DOCUMENT RESUME

ED 186 214		SE 030 377

AUTHOR	Anderson, R. D.; And Others
TITLE	Matematicas Para El Primer Ciclo Secundario, Volumen I (Parte 2). Traduccion Preliminar de la Edicion Inglesa Revisada. (Mathematics for Junior High School, Volume I, Part 2. Preliminary Translation of the Revised English Edition).
INSTITUTION	Stanford Univ., Calif. School Mathematics Study Group.
SPONS AGENCY	National Science Foundation, Washington, D.C.
PUB DATE	62
NOTE	290p.; For related documents in Spanish, see SE 030 376-379. Contains occasional light and broken type.
LANGUAGE	Spanish
EDRS PRICE	MF01/PC12 Plus Postage.
DESCRIPTORS	*Bilingual Education; Fractions; Geometry; *Instructional Materials; *Mathematics Curriculum; Mathematics Education; *Mathematics Instruction; Secondary Education; *Secondary School Mathematics; Statistics; *Textbooks
IDENTIFIERS	*School Mathematics Study Group

ABSTRACT

This is part two of a two-part SMSG mathematics text for junior high school students. Key ideas emphasized are structure of arithmetic from an algebraic viewpoint, the real number system, and metric and non-metric relations in geometry. Included are chapters on the rational number system; parallels, parallelograms, triangles, and right prisms; circles; statistics and graphs; mathematical systems; and mathematics in science. (PH)

GRUPO DE ESTUDIO DE LA MATEMATICA ESCOLAR

MATEMATICAS PARA EL PRIMER CICLO SECUNDARIO

VOLUMEN I (Parte 2)

(Traducción preliminar de la edición inglesa revisada)

MATEMATICAS PARA EL PRIMER CICLO SECUNDARIO

VOLUMEN I (Parte 2)

(Traducción preliminar de la edición inglesa revisada)

Texto preparado bajo la supervisión del personal para los grados de estudio 7° y 8°, del Grupo de Estudio de la Matemática Escolar:

R.D. Anderson, Universidad del Estado de Luisiana

J.A. Brown, Universidad de Delaware

Lenore John, Universidad de Chicago

B.W. Jones, Universidad de Colorado

P.S. Jones, Universidad de Michigan

J.R. Mayor, Asociación Americana para el Avance de la Ciencia

P.C. Rosenbloom, Universidad de Minnesota

Veryl Schult, Supervisor de Matemáticas, Wáshington, D.C.

El apoyo financiero para el Grupo de Estudio de la Matemática Escolar provino de la Fundacion Nacional de Ciencias.

Proyecto de Traducción al Español

Comisión Consultiva

Edward G. Begle, Universidad de Stánford

Howard F. Fehr, Universidad de Columbia

Mariano García, Universidad de Puerto Rico

Max Kramer, San Jose State College

TABLA DE MATERIAS

Capítulo

Capítulo

NOTA: Algunos ejercicios han sido marcados con un asterisco (*) para orientar al maestro en la selección de los mismos.

Capítulo 9

RAZONES, PROPORCIONES, PORCENTAJES Y DECIMALES

9-1. Razones y proporciones

Un día soleado un niño midió la longitud de la sombra proyectada por cada miembro de su familia. También midió la longitud de la sombra proyectada por un árbol grande en el patio de su casa. Encontró que su padre, cuya estatura es de 72 pulgadas, proyectaba una sombra de 48 pulgadas de largo. Su madre, cuya estatura es de 63 pulgadas, proyectaba una sombra de 42 pulgadas de largo. Su hermanito, cuya estatura solamente es de 30 pulgadas, proyectaba una sombra de 20 pulgadas de largo. El niño no sabía qué altura tenía el árbol, pero sabía que la sombra que éste proyectaba era de 40 pies de largo.

Dispongamos estos datos en una tabla:

	Longitud de la sombra	Estatura o altura
Padre	48 pulgadas	72 pulgadas
Madre	42 pulgadas	63 pulgadas
Hermanito	20 pulgadas	30 pulgadas
Arbol	40 pies	?

Vemos que las personas más altas tienen sombras más largas. Examinemos esto con más detalle. Supongamos que dividimos el número de pulgadas de la longitud de la sombra del hermanito por el número de pulgadas de su estatura. Obtenemos $\frac{20}{30}$ ó $\frac{2}{3}$. Supongamos que hacemos lo mismo en relación con la estatura del padre y la sombra que proyecta. Sería más fácil medir la altura y la longitud de la sombra del padre en pies. El padre tiene 6 pies de estatura y su sombra tiene 4 pies de longitud. Si dividimos la longitud de su sombra en pies por la longitud de su estatura, también en pies, obtenemos $\frac{4}{6}$ ó $\frac{2}{3}$.

Divide el número de pulgadas de la longitud de la sombra de la madre por el número de pulgadas de su estatura. ¿Obtienes aún $\frac{2}{3}$?

Supongamos que este principio se aplica a todos los objetos. (Por supuesto, debemos medir las sombras al mismo tiempo y en el mismo lugar, pues la longitud de las sombras cambia a medida que pasa el día y la posición del sol cambia.) Entonces, el árbol debe tener 60 pies de alto para que la medida de su sombra dividida por la medida de su altura resulte $\frac{2}{3}$. ¡Podemos conocer la altura del árbol sin medirlo!

En el Capítulo 6 hemos usado el término "razón" y estudiado algunas de sus aplicaciones.

Definición. La razón o relación de un número a, a un número b $(b \neq 0)$, es el cociente $\frac{a}{b}$. (A veces esta razón se escribe $a:b$.)

En el problema de las sombras hemos formado la razón de la medida de la longitud de la sombra a la medida de la estatura o altura, y hemos descubierto que esta razón era la misma para todas las personas cuyas sombras se han medido. Este descubrimiento nos ha permitido determinar que la altura del árbol era de 60 pies.

Suponte que el tío del niño tiene una estatura de 66 pulgadas (5 pies 6 pulgadas). ¿Qué longitud tendría su sombra si se la midiera en el mismo sitio y al mismo tiempo que las de toda la familia?

Sea s el número de pulgadas de la longitud de su sombra; entonces debe ser:

$$\frac{s}{66} = \frac{2}{3}$$

El número $\frac{2}{3}$ puede expresarse como fracción con denominador 66.

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{22}{22} = \frac{44}{66}$$

$$\frac{s}{66} = \frac{44}{66}$$

$$s = 44$$

La sombra del tío tendría 44 pulgadas de longitud.

