m - 7.2 = 5$
    (2) $3m - 72 = 50$

*(h) (1) $\frac{4}{n} = {}^-26$
    (2) $4 = {}^-26n$

*(i) (1) $5x - 2 = 3x + 6$
    (2) $2x - 2 = 6$

2. Resuelve y comprueba cada una de las siguientes ecuaciones:

(a) $3y + ({}^-2) = 7$
(b) $7 = 3x + 4$
(c) $6 = 3w$
(d) $\frac{1}{2}t - 1.7 = {}^-1.3$
(e) $2 = \frac{x}{18}$
(f) $0.14 + x = 5.28$
(g) $5x - 7 = 2x$
(h) $x = 7 - 2x$

Ejercicios 2-3c

1. Resuelve las ecuaciones que siguen, empleando las propiedades de "igual". Justifica cada una de las etapas de tu cálculo.

(a) $2x + 1 = 7$
(b) $y - 2 = 6$
(c) $\frac{t}{2} - 3 = {}^-4$
(d) $3x - 5 = {}^-4$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

(a) $x + 3 = 5$
(b) $3 + y = {}^-5$
(c) $2v + 3 = 5$
(d) $3 + 2m = {}^-5$
(e) $y - 3 = 5$
(f) $3 - u = {}^-5$
(g) $2w - 3 = 5$
(h) $3 - 2s = {}^-5$

*(i) $2w + 7 = 5w + 1$ *(k) $2t - 11 = 5t + 1$

*(j) $15 + 2w = (^{-}5)w + 1$ *(l) $15 - 5w = {}^{-}2w + 1$

3. (a) ¿Qué número debes usar como multiplicador para resolver la ecuación $9x = 27$?

   (b) ¿Qué número debes emplear como multiplicador para resolver la ecuación $\frac{1}{3}x = 4$?

   (c) ¿Qué número debes emplear como multiplicador para resolver la ecuación $\frac{4}{5}x = \frac{1}{2}$?

   (d) ¿Qué relación hay entre 9 y $\frac{1}{9}$, respecto de la multiplicación?

   (e) ¿Qué relación hay entre 3 y $\frac{1}{3}$, respecto de la multiplicación?

   (f) ¿Qué relación hay entre $\frac{4}{5}$ y $\frac{5}{4}$, respecto de la multiplicación?

4. Al resolver una ecuación como $3x + 1 = 9$, has aprendido a emplear primero la propiedad aditiva de la igualdad (para hallar $3x$) y luego la propiedad multiplicativa de la igualdad (para hallar x). Algunas veces puede resultarte mejor invertir el orden en el cual usas estas propiedades. Empleando primero la propiedad multiplicativa, resuelve las ecuaciones siguientes:

   (a) $4(x + 1) = 12$ (d) $0.6(x - 0.3) = 0.2$

   (b) $7(x - 2) = 13$ (e) $\frac{3x + 4}{2} = 7$

   (c) $\frac{x + 9}{3} = 5$ (f) $\frac{4x + 1}{0.12} = 3$

5. Para resolver la ecuación $\frac{1}{2}(^{-}x) + 2 = \frac{1}{2} + 2x$, comienza multiplicando ambos miembros por 2 y obtén la ecuación equivalente

$$(^{-}x) + 4 = 1 + 4x$$

Luego halla la solución de esta ecuación. ¿Está esto de acuerdo con lo que se estudió antes? ¿Te parece que este método es más fácil que el otro que empleamos primero?

2-4. Resolución de inecuaciones

En la Sección 2-2 hemos obtenido por inspección las soluciones de varias inecuaciones. Para resolver inecuaciones se pueden emplear también los métodos que seguimos en la sección anterior para resolver ecuaciones. Para mostrar la analogía, resolvamos una ecuación y una inecuación relacionada con ella.

Para resolver $x + 4 = 7$.

Suma $^{-}4$ a ambos miembros de la ecuación, empleando la propiedad aditiva de la igualdad:

$$(x + 4) + (^{-}4) = 7 + (^{-}4)$$

Usando la propiedad asociativa de la adición,

$$x + [4 + (^{-}4)] = 7 + (^{-}4)$$
$$x + 0 = 3$$
$$x = 3$$

Para resolver $x + 4 < 7$.

Suma $^{-}4$ a ambos miembros de la inecuación, empleando la propiedad aditiva de la desigualdad:

$$(x + 4) + (^{-}4) < 7 + (^{-}4)$$

Usando la propiedad asociativa de la adición,

$$x + [4 + (^{-}4)] < 7 + (^{-}4)$$
$$x + 0 < 3$$
$$x < 3$$

Sabemos que cada una de las ecuaciones de la izquierda es equivalente a todas las demás. En la columna de la derecha suponemos que se pueden establecer las mismas propiedades para las inecuaciones. Tenemos que mostrar la propiedad aditiva de la desigualdad:

<u>Propiedad aditiva de la desigualdad</u>. <u>Si</u> $a < b$, <u>entonces</u>

$$a + c < b + c$$

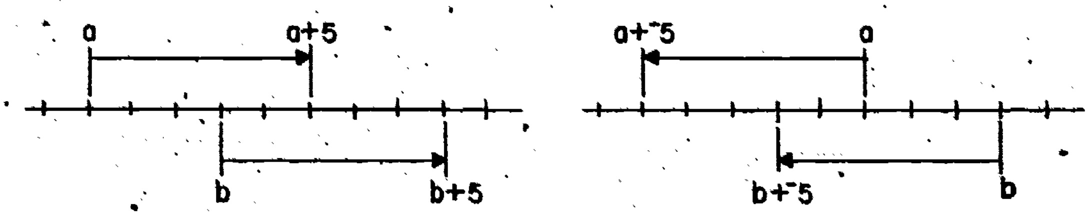
Para ello, suponte que $c = 5$. Entonces $a < b$ significa que sobre la recta numérica horizontal, el punto que representa al número a, está a la izquierda del punto que representa al número b. Ahora, el punto que representa al número $a + 5$, está 5 unidades a la derecha del punto que representa al número a; el punto que representa <u>a</u> $b + 5$, está 5 unidades a la derecha del punto que representa <u>a</u> b. Entonces el punto que representa <u>a</u> $a + 5$, está a la izquierda del punto que representa <u>a</u> $b + 5$. Esto significa que

$$a + 5 < b + 5$$

En segundo lugar, si c fuera $^{-}5$, el punto que representa al número $a + (^-5)$ está a 5 unidades a la izquierda del punto que representa al número a, y ocurre lo mismo con $b + (^-5)$. Nuevamente

$$a + (^-5) < b + (^-5)$$

Mira esta figura:



En general, si c es un número positivo, el punto representado por $a + c$ está c unidades a la derecha del punto representado por a, y de manera análoga para $b + c$ y b. Luego, si c es un número positivo, y

si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

¿Por qué valdría el mismo resultado si c fuese un número negativo? Con esto hemos mostrado la propiedad aditiva de la desigualdad.

Exactamente como en el caso de la igualdad, podemos mostrar lo siguiente:

Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$, y si $a + c < b + c$, entonces $a < b$.

Esto nos dice que si sumamos un mismo número a ambos miembros de una desigualdad, tenemos una desigualdad equivalente. Por ejemplo, la desigualdad

$$x + (^-3) < 8$$

es equivalente a la desigualdad $[x + (^-3)] + 3 < 8 + 3$; es decir,

$$x < 11$$

Ejercicios 2-4

1. Determina el conjunto de soluciones de cada una de las siguientes inecuaciones:

(a) $x + 5 < 7$ (c) $x + (^-2) < 8$

(b) $7 > x + 5$ (d) $y + (^-3) < 10$

(e) $10 < y + (^-3)$

(f) $2x + 3 < x + 2$

(g) $x + 4 < 5 + x$

(h) $x + 4 > 5 + x$

(i) $3x + 2 < 2x + (^-3)$

(j) $\frac{1}{2}x + 3 > {}^-(\frac{1}{2})x + 4$

(k) $7 + 2x < x + {}^-(\frac{1}{7})$

2. Muestra que si c es un número negativo y si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.
3. Emplea la propiedad aditiva de la desigualdad para mostrar que si $a + c < b + c$, entonces $a < b$. (Esto se puede lograr con el mismo método que hemos empleado para las igualdades.)
4. Si $a > b$, ¿es cierto que $a + c$ debe ser mayor que $b + c$? Si es así, muestra por qué. Si no es así, muestra por qué no.
5. Si $a \neq b$, ¿debe ser cierto que $a + c \neq b + c$? Da razones para justificar tu respuesta.
6. Si $a < b$, ¿debe ser cierto que $2a < 2b$? Muestra por qué es cierto.

*7. Si $a < b$, ¿debe ser cierto que $(^-2)a < (^-2)b$? ¿Por qué sí o por qué no?

2-5. Proposiciones numéricas con dos incógnitas

En los ejemplos anteriores de frases y proposiciones numéricas, había una sola incógnita. Podemos también tener más de una incógnita. Observa esta proposición:

$$x + 1 = y$$

Si $x = 3$ e $y = 5$, ¿es la proposición verdadera o falsa? Si $x = 7$, ¿qué debe ser y para que la proposición sea verdadera? Si $y = {}^-6$, entonces tenemos $x + 1 = {}^-6$. ¿Cuánto debe ser x para que esta proposición sea verdadera? ¿Cómo aprendiste a resolver una ecuación tal como $x + 1 = {}^-6$ en la Sección 2-3?

Cada solución de la ecuación $x + 1 = y$ es un par de números. Podemos construir una tabla con algunos de esos pares:

Tabla para $x + 1 = y$

x	y
0	1
1	
2	
$^-(\frac{2}{3})$	
	$^-(\frac{13}{3})$

Antes de continuar leyendo, copia esta tabla y completa los números que faltan. Por ejemplo, para completar la tercera fila, reemplaza x por 2 en la ecuación anterior. Proponte la siguiente pregunta: "¿Cuáles son los valores posibles de y?"

Sería mejor que leyeras el resto de este capítulo con lápiz y papel en mano. No pases a un nuevo párrafo mientras no respondas a todas las preguntas del párrafo que estás leyendo. En una gran parte de esta sección encontrarás conveniente usar además papel cuadriculado y regla.

Si $x = 0$ e $y = 1$, la ecuación $x + 1 = y$ es verdadera. Entonces, decimos que el par $(0, 1)$ es una solución de la ecuación. Observa que la solución es distinta según qué número se mencione primero. El par $(1, 0)$ no es una solución, pues si $x = 1$ e $y = 0$, entonces

$$x + 1 = 1 + 1 = 2 \quad (\text{no } 0)$$

de manera que la ecuación $x + 1 = y$ no es verdadera.

Recordarás del Capítulo 1, que se llama <u>par ordenado</u> a un par en el cual los objetos se consideran en determinado orden.

El par ordenado $(2, 7)$ es el mismo que el par ordenado (x, y) si $x = 2$ e $y = 7$, y solamente en tal caso. Este par es diferente del par ordenado $(7, 2)$.

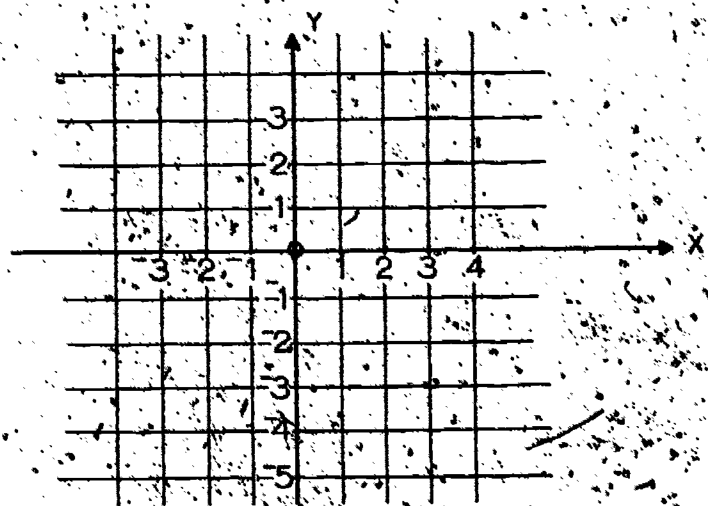
El conjunto de soluciones de la proposición anterior.

$$x + 1 = y$$

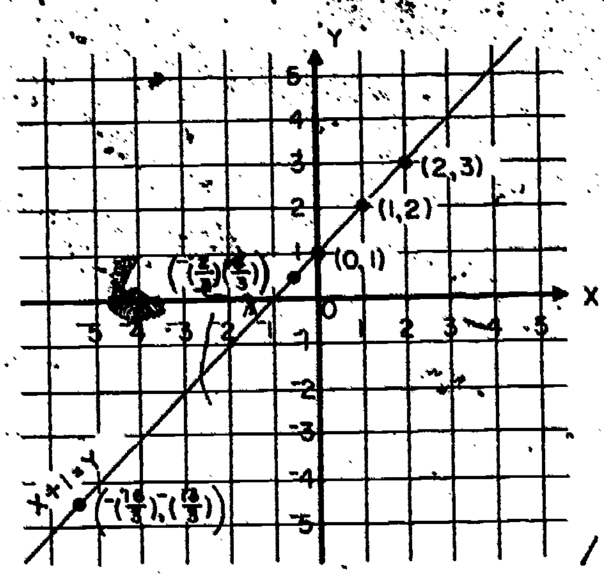
es un conjunto de pares ordenados de números. ¿Para qué número y

es el par ordenado (2, y) un elemento del conjunto de soluciones?

Para dibujar el conjunto de soluciones en un papel cuadriculado, toma dos rectas como ejes de abscisas y ordenadas como en el Capítulo 1, y dibújalas en trazo grueso a lápiz. Marca las rectas vertical y horizontal como se indica a continuación:



Marca en el papel cuadriculado los puntos (0, 1), (1, 2), etc., cuyas coordenadas están en el conjunto de soluciones de x + 1 = y. ¿Qué observas con respecto a esos puntos? Todos están sobre una figura geométrica simple. ¿A qué conjunto de puntos corresponde el conjunto de soluciones? En el Capítulo 1 has aprendido que tal conjunto de puntos se llama la <u>gráfica</u> de la proposición numérica, o ecuación, dada. He aquí la gráfica de x + 1 = y:



Ensayemos otro ejemplo. ¿Cuál es el conjunto de soluciones de la ecuación

$$2x + y = {}^{-}1?$$

Si damos a x cierto valor, obtenemos una ecuación en y para resolver. Si ensayamos diferentes valores de x, obtenemos diferentes ecuaciones en y para resolver. Análogamente, si ensayamos diferentes valores de y, obtenemos diferentes ecuaciones en x para resolver.

Por ejemplo: Sea $x = {}^{-}3$. Esto da la ecuación

$$2({}^{-}3) + y = {}^{-}1$$
$$({}^{-}6) + y = {}^{-}1$$

Resolvemos esta ecuación con los métodos aprendidos en la Sección 2-4.

$6 + [({}^{-}6) + y] = 6 + ({}^{-}1)$ por la propiedad aditiva,

$[6 + ({}^{-}6)] + y = 5$ por la propiedad asociativa de la adición

entonces $y = 5$

Si $y = 5$,

luego $({}^{-}6) + y = ({}^{-}6) + 5 = {}^{-}1$

entonces $({}^{-}6) + y = {}^{-}1$

Por consiguiente, 5 es una solución, la única solución. En consecuencia, $({}^{-}3, 5)$ es una solución de la ecuación $2x + y = {}^{-}1$. Sigue este ejemplo para completar la tabla de soluciones de $2x + y = {}^{-}1$ que se da a continuación. Probablemente puedes efectuar mentalmente algunas etapas del cálculo.

x	y
$^{-}3$	5
$^{-}1$	
0	
4	
	$^{-}2$
	0
	2

Cuando se complete esta tabla tendremos siete pares ordenados de números, que están en el conjunto de soluciones de la ecuación $2x + y = {}^-1$. Toma un eje de abscisas y un eje de ordenadas en el papel cuadriculado y localiza los puntos cuyas coordenadas son esos pares ordenados. ¿Te parece que todos ellos están sobre una recta? Traza la recta. Fija sobre la recta un punto que no sea uno de los siete que has dibujado. ¿Puedes hallar las coordenadas de ese punto midiendo ciertas distancias? Las coordenadas forman un par ordenado de números. Si tu dibujo y tus mediciones fuesen exactos, este par ordenado estaría también en el conjunto de soluciones de la ecuación. ¿Lo está?

Con los ejemplos que has visto en esta sección y en el Capítulo 1, probablemente has conjeturado que la gráfica de cualquier ecuación de la forma

$$ax + by = c$$

—en que a, b <u>y</u> c son números conocidos—está sobre una recta. Esto es cierto. Por tal motivo, llamamos habitualmente <u>ecuación lineal</u> a toda ecuación de este tipo.

<u>Ejercicios</u> <u>2-5a</u>

1. Construye una tabla que muestre algunos de los pares ordenados del conjunto de soluciones de cada una de las ecuaciones que siguen. Utilizando el mismo par de ejes, dibuja las gráficas de cada una de las siguientes ecuaciones:

   $y = x + 1$, $y = 2x + 1$, $y = 3x + 1$ <u>e</u> $y = ({}^-2)x + 1$.

2. Haz lo mismo para $y = x + 1$, $y = x + 2$, $y = x + ({}^-3)$.

3. Haz lo mismo para $x + y = 0$, $x + y = 1$ <u>y</u> $x + y = {}^-1$.

4. Haz lo mismo para $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ <u>y</u> $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$.

5. Haz lo mismo para $y = x + 1$ <u>y</u> $x + y = 1$.

6. Haz lo mismo para $y = 2x + 3$ <u>e</u> $y = {}^-(\frac{1}{2})x + 3$.

Veamos otro problema en que aparecen dos incógnitas. ¿Cuáles son las longitudes posibles de los lados de un rectángulo si el perímetro es 16 pulgadas? Si llamamos x pulgadas e y pulgadas a las longitudes de dos lados adyacentes respectivamente, tendremos

$$2x + 2y = 16$$

Sin embargo, ¡tengamos cuidado! Esta ecuación no es una traducción exacta de la situación real al lenguaje matemático. ¿Puede ser la longitud de un lado de un rectángulo un número negativo de pulgadas? ¿Puede ser cero pulgadas? Tienen que ser $x > 0$ e $y > 0$; la proposición numérica que realmente describe la situación es ésta:

$$2x + 2y = 16 \quad \underline{y} \quad x > 0, \quad y > 0$$

Podemos hallar varios pares ordenados del conjunto de soluciones. ¿Cuáles de los siguientes pares son soluciones?

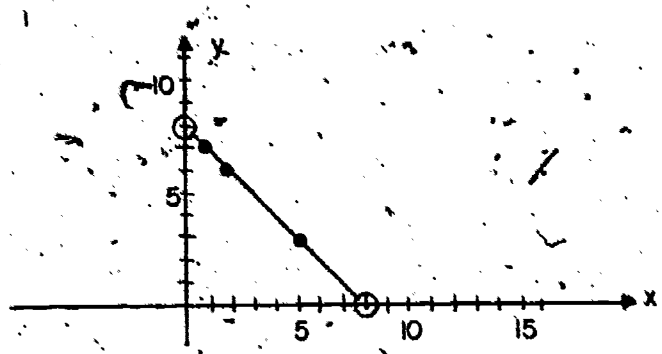
$$(^-1, 9), \quad (1, 7), \quad (2, 6),$$
$$(\tfrac{7}{2}, \tfrac{9}{2}), \quad (5, 3), \quad (7, 2),$$
$$(8, 0), \quad (9.5, {}^-1.5)$$

Recuerda que para que sea solución, un par ordenado debe hacer que la proposición numérica completa sea verdadera.

$$2x + 2y = 16 \quad \underline{y} \quad x > 0, \quad y > 0$$

La gráfica correspondiente a la ecuación que aparece en la proposición numérica anterior está sobre una recta. Dibújala. El resto de la proposición "$x > 0$, $y > 0$", dice que el punto correspondiente a las condiciones establecidas debe estar en cierto cuadrante. ¿En qué cuadrante? La gráfica de la proposición numérica dada es la parte de la gráfica de $2x + 2y = 16$ que está en el primer cuadrante.

La gráfica es un segmento sin sus extremos, como se indica aquí:



¿Cuáles de las soluciones anteriores de la proposición numérica han sido marcadas en la gráfica de la figura?

En este ejemplo hemos visto una proposición numérica constituida por varias proposiciones numéricas más breves, una de las cuales era una ecuación. Veamos otras proposiciones numéricas de este tipo.

Carmen tiene en su portamonedas 3 dólares en monedas de diez centavos y de veinticinco centavos. ¿Cuáles son las posibles combinaciones que ella puede tener de estas monedas?

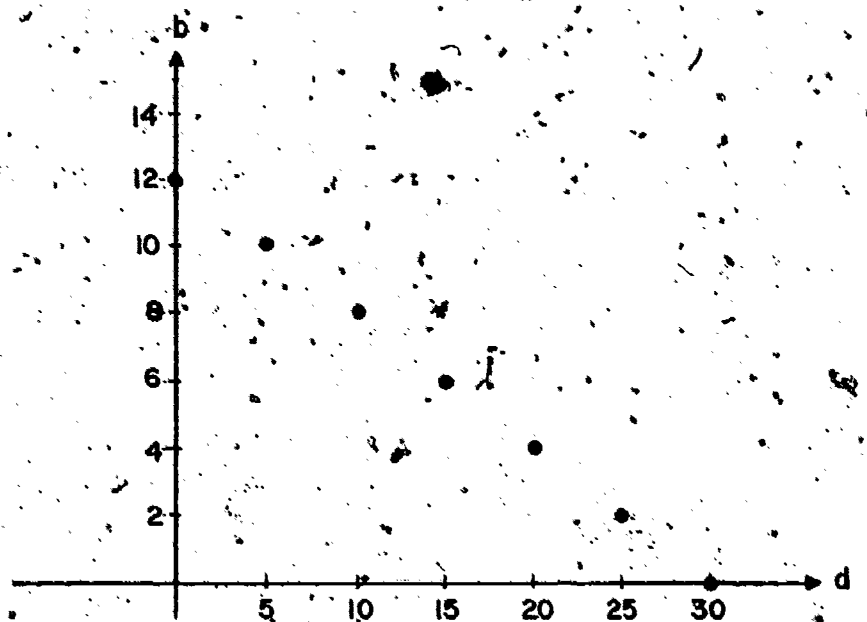
Sea d el número de monedas de diez centavos ("dimes") y q el número de monedas de veinticinco centavos (cuartos). Así como el valor de 3 "dimes" es $10 \cdot 3$ centavos, el valor de d "dimes" es $10 \cdot d$ centavos. El valor total de esas monedas es $(10d + 25q)$ centavos, y esto debe ser igual a 3 dólares. Pero ¡espera un momento! Debemos ponernos de acuerdo sobre cómo contamos las monedas: en centavos o en dólares. Utilicemos centavos para todos los cálculos. Entonces, 3 dólares es igual a 300 centavos. Por consiguiente, el par (d, q) es una solución de la ecuación

$$10d + 25q = 300$$

Nuevamente, ¡cuidado! Carmen no puede tener veintisiete y media "dimes", ni $^-3$ "dimes". Las incógnitas de este problema deben ser números enteros no negativos. La proposición numérica que realmente describe esta situación es $10d + 25q = 300$, y d, como también q, son enteros no negativos. El conjunto de soluciones de esta proposición numérica consta de siete pares ordenados:

$(0, 12)$, $(5, 10)$, $(10, 8)$, $(15, 6)$,
$(20, 4)$; $(25, 2)$, $(30, 0)$.

La gráfica de esta proposición numérica consiste solamente en siete puntos.



Puedes estar en desacuerdo con esta solución en un detalle, pues hay otra manera de interpretar el enunciado: "Carmen tiene en su portamonedas 3 dólares en monedas de diez centavos y de veinticinco centavos". ¿Incluye este enunciado la posibilidad de que no tenga ninguna moneda de diez centavos y doce monedas de veinticinco centavos? Algunas personas dirían que sí y otras dirían que no. Si tu respuesta es "no", debes excluir dos soluciones: ningún "dime" y 12 cuartos, y 30 "dimes" y ningún cuarto. Estas soluciones están representadas por los pares ordenados: $(0, 12)$ y $(30, 0)$.

Ya hemos determinado las gráficas de ciertas ecuaciones. Ahora veamos cómo es la gráfica de una inecuación. Comparemos primero la tabla de soluciones de $y = x + 1$, que ya hemos encontrado, con la tabla de soluciones de $y > x + 1$.

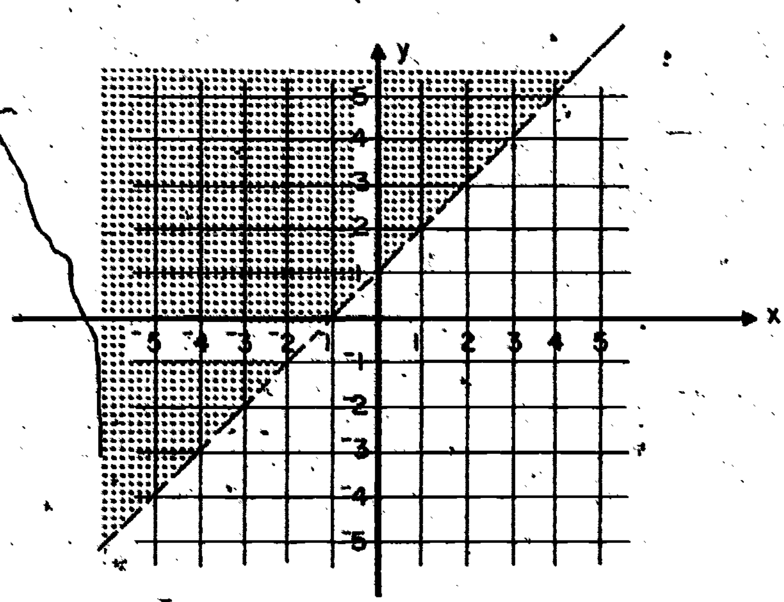
$y = x + 1$

x	y
0	1
1	2
2	3
$^-1$	0

$y > x + 1$

x	y
0	> 1
1	> 2
2	> 3
$^-1$	> 0

Esto pone de manifiesto que para $x = 1$, por ejemplo, y puede ser cualquier número mayor que 2; y puede ser no solamente 3, 4, 5, etc., sino también $2\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{4}$ ó 2.1. Entonces, la gráfica de $y > x + 1$ tiene la forma que se indica en la figura. La gráfica de la inecuación no incluye la recta misma, por lo cual se la dibuja como línea de trazos.

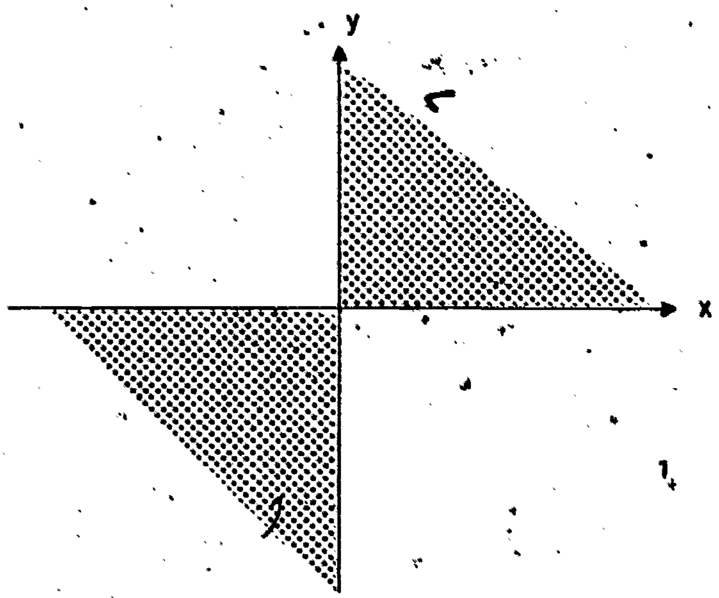


(La línea de trazos es la gráfica de $y = x + 1$. Ningún punto de esta recta está en la gráfica de $y > x + 1$.)

¿Cuál es la gráfica de la siguiente inecuación con dos incógnitas?

$$xy > 0$$

La desigualdad dice que el producto de x e y debe ser positivo. ¿Qué sabes acerca de dos números cuyo producto es un número positivo? ¿Puede ser cero alguno de los dos? ¿Puede x ser positivo e y ser negativo en el par (x, y) del conjunto de soluciones? El par (x, y) es una solución si tanto x como y son ________ o si tanto x como y son ________. Completa los espacios en blanco. La gráfica de esta inecuación consta, entonces, de los cuadrantes ________ y ________ completos.



Consideremos una ecuación que no es lineal. Por ejemplo,

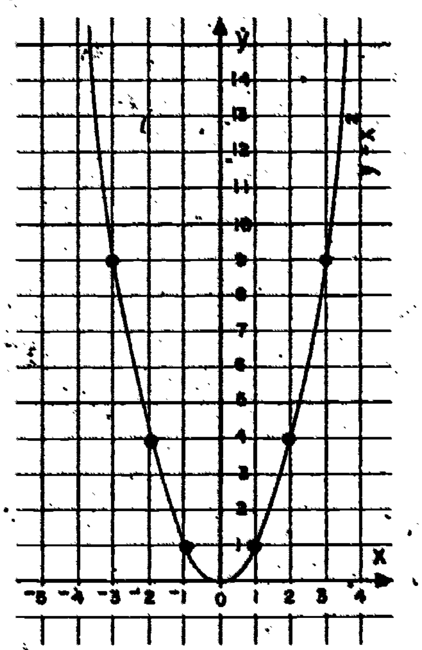
$$y = x^2$$

Si en esta ecuación tomamos un valor conocido para x, no es difícil resolver la ecuación resultante en la incógnita y. Completa las siguientes tablas de valores:

x	y
$^-4$	16
$^-3$	
$^-2$	
$^-1$	1
0	

x	y
0	
1	1
2	
3	
4	

Marca estos puntos en el papel cuadriculado. Luego traza la gráfica de la ecuación.

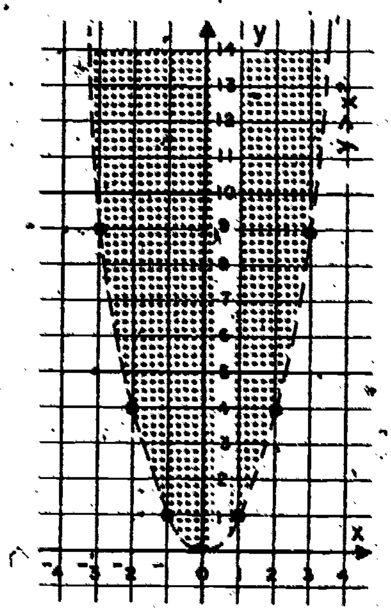


Esta curva se llama una parábola. Es una curva muy importante que aparece de muchas maneras en problemas que se refieren a fenómenos naturales. Los puntos de esta curva son aquellos cuyas coordenadas (x, y) son soluciones de $y = x^2$. Todos los puntos con coordenadas (x, x^2), donde x representa un número cualquiera, están sobre la parábola. ¿Dónde estará un punto de coordenadas (x, y) si $y > x^2$? Si un punto (x, y) está por encima de la parábola, ¿qué puedes decir acerca de y y x^2? ¿Cuál debe ser mayor?

El conjunto de soluciones de la proposición numérica

$$y > x^2$$

es el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) para los cuales $y > x^2$, y la gráfica de esta proposición abierta está contenida en la región del plano por encima de la parábola que hemos dibujado antes. Esa gráfica no incluye la curva misma. La siguiente figura es la gráfica de $y > x^2$.



Ejercicios 2-5b

1. (a) Dibuja, referidas a un mismo par de ejes, las gráficas de las siguientes ecuaciones: $y = x^2$ e $y = {}^-(x^2)$.
   (b) Haz lo mismo para $y = x^2$ e $y^2 = x$.
   (c) Haz lo mismo para $xy = 1$, $xy = {}^-1$ y $xy = 0$.
2. Dibuja las gráficas de las siguientes proposiciones numéricas:
   (a) $x + y = 1$ y $x > 0$, $y > 0$
   (b) $x + y = 10$ y x e y son enteros positivos.
   (c) $y = x^2$ y $x < {}^-1$
   (d) $y = 1$. (Sugerencia: Esto es lo mismo que $y = 1 + (0 \cdot x)$.)
   (e) $y^2 = 1$
   (f) $x = 1$
   (g) $x^2 = 0$
   (h) $x = 0$ e $y = 0$

(i) $x^2 + y^2 = 0$

*(j) y = el mayor de los números $x + 1$ y $2 - x$.

*(k) $y = x$ cuando $x \geq 0$ e $y = {}^-x$ cuando $x < 0$.

3. Considera la proposición numérica

"________, y x e y son enteros no negativos",

donde el espacio en blanco se llena con cada una de las ecuaciones que siguen. Haz una lista del conjunto de soluciones en cada caso y escribe el número de soluciones que tiene la proposición.

(a) $x + y = 1$
(b) $x + y = 2$
(c) $x + y = 20$
(d) $x + 2y = 0$
(e) $x + 2y = 1$
(f) $x + 2y = 2$
(g) $x + 2y = 3$
(h) $x + 2y = 4$
(i) $x + 2y = 25$
(j) $5x + 7y = 35$
(k) $5x + 7y = 36$
(l) $5x + 7y = 37$

4. Una cadena de almacenes tiene 5 toneladas de café en sus depósitos en Nueva Orleáns. El total de café depositado se envía a razón de s toneladas a San Francisco y n toneladas a Nueva York, pero de manera que no vaya todo el café a uno solo de estos dos sitios. Escribe en símbolos una proposición numérica que describa la relación que hay entre s y n. Dibuja la gráfica de esta proposición numérica respecto de un par de ejes designados con "s" y "n".

5. Dibuja las gráficas de las siguientes inecuaciones:

(a) $y < x^2$
(b) $y > 4x^2$
(c) $y < {}^-(x^2)$
(d) $y^2 > x$

6. En un problema anterior has usado la relación $F = \frac{9}{5}C + 32$ entre las lecturas de la temperatura en un termómetro Fahrenheit y las lecturas de la temperatura en un termómetro Centígrado, ambos colocados en el mismo sitio. Dibuja un par

de ejes, designando con la letra F al eje vertical y con la letra C al horizontal. Toma una unidad de distancia suficientemente pequeña y una hoja de papel suficientemente grande para que cada uno de los ejes contenga los puntos $^-50$, y 50. Traza cuidadosamente la gráfica de la ecuación anterior y responde luego a las preguntas (a) y (b) midiendo ciertas distancias en tu dibujo.

(a) ¿Cuál es la temperatura que se lee en un termómetro Fahrenheit si la lectura en un termómetro Centígrado es $^-25$ grados? ¿Y si es $^-15$ grados? ¿Y si es 0 grados? ¿Y si es 4 grados?

(b) ¿Cuál es la temperatura que se lee sobre un termómetro Centígrado si la lectura en un termómetro Fahrenheit es $^-30$ grados? ¿Y si es $^-15$ grados? ¿Y si es 0 grados? ¿Y si es 50 grados?

(c) Comprueba tus respuestas resolviendo las ecuaciones apropiadas. Recuerda que es imposible hacer una figura o una medición perfecta. ¿En cuánto han diferido tus respuestas a las preguntas (a) y (b) de tus respuestas a esta pregunta?

*7. El franqueo para la correspondencia de primera clase en los Estados Unidos (según lo ha establecido el Congreso en 1958) es cuatro centavos por onza o fracción de la misma. Es decir, el franqueo de una carta que no pesa más de una onza cuesta cuatro centavos, el de una carta que pesa más de una onza pero no más de dos onzas cuesta ocho centavos, y así sucesivamente. Dibuja una gráfica del costo del franqueo de la correspondencia de primera clase para todos los pesos hasta 6 onzas, tomando un par de ejes y designando el vertical con c para indicar el costo en centavos, y el horizontal con w para indicar el peso en onzas. La primera parte de la tabla es así:

w debe ser 1 o cualquier número menor que 1, pero debe ser mayor que cero. Análogamente, w es mayor que 1 y toma cualquier valor menor o igual que dos.

w	c
$w > 0$ y $w \leq 1$	4
$1 < w \leq 2$	8
$2 < w \leq 3$	12

8. PROBLEMA DIFICIL. Carolina preguntó a Eduardo cuál era la temperatura en la nevera. Al oír la respuesta de Eduardo, volvió a inquirir: "¿Fahrenheit o Centígrados?" Eduardo respondió: "¡Ambos! La temperatura marcada es la misma". ¿Cuál era la temperatura en la nevera?

9. PROBLEMA DIFICIL. En cierto país, la ley de impuesto sobre los ingresos puede resumirse así:

El impuesto que debe pagar una persona es la mayor de las dos cantidades siguientes: (1) \$400 menos que 20% de sus ingresos; (2) cero dólares.

(a) Sea T el impuesto en miles de dólares sobre un ingreso de X miles de dólares. Escribe la proposición numérica que representa la relación entre T y X.

(b) Traza dos ejes. Llama al vertical T y al horizontal X. Emplea \$1,000 como unidad de manera que, por ejemplo, una distancia de 4.850 representa \$4,850. Dibuja la gráfica de la proposición numérica establecida en (a).

(c) Midiendo la distancia sobre tu gráfica, responde a las siguientes preguntas:

¿Cuál es el impuesto sobre un ingreso de \$10,000?
¿Cuál es el impuesto sobre un ingreso de \$3,500?
¿Cuál es el impuesto sobre un ingreso de \$1,500?
Si alguien paga un impuesto de \$1,500, ¿cuál es su ingreso?

(d) Comprueba tus respuestas a las preguntas de la parte (c) empleando la proposición numérica de la parte (a).

Ejercicios de revisión

Escribe proposiciones abiertas que establezcan las condiciones dadas en los problemas que siguen. Luego halla el conjunto de soluciones para cada proposición.

1. Se va a cortar una tabla de 45 pulgadas de longitud en dos piezas, de manera que una pieza sea 3 pulgadas más larga que la otra. Halla la longitud de cada pieza.
2. El ancho de un rectángulo es 10 unidades menor que su largo. Si el perímetro del rectángulo es 68 unidades, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?
3. Un señor deja al morir un total de $10,500 para su esposa, su hijo y su hija. La parte de la viuda es $6,000. La hija recibe el doble que el hijo. ¿Cuánto recibe el hijo?
4. El jueves un niño lee 15 páginas adicionales de una novela. Al llegar a este punto ve que ha leído menos de cincuenta y una páginas. ¿Cuántas páginas leyó antes del jueves de esa semana?
5. El gerente de una juguetería ha comprado 500 piezas para aeromodelismo que venderá luego al menudeo. Después de vender algunas de las piezas, hace un inventario y observa que le quedan menos de 100. ¿Cuántas de las 500 piezas vendió?
6. Un estudiante consulta las listas del alumnado de su escuela y observa que el año anterior el número de niñas en ningún caso había sido igual al número de varones. ¿Qué cantidad de niñas había en la escuela si el número de varones fue siempre 176?
7. Un número es el triple de otro número. Su diferencia es 12. ¿Cuál es el número menor?
8. Daniel tiene $2.73 en peniques, "nickels", "dimes", cuartos y medios dólares. Si tiene el mismo número de cada una de las diferentes clases de monedas, ¿cuántas monedas de cada clase tiene?
9. Alicia y Donaldo eran candidatos a la presidencia de la clase. Alicia obtuvo 30 votos más que Donaldo, pero no votaron todos los 316 estudiantes. ¿Cuántos votos obtuvo Donaldo?

10. Un par de mellizos encuentra que cinco años atrás la suma de sus edades era 18 años. ¿Qué edad tienen ahora?

11. El número de billetes de $1 es cinco veces mayor que el numero de billetes de $5, y el número de billetes de $10 es el doble del número de billetes de $1. ¿Cuántos billetes de $5 hay si el número total de billetes es 48?

12. Representemos con x al primero de dos números y con y al segundo. Escribe una ecuación que exprese las siguientes condiciones:
    (a) La suma de los números es 7.
    (b) Si el segundo número se resta del primero, el resultado es 5.

13. (a) Construye una tabla con algunos de los pares ordenados del conjunto de soluciones de $x + y = 7$.
    (b) Construye una tabla con algunos de los pares ordenados del conjunto de soluciones de $x - y = 5$.
    (c) Dibuja una gráfica de cada una de las ecuaciones de las preguntas (a) y (b), utilizando el mismo par de ejes.
    (d) Observa dónde se intersecan las rectas. ¿Qué par ordenado está asociado con este punto de intersección?

14. (a) ¿Puedes hallar un elemento del conjunto de soluciones de la proposición compuesta "$x + y = 7$ y $x - y = 5$"?
    (b) ¿Hay más de un par ordenado en el conjunto de soluciones de la proposición compuesta de la pregunta (a)? Explica tu respuesta.

*15. Halla el conjunto de soluciones de la proposición compuesta "$x + y = 0$ y $x - y = 0$".

*16. Halla el conjunto de soluciones de la proposición compuesta "$x + 1 = y$ y $x - 1 = y$".

*17. Halla tres enteros consecutivos de manera que la suma del primero y el tercero sea 192.

*18. La suma del número de grados de las medidas de dos ángulos congruentes de un triángulo es igual al número de grados de la medida del tercer ángulo. ¿Cuáles son las medidas de los ángulos?

*19. La familia Pérez y la familia Martínez, que son vecinas, se van de vacaciones. Las dos familias viajarán en direcciones opuestas. Si la familia Pérez va a una velocidad media de 55 millas por hora y la familia Martínez viaja a 45 millas por hora, ¿en cuánto tiempo la distancia entre ambas será 750 millas, si parten simultáneamente?

*20. El operador de radar de un portaaviones detecta un contacto móvil que se dirige hacia el portaaviones. Estima que el móvil está a 400 millas y vuela a 350 millas por hora respecto del portaaviones. ¿Cuánto tiempo necesitará un avión de la dotación del portaaviones para interceptar el contacto móvil, si vuela directamente hacia él a 450 millas por hora?

*21. En el problema 20, suponte que el contacto móvil está a 10 millas de distancia del portaaviones y alejándose de éste. Un aeroplano del portaaviones parte para perseguir al contacto móvil. Empleando las velocidades dadas en el problema 20, ¿cuánto tiempo necesitará el aeroplano del portaaviones para alcanzar al contacto móvil? ¿A qué distancia del portaaviones estará el aeroplano cuando alcance su objetivo?

Capítulo 3

NOTACION CIENTIFICA, DECIMALES Y EL SISTEMA METRICO

3-1. Números grandes y notación científica

En este texto hemos empleado, cada vez que nos ha sido posible, números pequeños para hacerte los problemas más sencillos, las ideas más claras y el trabajo de casa fácil de graduar para tu profesor. Pero los números que se presentan en los problemas de la vida diaria son, frecuentemente, muy grandes o muy pequeños. El periódico del día 28 de junio de 1961, por ejemplo, hacía referencia a 12,500,000 miembros de un sindicato de obreros, $2,484,000,000 destinados a la defensa y a la educación nacionales y una deuda nacional de $298,000,000,000. Probablemente pasas por lo menos 3,888,000 segundos cada año en la escuela. Sin duda puedes imaginar muchos otros usos frecuentes de los números grandes. ¿Cuántas veces crees que late el corazón de una persona durante toda su vida (vida media)? ¿Cuánto recorre un satélite durante 10 años, si se mueve con la velocidad de 50,000 millas por hora?

En circunstancias como las mencionadas, aparecen frecuentemente números tan grandes como un millón o un billón. Actualmente, disponemos de nombres para números mayores que un billón, tales como trillón o cuatrillón. Considera el numeral 314159265389793; este numeral es difícil de leer cuando está escrito en esta forma. Una manera de hacer más fácil su lectura es colocar una coma a la izquierda de cada grupo de tres dígitos, contando de derecha a izquierda, así:

3,141,592,653,589,793

En esta forma se separa el número en millares, millones, billones y otras unidades mayores, de una manera natural. Aunque escribimos las comas de derecha a izquierda, leemos el número de izquierda a derecha, de acuerdo con el diagrama que aparece en la siguiente página.

cuatrillones	centenas de trillón	decenas de trillón	trillones	centenas de billón	decenas de billón	billones	centenas de millón	decenas de millón	millones	centenas de millar	decenas de millar	millares	centenas	decenas	unidades
3 ,	1	4	1 ,	5	9	2 ,	6	5	3 ,	5	8	9 ,	7	9	3

Entonces, leemos este número de la siguiente manera:

Tres cuatrillones,
ciento cuarenta y un trillones,
quinientos noventa y dos billones,
seiscientos cincuenta y tres millones,
quinientos ochenta y nueve mil,
setecientos noventa y tres.

En la lectura de este número debemos tener cuidado de no emplear la palabra "y". La razón se ve claramente cuando leemos el número 593,000. Si se leyera "quinientos y noventa y tres mil", como lo hace mucha gente, podría aparecer algún malentendido. Si "y" se asocia con la adición, el sentido de esa frase sería 500 más 93,000. Si "y" se interpreta como una conjunción en el uso ordinario del idioma, el resultado sería dos números separados, 500 y 93,000. Por consiguiente, es preferible leer 593,000 como "quinientos noventa y tres mil". Omitiendo la "y" se evitan malentendidos. Habitualmente usamos la "y" y marcamos el punto decimal; por ejemplo, 563.12 se lee "quinientos sesenta y tres y doce centésimas". Este uso de "y" no origina confusiones porque 563.12 significa 563 + 0.12.

En realidad, los números como el del comienzo de esta página aparecen rara vez. Esto no significa que no se usen los números de ese tamaño, pero rara vez contamos con suficiente precisión como para emplear esos números. Con más frecuencia decimos que el número contado es alrededor de tres cuatrillones. Por ejemplo, la población de una ciudad de más de un millón de habitantes puede darse como 1,576,961, que es justamente la suma de los diversos números recopilados por los funcionarios del censo. Es cierto que el número ha cambiado mientras se realizaba el censo y es probable que 1,577,000 sea correcto sólo con la aproximación de un millar. Por esta razón no hay riesgo en redondear el número original como 1,577,000. En realidad, en la mayoría de los casos bastaría decir que la población de la ciudad es "alrededor de un millón y medio" de habitantes, lo que se escribiría así:

Población de la ciudad $\approx$ 1,500,000 habitantes.

El símbolo $\approx$ se usa para significar "es aproximadamente igual a".