Hes visto que una razón es una comparación de dos números por división. Los números pueden ser medidas de cantidades físicas. La palabra "por", en una de sus acepciones, significa división, y la usamos para expresar la razón de las medidas de dos cantidades físicas, tales como millas y horas. Los precios de las tiendas nos dan más ejemplos. Los precios relacionan el valor de las cosas con la cantidad de las mismas, como en el caso de $1.. por libra, ó $0.. por docena. En cada caso, la palabra "por" indica una razón entre dos cantidades que son, generalmente, de diferente especie. Observa, además, que la segunda cantidad en cada caso representa el término de comparación. Una tienda cobra "10 centavos por peine"; un peine es el término de comparación, y la caja de la tienda debe registrar 10 centavos cobrados por cada peine vendido. Esta determinación, por supuesto, no siempre se representa por una cantidad de uno. Por ejemplo, centavos por docena, dólares por par (para zapatos), dólares por 1,000 (para ladrillos).

Volviendo a nuestro ejemplo y a la definición de razón, vemos que una razón compara exactamente dos números. En nuestro ejemplo teníamos dos conjuntos de números, uno de longitudes de las sombras y otro de las estaturas o alturas. En cada caso hemos formado la razón del primer número (longitud de la sombra) al segundo número (estatura o altura). En nuestro ejemplo esas razones eran iguales en todos los casos. En esta situación, decimos que las cantidades físicas medidas por los números son proporcionales entre sí. Una proporción es la afirmación de la igualdad de dos razones.

Entonces, en nuestro ejemplo de la primera página de este capítulo, la longitud de la sombra es proporcional a la estatura o altura. La razón de cada par de medidas, en ese ejemplo, es $\frac{2}{3}$. Usaremos esa razón nuevamente para determinar la altura de una torre si la longitud de su sombra es 21 pies. Sea w el número de pies de altura de la torre. Entonces la afirmación.

$$\frac{21}{w} = \frac{2}{3}$$

es una proporción. Consideremos ahora algunos enunciados de esta forma; volveremos luego a esta proporción para mostrar un método que permita encontrar un número de manera que, sustituido por w en la proporción, haga de ésta una proporción verdadera.

En el Capítulo 6 hemos visto que:

(a) $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ (b) $\frac{3}{4} = \frac{24}{32}$ (c) $\frac{5}{6} = \frac{15}{18}$ (d) $\frac{3}{8} = \frac{375}{1000}$

En (a) $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$, vemos que $2 \cdot 9 = 18$ y $3 \cdot 6 = 18$; entonces $2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$. En (b) $\frac{3}{4} = \frac{24}{32}$, vemos que $3 \cdot 32 = 96$ y $4 \cdot 24 = 96$; entonces $3 \cdot 32 = 4 \cdot 24$. En forma análoga, en (d) $\frac{3}{8} = \frac{375}{1000}$, vemos que $3 \cdot 1,000 = 8 \cdot 375$, pues $8 \cdot 375 = 3,000$. Comprueba esta propiedad para (c) $\frac{5}{6} = \frac{15}{18}$.

Ensaya otros ejemplos de pares de fracciones que representen el mismo número racional. ¿Son iguales los productos del numerador de una fracción por el denominador de la otra? Veamos si esta propiedad es verdadera para todos los pares de fracciones, que sean numerales de un mismo número racional.

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y $b \neq 0$ y $d \neq 0$, entonces

$\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{b}$ — $\frac{a}{b}$ se multiplica por $\frac{d}{d}$, que es igual a 1, y $\frac{c}{d}$ se multiplica por $\frac{b}{b}$.

$\frac{ad}{bd} = \frac{cb}{db}$ — Se obtienen estos productos de manera que los dos números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ estén expresados como fracciones con un denominador común.

$\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$

Entonces $ad = bc$. — Si dos fracciones con el mismo denominador son nombres para el mismo número racional, sus numeradores son iguales.

Hemos demostrado:

<u>Propiedad 1.</u> <u>Si</u> $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y $b \neq 0$ y $d \neq 0$, <u>entonces</u> $ad = bc$.

Esta propiedad puede resultarte útil en la solución de problemas en que hay proporciones. También es cierto que si $ad = bc$, entonces $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ siempre que $b \neq 0$ y $d \neq 0$. Dejaremos la demostración de esta propiedad como problema. (V. el problema 18.)

Podemos volver ahora a nuestro problema de la altura de la torre.

Si	$\frac{21}{w} = \frac{2}{3}$	
entonces	$21 \cdot 3 = 2w$	propiedad 1
	$63 = 2w$	
	$\frac{63}{2} = w$	definición de un número racional
	$31\frac{1}{2} = w$	

La torre tiene $31\frac{1}{2}$ pies de altura.

Ejercicios 9-1

1. ¿Cuál es tu estatura en pulgadas? ¿Cuál sería la longitud de tu sombra si fuera medida al mismo tiempo y en el mismo sitio en que se midieron las sombras de las personas aludidas en el problema con que se introdujo este capítulo?

2. A continuación, se indican los datos de otros objetos que fueron medidos en otro sitio y en otro momento. Copia y completa la tabla.

	Longitud de la sombra	Altura	Razón
Garage	3 pies	8 pies	
Percha para ropa	36 pulgadas		$\frac{3}{8}$
Arbol	$7\frac{1}{2}$ pies	20 pies	
Mástil		144 pulgadas	$\frac{3}{8}$
Cerca	$11\frac{1}{4}$ pulgadas	30 pulgadas	

3. En una clase hay 30 estudiantes de los cuales 12 son niñas.
   (a) ¿Cuál es la razón del número de niñas al número total de estudiantes de la clase?
   (b) ¿Cuál es la razón del número de niños al número total de alumnos de la clase?
   (c) ¿Cuál es la razón del número de niñas al número de niños?

4. En otra clase, la razón del número de niñas al número de niños es $\frac{2}{3}$, la misma que en el problema 3. Si en esta clase hay 10 niñas, ¿cuántos niños hay?

5. En el problema 18 se te pide demostrar que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, si $ad = bc$ y $b \neq 0$ y $d \neq 0$. Utiliza esta propiedad para averiguar cuáles de los siguientes pares de razones son iguales:

   (a) $\frac{10}{5}, \frac{20}{10}$ (d) $\frac{68}{17}, \frac{76}{19}$

   (b) $\frac{6}{3}, \frac{16}{9}$ (e) $\frac{15}{13}, \frac{45}{39}$

   (c) $\frac{48}{16}, \frac{42}{14}$

6. En cada uno de los siguientes ejercicios, determina x de manera que la proposición que se enuncia sea verdadera:

(a) $\frac{20}{[illegible]} = \frac{x}{[illegible]}$ (d) $\frac{81}{108} = \frac{x}{12}$

(b) $\frac{14}{30} = \frac{x}{90}$ (e) $\frac{x}{42} = \frac{36}{27}$

(c) $\frac{x}{3} = \frac{75}{15}$

7. Josefina tiene un retrato de 4 pulgadas de ancho y 5 pulgadas de largo. Quiere ampliarlo de manera que tenga 8 pulgadas de ancho. ¿Qué longitud tendrá la ampliación?

8. Si una torre proyecta una sombra de 75 pies de largo y al mismo tiempo un hombre de 6 pies de estatura proyecta una sombra de 4 pies de largo, ¿qué altura tiene la torre?

9. Al señor Pérez se le pagó la suma de \$135 por un trabajo que ha requerido 40 horas. ¿Cuánto debería pagársele por un trabajo que requiere 60 horas, si el salario por hora es el mismo?

10. Una receta para preparar pastelitos menciona los siguientes ingredientes:

1 taza de mantequilla	$1\frac{1}{2}$ tazas de harina.
$\frac{2}{3}$ de taza de azúcar	1 cucharita de vainilla
2 huevos	

Con estas cantidades se pueden preparar 30 pastelitos.

(a) Repite la receta aumentando los ingredientes en la razón $\frac{3}{1}$.

(b) ¿Cuántos pastelitos se pueden hacer con la nueva receta?

(c) Suponte que quieres hacer 45 pastelitos. ¿Cuánto necesitarás de cada ingrediente?

11. Utiliza una proporción para resolver los siguientes problemas. Comprueba tus cálculos resolviendo los problemas por otro método.

(a) ¿Cuánto cuestan 3 docenas de rosquillas a \$0.55 por docena?

(b) ¿Cuánto cuestan 12 bombones si 4 cuestan 15 centavos? (¿Cómo podrías escribir este precio utilizando la palabra "por"?)

(c) ¿Cuánto cuestan 8,500 ladrillos a razón de $14 por millar?

(d) Una carretera tiene una pendiente de 6%, lo que significa que sube 6 pies por cada 100 pies de carretera. ¿Cuánto subirá en una milla? Halla la respuesta con la aproximación de un pie.

12. Para expresar velocidades se usan habitualmente unidades tales como "millas por hora" y "pies por segundo". Una motocicleta puede viajar a 30 millas por hora. ¿Cuántos pies por segundo son? (El peligro de las altas velocidades, en varias circunstancias, puede expresarse mejor cuando se da la velocidad en pies por segundo.)

13. La siguiente tabla da una lista de pares de números, A y B. En cada par la razón de A a B es el número $\frac{6}{7}$. Completa la tabla.

	A	B	Razón $\frac{A}{B}$	Razón en su forma más simple
(a)	12	14	$\frac{12}{14}$	$\frac{6}{7}$
(b)		21		
(c)	30			
(d)		100		
(e)	100			

*14. Algunas veces es conveniente comparar más de dos cantidades. Por ejemplo, una mezcla de nueces tiene 5 libras de maní, 2 libras de anacardos y 1 libra de pacanas. En este caso la razón del número de libras de maní al número de libras de anacardos es $\frac{5}{2}$ ó 5 a 2, y la razón del número de libras de anacardos al número de libras de pacanas es 2 a 1. Esto puede escribirse brevemente así: 5:2:1. Suponte que un comerciante desea preparar 24 libras de esta mezcla. ¿Cuántas libras de maní, de anacardos y de pacanas debe emplear? Para encontrar tu respuesta, responde primero a las siguientes preguntas:

(a) Si se mezclan 5 libras de maní, 2 libras de anacardos y

1 libra de pacanas, ¿cuántas libras hay en total?

(b) ¿Cuál es la razón del número de libras de maní al número total de libras?

(c) Como esta razón debe ser la misma en la mezcla cuyo peso total es 24 libras, ¿cuántas libras de maní se necesitan?

(d) Responde a las preguntas (b) y (c) cuando se reemplaza la palabra "maní" por la palabra "anacardos".

(e) Responde a las preguntas (b) y (c) cuando se reemplaza la palabra "maní" por la palabra "pacanas".

*15. Se van a preparar cincuenta y seis libras de una mezcla de nueces, con los mismos ingredientes y en la misma proporción que en el problema 14. ¿Cuántas libras de cada ingrediente se necesitarán?

*16. Se tienen 100 libras de una mezcla con los mismos ingredientes que en el problema 14, pero que están en la proporción 5:3:2. ¿Cuántas libras de cada ingrediente hay?

*17. Un triángulo tiene sus lados de longitudes 11 pulgadas, 8 pulgadas y 6 pulgadas. Si se va a dibujar otro triángulo de 100 pulgadas de perímetro, las medidas de cuyos lados están en la proporción 11:8:6, ¿cuál será la longitud del lado más corto?

*18. Demuestra la propiedad,

si $ad = bc$ y $b \neq 0$ y $d \neq 0$, entonces $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Cuando hayas demostrado esta propiedad, podrás decir:

si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, y $b \neq 0$ y $d \neq 0$, entonces $ad = bc$,

y sólo en este caso.

(Sugerencia: Si $ad = bc$, entonces $a = \frac{bc}{d}$. Podemos expresar $\frac{bc}{d}$ como $b \cdot \frac{c}{d}$.)