Hay otras maneras de escribir números de este tamaño. Muchas de ellas presentan notables ventajas. Una de las maneras posibles de escribir un número grande la sugiere nuestro enunciado "un millón y medio". Se puede escribir un millón como 1,000,000 (¡con muchos ceros!) ó $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$ (igualmente mala, ¿no?) ó 10^6 (ésta sí que es buena, ¿verdad?). El producto indicado $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$ se lee algunas veces "el producto de seis números diez". Cuando escribimos esto en forma de exponente, 10^6, indicamos con el exponente 6 el número de veces que 10 aparece como factor. Podemos también obtener el exponente 6 contando el número de ceros en el numeral 1,000,000.

De la misma manera, escribimos un billón como 1,000,000,000, ó 10^9. Entonces, la deuda nacional de 298 billones de dólares podría escribirse como 298×10^9 dólares. Esta manera de representar números grandes, utilizando las potencias de 10, se desarrolla con mayor amplitud en los ejercicios de clase que siguen.

<u>Ejercicios de clase 3-1a</u>

1. Escribe los siguientes números como numerales decimales y también en la forma exponencial.

   <u>Ejemplo</u>. Un millón = 1,000,000 = 10^6.

   (a) Un billón.

   (b) Un trillón.

   (c) Un cuatrillón.

2. Puesto que $2,000 = 2 \times 1,000$, podemos escribir 2,000 en forma exponencial como 2×10^3. Empleando un exponente, escribe los siguientes numerales:

   (a) 7,000 (d) 12,500,000
   (b) 50,000 (e) 2,484,000,000
   (c) 3,000,000 (f) 506,000,000

3. Un número como 1,500 puede ser expresado de varias maneras: 150×10 ó 15×10^2 ó 1.5×10^3. Análogamente, 325 puede escribirse como 32.5×10 ó 3.25×10^2. También, 298 billones es lo mismo que 298×10^9 ó 29.8×10^{10} ó 2.98×10^{11}. En cada uno de estos ejemplos la última expresión es de la forma

   (un número entre 1 y 10) $\times$ (una potencia de 10).

   Escribe en esa forma cada uno de los siguientes números:

   (a) 76 (d) 8,463,000 (g) 841.2
   (b) 859 (e) 76.48 (h) 9,783.6
   (c) 7,623 (f) 4,832.59 (i) 3,412,789.435

   (j) Cincuenta y tres billones, seiscientos cuarenta y dos millones, quinientos mil.

Notación científica

Como hemos observado, podemos escribir 298 billones como 298×10^9 ó como 2.98×10^{11}. Estas son maneras reducidas de escribir el número. Además es fácil comparar varios números grandes escritos en esta forma. Por ejemplo, podemos notar a simple vista que 4.9×10^{13} es mayor que 9.6×10^{12} sin necesidad de contar el número de cifras de 49000000000000 y de 9600000000000. El trabajar sistemáticamente con números grandes de esta manera, simplifica notablemente los cálculos, como lo veremos más adelante. Esto es particularmente cierto cuando se calcula con regla de cálculo ó logaritmos, como aprenderás en la escuela de segundo ciclo secundario. Por esta razón, es práctica común en el trabajo de los científicos e ingenieros, la representación de números de esta manera, es decir, en la forma

(un número entre 1 y 10) $\times$ (una potencia de 10).

En tales casos, se dice que el número está escrito en notación científica. Si el número es una potencia de 10, entonces el primer factor es un 1 y se acostumbra no escribirlo. Así, $10{,}000 = 1 \times 10^4 = 10^4$ y $10{,}000{,}000 = 10^7$ en notación científica.

Definición. Se dice que un número está expresado en notación científica si se escribe como producto de un numeral decimal entre 1 y 10 y una potencia adecuada de 10. Si el número es una potencia de 10, el primer factor es 1 y no se necesita escribirlo.

Observación. A veces la "notación científica" se llama también notación de las "potencias de diez" o "exponencial decimal". Algunas veces usaremos también estas expresiones.

Ejercicios de clase 3-1b

1. (a) ¿Está 15×10^5 en notación científica? ¿Por qué sí o por qué no?
   (b) ¿Está 3.4×10^7 en notación científica? ¿Por qué sí o por qué no?
   (c) ¿Está 0.12×10^5 en notación científica? ¿Por qué sí o por qué no?
2. Escribe en notación científica los siguientes números:
   (a) 5,687 (b) 14 (c) $3\frac{1}{2}$ millones
3. Escribe en notación decimal los siguientes números:
   (a) $3.7 + 10^6$ (b) 4.7×10^5 (c) 5.721×10^6
4. Como la tierra no se mueve en una órbita circular, la distancia de la tierra al sol varía según la época del año. Se ha calculado la distancia media en unas 93,000,000 de millas.
   (a) Escribe el número anterior en notación científica. La distancia mínima de la tierra al sol sería aproximadamente $1\frac{1}{2}\%$ menor que la media; la distancia máxima sería aproximadamente $1\frac{1}{2}\%$ mayor que la media.
   (b) Calcula $1\frac{1}{2}\%$ de 93,000,000.
   (c) Halla aproximadamente la distancia mínima de la tierra al sol.
   (d) Halla aproximadamente la distancia máxima de la tierra al sol.

(e) Escribe los números que has encontrado en las partes (c) y (d) en la notación de las potencias de diez.

Observa que $146,000 = 1.46 \times 10^5$ podría escribirse como 1.460×10^5 ó 1.4600×10^5. Cualquiera de esos numerales representa a 146,000 en notación científica. Aunque hay situaciones en que es conveniente escribir uno o más ceros después del 6 en 1.46, no lo haremos así en este capítulo. Sin embargo, como verás luego, en el capítulo acerca de los errores relativos, los científicos usan el primer factor de esta notación en potencias de diez para indicar la precisión con la que se ha medido una cantidad.

Ejercicios 3-1.

1. Escribe en notación científica los siguientes números:

   (a) 1,000
   (b) $10^1 \times 10^1 \times 10^1 \times 10^7$
   (c) $10 \times 10 \times 10 \times 10$
   (d) $10^2 \times 10^7$
   (e) 10×10^5
   (f) 10,000,000

2. Escribe en la notación de las potencias de diez los siguientes números:

   (a) 6,000
   (b) .678
   (c) 9,000,000,000
   (d) 459,000,000
   (e) 78,000
   (f) 600×10
   (g) 15,600
   (h) 781×10^7

3. Se estima en 506,000,000 el número total de estrellas que se pueden fotografiar empleando los actuales telescopios y cámaras. Escribe este número en la notación de las potencias de diez.

4. Escribe un numeral para cada uno de los números que siguen en forma decimal ordinaria (que no utiliza un exponente y que no contiene un producto indicado).

   (a) 10^5
   (b) 5.83×10^2
   (c) 3×10^4
   (d) 5.00×10^7

(e) 6.3×10^2

(f) 8.2001×10^8

(g) 436×10^6

(h) 17.324×10^5

5. Escribe en palabras los siguientes números:

(a) 783

(b) 7,500,000

(c) 632,007

(d) 362.362

(e) 4,000,284,632

(f) 4.2506

6. Redondea cada uno de los números que se dan más abajo con la aproximación de una centena. Expresa los números redondeados en notación científica.

(a) 645

(b) 93

(c) 1,233.

(d) 70,863

(e) 600,000

(f) 5,362,449

7. Treinta por ciento de 500 es igual a $\frac{30}{100} \times 5.0 \times$ _____.

8. Se ha estimado en 337,000 millones de millón de millas cúbicas el volumen del cuerpo del sol. Escribe el número de millas cúbicas en notación científica.

3-2. Cálculos con números grandes

La notación científica no solamente es más breve en muchos casos, sino que simplifica ciertos cálculos. Comenzaremos con algunos ejemplos simples. Suponte que queremos hallar el producto: $100 \times 1,000$. El primer factor es el producto de dos números diez. El segundo factor es el producto de tres números diez, entonces tenemos $100 = 10^2$ y $1,000 = 10^3$.

Entonces,

$$\begin{aligned} 100 \times 1,000 &= 10^2 \times 10^3 \\ &= (10 \times 10) \times (10 \times 10 \times 10) \\ &= 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \\ &= 10^5 \end{aligned}$$

Por consiguiente, $10^2 \times 10^3 = 10^5$. Observa que el exponente 5 es la suma de los exponentes 2 y 3.

Consideremos otro ejemplo: 1,000,000 × 100,000. Escrito en notación científica sería $10^6 \times 10^5$. ¿Cuántas veces aparece 10 como factor en este producto? ¿Es $10^6 \times 10^5$ igual a 10^{11}? Esto es cien billones, pero es más simple dejar el número en la forma 10^{11} que escribir un 1 seguido de once ceros. Observa que, nuevamente, hemos sumado los exponentes.

Suponte que queremos hallar el producto de 93,000,000 y 10,000. En notación científica, esto sería

$$\begin{aligned}(9.3 \times 10^7) \times 10^4 &= 9.3 \times (10^7 \times 10^4)\\ &= 9.3 \times 10^{11}\end{aligned}$$

¿En virtud de qué propiedad?

Ahora ensaya un ejemplo más difícil:

$$\begin{aligned}93,000,000 \times 11,000 &= \left.\begin{aligned}&(9.3 \times 10^7) \times (1.1 \times 10^4)\\ &= (9.3 \times 1.1) \times (10^7 \times 10^4)\end{aligned}\right\}\\ &= 10.23 \times 10^{11}\\ &= (1.023 \times 10) \times 10^{11}\\ &= 1.023 \times (10 \times 10^{11})\\ &= 1.023 \times 10^{12}\end{aligned}$$

Nota: El orden de los factores ha sido cambiado haciendo uso de las propiedades asociativa y conmutativa de la multiplicación.

En los estudios de astronomía y de vuelos espaciales sobre todo, encontramos números muy grandes. El planeta Plutón está a una distancia media del sol de unos 3,666 millones de millas ó 3.666×10^9 millas. Las distancias a las estrellas se miden habitualmente en "años de luz". Un año de luz es la distancia que recorre la luz en un año. Esta es una buena manera de medir tales distancias, pues si las expresamos en millas, los números serían tan grandes que resultaría difícil escribirlos y más difícil aún entender lo que significan. Pero suponte que queremos estimar el número de millas que hay en un año de luz. Este cálculo se hará en los siguientes ejercicios de clase.

Ejercicios de clase 3-2

1. Se ha averiguado que la luz recorre unas 186,000 millas por segundo. En las preguntas que siguen, de (a) a (d), no efectúes las multiplicaciones; simplemente indica el producto.

(Un ejemplo de un producto indicado es $2.4 \times 10 \times 56 \times 10^4$.)

(a) ¿Qué distancia recorrería la luz en 1 minuto?

(b) ¿Qué distancia recorrería la luz en 1 hora?

(c) ¿Qué distancia recorrería la luz en 1 día?

(d) ¿Qué distancia recorrería la luz en 1 año?

(e) Determina el número escrito en la pregunta (d) y muestra que cuando se lo "redondea", es 5.9×10^{12}.

(f) El número escrito en la parte (e) es aproximadamente 6 ______.

(g) ¿Por qué el número escrito en la pregunta (d) no es exactamente el número de millas que recorre la luz en un año? Trata de dar dos razones.

<u>Ejercicios 3-2</u>

1. Multiplica y expresa tu respuesta en notación científica.

(a) $6 \times 10^7 \times 10^3$

(b) $10^{13} \times 12 \times 10^5$

(c) $10^4 \times 3.5 \times 10^9$

(d) $300 \times 10^5 \times 20$

(e) $10^2 \times 10^5 \times 7.63$

(f) $60 \times 60 \times 60$

(g) $7 + 3 \times 10^5$

(h) $9.3 \times 10^7 \times 10 \times 10^6$

2. Multiplica y escribe tu respuesta en notación científica.

(a) $9,000,000 \times 70,000$

(b) $125 \times 8,000,000$

(c) $25,000 \times 186,000$

(d) $1,100 \times 5 \times 200,000$

3. El sonido recorre en el aire aproximadamente un quinto de milla por segundo. Contesta las preguntas que siguen, suponiendo que una nave espacial viaja a una velocidad igual a cinco veces la velocidad del sonido. Da tus respuestas en notación científica.

(a) ¿Qué distancia recorre el sonido, en el aire, durante un día?

(b) ¿Qué distancia recorre la nave espacial en 20 horas?

(c) ¿Qué distancia recorrerá la nave espacial en 50 días?

(d) ¿Qué distancia recorrerá la nave espacial en 2 años? ¿Es este recorrido suficiente para llegar al sol?

4. La distancia del Polo Norte al Ecuador es aproximadamente 10,000,000 de metros.
   (a) Expresa en metros la distancia recorrida alrededor de la tierra pasando por los polos. Usa la notación científica.
   (b) Un metro es igual a mil milímetros. Expresa en milímetros la distancia del Polo Norte al Polo Sur. Usa la notación científica.
   (c) Una pulgada tiene aproximadamente la misma longitud que $2\frac{1}{2}$ centímetros. ¿Aproximadamente cuántos centímetros tendrá una distancia de 40,000 pies?
5. La distancia alrededor de la tierra, a lo largo del Ecuador, es aproximadamente 25,000 millas. En un segundo, la electricidad recorre una distancia que es más o menos 8 veces la longitud del Ecuador. ¿Qué distancia, aproximadamente, recorrerá la electricidad en 10 horas?
6. Suponte que debes escribir diez millones de marcas sobre un papel y puedes hacer dos marcas por segundo. ¿Podrías escribir 10,000,000 de marcas en un año? (Un año es $60 \times 60 \times 24 \times 365$ segundos.)
7. La velocidad de la tierra en su órbita alrededor del sol es un poco menor de setenta mil millas por hora. Aproximadamente ¿qué distancia recorrerá la tierra en su vuelta anual alrededor del sol?

3-3. Cálculos con números pequeños

Hasta el momento hemos tratado casi exclusivamente con números grandes. Otras veces tendremos que tratar con números pequeños. La masa del electrón y la masa del protón son ejemplos típicos de cantidades muy pequeñas. ¿Cómo se pueden representar convenientemente estas cantidades excepcionalmente pequeñas?

Suponte que comenzamos con una potencia de 10, tal como 10^4, y dividimos por 10. Obtenemos 10^3, pues $\frac{10^4}{10} = \frac{10 \times 10 \times 10 \times 10}{10} = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$. Si dividimos 10^3 por 10, obtenemos 10^2. Dividamos 10^2 por 10 para obtener el resultado 10. Ahora, comenzando con 10^4 y dividiendo sucesivamente por 10 tres veces, hemos obtenido

$$10^4, \quad 10^3, \quad 10^2 \quad y \quad 10^1.$$

Observa que los exponentes decrecen en una unidad cada vez. Divide ahora 10^1 por 10. Sabemos que el resultado es 1. También vemos que si los exponentes siguen decreciendo según el modelo anterior, de unidad en unidad, el siguiente exponente será 0. Por esta razón, es conveniente definir 10^0 como 1—es decir, $10^0 = 1$. Entonces obtenemos los siguientes resultados:

$$\frac{10^4}{10} = 10^3, \quad \frac{10^3}{10} = 10^2, \quad \frac{10^2}{10} = 10^1, \quad \frac{10}{10} = 10^0 \quad y \quad 10^0 = 1.$$

El exponente de cada una de las respuestas anteriores es una unidad menor que el exponente que le precede inmediatamente. Esto es razonable, puesto que cada vez que dividimos por 10 quitamos un factor 10 del numerador.

Dividamos nuevamente por 10: como número siguiente obtendremos $\frac{10^0}{10} = \frac{1}{10}$. Si se sigue el modelo de decrecimiento de los exponentes, debemos esperar que el exponente siguiente sea una unidad menor que 0. Este es el número que escribimos $^-1$; es un número negativo. Entonces, parece razonable escribir $10^{^-1}$ para representar $\frac{1}{10}$. Dividamos ahora $10^{^-1}$ por 10; se obtiene

$\frac{1}{10} \div 10 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10^2}$. Continuando con el modelo de decrecimiento de los exponentes, el nuevo exponente debería ser una unidad menor que $^-1$, es decir, $^-2$. De acuerdo con esto, definimos $10^{^-2}$ como una representación de $\frac{1}{10^2}$. Es importante observar que el número $10^{^-2}$ no es un número negativo. Es un número positivo, a saber: el número $\frac{1}{100}$.

Para todo número entero positivo n, entonces, definimos $10^{^-n}$ de la siguiente manera:

Definición. Si n es un entero positivo, definimos

10^n = (el producto de n números diez), y

$10^{-n} = 1 \div 10^n = 1 \div$ (el producto de n números diez).

Para $n = 0$, definimos

$$10^0 = 1$$

Estas definiciones nos permiten escribir las potencias de 10 así:

10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
10,000	1,000	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$

Cada uno de los números indicados en la primera fila es igual al número inmediatamente debajo de él.

Ejercicios de clase 3-3

1. Empleando exponentes negativos, expresa cada uno de los siguientes números:

$$\frac{1}{10000}, \quad \frac{1}{1000000}, \quad \frac{1}{10^7}, \quad \frac{1}{10^9}, \quad \frac{1}{100000}.$$

2. Expresa en forma fraccionaria cada uno de los siguientes números:

$$10^{-3}, \quad 10^{-5}, \quad 10^{-7}, \quad 10^{-6}.$$

3. Empleando exponentes negativos, expresa cada uno de los números que se dan más abajo.
   Ejemplo. Una centésima $= \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$.

   (a) Una milésima. (c) Una billonésima.
   (b) Una millonésima. (d) Una trillonésima.

Revisemos ahora el sentido de un número escrito en forma decimal. Sabemos que $0.4 = \frac{4}{10}$. Luego $0.4 = \frac{4}{10} = 4 \times \frac{1}{10} = 4 \times 10^{-1}$. También, $0.005 = \frac{5}{1000} = \frac{5}{10^3} = 5 \times \frac{1}{10^3} = 5 \times 10^{-3}$.

Esta es la expresión de cada uno de estos números en notación científica.

Considera ahora $0.42 = \frac{42}{100}$. Esto es cierto, pues $0.42 = \frac{4}{10} + \frac{2}{100} = \frac{40}{100} + \frac{2}{100} = \frac{42}{100}$. Para expresar esto en notación científica, escribimos

$$0.42 = \frac{42}{100} = \frac{4.2 \times 10}{10^2} = \frac{4.2}{10} = 4.2 \times \frac{1}{10} = 4.2 \times 10^{-1}$$

Análogamente,

$$0.000305 = \frac{305}{1000000} = \frac{3.05 \times 10^2}{10^6} = \frac{3.05}{10^4} = 3.05 \times 10^{-4}$$

Ahora podemos escribir 0.16×10^{-4} en notación científica:

$$0.16 \times 10^{-4} = 1.6 \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10^4} = 1.6 \times \frac{1}{10^5} = 1.6 \times 10^{-5}$$

Primero hemos empleado la notación científica para representar números muy grandes, pero acabamos de ver que el uso de los exponentes negativos nos permite expresar números muy pequeños también en notación científica. Entonces,

$$0.0001 = 10^{-4}, \qquad 0.00000673 = 673 \times 10^{-8} = 6.73 \times 10^{-6}$$

y $\frac{376}{10^{12}} = 3.76 \times 10^{-10}$.

Cuando se escribe en notación científica un número positivo menor que 1, vemos que su exponente es siempre un entero negativo; por ejemplo, $0.63 = 6.3 \times 10^{-1}$.

Revisa ahora los ejemplos de notación científica de la Sección 3-1. Cuando se escribe 1, o cualquier número entre 1 y 10, en notación científica, el exponente es cero. Entonces, $1 = 10^0$, $3 = 3 \times 10^0$ y $6.79 = 6.79 \times 10^0$.

Cuando un número mayor o igual que 10 se escribe en notación científica, el exponente será un entero positivo. Así, $27 = 2.7 \times 10^1$, $10 = 10^1$ y $4,680,000 = 4.68 \times 10^6$.

<u>En resumen, para un número escrito en notación científica:</u>

<u>Si</u> $0 <$ <u>el número</u> < 1,

<u>el exponente es un entero negativo</u>, por ejemplo:

$$0.03 = 3 \times 10^{-2}$$

<u>Si</u> $1 <$ <u>el número</u> < 10,

<u>el exponente es cero</u>, por ejemplo:

$$3.4 = 3.4 \times 10^{0}$$

<u>Si el número</u> ≥ 10,

<u>el exponente es un entero positivo</u>, por ejemplo:

$$137 = 1.37 \times 10^{2}$$

Observa que ahora no estamos tratando de representar números negativos en notación científica. Después de tratar un poco más con los números negativos, verás que es bastante fácil hacerlo.

<u>Ejercicios 3-3</u>

1. Escribe en notación científica cada uno de los siguientes números:

(a) 0.093

(b) 0.0001

(c) $\frac{1}{10^6}$

(d) 1

(e) 0.00621

(f) $\frac{1}{10^2}$

(g) 0.7006

(h) 0.000000907

(i) 6

(j) 0.0045

2. Escribe en notación decimal cada uno de los siguientes números:

(a) 9.3×10^{-5}

(b) 1.07×10^{-1}

(c) 10^{-6}

(d) 5×10^{-4}

(e) 7.065×10^{-3}

(f) 10^{-1}

(g) 14.3×10^{-7}

(h) $385.76 \times 10^{-}$[illegible]

3. Escribe en notación científica cada uno de los siguientes números:

(a) 63×10^4

(b) 0.157×10^{-3}

(c) 0.0000024

(d) 5.265×10^{-5}

(e) 362.35

(f) $10^{-5} \times 432$

(g) 0.00000000305

(h) 69.5×10^{-1}

*4. Llena los espacios en blanco en las expresiones que siguen para convertirlas en proposiciones verdaderas. Observa que en algunas preguntas no se usa la notación científica.

(a) $0.006 = 6 \times 10^{\square}$

(b) $0.000063 = \square \times 10^{-5}$

(c) $0.0004015 = 4{,}015 \times 10^{\square}$

(d) $6{,}000.0 = 0.06 \times 10^{\square}$

(e) $0.213 = 2.13 \times 10^{\square}$

(f) $0.213 = 213 \times 10^{\square}$

(g) $0.213 = \square \times 10^{-5}$

(h) $0.213 = \square \times 10^{4}$

*5. ¿Puedes imaginar algún número no negativo que no podamos expresar en notación científica?

3-4. Multiplicación: Números grandes y pequeños

Ya has multiplicado números tales como 10^3 y 10^5. Recuerda que $10^5 \times 10^3 = 10^{5+3} = 10^8$. Frecuentemente, necesitamos multiplicar números dados en notación científica, en los que aparecen exponentes negativos.

Multiplica 4.3×10^{-5} por 2×10^{-3}

$$\begin{aligned}(4.3 \times 10^{-5}) \times (2 \times 10^{-3}) &= (4.3 \times 2) \times (10^{-5} \times 10^{-3}) \\ &= 8.6 \times \left(\frac{1}{10^5} \times \frac{1}{10^3}\right) = 8.6 \times \frac{1}{10^8} \\ &= 8.6 \times 10^{-8}\end{aligned}$$

De acuerdo con lo anterior, $10^{-5} \times 10^{-3} = \frac{1}{10^5} \times \frac{1}{10^3} = \frac{1}{10^8} = 10^{-8}$.

¿Cuál es el resultado de sumar $^-5$ y $^-3$? ¿Recuerdas que $(^-5) + (^-3) = {^-8}$? Entonces hemos visto que

$$10^{-5} \times 10^{-3} = 10^{-5+-3}.$$

Muestra, como se ha hecho antes, que $10^{-2} \times 10^{-4} = 10^{-2+-4}$. ¿Se sigue el mismo procedimiento cuando los exponentes son negativos que cuando son positivos?; es decir, ¿sumas los exponentes en todo caso? Asegúrate de que sabes por qué la respuesta es afirmativa.

Ahora multiplica 4.3×10^5 por 2×10^{-3},

$$
\begin{aligned}
(4.3 \times 10^5) \times (2 \times 10^{-3}) &= (4.3 \times 2) \times (10^5 \times 10^{-3}) \\
&= 8.6 \times (10^5 \times \frac{1}{10^3}) \\
&= 8.6 \times \frac{10^5}{10^3} \\
&= 8.6 \times 10^2
\end{aligned}
$$

Se ha mostrado arriba que $10^5 \times 10^{-3} = 10^2$. Como quiera que $5 + (^-3) = 2$, es

$$10^5 \times 10^{-3} = 10^{5+-3}$$

Muestra, como antes, que $10^{-4} \times 10^3 = 10^{-4+3}$. Ahora podemos ver que cuando se multiplica 10^a por 10^b, el resultado es 10^{a+b} no importando si a y b son positivos o negativos. Esto pone de manifiesto la siguiente propiedad general:

<u>Propiedad general</u>. <u>Si</u> a <u>y</u> b <u>son enteros cualesquiera, positivos o negativos, entonces</u>

$$10^a \times 10^b = 10^{a+b}$$

Naturalmente, la propiedad es válida si uno de los dos exponentes, o ambos, a y b, son cero. Por ejemplo: $10^3 \times 10^0 = 10^3$, $10^0 \times 10^0 \times 10^0 = 1$.

Hay otra idea que aparece en algunos problemas. Tal idea aparecerá en lo que sigue cuando se quiera dar la respuesta en notación científica.

$$\begin{aligned}(4.7 \times 10^{-3}) \times (5.4 \times 10^{7}) &= (4.7 \times 5.4) \times (10^{-3} \times 10^{7}) \\ &= 25.38 \times 10^{-3+7} \\ &= 25.38 \times 10^{4} \\ &= (2.538 \times 10) \times 10^{4} \\ &= 2.538 \times (10 \times 10^{4}) \\ &= 2.538 \times 10^{5}\end{aligned}$$

En este problema se han multiplicado los números 4.7 y 5.4 para obtener 25.38 y luego se ha escrito este número en notación científica como 2.538×10. Finalmente se ha multiplicado 2.538×10 por 10^{4}.

Ejercicios 3-4

1. Escribe en notación científica los siguientes productos:
   (a) $10^{-5} \times 10^{-2}$
   (b) 0.3×10^{-2}
   (c) $10^{-7} \times 10^{-6}$
   (d) 0.04×0.002
   (e) 0.0001×0.007
   (f) $(5.7 \times 10^{-3}) \times 10^{-7}$
   (g) $10^{12} \times 10^{-3} \times 10^{15}$
   (h) $10^{12} \times 10^{-7} \times 10^{-8}$

2. Escribe en notación científica los siguientes productos:
   (a) 0.0012×0.000024
   (b) $6 \times 10^{-7} \times 9 \times 10^{-3}$
   (c) $14 \times 10^{-3} \times 10^{-5}$
   (d) $3 \times 10^{-6} \times 10^{-4}$
   (e) $38 \times 10^{-3} \times 0.00012$
   (f) 0.000896×0.00635

3. Empleando la notación de las potencias de diez, halla los productos de los siguientes números:
   (a) $10,000 \times 0.01$
   (b) $0.00001 \times 10,000,000$
   (c) $10^{17} \times 10^{-23}$
   (d) $10^{6} \times \frac{1}{10^{4}} \times \frac{1}{10^{5}} \times 10^{-4}$

4. Multiplica cuarenta y nueve milésimas por el número siete y seis centésimas, empleando notación científica. Expresa tu

respuesta en notación científica.

5. Una gran corporación comercial ha decidido invertir en bonos algo de su dinero excedente. Si se han invertido 11 millones de dólares a un porcentaje medio anual de $3\frac{3}{4}\%$, ¿cuál es el ingreso anual proporcionado por esta inversión? Emplea la notación científica para los cálculos, y expresa también tu respuesta en notación científica.
6. En cierta fecha, la deuda del gobierno de los Estados Unidos, redondeada con la aproximación de 100 billones de dólares, era 300 billones de dólares. Si el gobierno paga a un tipo de interés medio de 3.313%, ¿a cuántos dólares asciende el interés pagado cada año? Expresa la respuesta en notación científica.
7. Si la masa de un átomo de oxígeno es 2.7×10^{-23} gramos, ¿cuál es la masa de 40×10^{27} átomos de oxígeno? Expresa la respuesta en notación científica.
8. Una unidad de masa química, que es un dieciseisavo de la masa atómica de oxígeno, es aproximadamente igual a 1.66×10^{-24} gramos. ¿Cuál es la masa de un billón de unidades de masa química?

3-5. División: Números grandes y pequeños

Los principios que hemos desarrollado para la multiplicación sugieren los principios necesarios para la división. Hemos visto como se divide 10^6 por 10^4, es decir,

$$\frac{10^6}{10^4} = \frac{10^4 \times 10^2}{10^4} = 10^2 = 10^{6-4}$$

Otra manera de hacerlo es escribir

$$\frac{10^6}{10^4} = 10^6 \times \frac{1}{10^4} = 10^6 \times 10^{-4} = 10^{6+-4} = 10^{6-4} = 10^2$$

Además, por la definición de 10^{-n} como $\frac{1}{10^n}$, vemos que

$$10^6 \div 10^{-4} = \frac{10^6}{10^{-4}} = \frac{10^6}{\frac{1}{10^4}} = \frac{10^6}{\frac{1}{10^4}} \times \frac{10^4}{10^4} = 10^6 \times 10^4 = 10^{10}.$$

Pero recuerda lo que estudiaste en el Capítulo 1 acerca ~~de la~~ sustracción de números negativos, que

$$6 - (^-4) = 6 + 4 = 10$$

Entonces, vemos que

$$10^6 \div 10^{-4} = \frac{10^6}{10^{-4}} = 10^{6-^-4} = 10^{10}$$

Estos ejemplos sugieren la siguiente propiedad general:

<u>Propiedad general. Si a y b son enteros cualesquiera, positivos o negativos, entonces</u>

$$10^a \div 10^b = 10^{a-b}$$

Ilustremos el uso de esta propiedad con la división de dos números muy pequeños escritos en notación científica. Suponte que queremos dividir 8×10^{-3} por 2×10^{-7}.

$$\frac{8 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-7}} = \frac{8}{2} \times \frac{10^{-3}}{10^{-7}} = 4 \times 10^{^-3-^-7} = 4 \times 10^4$$

Sin embargo, recuerda siempre que podemos comprobar nuestros cálculos en problemas de este tipo en los que sólo intervienen exponentes positivos, valiéndonos para ello de la definición de 10^{-n}. Podemos proceder así:

$$\frac{8 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-7}} = \frac{\frac{8}{10^3}}{\frac{2}{10^7}} = \frac{\frac{8}{10^3} \times 10^7}{\frac{2}{10^7} \times 10^7} = \frac{8 \times 10^4}{2}$$

$$= 4 \times 10^4$$

Justifica cada una de las operaciones de este desarrollo.

<u>Ejercicios de clase 3-5</u>

1. Empleando la propiedad general y verificando después tus cálculos como lo hemos hecho antes, efectúa las siguientes

divisiones:

(a) $10^{-4} \div 10^{5}$ (b) $10^{-2} \div 10^{-7}$

2. (a) Divide 10^{7} por 10^{2}.
   (b) ¿Por qué es 10^{7-2} igual a 10^{5}?
   (c) ¿Son $10^{7} \div 10^{2}$ y 10^{7-2} numerales para un mismo número o para números diferentes?
3. (a) Halla $6 - ({}^{-}3)$.
   (b) Halla $10^{6-{}^{-}3}$.
   (c) Usa el ejemplo ilustrativo de antes para determinar si $10^{6} \div 10^{-3}$ y $10^{6-{}^{-}3}$ son numerales para un mismo número.
4. (a) Halla 10^{-4-5}.
   (b) ¿Es $10^{-4} \div 10^{5}$ igual a 10^{-4-5}? ¿Por qué? (Has hallado el primer número en 1(a).)
5. ¿Es $10^{-2} \div 10^{-7} = 10^{-2-{}^{-}7}$?
6. Escribe otro numeral para $10^{m} \div 10^{n}$.
7. Efectúa las divisiones indicadas a continuación:
   (a) $10^{11} \div 10^{-5}$ (b) $10^{-8} \div 10^{-9}$ (c) $10^{-3} \div 10^{9}$
8. ¿Es $(6 \times 10^{5}) \div (3 \times 10^{2})$ igual a $\frac{6}{3} \times \frac{10^{5}}{10^{2}}$?
   ¿Es la respuesta final 2×10^{3}?
9. Efectúa las divisiones abajo indicadas, expresando las respuestas en notación científica.
   (a) $(1.2 \times 10^{-4}) \div (4 \times 10^{6})$
   (b) $(6.4 \times 10^{-6}) \div (3.2 \times 10^{-5})$
   (c) $(9 \times 10^{4}) \div (0.3 \times 10^{-2})$

Ejercicios 3-5

1. Escribe en notación científica las respuestas a los siguientes ejercicios:

(a) $10^{5} \div 10^{2}$
(b) $10^{3} \div 10$
(c) $10^{14} \div 10^{4}$
(d) $10^{17} \div 10^{12}$
(e) $10^{11} \div 10^{13}$
(f) $10^{10} \div 10^{20}$
(g) $10^{6} \div 10^{12}$
(h) $10^{3} \div 10^{4}$

2. Escribe en notación científica las respuestas a los siguientes ejercicios:

(a) $10^{5} \div 10^{-2}$
(b) $10^{3} \div 10^{-1}$
(c) $10^{14} \div 10^{-4}$
(d) $10^{17} \div 10^{-12}$
(e) $10^{11} \div 10^{-13}$
(f) $10^{10} \div 10^{-20}$
(g) $10^{6} \div 10^{-12}$
(h) $10^{3} \div 10^{-4}$

3. Escribe en notación científica las respuestas a los siguientes ejercicios:

(a) $10^{-5} \div 10^{2}$
(b) $10^{-3} \div 10$
(c) $10^{-14} \div 10^{4}$
(d) $10^{-17} \div 10^{12}$
(e) $10^{-11} \div 10^{13}$
(f) $10^{-10} \div 10^{20}$
(g) $10^{-6} \div 10^{12}$
(h) $10^{-3} \div 10^{4}$

4. Escribe en notación científica las respuestas a los siguientes ejercicios:

(a) $10^{-5} \div 10^{-2}$
(b) $10^{-14} \div 10^{-4}$
(c) $10^{-11} \div 10^{-13}$
(d) $10^{-6} \div 10^{-12}$
(e) $10^{-3} \div 10^{-1}$
(f) $10^{-17} \div 10^{-12}$
(g) $10^{-10} \div 10^{-20}$
(h) $10^{-3} \div 10^{-4}$

5. Escribe en notación científica las respuestas a los siguientes ejercicios:

(a) $(6 \times 10^{-5}) \div (3 \times 10^{-2})$
(b) $(7 \times 10^{-3}) \div 10^{4}$

(c) $(1.2 \times 10^{6}) \div 10^{-3}$ (e) $\dfrac{9.6 \times 10^{-4}}{2.4 \times 10^{-2}}$

(d) $(2.4 \times 10) \div 10^{-1}$ (f) $\dfrac{7.6}{1.9 \times 10^{3}}$

6. Llena cada espacio en blanco con el símbolo adecuado.

(a) $12\% = \dfrac{12}{100} = \dfrac{12}{10^2} = 12 \times 10^{\square} = 1.2 \times 10^{\square}$

(b) $46\% = \dfrac{46}{100} = \dfrac{46}{10^2} = 46 \times 10^{\square} = 4.6 \times 10^{\square}$

(c) $0.3\% = \dfrac{0.3}{100} = \dfrac{0.3}{10^{\square}} = 0.3 \times 10^{\square} = 3 \times 10^{\square}$

(d) $350\% = \dfrac{350}{100} = 350 \times 10^{\square} = 3.5 \times 10^{\square}$

(e) $\dfrac{450}{3\%} = \dfrac{450}{3 \times 10^{\square}} = 150 \times 10^{\square} = 1.5 \times 10^{\square}$

(f) $\dfrac{4800}{2.4\%} = \dfrac{4800}{2.4 \times 10^{\square}} = \dfrac{4.8 \times 10^{\square}}{2.4 \times 10^{\square}} = 2 \times 10^{\square}$

7. Durante el presente año, las rentas de una ciudad ascienden a \$2,760,000, que representan el 3% del valor total de las propiedades gravables con impuestos. ¿Cuál es el valor total de las propiedades gravables? Usa la notación científica en tus cálculos.

8. Una persona que viaja todos los días paga \$0.40 diarios por sus pasajes. ¿Sería razonable esperar que gaste un millón de centavos [illegible] viajes antes de que se jubile? Suponte que viaja 250 días por año.

*9. ¿Alrededor de cuántos días se necesitarían para gastar un billón de dólares a razón de diez dólares por segundo? Suponte que esto se hace durante las 24 horas del día. (1 día $\approx 8.5 \times 10^4$ segundos.)

*10. El montante de los impuestos recaudados en cierta región administrativa asciende a \$160,000 sobre una tasación de \$8,000,000. Si el señor Sosa paga un impuesto de \$400, ¿en cuánto se han tasado sus propiedades?

*11. Equipar una división blindada cuesta unos $35,000,000 y equipar una división de infantería cuesta unos $14,000,000. ¿Qué porcentaje de los gastos necesarios para equipar una división blindada se requerirían para equipar una división de infantería?

*12. La masa del electrón es aproximadamente 9.11×10^{-28} gramos y la masa del protón es aproximadamente 1.67×10^{-24} gramos.

(a) ¿Cuál de las dos masas es mayor?

(b) ¿Cuál es la razón aproximada de la masa del protón a la masa del electrón?

3-6. Uso de los exponentes para multiplicar y dividir decimales

Ya sabes cómo multiplicar dos números dados en forma decimal, y también cómo dividir uno por el otro. Cuando hallas el producto o el cociente de dos números, frecuentemente es fácil saber dónde debe colocarse el punto decimal. Pero cuando hay que efectuar varias multiplicaciones y divisiones consecutivas, puedes tener alguna dificultad en hallar la posición del punto en la respuesta final. Empleando la notación de las potencias de diez podemos trabajar solamente con números cardinales hasta el final del cálculo complicado, y luego fijar la posición del punto decimal de manera fácil. La notación exponencial nos da también una manera fácil de explicar nuestros procedimientos usuales para determinar la posición del punto decimal. Ilustraremos todo esto en esta misma sección.

Supon̂te que queremos multiplicar 32.14 por 1.6. ¿Dónde debe colocarse el punto decimal del producto?

Naturalmente, en un ejemplo tan simple, se nota a simple vista que el producto debe ser un número mayor que 32 pero menor que 64, y esto nos indica dónde poner el punto decimal en nuestra respuesta. Si empleamos la notación exponencial, procedemos así:

$$32.14 \times 1.6 = (3{,}214 \times 10^{-2})(16 \times 10^{-1})$$
$$= (3{,}214 \times 16)(10^{-2} \times 10^{-1})$$
$$= (3{,}214 \times 16)(10^{-3})$$
$$= 51{,}424 \times 10^{-3}$$
$$= 51.424$$

En el producto $(3{,}214 \times 16)$ tenemos solamente números cardinales para multiplicar. El factor 10^{-3} nos indica la posición del punto decimal; es decir, indica que en el producto deben aparecer 3 cifras decimales a la derecha: $51{,}424 \times 10^{-3} = 51.424$.

Además, la manera como hemos llegado a $^{-}3$ da una justificación para la regla que dice que el número de cifras decimales del producto es la suma de los números de cifras decimales de los factores de ese producto.

Si tienes dudas sobre la colocación del punto decimal en el producto o en el cociente, la notación exponencial te permitirá fácilmente resolverlas. La ventaja reside en que tratamos solamente con números cardinales en nuestra multiplicación y sólo al final nos preocupamos por el punto decimal.

Esta forma de notación exponencial es análoga a la notación científica, pero se diferencia de ella en que el primer factor no tiene por qué ser un número menor que 10.

Ejercicios de clase 3-6

1. Emplea el procedimiento anterior para hallar cada uno de los siguientes productos:

   (a) 6.14×0.42 (c) 649.3×14.68

   (b) 0.625×0.038 (d) 11.4×0.0031

Podemos emplear el mismo esquema para la división de decimales. Como ejemplo de tal procedimiento, dividamos 14.72 por 6.1.

$$\frac{14.72}{6.1} = \frac{1472 \times 10^{-2}}{61 \times 10^{-1}} = \frac{1472}{61} \times \frac{10^{-2}}{10^{-1}}$$

$$= \frac{1472}{61} \times 10^{-2-^{-}1} = \frac{1472}{61} \times 10^{-1}$$

Ahora la división $\frac{1472}{61}$ es, simplemente, una operación con números cardinales y da $\frac{1472}{61} = 24.13$, si efectuamos la división con la aproximación de una centésima.

Por consiguiente,

$$\frac{14.72}{6.1} = 24.13 \times 10^{-1} = 2.413$$

con la aproximación de una milésima.

En este caso también hemos empleado las potencias de diez de tal manera que dividimos solamente números cardinales. El exponente $^{-}1$ sirve solamente para fijar la posición del punto decimal en la respuesta.

Con frecuencia esta notación es realmente ventajosa cuando se efectúan operaciones más complicadas con números decimales. Por ejemplo,

$$\frac{3015 \times 0.028}{0.00007 \times 0.03 \times 1500} = \frac{(3015)(28)}{(7)(3)(15)} \times \frac{10^{-3}}{10^{-5} \times 10^{-2} \times 10^{2}}$$

$$= 268 \times 10^{2}$$

$$= 26,800$$

Para ver cómo se ha obtenido la respuesta, efectúa todas las etapas de este cálculo.

Ejercicios 3-6

1. Coloca el punto decimal en los productos de manera que sean verdaderas las siguientes proposiciones numéricas:

   (a). $6,021 \times 0.00003 = (6,021) \times (3 \times 10^{-5}) = 18,063$

   (b) $3.42 \times 0.02 = (342 \times 10^{-2}) \times (2 \times 10^{-2}) = 684$

   (c) $2.5 \times 3,000 = (25 \times 10^{-1}) \times (3 \times 10^{3}) = 75$

   (d) $54.73 \times 7.3 = (5,473 \times 10^{-2}) \times (73 \times 10^{-1}) = 399,529$

   (e) $1,200 \times 0.006 = (12 \times 10^{2}) \times (6 \times 10^{-3}) = 72$

2. Llena los espacios en blanco con los símbolos adecuados.

(a) $4.52 = 45.2 \times 10^{-1} = 452 \times 10^{\square}$

(b) $0.012 = 1.2 \times 10^{-2} = 12 \times 10^{\square}$

(c) $65{,}000 = 6.5 \times 10^{\square} = 65 \times 10^{3}$

(d) $38.216 = 382.16 \times 10^{-1} = 3{,}821.6 \times 10^{-2} = 38{,}216 \times 10^{\square}$

(e) $6.37 \times 10^{4} = 63.7 \times 10^{3} = 637 \times 10^{2} = \square \times 10^{0}$

(f) $0.003 \times 10^{5} = 3 \times 10^{\square} = 30 \times 10^{\square}$

(g) $41.2 \times 10^{-3} = 0.412 \times 10^{-1} = \square \times 10^{0}$

3. Coloca el punto decimal en los cocientes de manera que sean verdaderas las siguientes proposiciones.

(a) $\frac{6004}{0.02} = \frac{6004 \times 10^{0}}{2 \times 10^{-2}} = 3{,}002 \times 10^{2} = 3{,}002$

(b) $\frac{0.366}{0.06} = \frac{366 \times 10^{-3}}{6 \times 10^{-2}} = 61 \times 10^{-1} = 61$

(c) $0.32 \overline{)56.0064} = \frac{560064 \times 10^{-4}}{32 \times 10^{-2}} = 17{,}502$

(d) $\frac{0.084}{12000} = \frac{84 \times 10^{-3}}{12 \times 10^{3}} = 7$

(e) $\frac{0.2}{0.00125} = \frac{2 \times 10^{-1}}{125 \times 10^{-5}} = 0.016 \times 10^{4} = 16$

4. Efectúa las multiplicaciones, empleando la notación exponencial.

(a) 135×0.06

(b) $76{,}000 \times 3{,}000 =$

Sugerencia:

$(76 \times 10^{3}) \times (3 \times 10^{3})$

(c) $18{,}000 \times 0.0003$

(d) 0.0035×16.301

(e) $6{,}000{,}000 \times 0.0275$

(f) $0.07 \times 300 \times 0.02 \times 6{,}000$

5. Efectúa las divisiones, empleando la notación exponencial.

(a) $6.3 \div 0.3$

(b) $0.78 \div 13$

(c) $\frac{8750}{8.75}$　　　(e). $0.27 \overline{)0.84402}$

(d) $\frac{0.1470}{0.75}$　　　(f) $1800 \overline{)21.6}$

*6. Usa exponentes para colocar el punto decimal en la respuesta.

$$\frac{418.6 \times 0.019}{0.13} = 6118$$

*7. ¿Cuántas rosetas de maíz tostado se necesitarán para llenar 840 bolsas, si cada roseta pesa 0.04 de onza? Cada bolsa contiene 6 onzas de rosetas de maíz tostado.

8. PROBLEMA DIFICIL. Un platillo volador puede viajar a 100,000 millas por segundo. ¿Alrededor de cuántos años necesitará para visitar la tierra y regresar, si procede de una estrella que dista de nosotros $5\frac{1}{3}$ años de luz?

$$1 \text{ año de luz} \approx 5.9 \times 10^{12} \text{ millas}$$

$$1 \text{ año} \approx 3.2 \times 10^{7} \text{ segundos}$$

3-7. El sistema métrico: Unidades de longitud

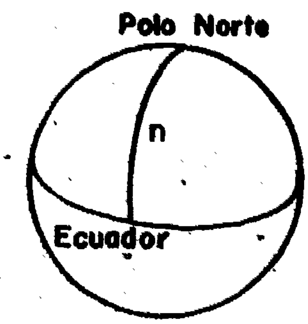
Hemos estado utilizando la notación de las potencias de diez para operar con los números, especialmente los muy grandes o muy pequeños. Como ilustración de cómo las potencias de diez aparecen de manera natural en el trabajo técnico y científico, estudiaremos ahora el sistema métrico. Como verás, este sistema de medidas se basa en las potencias de diez y, por consiguiente, la notación científica que hemos estudiado es particularmente útil para tratar cantidades métricas.

El sistema de medidas empleado con mayor generalidad en los Estados Unidos se llama sistema inglés. Algunas de las unidades de este sistema son la pulgada, el pie, la yarda, la milla, el galón, la libra, etc. Como ya lo habrás experimentado, estas unidades son un poquito difíciles de aprender y de recordar porque se necesitan muchas definiciones diferentes. En el sistema inglés debes aprender que 12 pulgadas (plg.) = 1 pie, 3 pies = 1 yarda (yd.), 5,280 pies = 1 milla (mi.), 4 cuartillos (ct.) = 1 galón (gal.) y 16 onzas (oz.) = 1 libra (lb.). Todas las relaciones parecen emplear diferentes números y por eso no es fácil recordar las relaciones básicas entre las unidades.

En la mayoría de los países, el sistema de medidas es el <u>sistema métrico</u>, en el cual la unidad básica de medida de longitud es el <u>metro</u>. El sistema métrico es un sistema simplificado de pesas y medidas, desarrollado en 1789 por un grupo de matemáticos franceses. Como su sistema de numeración era decimal (base 10), decidieron que sería una buena idea tener una base decimal para un sistema de medidas. En tal sistema las unidades de longitud serían el producto de la unidad escogida y alguna potencia de diez. Entonces, la conversión de una unidad a otra sería muy fácil, pues bastaría multiplicar o dividir por una potencia de 10. Veremos que de esta manera, los cálculos con cantidades expresadas en unidades métricas son mucho más simples.

<u>Unidades de longitud en el sistema métrico</u>

Los matemáticos franceses comenzaron calculando la distancia n del Polo Norte al Ecuador a lo largo del meridiano que pasa por París. Como unidad básica de longitud tomaron $\frac{1}{10000000}$ de esta distancia. Definiendo la unidad de esta manera, se podía repetir en cualquier momento la medición de la distancia original y la reconstrucción de la unidad de longitud en caso de que la barra normalizada se perdiera.



$$1 \text{ Metro} = \frac{n}{10000000}$$

Se dio el nombre de <u>metro</u> a la nueva unidad normalizada de longitud, y la barra normalizada de un metro fue guardada cuidadosamente para asegurar la uniformidad de todas las unidades métricas futuras. Esta definición del metro se usó hasta el 15 de octubre de 1960, cuando los delegados de 32 naciones acordaron una nueva normalización del metro. Esta normalización define el metro en términos de la longitud de onda de la luz rojo-anaranjada del gas criptón. En forma precisa, se define el metro así:

1 metro = 1,650,763.73 longitudes de onda rojo-anaranjada, en un vacío con un átomo de gas criptón 86.

Esta nueva definición tiene la ventaja de que la unidad es fácilmente medible con un interferómetro en cualquier parte del mundo. Además, permite una aproximación en mediciones lineales, del orden de uno en cien millones. Empleando la antigua barra de platino iridiado, la mejor aproximación era del orden de uno en un millón.

Respecto al sistema inglés, un metro es un poco más grande que una yarda, a saber,

1 metro = 39.37 pulgadas (aproximadamente)

Dividiendo por 10, se obtienen las unidades más pequeñas de longitud en el sistema métrico. Entonces definimos

1 decímetro $= \frac{1}{10}$ de metro

1 centímetro $= \frac{1}{10}$ de decímetro $= \frac{1}{100}$ de metro

1 milímetro $= \frac{1}{10}$ de centímetro $= \frac{1}{1000}$ de metro

Para unidades más grandes de longitud, simplemente multiplicamos por 10. Entonces, por definición,

1 decámetro = 10 metros

1 hectómetro = 10 decámetros = 100 metros

1 kilómetro = 10 hectómetros = 1,000 metros

Para destacar la simplicidad de las relaciones entre esas cantidades, las escribiremos en relación con el metro, empleando la notación científica. Las relaciones son así:

1 milímetro $= 10^{-3}$ metros

1 centímetro $= 10^{-2}$ metros

1 decímetro $= 10^{-1}$ metros

1 metro $= 10^{0}$ metros

1 decámetro $= 10^{1}$ metros

1 hectómetro $= 10^{2}$ metros

1 kilómetro $= 10^{3}$ metros

Se ha intentado muchas veces lograr que en los Estados Unidos se adoptara el sistema métrico. En el Congreso Continental, Tomás Jéfferson trabajó en pro de un sistema decimal para las monedas y las medidas, pero tuvo buen éxito solamente en la adopción de un sistema decimal para las monedas. Cuando John Quincy Adams era Secretario de Estado, previó en 1821 el uso mundial del sistema métrico, en su "Informe sobre las pesas y medidas". En 1866 el Congreso autorizó el uso del sistema métrico, legalizándolo para quienes desearan usarlo. Finalmente, en 1893, por acuerdo del Congreso, el metro fue adoptado como la longitud normalizada en los Estados Unidos. Ahora se definen la yarda y la libra oficialmente en términos de las unidades metro y kilogramo del sistema métrico.

Un cambio súbito de nuestras unidades comunes (yardas, pies, pulgadas, onzas, libras) a las unidades métricas causaría confusión, sin duda, por un tiempo. Sin embargo, muchos piensan que cambiaremos gradualmente al sistema métrico. Nuestros científicos usan ya el sistema métrico así como los pueblos de la mayoría de los países extranjeros.

En la tabla A resumimos las definiciones de las principales unidades métricas de longitud e indicamos las abreviaturas con que se las designa. En esta tabla, observa la ventaja del uso de la notación científica para mostrar las relaciones con respecto a la unidad básica de longitud, el <u>metro</u>.

Tabla A

Unidades métricas lineales

Nombre de la unidad	Abreviatura	Equivalente en metros	Equivalente métrico en notación científica
1 milímetro	1 mm.	$\frac{1}{1000}$ m.	10^{-3} m.
1 centímetro	1 cm.	$\frac{1}{100}$ m.	10^{-2} m.
1 decímetro	1 dm.	$\frac{1}{10}$ m.	10^{-1} m.
1 metro	1 m.	1 m.	10^{0} m.
1 decámetro	1 Dm.	10 m.	10^{1} m.
1 hectómetro	1 hm.	100 m.	10^{2} m.
1 kilómetro	1 km.	1,000 m.	10^{3} m.

Observa que todas las otras unidades métricas de longitud llevan la palabra "metro" con un prefijo. Estos prefijos se usan también para designar otras unidades de medida en el sistema métrico.

Prefijo	Significado
mili	$\frac{1}{1000} = 10^{-3}$
centi	$\frac{1}{100} = 10^{-2}$
deci	$\frac{1}{10} = 10^{-1}$
deca	$10 = 10^{1}$
hecto	$100 = 10^{2}$
kilo	$1,000 = 10^{3}$

En la práctica actual, se usan raramente el hectómetro, el decámetro y el decímetro. El metro, el centímetro, el milímetro y el kilómetro se usan muy frecuentemente y por eso les dedicaremos mayor atención.

Dos prefijos más que mencionaremos aquí son <u>mega</u>, que significa un millón, y <u>micro</u>, que significa una millonésima. Entonces

Prefijo	Significado
mega	$1,000,000 = 10^6$
micro	$\frac{1}{1000000} = 10^{-6}$

Frecuentemente has oído hablar de 3 megatones (3 millones de toneladas), 1 megaciclo (1 millón de ciclos). ¡Aun en la jerga que usa el pueblo norteamericano existe este prefijo griego clásico en el término "megabuck" (1 millón de dólares)!

En esta época de estudios atómicos y nucleares, se estudian con frecuencia cantidades muy pequeñas y son frecuentes longitudes tan pequeñas como una millonésima de metro. El micrón se define así:

1 micrón = una millonésima de metro = 10^{-6} m.

Entonces 3 micrones = 3×10^{-6} m. = 3×10^{-3} mm., pues 1 micrón = 10^{-3} mm. El símbolo usual para micrón es la letra griega μ (se lee "mu"). Entonces 14μ = 14 micrones = 14×10^{-6} m. ¿Has encontrado alguna vez estos términos: megavoltio, megaohmio, microvatio, microsegundo y microfaradio? Si no los has visto, puedes estar seguro de que los estudiarás pronto en la clase de ciencias. ¿Puedes imaginarte lo que es un micromicrón?

Ejercicios 3-7a

1. Completa cada una de las siguientes expresiones:

   (a) 1 km. = ________ hm.

   (b) 1 km. = ________ Dm.

   (c) 1 km. = ________ m.

   (d) 1 km. = ________ dm.

   (e) 1 km. = ________ cm.

   (f) 1 km. = ________ mm.

2. Completa cada una de las siguientes expresiones:

   (a) 1,111,111 m. = ________ km.

   (b) 5.342 m. = ________ cm.

(c) 245.36 m. = __________ km.

(d) 0.564 m. = __________ mm.

(e) 6,043.278 m. = __________ km.

(f) 2,020.202 m. = __________ cm.

(g) 0.015 mm. = __________ micrones

3. Llena los espacios en blanco con el número correcto.

(a) 5 m. = __________ cm.

(b) 200 cm. = __________ mm.

(c) 500 m. = __________ km.

(d) 2.54 cm. = __________ mm.

(e) 1.5 km. = __________ m.

(f) 3.25 m. = __________ cm.

(g) 3,500 m. = __________ km.

(h) 474 cm. = __________ m.

(i) 5.5 cm. = __________ mm.

(j) 6.25 m. = __________ cm.

4. El metro se definió originariamente como $\frac{1}{10000000}$ de la distancia del Polo Norte al Ecuador, medida sobre la superficie de la tierra. Suponiendo que la tierra es una esfera y empleando la notación científica, halla el número aproximado de
   (a) metros que tiene la circunferencia de la tierra.
   (b) kilómetros que tiene la circunferencia de la tierra.
   (c) milímetros que tiene la circunferencia de la tierra.

*5. Haciendo uso de la notación científica, expresa en metros las siguientes mediciones:
   (a) 0.013 mm.
   (b) 2.34 cm.
   (c) 6,730 km.
   (d) 694 micrones ó 694μ
   (e) 1 megamicrón

<u>Conversión a unidades inglesas</u>

Como en este país usamos tanto las unidades inglesas como las métricas, frecuentemente necesitamos convertir expresiones de un sistema en otro. La pulgada normalizada en los Estados Unidos se define ahora en términos del sistema métrico por la relación

1 plg. = 2.54 cm. (definición de pulgada)

Como hemos visto, esto da

$$39.37 \text{ plg.} = 1 \text{ m.} \quad \text{(aproximadamente)}$$

En términos de yardas, esto se convierte en

$$1 \text{ m.} = \frac{39.37}{36} \text{ yd., o}$$

$$1 \text{ m.} \approx 1.1 \text{ yd.}$$

Para la medición de distancias grandes, frecuentemente es útil convertir las millas a kilómetros. Como

$$1 \text{ m.} = 39.37 \text{ plg.} = \frac{39.37}{12} \text{ pies}$$

vemos que

$$1 \text{ m.} = \frac{39.37}{12(5280)} \text{ mi.}$$

Entonces,

$$1 \text{ km.} = \frac{(1000)(39.37)}{(12)(5280)} \text{ mi.}$$

Naturalmente, ahora te pedimos que, efectuando las operaciones, verifiques que esta relación da

$$1 \text{ km.} \approx 0.62 \text{ mi.}$$

Entonces, grosso modo, 1 km. ≈ 0.6 mi. o, con mejor aproximación, 1 km. ≈ $\frac{5}{8}$ mi.

Ejercicios 3-7b

1. Convierte cada una de las mediciones que se dan a continuación efectuadas en el sistema métrico, a su equivalente aproximado en el sistema inglés.

   (a) 100 m. ≈ ________ yd.
   (b) 200 m. ≈ ________ yd.
   (c) 400 m. ≈ ________ yd.
   (d) 800 m. ≈ ________ yd.
   (e) 1,500 m. ≈ ________ yd.
   (f) 1,500 m. ≈ ________ mi.
   (g) 10 km. ≈ ________ mi.
   (h) 100 km. ≈ ________ mi.

   Algunas de las distancias normalizadas para sucesos deportivos.

2. (a) La montaña más alta del mundo, el Monte Everest, mide 29,003 pies. Redondeando esta altura a 29,000 pies, ¿cuánto es en metros?
   (b) La profundidad de una de las más grandes fosas marinas es 34,219 pies. Expresa esa profundidad en metros, aproximadamente, después de redondearla con la aproximación de 100 pies.
3. (a) Utilizando la relación anterior entre millas y kilómetros, muestra que 1 mi. ≈ 1.61 km.
   (b) La distancia media de la tierra al sol es aproximadamente 9.29×10^7 millas. ¿A cuántos kilómetros equivale?
4. Un tamaño muy común de papel para escribir a máquina es $8\frac{1}{2}$ pulgadas por 11 pulgadas. ¿Cuáles son estas dimensiones en centímetros.
5. (a) ¿Cuál es tu estatura en centímetros?
   (b) ¿En milímetros?
   (c) ¿Y en micrones?
6. ¿Qué velocidad es mayor, 100 pies por segundo o 3,000 centímetros por segundo?

3-8. Unidades métricas de área

Hemos aprendido a calcular el área del interior de una curva simple cerrada, para diversas curvas simples. Hemos escogido el área de una región cuadrada como la mejor unidad para la medición del área del interior de tales curvas cerradas.

La unidad métrica para medición de áreas es también una región cuadrada. Empleamos como unidad básica de área una región cuadrada, cada uno de cuyos lados tiene por longitud un metro. El área del interior de esta región cuadrada se llama un metro cuadrado (abreviatura $m.^2$).

Si tienes a mano una regla marcada en centímetros, dibuja un cuadrado de 1 centímetro de lado para tener una idea del tamaño de un centímetro cuadrado. Como 1 m. = 100 cm. = 39.37 plg., vemos que

$$1 \text{ cm.} \approx 0.39 \text{ plg.}$$

ó

$$1 \text{ cm.} \approx 0.4 \text{ plg.}$$

Comparado con un metro cuadrado, que es la unidad básica, el centímetro cuadrado es realmente pequeño. Recuerda que 1 cm. = $\frac{1}{100}$ m. Entonces

$$1 \text{ cm.}^2 = \frac{1}{100} \text{ m.} \times \frac{1}{100} \text{ m.} = \frac{1}{100} \times \frac{1}{100} \text{ m.}^2 = \frac{1}{10000} \text{ m.}^2$$

He aquí otro caso en que es preferible emplear la notación exponencial y escribir

$$1 \text{ cm.}^2 = 10^{-2} \text{ m.} \times 10^{-2} \text{ m.} = 10^{-4} \text{ m.}^2$$

Como el metro es la unidad básica de longitud y el metro cuadrado la unidad básica de área, es importante dar las diversas unidades de área en términos de metros cuadrados. Las unidades más frecuentemente empleadas se indican en la tabla B.

Tabla B

Unidad de longitud	Unidad de área	Area equivalente en metros cuadrados
milímetro	milímetros cuadrados	$\frac{1}{1000^2}$ m.^{2}
centímetro	centímetros cuadrados	$\frac{1}{100^2}$ m.^{2}
kilómetro	kilómetros cuadrados	$(1,000)^2$ m.^{2}

Nuevamente vemos que es conveniente usar la notación exponencial y escribir

$$1 \text{ mm.}^2 = 10^{-6} \text{ m.}^2$$
$$1 \text{ cm.}^2 = 10^{-4} \text{ m.}^2$$
$$1 \text{ km.}^2 = 10^{6} \text{ m.}^2$$

Ejercicios 3-8

1. Llena los espacios en blanco.

   Ejemplo. $1\text{ km.}^2 = (1{,}000)^2\text{ m.}^2$ ó 10^6 m.^2

   (a) $1\text{ cm.}^2 = (\frac{1}{100})^2\text{ m.}^2$ ó ________ m.^2

   (b) $1\text{ mm.}^2 = (\frac{1}{1000})^2\text{ m.}^2$ ó ________ m.^2

   (c) $1\text{ cm.}^2 = 10^2\text{ mm.}^2$ ó ________ mm.^2

   (d) $1\text{ m.}^2 = 100^2\text{ cm.}^2$ ó ________ cm.^2

   (e) $1\text{ m.}^2 = (\frac{1}{1000})^2\text{ km.}^2$ ó ________ km.^2

2. Dibuja una figura para ilustrar la parte (c) del problema 1.
3. Halla el área de una región rectangular cerrada que tiene las dimensiones que se dan más abajo. Asegúrate de que ambas dimensiones estén expresadas en la misma unidad.

	Largo	Ancho
(a)	35 cm.	9.2 cm.
(b)	1.68 m.	7.6 m.
(c)	0.97 m.	37 cm.
(d)	1.25 mm.	1.2 cm.

4. Expresa el área del problema 3(b) en centímetros cuadrados.
5. ¿Cuál es el área de un círculo cuyo radio es 6 metros? Toma 3.14 para π y halla el número aproximado de metros cuadrados que tiene el área.
6. Halla el área en metros cuadrados de una región cuadrada cerrada de 160 centímetros de lado.
7. Si el área del interior de un paralelogramo es 783 cm.^2 y la base tiene 27 cm., ¿cuánto mide la altura?
8. (a) ¿Cuál es la equivalencia métrica de 1 yd. cd. en cm.^2?

   1 yd. = 91.41 cm. Por consiguiente,

   1 yd. cd. $\approx (91.4)^2\text{ cm.}^2 =$ ______ cm.^2.

   (b) ¿A cuántos centímetros cuadrados es aproximadamente igual 1 pulgada cuadrada?

9. (a) Verifica que $1 \text{ km.}^2 \approx 0.386$ mi. cd.
   (b) Verifica que 1 mi. cd. $\approx 2.59 \text{ km.}^2$.

10. (a) El área de la superficie de la tierra se estima en unos $149 \times 10^6 \text{ km.}^2$. ¿Aproximadamente cuántas millas cuadradas son?
   (b) El área de los océanos de la tierra se estima en $361 \times 10^6 \text{ km.}^2$. ¿Cuántas millas cuadradas son, aproximadamente?

3-9. Unidades métricas de volumen

La unidad métrica para medir volúmenes es un sólido cúbico. La longitud de cada arista de este cubo es 1 metro. Por consiguiente, el volumen del cubo es 1 metro cúbico (abreviatura 1 m.^3).

El metro cúbico es una unidad de volumen bastante grande. Una unidad más pequeña es el centímetro cúbico (cc. o cm.^3). Como hemos visto, la longitud de un centímetro es aproximadamente 0.4 de pulgada; en consecuencia, el centímetro cúbico es un cubo cuyo tamaño es más o menos el de un cubito de azúcar pequeño. Para que tengas una idea del tamaño del metro cúbico, observa que

$$1 \text{ cm.}^3 = \frac{1}{100} \text{ m.} \times \frac{1}{100} \text{ m.} \times \frac{1}{100} \text{ m.} = \frac{1}{1000000} \text{ m.}^3$$

En notación científica,

$$1 \text{ cm.}^3 = 10^{-6} \text{ m.}^3 \quad \text{y} \quad 1 \text{ m.}^3 = 10^6 \text{ cm.}^3$$

Mediante cálculos similares podemos hallar los múltiplos y submúltiplos del metro cúbico que se usan más comúnmente, como se indica en la tabla C.

Tabla C

Unidad de longitud	Unidad de volumen	Un volumen equivalente en metros cúbicos
milímetro	mm.^3	$\frac{1}{1000^3} \text{ m.}^3$
centímetro	cm.^3	$\frac{1}{100^3} \text{ m.}^3$
kilómetro	km.^3	$(1{,}000)^3 \text{ m.}^3$

Ahora, como antes, notamos la conveniencia de la notación exponencial al escribir

$$1 \text{ mm.}^3 = 10^{-3} \times 10^{-3} \times 10^{-3} \text{ m.}^3 = 10^{-9} \text{ m.}^3$$
$$1 \text{ cm.}^3 = 10^{-2} \times 10^{-2} \times 10^{-2} \text{ m.}^3 = 10^{-6} \text{ m.}^3$$
$$1 \text{ km.}^3 = 10^3 \times 10^3 \times 10^3 \text{ m.}^3 = 10^9 \text{ m.}^3$$

Observa los cálculos anteriores. Ves que

$$10^3 \times 10^3 \times 10^3 = (10^3)^3 = 10^{3\cdot 3} = 10^9$$
$$10^{-2} \times 10^{-2} \times 10^{-2} = (10^{-2})^3 = 10^{-2\cdot 3} = 10^{-6}$$
$$10^{-3} \times 10^{-3} \times 10^{-3} = (10^{-3})^3 = 10^{-3\cdot 3} = 10^{-9}$$

Esto ilustra una tercera propiedad general:

<u>Propiedad general.</u> <u>Si</u> a <u>y</u> b <u>son enteros cualesquiera, positivos o negativos, entonces</u>

$$(10^a)^b = 10^{ab}$$

Ejercicios 3-9

1. Llena los espacios en blanco.

   <u>Ejemplo.</u> Hay $(1{,}000)^3$ ó <u>1,000,000,000</u> m.^{3} en 1 km.^{3}.

   (a) Hay 10^3 ó ________ mm.^{3} en 1 cm.^{3}.

   (b) Hay $(\frac{1}{100})^3$ ó ________ m.^{3} en 1 cm.^{3}.

   (c) Hay $(\frac{1}{1000})^3$ ó ________ m.^{3} en 1 mm.^{3}.

   (d) Hay $(10^6)^3$ ó $10^{\square}$ ________ mm.^{3} en 1 km.^{3}.

2. Un sólido rectangular tiene por dimensiones 6 cm., 7 cm. y 8.4 cm. Calcula el volumen del interior de este sólido. Recuerda que el volumen del interior de un sólido rectangular es igual al producto de las medidas de su largo, ancho y alto, cuando estas medidas se expresan en una misma unidad.

3. ¿Cuál es el volumen del interior de un sólido rectangular de 14 mm. de alto y cuya base tiene un área de 36.5 cm.^{2}?

   ____

3-10. Unidades métricas de masa y de capacidad

La unidad métrica para las medidas de masa se define como la masa del agua contenida en un volumen de un centímetro cúbico. La masa de un centímetro cúbico de agua se llama un gramo. Esta es una definición muy conveniente, pues si conocemos el volumen de un depósito, inmediatamente podemos saber qué masa de agua puede contener este depósito. Por ejemplo, si el volumen del interior de un depósito es 500 cm.^{3}, entonces la masa de agua que puede contener es 500 gramos. Lo que más debe observarse en esta definición es que las medidas numéricas son las mismas.

Cuando nos referimos al volumen de una caja o de otro depósito, usamos más frecuentemente la palabra capacidad. Al decir la capacidad de un depósito nos referimos simplemente al volumen total que ese depósito puede contener.

Cuando nos referimos al volumen de líquido que un depósito puede contener, usamos frecuentemente unidades especiales, tales como la pinta, el cuartillo y el galón, en el sistema inglés. Así, podemos decir que la capacidad de un tanque es cierto número de galones, y que su volumen es tantos pies cúbicos.

En el sistema métrico la unidad de capacidad más usada es el litro (abreviatura l.). Un litro se define como la capacidad de un cubo cuya arista tiene 10 cm. (1 decímetro) de longitud. Entonces, un litro representa un volumen de 1,000 cm.^{3}. Un cubo de arista 10 cm. tiene, por tanto, un volumen de 1,000 cm.^{3}. Decimos que su capacidad es un litro, y que contiene una masa de 1,000 gramos (o un kilogramo) de agua.

Un litro es aproximadamente igual a un cuarto de galón, o más precisamente,

$$1 \text{ litro} = 1{,}000 \text{ cm.}^3 = 1.056712 \text{ cuartillos}$$

Las otras dos medidas de capacidad más comunes en el sistema métrico son el

$$\text{mililitro (ml.)} = 0.001 \text{ litro}$$

y el

$$\text{kilolitro (kl.)} = 1{,}000 \text{ litros}$$

Una masa de 1,000 kilogramos se llama una <u>tonelada métrica</u>. En consecuencia, una tonelada métrica contiene 10^6 gramos. La tonelada métrica es la masa de 1 kilolitro de agua.

En la tabla D se resumen las unidades de volumen, capacidad y masa más empleadas. Observa especialmente que <u>1 cm.^{3} corresponde a 1 gramo de masa y a un mililitro de capacidad.</u>

Tabla D

Unidad de volumen	Unidad de masa	Unidad de capacidad
1 cm.^{3}	1 gm.	1 ml. = 0.001 l.
1 dm.^{3} (1,000 cm.^{3})	1 kgm. (1,000 gm.)	1 l. (1,000 ml.)
1 m.^{3} (1,000 dm.^{3}) (1,000,000 cm.^{3})	1 tonelada métrica (1,000 kgm.) (1,000,000 gm.)	1 kl. (1,000 l.) (1,000,000 ml.)

Hay varias abreviaturas comúnmente empleadas para el gramo. Las más generalmente aceptadas son g. o gm. También se usa la abreviatura gr. En este texto abreviaremos gramo como gm., kilogramo como kgm. y miligramo como mgm.

Ejercicios 3-10

1. El volumen de un depósito es 352.8 cm.^{3} . ¿Cuál es la masa de agua que puede contener, expresada en
   (a) gramos?
   (b) kilogramos?
2. (a) ¿Cuál es la capacidad en mililitros de un tanque rectangular cuyo volumen es 673.5 cm.^{3}?
   (b) ¿Cuál es su capacidad en litros?
3. Se llena de agua un tanque cúbico cuyas aristas miden 6 pies 9 pulgadas.

(a) Halla su volumen en pulgadas cúbicas.
(b) Halla su volumen en pies cúbicos. Recuerda que 1,728 plg. cb. = 1 pie cb.
(c) Halla el peso del agua. Recuerda que 1 pie cúbico de agua pesa 62.4 libras.

4. Las aristas del tanque del problema 3 miden aproximadamente 2.06 metros.
(a) Halla el volumen del tanque en metros cúbicos.
(b) Halla su capacidad en litros. Recuerda que hay mil litros en un metro cúbico.
(c) ¿Cuál es la masa del agua contenida? Recuerda que 1 litro de agua tiene 1 kilogramo de masa.

5. ¡Cuánto menos tiempo necesitaste para resolver el problema 4 que para resolver el problema 3! ¿Cuál es la ventaja principal de calcular en el sistema métrico?

6. Un tanque tiene un volumen de 2,500 $cm.^3$.
(a) ¿Cuál es la capacidad del tanque en mililitros?
(b) ¿Cuántos kilogramos de agua contendrá el tanque?
(c) ¿Cuántas toneladas métricas de agua contendrá el tanque?

7. Un depósito cúbico tiene sus aristas de 30 cm. de longitud.
(a) ¿Cuál es el volumen del depósito en $cm.^3$?
(b) ¿Cuál es su capacidad en litros?
(c) ¿Cuántos kilogramos de agua contendrá el depósito? (Suponte que el depósito es impermeable, por supuesto.)

*8. El volumen del sol se estima en unos 337,000 millones de millón de millas cúbicas o

$$3.37 \times 10^{17} \text{ millas cúbicas}$$

(a) Sabiendo que 1 mi. ≈ 1.6 km., expresa el volumen del sol en kilómetros cúbicos. (Si prefieres, da tu respuesta indicando solamente las multiplicaciones.)
(b) Expresa el volumen del sol en $cm.^3$, dejando la multiplicación indicada.

9. El galón imperial británico, usado en el Canadá y en Gran Bretaña, equivale a 1.20094 galones americanos, o

1 galón imperial inglés ≈ 1.2 galones americanos

(a) Cuando compras 5 "galones" de gasolina en el Canadá, ¿cuántos galones americanos recibes?

(b) ¿Cuántos galones imperiales se necesitan para llenar un barril que contiene 72 galones americanos?

Problemas

Consulta el Vigésimo anuario del consejo nacional de maestros de matemáticas, como libro de referencia.

(a) Reúne una lista de todas las unidades de medida para longitudes, áreas, volúmenes y capacidades que puedas encontrar en dicho libro de referencia. Lleva esta lista a la escuela.

(b) Escribe una composición sobre el tema "Por qué prefiero el sistema inglés de medidas al sistema métrico" o "Por qué prefiero el sistema métrico de medidas al sistema inglés". Puedes consultar el libro de referencia para conseguir mayor información. Se explicaba bien este tema en un artículo titulado "El sistema métrico—pro y contra", por Chauncey D. Leake y Ralph M. Drews, que apareció en Mecánica popular de diciembre de 1960.

(c) ¿Qué pesa más, una libra de plumas o una libra de oro?

Breve resumen de las relaciones entre unidades

La tabla que ves a continuación resume mucho de lo que se ha dicho sobre el sistema métrico. Con ella puedes obtener todos los múltiplos y submúltiplos de las unidades de área, longitud, volumen, masa y capacidad.

Tabla E

Longitud

10 milímetros (mm.)	=	1 centímetro (cm.)
100 centímetros (cm.)	=	1 metro (m.)
1,000 metros (m.)	=	1 kilómetro (km.)

Capacidad

1,000 mililitros (ml.)	=	1 litro (l.) = 1,000 $cm.^3$

Masa

1,000 miligramos (mgm.)	=	1 gramo (gm.)
1,000 gramos (gm.)	=	1 kilogramo (kgm.)
1,000 kilogramos (kgm.)	=	1 tonelada métrica

A continuación se indican algunas relaciones de conversión importantes entre las correspondientes unidades inglesas y métricas.

Tabla F

Longitud

(definición de pulgada)	1 pulgada (plg.)	=	2.54 centímetros (cm.)
	1 metro (m.)	≈	39.37 pulgadas (plg.)
	1 centímetro (cm.)	≈	0.39 pulgadas (plg.)
	1 kilómetro (km.)	≈	0.62 milla (mi.)
	1 milla (mi.)	≈	1.61 kilómetros (km.)

Capacidad

1 litro (l.) ≈ 1.0567 cuartillos (ct.)

1 litro (l.) ≈ 0.2642 galón (gal.)

1 galón (gal.) ≈ 3.785 litros (l.)

Capítulo 4

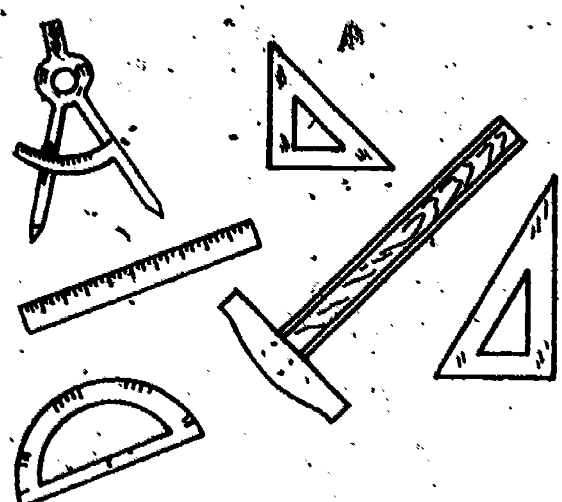
CONSTRUCCIONES, TRIANGULOS CONGRUENTES Y LA PROPIEDAD PITAGORICA

4-1. Introducción a los dibujos y las construcciones en matemáticas

El dibujo de figuras y el uso de croquis nos ayudan a resolver muchos problemas. Los ingenieros aeronáuticos dibujan figuras de cada parte de un nuevo aeroplano para estudiar mejor los problemas que presentan. Los arquitectos, antes de comenzar a construir, diseñan la planta y la fachada de un edificio exactamente como éste se verá una vez terminado. Los directores de teatro dibujan el escenario y la posición de los objetos para decidir mejor cómo se debe presentar cierta escena. Los carpinteros dibujan los objetos que van a construir. Los electricistas hacen diagramas para mostrar cómo se deben disponer los devanados de una máquina eléctrica. Muchos de tus problemas serán más fáciles de resolver si adquieres el hábito de dibujar figuras o diagramas que te ayuden a ver las relaciones que se presentan en tu problema. A veces los estudiantes cometen errores tontos porque no se toman el trabajo de dibujar una figura de la situación que presenta el problema.

Para muchos problemas es suficiente hacer un croquis de la situación. En tales casos, los croquis se pueden dibujar a mano alzada. Aunque impreciso por ser un diseño ligero, el croquis debe ayudarte a "ver" el problema. No tiene sentido perder el tiempo en dibujar una figura perfecta si basta un croquis.

Algunos problemas se pueden resolver efectuando mediciones sobre los dibujos, pero en este caso tales dibujos deben ser suficientemente precisos. Para hacer dibujos precisos se utilizan diversos instrumentos. Una persona cuya profesión consiste en hacer dibujos precisos se llama dibujante. Los dibujantes utilizan compases y reglas, pero además emplean muchos otros.



instrumentos, tales como transportadores, reglas en T, escuadras triangulares de 30 y 60 grados, escuadras triangulares de 45 grados, reglas flexibles, reglas paralelas, pantógrafos y plantillas. Utilizarás algunos de estos instrumentos, pero otros son demasiado caros para usarlos en esta etapa de tus estudios. Entérate de cómo son y de cómo se usan los siguientes instrumentos de dibujo:

(a) escuadra triangular de 30 y 60 grados
(b) plantillas
(c) pantógrafo

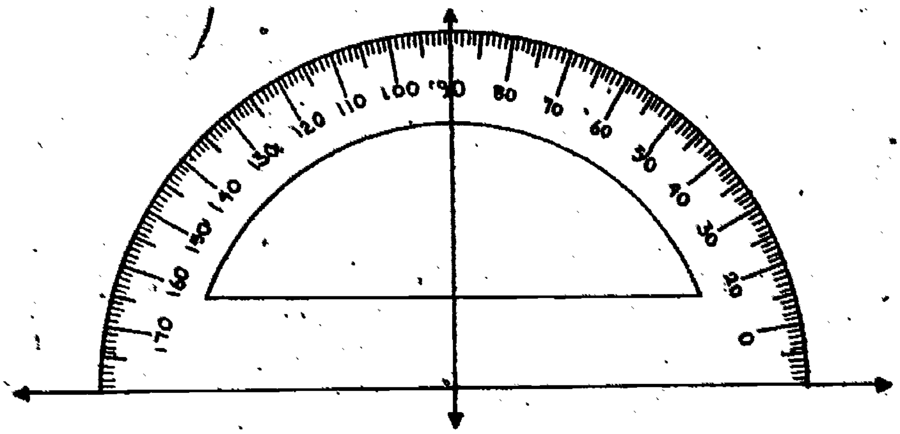
Los instrumentos solos no pueden producir exactitud. Quien da resultados exactos eres tú, cuando empleas esos instrumentos de manera adecuada. En el séptimo grado has aprendido a usar el limbo graduado; sin embargo, es posible que necesites revisar estas ideas con tu profesor.

Cuando se mide un ángulo y uno de sus rayos no es bastante largo como para alcanzar la escala del limbo graduado, prolonga el rayo o coloca el borde de una regla cuidadosamente a lo largo del mismo. Ten cuidado de utilizar la escala correcta del limbo graduado.

Como recuerdas, se llaman figuras planas las figuras que están completamente en una superficie plana como tu hoja de papel o la superficie de la pizarra. Las rectas, los ángulos y los polígonos son ejemplos de figuras planas. Las rectas son las más simples de esas figuras. Son de especial interés las relaciones que hay entre dos o más rectas en el plano: las rectas perpendiculares son rectas que se intersecan formando ángulos de 90°; las rectas paralelas son dos o más rectas que no se intersecan o, en el lenguaje de los conjuntos, rectas cuya intersección es el conjunto vacío.

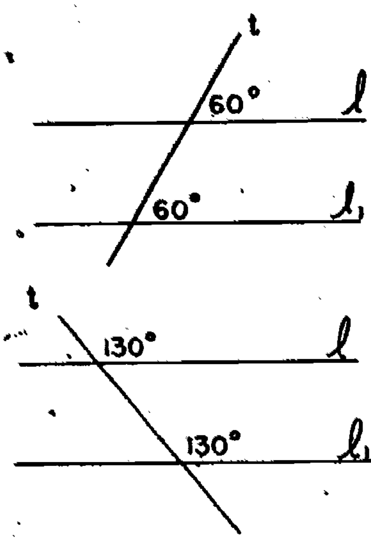
Las perpendiculares se pueden dibujar con precisión con la ayuda de un limbo graduado, pues basta medir un ángulo de 90° en cualquier punto de una recta. Prolongando los rayos, se pueden formar rectas. Las rectas, rayos o segmentos pueden ser mutuamente perpendiculares.

Se consideran como paralelos los bordes de la mayor parte de las reglas. Una manera rápida de dibujar dos rectas paralelas es trazar una línea por cada lado de una regla sujeta de manera que no se mueva. Naturalmente, este método tiene usos limitados, pues todos los pares de rectas paralelas resultan trazadas a distancia constante. Para allanar esta dificultad se necesita el limbo graduado.



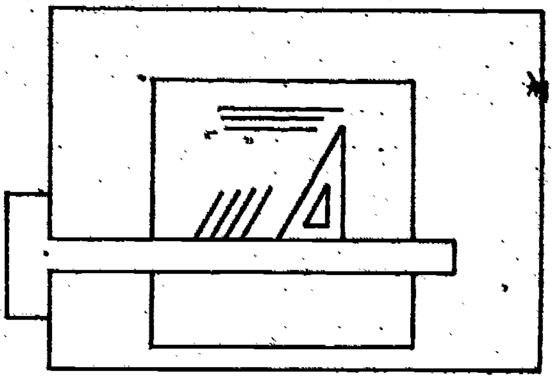
Para trazar rectas paralelas con exactitud, puedes utilizar el limbo graduado si recuerdas que los ángulos correspondientes formados por dos paralelas y una secante son congruentes. Una secante es una recta que interseca a dos o más rectas en puntos distintos.

Si quieres dibujar la figura de la derecha, utiliza una regla para trazar la recta ℓ. En cualquier punto de la recta ℓ, dibuja una recta t de manera que se forme un ángulo de 60°. Traza una tercera recta ℓ_1 que interseque a la recta t formando con ella un ángulo de 60°. Como los ángulos correspondientes son congruentes, la recta ℓ es paralela a la recta ℓ_1.



¿Es la recta ℓ paralela a la recta ℓ_1 en ambas figuras? ¿Cómo lo sabes?

Las reglas en T y las escuadras triangulares son también útiles para dibujar rectas paralelas. La figura de la derecha ilustra la manera de usar la escuadra triangular y la regla en T para trazar rectas paralelas. Se dibujan conjuntos de rectas paralelas moviendo la escuadra triangular a lo largo de la regla en T o moviendo la regla en T solamente.



Otro tipo de dibujo preciso que estudiaremos en este capítulo es una <u>construcción con la regla y el compás</u>. Estas construcciones son dibujos que se hacen empleando solamente dos instrumentos, una regla y un compás. Naturalmente, se usa un lápiz (ó una tiza). Como la frase "construcciones con la regla y el compás" es muy larga, emplearemos en este capítulo la palabra <u>construcción</u> para referirnos a dibujos que se hacen únicamente con la regla y el compás. Supondremos que la regla no lleva marcada ninguna escala, pues se empleará sólo para trazar rectas y no para medir longitudes.

<u>Ejercicios 4-1</u>

1. Dibuja un ángulo de 60° sin usar el limbo graduado. Ahora mide el ángulo con el limbo graduado. ¿Con qué aproximación vendrá dada tu respuesta? Haz otro dibujo para ver si tu estimación ha mejorado.
2. Dibuja ángulos cuyas medidas en grados se indican a continuación:

   (a) 45 (c) 30 (e) 10 (g) 110
   (b) 90 (d) 120 (f) 160 (h) 65

   Mide cada uno de ellos con el limbo graduado para ver hasta qué punto has estimado bien el tamaño de cada ángulo. Repite la prueba si no estás satisfecho con la primera.
3. ¿Qué ángulos del problema 2 son agudos? ¿Cuáles son obtusos?
4. Dibuja con la regla y el limbo graduado una secante que interseque a una de dos rectas paralelas con un ángulo de 80°.

(a) ¿Cuántos pares de ángulos correspondientes puedes encontrar?

(b) ¿Cuántos pares de ángulos opuestos por el vértice hay en tu dibujo?

(c) ¿Cuántos grados hay en cada par de ángulos opuestos por el vértice? ¿Y en cada par de ángulos correspondientes?

(d) ¿Puedes dibujar tres o más rectas paralelas, cada una de las cuales interseque a la secante según un ángulo de 80°?

5. Usando la regla y el limbo graduado, dibuja un triángulo que tenga dos ángulos de 60° con un lado de $2\frac{1}{2}$ pulgadas de longitud entre los vértices de dichos ángulos.

6. Con la regla y el limbo graduado, dibuja un triángulo cuyos lados sean $6\frac{1}{2}$ cm. y $4\frac{4}{5}$ cm. El ángulo formado por esos lados es de 110°. ¿De qué clase es el triángulo?

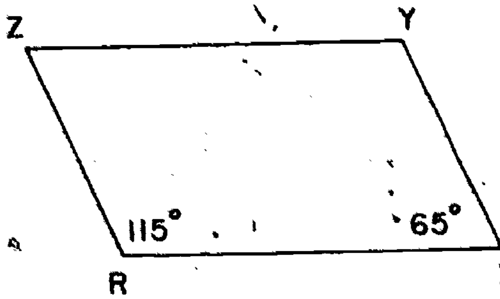
7. ¿Recuerdas que un paralelogramo es un cuadrilátero cuyos lados opuestos están sobre rectas paralelas? ¿Es el cuadrado un paralelogramo? ¿Son paralelogramos todos los rectángulos?

(a) Utilizando la regla y el limbo graduado, dibuja el rectángulo ABCD. ¿De qué tamaño es el ángulo de vértice A? ¿Y el de vértice B?

(b) ¿Son A y B vértices consecutivos del paralelogramo ABCD?

(c) Recuerda esta propiedad de los paralelogramos: Los ángulos de vértices consecutivos en un paralelogramo son suplementarios. La suma de las medidas de los ángulos A y B es ______. Determina la suma de las medidas de los ángulos B y C. Haz lo mismo con cada par de ángulos consecutivos.

8. En el paralelogramo RXYZ

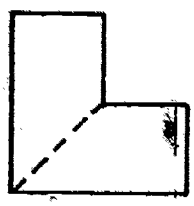


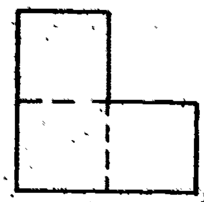
$m(\angle X) + m(\angle Y) =$ ______. $m(\angle Z) + m(\angle R) =$ ______.

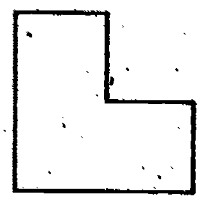
$m(\angle Y) + m(\angle Z) =$ ______. $m(\angle R) + m(\angle X) =$ ______.

9. Utilizando la regla y el limbo graduado, dibuja un paralelogramo de lados 1 pulgada y 2 pulgadas que formen un ángulo de 75°.

10. PROBLEMA DIFICIL. Un agricultor piensa dividir su hacienda en partes iguales entre sus hijos. La forma de la hacienda se ve en la figura. Cuando tenía dos hijos, proyectaba dividirla como se muestra en el primer diagrama. Era fácil dividirla cuando tenía tres hijos. Ahora tiene cuatro hijos. ¿Cómo puede dividir la hacienda en cuatro partes que tengan exactamente la misma extensión y sean de la <u>misma forma</u>?


División para 2 hijos


División para 3 hijos


¿Cómo puede dividirse para 4 hijos?

4-2. <u>Construcciones básicas</u>

Al dibujar las figuras geométricas, has empleado diversos dispositivos mecánicos para poder trazarlas con precisión. En los 2,000 años que han transcurrido desde que Euclides y otros pensadores griegos desarrollaron la geometría como una ciencia, muchos autores de textos de geometría han considerado conveniente poner ciertas restricciones a los instrumentos que se deben usar. En virtud de estas restricciones, la regla debe ser usada para trazar segmentos de recta, y el compás debe emplearse para trazar circunferencias y arcos. Un <u>arco</u> es cualquier porción conexa de una circunferencia.

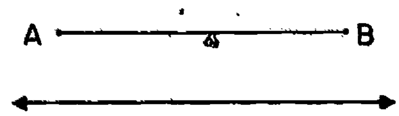
En tus construcciones, debes usar el borde recto de las reglas, sin emplear las graduaciones de las mismas. En geometría imaginamos que las reglas no tienen marcas que permitan efectuar mediciones con ellas.

Puedes observar que dibujamos, o construimos, un segmento de recta trazándolo con un lápiz apoyado en el borde rectilíneo de una regla. Por otra parte, nuestro método para dibujar una circunferencia es bastante diferente. En esta construcción empleamos un instrumento especial: el compás. No efectuamos el trazado con lápiz a lo largo de un objeto que tiene el borde circular. Los esfuerzos para diseñar un instrumento con el que se puedan trazar segmentos de rectas sin emplear la regla, constituye un capítulo interesante en la historia de la geometría. Estos esfuerzos tuvieron buen éxito solamente hace unos 100 años.

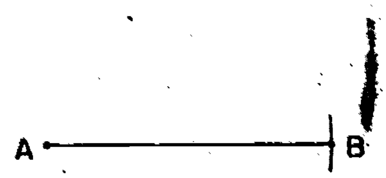
Las figuras geométricas dibujadas con regla y compás solamente, se llaman construcciones. En esta sección aprenderás varias construcciones básicas que se usan en geometría.

Sigue las instrucciones y completa cada una de las construcciones de 1 a 4.

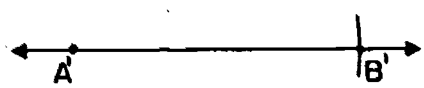
1. <u>Para copiar un segmento</u>



Paso a



Pasos b <u>y</u> c



Paso d

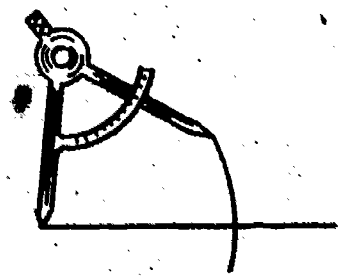
   (a) Dibuja una recta un poco más larga que el segmento dado que se quiere copiar.
   (b) Coloca la punta del compás en uno de los extremos del segmento dado.
   (c) Abre el compás hasta que la punta con lápiz toque el otro extremo. (La distancia entre la punta metálica y la punta con lápiz del compás es la longitud del <u>radio</u> del compás.)
   (d) Sin cambiar el radio del compás, coloca la punta metálica en A' (un punto cualquiera) sobre la recta que has trazado, y marca un arco donde la punta del lápiz interseca a esta recta. El segmento que va del punto A' (en que se ha colocado la punta metálica del compás) a B' (la intersección del arco y la recta) tiene la misma

~~longitud que el segmento original.~~
Usa esta construcción cada vez que necesites determinar segmentos de igual longitud.

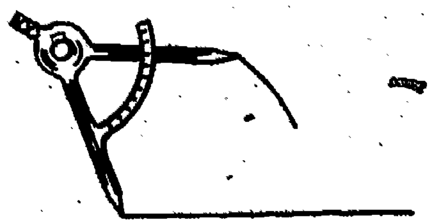
2. <u>Para bisecar un segmento de recta</u>

La palabra <u>bisecar</u> significa dividir en dos partes iguales.