9-2. Porcentajes

Muchos de tus condiscípulos están habituados a la palabra "por ciento", y tú conoces probablemente lo que significa. Si tu maestro dice: "90 por ciento de las respuestas de esta prueba son correctas", ¿sabes lo que quiere decir? La expresión "por ciento" viene de la frase latina "per centum", y de ella deriva la palabra "porcentaje". Si la prueba con 90 por ciento de las respuestas correctas tiene 100 respuestas, entonces 90 respuestas de esas 100 son correctas. Se podría usar la razón $\frac{90}{100}$ en vez de la frase "90 por ciento" para describir la parte de las respuestas que son correctas. La frase "por ciento" se usa cuando una razón está expresada con un denominador 100.

$$90 \text{ por ciento} = \frac{90}{100} = 90 \cdot \frac{1}{100}$$

En vez de la expresión "por ciento" se usa el símbolo, %. Este símbolo es una abreviatura de $\frac{1}{100}$.

$$\frac{90}{100} = 90 \cdot \frac{1}{100} = 90\%$$

$$\frac{16}{100} = 16 \cdot \frac{1}{100} = 16\%$$

$$\frac{37}{100} = 37 \cdot \frac{1}{100} = 37\%$$

$$\frac{77}{100} = 77 \cdot \frac{1}{100} = \ ?\%$$

$$? = 13 \cdot \frac{1}{100} = 13\%$$

Suponte que de las 100 respuestas de una prueba, 90 son correctas, 6 incorrectas y 4 han sido omitidas. Como conocemos el número total de problemas de la prueba, podemos expresar esta información como porcentajes.

$\frac{90}{100} = 90 \cdot \frac{1}{100} = 90\%$ (90% de las respuestas fueron correctas.)

$\frac{6}{100} = 6 \cdot \frac{1}{100} = 6\%$ (6% de las respuestas fueron incorrectas.)

$\frac{4}{100} = 4 \cdot \frac{1}{100} = 4\%$ (4% de las respuestas fueron omitidas.)

$\frac{90}{100} + \frac{6}{100} + \frac{4}{100} = \frac{100}{100}$ (Todas las respuestas posibles.)

$90\% + 6\% + 4\% = 100\%$ (Todas las respuestas posibles.)

Otro nombre para el número uno es 100%.

El número 2 puede escribirse también así:

$$\frac{2}{1} = \frac{200}{100} = 200\%$$

Con otras palabras, 200% significa $200 \times \frac{1}{100} = \frac{200}{100} = 2$.

Una clase de 25 alumnos está compuesta de 11 niñas y 14 niños. La razón del número de niñas al número de alumnos de la clase puede expresarse de varias formas. Por ejemplo,

$$\frac{11}{25} = \frac{22}{50} = \frac{33}{75} = \frac{44}{100} = \frac{55}{125} = \frac{66}{150} .$$

Si quisiéramos indicar el porcentaje de niñas de la clase, ¿qué fracción daría la información más fácilmente? ¿Por qué? La razón del número de niños al número total de alumnos de la clase puede escribirse como sigue:

$$\frac{14}{25} = \frac{c}{50} = \frac{d}{75} = \frac{56}{100} = \frac{e}{125} = \frac{f}{150}$$

¿Qué números representan las letras c, d, e y f? Observa las dos razones $\frac{11}{25}$ (niñas) y $\frac{14}{25}$ (niños). ¿Cuál es la suma de las dos razones? Halla la suma de las dos razones $\frac{44}{100}$ y $\frac{56}{100}$. Expresa las dos razones y su suma como porcentajes, utilizando el símbolo % . La clase entera se considera como el 100% de la clase porque

$$\frac{25}{25} = \frac{100}{100} = 100\%$$

<u>Todo número</u> $\frac{a}{b}$ <u>puede ser expresado como un porcentaje hallando el número</u> c <u>tal que</u>

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{100} = c \cdot \frac{1}{100} = c\%$$

Ejercicios 9-2a

1. Utilizando papel cuadriculado, dibuja un cuadrado grande cuyo interior esté dividido en 100 cuadrados pequeños. Escribe la letra A en 10 cuadrados pequeños. Escribe la letra B en 20% de los cuadrados. Escribe la letra C en 35% de los cuadrados. Escribe la letra D en 30 de los cuadrados. Escribe la letra X en los cuadrados restantes.
   (a) ¿En qué parte fraccionaria del total de los cuadrados está la letra A?
   (b) ¿En qué porcentaje del total de los cuadrados está la letra A?
   (c) ¿En cuántos cuadrados está la letra B?
   (d) ¿En qué parte fraccionaria del total de los cuadrados está la letra B?

(e) ¿En cuántos cuadrados está la letra C?

(f) ¿En qué parte fraccionaria del total de los cuadrados está la letra C?

(g) ¿En qué parte fraccionaria del total de los cuadrados está la letra D?

(h) ¿En qué porcentaje del total de los cuadrados está la letra D?

(i) ¿En qué parte fraccionaria del total de los cuadrados está la letra X?

(j) ¿En qué porcentaje del total de los cuadrados está la letra X?

2. ¿Cuál es la suma de los números obtenidos como respuestas para (a), (d), (f), (g) e (i), del problema 1?

3. En el problema 1, ¿cuál es la suma de los porcentajes de los cuadrados que contienen las letras A, B, C, D y X?

4. Escribe cada uno de los siguientes números como un porcentaje:

(a) $\frac{1}{2}$	(d) $\frac{1}{5}$	(g) $\frac{3}{2}$	(j) $\frac{7}{5}$
(b) $\frac{1}{4}$	(e) $\frac{2}{5}$	(h) $\frac{2}{2}$	(k) $\frac{5}{4}$
(c) $\frac{3}{4}$	(f) $\frac{3}{5}$	(i) $\frac{4}{4}$	(l) $\frac{5}{2}$

5. Considera la clase siguiente:

Estudiante	Color del cabello
Roberto	rubio
Juana	negro
María	rubio
Juan	rojo
José	negro
Beatriz	negro
Raimundo	rubio
Donaldo	negro
Margarita	rojo
David	negro

(a) ¿Qué porcentaje son niños?

(b) ¿Qué porcentaje son rubios?

(c) ¿Qué porcentaje son pelirrojos?

(d) ¿Qué porcentaje no son pelirrojos?

(e) ¿Qué porcentaje son niñas de pelo negro?

(f) ¿Qué porcentaje son niños pelirrojos?

6. Juanita recibe de sus padres 50 centavos por semana. Una semana gasta 12 centavos en un lápiz, 10 centavos en helados, 15 centavos en una colecta escolar y guarda el resto en su alcancía.
   (a) Expresa la razón de cada gasto y del ahorro al total del dinero que recibe semanalmente, y expresa cada razón como un porcentaje.
   (b) Halla la suma de las razones.
   (c) Halla la suma de los números indicados por los porcentajes.
   (d) ¿Qué coincidencia encuentras entre las respuestas anteriores?
7. El ingreso mensual de una familia es $400. El presupuesto mensual de la familia es:

Pago de amortización por la hipoteca de la casa	$80
Impuestos	20
Pago del automóvil	36
Alimentación	120
Ropa	48
Gastos de funcionamiento	32
Salud, diversiones, etc.	24
Ahorros y seguros	40

   (a) ¿Qué porcentaje del ingreso se asigna a cada partida del presupuesto?
   (b) ¿Cómo se haría una comprobación de la exactitud de las ocho respuestas?

El porcentaje es un método conveniente para dar información referente a razones. Los resultados de las competencias atléticas se dan a veces en porcentajes. Dos alumnos del séptimo grado han descubierto la razón por la cual se usan los porcentajes en estos casos. Los niños estaban discutiendo las puntuaciones de sus equipos de béisbol. Un equipo ganó 15 partidos de los 20 que se jugaron. Otro equipo ganó 18 de los 25 partidos jugados. ¿Cuál de los equipos tuvo mayor éxito en el juego? El segundo equipo ha ganado 3 partidos más, pero el primero ha jugado menos partidos. Observa las razones del número de partidos ganados al número de partidos jugados por cada equipo. Las razones $\frac{15}{20}$ y $\frac{18}{25}$ no se pueden comparar a simple vista. Usemos para ello los porcentajes.

El primer equipo ganó $\frac{15}{20}$ de los partidos jugados.

$\frac{15}{20} = \frac{75}{100} = 75\%$. Ganó 75% de los partidos jugados.

El segundo equipo ganó $\frac{18}{25}$ de los partidos jugados.

$\frac{18}{25} = \frac{72}{100} = 72\%$. Ganó 72% de los partidos jugados.

El primer equipo, que ganó 75% de sus partidos, tuvo mayor éxito que el segundo equipo, que ganó 72% de sus partidos. Podríamos decir que $72\% < 75\%$, ó $75\% > 72\%$.

Se dan a veces en forma ~~de~~ porcentaje muchos datos referentes a negocios, escuelas, etc. Transcurrido algún tiempo, frecuentemente es más conveniente referirse a esos datos como porcentajes que de otra manera.

Hace unos años el director de un campamento tomó algunos datos para uso futuro. Algunas informaciones estaban en porcentajes y otras no. Los archivos daban la información siguiente:

(1) Había 200 niños en el campamento.

(2) Ciento por ciento de los niños tenían apetito antes de la primera comida en el campamento.

(3) En el segundo día 44 niños pescaron.

(4) Un niño quería regresar a su casa la primera noche.

(5) El director de un campamento vecino dijo: "Cuarenta por ciento de los niños de mi campamento quieren aprender a nadar este verano. Enseñaré a nadar a 32 niños".

Según las informaciones (1) y (2), ¿cuántos niños tenían apetito cuando vinieron a cenar el primer día?

$$\frac{100}{100} \cdot 200 = 200$$

Naturalmente, podemos saber sin necesidad de calcular que el 100% de 200 es 200.

Utilizando la información (3), podemos encontrar el porcentaje de niños que pescaron el segundo día. La razón del número de niños que pescaron al número total de niños que había en el campamento es $\frac{44}{200}$. Si llamamos $x\%$ al porcentaje de los niños que pescaron, entonces

$$\frac{x}{100} = \frac{44}{200}$$

$$200x = 100 \cdot 44 \qquad \text{propiedad 1}$$

$$x = \frac{100 \cdot 44}{200}$$

$$x = 22$$

Veintidós por ciento de los niños pescaron.

Partiendo de (4) podemos encontrar el porcentaje de niños que tenían nostalgia de su hogar. Si lo designamos por $x\%$, entonces

$$\frac{x}{100} = \frac{1}{200}$$

$$200x = 100 \qquad \text{propiedad 1}$$

$$x = \frac{100}{200}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

De todos los niños, $\frac{1}{2}\%$ tenían nostalgia de su hogar. Este porcentaje debe leerse "medio por ciento" o "la mitad de uno por ciento". Probablemente prefieres decir "la mitad de uno por ciento", pues esto acentúa su pequeñez.

Con la información (5), se puede saber el número total de niños del segundo campamento. Llamemos x a este número de niños. 40% significa $\frac{40}{100}$ del grupo, y también se refiere a 32 niños. Deseamos hallar x tal que $\frac{40}{100} = \frac{32}{x}$.

$$\frac{40}{100} = \frac{32}{x}$$

$$40x = 3{,}200 \qquad \text{propiedad 1}$$

$$x = \frac{3200}{40}$$

$$x = 80$$

Ejercicios 9-2b

1. Un equipo ganó 3 de los 5 primeros partidos jugados.
   (a) ¿Qué porcentaje de los primeros 5 partidos ganó el equipo?
   (b) ¿Qué porcentaje de los primeros 5 partidos perdió el equipo?

2. Posteriormente, en la misma temporada, el equipo ganó 8 de los 16 partidos jugados.
   (a) ¿Cuál es el porcentaje de partidos que ha ganado esta vez?
   (b) ¿Ha aumentado o disminuido el porcentaje de partidos ganados?
3. Al final de la temporada el equipo había ganado 26 de los 40 partidos jugados.
   (a) Al finalizar la temporada, ¿qué porcentaje de los partidos jugados había ganado el equipo?
   (b) Compara este porcentaje con los otros dos.
4. Hay 600 alumnos de séptimo grado en una escuela secundaria de primer ciclo. El director piensa dividir a los alumnos en 20 secciones de igual número de alumnos.
   (a) ¿Cuántos alumnos habrá en cada sección?
   (b) ¿Qué porcentaje de los alumnos estará en cada sección?
   (c) ¿Cuántos alumnos son el 1% del número total de alumnos del séptimo grado?
   (d) ¿Cuántos alumnos son el 10% del número total de alumnos del séptimo grado?
5. Suponte que una sección contiene 36 alumnos. ¿Qué porcentaje de los alumnos del séptimo grado está en esa sección?
6. Ciento cincuenta alumnos del séptimo grado vienen a la escuela en autobús.
   (a) ¿Qué porcentaje de los alumnos del séptimo grado vienen en autobús?
   (b) ¿Qué porcentaje de los alumnos del séptimo grado vienen a la escuela por otros medios de transportación?
7. En una sección de 30 alumnos, 3 llegaron con retraso.
   (a) ¿Qué parte fraccionaria del total de alumnos de <u>esa sección</u> llegó tarde?
   (b) ¿Qué porcentaje del total de alumnos de esa sección se retrasó?
8. Había 750 alumnos del octavo grado. ¿Qué porcentaje del número de alumnos del séptimo grado es el número de alumnos del octavo grado?
9. Un día llegan a la escuela 3 alumnos del séptimo grado con

muletas, pues habían estado esquiando. ¿Qué porcentaje del número de alumnos del séptimo grado andaba con muletas?