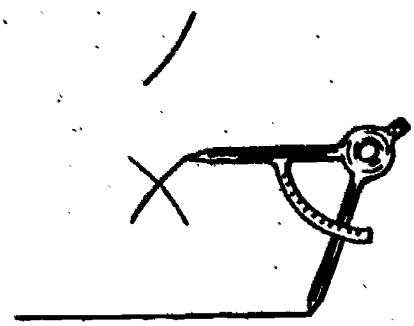
(a) Coloca la punta del compás en un extremo del segmento. Abre el compás de manera que su radio sea mayor que la mitad de la distancia entre los extremos del segmento.



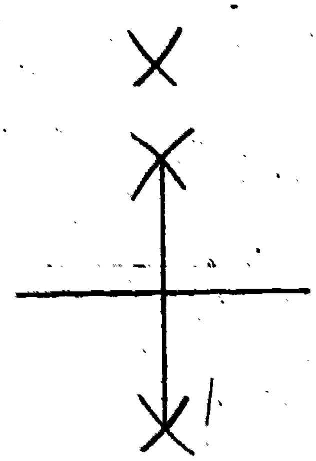
(b) Traza arcos por arriba y por abajo del centro del segmento. Debes hacer los arcos bastante largos para estar seguro de incluir puntos que estén por encima y por debajo del centro.



(c) Sin cambiar el radio del compás, coloca la punta metálica de éste en el otro extremo. Traza arcos que corten a los dos arcos anteriores.



(d) Traza una recta por los puntos en que se intersecan los arcos. Esta recta biseca al segmento original.

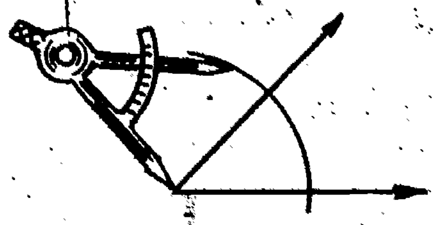


Mide las dos partes obtenidas en (d). ¿Son de la misma longitud? ¿Cuál es la relación entre el segmento y la recta mediatriz que has construido?

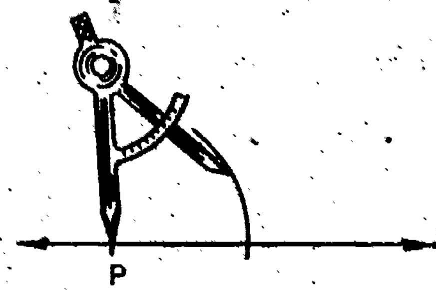
3. Para copiar un ángulo

(a) Traza una recta de referencia, parte de la cual será usada como un rayo del ángulo.

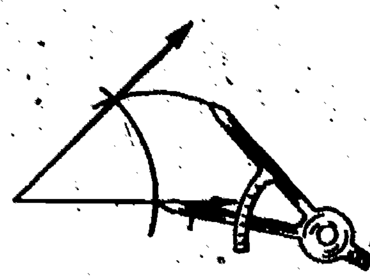
(b) Coloca la punta del compás en el vértice del ángulo y traza un arco que interseque a ambos rayos del ángulo.



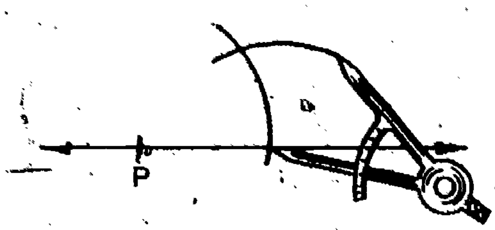
(c) Por un punto P, sobre la recta de referencia, traza un arco con el radio que has utilizado en (b).



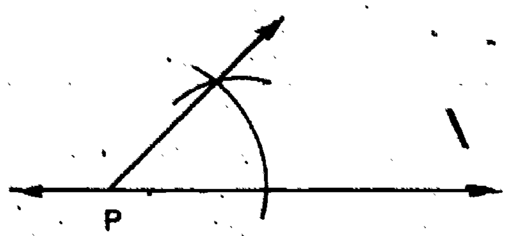
(d) Coloca la punta del compás en la intersección de un rayo del ángulo original y del arco que lo interseca. Coloca la punta con lápiz del compás en la otra intersección.



(e) Con el compás en la posición que se obtuvo en (d), coloca la punta en la intersección de la recta de referencia y del arco. Traza un arco que interseque al arco dibujado en (c).



(f) Traza un rayo que parta de P sobre la recta de referencia y que pase por la intersección de los arcos.



Emplea el transportador para verificar esta construcción.

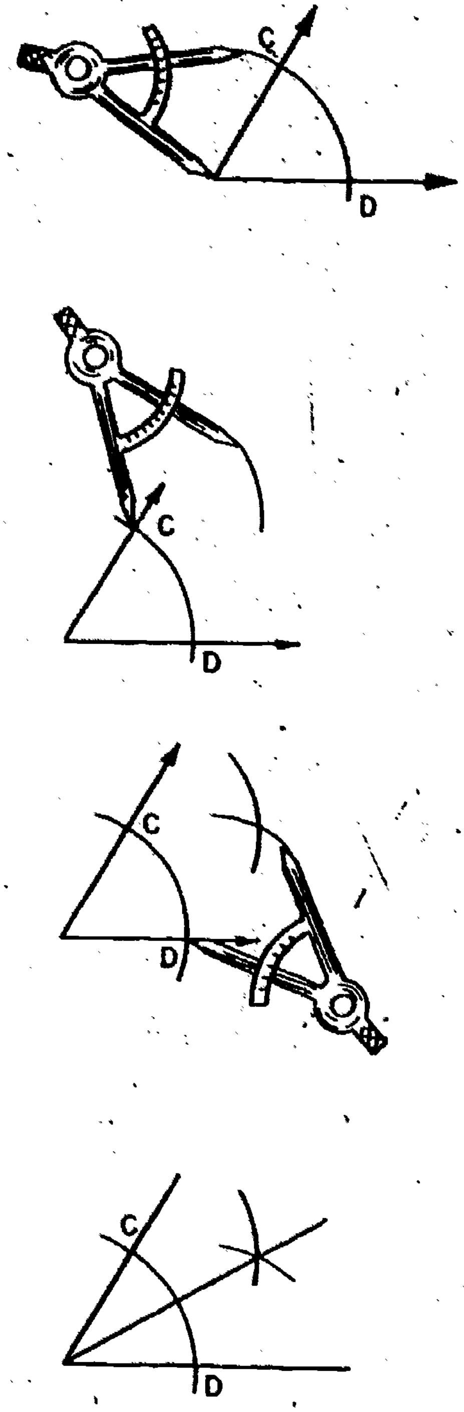
4. Para bisecar un ángulo.

Las cuatro figuras ilustran los pasos que hay que seguir para bisecar un ángulo con regla y compás.

Estudia estos pasos en las construcciones. Luego dibuja un ángulo sobre una hoja de papel y bisécalo.

¿Puedes decir tú mismo lo que hay que hacer en cada paso?

Emplea el limbo graduado para medir los dos ángulos que has construido. ¿Tienen igual medida?



Ejercicios 4-2a

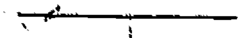
1. Usa la regla para trazar una recta horizontal de $1\frac{1}{2}$ pulgadas de longitud. Construye sobre una recta vertical dada un segmento de la misma longitud.
2. Usa la regla para trazar un segmento vertical de $2\frac{1}{8}$ pulgadas de longitud. Construye sobre una recta horizontal dada un segmento de la misma longitud.
3. Usa la regla para dibujar un segmento oblicuo de 5 centímetros de longitud. Construye sobre una recta horizontal dada un segmento de la misma longitud.
4. Biseca cada uno de los segmentos que has construido en los problemas 1 a 3. Emplea solamente regla y compás.
5. Dibuja un ángulo agudo y un ángulo obtuso. Copia cada uno de los ángulos empleando solamente regla y compás.
6. Dibuja un ángulo agudo y un ángulo obtuso. Bisécalos empleando solamente regla y compás.
7. (a) Dibuja un triángulo grande. Biseca cada ángulo del triángulo. Prolonga las bisectrices hasta que se intersequen.

   (b) Cuando tres o más rectas se intersecan en un punto, se llaman rectas concurrentes. ¿Te parece que las bisectrices son rectas concurrentes?
8. Dibuja un segmento y luego divídelo en 4 partes iguales. Emplea solamente regla y compás.
9. Dibuja un ángulo obtuso y construye rayos que dividan el ángulo en cuatro ángulos congruentes.

Las construcciones básicas que has estudiado pueden ser empleadas de varias maneras diferentes. A esta altura de tus estudios, explorarás solamente algunas de esas maneras. Cuando estudies geometría en el segundo ciclo secundario, hallarás muchas más. Esta lección está destinada a efectuar descubrimientos. Si es necesario, se agregarán al problema explicaciones breves.

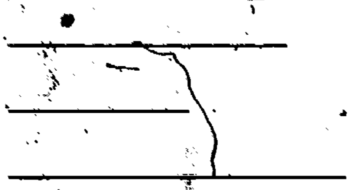
Ejercicios 4-2b

1. Dibuja un segmento de recta con una longitud aproximadamente igual a la del siguiente:



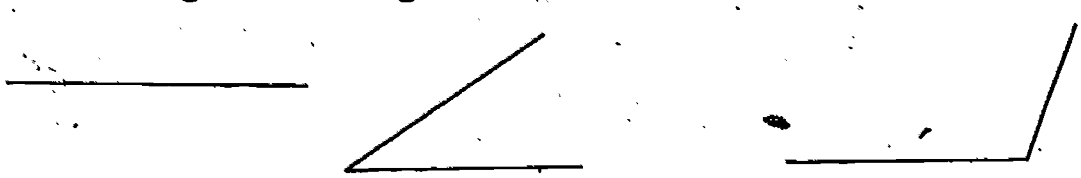
   (a) Empleando esta longitud como radio, traza una circunferencia con un extremo del segmento como centro.
   (b) Traza otra circunferencia con el mismo radio y con centro en el otro extremo.
   (c) ¿En cuántos puntos se intersecan las circunferencias?
   (d) Toma uno de los puntos de intersección de las dos circunferencias y traza los segmentos determinados por ese punto y cada uno de los extremos del segmento original.
   (e) Compara las medidas de los tres segmentos.
   (f) ¿Qué clase de triángulo has construido?

2. Construye un triángulo cuyos lados tengan como longitudes las de los segmentos que se dan a continuación:



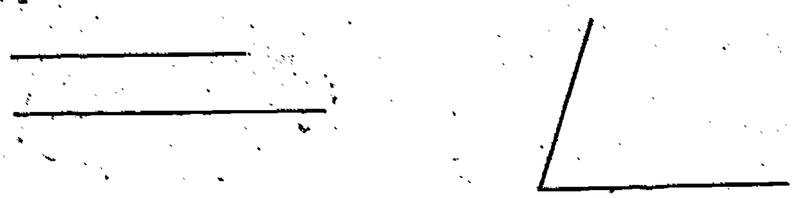
   Puedes seguir el plan del problema 1, con la excepción de que las circunferencias de los pasos (a) y (b) no tendrán el mismo radio.

3. (a) Construye un triángulo cuya base tenga la misma longitud que el segmento que se dibuja aquí, y cuyos ángulos en cada uno de los extremos de la base sean congruentes a los siguientes ángulos:



   (Sugerencia: Emplea la base como un lado de cada ángulo.)
   (b) ¿Serán parecidos todos los triángulos construidos con estas medidas? Esta construcción se emplea para dibujar triángulos cuando se conocen dos ángulos y el lado común a ellos.

4. (a) ¿Construye un triángulo, dos de cuyos lados tengan la misma longitud que los segmentos que aparecen más abajo, y cuyo ángulo comprendido tenga la amplitud del que se da aquí.



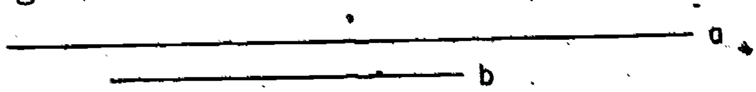
(b) ¿Serán parecidos todos los triángulos construidos con estas medidas? Se usa esta construcción cuando se conocen dos lados de un triángulo y el ángulo comprendido por ellos.

5. Construye un triángulo rectángulo que tenga un ángulo agudo de 60°. (Sugerencia: ¿Se puede emplear un triángulo equilátero como base para esta construcción? ¿Cuántos grados hay en cada ángulo de un triángulo equilátero? Se pueden construir dos triángulos rectángulos a partir de un triángulo equilátero de dos maneras: empleando la construcción 4 ó la construcción 2. Ensaya ambos métodos y comprueba la construcción con un limbo graduado.)

6. Dibuja lo siguiente:
   (a) 3 rectas concurrentes.
   (b) 4 rectas concurrentes.
   (c) 5 rectas concurrentes.

7. (a) Dibuja tres rayos tales que los extremos de los rayos sean el único punto de intersección.
   (b) ¿Cuántos ángulos forman los rayos de la parte (a)?

8. Construye un segmento cuya longitud sea igual a la diferencia entre las longitudes de estos segmentos:



9. (a) Dibuja un triángulo y construye los puntos medios de cada uno de sus lados. Une cada uno de estos puntos medios con el vértice opuesto. Los segmentos así determinados se llaman <u>medianas</u> del triángulo.
   (b) ¿Son concurrentes las <u>medianas</u>?

Un polígono es una curva simple cerrada formada por segmentos de recta. Un polígono con cuatro lados es un cuadrilátero. Hay muchas clases de cuadriláteros: trapecios, paralelogramos, rectángulos, cuadrados, etc. Un polígono de cinco lados es un pentágono, uno de seis lados es un hexágono y uno de ocho lados es un octógono. Si los lados son todos de la misma longitud y todos los ángulos tienen la misma medida, los polígonos se llaman regulares.

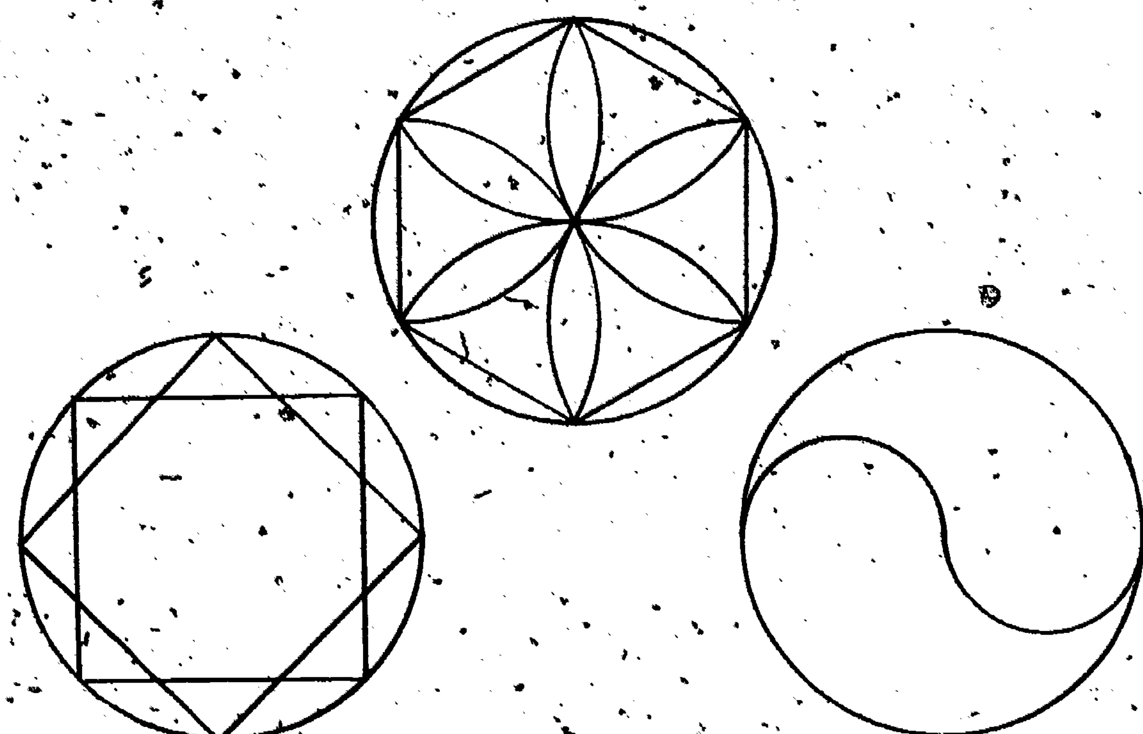
Si cada uno de los vértices de un polígono es un punto de una circunferencia, decimos que el polígono está inscrito en la circunferencia. En esta sección, usarás las construcciones que has aprendido para inscribir triángulos equiláteros, cuadrados, hexágonos y octógonos. Los problemas contienen los datos suficientes para que efectúes las construcciones.

Ejercicios 4-2c

1. Dibuja una circunferencia de radio 2 pulgadas. Con una abertura de compás igual al radio de la circunferencia, y partiendo de un punto cualquiera de la misma, marca un arco sobre la circunferencia. Coloca la punta del compás en el punto en que el arco interseca a la circunferencia. Marca otros arcos sobre la circunferencia. Continúa de la misma manera hasta que el último arco pase por el punto de partida. Si haces esto cuidadosamente descubrirás que el último arco dibujado pasa exactamente por el punto de partida.
   (a) ¿Cuántos arcos hay?
   (b) Conecta cada intersección de la circunferencia y un arco con las intersecciones que están a ambos lados de él.
   (c) ¿Qué figura forman esos segmentos?
   (d) ¿Cómo puedes emplear estos puntos para construir un triángulo equilátero?
   (e) ¿Cómo puedes formar una estrella de seis puntas?

2. Dibuja una circunferencia y un diámetro de la misma. Utiliza el limbo graduado para trazar un diámetro perpendicular al primer diámetro. Une ordenadamente, con segmentos de recta, los extremos de los diámetros.
   (a) ¿Qué figura se forma?
   (b) ¿Cómo puedes formar un polígono con doble número de lados? Hay dos maneras de hacer esto. ¿Puedes explicar cuáles son?

   (Como has usado tu limbo graduado, la figura que has dibujado no se llama una construcción. En la Sección 4-5 aprenderemos la manera de construir un ángulo recto.)
3. Construye una circunferencia e inscribe en ella un triángulo equilátero, un hexágono y un polígono de 12 lados.
4. Con estas construcciones básicas se pueden dibujar varias figuras, como se muestra aquí. Trata de copiarlas y luego inventa algunas más.



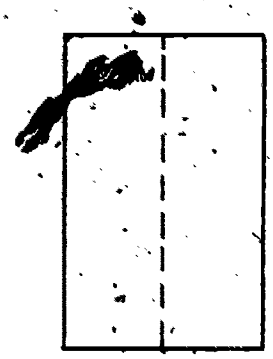
4-3. Simetría

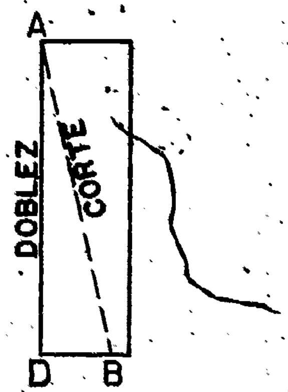
En la sección anterior has trabajado con construcciones geométricas. En esta sección explorarás algunas de las propiedades de las figuras que has construido. La mayor parte de las construcciones son ejemplos de simetría y de congruencia.

Esta sección se ha escrito de manera que puedas descubrir por ti mismo lo que significa simetría, y en las Secciones 4-4 y 4-5 estudiarás la congruencia.

Ejercicios de clase 4-3

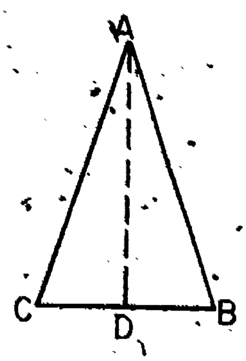
1. (a) Dobla por la mitad una hoja de papel tomada de tu cuaderno de notas (o cualquier otra hoja de papel con esquinas cuadradas). Partiendo del doblez, corta o arranca un triángulo rectángulo cuyo lado mayor coincida con el doblez, como se muestra en la segunda figura. Al mismo tiempo, corta un triángulo rectángulo a ambos lados del papel doblado. La figura de la derecha, arriba, es una hoja "doble". Desdobla luego la parte que permanece doblada. ¿Qué forma tiene?





(b) Marca con A el vértice del doblez, y con B y C los otros vértices. Marca con D la intersección del doblez y del lado $\overline{BC}$. Ahora la figura se parece a la siguiente:

(c) Dobla nuevamente el triángulo a lo largo de $\overline{AD}$. ¿Coinciden exactamente los triángulos rectángulos ABD y ACD uno sobre otro? Decimos que el triángulo ABC es simétrico respecto de la recta $\overleftrightarrow{AD}$ porque cuando se dobla a lo largo de $\overline{AD}$, las dos mitades coinciden exactamente. La recta $\overleftrightarrow{AD}$

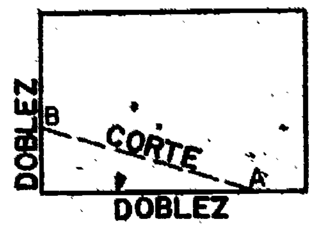


es un eje de simetría del triángulo.

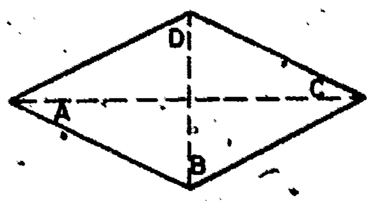
(d) ¿Cuántos ejes de simetría tiene un triángulo isósceles? ¿Y un triángulo equilátero? ¿Y un triángulo escaleno?

2. (a) Toma otra hoja de tu cuaderno y dóblala a lo largo, por la mitad.

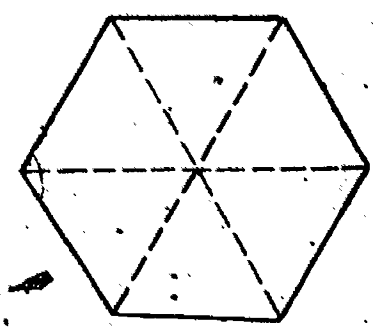
(b) Toma tu hoja doblada y dóblala nuevamente por la mitad transversalmente (de manera que el doblez caiga sobre sí mismo). Recorta la esquina en que se intersecan los dobleces, como se indican en la figura a la derecha. Despliega la pieza que has recortado. ¿Qué forma tiene?



(c) Marca tu figura como se indica a la derecha. ¿Coinciden exactamente las dos mitades cuando doblas a lo largo de $\overline{AC}$? ¿Qué pasa si doblas a lo largo de $\overline{DB}$? ¿Hay un eje de simetría? ¿Cuántos ejes de simetría hay?

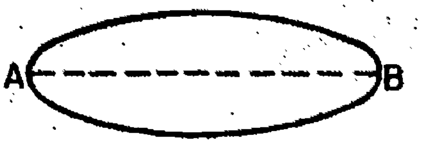


3. Considera el hexágono regular de la figura. ¿Determina un eje de simetría cada una de las rectas de trazos? ¿Hay otros ejes de simetría? ¿Puedes encontrarlos? ¿Cuántos ejes de simetría tiene un hexágono regular?



4. Dibuja una circunferencia y uno de sus diámetros. ¿Es este diámetro un eje de simetría? ¿Tiene la circunferencia otros ejes de simetría? ¿Hay 5 ejes de simetría? ¿Y 100? ¿Y 10^5? ¿Hay más ejes de simetría que cualquier número que puedas mencionar?

5. Observa la elipse en la figura de la derecha. Es la figura que obtienes recortando la punta de un cono mediante un corte plano oblicuo. ¿Es $\overleftrightarrow{AB}$ un eje de simetría? ¿Hay otros ejes de simetría? ¿Cuántos ejes de simetría tiene una elipse? El segmento $\overline{AB}$ se llama el eje mayor de la elipse. Otro eje de simetría es el eje menor de la elipse. ¿Por qué piensas que $\overline{AB}$ se llama el eje mayor? ¿Dónde está el eje menor?



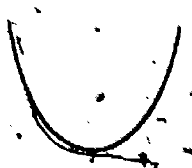
En estos ejercicios has aprendido que muchas de las figuras geométricas que conoces son simétricas respecto de una recta. Muchas figuras ornamentales y decoraciones tienen también esa clase de simetría.

Definición. Una figura es simétrica respecto de una recta ℓ, si para cada punto A de la figura, hay un punto B también de la figura, tal que ℓ es una mediatriz de $\overline{AB}$.

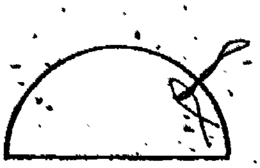
Ejercicios 4-3

1. Dibuja un rectángulo y traza sus ejes de simetría, dándoles nombre. ¿Cuántos ejes de simetría tiene un rectángulo?
2. Dibuja un triángulo equilátero, trazando y dando nombre a sus ejes de simetría. ¿Cuántos ejes de simetría hay?
3. Dibuja un cuadrado, traza y designa sus ejes de simetría. ¿Cuántos ejes de simetría tiene un cuadrado?
4. Traza y marca los ejes de simetría, si los hay, en cada una de las figuras que siguen. ¿Cuántos ejes de simetría tiene cada figura?

(a)

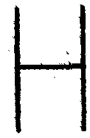


(b)



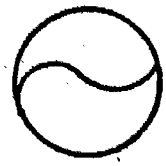
(c)

(f)

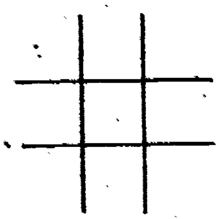


(d)

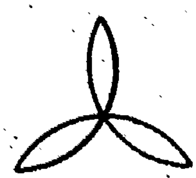
(g)



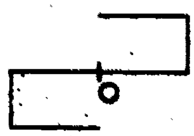
(e)



(h)



5. Dobla una hoja de papel por la mitad, corta algunas figuras y luego desdóblalas. ¿Es simétrico cada dibujo respecto del doblez? ¿Es el doblez un eje de simetría?
6. Dobla por la mitad una hoja de papel, y luego dóblala nuevamente por la mitad, perpendicularmente al primer doblez. Corta una figura en ella y luego desdóblala. ¿Dónde están los ejes de simetría?
7. Decimos que una circunferencia es simétrica respecto de un punto, su centro, y que una elipse es simétrica respecto de un punto, su centro (el punto en que se intersecan su eje mayor y su eje menor). También decimos que la figura que aparece en la página siguiente es simétrica respecto del punto O. Describe verbalmente lo que crees que se entiende por simetría respecto de un punto.



¿Cuáles de las figuras del problema 4 son simétricas respecto de un punto?

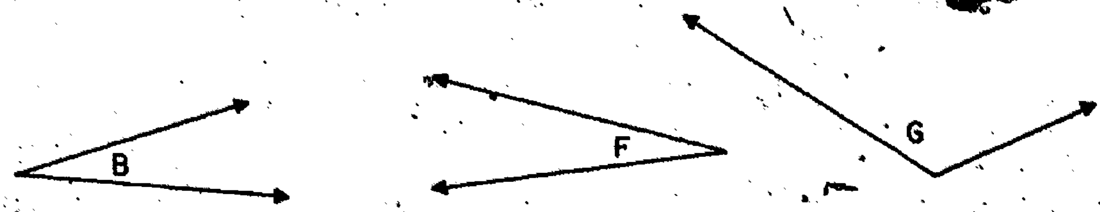
8. Cuando se corta una naranja mediante un plano que pasa por su centro de tal manera que cada sección de la naranja resulta cortada también por la mitad, podemos imaginar como simétricas las superficies hechas por el corte. La simetría de esta clase es simetría respecto de un plano. Indica otros objetos que son simétricos respecto de un plano.

4-4. Triángulos congruentes

En los Ejercicios de clase 4-3, problema 1, has construido un triángulo isósceles doblando una hoja de papel y recortando. El eje de simetría (el doblez) divide al triángulo isósceles en dos triángulos rectángulos que tienen el mismo tamaño y forma. Cuando dos figuras tienen el mismo tamaño y forma decimos que son congruentes. Los dos triángulos rectángulos son triángulos congruentes.

¿Puedes pensar en otras figuras congruentes? ¿Son dos circunferencias congruentes, si cada una de ellas tiene un radio de cinco pulgadas? ¿Son congruentes dos segmentos de recta que tienen la misma longitud?

Puesto que un ángulo es una figura geométrica, ¿podemos hablar de ángulos congruentes? Las figuras congruentes tienen el mismo tamaño y forma. Ahora, si dos ángulos tienen la misma medida, tienen el mismo tamaño, y decir que dos ángulos tienen el mismo tamaño significa que tienen la misma medida. Por el aspecto de los ángulos, deducimos que dos ángulos con iguales medidas tienen la misma forma.

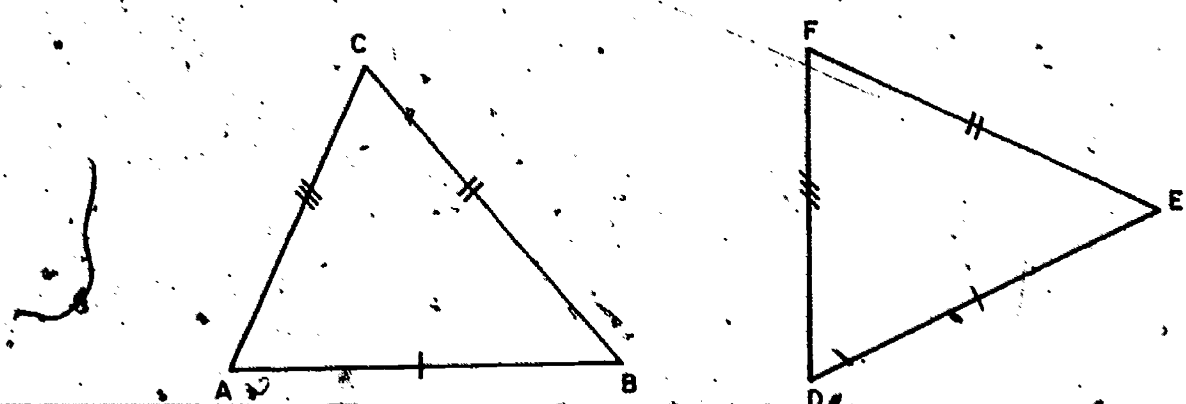


Los ángulos B y F que se muestran, tienen iguales medidas. Podemos decir que $\angle B$ es congruente con $\angle F$, y escribir $\angle B \cong \angle F$, donde el símbolo " $\cong$ " significa "es congruente con". ¿Es $\angle F \cong \angle G$?

Sabemos que dos circunferencias son congruentes si tienen el mismo radio. Dos cuadrados son congruentes si tienen la misma medida para sus lados. Dos segmentos de recta son congruentes si tienen la misma longitud. Dos ángulos son congruentes si su amplitud es la misma.

¿Son congruentes dos rectángulos si sus bases son iguales? No. ¿Y si sus bases y sus alturas son iguales? Sí. Puedes ver que el rectángulo exige dos condiciones para la congruencia.

Los triángulos son tan importantes en gran parte de las matemáticas, las ciencias naturales y la ingeniería que necesitamos conocer bien las condiciones en las cuales los triángulos son congruentes. En este caso necesitamos más condiciones que en las ~~figuras que ya~~ hemos estudiado.



Si se trazara en un papel el triángulo DEF y se recortara luego a lo largo de los lados de ese triángulo, el modelo de papel representaría al triángulo y a su interior. Este modelo de papel podría ser colocado sobre el triángulo ABC y los triángulos podrían coincidir exactamente. Entonces los dos triángulos son congruentes. Si el punto D se colocara sobre el punto A con $\overline{DF}$ a lo largo de $\overline{AC}$, el punto F caería sobre el punto C y el punto E caería sobre el punto B. En estos dos triángulos habría tres pares de segmentos congruentes y tres pares de ángulos congruentes.

$\overline{AB} \cong \overline{DE}$ $\angle B \cong \angle E$

$\overline{CB} \cong \overline{FE}$ $\angle C \cong \angle F$

$\overline{CA} \cong \overline{FD}$ $\angle A \cong \angle D$

Usa la regla y el limbo graduado para comprobar estas medidas.

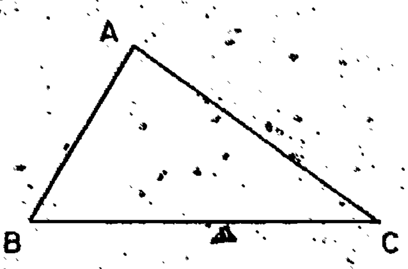
Recuerda que otra manera de expresar $\angle B \cong \angle E$ es $m(\angle B) = m(\angle E)$. El uso de una u otra expresión dependerá de si queremos destacar que los ángulos son figuras congruentes o que sus medidas son números iguales.

Si dos triángulos son congruentes, para cada ángulo o lado de uno de los triángulos hay un ángulo o lado que le es congruente en el otro triángulo.

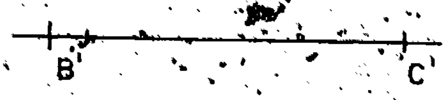
En los siguientes Ejercicios de clase, estudiarás con tu profesor las condiciones que hacen congruentes a dos triángulos.

<u>Ejercicios de clase 4-4</u>

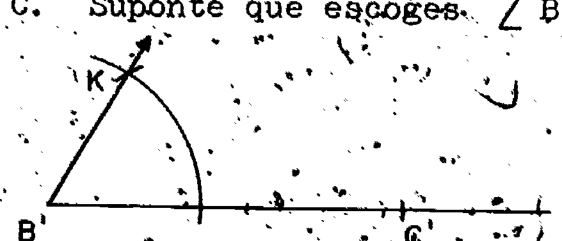
1. Construye un triángulo congruente con el triángulo ABC.



Puedes empezar esta construcción trazando primero un segmento $\overline{B'C'}$ congruente con $\overline{BC}$.



Luego puedes construir un ángulo congruente, o bien con $\angle B$ o bien con $\angle C$. Suponte que escoges $\angle B$.



La figura muestra la construcción del rayo $\overrightarrow{B'K}$ de manera que $\angle B' \cong \angle B$.

Como paso siguiente, debes considerar dos posibilidades:

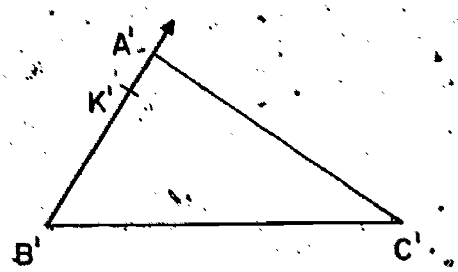
(1) Marca A' sobre $\overrightarrow{B'K}$ de manera que

$$\overline{B'A'} \cong \overline{BA}$$

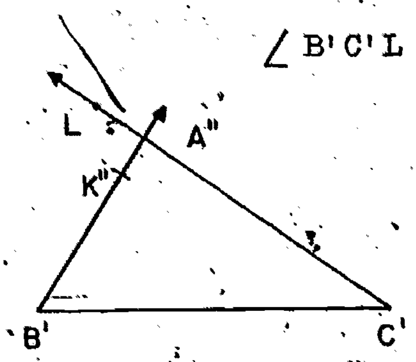
ó

(2) Construye el rayo $\overrightarrow{C'L}$ de manera que

$$\angle B'C'L \cong \angle C$$



Dibuja $\overline{A'C'}$.



Marca A''.

Ahora tienes un triángulo $A'B'C'$ y un triángulo $A''B'C'$. <u>En ambos casos han sido copiadas solamente tres partes del triángulo ABC.</u>

¿Es el triángulo $A'B'C' \cong ABC$? ¿Es el triángulo $A''B'C' \cong ABC$? Para obtener las respuestas a estas preguntas, debes medir los elementos del triángulo $A'B'C'$ y del triángulo $A''B'C'$ para ver si esos triángulos son congruentes con ABC.

Si tus construcciones y mediciones son correctas, hallarás que

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \quad \text{y} \quad \triangle ABC \cong \triangle A''B'C'$$

En (1), copiando dos lados del triángulo ABC y el ángulo comprendido, has podido construir un triángulo congruente con el triángulo ABC. En (2), copiando dos ángulos del triángulo ABC y el lado adyacente, has podido construir un triángulo congruente con el triángulo ABC.

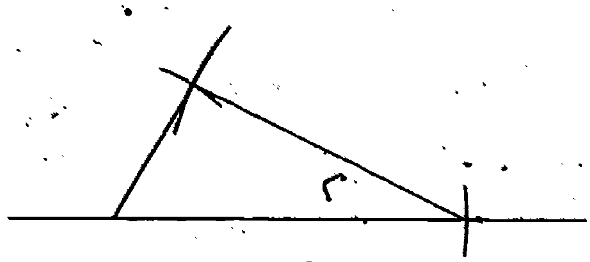
Aunque una construcción no es justificación suficiente para fundar una conclusión, tu experiencia, respaldada por la de tu profesor y la de tus condiscípulos, debe convencerte de las siguientes propiedades de dos triángulos congruentes:

Dos triángulos son congruentes si dos lados y el ángulo comprendido de un triángulo son respectivamente congruentes con dos lados y el ángulo comprendido del otro triángulo. Nos referiremos a esta propiedad como Propiedad L.A.L. (Lado, Angulo, Lado).

Dos triángulos son congruentes si dos ángulos y el lado adyacente a ambos en un triángulo son congruentes, respectivamente, con dos ángulos y el lado adyacente a ambos en el otro triángulo. Nos referiremos a esta propiedad como Propiedad A.L.A. (Angulo, Lado, Angulo).

Se te pide que aceptes sobre base experimental, estas dos propiedades y una tercera que se desarrollará en el problema 2. A medida que continúes, emplearás estas tres propiedades como método para mostrar otras.

2. Construye un triángulo empleando $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ como lados. Tu figura debe parecerse a la siguiente:



Debes recordar que ésta es la construcción del problema 2, Ejercicios 4-2b.

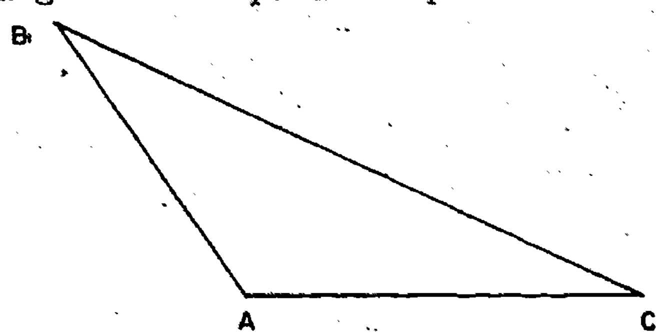
¿Es tu triángulo del mismo tamaño y forma que el triángulo ABC? Usa el limbo graduado o el compás y la regla para verificarlo.

Dos triángulos son congruentes si tres lados de un triángulo son congruentes, respectivamente, con tres lados del otro triángulo. Nos referiremos a ésta propiedad como Propiedad L.L.L. (Lado, Lado, Lado).

Observa que la congruencia establece una correspondencia biunívoca entre pares de lados de dos triángulos congruentes, porque hacemos corresponder los lados congruentes entre sí. Es decir, suponte que denominamos como a, b y c los lados de un triángulo y como r, s y t los lados de otro triángulo congruente con el primero. También suponte que a y r, b y s, así como también c y t, son respectivamente congruentes. Entonces podemos llamar correspondientes a todos estos lados: a y r, b y s, c y t. Para esta correspondencia biunívoca es cierto que si dos triángulos son congruentes, sus lados correspondientes son congruentes. Podemos establecer la misma clase de correspondencia para los ángulos: Si dos triángulos son congruentes, entonces sus ángulos correspondientes son congruentes. El recíproco del primero de estos dos enunciados es un enunciado verdadero, pero el recíproco del segundo no es un enunciado verdadero. Recordarás que el recíproco del primer enunciado es: si los lados correspondientes de dos triángulos son congruentes, los dos triángulos son congruentes (Propiedad L.L.L.). Ve el problema 2 de los ejercicios que siguen.

Ejercicios 4-4

Usa el triángulo ABC para los problemas 1 y 2.



1. (a) Construye un triángulo HJK tal que $\overline{HJ} \cong \overline{AB}$, $\overline{JK} \cong \overline{BC}$ y $\overline{HK} \cong \overline{AC}$.
   (b) Construye un triángulo HJK tal que $\angle H \cong \angle A$, $\angle K \cong \angle C$ y $\overline{HK} \cong \overline{AC}$.
   (c) Construye un triángulo HJK tal que $\overline{HK} \cong \overline{AC}$, $\overline{HJ} \cong \overline{AB}$ y $\angle H \cong \angle A$.
   (d) ¿Son congruentes con el triángulo ABC los triángulos que has construido en (a), (b) y (c)? ¿Por qué?
2. Construye un triángulo HJK que tenga $\angle J \cong \angle B$, $\angle H \cong \angle A$ y $\angle K \cong \angle C$, pero tal que ninguno de sus lados sea congruente con un lado del triángulo ABC. (Sugerencia: Toma un segmento $\overline{JH}$ que no sea congruente con ninguno de los lados del

triángulo ABC. Construye $\angle J$ y $\angle H$.)

(a) ¿Por qué no necesitamos construir $\angle K$?

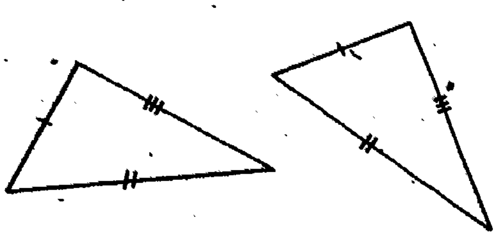
(b) ¿Son los triángulos ABC y HJK congruentes?

(c) ¿Por qué no establecemos una propiedad de la congruencia de triángulos como las de esta sección, a la que podríamos llamar Propiedad A.A.A. (Angulo, Angulo, Angulo)?

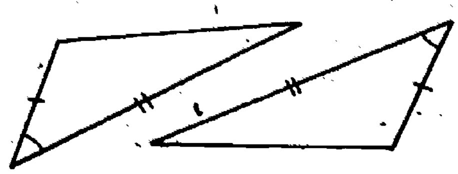
En los problemas 3 a 8, hay pares de triángulos. Los lados congruentes se indican por el número de trazos dibujados sobre los lados correspondientes de dos triángulos, y dos ángulos congruentes por el número de arcos de los ángulos correspondientes. Los dos triángulos de un par podrían aparecer como congruentes sin serlo.

Usa las Propiedades L.L.L., L.A.L. o A.L.A. para decidir qué pares de triángulos son congruentes y cuáles no. Señala la propiedad que usas para mostrar que los triángulos son congruentes, en el caso de que lo sean.

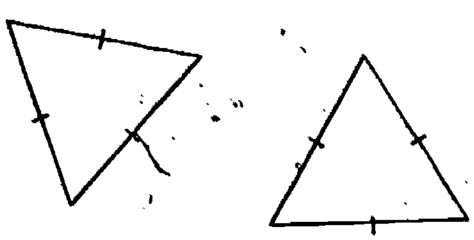
3.



4.

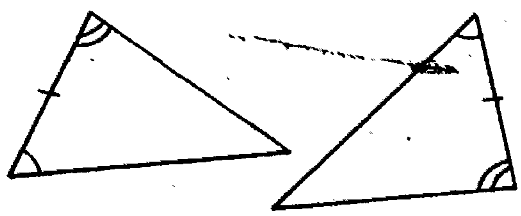


5.

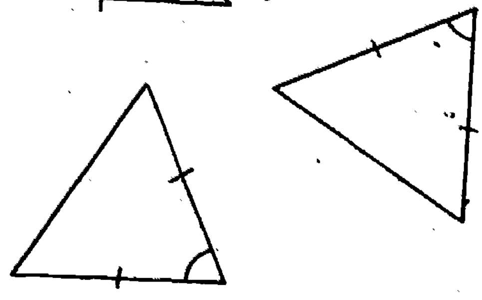


6.

7.



8.



Los problemas 9 a 17 se refieren a los elementos de los triángulos ABC y PQR. Usa las Propiedades L.L.L., L.A.L. o A.L.A. para averiguar qué pares de triángulos son congruentes y cuáles no.

9. $\angle A \cong \angle P$, $\angle B \cong \angle Q$, $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$

10. $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$, $\overline{AC} \cong \overline{PR}$, $\overline{BC} \cong \overline{QR}$

11. $\angle A \cong \angle B \cong \angle C \cong \angle P \cong \angle Q \cong \angle R$

12. $\angle C \cong \angle R$, $\angle B \cong \angle Q$, $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$

13. $\angle A \cong \angle P$, $\angle B \cong \angle Q$, $\overline{BC} \cong \overline{QR}$

14. $AB = 7$, $PQ = 7$, $m(\angle A) = 28$, $m(\angle P) = 28$, $CA = 10$, $RP = 10$

15. $AB = 3$, $BC = 4$, $CA = 5$, $QR = 4$, $PQ = 3$, $RP = 5$

16. $\angle A \cong \angle P$, $\angle B \cong \angle Q$, $\overline{AB} \cong \overline{QR}$

17. $\overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{BC}$, $\overline{PQ} \cong \overline{QR}$, $\angle P$ no es congruente con $\angle Q$.

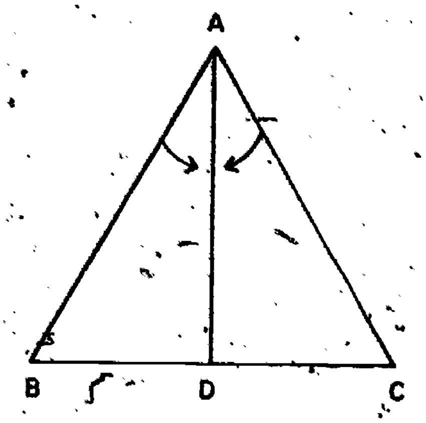
18. Si se dibujan dos triángulos en un mismo plano, en regiones opuestas de una recta, y son simétricos respecto de esa recta, ¿cómo puede superponerse un triángulo sobre el otro?

19. PROBLEMA DIFICIL. Un triángulo tiene 3 ángulos y 3 lados. Por las Propiedades L.L.L., L.A.L. y A.L.A., hemos visto cuándo dos triángulos son congruentes. En el problema 2 hemos visto que dos triángulos no tienen por qué ser congruentes si los 3 pares de ángulos (uno de cada triángulo en cada par) son congruentes. Por consiguiente, no podemos decir que si 3 de los 6 elementos (ángulos o lados) de un triángulo son congruentes con 3 de los 6 elementos de otro triángulo, los triángulos son congruentes. En los problemas 1 y 2 hemos considerado cuatro casos, pero hay dos casos más. ¿Cuáles son? Construye varios triángulos para ver si en tales casos, dos triángulos son necesariamente congruentes.