10. Un alumno del séptimo grado oyó un día al director decir: "Hoy está ausente el cuatro por ciento de los alumnos del noveno grado". La lista de ausentes ese día había registrado 22 nombres del noveno grado. Con estas dos informaciones, el alumno del séptimo grado descubrió el número de alumnos del noveno grado que tenía la escuela. ¿Cuántos alumnos del noveno grado había?

9-3. Notación decimal

Recordarás que decíamos en el Capítulo 2, que un numeral en base diez estaba escrito en forma desarrollada si, siendo por ejemplo 3,284, se escribía como $3(10^3) + 2(10^2) + 8(10^1) + 4$. Se dice que el numeral está en notación posicional si se escribe como 3,284. En base diez esta forma se llama también notación decimal. Cada dígito representa un valor dado de acuerdo a su colocación en el numeral. En el ejemplo anterior, el 3 está en el lugar de los miles, el 2 en el de los cientos, y así sucesivamente. En base diez la notación posicional dice que el valor de cada lugar inmediatamente a la izquierda de cierto lugar es diez veces mayor que el valor de este último. El valor de la posición inmediatamente a la derecha de una posición dada es un décimo del valor de esa posición. Observando el número 3,284 escrito en notación desarrollada, notarás que leyendo de izquierda a derecha los exponentes de diez decrecen. Supónte que queremos escribir 5,634.728 en notación desarrollada. Podríamos escribir $5(10^3) + 6(10^2) + 3(10^1) + 4 + 7(\ ?\ ) + 2(\ ?\ ) + 8(\ ?\ )$. El 4 ocupa el lugar de las unidades. El valor de este lugar es $\frac{1}{10}$ del valor del lugar inmediatamente a su izquierda. Si extendemos nuestro numeral en un lugar hacia la derecha del lugar de las unidades y deseamos conservar nuestra forma de desarrollo, ¿cuál será el valor de ese lugar? ¿Y del lugar siguiente a ése? Para escribir la forma desarrollada a la derecha de las unidades tanto como a su izquierda tenemos:

$5(10^3) + [illegible](10^2) + 3(10^1) + 4 + 7(\frac{1}{10}) + 2(\frac{1}{10^2}) + 8(\frac{1}{10^3})$, donde el primer lugar a la derecha de las unidades es el lugar de las décimas.

La siguiente tabla muestra los valores de posición tanto a la izquierda como a la derecha del lugar de las unidades.

Tabla de los valores de posición

Centenas de millar	Decenas de millar	Millares	Centenas	Decenas	Unidades	Décimas	Centésimas	Milésimas	Diez milésimas	Cien milésimas
100,000	10,000	1,000	100	10	1	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10^2}$	$\frac{1}{10^3}$	$\frac{1}{10^4}$	$\frac{1}{10^5}$

Habitualmente decimos que los lugares de la derecha son los lugares decimales.

Cuando el número 3,284.569 se escribe en notación decimal, el punto decimal indica el lugar de las unidades. El número se lee "tres mil doscientos ochenta y cuatro con quinientos sesenta y nueve milésimas" o "tres dos ocho cuatro—punto—cinco seis nueve".

Ejemplo 1. Escribe $5(10^2) + 7(10^1) + 3(\frac{1}{10})$ en notación decimal.

Observa que no se ha escrito el lugar de las unidades. ¿Puede escribirse el lugar de las unidades como $0(10^0)$? Tu resultado, 570.3, te ayudará a dar esta nueva respuesta.

Ejercicios 9-3

1. Escribe cada una de las expresiones siguientes en notación decimal:

   (a) $6(10) + 5(1) + 8(\frac{1}{10}) + 7(\frac{1}{10^2})$

   (b) $4(10^2) + 3(10) + 6(1) + 1(\frac{1}{10}) + 9(\frac{1}{10^2})$

   (c) $5(10) + 2(\frac{1}{10}) + 4(\frac{1}{10^2})$

   (d) $4(\frac{1}{10}) + 8(\frac{1}{10^2}) + 3(\frac{1}{10^3})$

   (e) $2(\frac{1}{10^3}) + 6(\frac{1}{10^4})$

   (f) $3(\frac{1}{10}) + 5(\frac{1}{10^5})$

   (g) $3(10^2) + 4(\frac{1}{10^2})$

2. Escribe cada uno de los siguientes numerales en forma desarrollada:

   (a) 32.55
   (b) 1.213
   (c) 0.4
   (d) 3.01
   (e) 0.0102
   (f) 0.10001
   (g) 30.03

3. Escribe cada uno de los siguientes numerales en palabras. Por ejemplo, 3.001 se escribe tres con una milésima.

   (a) 7.236 (d) 1.0101
   (b) 0.004 (e) 909.009
   (c) 360.101 (f) 3.0044

4. Escribe en forma de numerales decimales:

   (a) Trescientos cincuenta y dos centésimas.
   (b) Quinientos siete diezmilésimas.
   (c) Catorce milésimas.

(d) Sesenta con siete centésimas.
(e) Treinta y dos cienmilésimas.
(f) Ocho con diecinueve milésimas.

*5. Escribe 0.1_{dos} en base diez.

*6. Escribe $\frac{1}{2}$ en el sistema duodecimal.

*7. Escribe $\frac{5}{6}$ en el sistema duodecimal.

*8. Cambia 10.011_{dos} a base diez.

9-4. Operaciones con decimales

Supongamos que queremos sumar dos números dados en forma decimal; por ejemplo, $0.73 + 0.84$. Sabemos cómo sumar: $73 + 84 = 157$. ¿Cómo hacemos con las cifras decimales? Podríamos proceder como sigue:

$$0.73 = 73 \times \frac{1}{100} \quad \text{y} \quad 0.84 = 84 \times \frac{1}{100}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} 0.73 + 0.84 &= \left(73 \times \frac{1}{100}\right) + \left(84 \times \frac{1}{100}\right) \\ &= (73 + 84) \times \frac{1}{100} \\ &= 157 \times \frac{1}{100} = 1.57 \end{aligned}$$

Observa que hemos usado la propiedad distributiva.