4-5. Para mostrar que dos triángulos son congruentes

Cuando queremos saber si dos triángulos son congruentes, podemos medir cada uno de los lados y cada uno de los ángulos. Esto requeriría 12 mediciones, 6 para cada triángulo. Una manera de abreviar el trabajo sería medir solamente dos ángulos de cada triángulo. Como la suma de las medidas de los ángulos de cada triángulo es 180, podríamos determinar el tercer ángulo en cada triángulo sin medirlo. Esto nos permitiría demostrar con 10 mediciones si los triángulos son congruentes o no. Por supuesto, también podríamos comprobar la congruencia "recortando y superponiendo", pero esto también requiere demasiado tiempo y a menudo es inconveniente.

Podemos disminuir el número de mediciones si aplicamos una de las tres propiedades de los triángulos congruentes. Por ejemplo, si halláramos que dos pares de lados (uno de cada triángulo en cada par) de dos triángulos son congruentes, tendríamos que medir el ángulo comprendido en cada triángulo. Si se encuentra que los ángulos comprendidos son congruentes, no se necesitan más mediciones. La Propiedad L.A.L. nos dice que los dos triángulos son congruentes.



En la figura, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$. Entonces, el triángulo es isósceles. $\angle DAB \cong \angle DAC$. Por lo tanto, $\overline{AD}$ biseca a $\angle BAC$. ¿Es D el punto medio de $\overline{BC}$? Parece como si lo fuera. Podríamos hacer mediciones para responder a esta pregunta, teniendo presente la naturaleza aproximada de las medidas. ¿Intersecará la bisectriz del ángulo determinado por los lados congruentes de cualquier triángulo isósceles al lado opuesto siempre en su punto medio?

Podemos responder a esta pregunta si hacemos uso de una de nuestras propiedades de los triángulos congruentes. Consideremos $\triangle DAB$ y $\triangle DAC$.

$\overline{AB} \cong \overline{AC}$ por construcción

$\angle DAB \cong \angle DAC$ $\overline{AD}$ está sobre la bisectriz de $\angle BAC$

$\overline{AD} \cong \overline{AD}$ $\overline{AD}$ está en ambos triángulos.

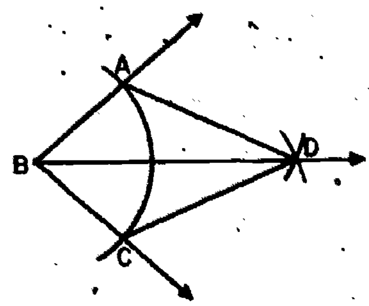
Por la Propiedad L.A.L., $\triangle DAB \cong \triangle DAC$, pues 2 lados y el ángulo comprendido de $\triangle DAB$ son congruentes con los correspondientes lados y el ángulo comprendido de $\triangle DAC$.

$BD = DC$, pues son lados correspondientes de triángulos congruentes. Por consiguiente, D es el punto medio de $\overline{BC}$. Si la Propiedad L.A.L. es cierta, podemos estar seguros de que:

La bisectriz del ángulo determinado por los lados congruentes de un triángulo isósceles interseca al tercer lado en su punto medio.

Ejercicios 4-5a

1. En la figura se indica la construcción de la bisectriz de $\angle ABC$. Se dibujan dos segmentos, $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$.

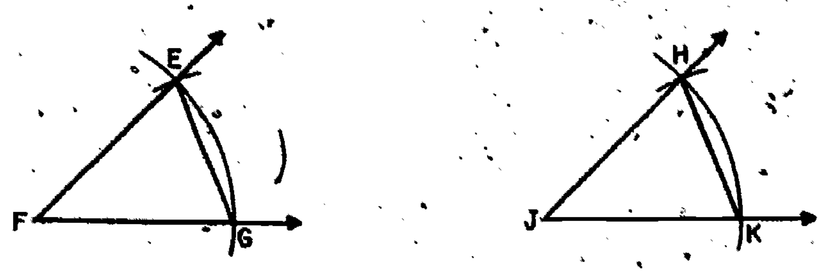


(a) ¿Qué elementos del triángulo ABD son congruentes con los correspondientes elementos del triángulo CBD, por construcción?

(b) ¿Es el triángulo ABD congruente con el triángulo CBD? ¿Por qué?

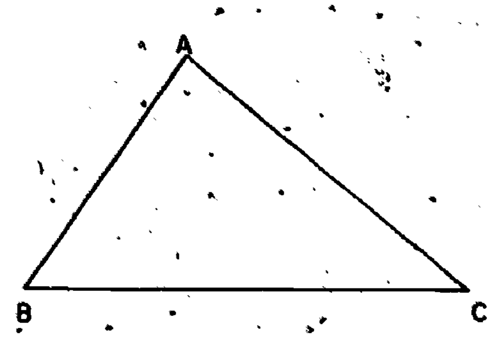
(c) ¿Es $\angle ABD$ congruente con $\angle CBD$? ¿Por qué?

2. En las próximas figuras, la construcción de $\angle$ HJK hace $\angle$ HJK $\cong$ $\angle$ EFG. Se dibujan los segmentos $\overline{EG}$ y $\overline{HK}$.

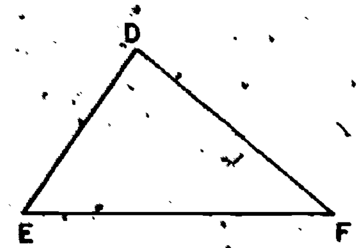


(a) ¿Qué elementos del triángulo EFG son congruentes por construcción, con los correspondientes elementos del triángulo HJK?
(b) ¿Es el triángulo EFG congruente con el triángulo HJK? ¿Por qué?
(c) ¿Es $\angle$ J congruente con $\angle$ F? ¿Por qué?

3. Emplea tu limbo graduado para determinar las medidas en grados de los tres ángulos de cada triángulo.

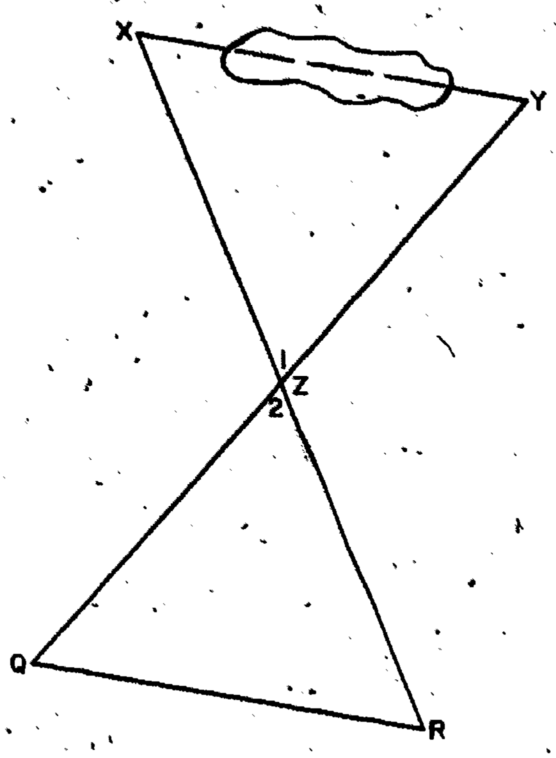


(a) ¿Hay algunos pares de ángulos congruentes? Si es así, enuméralos.
(b) ¿Podemos decir que los triángulos son congruentes? ¿Por qué?
(c) Supońte que el triángulo DEF ha sido construido de manera que $\angle$ A $\cong$ $\angle$ D y $\angle$ B $\cong$ $\angle$ E, y $\overline{ED}$ tiene la misma longitud que $\overline{AB}$. ¿Qué se podría afirmar respecto de los dos triángulos? ¿Por qué?



4. El señor Gómez desea medir la distancia que hay entre dos postes de los límites de su propiedad. Un macizo de árboles entre los dos postes (X e Y) hace imposible la medición

directa de la distancia XY. El señor Gómez elige el punto Z de manera que se pueda trazar una recta de X a Z y prolongarla si es necesario. El punto Z está también en una posición tal que el señor Gómez puede trazar una recta $\overleftrightarrow{YZ}$ y prolongarla tanto como sea necesario. Sabe que $\angle 1 \cong \angle 2$, pues son ángulos opuestos por el vértice. Prolonga $\overline{YZ}$ de manera que $\overline{QZ} \cong \overline{YZ}$, y $\overline{XZ}$ de manera que $\overline{XZ} \cong \overline{RZ}$.

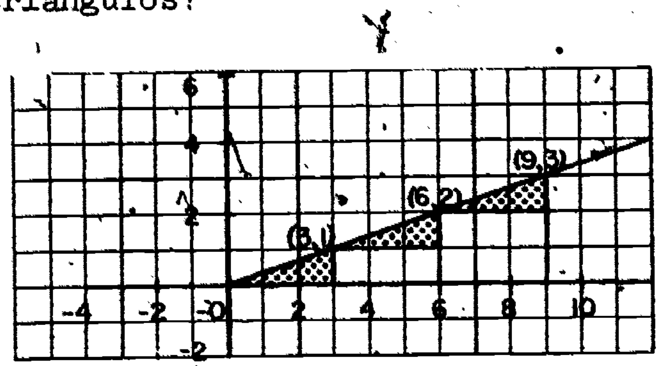


(a) ¿Son congruentes los triángulos XYZ y QZR? ¿Por qué?

(b) ¿Cómo puede determinar el señor Gómez la longitud de $\overline{XY}$?

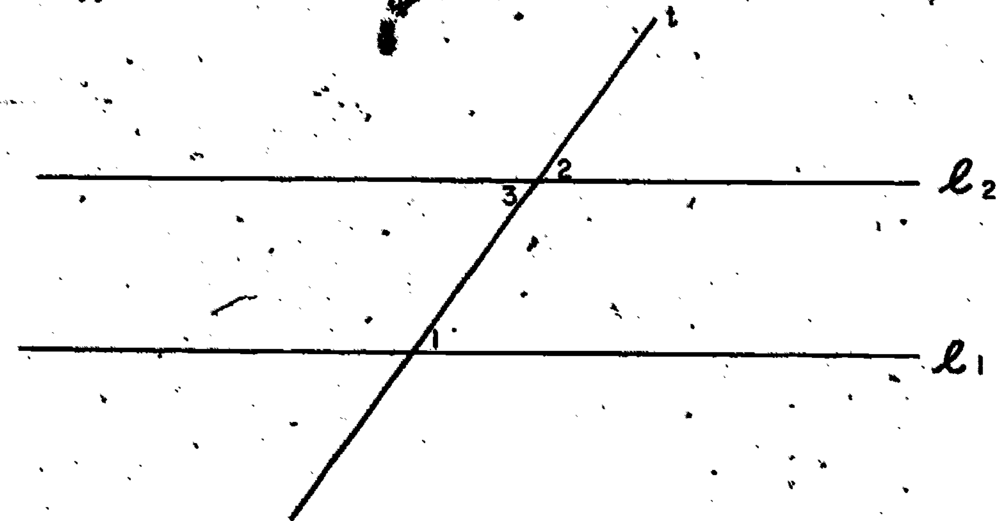
5. (a) ¿Son congruentes los triángulos sombreados en la figura que sigue?

(b) ¿Qué propiedades utilizas para probar la congruencia de esos triángulos?



Emplearemos nuevamente esta figura cuando estudiemos triángulos semejantes.

6. Las rectas ℓ_1 y ℓ_2 son rectas paralelas cortadas por la secante t.

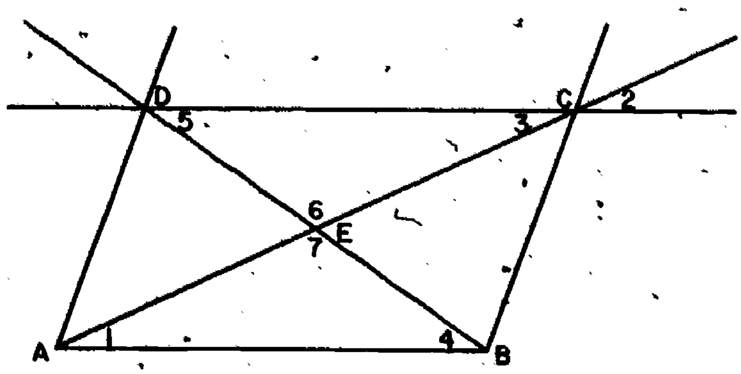


(a) ¿Qué sabes acerca de los ángulos 1 y 2?

(b) ¿Son los ángulos 2 y 3 congruentes? ¿Por qué?

(c) Muestra que $\angle 1 \cong \angle 3$.

7. En el paralelogramo ABCD las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se intersecan en E.

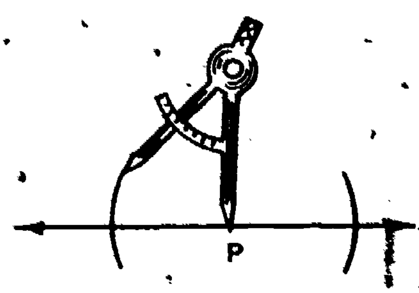


(a) ¿Es el ángulo 1 (en ΔABE) congruente con el ángulo 2?
(b) ¿Qué clase de ángulos son $\angle 2$ y $\angle 3$? ¿Son congruentes?
(c) ¿Qué diferencia hay entre los tamaños de los ángulos 1 y 3?
(d) Muestra que $\angle 6 \cong \angle 7$ y $\angle 5 \cong \angle 4$.
(e) Cuando dos triángulos tienen tres pares de ángulos congruentes, ¿son siempre congruentes esos triángulos? Si no es así, ¿qué más se necesita?
(f) ¿Es todo lado de ΔABE congruente con el lado correspondiente de ΔCDE?
(g) Muestra que las diagonales de un paralelogramo se bisecan mutuamente.

*8. Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, sus lados opuestos también son congruentes. Usa una propiedad de los triángulos congruentes para mostrar que este enunciado es verdadero. (Sugerencia: Un triángulo puede ser congruente consigo mismo. Muestra que $\Delta ABC \cong \Delta BAC$, donde $\angle A \cong \angle B$.)

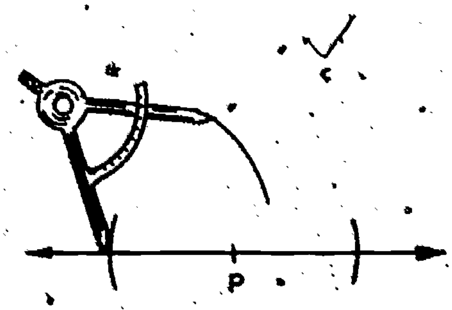
<u>Para trazar una perpendicular desde un punto situado en una recta</u>

Sigue los cuatro pasos de la construcción como se indica en las figuras, y construye una perpendicular desde un punto de una recta. Mide los ángulos en la figura que has dibujado para ver si la recta que has construido es realmente perpendicular.

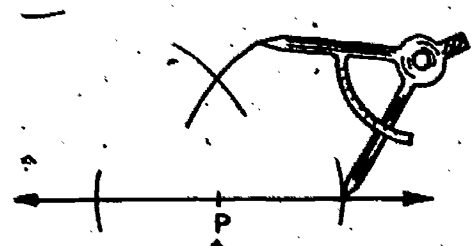


Si se dibujan los segmentos $\overline{GJ}$ y $\overline{HJ}$, se forman los triángulos GPJ y HPJ.

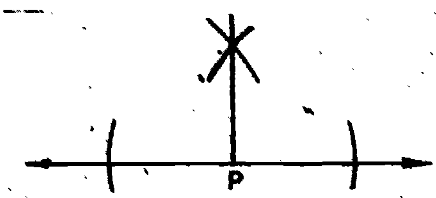
$\overline{GP} \cong \overline{HP}$	por construcción
$\overline{GJ} \cong \overline{HJ}$	por construcción
$\overline{PJ} \cong \overline{PJ}$	lado común a dos triángulos
$\triangle GPJ \cong \triangle HPJ$	Propiedad L.L.L.
$\angle GPJ \cong \angle HPJ$	ángulos correspondientes de dos triángulos congruentes

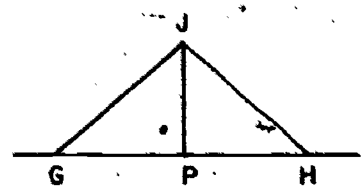


Si se coloca un limbo graduado a lo largo de $\overrightarrow{PH}$ con la marca de su vértice en P y su marca 0° sobre $\overrightarrow{PH}$, entonces la marca 180° estará sobre el rayo $\overrightarrow{PG}$. Esto significa que la suma de las medidas de los ángulos en P es 180 y, como esas medidas son iguales, cada una debe ser 90. Luego, los ángulos JPG y JPH son rectos.



Aprendiste ahora a construir la perpendicular a una recta por un punto de esa recta, viendo cómo "funciona" la construcción.



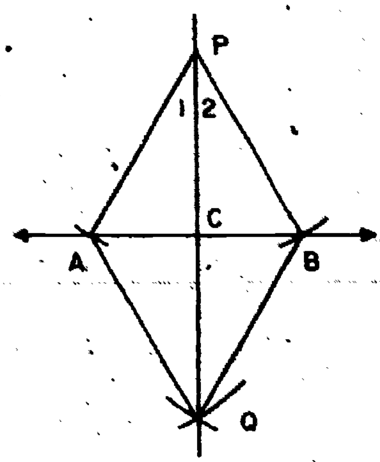


Ejercicios 4-5b

1. Dibuja un segmento de unas 4 pulgadas de largo, y luego construye perpendiculares al segmento en cada uno de sus extremos. (Sugerencia: Prolonga el segmento de recta cuando sea necesario.)
2. Construye una perpendicular a una recta por un punto que no está en la recta. (Sugerencia: Sigue los pasos de las

construcciones dadas en la página anterior.)

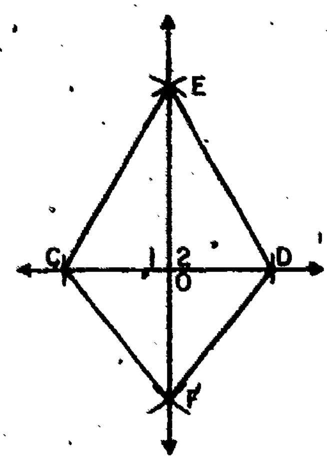
3. Tu construcción del problema 2 debe parecerse a la figura de la derecha. Marca con Q la intersección de los dos arcos y con C la intersección de $\overleftrightarrow{PQ}$ y $\overleftrightarrow{AB}$.



   (a) ¿Por qué es el triángulo APQ congruente con el triángulo BPQ?
   (b) ¿Por qué son congruentes los ángulos 1 y 2?
   (c) ¿Qué otros pares de ángulos son congruentes?

4. Empleando las propiedades de los triángulos congruentes, muestra en la figura del problema 3 que $\overleftrightarrow{PQ}$ es perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$. (Sugerencia: Usa la Propiedad L.A.L. para mostrar que el triángulo ACP es congruente con el triángulo BCP. Emplea un limbo graduado para hallar la suma de las medidas de $\angle$ ACP y $\angle$ BCP.)

5. En la figura se indica la construcción de la mediatriz del segmento $\overline{CD}$. Con frecuencia se emplea el mismo radio para los cuatro arcos. Sin embargo, basta trazar con radios iguales los arcos que se intersecan de un lado del segmento. Por consiguiente, los arcos dibujados desde C y D que se intersecan en E tienen radios iguales, y los dos arcos dibujados desde C y D que se intersecan en F tienen radios iguales. En la figura, $\overline{CE}$ no es congruente con $\overline{CF}$. Aplicando algunas de las propiedades acerca

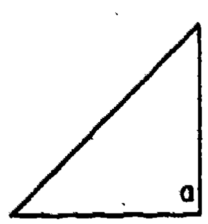


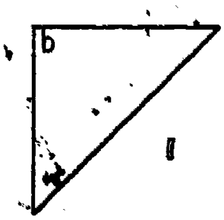
de los triángulos congruentes, muestra por qué $\overline{EF}$ biseca y es perpendicular a $\overline{CD}$.

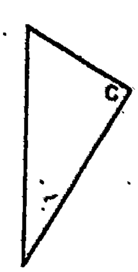
6. (a) ¿Cuántos pares de triángulos congruentes hay en la figura del problema 5? Haz una lista de los pares.
   (b) Haz una lista de los pares de lados correspondientes para cada par de triángulos congruentes.
   (c) Haz una lista de los pares de ángulos correspondientes para cada par de triángulos congruentes.
7. (a) Dibuja un triángulo. Luego traza las perpendiculares desde cada vértice al lado opuesto. Prolonga las perpendiculares hasta que se intersequen. (Puede ser necesario prolongar un lado del triángulo para que la perpendicular lo interseque.)
   (b) ¿Qué observas en esta figura?
8. ¿En qué se parecen y en qué se diferencian las construcciones para bisecar un segmento de recta (Sección 4-2) y para construir una perpendicular a un segmento de recta?

4-6. Triángulos rectángulos

Los triángulos pueden también clasificarse según las medidas de los ángulos. En el conjunto de triángulos que sigue, cada uno de ellos tiene un ángulo cuya medida en grados es 90. Los triángulos que tienen esta propiedad se llaman <u>triángulos rectángulos</u>.



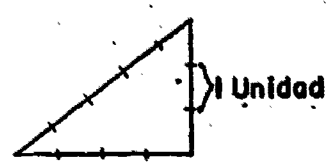




$m(\angle a)$ es 90. $m(\angle b)$ es 90. $m(\angle c)$ es 90.

Se dice que los antiguos egipcios usaban un triángulo rectángulo particular para construir esquinas "cuadradas". Este triángulo tiene lados cuyas longitudes son 3 unidades, 4 unidades y 5 unidades. Cuando se construye tal triángulo utilizando una cuerda bien tensa, el ángulo entre los dos lados más cortos es recto.

A pesar de que se piensa que los egipcios hacían uso de esta propiedad, fueron los griegos quienes demostraron las relaciones geométricas en que se basa. El filósofo y matemático griego Pitágoras, quien vivió alrededor del año 500 a. de J.C., se interesó por este problema. A Pitágoras se atribuye la demostración de la propiedad básica que estudiaremos en esta sección; esta propiedad se conoce aún por su nombre, la Propiedad pitagórica.



Se supone que Pitágoras observó un mosaico como el de la figura 4-6a. Se fijó que en él se pueden encontrar muchos triángulos de diferentes tamaños, pero observó también algo más: que si cada lado de un triángulo cualquiera se considera como lado de un cuadrado, la suma de las áreas de los dos cuadrados pequeños es la misma que el área del cuadrado grande. En la figura 4-6b, se han marcado con puntos dos triángulos de diferentes tamaños, y se han sombreado los cuadrados construidos sobre los lados de esos triángulos.

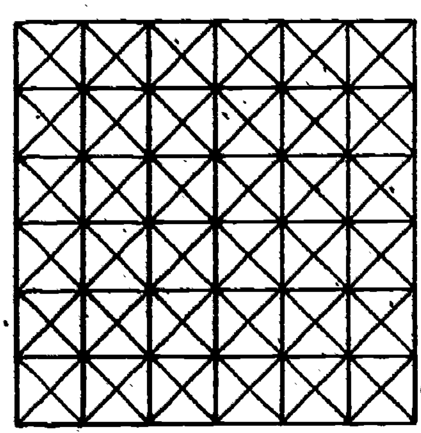


Figura 4-6a

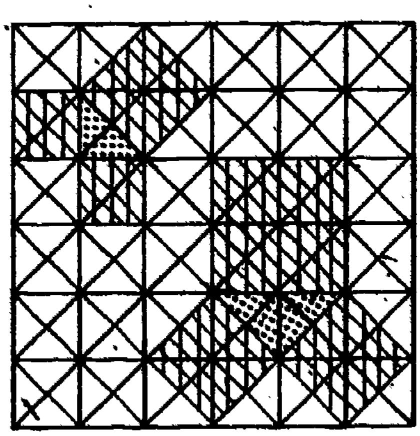
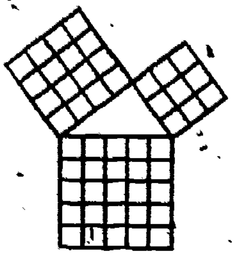


Figura 4-6b

Cuenta el número de triángulos más pequeños que contiene cada cuadrado sombreado. Para cada uno de los triángulos marcados con puntos, ¿qué diferencia hay entre el número de triángulos más pequeños contenidos en los dos cuadrados correspondientes a los lados más cortos del triángulo y el número de los triángulos más pequeños contenidos en el cuadrado correspondiente al lado más largo del triángulo? Si dibujas un mosaico como éste, hallarás que esto es cierto no solamente para los dos triángulos que hemos dado aquí, sino para triángulos aun más grandes del mosaico.

Pitágoras probablemente observó la misma relación en el triángulo de lados 3-4-5 unidades de longitud que usaban los egipcios desde hacía tiempo para construir ángulos rectos. Cada uno de los cuadraditos de la figura tiene el tamaño de una unidad



cuadrada. En los tres cuadrados hay 9, 16 y 25 cuadraditos. Observa que 9 + 16 = 25. Pitágoras pudo demostrar que en <u>cualquier triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa (lado más largo) es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los otros dos lados (llamados catetos)</u>. Este es el Teorema de Pitágoras o, como lo hemos llamado aquí, la Propiedad pitagórica.

Hasta donde hemos llegado, esta propiedad vale solamente para triángulos rectángulos muy especiales. Pero es verdadera para todos los triángulos rectángulos. Tal vez quieras tratar de demostrar la propiedad por ti mismo, estudiando la Sección 4-7.

<u>Ejercicios 4-6a</u>

1. Usando una regla y un limbo graduado, dibuja los siguientes triángulos:
   (a) Un triángulo de 30 grados y 60 grados.
   (b) Un triángulo de 45 grados y 45 grados.
   (c) Un triángulo de 70 grados y 20 grados.

2. Muestra para cada uno de los conjuntos que siguen que el cuadrado del primer número es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos números.

   (a) 5, 4, 3 (c) 25, 7, 24

   (b) 13, 5, 12 (d) 20, 16, 12

3. Dibuja un triángulo cuyos lados tengan las longitudes dadas en la parte (a) del problema 2. Usa el limbo graduado para mostrar que ese triángulo es rectángulo.

4. Dibuja triángulos rectángulos cuyos catetos (en centímetros) sean:

   (a) 1 y 2 (b) 4 y 5 (c) 2 y 3

   Mide, si es posible con la aproximación de una décima de centímetro, las longitudes de las hipotenusas de esos triángulos.

5. Usa la Propiedad pitagórica para hallar el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa de cada uno de los triángulos del problema 4.

En el último conjunto de ejercicios, has trabajado con lados de triángulos rectángulos y cuadrados construidos sobre esos lados. En el problema 4 has medido la longitud de la hipotenusa. La <u>hipotenusa</u> es el lado opuesto al ángulo recto. No es muy útil conocer el área de esos cuadrados, pero se puede hacer uso de la Propiedad pitagórica de muchas maneras si podemos servirnos de ella para hallar la longitud del tercer lado de un triángulo rectángulo cuando conocemos las longitudes de dos lados. En lenguaje matemático, la Propiedad pitagórica es $c^2 = a^2 + b^2$, donde c representa la medida de la hipotenusa, <u>y</u> a <u>y</u> b representan las medidas de los dos catetos. Las medidas de dos lados cualesquiera pueden ser sustituidas en la proposición numérica anterior, para obtener luego el tercer valor. Podemos emplear un triángulo conocido para mostrarlo. Si los dos catetos miden respectivamente 3 y 4 unidades, ¿cuál es el cuadrado de la hipotenusa?

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 3^2 + 4^2$$

$$c^2 = 9 + 16$$

$$c^2 = 25$$

Como c^2 es igual a 25, hallaremos c si podemos encontrar un número cuyo producto por sí mismo sea 25. Naturalmente, $5 \times 5 = 25$, entonces $c = 5$; 5 es la raíz cuadrada positiva de 25. Si un número es el producto de dos factores iguales, entonces cada factor es una <u>raíz cuadrada</u> del número. El símbolo para raíz cuadrada positiva es: $\sqrt{}$. El numeral se coloca debajo del signo; por ejemplo, $\sqrt{25} = 5$.

¿Cuánto es $\sqrt{9}$?; ¿ $\sqrt{16}$?; ¿ $\sqrt{36}$?; ¿ $\sqrt{30}$? Las tres primeras expresiones son fáciles de comprender, pues $3 \times 3 = 9$, $4 \times 4 = 16$ y $6 \times 6 = 36$, pero no hay ningún entero que pueda ser multiplicado por sí mismo para dar el producto 30. En realidad, ¡no hay ningún número racional cuyo cuadrado sea 30!

¿Puedes hallar un número que multiplicado por sí mismo dé un producto cercano a 30? Sí, $5 \times 5 = 25$, que es próximo a 30. ¿Cuánto es 6×6 ó 6^2? Esto nos dice que $\sqrt{30}$ es mayor que 5, pero menor que 6. Podríamos tratar de obtener una mayor aproximación elevando al cuadrado 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 y 5.5. Ahora, $(5.4)^2 = 29.16$ y $(5.5)^2 = 30.25$. Como 30.25 está más próximo a 30 que 29.16 podríamos suponer que $\sqrt{30}$ está más próximo de 5.5 que de 5.4. Sin embargo, necesitaríamos elevar al cuadrado 5.45 para obtener 29.7025 antes de poder decir que $\sqrt{30}$ es 5.5 con la aproximación de una décima.

Podrías estimar las raíces cuadradas de algunos números siguiendo este método o usando la tabla que está al final de esta sección.

Observa que en la tabla que está al final de esta sección, $\sqrt{30}$ es 5.477 con la aproximación de una milésima. Redondeada a las décimas, sería 5.5. Puedes ver cuán aproximada es tu estimación al número de la tabla.

La tabla da valores decimales aproximados (con la aproximación de una milésima) para las raíces cuadradas de los enteros de 1 a 100. Puedes también usar la tabla para hallar la raíz cuadrada de todos los números naturales hasta 10,000, que tengan raíces cuadradas racionales.

Ejercicios 4-6b

Cuando se usen valores aproximados en estos problemas, emplea el símbolo " $\approx$ " en los cálculos y en la respuesta.

1. Usa la tabla para hallar valores aproximados de:

   (a) $\sqrt{5}$ (c) $\sqrt{13}$ (e) $\sqrt{676}$

   (b) $\sqrt{41}$ (d) $\sqrt{92}$ (f) $\sqrt{5625}$

2. Usa la Propiedad pitagórica para hallar la longitud de la hipotenusa de cada uno de los siguientes triángulos:

   (a) La longitud de a es 1", la longitud de b es 2".
   (b) La longitud de a es 4', la longitud de b es 5'.
   (c) La longitud de a es 2", la longitud de b es 3".
   (d) La longitud de a es 5 yardas y la longitud de b es 6 yardas.
   (e) La longitud de a es 3 pies y la longitud de b es 9 pies.
   (f) La longitud de a es 1 unidad y la longitud de b es 3 unidades.

3. Algunas veces se conocen la hipotenusa y uno de los catetos. ¿Cómo puedes hallar la longitud del otro cateto? Usa como ejemplo este problema: La hipotenusa de un triángulo rectángulo tiene 13 pies de longitud y uno de los catetos 5 pies. Halla la longitud del otro cateto.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$13^2 = 5^2 + b^2$$

$$13^2 + {}^-(5^2) = b^2 \qquad \text{propiedad aditiva de la igualdad}$$

$$169 + {}^-(25) = b^2$$

$$144 = b^2$$

$$\sqrt{144} = \sqrt{b^2}$$

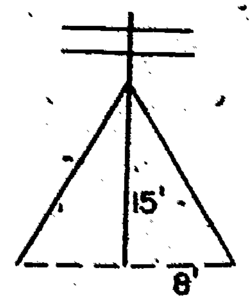
$$12 = b$$

El tercer lado tiene 12 pies de longitud. Halla el tercer lado de los triángulos rectángulos que siguen. Las medidas se dan en pies.

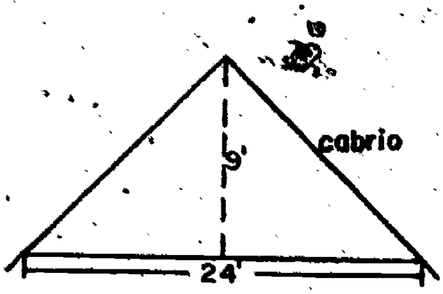
(a) $c = 15, b = 9$ (c) $c = 39, b = 15$

(b) $c = 26, a = 24$

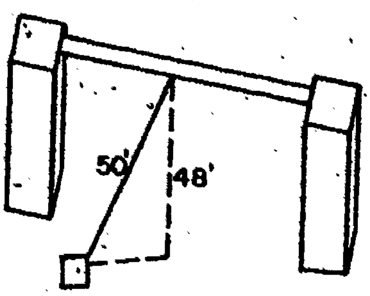
4. Un poste telefónico está sostenido mediante tensores como se indica en la figura. Cada cable se amarra a 15 pies sobre el suelo y se ancla a 8 pies de la base del poste. ¿Qué cantidad de cable se necesita para tender un tensor desde el punto de anclaje hasta el punto de amarre en el poste?



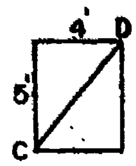
5. El techo de una casa está construido como se muestra en la figura. ¿De qué longitud debe ser cada viga si se extiende en voladizo 18 pulgadas más allá de la pared de la casa?



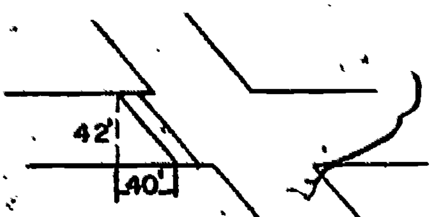
6. Un hotel construye, calle por medio, un anexo del edificio original. Al nivel del tercer piso, se construye un pasaje entre los dos edificios. Las vigas que sostienen este pasaje están a 48 pies sobre la calle. Un operario está colocando en su sitio esas piezas mediante una grúa cuyo brazo tiene 50 pies de longitud. ¿A qué distancia puede estar la grúa del punto que está directamente debajo de la viga, medida sobre la calle?



7. Una puerta de jardín tiene 4 pies de ancho y 5 pies de alto. ¿De qué largo debe ser la riostra que va de C a D?



8. Dos calles se intersecan según el ángulo que se muestra en la figura. Las calles tienen 42 pies de ancho. Se pintan dos

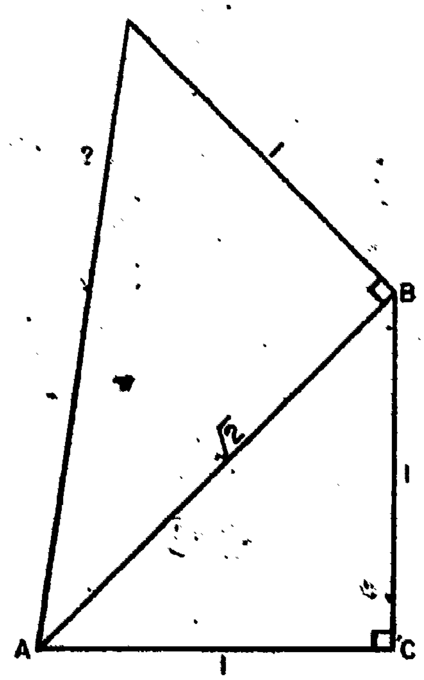


rectas para el cruce de peatones de manera que el pasaje tenga la misma dirección que la calle. Si el pie de la perpendicular bajada desde un extremo del pasaje al lado opuesto de la calle está a 40 pies del otro extremo del pasaje, ¿qué longitud tiene el pasaje?

9. ¿A qué distancia está el plato del bateador, respecto de la segunda base, en un juego de softball? La distancia entre bases es 60 pies, y el campo de softball es de forma cuadrada. Da tu respuesta con la aproximación de un pie.

*10. Dibuja un cuadrado cuyo lado tenga 1 unidad de longitud. ¿Cuál es la longitud de la diagonal? Compruébalo midiendo. Ahora dibuja un triángulo rectángulo con sus catetos de 1 unidad de longitud. ¿Cuál es la longitud de la hipotenusa?

*11. Ahora dibuja un triángulo rectángulo cuyos catetos tengan las longitudes siguientes: $\sqrt{2}$ unidades y 1 unidad, como se ve en la figura. La medida de la longitud de $\overline{AB}$, en la figura, es la raíz cuadrada de 2. ¿Cuál es la longitud de la hipotenusa de este nuevo triángulo?



TABLA

CUADRADOS Y RAICES CUADRADAS DE NUMEROS

Número	Cuadrado	Raíz cuadrada	Número	Cuadrado	Raíz cuadrada
1	1	1.000	36	1,296	6.000
2	4	1.414	37	1,369	6.083
3	9	1.732	38	1,444	6.164
4	16	2.000	39	1,521	6.245
5	25	2.236	40	1,600	6.325
6	36	2.449	41	1,681	6.403
7	49	2.646	42	1,764	6.481
8	64	2.828	43	1,849	6.557
9	81	3.000	44	1,936	6.633
10	100	3.162	45	2,025	6.708
11	121	3.317	46	2,116	6.782
12	144	3.464	47	2,209	6.856
13	169	3.606	48	2,304	6.928
14	196	3.742	49	2,401	7.000
15	225	3.873	50	2,500	7.071
16	256	4.000	51	2,601	7.141
17	289	4.123	52	2,704	7.211
18	324	4.243	53	2,809	7.280
19	361	4.359	54	2,916	7.348
20	400	4.472	55	3,025	7.416
21	441	4.583	56	3,136	7.483
22	484	4.690	57	3,249	7.550
23	529	4.796	58	3,364	7.616
24	576	4.899	59	3,481	7.681
25	625	5.000	60	3,600	7.746
26	676	5.099	61	3,721	7.810
27	729	5.196	62	3,844	7.874
28	784	5.292	63	3,969	7.937
29	841	5.385	64	4,096	8.000
30	900	5.477	65	4,225	8.062
31	961	5.568	66	4,356	8.124
32	1,024	5.657	67	4,489	8.185
33	1,089	5.745	68	4,624	8.246
34	1,156	5.831	69	4,761	8.307
35	1,225	5.916	70	4,900	8.367

Número	Cuadrado	Raíz cuadrada
71	5,041	8.426
72	5,184	8.485
73	5,329	8.544
74	5,476	8.602
75	5,625	8.660
76	5,776	8.718
77	5,929	8.775
78	6,084	8.832
79	6,241	8.888
80	6,400	8.944
81	6,561	9.000
82	6,724	9.055
83	6,889	9.110
84	7,056	9.165
85	7,225	9.220
86	7,396	9.274
87	7,569	9.327
88	7,744	9.381
89	7,921	9.434
90	8,100	9.487
91	8,281	9.539
92	8,464	9.592
93	8,649	9.644
94	8,836	9.695
95	9,025	9.747
96	9,216	9.798
97	9,409	9.849
98	9,604	9.899
99	9,801	9.950
100	10,000	10.000

4-7. *Una demostración de la Propiedad pitagórica.

Hay muchas demostraciones de esta propiedad. La que se da aquí no es la que empleó Pitágoras. Debes proceder a dibujar y recortar los cuadrados que se indican en la explicación.

Dibuja dos cuadrados del mismo tamaño. Divide el primero en dos cuadrados y dos rectángulos, como se indica aquí:

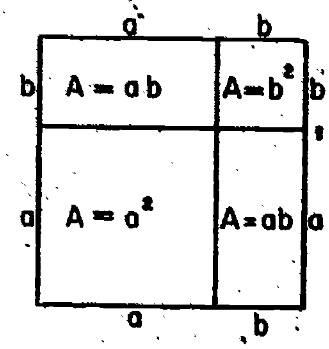


Figura 4-7a

Sea a la medida de cada uno de los lados del cuadrado más grande de la figura 4-7a, y sea b la medida de cada uno de los lados del cuadrado más pequeño. Observa las áreas de los cuadrados parciales y de los rectángulos.

Un cuadrado tiene un área de medida a^2.
El otro cuadrado tiene un área de medida b^2.
Cada rectángulo tiene un área de medida ab.

Como el área de la figura 4-7a es igual a la suma de las áreas de todas sus partes, la medida del área de la figura 4-7a es

$$a^2 + 2(ab) + b^2$$

Ejercicios de clase 4-7

1. Sean $a = 4$ y $b = 3$. Muestra que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ para estos números.

2. Sean $a = 2$ y $b = 6$, y comprueba la misma relación. Ahora veamos el segundo cuadrado. Emplea los mismos números, a y b, que se usaron en el primer cuadrado.

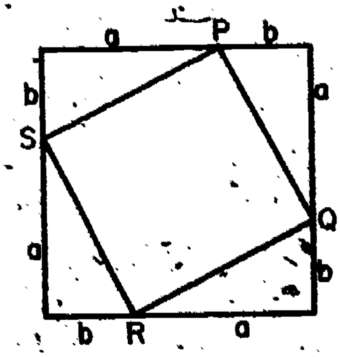


Figura 4-7b

Marca las longitudes como se muestra aquí y dibuja los segmentos $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RS}$ y $\overline{SP}$. El cuadrado grande queda dividido en cuatro triángulos y un cuadrilátero que aparece como cuadrado. La medida de cada área triangular es $\frac{1}{2}ab$. Hay cuatro triángulos congruentes, luego la suma de las medidas de las áreas de los cuatro triángulos es $4(\frac{1}{2}ab)$ ó $2ab$.

Si observas nuevamente la figura 4-7a, verás que $2ab$ es la medida del área de los dos rectángulos. Recorta los dos rectángulos del primer cuadrado. Corta luego cada rectángulo a lo largo de su diagonal. Comprueba que los cuatro triángulos que has recortado son congruentes con los que aparecen en el segundo cuadrado, figura 4-7b. Trata de seguir estos pasos.

$A_{cuadrado} = a^2 + 2ab + b^2$ de la figura 4-7a

$A_{cuadrado} = 4(\frac{1}{2}ab) + A_{PQRS}$ de la figura 4-7b

$= 2ab + A_{PQRS}$

Por consiguiente, $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + A_{PQRS}$. ¿Por qué?

$a^2 + b^2 = A_{PQRS}$. propiedad aditiva de la igualdad

Esto muestra que PQRS tiene un área cuya medida es $a^2 + b^2$ unidades, pero a^2 es la medida del área de uno de los cuadrados parciales de la primera figura y b^2 es la medida del área del otro cuadrado parcial. De esto resulta que el área de la figura que aparece en el centro del segundo cuadrado (figura 4-7b) es igual a la suma de las áreas de los dos cuadrados parciales.

Coloca el cuadrado, la medida de cuya área es a^2, a lo largo del lado de longitud a de un triángulo del segundo cuadrado. Coloca el cuadrado, la medida de cuya área es b^2, a lo largo del lado de longitud b del mismo triángulo. Las áreas de los cuadrados de los dos lados del triángulo igualan al área de la figura colocada en el centro de la figura 4-7b. Todo lo que necesitamos ahora es probar que esta figura es un cuadrado.

¿Cuáles son las propiedades de un cuadrado?

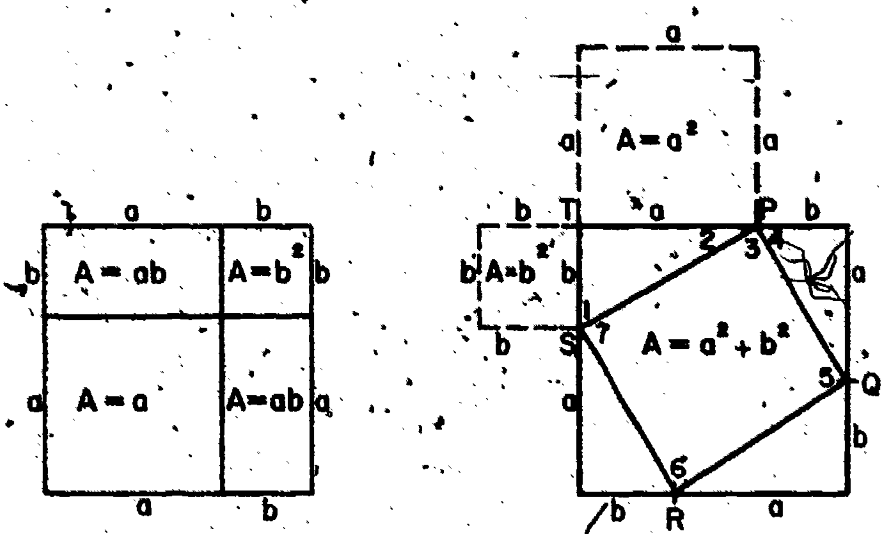
1. Los cuatro lados son congruentes.

2. Cada uno de sus ángulos mide 90°.

Si podemos demostrar estas dos condiciones para el cuadrilátero en la figura 4-7b, la Propiedad pitagórica quedará demostrada.

Como se ha establecido, los cuatro triángulos son congruentes, pues para cada par de ellos, son congruentes dos lados correspondientes y los ángulos determinados por esos lados. Resulta $PQ = QR = RS = SQ$, porque son medidas de segmentos correspondientes de triángulos congruentes.

Hasta aquí hemos mostrado que los cuadrados de la figura 4-7a son congruentes con los cuadrados construidos sobre los catetos de cualquiera de los triángulos de la figura 4-7b. También hemos mostrado que la suma de las áreas de esos cuadrados es igual al área de PQRS, y que PQRS tiene cuatro lados congruentes. Probemos ahora que sus ángulos son rectos.



(1) En ΔPST, $m(\angle 1) + m(\angle 2) = 90$ ¿Por qué?

(2) $m(\angle 1) = m(\angle 4)$ ¿Por qué?

(3) Por consiguiente, $m(\angle 4) + m(\angle 2) = 90$ ¿Por qué?

(4) y $m(\angle 2) + m(\angle 3) + m(\angle 4) = 180$ ¿Por qué?

(5) $m(\angle 3) + 90 = 180$ ¿Por qué?

(6) y $m(\angle 3) = 90$ ¿Por qué?

Podemos seguir el mismo tipo de razonamiento para mostrar que los ángulos 5, 6 y 7 también son rectos.

Se ha demostrado que PQRS es un cuadrado y que su área es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los otros dos lados de uno de los triángulos.