Supongamos ahora que queremos hallar la suma ~~de~~ $0.73 + 0.125$. Igual que antes, primero volvemos a escribir nuestros números como fracciones:

$$0.73 = 73 \times \frac{1}{100} = 730 \times \frac{1}{1000} \quad \text{y} \quad 0.125 = 125 \times \frac{1}{1000}$$

Utilizamos la última forma indicada para 0.73, pues entonces $\frac{1}{1000}$ aparece en ambos productos.

$$\begin{aligned} 0.73 + 0.125 &= \left(730 \times \frac{1}{1000}\right) + \left(125 \times \frac{1}{1000}\right) \\ &= (730 + 125) \times \frac{1}{1000} \\ &= 855 \times \frac{1}{1000} = 0.855 \end{aligned}$$

Estos ejemplos pueden ser tratados de modo más conveniente escribiendo un número debajo del otro, como sigue:

$$\begin{array}{r} .73 \\ + .84 \\ \hline 1.57 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 0.73 \\ + 0.125 \\ \hline 0.855 \end{array}$$

Observa que escribimos los puntos decimales cada uno exactamente debajo del otro. Esto se debe a que queremos sumar el número en el lugar de las décimas del primer sumando al número en el lugar de las décimas del segundo sumando, y el número en el lugar de las centésimas en el primer sumando al número en el lugar de las centésimas en el segundo, etc. Entonces

$$0.73 = \frac{7}{10} + \frac{3}{100} \quad y \quad 0.84 = \frac{8}{10} + \frac{4}{100}$$

y por consiguiente

$$\begin{aligned} 0.73 + 0.84 &= \frac{7+8}{10} + \frac{3+4}{100} \\ &= \frac{15}{10} + \frac{7}{100} \\ &= 1.57 \end{aligned}$$

Se puede tratar la sustracción de la misma manera. Por ejemplo,

$$\begin{array}{r} 0.84 \\ - 0.73 \\ \hline 0.11 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 0.83 \\ - 0.74 \\ \hline 0.09 \end{array}$$

Ejercicios 9-4a

1. Suma los siguientes números:
   (a) 0.76 + 0.84
   (b) 0.719 + 0.382
   (c) 1.002 + 0.0102
   (d) 1.05 + 0.75 + 21.5
2. Resta los siguientes números:
   (a) 0.84 - 0.76
   (b) 0.625 - 0.550
   (c) 0.500 - 0.125
   (d) 1.005 - 0.0005
3. Efectúa las operaciones indicadas:
   (a) 1.0[illegible]1 - 0.702 + 0.066
   (b) 0.407 - 0.32 + 0.076

4. Cuatro hombres entran en una ferretería en busca de alambre de cobre; el primero quiere comprar 10.1 pies, el segundo 15.1, el tercero 8.6 y el cuarto 16.6 pies. El dependiente sabe que la ferretería sólo tiene 50 pies de esa clase de alambre. ¿Puede dar a cada comprador lo que desea?
5. Un comerciante tiene 11.5 libras de azúcar. Una señora compra 5.6 libras. Otra compra 4.8 libras. Luego un camión de aprovisionamiento le trae 25 libras. Finalmente los ratones se comen 0.05 libras. ¿Cuánto azúcar le queda?
6. Una libra tiene 16 onzas. ¿Qué pesa más, 7 onzas ó 0.45 libras?
7. En casi toda Europa las distancias se miden en kilómetros. (Recuerda que un kilómetro es alrededor de $\frac{5}{8}$ de milla.) La distancia de la ciudad A a París es 37.5 kilómetros y la distancia de la ciudad B a París es 113.2 kilómetros. ¿A qué distancia está la ciudad A de la ciudad B, pasando por París?
8. Supón que las tres ciudades, A, B y París del ejemplo anterior están en la misma carretera y que la ciudad A está entre París y la ciudad B. Entonces, ¿qué distancia en kilómetros hay entre las dos ciudades A y B a lo largo de la carretera?
*9. Halla el valor de la suma, en el sistema decimal, de los números 10.01_{dos} y 1.01_{dos}. Primero pasa al sistema decimal y luego suma.

Supón que queremos multiplicar dos números en forma decimal. Por ejemplo, 0.3×0.25. Sabemos cómo multiplicar los números: $3 \times 25 = 75$. En la misma forma que para la suma, escribamos

$$\begin{aligned} 0.3 \times 0.25 &= 3 \times \frac{1}{10} \times 25 \times \frac{1}{100} \\ &= 3 \times 25 \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{100} \\ &= 75 \times \frac{1}{1000} \\ &= 0.075 \end{aligned}$$

1. ¿Cuántos dígitos hay en 0.3 a la derecha del punto decimal?
2. ¿Cuántos dígitos hay en 0.25 a la derecha del punto decimal?
3. ¿Cuál es la suma de las respuestas a 1 y 2?
4. ¿Cuántos dígitos hay en 0.075 a la derecha del punto decimal?
5. Compara las respuestas a 3 y 4.

Ahora multiplica 0.4×0.25. ¿Cuál es tu respuesta? Responde a las cinco preguntas anteriores, 1, 2, 3, 4 y 5, para tales números. ¿Concuerdan entre sí aún las respuestas dadas a 3 y 4?

<u>Propiedad 2.</u> <u>Para encontrar el número de cifras decimales del producto cuando se multiplican dos números, suma el número de las cifras decimales de los dos numerales.</u>

Por ejemplo, multipliquemos 0.732 por 0.25. El primer numeral tiene tres cifras decimales y el segundo tiene dos, entonces el producto debe tener cinco cifras decimales. Calculamos el producto 732×25, y luego marcamos cinco cifras decimales en la respuesta, contando de derecha a izquierda.

$$\begin{array}{r} 0.732 \\ \underline{0.25} \\ 03660 \\ \underline{01464} \\ 0.18300 \end{array}$$

Consideremos ahora el problema de dividir dos números expresados en forma decimal, por ejemplo, $0.125 \div 0.5$.