4-8. Cuadriláteros

En algunos cuadriláteros o partes de cuadriláteros se pueden hallar simetrías y congruencias. También es posible encontrar aplicaciones de la Propiedad pitagórica. En esta sección se dan problemas, referentes a cuadriláteros, que usan estas tres ideas. En los ejercicios, será conveniente recordar que:

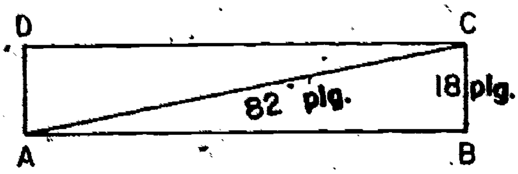
Un trapecio tiene solamente un par de lados paralelos.
Un paralelogramo tiene dos pares de lados paralelos.

Un paralelogramo que tiene cuatro ángulos rectos es un rectángulo.

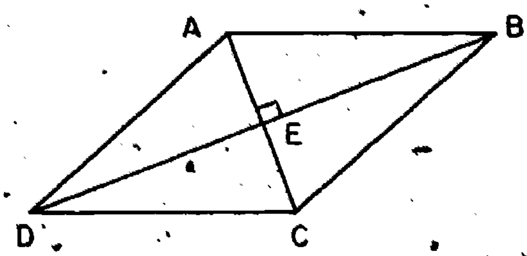
Un rectángulo que tiene cuatro lados congruentes es un cuadrado.

Ejercicios 4-8

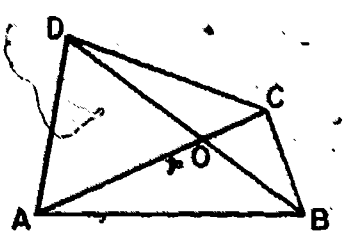
1. Una figura es simétrica respecto de una recta si tiene a esa recta como eje de simetría. ¿Cuáles de las figuras que se nombran a continuación son siempre simétricas respecto de una recta?
   (a) Trapecio.
   (b) Paralelogramo.
   (c) Rectángulo.
   (d) Cuadrado.
2. ¿Cuántos ejes de simetría tiene
   (a) un rectángulo?
   (b) un cuadrado?
3. ¿Es posible dibujar un ~~trapecio~~ que sea simétrico respecto de una recta? Si es así, dibuja uno.
4. ¿Es posible dibujar un paralelogramo que sea simétrico respecto de una recta? Si es así, dibuja uno.
5. Una diagonal de un cuadrilátero divide a la figura en dos triángulos.
   (a) ¿Cuál es la suma de las medidas de los ángulos de un cuadrilátero?
   (b) Nombra los cuadriláteros que se pueden dividir en triángulos congruentes por una diagonal.
6. El rectángulo ABCD tiene una diagonal de 82 pulgadas de longitud. Su ancho es 18 pulgadas. ¿Cuál es su largo?



7. Las diagonales de este paralelogramo son perpendiculares y sus lados tiene igual longitud. La diagonal menor tiene 14 pies de longitud y la diagonal mayor 48 pies. ¿Qué longitud tiene cada lado? (Sugerencia: Las diagonales de un paralelogramo se bisecan mutuamente.)

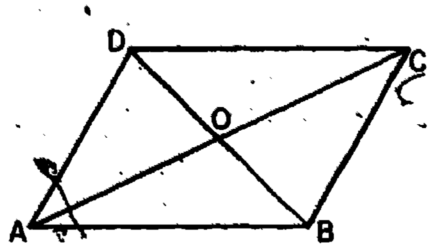


8. En cada una de las figuras que siguen se han trazado dos diagonales. Para cada una de las figuras A, B, C, D, E y F, contesta todas las preguntas. Responde a las preguntas (a) y (b) para cada figura antes de responder a las preguntas para la figura que le sigue.



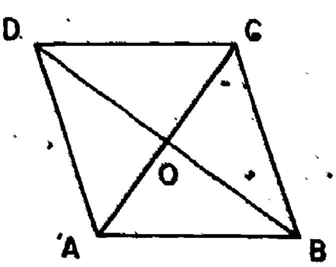
Cuadrilátero

Figura A



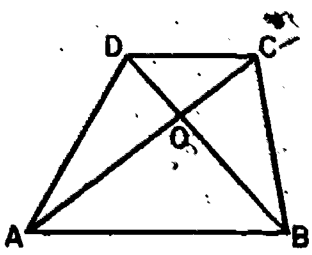
Paralelogramo

Figura B



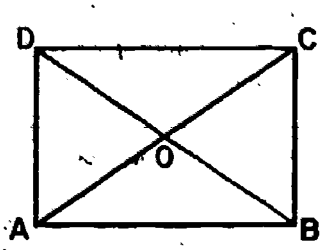
Paralelogramo con todos sus lados congruentes

Figura C



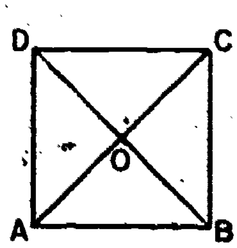
Trapecio

Figura D



Rectángulo

Figura E



Cuadrado

Figura F

(a) ¿Cuántos triángulos hay en la figura?

(b) ¿Te parece que algunos pares de triángulos son congruentes? Si es así, indica los triángulos de esos pares..

(c) Si hallas congruentes los triángulos ABC y CDA, en una o más figuras, toma una figura y muestra por qué son congruentes. Usa para esto las Propiedades L.L.L., L.A.L. ó A.L.A. Haz lo mismo si encuentras que los triángulos ABO y CDO son congruentes. Si encuentras que ambos conjuntos son congruentes en alguna figura, toma el par que quieras mostrar que es congruente.

4-9. Sólidos

Has dibujado figuras contenidas en un plano. Ahora dibujarás, sobre la superficie del papel, figuras del espacio. Has encontrado que es fácil dibujar una figura plana sobre la superficie del papel o la pizarra. Verás que no es tan fácil dibujar figuras de sólidos en el papel o en la pizarra. Esto se debe a que tienes que dibujar la figura sobre una superficie de manera que parezca tener profundidad. Con otras palabras, debes dibujar en el papel una figura que tenga la apariencia de una caja. Esto requiere el uso de la proyección, que probablemente has estudiado en tus clases de arte.

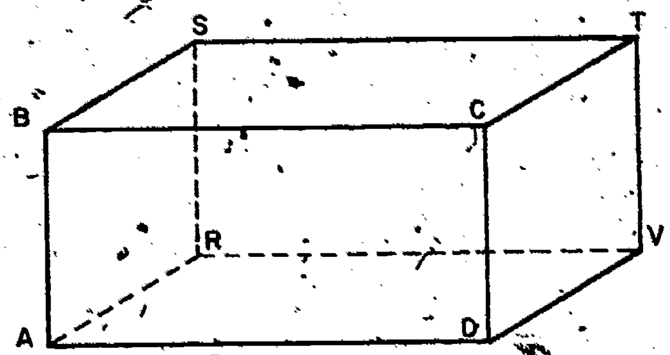
I. Prismas rectos

(1) Prismas rectos rectangulares (ortoedros). Un buen ejemplo de prisma rectangular es una caja de cereales. Una manera de diseñar una caja es la siguiente:

(a) Dibuja un rectángulo como el ABCD de la primera figura de la página siguiente.

(b) Ahora dibuja un segundo rectángulo RSTV en una posición semejante a la de la figura. Probablemente tendrás que usar segmentos punteados en algunas partes de esta figura.

(c) Dibuja $\overline{AR}$, $\overline{BS}$, $\overline{DV}$ y $\overline{CT}$.



Cuando miras un sólido, no puedes ver todas sus aristas, o caras, a menos que el sólido sea transparente. Por esta razón representamos las aristas que no son visibles, por segmentos punteados. Esto nos ayuda también a dar una perspectiva adecuada a la figura. Si prefieres, no dibujes los segmentos punteados.

(2) <u>Prismas</u> <u>rectos</u> <u>triangulares</u>. Ahora que has dibujado un prisma rectangular, el dibujo de un prisma triangular te será fácil.

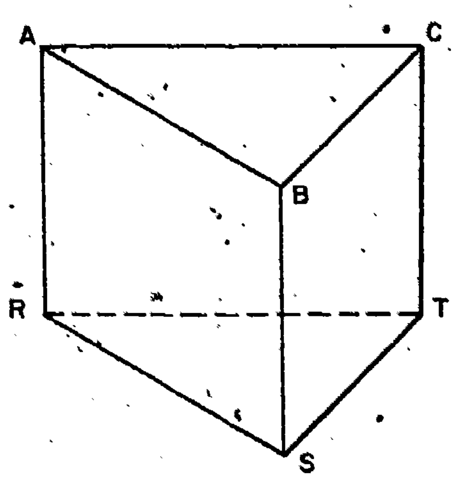
(a) Dibuja un triángulo cualquiera ABC.

(b) Por los puntos A y C traza rectas de igual longitud, perpendiculares a $\overline{AC}$. Marca los extremos de esas perpendiculares con R y T.

(c) Dibuja $\overline{BS}$ paralelo a $\overline{AR}$ y de igual longitud que $\overline{AR}$.

(d) Dibuja $\overline{RS}$ y $\overline{ST}$. Entonces $\overline{TR}$ puede ser dibujado con línea punteada.

(e) Compara tu figura con la siguiente:



(f) ¿Cuántas caras tiene este sólido?

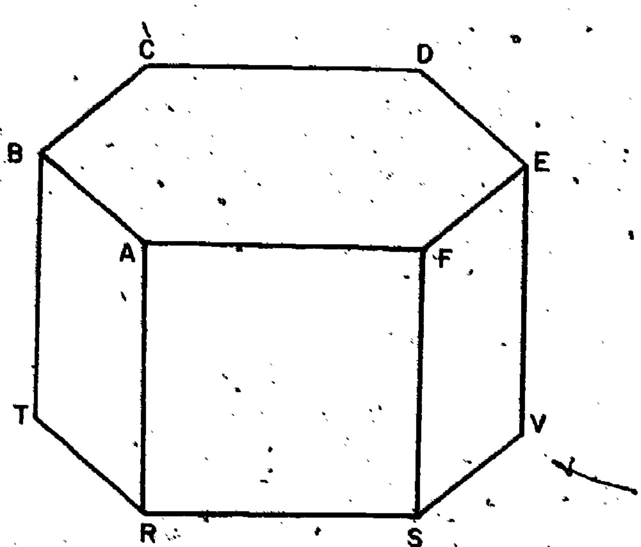
(g) ¿En qué se diferencian las caras?

(3) Prismas rectos hexagonales

(a) Dibuja un hexágono semejante al ABCDEF de la figura que se ve en esta página. No necesita ser un hexágono regular. Para obtener la perspectiva adecuada, puede ser necesario dibujar algunos lados más largos que otros. Esta es la manera como un hexágono aparecería si se lo mirara oblicuamente.

(b) En A y F dibuja perpendiculares a $\overline{AF}$ que tengan longitudes iguales. Marca con R y S sus extremos.

(c) Dibuja $\overline{BT}$ y $\overline{EV}$ paralelos a $\overline{AR}$ y de longitud igual a la de $\overline{AR}$. Si deseas, puedes dibujar líneas punteadas para representar las aristas que no son visibles.



(d) ¿Cuántas caras tiene este sólido?

(e) ¿En qué se diferencian las caras?

II. Pirámides

Probablemente ésta sea la primera vez que lees algo en un texto de matemáticas acerca de los sólidos llamados pirámides. Sin duda has oído hablar de las famosas pirámides de Egipto. Una pirámide tiene una base, que es una región formada por un polígono, y caras triangulares que se construyen uniendo los vértices del polígono con un punto que no está en el plano del mismo. En un capítulo posterior se da una descripción más exacta de las pirámides. Dibujemos una.

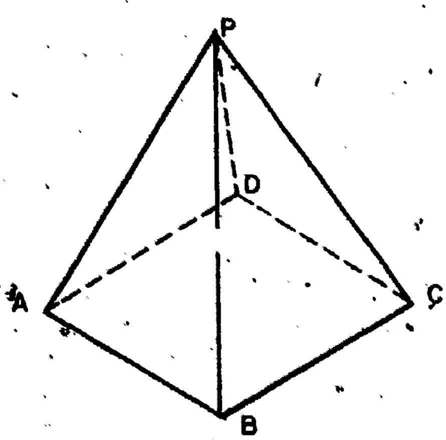
(a) En esta figura, representemos la base con un cuadrado, al fondo de la figura. Aun ahora debes tener cuidado de conseguir una perspectiva adecuada.

(b) En primer lugar, dibuja solamente dos lados del cuadrado, semejantes a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, como se muestra en la figura que sigue.

(c) Elige luego un punto P, directamente encima del punto B, y dibuja $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ y $\overline{PC}$.

(d) Traza después los segmentos punteados $\overline{AD}$, $\overline{CD}$ y $\overline{PD}$ que se intersequen en D, de manera que $\overline{AD}$ sea paralelo a $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ paralelo a $\overline{AB}$.

(e) ¿Cuántas caras tiene esta pirámide?



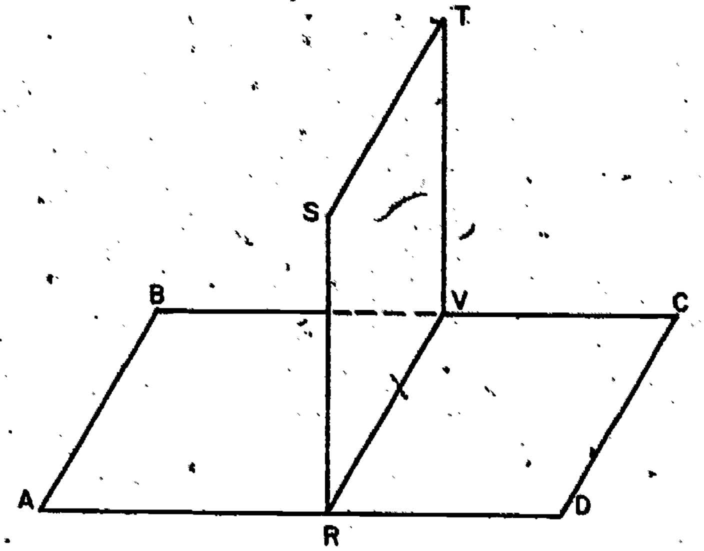
III. <u>Planos concurrentes</u>

Algunas veces es conveniente representar, sobre una superficie, la intersección de dos o más planos. Un ejemplo es la intersección de una pared y el piso del salón de tu clase. Ves otro caso igual cuando abres un libro y mantienes una página levantada. No es difícil dibujar tal representación, y te será cada vez más fácil con la práctica. Mira la primera figura de la próxima página y sigue las instrucciones para dibujar una figura por ti mismo.

(a) Dibuja un paralelogramo ABCD.

(b) Toma un punto R sobre $\overline{AD}$ y dibuja $\overline{RV}$ paralelo a $\overline{AB}$.

(c) Dibuja una perpendicular $\overline{VT}$ a $\overline{BC}$ y una perpendicular $\overline{RS}$ a $\overline{AD}$ de manera que $\overline{VT}$ y $\overline{RS}$ tengan igual longitud. Ahora dibuja $\overline{TS}$.



(d) ¿Qué clase de figura es RSTV?

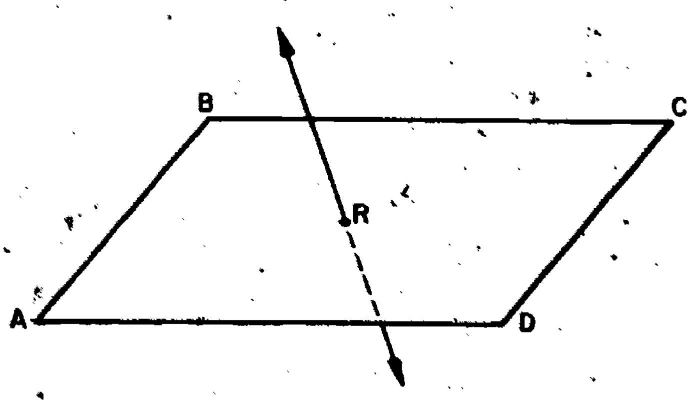
(e) No es necesario que, como se ha hecho anteriormente, $\overline{VT}$ y $\overline{RS}$ sean perpendiculares. Es deseable, sin embargo, que RSTV sea un paralelogramo.

IV. <u>Recta que interseca a un plano</u>

Este tipo de dibujo es también útil algunas veces. Se presenta a continuación.

(a) Dibuja un paralelogramo como ABCD.

(b) Toma un punto R sobre la superficie de ABCD.



(c) Ahora dibuja una recta que pase por R de manera que parezca atravesar la superficie de ABCD. Esto requerirá alguna práctica.

(d) Tendrás una figura mejor si la recta que pasa por R no es paralela a ningún lado del paralelogramo.

Ejercicios 4-9

1. Dibuja un prisma rectangular de manera que parezca más alto y delgado.
2. Dibuja un prisma triangular de manera que las caras triangulares parezcan triángulos rectángulos.
3. Dibuja un prisma pentagonal.
4. Dibuja un prisma rectangular de manera que parezca corto y grueso.
5. Dibuja una pirámide cuya base sea un cuadrilátero que no parezca ser un cuadrado, ni un rectángulo, ni un paralelogramo.
6. Dibuja una pirámide de base triangular.
7. Considera un prisma rectangular.
   (a) ¿En qué pares de caras hay rectángulos congruentes?
   *(b) Describe las posiciones de tres planos de simetría del prisma rectangular. Imagínate una caja de tizas y tres planos diferentes, cada uno de los cuales divide a la caja en dos partes congruentes entre sí. Revisa también el problema 8 de la Sección 4-3.
8. Considera un prisma triangular en el cual una cara es un triángulo equilátero.
   (a) Describe los triángulos o rectángulos congruentes.
   *(b) Indica cuatro planos de simetría.

*9. Responde a las preguntas del problema 8 si las caras triangulares de un prisma triangular son triángulos escalenos.

10. ¿Hay algunos triángulos o polígonos congruentes en las caras de una pirámide de base cuadrada?
11. Dibuja la figura de un libro en que se muestren dos páginas en ángulos diferentes.
12. Dibuja la figura de un blanco de tiro plano con una flecha que lo atraviese.

Capítulo 5

ERROR RELATIVO

5-1. Máximo error posible

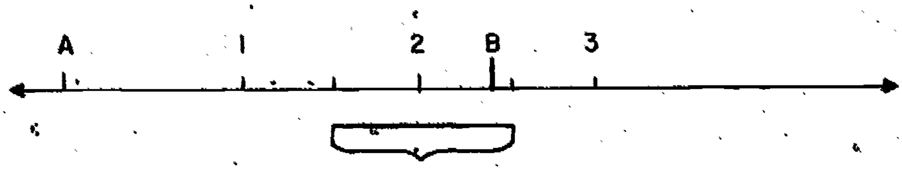
El proceso de medición juega un papel tan importante en la vida contemporánea que todo el mundo debería comprender claramente su naturaleza. Una buena parte de la aritmética que se enseña en la escuela elemental se relaciona con las mediciones. La mayor parte del trabajo preliminar sobre mediciones ha sido previsto para familiarizarte con las unidades corrientes de medida y con su uso, así como con las relaciones que hay entre esas medidas.

El concepto básico que se desarrollará en este capítulo se refiere a que el proceso de medición de un objeto conduce a un número que representa el número aproximado de unidades. Esto contrasta con el proceso de contar objetos separados, que conduce a un número exacto. Cuando el número de objetos separados se redondea o estima, el número resultante se trata como si fuera una aproximación en el mismo sentido que en las mediciones. Como las mediciones son aproximadas, los cálculos que se hacen con sus medidas, tales como sumas o productos, conducen a resultados que también son aproximados.

Cuando usas números para contar objetos separados, necesitas solamente los números naturales. En el proceso de contar estableces una correspondencia biunívoca entre los objetos que se cuentan y los elementos del conjunto de los números naturales. Cuando cuentas el número de personas en una clase sabes que el resultado será un número natural; habrá exactamente 11, pero no puede haber $11\frac{1}{4}$ ó $10\frac{1}{2}$. Si hay mucha gente, o si no estás seguro de haber contado correctamente, puedes decir que hay "alrededor de 300", redondeando el número con la aproximación de una centena. Sin embargo, si has contado cuidadosamente, puedes determinar exactamente el número de personas que hay en el salón.

Cuando mides algo, la situación es diferente. Al medir la longitud de un segmento de recta con una regla dividida en cuartos de pulgada, el extremo del segmento probablemente caerá entre dos marcas de cuarto de pulgada, y tienes que decidir qué marca parece más próxima. Aun cuando el extremo del segmento pareciera caer exactamente sobre una de las marcas de los cuartos de pulgada, si lo observaras a través de una lente de aumento probablemente podrías hallar una diferencia. Y si tomaras luego una regla con las pulgadas divididas en dieciseisavos, podría ocurrir que el extremo del segmento estuviera más cerca de una de las marcas en dieciseisavos que de una de las marcas en cuartos de pulgada.

En todo estudio de las mediciones supondremos que los instrumentos de medida se han empleado con propiedad. El uso impropio de los instrumentos puede ocurrir por ignorancia o por falta de cuidado. Estos errores pueden corregirse aprendiendo a usar el instrumento y observando cuidadosamente el proceso de medición. Pero, aun con los mejores instrumentos y técnicas, los científicos están de acuerdo en que las mediciones no pueden ser exactas, sino sólo aproximadas. Lo importante es saber justamente hasta qué punto la medición puede ser inexacta, y establecer claramente su posible inexactitud.



Mira la recta anterior, que representa una escala dividida en unidades de una pulgada, (no dibujadas a escala). El punto cero se ha marcado con A, y el punto B está entre las marcas de 2 y 3 pulgadas. Como B está claramente más próxima a la marca 2 pulgadas, podemos decir que la medición del segmento $\overline{AB}$ es 2 pulgadas. Sin embargo, cualquier punto que está a más de $1\frac{1}{2}$ pulgadas y a menos de $2\frac{1}{2}$ pulgadas de A, sería extremo de un segmento cuya longitud, con la aproximación de una pulgada, es también de 2 pulgadas. La marca por debajo de la recta muestra la extensión dentro de la cual puede caer el extremo de un segmento de recta de 2 pulgadas de longitud (con la aproximación de una pulgada). La longitud de tal segmento podría ser casi $\frac{1}{2}$ pulgada menos, o casi $\frac{1}{2}$ pulgada más, que 2 pulgadas. Por consiguiente, decimos que, cuando se mide un segmento de recta con la aproximación de una pulgada, el "máximo error posible" es $\frac{1}{2}$ pulgada. Esto no significa que has cometido un error (o que no lo has cometido). Simplemente significa que si mides con propiedad, con la aproximación de una pulgada, cualquier medición mayor que $1\frac{1}{2}$ pulgadas y menor que $2\frac{1}{2}$ pulgadas podrás decir que la longitud es de 2 pulgadas. En consecuencia, tales mediciones se suelen escribir como $(2 \pm \frac{1}{2})$ pulgadas. (El símbolo " $\pm$ " se lee "más o menos".) Con esto queremos decir que el mayor error posible en la medición es $\frac{1}{2}$ pulgada. Para decir esto de otra manera, la medición 2 pulgadas es correcta con la aproximación de una pulgada.

Si vemos un poste señalador de distancias que dice "Chicago, 73 millas", ¿qué unidad de medición y qué error posible debemos suponer? En realidad no lo sabemos, aunque una interpretación razonable sería que la distancia es correcta con la aproximación de una milla, y que probablemente el error no es mayor de $\frac{1}{2}$ milla.

¿Pero qué podemos decir de un poste señalador que indica una distancia de 1 milla hasta el siguiente? ¿Debemos suponer que la unidad es 1 milla y que esta milla medida indica una distancia que está entre 0.5 de milla y 1.5 millas? Es claro que ésta no es una interpretación razonable en ese caso, pues esperamos que esta medición sea mucho más precisa.

Para establecer cuál es el máximo error posible en una medición, necesitamos saber cómo se ha hecho la medición y cuál es la exactitud del instrumento de medida que se ha utilizado. Ordinariamente no conocemos todos estos datos. En realidad, cuando alguien dice que un objeto "tiene 2 pulgadas de longitud" o "la distancia es 1 milla", no sabemos exactamente lo que significa. Por lo general, no nos importa saber si una medición de 2 pulgadas es correcta con $\frac{1}{16}$ de pulgada o con $\frac{1}{32}$ de pulgada de aproximación, o que la medición de distancias es correcta en 0.1 ó 0.01 de milla. Algunas veces, sin embargo, <u>es</u> importante indicar cuál puede ser el error. En el trabajo científico y técnico se establece específicamente el máximo error posible. Por ejemplo, una longitud se daría como $(2 \pm \frac{1}{16})$ pulgadas o posiblemente (4 ± 0.005) pulgadas, y no simplemente como 2 ó 4 pulgadas.

Algunas veces se emplea el término "tolerancia" en los negocios y la industria. Con <u>tolerancia</u> designamos <u>el máximo error</u>

posible que se permite. La tolerancia puede ser establecida por la persona que compra cierto producto manufacturado o por el funcionamiento de una máquina. Por ejemplo, un fabricante de automóviles debe especificar que los cilindros de una máquina deben tener un diámetro de 5 pulgadas con una tolerancia de una milésima de pulgada. Esto significa que el diámetro no puede variar más de 0.001 de pulgada respecto de las 5 pulgadas; las dimensiones estarían dadas por (5 ± 0.001) pulgadas. Por otra parte, un fabricante de bombas hidráulicas puede exigir una tolerancia diferente de 0.001 de pulgada. Las leyes especifican con frecuencia la tolerancia para los instrumentos de uso comercial, como las balanzas para medición de pesos. Se permite que las mediciones de las balanzas varíen dentro de ciertos límites. Algunas veces se deciden casos judiciales sobre la base de las tolerancias permisibles en la calibración de los taxímetros de la policía.

Ejercicios de clase 5-1

1. Cuando mides con la aproximación de $\frac{1}{4}$ de pulgada, ¿cuál es el máximo error posible?
2. Una vara de un metro se divide en centímetros y décimas de centímetro (milímetros). Se ha medido un segmento de recta con esa escala y se ha obtenido 3.7 centímetros.
   (a) ¿Cuál es la unidad de medición?
   (b) La medida es $(3.7 \pm ?)$ centímetros.
   (c) ¿Cuál es el máximo error posible? Da el resultado en centímetros y en milímetros.
3. Los científicos miden con frecuencia con la aproximación de $\frac{1}{100}$ de centímetro. El máximo error posible para tal unidad es ______ centímetros o ______ milímetros.
4. ¿Qué parte fraccionaria de la unidad usada es siempre el máximo error posible de una medición?
5. Para una placa de metal de 0.350 de pulgada de espesor se especifica una tolerancia de 0.0005 de pulgada. El espesor permisible para la placa estará entre ______ pulgadas y ______ pulgadas.

5-2. Precisión y cifras significativas

Considera las dos mediciones, $10\frac{1}{8}$ pulgadas y $12\frac{1}{2}$ pulgadas. Tal como se usan ordinariamente, estas mediciones no indican qué unidad de medición se ha usado. Supongamos que la unidad de la primera medición es $\frac{1}{8}$ de pulgada, y que la unidad de la segunda medición es $\frac{1}{2}$ pulgada. Entonces decimos que la primera medición es más precisa que la segunda, o que tiene mayor precisión. Observa que la precisión de una medición depende de la menor unidad usada en esa medición. El máximo error posible de la primera medición es $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{8}$ de pulgada, es decir, $\frac{1}{16}$ de pulgada, y el de la segunda es $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$ pulgada, es decir, $\frac{1}{4}$ de pulgada. El máximo error posible es menor para la primera medición que para la segunda. Entonces, la más precisa de dos mediciones es la que se efectúa con la menor unidad, y para la cual el máximo error posible es, por consiguiente, el menor.

Para resumir: El máximo error posible de una medición es la mitad de la menor unidad de medida empleada en la medición. La más precisa de dos mediciones es aquella para la cual el máximo error posible es el menor.

Por ejemplo, una medición con una escala métrica puede emplear las divisiones (unidades) en centímetros y en milímetros. Una medición de 37.6 centímetros hecha con la aproximación de 0.1 de centímetro (o con la aproximación de 1 milímetro) tiene un máximo error posible de $\frac{1}{2}$(1 milímetro) ó $\frac{1}{2}$(0.1 cm.) = 0.05 cm. Esto indica que la longitud real está entre (37.6 - 0.05) centímetros y (37.6 + 0.05) centímetros. Indicamos estas limitaciones escribiendo 37.6 ± 0.05. Esta es una manera conveniente de dar dos datos en uno, empleando el símbolo $\pm$.

Es muy importante que las mediciones se establezcan de manera que muestren claramente su precisión. Cuando usamos el signo $\pm$ no hay duda acerca de su significado. Otra manera de indicar claramente lo que queremos decir es hacer ciertos convenios sobre la escritura de un número en forma decimal—la forma que ocurre más frecuentemente en las mediciones científicas y técnicas. Cuando escribimos que al medirse una longitud se ha obtenido 17.62 pulgadas, entendemos que la medición se ha hecho con un error no mayor que 0.005 de pulgada. Entonces la medida 17.62

es correcta con la aproximación de la segunda cifra decimal a la derecha del punto decimal. En la notación $\pm$ esto sería equivalente a escribir (17.62 ± 0.005) pulgadas. Con este convenio cada uno de los cuatro dígitos de 17.62 sirve para un propósito real, o es "significativo".

En medidas como 1,462, 3.1 y 0.29637 se entiende que todas las cifras son significativas. Pero en numerales como 0.008 los tres ceros sirven solamente para fijar el punto decimal. En este caso decimos solamente que 8 es una cifra significativa.

En el numeral 2.008, los cuatro dígitos (2, 0, 0 y 8) son cifras significativas. En un numeral como 0.0207 los dos primeros ceros no son cifras significativas, pero el tercero sí lo es. Luego, 0.0207 tiene tres cifras significativas (2, 0 y 7).

Cuando escribimos 2,960 pies ó 93,000,000 de millas no está claro si los ceros son cifras significativas. Convendremos en que no son cifras significativas, pues sirvan para fijar la posición del punto decimal. Entonces 2,960 pies tiene tres cifras significativas (2, 9 y 6) en su medida. La medición es precisa con la aproximación de 10 pies y el máximo error posible es 5 pies.

Cuando queramos que algunos de los ceros del final de un numeral como 28,000 ó 2,960 sean significativos, convendremos en indicar el último cero que es significativo. Entonces $2{,}96\underline{0}$ pies indica una medición correcta con la aproximación de un pie. La medida tiene cuatro cifras significativas (2, 9, 6 y 0). La medición $93{,}\underline{0}00{,}000$ de millas es correcta con la aproximación de 100,000 millas. El numeral tiene tres cifras significativas (9, 3 y 0).

<u>Definición</u>. Un dígito en un numeral decimal es una "cifra significativa" si sirve para otros propósitos que no sean simplemente localizar el punto decimal.

Algunos otros ejemplos son los siguientes:

Numeral	Cifras significativas (en orden)
39,060	3, 9, 0, 6
73.40	7, 3, 4, 0
692	6, 9, 2

0.00523	5, 2, 3
8.0057	8, 0, 0, 5, 7

En 39,060, el 0 que está entre 9 y 6 es significativo, pero el otro 0 no lo es, pues sirve simplemente para localizar el punto decimal (sobrentendido). En el numeral 73.40, el 0 es significativo, pues no se ha escrito exclusivamente para localizar el punto decimal. En 0.00523, todos los ceros se emplean para localizar el punto decimal. Entendemos que el cero del extremo izquierdo hasta se puede omitir, y si se escribe es solamente para mayor claridad en la indicación del punto decimal y en la lectura del número.

Convenimos en que cuando se escribe un número en notación científica, todos los dígitos del primer factor son significativos; entonces,

$$73{,}000 \text{ pies} = 7.3 \times 10^4 \text{ pies}$$
$$73{,}\underline{0}00 \text{ pies} = 7.30 \times 10^4 \text{ pies}$$
$$73{,}00\underline{0} \text{ pies} = 7.3000 \times 10^4 \text{ pies}$$

También, la medición 2.99776×10^{10} cm./seg., para la velocidad de la luz, tiene 6 cifras significativas; la medición 2.57×10^{-9} centímetros para el radio del átomo de hidrógeno tiene 3 cifras significativas; la medición para la deuda nacional en 1957, 2.8×10^{11} dólares tiene 2 dígitos significativos; 4.800×10^8 tiene 4 cifras significativas. En el último caso, los dos últimos ceros son significativos. Si no lo fuesen, el número debería escribirse como 4.8×10^8. Una de las principales ventajas de la notación científica es precisamente la posibilidad de indicar las cifras significativas.

Ejercicios 5-2

1. Suponte que mides un segmento con la aproximación de una centésima de pulgada. ¿Cuál de las siguientes expresiones representará mejor la medición?

   3.2 plg. 3.20 plg. 3.200 plg.

2. Suponte que mides con la aproximación de una décima de pulgada. ¿Cuál de las siguientes expresiones puedes usar para dar tu resultado?

   4 plg. 4.0 plg. 4.00 plg. (4.0 ± 0.05) plg.

3. Indica qué medición de cada par es más precisa.
   (a) 5.2 pies, $(2\frac{1}{4} \pm \frac{1}{8})$ pies
   (b) 0.68 pie, (23.5 ± 0.05) pies
   (c) 0.235 plg., 0.146 plg.
4. ¿Cuál es tu edad con la aproximación de un año? Es decir, la edad que tienes en tu cumpleaños más próximo, dada con un número redondo de años. Los alumnos que responden "13 años" deben tener entre ______ y $13\frac{1}{2}$ años de edad.
5. (a) Indica el valor de posición de la última cifra significativa para cada una de las mediciones que se dan a continuación:
   (1) 52,700 pies
   (2) 5,270 pies
   (3) 52,700 pies
   (4) 52.7 pies
   (5) 0.5270 pie
   (6) 527.0 pies

   (b) Indica el máximo error posible de las mediciones en (a).
6. (a) ¿Cuál de las mediciones del problema 5 es la más precisa?
   (b) ¿Cuál es la menos precisa?
   (c) ¿Hay algún par de mediciones que tienen la misma precisión?
7. Subrayando un cero, muestra la precisión de las siguientes mediciones:
   (a) 4,200 pies, medidos con la aproximación de un pie.
   (b) 23,000 millas, medidas con la aproximación de un centenar de millas.
   (c) 48,000,000 de personas, contadas con la aproximación de una decena de millar.
8. Indica el número de cifras significativas de cada medición.
   (a) 520 pies
   (b) 32.46 plg.
   (c) 0.002 plg.
   (d) 403.6 pies
   (e) 25,800 pies
   (f) 0.0015 plg.
   (g) 38.90 pies
   (h) 0.0603 plg.
9. ¿Cuántas cifras significativas hay en cada uno de los siguientes numerales?
   (a) 4.700×10^{5}
   (b) 4.700×10^{4}
   (c) 4.7×10^{15}
   (d) 6.70×10^{-4}
   (e) 4.7000×10
   (f) 2.8×10^{9}

5-3. Error relativo, exactitud y porcentaje de error

Aunque dos mediciones se pueden efectuar con la misma precisión (es decir, con la misma unidad de medida), y por consiguiente con el mismo máximo error posible, este error es más importante en algunos casos que en otros. Un error de $\frac{1}{2}$ pulgada al medir tu estatura no sería muy notable, pero un error de $\frac{1}{2}$ pulgada al medir la longitud de la nariz sería muy notable. Podemos obtener una medida de la importancia del máximo error posible comparándolo con la medición. Considera las siguientes mediciones y sus errores máximos posibles:

$$4 \text{ plg.} \pm 0.5 \text{ plg.} \qquad 58 \text{ plg.} \pm 0.5 \text{ plg.}$$

Como se han efectuado ambas mediciones con la aproximación de una pulgada, el máximo error posible es en cada caso 0.5 de pulgada. Si dividimos la medida del máximo error posible por el número de unidades de la medición, obtenemos los resultados que se indican más abajo. (Observa que las medidas son números, pero las mediciones no. Utilizaremos la palabra "medida" para referirnos al número de unidades de una medición.)

$$\frac{0.5}{4} = \frac{5}{40} = 0.125$$

$$\frac{0.5}{58} = \frac{5}{580} \approx 0.0086$$

Los cocientes 0.125 y 0.0086 se llaman errores relativos. Se define el error relativo de una medición como el cociente de la medida del máximo error posible por la medida.

$$\text{Error relativo} = \frac{\text{medida del máximo error posible}}{\text{la medida}}$$

El porcentaje de error es el error relativo expresado como porcentaje. En los dos ejemplos anteriores, los errores relativos expresados como porcentajes son 12.5% y 0.86%. Cuando se escriben de esta manera se les llama porcentajes de error.

La medición con un error relativo de 0.0086 (0.86%) es más exacta que la medición con un error relativo de 0.125 (12.5%). Por definición, una medición con menor error relativo se dice que es más exacta que una con mayor error relativo.

Los términos exactitud y precisión se emplean en el trabajo industrial y científico con significado muy particular, aun cuando con frecuencia se les usa sin cuidado y en la vida diaria son sinónimos. La precisión depende del tamaño de la unidad de medida, y es el doble del máximo error posible, mientras que la exactitud es el error relativo o porcentaje de error. Por ejemplo, 12.5 libras y 360.7 libras son mediciones igualmente precisas, es decir, precisas en menos de 0.1 de libra. (El máximo error posible en este caso es 0.05 de libra.) Sin embargo, las dos mediciones no tienen la misma exactitud. La segunda medición es más exacta, como puedes verificarlo calculando en cada caso los errores relativos y comparándolos.

Un astrónomo, por ejemplo, al medir la distancia a una galaxia puede fácilmente cometer un error de un trillón de millas (1,000,000,000,000 mi.) y con todo ser mucho más exacto que un mecánico que mide el diámetro de un eje de acero con la aproximación de 0.001 de pulgada.

Por otra parte, una medición dada como 3.5 pulgadas y otra como 3.5 pies son igualmente exactas, pero la primera medición es probablemente más precisa. ¿Por qué?

Supone que tenemos dos mediciones de una misma cantidad, por ejemplo 3.5 pulgadas y 3.500 pulgadas. En la primera medida hay dos cifras significativas y en la segunda cuatro. ¿Qué nos dice el número de cifras significativas de la medida respecto de la exactitud (error relativo) de la medición? Es claro que cuanto mayor sea el número de cifras significativas de una medida, mayor es la exactitud de esa medida. Para ilustrarlo, escribamos lo siguiente:

3.5 plg.	3.500 plg.
Dos cifras significativas	Cuatro cifras significativas
$\{3, 5\}$	$\{3, 5, 0, 0\}$
Error relativo $= \frac{0.05}{3.5}$	Error relativo $= \frac{0.0005}{3.500}$
ó	ó
Exactitud ≈ 0.01	Exactitud ≈ 0.0001
Precisión = 0.1 plg.	Precisión = 0.001 plg.

Trata de efectuar una comparación análoga para las dos mediciones 93,000,000 de millas y (0.03 ± 0.005) de pulgada.

93,000,000 mi.
Dos cifras significativas
[9, 3]
Error relativo = $\frac{500000}{93000000}$
ó
Exactitud ≈ 0.005
Precisión = 1,000,000 mi.

(0.03 ± 0.005) plg.
Una cifra significativa
[3]
Error relativo = $\frac{0.005}{0.03}$
ó
Exactitud ≈ 0.2
Precisión = 0.01 plg.

Ejercicios 5-3

En todos tus cálculos expresa la respuesta de manera que contenga dos cifras significativas.

1. Indica el máximo error posible para cada una de las siguientes mediciones:
   (a) (52 ± 0.5) pies
   (b) (4.1 ± 0.05) plg.
   (c) 2,580 mi.
   (d) 36$\underline{0}$ pies
   (e) 7.03 plg.
   (f) 0.006 pie
   (g) 5.4×10^4 mi.
   (h) 54,$\underline{0}$00 mi.
2. Halla el error relativo de cada una de las mediciones del problema 1.
3. Halla el máximo error posible y el porcentaje de error para cada una de las siguientes mediciones:
   (a) (9.3 ± 0.05) pies
   (b) 0.093 pie
   (c) 9.30×10^2 pies
   (d) 9.30×10^4 pies
4. ¿Qué observas en las respuestas del problema 3? ¿Puedes explicar por qué los porcentajes de error son los mismos para todas estas mediciones?
5. Halla la precisión de las siguientes mediciones:
   (a) 26.3 pies
   (b) 0.263 pie
   (c) 2,630 pies
   (d) 51,000 mi.
   (e) 5.1 pies
   (f) 0.051 plg.
6. ¿Cuántas cifras significativas hay en cada una de las siguientes mediciones?
   (a) 52.1 plg.
   (b) 52.10 plg.
   (c) 3.68 plg.
   (d) 368.0 plg.
7. Halla el error relativo de cada una de las mediciones del problema 6.

8. En tus respuestas a los problemas 6 y 7, ¿ves alguna relación entre el número de cifras significativas de una medida y el error relativo de la medición? ¿Cuál es la relación que hay entre el número de cifras significativas de una medida y la exactitud de la medición?

9. Sin efectuar los cálculos, ¿puedes decir cuál de las mediciones siguientes es más exacta? ¿Cuál es la menos exacta?

   23.6 plg., 0.043 plg., 7,812 plg., 0.2 plg.

10. Dispón, según el orden creciente de su precisión, las siguientes mediciones:

    (a) $(36\frac{1}{2} \pm \frac{1}{4})$ plg., $(27 \pm \frac{1}{32})$ plg., $(32\frac{3}{8} \pm \frac{1}{16})$ plg., $(46\frac{2}{7} \pm \frac{1}{14})$ plg., (22.25 ± 0.125) plg.

    (b) 4.62 plg., 3.041 plg., 3 plg., 82.4 plg., 0.3762 plg.

*11. Dispón, según el orden creciente de su exactitud, las siguientes mediciones:

   $(6 \pm \frac{1}{2})$ pies, (3.2 ± 0.005) plg., (7.2 ± 0.05) mi., $(3\frac{1}{2} \pm \frac{1}{8})$ plg., 3 yd. $(4 \pm \frac{1}{4})$ plg.

12. Cuenta el número de cifras significativas de cada una de las siguientes medidas:

(a)	43.26	(e)	0.6070	(i)	76,00$\underline{0}$
(b)	4,607	(f)	0.0030	(j)	43,000
(c)	32.004	(g)	4.0030	(k)	0.036
(d)	0.0062	(h)	0.03624	(l)	200.00004

13. Expresa en notación científica las siguientes medidas:

(a)	463,000,000	(d)	32.004	(g)	36.8×10^5
(b)	327,$\underline{0}$00	(e)	2	(h)	0.80×10^{-7}
(c)	0.000462	(f)	0.0000400	(i)	72 billones

14. A simple vista, dispón los números que siguen según el orden creciente de sus magnitudes. Escribe solamente las letras.

(a)	3.6×10^5	(e)	3.5×10^{-12}
(b)	3.5×10^8	(f)	4.1×10^6
(c)	4×10^{-6}	(g)	3.527×10^2
(d)	3.527×10^8	(h)	3.55×10^8

(i) 3.4×10^{-7} (j) 3.39×10^{-8}

15. PROBLEMA DIFICIL. Un mecánico mide la cabeza de un pistón de $3\frac{1}{2}$ pulgadas con la aproximación de 0.0001 de pulgada mientras que un astrónomo mide mediante el paralaje, la distancia al Can Mayor (la estrella Sirio) con la aproximación de 10,000,000 de millas. La distancia a Sirio es de 8.6 años de luz (1 año de luz $\approx 6 \times 10^{12}$ millas). ¿Qué medición es más exacta?

5-4. Adición y sustracción de medidas

Como las mediciones jamás son exactas, la respuesta a todo problema que dependa de tales mediciones es también aproximada. Por ejemplo, suponte que has medido el largo de una habitación haciendo dos marcas sobre la pared y llamándolas A y B, y que luego has medido las distancias de una esquina a A, de A a B, y de B a la otra esquina. Las mediciones como ésta, cuyas medidas deben sumarse, han de hacerse con la misma precisión. Suponte que las mediciones son $72\frac{1}{4}$ pulgadas, $40\frac{2}{4}$ pulgadas y $22\frac{3}{4}$ pulgadas, hechas con una aproximación de un cuarto de pulgada. Si sumas las medidas, obtienes $135\frac{2}{4}$. Por consiguiente, la medición es $135\frac{2}{4}$ pulgadas. Por supuesto, las distancias podrían haber sido más cortas en cada caso, pues las medidas podrían haber sido tan pequeñas como $72\frac{1}{8}$, $40\frac{3}{8}$ y $22\frac{5}{8}$ pulgadas, y en este caso la distancia sería casi de $135\frac{1}{8}$ pulgadas, que es tres octavos de pulgada menor que $135\frac{2}{4}$ pulgadas. De la misma manera, cada distancia podría haber sido casi un octavo de pulgada más larga, caso en el cual la longitud total podría haber sido casi tres octavos de pulgada más larga que $135\frac{2}{4}$ pulgadas. <u>El máximo error posible de una suma es la suma de los máximos errores posibles</u>. Si sumáramos las medidas 37.6, 3.5 y 178.6, el máximo error posible de la suma sería 0.05 + 0.05 + 0.05, es decir, 0.15. El resultado de esta adición se daría como 219.7 ± 0.15.

Los cálculos referentes a medidas son muy importantes en el mundo actual. Se han establecido muchas reglas que dan la exactitud o precisión de los resultados obtenidos mediante cálculos con medidas aproximadas. El gran número de reglas, sin embargo, podría aumentar la confusión y jamás reemplazaría a los conocimientos básicos sobre los datos aproximados. Si se comprende el significado de máximo error posible y de error relativo, se puede hallar la precisión y exactitud de los resultados de los cálculos mediante el sentido común. El sentido común nos dice que al operar con un gran número de mediciones, los errores se cancelarán entre sí, dentro de ciertos límites.

Principio general: La suma o diferencia de medidas no puede ser más precisa que la menos precisa de las medidas de los datos. Por consiguiente, para sumar o restar números aproximados, redondéalos primero a la aproximación del menos preciso y luego efectúa la operación.

Como hemos visto, el máximo error posible de una suma (o diferencia) de varias medidas es la suma de los máximos errores posibles de las medidas que se suman (o restan). (Para estimar el error probable de una suma, teniendo en cuenta la manera como se cancelarían los errores entre sí, necesitamos emplear algunas ideas de probabilidad que todavía no tenemos a mano.)

Ejercicios 5-4

1. Halla el máximo error posible para la suma de las mediciones de cada uno de los conjuntos que siguen. (Cuando se da una medición como $5\frac{1}{2}$ pulgadas, debes suponer que la unidad de medida ha sido $\frac{1}{2}$ pulgada, y de manera análoga para las otras fracciones.)

   (a) $5\frac{1}{2}$ plg., $6\frac{1}{2}$ plg., $3\frac{0}{2}$ plg.

   (b) $3\frac{1}{4}$ plg., $6\frac{1}{2}$ plg., 3 plg.

   (c) 4.2 plg., 5.03 plg.

   (d) 42.5 plg., 36.0 plg., 49.8 plg.

(e) 0.004 plg., 2.1 plg., 6.135 plg.

(f) $2\frac{3}{4}$ plg., $1\frac{5}{16}$ plg., $3\frac{3}{8}$ plg.

2. Suma las siguientes medidas:

   (a) 42.36, 578.1, 73.4, 37.285, 0.62

   ~~(b) 85.42, 7.301, 16.015, 36.4~~

   (c) 9.56, 0.345, 1,713.06, 35.27

3. Resta las siguientes medidas:

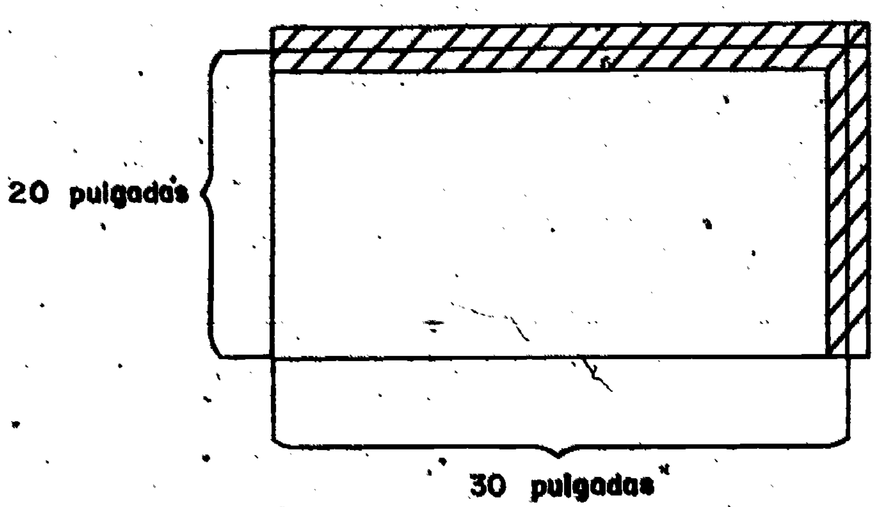
   (a) 7.3 - 6.28

   (b) 735. - 0.73

   (c) 5,430 - 647

5-5. Multiplicación y división de medidas

Ya sabes que el número de unidades del área de un rectángulo se halla multiplicando el número de unidades de longitud de su largo por el número de las mismas unidades de su ancho. Suponte que las dimensiones de un rectángulo son 30 pulgadas y 20 pulgadas. Como se han medido con la aproximación de una pulgada, las medidas se pueden escribir como (30 ± 0.5) y (20 ± 0.5). Esto significa que el largo mínimo puede ser hasta de 29.5 pulgadas y el ancho mínimo hasta de 19.5 pulgadas. El largo no puede ser mayor que 30.5 pulgadas ni el ancho mayor que 20.5 pulgadas.



Mira la figura de la página anterior para ver lo que esto significa. Las líneas exteriores muestran cómo sería el rectángulo si sus dimensiones fueran las más largas posibles. Las líneas interiores muestran cómo sería si su largo y su ancho fueran los mínimos posibles. La zona sombreada muestra la diferencia que hay entre las áreas máxima y mínima posibles, correspondientes a las mediciones dadas.

Veamos cuáles son las diferencias. Las dimensiones dadas son 20 pies por 30 pies. Las dimensiones mínimas posibles son (20 - 0.5) pies por (30 - 0.5) pies y las máximas posibles son (20 + 0.5) pies por (30 + 0.5) pies.

<u>Mínima área posible</u>	<u>Area dada</u>	<u>Máxima área posible</u>
(20 - 0.5) × (30 - 0.5) pies cuadrados	20 pies × 30 pies	(20 + 0.5) × (30 + 0.5) pies cuadrados
ó	ó	ó
(600 - 10 - 15 + 0.25) pies cuadrados		(600 + 10 + 15 + 0.25) pies cuadrados
ó		ó
575.25 pies cuadrados	600 pies cuadrados	625.25 pies cuadrados

Entonces, hay una diferencia de (625.25 - 575.25), es decir, 50 pies cuadrados, en los dos errores posibles. El área calculada de 20 × 30 pies cuadrados, es decir, 600 pies cuadrados, tiene unos 25 pies cuadrados más que el área mínima posible y unos 25 pies cuadrados menos que el área máxima posible.

Por consiguiente, si deseamos ser cuidadosos con nuestros enunciados debemos aclarar lo que queremos decir cuando expresamos que el área del rectángulo es 600 pies cuadrados. Como hemos visto, esta respuesta no es correcta con la aproximación de 1 pie cuadrado, pero es correcta en menos de 100 pies cuadrados. Si queremos indicar la situación del mejor modo posible, debemos escribir el área como (600 ± 25) pies cuadrados. (Hemos redondeado el área máxima posible 625.25 a 625 pies cuadrados. O quizá prefieras escribir 575.25 pies cd. $\leq$ el área $\leq$ 625.25 pies cd.) Si escribimos el área como 600 pies cuadrados, debemos interpretar el numeral como si tuviera una cifra significativa. Esto quiere decir que el área está dada dentro de un margen de 100 pies cuadrados, y por consiguiente, está entre 550 pies cuadrados y 650 pies cuadrados. Esto es correcto, pero como resultado no es mejor que nuestra respuesta (600 ± 25 pies cuadrados).

Es realmente imposible dar una regla satisfactoria para la multiplicación de medidas aproximadas en forma decimal o fraccionaria. Sin embargo, cuando se expresan los datos en forma decimal, se puede sugerir grosso modo cómo obtener un producto satisfactorio. <u>El número de cifras significativas en el producto de dos números no es mayor que el número de cifras significativas del factor menos exacto.</u>

Observa que esto dice que el número de cifras significativas <u>no es mayor que</u> el número de cifras significativas del factor menos exacto: esto no asegura que habrá exactamente ese mismo número de cifras.

Como ilustración de este principio, considera el siguiente problema: ¿Cuál es el área de un rectángulo cuyos lados miden 10.4 centímetros y 4.7 centímetros?

Para hallar el área podríamos multiplicar 10.4 centímetros por 4.7 centímetros para obtener 48.88 centímetros cuadrados. En 10.4 hay tres cifras significativas mientras que en 4.7 solamente hay dos. En consecuencia, el producto no puede tener más de dos cifras significativas y por eso redondeamos el área a 49 centímetros cuadrados. Resulta que el área aproximada del rectángulo es 49 centímetros cuadrados.

Si queremos hallar una estimación mejor del error posible, debemos emplear nuevamente el esquema " ± ". Como

$$(10.4 + 0.05)(4.7 + 0.05) = 48.88 + 0.52 + 0.235 + 0.0025$$
$$= 49.6375$$

y

$$(10.4 - 0.05)(4.7 - 0.05) = 48.88 - 0.52 - 0.235 + 0.0025$$
$$= 48.1275$$

vemos que $48.1 \text{ cm.}^2 <$ el área del rectángulo $< 49.7 \text{ cm.}^2$. Si usamos solamente dos cifras significativas, vemos que el área está entre 48 y 50 centímetros cuadrados. Entonces (49 ± 1) centímetros cuadrados es una buena respuesta.

Podrías preguntar por qué no redondeamos a 10 el numeral

10.4 y trabajamos con sólo dos cifras significativas en cada factor. Entonces tendríamos

$$10 \times 4.7 \text{ cm.}^2 = 47 \text{ cm.}^2$$

para el área, lo cual vemos que <u>no</u> es correcto con dos cifras significativas.

Por esta razón, cuando se multiplican dos factores que no tienen el mismo número de cifras significativas, es costumbre convenir en lo siguiente:

<u>Si uno de los dos factores contiene más cifras significativas que el otro, redondea el factor que tiene más cifras significativas de manera que contenga solamente una cifra significativa más que el otro factor.</u>

Suponte que queremos hallar la longitud de una circunferencia cuyo diámetro d es igual a 5.1 mm. La longitud de la circunferencia es $C = \pi d$. ¿Qué valor debemos tomar para π? Como el diámetro 5.1 se da con dos cifras significativas, tomamos tres cifras significativas para π; es decir, $\pi \approx 3.14$. Entonces

$$C = \pi d \approx 3.14 \times 5.1 = 16.014$$

que redondeamos a 16, pues en el producto no deben aparecer más de dos cifras significativas. Entonces,

$$C \approx 16 \text{ mm.}$$

Si estuviéramos tratando con una circunferencia muy grande, cuyo diámetro d midiera 1,012 pulgadas, entonces deberíamos tomar $\pi \approx 3.1416$ y redondear el resultado de la multiplicación $C = (3.1416)(1,012)$ a cuatro cifras significativas.

La división se define por medio de la multiplicación. Por consiguiente, es razonable seguir el procedimiento usado para la multiplicación al dividir números aproximados.

Cuando una multiplicación o una división indicada tiene un número exacto, como 2 en la fórmula de la longitud de la circunferencia $(C = 2\pi r)$, el número aproximado determina el número de cifras significativas de la respuesta. No consideramos el número exacto en la determinación de las cifras significativas de la respuesta. Un número exacto es un número que no se obtiene midiendo.

Ejercicios 5-5

1. Suponte que un rectángulo tiene $2\frac{1}{2}$ pulgadas de largo y $1\frac{1}{2}$ pulgadas de ancho. Haz un dibujo del rectángulo. Indica en la figura que el largo tiene $(2\frac{1}{2} \pm \frac{1}{4})$ pulgadas y el ancho $(1\frac{1}{2} \pm \frac{1}{4})$ pulgadas. Luego halla la mayor y la menor de las áreas posibles, calculando su diferencia o parte incierta. Después halla el área con las dimensiones medidas, y da la respuesta con la aproximación de $\frac{1}{2}$ pulgada cuadrada.
2. Multiplica los siguientes números aproximados:
   (a) 4.1×36.9
   (b) $3.6 \times 4,673$
   (c) $3.76 \times (2.9 \times 10^4)$
3. Divide los siguientes números aproximados:
   (a) $3.632 \div 0.83$
   (b) $0.000344 \div 0.000301$
   (c) $(3.14 \times 10^6) \div 8.006$
4. Halla el área de un campo rectangular que tiene 835.5 varas largas de largo y 305 varas largas de ancho.
5. La longitud de una circunferencia se da por la fórmula $C = \pi d$, en que d es el diámetro de la circunferencia. Si se da π como 3.141593, halla las longitudes de las circunferencias cuyos diámetros tienen las siguientes medidas:
   (a) 3.5 plg.
   (b) 46.36 pies
   (c) 6 mi.
6. Una máquina estampa piezas cuyo peso individual es 0.625 libras. ¿Cuánto pesan 75 de esas piezas?
7. Suponiendo que el agua pesa 62.5 libras por pie cúbico, ¿cuál es el volumen de 15,610 libras?

Hay muchas reglas aproximadas para calcular con datos aproximados, pero se las debe usar con mucho cuidado, pues no sirven para todos los casos. Las máquinas calculadoras de gran velocidad, que suman o multiplican miles de números por segundo, deben tener reglas especiales aplicables a los datos que se les proponen. En tales máquinas, los errores provenientes del redondeo de números se suman o desaparecen de una manera muy difícil de prever. De hecho, la "teoría de errores" tal como se aplica a las calculadoras es actualmente un campo muy activo de investigación para los matemáticos.

Capítulo 6

NUMEROS REALES

6-1. Revisión de los números racionales

En tus estudios de matemáticas has empleado varios sistemas de números. Empezaste con los números naturales, de los cuales quizá sabías mucho aun antes de comenzar el primer grado de la escuela primaria. Estos números son tan familiares que sus diferencias respecto de los otros sistemas de números fácilmente pasan inadvertidas. Considera las siguientes preguntas:

(a) Elige un número natural particular. ¿Cuál es el número natural más pequeño que le sigue? ¿Y el más grande que le sigue? Si n representa un número natural, ¿cómo se representa el número natural siguiente más pequeño? ¿Y el siguiente más grande?

(b) ¿Hay algún número natural que no se pueda emplear para reemplazar a n en tu respuesta a la pregunta (a)? ¿Por qué?

(c) ¿Hay un número natural mínimo? ¿Y uno máximo? Si es así, ¿cuáles son?

(d) ¿Es el conjunto de los números naturales cerrado respecto de la

(1) adición?
(2) sustracción?
(3) multiplicación?
(4) división?

(e) ¿Cuántos números naturales hay entre 8 y 11? ¿Y entre $3,002$ y $4,002$? ¿Y entre 168 y 169? Dados dos números naturales, ¿hay siempre otro número natural entre ellos?

En el Capítulo 1 has estudiado los números racionales positivos y negativos. El conjunto de los enteros contiene al conjunto de los números naturales (llamados enteros positivos). Para cada entero positivo a hay un número opuesto ^{-}a. Los opuestos de los enteros positivos se llaman enteros negativos. Si a es un número natural, entonces $a + (^{-}a) = 0$. ¿Qué número entero no es positivo ni negativo?

El conjunto de los enteros está contenido en otro conjunto de números que hemos llamado el conjunto de los números racionales.

Como sabes, el conjunto de los enteros se emplea con varios fines; por ejemplo, para indicar la población de un país, el número de dólares que tienes, el número de vértices de un triángulo, etc. Los enteros solos no bastan para muchos otros fines, especialmente para la medición. Si tuviéramos que usar solamente los enteros para medir, habríamos tenido que inventar nombres para las subdivisiones de la unidad. En cierta forma lo hemos hecho así; en lugar de decir $5\frac{1}{3}$ pies, decimos algunas veces 5 pies 4 pulgadas. Pero no empleamos una palabra diferente para una subdivisión de pulgada. En vez de ello, decimos $7\frac{1}{4}$ pulgadas ó 7.25 pulgadas, empleando números racionales que no son enteros. Si tuviéramos solamente números enteros, jamás podríamos decir $3\frac{1}{2}$ cuartillos, ó 2.3 millas, ó 0.001 de pulgada.

Recuerda que un número racional puede ser designado con el símbolo de fracción $\frac{p}{q}$, donde p y q son enteros, y $q \neq 0$.

Así como hay un entero negativo que corresponde a cada entero positivo (o número natural), hay un número racional negativo que corresponde a cada número racional positivo.

Ya debes estar familiarizado con las propiedades fundamentales de los números racionales, que resumiremos así:

Clausura: Si a y b son números racionales, entonces $a + b$ es un número racional, $a \cdot b$ (más comúnmente escrito ab) es un número racional, $a - b$ es un número racional y $\frac{a}{b}$ es un número racional si $b \neq 0$.

Conmutatividad: Si a y b son números racionales, entonces $a + b = b + a$, y $a \cdot b = b \cdot a$, $(ab = ba)$.

Asociatividad: Si a, b y c son números racionales, entonces $a + (b + c) = (a + b) + c$, y $a(bc) = (ab)c$.

Elementos neutrales: Hay un número racional cero tal que si a es un número racional, entonces $a + 0 = a$. Hay un número racional 1 tal que $a \cdot 1 = a$.

Distributividad: Si a, b y c son números racionales, entonces $a(b + c) = ab + ac$.

Inverso aditivo: Si a es un número racional, entonces hay un número racional ^{-}a tal que $a + (^{-}a) = 0$.

Inverso multiplicativo: Si a es un número racional y $a \neq 0$, entonces existe un número racional b tal que $ab = 1$.

Ordenación: Si a y b son números racionales diferentes, entonces o bien $a > b$, o bien $a < b$.

Ejercicios de clase 6-1

1. ¿Hay un entero negativo mínimo? ¿Y uno máximo?
2. Si n representa un entero negativo, ¿cómo se representa el siguiente más grande? ¿Y el siguiente más pequeño?
3. ¿Es el conjunto de los enteros negativos cerrado respecto de la
   (a) adición?
   (b) sustracción?
   (c) multiplicación?
   (d) división?
4. Expresa cada uno de los siguientes numerales en la forma $\frac{p}{q}$ o $^-(\frac{p}{q})$, donde p y q son números naturales.
   (a) $5\frac{3}{4}$
   (b) $7\frac{1}{8}$
   (c) 12
   (d) 0.47
   (e) $\frac{5}{^-3}$
   (f) $6 + \frac{9}{10}$
   (g) 3.7
   (h) $(^-7) + \frac{1}{3}$
5. ¿Cuál de las propiedades de los números racionales se pone de manifiesto en cada uno de los enunciados siguientes?
   (a) $\frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3}$
   (b) $^-(\frac{1}{8}) + \frac{3}{4} = \frac{5}{8}$ y $\frac{5}{8}$ es un número racional.
   (c) $^-(\frac{2}{3}) \cdot {}^-(\frac{5}{8}) = {}^-(\frac{5}{8}) \cdot {}^-(\frac{2}{3})$
   (d) $\frac{1}{2} \cdot (\frac{3}{5} + \frac{7}{10}) = (\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}) + (\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{10})$
   (e) $1 \cdot {}^-(\frac{7}{8}) = {}^-(\frac{7}{8})$
   (f) $\frac{17}{10} + (\frac{1}{10} + \frac{9}{10}) = (\frac{17}{10} + \frac{1}{10}) + \frac{9}{10}$
   (g) $^-(\frac{1}{5}) \cdot \frac{2}{3} = {}^-(\frac{2}{15})$ y $^-(\frac{2}{15})$ es un número racional.

6. ¿Cuál es el inverso aditivo de $^{-}(\frac{7}{4})$?
7. ¿Cuál es el inverso multiplicativo de $^{-}(\frac{7}{4})$?
8. ¿Cómo se suele llamar también al "inverso multiplicativo"?
9. Si $\frac{p}{q}$, o $^{-}(\frac{p}{q})$, es el nombre más simple para un número racional entero, ¿qué número debe ser q?
10. ¿Cómo puedes saber que dos fracciones representan al mismo número racional?
11. ¿Qué otros tres nombres hay para el número racional $\frac{5}{7}$?

Ejercicios 6-1

1. Indica cuál de las propiedades de los números racionales pone de manifiesto cada uno de los enunciados siguientes:

   (a) $^{-}(\frac{3}{4}) + \frac{5}{6} = \frac{1}{12}$, y $\frac{1}{12}$ es un número racional.

   (b) $\frac{5}{8} + 0 = \frac{5}{8}$.

   (c) $1 \cdot {}^{-}(\frac{3}{4}) = {}^{-}(\frac{3}{4})$

   (d) $^{-}(\frac{3}{4}) \cdot {}^{-}(\frac{5}{8}) = \frac{^{+}15}{32}$ y $\frac{^{+}15}{32}$ es un número racional.

   (e) $\frac{2}{3} \cdot (\frac{1}{3} + \frac{1}{2}) = (\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}) + (\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2})$

   (f) $^{-}(\frac{5}{8}) \cdot {}^{-}(\frac{1}{3}) = {}^{-}(\frac{1}{3}) \cdot {}^{-}(\frac{5}{8})$

   (g) $\frac{11}{10} + (\frac{3}{10} + \frac{7}{10}) = (\frac{11}{10} + \frac{3}{10}) + \frac{7}{10}$

2. Expresa cada uno de los numerales que siguen en la forma $\frac{p}{q}$ o $^{-}(\frac{p}{q})$, donde p y q son números naturales.

   (a) $17\frac{1}{2}$

   (b) $\frac{5}{^{-}7}$

   (c) $(^{-}4) + \frac{1}{3}$

   (d) $^{-}0.35$

   (e) 10

   (f) 17.03

3. Escribe en su forma fraccionaria más simple cada uno de los numerales siguientes:

   (a) $\frac{14}{28}$

   (b) $\frac{18}{24}$

   (c) $^{-}0.62$

   (d) $6\frac{2}{7}$

   (e) $^{-}(8\frac{1}{4})$

   (f) 12.5

4. ¿Cuál es el inverso aditivo de cada uno de los siguientes números?

(a) $^{-}28$ (c) $^{+}3\frac{1}{7}$

(b) 756 (d) $^{-}(\frac{176}{5})$

5. Completa este enunciado: "La expresión más simple para un número racional escrito en la forma $\frac{a}{b}$ es aquella en la cual a y b no tienen ningún factor común, excepto ________".

6. Un número racional que no tiene inverso multiplicativo es el número $\frac{p}{q}$ cuando p es ________.

7. Escribe ordenadamente los números racionales que siguen. Coloca el mayor al final.

$$\frac{4}{7},\ \frac{3}{8},\ 0.41,\ \frac{7}{16},\ \frac{2}{5},\ ^{-}4,\ ^{-}(\frac{2}{3}),\ 0$$

*8. Halla la media de los dos números racionales $^{-}8$ y $^{+}4$.

*9. ¿Es siempre posible calcular la media de dos enteros de manera que el resultado sea un entero? Explica tu respuesta.

10. Multiplica por 10 cada uno de los siguientes números:

(a) 0.33333 (d) 0.142142

(b) 0.090909 (e) 13.46333

(c) 16.31212 (f) 846.4646

11. Multiplica por 100 cada número del problema 10.

12. Multiplica por 1,000 cada número del problema 10.

6-2. Densidad de los números racionales

Una de las observaciones que has hecho sobre los enteros es la siguiente: todo entero está precedido por un determinado entero y seguido por otro. El entero que precede a $^{-}8$ es $^{-}9$, y el entero que sigue a 1,005 es 1,006. Con otras palabras, si n es un entero, entonces su predecesor es $(n - 1)$ y su sucesor es $(n + 1)$.

Sobre la recta numérica esto significa que hay vacíos entre los puntos que corresponden a los enteros.

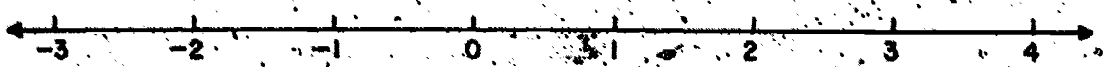


Figura 6-2a

Ahora considera todos los números racionales, y los puntos de la recta numérica que les corresponden. Tales puntos se llaman puntos racionales. Sobre la recta numérica que hallarás a continuación se muestran los puntos racionales entre $^-3$ y 4, designados por las fracciones con denominadores 2, 3, 4 y 6.

Figura 6-2b

Ejercicios 6-2a

1. Dibuja una recta numérica análoga a la de la figura 6-2a. Marca los puntos que corresponden a estos números:

   $^-(\frac{6}{2})$, $^-(\frac{5}{2})$, $^-(\frac{4}{2})$, $^-(\frac{3}{2})$, $^-(\frac{2}{2})$, $^-(\frac{1}{2})$, $\frac{0}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{2}$

2. Sobre la recta numérica que dibujaste en el problema 1, halla los puntos que corresponden a estos números:

   $^-(\frac{7}{6})$, $^-(\frac{6}{6})$, $^-(\frac{5}{6})$, $^-(\frac{4}{6})$, $^-(\frac{3}{6})$, $^-(\frac{2}{6})$, $^-(\frac{1}{6})$, $\frac{0}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$

3. ¿Eran algunos de los puntos de los problemas 1 y 2 el mismo punto? Si es así, ¿cuáles eran?

4. Supone que ya tienes localizados los puntos correspondientes a números racionales representados por fracciones con denominadores 2, 3, 4, 5 y 6. Luego localizas los puntos representados por fracciones con denominador 7. ¿Cuántos nuevos puntos (que aún no hayan sido marcados) habrá para los séptimos entre los puntos que corresponden a los enteros 1 y 2? ¿Y entre los puntos que corresponden a 3 y 4?

5. Localiza luego los puntos correspondientes a las fracciones con denominador 8. ¿Cuántos nuevos puntos habrá entre los correspondientes a dos enteros consecutivos?

6. Considera todos los puntos racionales entre 0 y 1 que representen fracciones con denominadores de 1 a 8, inclusive. Tales puntos se enumeran a continuación. La primera fila muestra las fracciones con denominador 1, la segunda fila muestra las fracciones con denominador 2 para los nuevos puntos, la tercera las fracciones con denominador 3 para los nuevos puntos, y así sucesivamente.

$\frac{0}{1}$ $\frac{1}{1}$

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$

$\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$

$\frac{1}{5}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{4}{5}$

$\frac{1}{6}$ $\frac{5}{6}$

$\frac{1}{7}$ $\frac{2}{7}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{4}{7}$ $\frac{5}{7}$ $\frac{6}{7}$

$\frac{1}{8}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{7}{8}$

(a) ¿Por qué se ha omitido $\frac{0}{3}$ en la fila de los tercios?

(b) ¿Por qué se ha omitido $\frac{2}{4}$ en la fila de los cuartos?

(c) ¿Por qué aparecen más puntos nuevos en la fila de los quintos y en la fila de los séptimos que en la fila de los sextos?

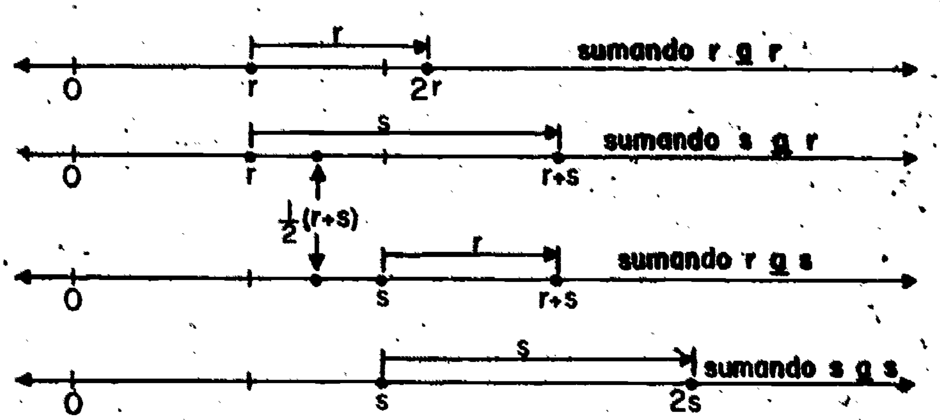
7. En la fila de más abajo se disponen los números racionales indicados en el problema 6, ordenados de menor a mayor.

$\frac{0}{1}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{7}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{4}{7}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{7}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{6}{7}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{1}{1}$

Explica por qué las seis primeras fracciones deben estar en el orden indicado; haz lo mismo para las seis últimas fracciones.

8. En el problema 7, se podrían obtener más números en la fila de fracciones y más puntos en el conjunto correspondiente de puntos racionales, intercalando las fracciones con denominador 9, luego las fracciones con denominador 10, y así sucesivamente. ¿Cuántos puntos nuevos corresponderían a las fracciones con denominador 9? ¿Y a las fracciones con denominador 10? ¿Y a las fracciones con denominador 11?
9. En los problemas 6 y 8, ¿qué denominador correspondería al mayor número de puntos que aún no se han considerado? ¿Qué clase de número parece corresponder al mayor número de nuevos puntos cuando se le use como denominador? ¿Por qué?

Podemos seguir un método diferente para designar y localizar nuevos puntos racionales. Considera dos números racionales positivos r y s, con $r < s$. Luego imagina lo que ocurre si sumamos r y s a cada uno de estos números. Observemos la recta numérica.



Vemos que $2r < r + s < 2s$. Tomando mitades, obtenemos $r < \frac{1}{2}(r + s) < s$. No es difícil mostrar que $r < \frac{1}{2}(r + s) < s$, aun si r es negativo, o cuando tanto r como s son negativos. Puedes tratar de demostrar esto por ti mismo, si deseas, empleando la recta numérica. El número $\frac{1}{2}(r + s)$ es la media de los números r y s. Hemos observado, entonces, que la media de dos números racionales está entre esos números. Sobre la recta numérica, ¿qué punto crees que corresponde a la media de dos números? Es el punto medio del segmento determinado por esos números. Si r y s son números racionales, ¿es $\frac{1}{2}(r + s)$ un número racional? ¿Qué propiedades de los números racionales nos permiten afirmar esto?

Podemos resumir lo que hemos observado: El punto medio del segmento que une dos puntos racionales sobre la recta numérica es un punto racional que corresponde a la media de los dos números.

El punto medio del segmento que une los puntos correspondientes a $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ es el punto que corresponde al número $\frac{5}{12}$, pues

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{6} + \frac{3}{6}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{12}$$

El punto medio del segmento que une los puntos correspondientes a $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{7}$ es el punto que corresponde al número $\frac{15}{112}$, pues

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{7}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{56} + \frac{8}{56}\right) = \frac{15}{112}$$

Buscando la media de esta manera, es posible hallar números racionales entre cada par de números consecutivos representados en la fila de fracciones del problema 7 de los Ejercicios 6-2a. Si intercalamos estas nuevas fracciones, la fila comenzaría así:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{15}{112}, \frac{1}{7}, \frac{13}{84}, \ldots .$$

Si hallaras por este método todas las nuevas fracciones de esa fila, habría 43 fracciones entre $\frac{0}{1}$ y $\frac{1}{1}$. Este procedimiento se puede seguir indefinidamente. Podrías hallar puntos entre $\frac{0}{1}$ y $\frac{1}{16}$, entre $\frac{1}{16}$ y $\frac{1}{8}$, y así sucesivamente. Podrías hallar tantos números racionales como quieras entre 0 y 1, tomando medias, medias de medias, y así sucesivamente.

El estudio anterior sugiere esta importante propiedad de los números racionales:

Propiedad de la densidad. Entre dos números racionales distintos hay un tercer número racional.

Sobre la recta numérica, esto significa que el número de puntos racionales de cualquier segmento es ilimitado; por más puntos que se hayan localizado en un segmento muy pequeño, se pueden localizar tantos otros puntos como se deseen.

Ejercicios 6-2b

1. ¿Es denso el conjunto de los enteros? Es decir, ¿hay siempre un tercer entero entre dos enteros cualesquiera? Explica tu respuesta.
2. ¿Hay un entero positivo mínimo? ¿Y uno máximo?
3. ¿Hay un entero negativo mínimo? ¿Y uno máximo?
4. ¿Hay un número racional positivo mínimo? ¿Y un número racional negativo máximo?
5. Imagina los puntos de la recta numérica correspondientes a 0 y a $\frac{1}{100}$. Indica el punto racional P que está a mitad de camino entre 0 y $\frac{1}{100}$. Indica el punto que está a mitad de camino entre el punto P y 0; y entre el punto P y $\frac{1}{100}$.
6. De la misma manera, halla tres números racionales entre $\frac{1}{20}$ y $\frac{1}{10}$.
7. Imagina el segmento de extremos $\frac{1}{1000}$ y $\frac{2}{1000}$. Indica un método que puedas seguir para designar tantos puntos racionales como quieras en ese segmento. Emplea ese método para designar por lo menos cinco puntos.

6-3. Representaciones decimales de los números racionales

Frecuentemente es útil poder expresar los números racionales como decimales. Cuando es necesario comparar dos números racionales muy próximos, la comparación se facilita convirtiendo esos números a la forma decimal. La forma decimal es particularmente útil si hay varios números racionales por ordenar. Por ejemplo, considera las fracciones $\frac{13}{25}$, $\frac{27}{50}$, $\frac{3}{8}$ y $\frac{9}{20}$, y sus decimales correspondientes 0.52, 0.54, 0.375 y 0.45. Es más fácil ordenar los números cuando se escriben en forma decimal.

Algunos números racionales se escriben fácilmente en forma decimal. A simple vista, sabemos escribir

$$\frac{1}{2} = 0.5,\ \frac{1}{4} = 0.25,\ \frac{1}{8} = 0.125,\ \frac{1}{5} = 0.2,\ \frac{1}{25} = 0.04,$$

$$\frac{1}{125} = 0.008, \text{ y también } \frac{17}{2} = 8.5,\ 5\frac{3}{4} = 5.75,\ \frac{175}{10} = 17.5.$$

La expresión decimal para algunos otros números racionales puede no ser tan evidente, pero siempre la obtenemos mediante la división. Por ejemplo,

$$\frac{1}{3} = 0.33333\ldots$$

$$\frac{8}{3} = 2.6666666\ldots$$

$$\frac{1}{7} = 0.142857142857142857\ldots$$

$$\frac{1}{13} = 0.076923076923 07\ldots$$

$$\frac{1}{11} = 0.09090909\ldots$$

$$\frac{123}{14} = 8.7857142857142\ldots$$

Los ejemplos que hemos estudiado parecen sugerir que el desarrollo decimal para los números racionales, o bien termina (como en $\frac{1}{2} = 0.5$), o bien se repite (como en $\frac{1}{3} = 0.3333333\ldots$). ¿Cuál sería un camino razonable para estudiar desarrollos decimales como éstos? Puesto que hemos efectuado la división del numerador por el denominador para obtener una representación decimal, podemos estudiar cuidadosamente el procedimiento que seguimos en cada caso.

Considera el número racional $\frac{7}{8}$. Si efectuamos la división indicada escribimos

$$\begin{array}{r l}
0.875 & \\
8\,\overline{)\,7.000} & \\
\underline{6\,4} & \\
60 & \text{resto } 6 \\
\underline{56} & \\
40 & \text{resto } 4 \\
\underline{40} & \\
0 & \text{resto } 0
\end{array}$$

Al dividir por 8, los únicos restos que pueden aparecer son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7. El resto que apareció en la primera etapa fue 6, luego 4 y finalmente 0. Podríamos continuar dividiendo, obteniendo en cada nueva etapa un resto cero y un cociente cero. Podríamos escribir $\frac{7}{8} = 0.875000\ldots$ pero lo hacemos así rara vez.

El decimal 0.875000... es un decimal periódico en que 0 se repite indefinidamente. Cuando aparece el resto 0, la división es exacta. Decimos que una división es exacta si da un resto cero y luego ceros para el cociente. Tal decimal se llama frecuentemente exacto en vez de periódico, y así lo haremos en este capítulo.

¿Qué podemos decir de un número racional que no tiene una representación decimal exacta? Consideremos un ejemplo particular de esta clase, a saber, $\frac{2}{13}$. El proceso de la división de 2 por 13 es así:

```
          0.153846153
    13 ) 2.000000000
         1 3                resto
          70                  7
          65
           50                 5
           39
           110               11
           104
             60               6
             52
              80              8
              78
               20             2
               13
                70            7
                65
                 50           5
                 39
                 11          11
                 etc.
```

Los restos posibles son ahora 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12. No aparecen todos los restos, sino 7, 5, 11, 6, 8 y 2, en este orden. En la siguiente etapa de la división reaparece el resto 7, así como la sucesión 7, 5, 11, 6, 8 y 2. En realidad, el proceso se repite de nuevo, periódicamente. La correspondiente sucesión de dígitos del cociente—153846—se repetirá, pues, periódicamente en el desarrollo decimal de $\frac{2}{13}$.

A fin de escribir este decimal en forma concisa y sin ambigüedad, se acostumbra escribir

$$0.153846153846153846\ldots \quad \text{como} \quad 0.\overline{153846}\ldots$$

La barra (o raya) sobre la sucesión de dígitos 153846 indica que ese conjunto de dígitos repite. Análogamente, escribimos 0.3333... como 0.$\overline{3}$... . Caso de ser conveniente, podemos escribir 0.3333... como 0.$\overline{33}$... ó 0.$\overline{333}$... y 0.$\overline{153846}$... como 0.$\overline{153846153846}$...

El método que hemos estudiado es general y puede aplicarse a un número racional cualquiera $\frac{a}{b}$. Si se efectúa la división indicada, los posibles restos que pueden aparecer son 0, 1, 2, 3, ..., (b - 1). Nos fijamos solamente en las etapas que contribuyen a que los dígitos se repitan en el cociente. Estas etapas aparecen usualmente cuando los ceros comienzan a repetirse en el dividendo. Si aparece el resto 0, el desarrollo decimal termina en esa etapa del proceso de división. En realidad, podemos escribir un decimal exacto tal como 0.25 con un cero repetido para lograr un desarrollo periódico, tal como 0.25000..., o podemos usar la barra, tal como 0.25$\overline{0}$... . Observa que puede aparecer un resto cero antes de esa etapa sin terminar el proceso; por ejemplo,

```
      112.2
 5 ) 561.0
     5          resto
     06           0
      5
      11          1
      10
       10         1
       10
        0         0
```

Si no aparece 0 como resto después de agregar ceros al dividendo, entonces después de a lo más (b - 1) etapas del proceso de división, aparecerá nuevamente uno de los restos posibles 1, 2, ..., (b - 1) y la sucesión de dígitos comenzará a repetirse.

Mediante este argumento vemos que <u>todo número racional tiene un desarrollo decimal periódico</u>.

Ejercicios 6-3

1. Halla expresiones decimales para los números racionales que siguen. Continúa la división hasta que comience a repetirse el período, y escribe tu respuesta con diez cifras decimales por lo menos.

   (a) $\frac{9}{4}$ (b) $\frac{5}{24}$ (c) $\frac{3}{7}$ (d) $\frac{3}{35}$ (e) $\frac{1}{41}$

   (f) $\frac{128}{125}$ (g) $\frac{14}{37}$ (h) $\frac{11}{909}$ (i) $\frac{1}{82}$ *(j) $\frac{1}{17}$

2. ¿Cuáles de las siguientes fracciones se convierten en decimales en que se repite el cero (exactos)?

   (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{5}$ (e) $\frac{1}{6}$ (f) $\frac{1}{7}$

   (g) $\frac{1}{8}$ (h) $\frac{1}{9}$ (i) $\frac{1}{10}$ (j) $\frac{1}{11}$ (k) $\frac{1}{12}$ (l) $\frac{1}{13}$

3. Escribe en forma factorizada completa los denominadores de las fracciones exactas del problema 2.

4. Desarrolla con seis cifras decimales las siguientes fracciones:

   (a) $\frac{1}{7}$ (b) $\frac{2}{7}$ (c) $\frac{3}{7}$

   (d) $\frac{4}{7}$ (e) $\frac{5}{7}$ (f) $\frac{6}{7}$

6-4. Número racional correspondiente a un decimal periódico

Hemos visto cómo se halla por división el desarrollo decimal de un número racional dado. Encontramos que el desarrollo decimal es periódico. Supongamos ahora que tenemos la situación opuesta; es decir, nos dan un decimal periódico. ¿Representa éste decimal, efectivamente, un número racional? ¿Cómo podemos averiguarlo?

Podemos ver cómo se aborda este problema considerando un ejemplo. Escribamos el número $0.132132132132\ldots$ y llamémoslo n, de manera que $n = 0.132132\overline{132}\ldots$. El período de dígitos es 132, entonces si multiplicamos por $1,000$, desplazamos el primer período hacia la izquierda del punto decimal y obtenemos la relación

$$1,000n = 132.132132\overline{132}\ldots$$
$$n = 0.132132\overline{132}\ldots$$

Restando, obtenemos $\quad 999n = 132$

de manera que $\quad n = \frac{132}{999}$

o, en forma irreducible, $\quad n = \frac{44}{333}$

Por este procedimiento encontramos que $0.132132132\overline{132}\ldots = \frac{44}{333}$.

El ejemplo que aquí damos pone de manifiesto un método general que han desarrollado los matemáticos para mostrar que <u>todo decimal periódico representa un número racional</u>. Vemos, por consiguiente, <u>que hay una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números racionales y el conjunto de los decimales periódicos</u>. Luego, sería prácticamente equivalente definir los números racionales como el conjunto de números representados por todos esos decimales periódicos.

Antes de dejar el tema de los decimales, estudiemos un dato interesante acerca de los decimales exactos.

Hemos visto que los números racionales como $\frac{1}{2} = 0.5$, $\frac{1}{5} = 0.2$, $\frac{15}{8} = 1.875$, $\frac{397}{1000} = 0.397$, $\frac{692}{25} = 27.68$ se representan todos por decimales exactos. ¿Cómo podemos saber cuándo es éste el caso? Si nos inspiramos en los números racionales de este tipo que hemos estudiado, obtenemos una clave evidente: parece que los denominadores tienen solamente los factores primos 2 ó 5, o ambos. (V. problema 3, Ejercicios 6-3.)

Considera un número racional en el cual el denominador es una potencia de 2, como $\frac{39}{2^4}$.

Multiplicando por $\frac{5^4}{5^4}$, ó 1, podemos escribir $\frac{39 \cdot 5^4}{2^4 \cdot 5^4}$. Puesto que $2^4 \cdot 5^4$ puede escribirse

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = (2 \cdot 5)(2 \cdot 5)(2 \cdot 5)(2 \cdot 5) = 10^4$$

podemos escribir

$$\frac{39}{2^4} = \frac{39 \cdot 5^4}{2^4 \cdot 5^4} = \frac{39 \cdot 5^4}{10^4} = \frac{39 \cdot 625}{10000} = \frac{24375}{10000} = 2.4375$$

De manera análoga, si tenemos un número racional en el cual el denominador es una potencia de 5, podemos proceder del siguiente modo:

$$\frac{3}{3125} = \frac{3}{5^5} = \frac{3 \cdot 2^5}{5^5 \cdot 2^5} = \frac{3 \cdot 32}{10^5} = \frac{96}{100000} = 0.00096$$

¿Puedes mostrar que $5^5 \cdot 2^5 = 10^5$?

En general, si tenemos cualquier número racional cuyo denominador tiene solamente potencias de 2 y de 5, podemos emplear la misma técnica. Por ejemplo,

$$\frac{3791}{2^7 \cdot 5^4} = \frac{3791 \cdot 5^7 \cdot 2^4}{(2^7 \cdot 5^4)(5^7 \cdot 2^4)} = \frac{3791 \cdot 5^7 \cdot 2^4}{(2^7 \cdot 5^7)(5^4 \cdot 2^4)} = \frac{3791 \cdot 5^7 \cdot 2^4}{10^7 \cdot 10^4} = \frac{3791 \cdot 5^7 \cdot 2^4}{10^{11}}$$

y esto da una representación decimal exacta. ¿Puedes demostrar que $\frac{3791}{2^7 \cdot 5^4}$ es un decimal exacto multiplicando por $\frac{5^3}{5^3}$? Para establecer en general un hecho de este género, supon̂te que hacemos la siguiente pregunta: ¿Qué número racional $\frac{p}{q}$ (se supone que p y q tienen solamente 1 como factor común) puede ser representado por $\frac{N}{10^k}$, donde N es un entero?

Suponte que éste es realmente el caso y que

$$\frac{p}{q} = \frac{N}{10^k}$$

Por consiguiente, $q \cdot N = p \cdot 10^k$

Esto indica que q divide al producto de p y 10^k. Pero, como hemos supuesto que p y q tienen solamente a 1 como factor común, entonces q debe dividir á 10^k. Finalmente, los únicos factores posibles de 10^k son los productos de potencias de 2 y potencias de 5.

Así, hemos demostrado que un número racional r tiene una representación decimal exacta si el denominador de r consiste solamente en el producto de potencias de 2 y de 5, y únicamente en ese caso. Entonces r puede escribirse en la forma

$$r = \frac{p}{2^m \, 5^n}$$

donde p es un entero.

Ejercicios de clase 6-4

1. Efectúa cada una de las siguientes sustracciones:

   (a) $10n - n$ (d) $100n - 10n$

   (b) $100n - n$ (e) $1{,}000n - n$

   (c) $1{,}000n - 10n$ (f) $10{,}000n - 100n$

2. Escribe cada producto como un solo número.

   (a) $10 \times 0.999\overline{9}\ldots$ (f) $1{,}000 \times 0.61345\overline{345}\ldots$

   (b) $100 \times 3.12\overline{12}\ldots$ (g) $100 \times 8.0315\overline{15}\ldots$

   (c) $1{,}000 \times 0.035\overline{035}\ldots$ (h) $100 \times 312.899\overline{9}\ldots$

   (d) $10 \times 16.66\overline{6}\ldots$ (i) $10 \times 312.899\overline{9}\ldots$

   (e) $10 \times 0.0044\overline{4}\ldots$ (j) $10{,}000 \times 6.01230\overline{123}\ldots$

3. Efectúa cada una de las restas indicadas.

   (a) $\begin{array}{r} 3{,}128.99\overline{9}\ldots \\ \underline{312.89\overline{9}\ldots} \end{array}$ (c) $\begin{array}{r} 162.162\overline{162}\ldots \\ \underline{0.162\overline{162}\ldots} \end{array}$

   (b) $\begin{array}{r} 9.99\overline{9}\ldots \\ \underline{0.99\overline{9}\ldots} \end{array}$ (d) $\begin{array}{r} 301.0101\overline{01}\ldots \\ \underline{3.0101\overline{01}\ldots} \end{array}$

(e) $1.2333\overline{3}\ldots$
$\underline{0.1233\overline{3}\ldots}$

(g) $27,075.075\overline{075}\ldots$
$\underline{27.075\overline{075}\ldots}$

(f) $354.54\overline{54}\ldots$
$\underline{3.54\overline{54}\ldots}$

(h) $416.4777\overline{7}\ldots$
$\underline{41.6477\overline{7}\ldots}$

4. Para cada uno de los números N que siguen, halla el menor número de la forma 10^k (10, 100, 1,000, etc.) de manera que $(10^k \cdot N) - N$ sea un decimal exacto. Muestra que esto es cierto.

<u>Ejemplo.</u>

$$N = 1.324\overline{24}\ldots$$
$$100N = 132.424\overline{24}\ldots$$
$$\underline{N = 1.324\overline{24}\ldots}$$
$$100N - N = 131.10000\ldots$$

(a) $0.55\overline{5}\ldots$

(b) $0.73\overline{73}\ldots$

(c) $0.901\overline{901}\ldots$

(d) $3.0233\overline{3}\ldots$

(e) $163.17\overline{7}\ldots$

(f) $672.42\overline{42}\ldots$

(g) $0.123456\overline{56}\ldots$

(h) $3.4100\overline{0}\ldots$

5. Expresa cada uno de los números que se dan a continuación en la forma $\frac{a}{b}$, donde a <u>y</u> b son números naturales.

(a) $\frac{3.1}{99}$

(b) $\frac{4.11}{9}$

(c) $\frac{16.3}{99}$

(d) $\frac{1.03}{999}$

(e) $\frac{382.4}{9}$

(f) $\frac{47.531}{9999}$

6. Si se reemplaza a por 1 en $\frac{a}{b}$, ¿por qué números entre 23 y 50 puede ser reemplazado b de manera que $\frac{a}{b}$ sea representable por un decimal exacto?

Ejercicios 6-4

1. ¿Qué números racionales de la forma $\frac{a}{b}$ tienen las siguientes expresiones decimales?

   (a) $0.09\overline{09}\ldots$ (e) 0.1625

   (b) $0.11\overline{1}\ldots$ (f) $0.166\overline{6}\ldots$

   (c) $0.05\overline{55}\ldots$ (g) $5.125\overline{125}\ldots$

   (d) $0.123\overline{123}\ldots$ (h) $10.045\overline{45}\ldots$

2. Escribe en forma completamente factorizada cada denominador de los siguientes números:

   (a) $\frac{7}{32}$ (e) $\frac{12}{35}$

   (b) $\frac{47}{100}$ (f) $\frac{21}{80}$

   (c) $\frac{5}{9}$ (g) $\frac{71}{120}$

   (d) $\frac{13}{50}$ (h) $\frac{1}{160}$

3. ¿Cuáles de los números del problema 2 tienen decimales con cero repetido?

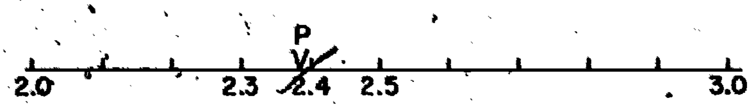
4. Si se reemplaza a por 1 en el número racional $\frac{a}{b}$, ¿por qué números entre 63 y 101 puede reemplazarse b de manera que $\frac{a}{b}$ sea representable por una expresión decimal exacta?

6-5. Puntos racionales sobre la recta numérica

Si usamos la representación decimal para los números racionales, vemos inmediatamente cómo localizar y ordenar los puntos correspondientes sobre la recta numérica.

Considera, por ejemplo, el número racional $2.39\overline{614}\ldots$ y su posición en la recta numérica. El dígito 2 en el lugar de las unidades nos dice inmediatamente que el punto racional correspondiente P está entre los enteros 2 y 3 de la recta numérica. Gráficamente, la primera figura aproximada es así:

Una descripción más precisa se obtiene considerando los dos primeros dígitos 2.3 que nos indican inmediatamente que P está entre 2.3 y 2.4. Por consiguiente, hallamos el punto P en el intervalo de 2 a 3 dividido en décimas, de la siguiente manera:



Si continuamos el proceso de afinamiento sucesivo de la posición de P sobre la recta numérica, tenemos una figura como la siguiente:

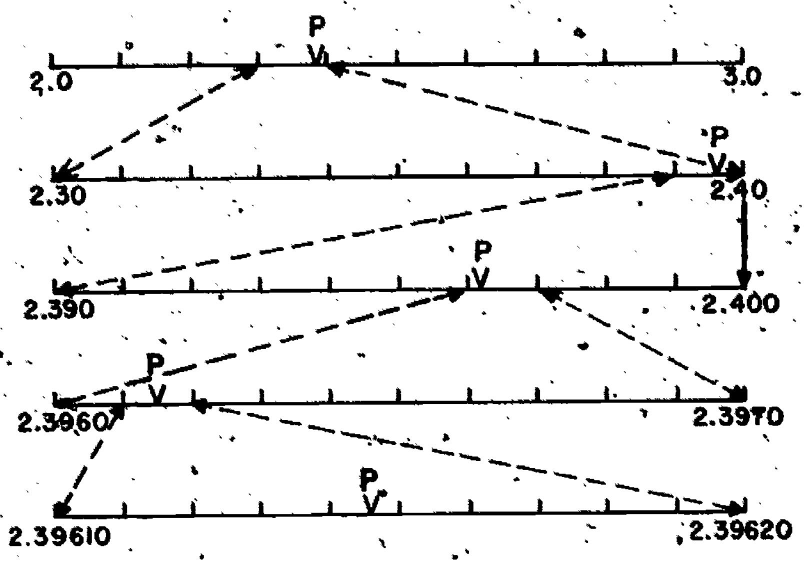
P (2.3...)

P (2.39...)

P (2.396...)

P (2.3961...)

P (2.39614...)



Localización de P correspondiente a $2.3961\overline{4}...$

Con tal representación decimal para un número racional, podemos localizar fácilmente el punto correspondiente sobre la recta numérica con el grado de exactitud deseado.

Además, dados dos números racionales distintos cualesquiera en esta forma, es fácil decir a simple vista cuál es mayor y cuál es menor, y cuál precede al otro en la recta numérica.

Si pretendes localizar el punto $\frac{3}{7}$ cuidadosamente sobre la recta numérica, ¿preferirías usar $\frac{3}{7}$ ó $0.\overline{428571}...$? Si quisieras comparar $\frac{3}{7}$ con cualquier otro número racional, ¿qué forma es más fácil de usar, $\frac{3}{7}$ ó $0.\overline{428571}...$?

Ejercicios 6-5

1. Dispón cada grupo de decimales en el mismo orden en que aparecen los puntos correspondientes sobre la recta numérica. Coloca primero en la lista el punto que está más a la izquierda.

   (a) 1.379   1.493   1.385   5.468   1.372

   (b) $^{-}9.426$ $^{-}2.765$ $^{-}2.761$ $^{-}5.630$ $^{-}2.763$

   (c) $^{-}0.15475$ 0.15467   0.15463   0.15475   0.15598

2. En el problema 1(c), ¿qué puntos están en los siguientes segmentos?

   (a) El segmento de extremos 1 y 2.
   (b) El segmento de extremos 0 y 1.
   (c) El segmento de extremos 0.1 y 0.2.
   (d) El segmento de extremos 0.15 y 0.16.
   (e) El segmento de extremos 0.154 y 0.155.

3. Dibuja un segmento de 10 centímetros; marca sus extremos con 0 y 1, y divídelo en diez partes. Marca y da nombre a los siguientes puntos:

   (a) 0.23   (d) 0.6
   (b) 0.49   (e) 0.08
   (c) 0.80   (f) 0.95

4. Dispón cada grupo de números racionales en orden creciente, expresándolos primero en forma decimal.

   (a) $\frac{3}{9}, \frac{4}{10}, \frac{17}{50}$ (c) $\frac{3}{7}, \frac{4}{9}$

   (b) $\frac{2}{3}, \frac{7}{10}, \frac{67}{100}$ (d) $\frac{152}{333}, \frac{415}{909}$

6-6. Números irracionales

Al estudiar los números racionales, hemos aprendido muchas cosas. Una de las más importantes es la propiedad de la densidad; entre dos números racionales diferentes cualesquiera hay siempre otro número racional. Esto quiere decir que hay muchos, muchísimos, números racionales y puntos racionales, y que éstos están repartidos por toda la recta numérica. Cualquier segmento, por pequeño que sea, contiene infinitos puntos racionales. Podríamos pensar que *todos* los puntos de la recta numérica son puntos racionales. Marquemos un punto sobre la recta numérica mediante una construcción muy simple con la regla y el compás. Quizás este punto nos depare una sorpresa.

(a) Dibuja una recta numérica y desígnala con ℓ. Sea A el punto cero y B el punto uno.

(b) En B, dibuja un rayo m perpendicular a ℓ.

(c) Sobre m toma un segmento $\overline{BC}$ de una unidad de longitud.

(d) Dibuja el segmento $\overline{AC}$.

(e) Dibuja un arco circular que interseque a ℓ, tomando A como centro y $\overline{AC}$ como radio. Llama D al punto de intersección.

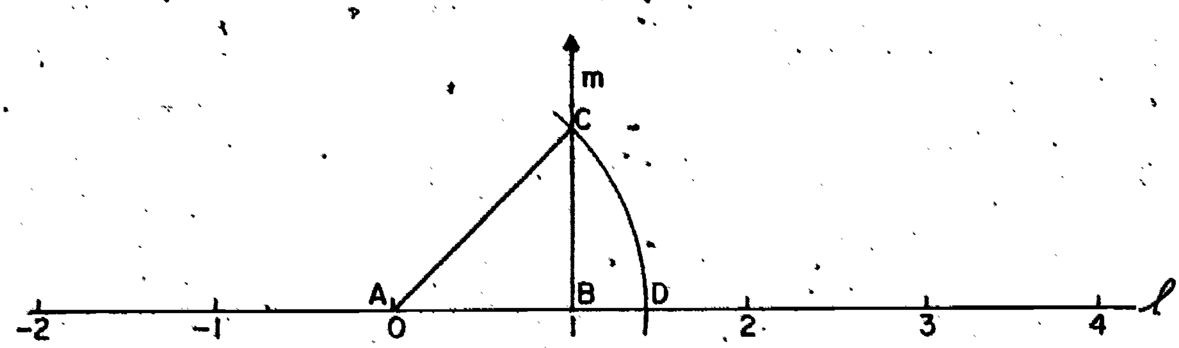


Figura 6-6

Ahora considera las dos preguntas siguientes:

(1) ¿A qué número (si existe) corresponde el punto D?

(2) ¿Sería un número racional?

Veamos la primera pregunta. Halla primera la longitud de $\overline{AC}$, pues $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ tienen la misma longitud. Usaremos como unidad de medida la unidad de distancia de la recta numérica. En la figura 6-6, el triángulo ABC es un triángulo rectángulo. La medida de $\overline{AB}$ es 1. La medida de $\overline{BC}$ es 1. Podemos emplear la Propiedad pitagórica para hallar $\overline{AC}$.

$$(AC)^2 = (BC)^2 + (AB)^2$$
$$(AC)^2 = 1^2 + 1^2$$
$$(AC)^2 = 2$$

El número positivo cuyo cuadrado es 2 se define como la raíz cuadrada de 2 y se escribe $\sqrt{2}$.

Entonces,

$$AC = \sqrt{2}, \text{ luego}$$

$$AD = \sqrt{2}$$

Por consiguiente, el punto D corresponde al número $\sqrt{2}$. ¿Es $\sqrt{2}$ un número racional? ¿Es este número el cociente de dos enteros, y puede ser representado como una fracción $\frac{p}{q}$, en la cual p y q son enteros y $q \neq 0$?

Para responder a esta pregunta, seguiremos una línea de razonamiento que la gente usa con frecuencia. Es el tipo de razonamiento que siguió la madre de Juan un día en que éste llegó tarde de la escuela. A los regaños de su madre, Juan respondió que había venido corriendo desde la escuela hasta su casa. "¡No, no has venido corriendo por todo el camino!", dijo ella firmemente. Juan, avergonzado, preguntó: "¿Cómo lo sabes?" "Si hubieras corrido desde la escuela hasta aquí, estarías jadeante", le respondió ella. "No estás jadeante, luego no has venido corriendo".

La madre de Juan siguió un razonamiento indirecto. Ella supuso lo contrario de lo que quería probar, y mostró que esta hipótesis conducía a una conclusión que no podía ser verdadera. Por consiguiente, su hipótesis tenía que ser falsa, y el enunciado original verdadero.

Demostraremos que $\sqrt{2}$ no es un número racional, empleando el razonamiento indirecto. Supondremos que $\sqrt{2}$ es un número racional y mostraremos que esta hipótesis conduce a una conclusión imposible.

Supongamos que $\sqrt{2}$ es un número racional. Entonces podemos escribir $\sqrt{2}$ como $\frac{p}{q}$, donde p y q son enteros y $q \neq 0$. Toma $\frac{p}{q}$ en su forma irreducible. Esto significa que p y q no tienen otro factor común que 1.

Si $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, entonces $2 = \frac{p^2}{q^2}$, y $2q^2 = p^2$. Como p y q son enteros, p^2 y q^2 también son enteros. Si $p^2 = 2q^2$, entonces p^2 debe ser un número par. (Un entero es par si es igual a 2 multiplicado por otro entero.) Entonces, $p \cdot p$ debe ser par.

Un número impar multiplicado por otro número impar es un número impar. (¿Recuerdas por qué?) Entonces, p debe ser par, y se puede escribir como 2a, donde a es un entero.

Por consiguiente, $p^2 = 2q^2$ se puede escribir como

$$(2a)^2 = 2q^2.$$

$$\text{y} \quad (2a) \cdot (2a) = 2q^2$$

$$\text{y} \quad 2 \cdot (2a^2) = 2q^2$$

$$\text{y} \quad 2a^2 = q^2$$

Esto nos dice que q^2 es también un número par, pues es igual a 2 multiplicado por otro entero. Resulta así que q también es un número par.

Entonces nuestra hipótesis de que $\sqrt{2}$ es un número racional $\frac{p}{q}$ en su forma irreducible, nos ha conducido a la conclusión de que p <u>y</u> q tienen el factor común 2. Esto es imposible, pues la forma irreducible de una fracción es aquella en la cual p <u>y</u> q <u>no</u> tienen otro factor común diferente de 1. Entonces el enunciado "$\sqrt{2}$ es un número racional" debe ser falso.

Como la medida del segmento $\overline{AD}$ de la figura 6-6 es $\sqrt{2}$, entonces $\sqrt{2}$ debe ser el número que corresponde al punto D. Se ha demostrado que $\sqrt{2}$ no es un número racional. Por consiguiente, hay por lo menos un punto sobre la recta numérica que corresponde a algún número que no es un número racional. Con otras palabras, aun cuando los puntos racionales están densamente distribuidos sobre la recta, el conjunto de los puntos de la recta numérica contiene más puntos que el conjunto de los números racionales.

Un número como $\sqrt{2}$, que no es un número racional, se llama <u>número irracional</u>. El prefijo "i" cambia el significado de "racional" en "no racional".

<u>Ejercicios 6-6</u>

1. Construye una figura como la figura 6-6, y marca el punto D con " $\sqrt{2}$ ". Luego usa el compás para localizar el punto que corresponde al número $^{-}(\sqrt{2})$, y márcalo.

2. Dibuja una recta numérica, usando una unidad de la misma longitud que la unidad del problema 1. Usa la letra A para el punto 0 y la letra B para el punto 2. En B construye un segmento perpendicular a la recta numérica y de 1 unidad de longitud; llámalo $\overline{BP}$. Dibuja $\overline{AP}$. ¿Cuál es la medida del segmento $\overline{AP}$?
3. Usa el dibujo del problema 2, y localiza sobre la recta numérica los puntos que corresponden a $\sqrt{5}$ y $^{-}(\sqrt{5})$. Marca esos puntos.
4. ¿Crees que $\sqrt{5}$ es un número racional o un número irracional? ¿Por qué?

*5. Usando el mismo método que para los problemas 2 y 3, localiza el punto $\sqrt{3}$. ¿Puedes imaginar una manera de localizar el punto correspondiente a $\sqrt{6}$? ¿Y a $\sqrt{7}$?

6. Localiza los puntos que corresponden a estos números:

   (a) $2\sqrt{2}$ (b) $\frac{3}{4}\sqrt{2}$ (c) $^{-}(3\sqrt{3})$

7. ¿Crees que $2\sqrt{2}$ es un número racional o un número irracional?
8. PROBLEMA DIFICIL. Demuestra que $\sqrt{5}$ es un número irracional. (Emplea el razonamiento indirecto semejante al que se ha usado para demostrar que $\sqrt{2}$ es irracional. En determinado momento deberás saber que si p^2 tiene a 5 como factor, entonces p también tiene a 5 como factor. Demuestra esta proposición simple. Antes de tratar de demostrar que $\sqrt{5}$ es irracional, piensa en la propiedad de factorización única de los números naturales. Si el número primo 5 no fuera un factor de p, entonces, ¿cómo puede ser un factor de p^2?)

En el estudio anterior se ha demostrado que $\sqrt{2}$ no es un número racional. Es una gran sorpresa saber que podemos construir con tanta facilidad un segmento de recta cuya longitud no está dada por un número racional. Además, parece que hay muchos otros números, tales como $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$ que no son números racionales. Si piensas un poquito sobre los racionales e irracionales, puedes ver una manera de encontrar muchos números irracionales. Por ejemplo, todo número de la forma $\frac{a}{b}\sqrt{2}$, donde $\frac{a}{b}$ es racional, será irracional. Pero el conjunto $\{\frac{a}{b}\sqrt{2}\}$ puede ser puesto en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números racionales $\{\frac{a}{b}\}$. ¡Sin embargo, es obvio que el conjunto $\{\frac{a}{b}\sqrt{2}\}$ es sólo una pequeñísima parte de los números irracionales!

En realidad, hemos sufrido una gran desilusión: los números racionales, a pesar de ser densos sobre la recta numérica, dejan en realidad muchos más lugares vacíos que los que ellos mismos ocupan.

Cuando establecemos una correspondencia biunívoca entre un conjunto dado y el conjunto de los números naturales (o un subconjunto del conjunto de los números naturales) dicen los matemáticos que hemos "enumerado" el conjunto. Podemos "enumerar" el conjunto de los números racionales, pero Jorge Cantor (1845-1918) descubrió en 1874 que el conjunto de los números irracionales no se puede "enumerar" por ningún método. Hay tantos números irracionales que es imposible establecer una correspondencia biunívoca entre el conjunto de esos números y el conjunto de los números naturales. De cualquier manera que trates de enumerar los números irracionales, algunos se te escaparán; de hecho, se te escaparán más de los que hayas tomado. A esto aludimos al decir que el conjunto de los numeros racionales deja más lugares vacíos sobre la recta numérica que los que llena.

Si te interesas en aprender algo más sobre este importante aspecto de las matemáticas, puedes consultar la obra Uno dos tres ... infinito por George Gamow (capítulo I). Puedes hallar una breve pero interesante historia de la vida de Cantor en Vidas de matemáticos por E.T. Bell (capítulo 29).

6-7. Representación decimal de $\sqrt{2}$

Los números como $\sqrt{5}$ y $\sqrt{2}$ corresponden a puntos sobre la recta numérica; determinan longitudes de segmentos de recta y satisfacen a nuestra intuición de lo que es un número. Probablemente el aspecto más desusado del número $\sqrt{2}$ es la manera como se le ha definido: $\sqrt{2}$ es el número positivo n que, elevado al cuadrado, es igual a 2, de manera que

$$n^2 = 2$$

Esta forma es distinta de la que empleamos anteriormente para definir los números, pues hasta ahora hemos tratado principalmente con enteros y con números definidos como razones de enteros.

Para mejorar nuestra comprensión de $\sqrt{2}$ veremos una nueva manera de describir $\sqrt{2}$ mediante nociones más familiares. Si, por ejemplo pudiéramos expresar de alguna manera $\sqrt{2}$ como un decimal, esto nos ayudaría a compararlo con los números racionales que conocemos. Además, esto nos indicaría su localización en la recta numérica.

Tomemos la definición del número $\sqrt{2}$; es decir, $(\sqrt{2})^2 = 2$. Si elevamos al cuadrado 1 y 2, notamos inmediatamente que

$$1^2 < (\sqrt{2})^2 < 2^2 \text{ y por consiguiente } 1 < \sqrt{2} < 2$$

Esto nos dice que $\sqrt{2}$ es mayor que 1 y menor que 2, lo que ya sabíamos. Podemos tratar de obtener una mayor aproximación probando con los cuadrados de 1.1, 1.2, 1.3, 1.4 y 1.5. Después de unas pocas operaciones (¡ensáyalas!) obtenemos el resultado

$$1.96 = (1.4)^2 < (\sqrt{2})^2 < (1.5)^2 = 2.25$$

y por consiguiente concluimos que $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$.

Con algunos cálculos ligeramente más complicados, vemos en la siguiente etapa que

$$1.9881 = (1.41)^2 < (\sqrt{2})^2 < (1.42)^2 = 2.0164$$

y por consiguiente,

$$1.41 < \sqrt{2} < 1.42$$

Si tratamos de continuar el procedimiento, obtenemos en la siguiente etapa

$$1.414 < \sqrt{2} < 1.415$$

Como ves, este procedimiento puede seguirse hasta que se agote nuestro entusiasmo, obteniendo en cada etapa una mayor aproximación decimal. Si continuáramos hasta la séptima cifra decimal tendríamos

$$1.4142135 < \sqrt{2} < 1.4142136$$

Esta es una muy buena aproximación para $\sqrt{2}$, pues

$$(1.4142135)^2 = 1.99999982358225$$

y

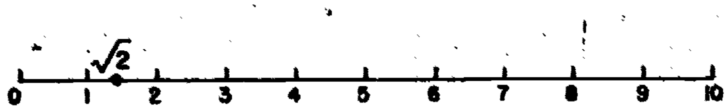
$$(1.4142136)^2 = 2.00000010642496$$

Entonces, empleando la propiedad que define $(\sqrt{2})^2 = 2$, podemos hallar aproximaciones decimales de $\sqrt{2}$ tan exactas como queramos. Hemos llegado a establecer que

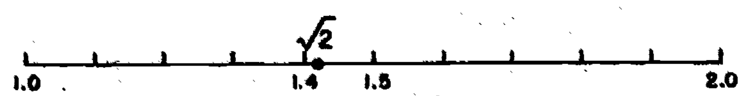
$$\sqrt{2} = 1.4142135\ldots$$

donde los tres puntos indican que los dígitos continúan indefinidamente, como lo sugiere el procedimiento anterior.

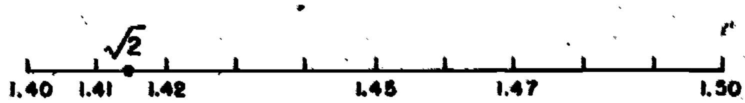
Geométricamente, el procedimiento que hemos seguido se puede describir sobre la recta numérica de la siguiente manera: tomando primero los enteros de la recta numérica en el segmento 0 a 10, vemos que $\sqrt{2}$ debe estar entre 1 y 2.



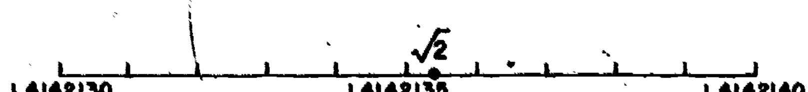
Agrandando este segmento (mediante un aumento de uno a diez) vemos que $\sqrt{2}$ está en el segmento cuyos extremos son 1.4 y 1.5 y



agrandando aún más la figura, $\sqrt{2}$ está dentro del intervalo (1.41, 1.42),



y así hasta la octava etapa, en que $\sqrt{2}$ está entre 1.4142135 y 1.4142136.



Este procedimiento nos indica cómo leer los dígitos sucesivos en la representación decimal de $\sqrt{2}$. Al mismo tiempo nos da una manera de determinar la posición del punto sobre la recta real.

Cuando escribimos el número $\sqrt{2}$ como 1.4142135... toma una apariencia sospechosamente parecida a la de los números racionales que hemos visto, como por ejemplo,

$$\frac{1}{3} = 0.3333333\ldots \quad \text{y} \quad \frac{1}{7} = 0.14285714\ldots$$

Debemos preguntarnos en qué se diferencian y cómo podemos distinguir un número racional de uno irracional cuando tenemos solamente las representaciones decimales de dichos números.

La característica fundamental de la representación decimal de los números racionales es que sus decimales se repiten con periodicidad. Como hemos visto, todo decimal periódico representa un número racional. Entonces, la representación decimal de $\sqrt{2}$ no puede ser periódica, pues $\sqrt{2}$ es irracional. Podemos estar seguros de que por más que continuemos calculando dígitos en la representación decimal,

$$\sqrt{2} = 1.4142135\ldots$$

ningún grupo de dígitos volverá a repetirse periódica e indefinidamente. Podemos estar seguros de que un decimal representa un número racional solamente en el caso en que haya un período en ese decimal que como dijimos se indica con una barra ($\overline{\quad}$).

Ejercicios 6-7

1. ¿Entre qué dos enteros consecutivos están los números irracionales que siguen? (Escribe la respuesta como se sugiere en la pregunta (a).) Usa la tabla apareciendo en las páginas 200 y 201.

   (a) $\sqrt{30}$ $\qquad$ ($\_\_\_ < \sqrt{30} < \_\_\_$)

   (b) $\sqrt{89}$

   (c) $\sqrt{253}$

   (d) $\sqrt{4280}$ (Sugerencia: 4,280 es 42.80×10^2, entonces comienza el cálculo tomando $\sqrt{43} \cdot 10$.)

   (e) $\sqrt{9315}$

2. Expresa (a), (b) y (c) como decimales con seis cifras.
   (a) $(1.731)^2$
   (b) $(1.732)^2$
   (c) $(1.733)^2$
   (d) Halla la diferencia entre tu respuesta a la parte (a) y el número 3; halla la diferencia entre tu respuesta a la parte (b) y el número 3; halla la diferencia entre tu respuesta a la parte (c) y el número 3.
   (e) ¿Cuál es la mejor representación decimal de $\sqrt{3}$ con la aproximación de una milésima?

¿Cuáles de los números que se sugieren es una mejor aproximación para los siguientes números irracionales?

3. $\sqrt{3}$: 1.73 ó 1.74
4. $\sqrt{15}$: 3.87 ó 3.88
5. $\sqrt{637}$: 25.2 ó 25.3

Halla, con la aproximación de una décima, la expresión decimal de los siguientes números irracionales:

6. $\sqrt{10}$
7. $\sqrt{149}$
8. $\sqrt{221}$

*9. ¿Para qué número positivo n (con una cifra decimal) es $n^2 = 10$?

*10. ¿Para qué número positivo n (con una cifra decimal) es $n^2 = 149$?

6-8. Los números irracionales y el sistema de los números reales

Hemos visto que todos los números racionales tienen representación decimal periódica y que todos los decimales periódicos corresponden a números racionales. Hemos visto también que $\sqrt{2}$ no es un número racional y que, por consiguiente, se representa por un decimal no periódico. En consecuencia, hemos dicho que

$\sqrt{2}$ es un número irracional.

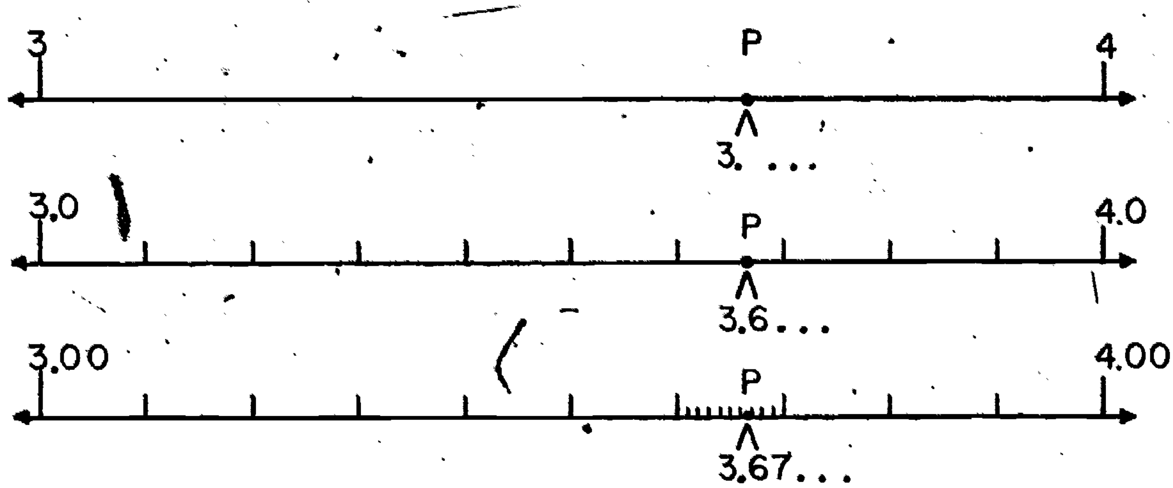
Ahora usamos esta forma decimal para definir el conjunto de los numeros irracionales. Definimos un número irracional como todo número con representación decimal no periódica.

Llamamos sistema de los números reales al sistema que se compone de todos los números racionales e irracionales.

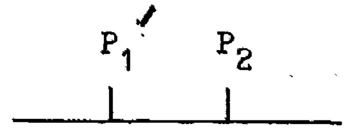
De esta manera, todo número real puede ser caracterizado por una representación decimal.

Si la representación decimal es periódica el número es racional, en todo otro caso el número es irracional.

Con todo punto P de la recta numérica real, asociamos un número y sólo uno de esta clase mediante un proceso de encajamientos sucesivos con intervalos decimales de longitud constantemente decreciente. Las figuras que aparecen a continuación ilustran las primeras etapas del cálculo del decimal que corresponde al punto P sobre la recta numérica. Considera el punto P entre 3 y 4.



Observa que dos puntos distintos cualesquiera P_1 y P_2, corresponderán a representaciones decimales distintas, pues si aparecen así:



sobre la recta numérica sólo necesitamos subdividir ésta mediante una partición decimal suficientemente fina (décimas, centésimas, milésimas, etc.) para cerciorarnos de que los puntos P_1 y P_2 están separados por un punto de una subdivisión.

Recíprocamente, dado cualquier decimal, hemos visto la manera de localizar el punto correspondiente sobre la recta numérica real tomando aproximaciones racionales decimales sucesivas suministradas por el número. (Recuerda cómo hemos empezado para localizar el punto $2.3\overline{9614}\ldots$ en la Sección 6-5.)

Entonces hay una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números reales y el conjunto de puntos de la recta numérica.

El conjunto de los números reales contiene el conjunto de los números racionales como subconjunto. Hemos visto que esos números racionales forman un sistema matemático con operaciones: adición y multiplicación y sus inversas, sustracción y división. Lo mismo ocurre con el conjunto de todos los números reales. Podemos sumar números reales, racionales o irracionales, y podemos multiplicar números reales. El sistema de números que así resulta tiene todas las propiedades del sistema de los números racionales. Además, tiene una importante propiedad de que carece el sistema de los números racionales. Posteriormente estudiaremos esa propiedad.

Antes de enunciar las propiedades de los números, debemos preguntarnos por lo que sabemos acerca de las operaciones mismas. No deberías tener dificultad alguna en comprender el significado de la adición en el sistema de los números reales, en lo que se refiere a la recta numérica. Aun cuando no hay ningún nombre más simple para una suma como $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ que el mismo símbolo "$\sqrt{2} + \sqrt{3}$", puedes imaginar un método de construcción para el punto $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sobre la recta numérica colocando extremo con extremo, segmentos de longitud $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$.

El significado de la multiplicación es un poco más difícil de explicar. Dados los segmentos de longitudes $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$, es posible describir una construcción geométrica de un punto que llamaríamos de modo natural $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$. Sin embargo, tendrás que estudiar el Capítulo 9 antes de estar en disposición de comprender dicha construcción. Se puede también ver el significado de las dos operaciones mediante las representaciones decimales que hemos descrito, pero aun aquí encontramos algunas dificultades que no estás en condición de superar. Esto no te debe preocupar mucho. Con frecuencia aun los matemáticos deben aceptar hechos que no comprenden completamente para avanzar en el trabajo que les interesa más inmediatamente. Pero si las ideas que aceptan son importantes, vuelven siempre a ellas tan pronto como pueden y las dominan. Regresarás al sistema de los números reales a medida que estudies matemáticas en el futuro, y cada vez comprenderás mejor la definición y el sentido de las operaciones.

A continuación damos una lista de propiedades familiares que el sistema de los números reales comparte con el de los números racionales.

<u>Propiedad 1.</u> <u>Clausura</u>

(a) Clausura respecto de la adición. El sistema de los números reales es cerrado respecto de la adición; es decir, si a y b son números reales, entonces $a + b$ es un número real.

(b) Clausura respecto de la sustracción. El sistema de los números reales es cerrado respecto de la sustracción (operación inversa de la adición); es decir, si a y b son números reales, entonces $a - b$ es un número real.

(c) Clausura respecto de la multiplicación. El sistema de los números reales es cerrado respecto de la multiplicación; es decir, si a y b son números reales, entonces $a \cdot b$ es un número real.

(d) Clausura respecto de la división. El sistema de los números reales es cerrado respecto de la división (operación inversa de la multiplicación); es decir, si a y b son números reales, entonces $a \div b$ (cuando $b \neq 0$) es un número real.

Las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división de números reales conservan las propiedades que ya hemos visto en el sistema de los números racionales. Se pueden resumir así:

Propiedad 2. Conmutatividad

(a) Si a y b son números reales, entonces $a + b = b + a$.

(b) Si a y b son números reales, entonces $a \cdot b = b \cdot a$.

Propiedad 3. Asociatividad

(a) Si a, b y c son números reales, entonces $a + (b + c) = (a + b) + c$.

(b) Si a, b y c son números reales, entonces $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Propiedad 4. Elementos neutrales

(a) Si a es un número real, entonces $a + 0 = a$; es decir, cero es el elemento neutral para la adición.

(b) Si a es un número real, entonces $a \cdot 1 = a$; es decir, uno es el elemento neutral para la multiplicación.

Propiedad 5. Distributividad

Si a, b y c son números reales, entonces $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

Propiedad 6. Inversos

(a) Si a es un número real, hay un número real ^-a, llamado inverso aditivo de a, tal que $a + (^-a) = 0$.

(b) Si a es un número real y $a \neq 0$, hay un número real b, llamado inverso multiplicativo de a, tal que $a \cdot b = 1$.

Propiedad 7. Ordenación

El conjunto de los números reales es ordenado; es decir, si a y b son números reales distintos, entonces $a < b$ ó $a > b$.

Propiedad 8. Densidad

El sistema de los números reales es denso; es decir, entre dos números reales distintos cualesquiera, hay siempre otro número real. En consecuencia, entre dos números reales cualesquiera existen tantos números reales como queramos. En efecto, fácilmente vemos que: (1) Siempre hay un número racional entre dos números reales distintos cualesquiera, por muy próximos que estén. (2) Siempre hay un número irracional entre dos números reales distintos, por muy próximos que sean. (Posteriormente, en esta sección, verás cómo se ilustra esta propiedad.)

La novena propiedad del sistema de los números reales no está tomada de los números racionales.

<u>Propiedad 9.</u> <u>Completitud</u>

El sistema de los números reales es completo; es decir, no solamente corresponde un punto de la recta numérica a cada número real sino que, recíprocamente, a cada punto de la recta numérica le corresponde un número real.

Los números racionales se diferencian de los números reales justamente en este aspecto. A cada número racional le corresponde un punto de la recta numérica, pero no hay ningún número racional que corresponda a ciertos puntos de la recta numérica. Hemos visto que en el sistema de los números racionales no hay ningún número $\sqrt{2}$ tal que elevado al cuadrado dé 2. Sin embargo, en el sistema de los números reales tal como le hemos definido, ese número está incluido.

Si a y b son números racionales positivos y $b = a^n$ escribimos

$$a = \sqrt[n]{b}$$

(que se lee "a es una raíz enésima de b").

Ocurre que la raíz enésima de cualquier número racional positivo que no es la enésima potencia de otro número racional, es un número irracional. Esto significa que números como,

$$\sqrt{3},\ \sqrt[3]{\frac{5}{17}},\ \sqrt[4]{15},\ \sqrt{\frac{2}{3}},$$

son números irracionales, mientras que

$$\sqrt{25},\ \sqrt[4]{16},\ \sqrt{\frac{81}{144}},\ \sqrt[3]{8},$$

son números racionales. En consecuencia, en el sistema de los números racionales no nos es posible extraer raíces enésimas de cualquier número racional que no sea una enésima potencia de otro número racional. Sin embargo, desde que hemos introducido los números irracionales para formar el sistema de los números reales, podemos hallar las raíces enésimas de todos los números racionales positivos, así como de todos los números reales positivos. Entonces, una propiedad muy útil del sistema de los números reales es la siguiente:

> El sistema de los números reales contiene las raíces enésimas, $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, de todos los números racionales positivos $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$; el sistema de los números reales contiene las raíces enésimas de todos los números reales positivos.

Esto nos asegura que podemos hallar entre los números reales, números como

$$\sqrt{3},\ \sqrt{7},\ \sqrt[3]{4},\ \sqrt[5]{23}$$

y cualesquiera otras raíces enésimas de números racionales positivos, así como números que son sumas, diferencias, productos y cocientes de tales números. Por ejemplo:

$$1 + \sqrt{5},\ \sqrt[3]{4} - \sqrt[4]{5},\ \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \text{ y } \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$$

son números reales.

Además de los números irracionales que aparecen al calcular las raíces de los números racionales, hay muchos otros números irracionales que se llaman números trascendentes. Un ejemplo de número trascendente es el número π que ya has encontrado en tus estudios de la circunferencia. Recuerda que π es la razón de la medida de la longitud de la circunferencia a la medida de su diámetro. Ha sido extraordinariamente difícil demostrar que π es irracional, pero se ha demostrado. La representación decimal

$$\pi = 3.14159265\ldots$$

no es periódica. El número π no es $\frac{22}{7}$, aunque $\frac{22}{7}$ es una aproximación aceptable para π. (Compara la representación decimal de $\frac{22}{7}$ con la de π.)

Cuando estudies logaritmos, en el segundo ciclo secundario, estudiarás números que, salvo pocas excepciones, son números trascendentes. Si N es un número real positivo cualquiera y x es un exponente tal que

$$10^x = N$$

entonces decimos que x es el logaritmo de N en la base 10. Si N es una potencia de 10, por ejemplo $N = 10^2$, entonces $10^x = 10^2$, de manera que el logaritmo de 10^2 es 2 en la base 10. En tal caso, el logaritmo es un número racional. Pero para la mayor parte de los números el logaritmo es un número irracional (trascendente).

Las razones trigonométricas, como el seno y la tangente de un ángulo, son otras expresiones que habitualmente conducen a números irracionales trascendentes. Esas razones se definen en el Capítulo 9.

Ejercicios 6-8a

1. ¿Cuáles de los siguientes números crees que son racionales y cuáles irracionales? Haz dos listas.

   (a) $0.231\overline{231}\ldots$
   (b) $0.23123112311123\ldots$
   (c) $\frac{3\sqrt{2}}{7\sqrt{2}}$
   (d) $\sqrt{7}$
   (e) $0.78\overline{342}\ldots$
   (f) $\frac{\pi}{2}$
   (g) $\frac{3}{4}\sqrt{6}$
   (h) $9 - \sqrt{3}$
   (i) $0.7500\overline{0}\ldots$
   (j) $\frac{58}{11}$
   (k) $0.9595595559555559\ldots$

2. Escribe cada uno de los números racionales del problema 1 como decimal y como fracción.
3. Para cada uno de los números irracionales del problema 1 escribe un decimal con la aproximación de una centésima.
4. (a) Escribe tres números racionales con decimales exactos.
   (b) Escribe tres números racionales con decimales periódicos.
   (c) Escribe tres números irracionales con decimales.

Has aprendido a intercalar números racionales entre dos números racionales dados. Ahora, con lo que has estudiado sobre la representación decimal de los números reales, puedes ver cómo intercalar tanto números racionales como irracionales entre números reales. Observa estos decimales para dos números a y b.

$$a = 4.2193173173\overline{317}\ldots$$

$$b = 4.2365655655565555 6\ldots$$

Estos dos números son bastante próximos, pero cualquier decimal que comience como 4.22... será mayor que a y menor que b. Podemos luego continuar este decimal de tal manera que lo hagamos racional o irracional. Aun podemos hacer un decimal exacto si así lo queremos. Por ejemplo, 4.222 y $4.225\overline{225}\ldots$ son números racionales mientras 4.225622566225666... es irracional. Todos estos números están entre a y b.

Para asegurarnos de que un número real representado en forma decimal es irracional debemos escribirlo de manera que no sea periódico. Una manera fácil de lograrlo es repetir un grupo de uno o más dígitos y en cada repetición con un número dígito diferente más, primero, luego con dos más, luego con tres más, y así sucesivamente. Por ejemplo, en el número b = 4.23656556555655555... el dígito 6 se repite y está seguido por un 5, la primera vez, por dos la segunda, y así sucesivamente. En el número 4.237823788237888... el número 237 se repite y está seguido por un 8 la primera vez, luego por dos 8, luego por tres, y así sucesivamente. Debido a que el dígito 8 aparece un número creciente de veces en la formación de este decimal, el decimal no puede tener un período fijo. El número representado debe ser, pues, irracional.

Ejercicios 6-8b

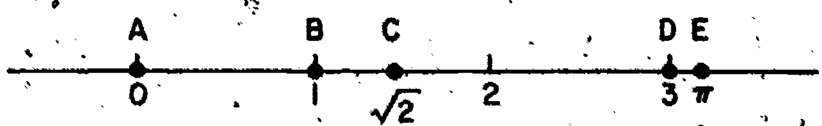
1. (a) Escribe la expresión decimal para un número racional entre $2.3846\overline{846}\ldots$ y $2.369\overline{369}\ldots$.
   (b) Escribe la expresión decimal para un número irracional entre los números indicados en (a).
2. Escribe la expresión decimal para (a) un número racional y (b) un número irracional, entre 0.346019... y 0.342806...
3. Escribe expresiones decimales para (a) un número racional y (b) un número irracional, entre 67.283... y 67.28106006.... .
4. ¿Crees que el sistema de los números reales contiene las raíces cuadradas de todos los enteros? Apoya tu respuesta en un ejemplo.

5. Una aproximación que los babilonios usaban para π era la interesante razón $\frac{355}{113}$. ¿Es una buena aproximación? ¿Es mejor aproximación que $\frac{22}{7}$?

6-9. Propiedades geométricas de la recta numérica real

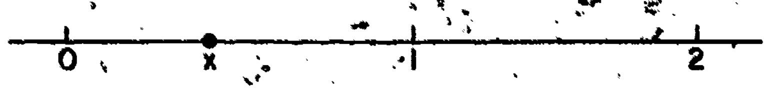
La correspondencia biunívoca entre los números reales y los puntos de la recta numérica nos da por primera vez una representación geométrica satisfactoria de los números. Por esta razón es costumbre referirse a la recta numérica como la recta numérica real.

Sabemos que no hay vacíos ni puntos que falten en toda la recta real. Podemos hablar del trazado continuo de la recta numérico y saber que el segmento descrito en cualquier etapa tiene una longitud que se mide mediante un número real. Entonces, en la recta numérica que se indica a continuación



sabemos que $\overline{BC}$ tiene una longitud de medida $\sqrt{2} - 1$, la longitud de $\overline{CD}$ tiene por medida $3 - \sqrt{2}$, $\overline{BE}$ tiene por medida $\pi - 1$ y $\overline{CE}$ se mide por $\pi - \sqrt{2}$.

Podemos imaginar un punto que se mueve de modo continuo de 0 a 1. A cualquiera de sus posiciones podemos asociarle un número real.



Por esta propiedad de continuidad de nuestro sistema de los números reales, algunas veces lo llamamos el continuo de los números reales.

Aproximaciones racionales de los números irracionales

Cada vez que damos un número irracional en forma decimal, por ejemplo, $N = 0.019234675\ldots$, podemos definir automáticamente una sucesión de números racionales que da aproximaciones cada vez mayores al número irracional N. Podemos leer tal sucesión de aproximaciones racionales así:

$$\begin{array}{l} 0.01 \\ 0.019 \\ 0.0192 \\ 0.01923 \\ 0.019234 \\ 0.0192346 \\ 0.01923467 \\ 0.019234675 \end{array}$$

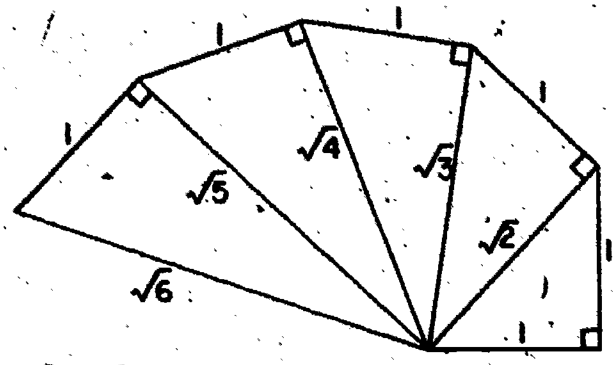
Números racionales e irracionales en el mundo que nos rodea

Hemos visto muchos ejemplos de números racionales en nuestra vida diaria: el precio de las mercancías, el importe total de un balance bancario, el porcentaje de un pago, el importe semanal de un salario, las calificaciones de un examen.

Aunque no hemos estudiado durante mucho tiempo los números irracionales, es fácil ver muchos ejemplos referentes a estos números. Por ejemplo, considera una circunferencia de radio unitario. ¿Cuál es su longitud? Naturalmente, es 2π unidades. En realidad, toda circunferencia cuyo radio es un número racional tiene una longitud irracional. También, todo círculo de radio r tiene un área cuya medida es un número irracional (πr^2) cada vez que r sea un número racional y frecuentemente cuando r es irracional.

El volumen de un cilindro circular se calcula por la fórmula $V = \pi r^2 h$ y su área lateral A por $A = 2\pi rh$, donde h es la altura del cilindro. Aquí también el volumen y el área son números irracionales si el radio r y la altura h son racionales.

También has aprendido a dibujar algunas longitudes de medida irracional siguiendo una sucesión simple de triángulos rectángulos:



Observarás sin embargo que este procedimiento da algunas longitudes <u>racionales</u>, pues $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, y así sucesivamente.

Dibuja esta sucesión de triángulos rectángulos en una hoja de papel, y continúala hasta que hayas dibujado una longitud que representa a $\sqrt{10}$.

Ejercicios 6-9

1. ¿Cuáles de los siguientes números son racionales y cuáles irracionales?

   El número de unidades de
   (a) la longitud de una circunferencia cuyo radio es $\frac{1}{2}$ unidad.
   (b) el área de un cuadrado cuyos lados tienen una unidad de longitud.
   (c) la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos tienen 5 y 12 unidades de longitud.
   (d) el área de un cuadrado cuyos lados tienen $\sqrt{3}$ unidades de longitud.
   (e) el volumen de un cilindro cuya altura es 2 unidades y cuya base tiene por radio 1 unidad.
   (f) el área de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene 2 unidades de longitud y cuyos catetos son iguales.
2. Sabiendo que $\sqrt{2} \approx 1.414$ y que $\sqrt{3} \approx 1.732$, muestra que $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \approx \sqrt{6} \approx 2.449$.
3. Cuando empezamos a calcular con números irracionales encontramos algunas relaciones que al principio nos parecen muy

peculiares pero que, después de un estudio más minucioso, tienen perfecto sentido. He aquí dos ejemplos:

El inverso multiplicativo de $\sqrt{2}$ es $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

El inverso multiplicativo de $(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ es $(\sqrt{3} - \sqrt{2})$.

*(a) Comprueba estas afirmaciones aproximadamente, empleando las aproximaciones decimales dadas en el problema 2.

(b) PROBLEMA DIFICIL. Comprueba estas afirmaciones con exactitud, efectuando los cálculos con los números irracionales mismos.

*4. Halla el radio de una circunferencia cuya longitud es 2. Da un valor aproximado del radio. (Toma 3.14 para π.)

INDICE ALFABETICO

Los números indican las páginas en el texto.