Como primer paso se acostumbra buscar una fracción cuyo denominador sea un número cardinal y tal que esa nueva fracción sea también un nombre para $0.125 \div 0.5$. En este caso, empezamos con $\frac{0.125}{0.5}$. Luego, a fin de reemplazar el denominador por un número cardinal, multiplicamos el numerador y el denominador por 10 y obtenemos $\frac{1.25}{5}$. Utilizando las fracciones podríamos transformar esto así:

$$\frac{1.25}{5} = \frac{1}{5} \times 1.25 = \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{100} \times 125\right) = \frac{1}{100} \times \left(\frac{1}{5} \times 125\right)$$

$$= \frac{1}{100} \times 25 = 0.25$$

Pero un modo mucho más breve es utilizar la forma habitual de la división.

$$\begin{array}{r} 0.25 \\ 5 \,\overline{)\,1.25} \\ \underline{1\;0} \\ 25 \\ \underline{25} \end{array}$$

Entonces:

(divisor)		(cociente)		(dividendo)
5	×	0.25	=	1.25

y vemos que en la igualdad el número de cifras decimales (dos) del producto es la suma de los números de cifras decimales de los factores de ese producto (0 + 2) conforme a lo expuesto en la propiedad 2. Cuando el divisor es un número cardinal, el dividendo y el cociente tienen el mismo número de cifras decimales. Colocando el punto decimal del cociente coincidente con el del dividendo, localizamos automáticamente el punto decimal del cociente en su posición correcta.

Es fácil cometer un error al colocar el punto decimal en la respuesta y por eso es conveniente verificar con una respuesta estimada. Por ejemplo, vemos que

$$\frac{0.125}{0.5} \text{ es aproximadamente } \frac{0.1}{0.5} = \frac{1}{5} = 0.2$$

lo que se parece bastante a nuestra respuesta.

Trata de seguir el mismo procedimiento con una fracción más complicada: $\frac{5.313}{2.53}$. Si multiplicáramos el denominador por 10 tendríamos 25.3 que no es aún un número cardinal. Pero si multiplicamos por 100 obtenemos 253, que sí es un número cardinal. La fracción dada se transforma entonces en $\frac{531.3}{253}$ y entonces dividimos en la forma habitual:

$$\begin{array}{r} 2.1 \\ 253 \,\overline{)\,531.3} \\ \underline{506} \\ 25\;3 \\ \underline{25\;3} \end{array}$$

Entonces $253 \times 2.1 = 531.3$, donde vemos que el número de cifras decimales de 253 (que es cero) más el número de cifras decimales de 2.1 (que es 1) es igual al número de cifras decimales de 531.3 (que es 1).

Verifica el siguiente cálculo:

$$\frac{0.75}{0.2} = \frac{7.5}{2} = \frac{7.50}{2} = 3.75$$

Por supuesto no podemos pretender que nuestras divisiones sean "exactas" en todos los casos. Por ejemplo, tratemos de encontrar la expresión decimal de $\frac{2}{7}$. Si queremos obtener el cociente con tres cifras decimales, dividiremos 2.000 por 7. Si lo quisiéramos con seis cifras decimales, tendríamos que dividir 2.000000 por 7, y así sucesivamente. Calculemos el cociente con seis cifras decimales:

```
     0.285714...
7 ) 2.000000
    1 4
      60
      56
       40
       35
        50
        49
         10
          7
          30
          28
           2
```

Ejercicios 9-4b

(Suponte que los decimales son exactos.)

1. Calcula los siguientes productos:
   (a) 0.009×0.09
   (b) 0.0025×2.5
   (c) 1.2×120
   (d) 0.135×0.202
2. Determina los siguientes cocientes:
   (a) $0.009 \div 30$
   (b) $0.015 \div 0.05$
   (c) $0.575 \div 0.4$
   (d) $2.04 \div 0.008$

3. Expresa los siguientes números como decimales:

(a) $\frac{3000}{8}$ (d) $\frac{3}{8}$

(b) $\frac{300}{8}$ (e) $\frac{3}{80}$

(c) $\frac{30}{8}$ (f) $\frac{3}{800}$

4. $\frac{0.015 \times 0.0025 \times 2.5}{0.05 \times 0.03} = ?$

5. El padre de Juan tiene un jardín de 25.3 pies de largo y 15.7 pies de ancho. ¿Cuántos pies cuadrados tiene el jardín?

6. Un rectángulo tiene 14.2 metros de largo y 5.7 metros de ancho. ¿Cuál es su área en metros cuadrados?

7. Las dimensiones de una caja son 17.3 metros por 8.3 metros por 2.5 metros. ¿Cuál es su volumen en metros cúbicos?

8. ¿Alrededor de cuántas millas tiene una distancia de 3.8 kilómetros? (Un kilómetro es aproximadamente $\frac{5}{8}$ de milla.)

*9. Calcula el siguiente producto:

$$1.14_{\text{siete}} \times 2.4_{\text{siete}}$$

9-5. Desarrollo decimal

Observemos más detenidamente la expresión decimal de los números racionales. Recuerda que $\frac{1}{8}$ es el cociente de 1 dividido por 8.

$$8\,\overline{)\,1.000}\quad 0.125$$

Resulta así que $\frac{1}{8}$ y 0.125 son nombres para el mismo número racional.

Considera el número racional $\frac{1}{3}$. Todos sabemos cuál es la expresión decimal de este número. Se encuentra dividiendo 1 por 3.

$$3\,\overline{)\,1.000}\quad 0.333\ldots$$

Sin efectuar la división, ¿podemos saber qué dígitos aparecerán en las próximas 6 cifras? ¿Obtendremos por resto cero en alguna etapa de la división?

Los 3 puntos que se han escrito en el cociente indican que el numeral decimal nunca termina.

Observa nuevamente el numeral decimal para $\frac{1}{8}$. Recuerda que se obtuvo dividiendo 1 por 8.

```
    0.12500...
8 ) 1.00000
    8
    20
    16
     40
     40
      0
      0
      0
```

Después de la primera sustracción el resto es 2.

El segundo resto es 4.

El tercer resto es 0.

El cuarto resto es 0. ¿Puedes predecir cuáles serán los restos quinto y sexto?

Habitualmente terminamos nuestra división en el momento en que obtenemos un resto cero. Sin embargo, podríamos continuar dividiendo, obteniendo cada vez un resto cero y un cociente cero.

Es claro que si obtenemos un resto cero los restos que le siguen serán cero. Podríamos escribir $\frac{1}{8} = 0.125000\ldots$ así como escribimos $\frac{1}{3} = 0.333\ldots$, pero lo hacemos rara vez. Por consiguiente, 0.125000... es un decimal cuya cifra 0 se repite indefinidamente. En la misma forma 0.333... es un decimal cuyo dígito 3 se repite indefinidamente.

Por <u>desarrollo decimal</u> queremos decir que hay un dígito para cada cifra decimal. Observa que tanto el desarrollo decimal de $\frac{1}{8}$ como el de $\frac{1}{3}$ poseen cifras que se repiten.

<u>Ejercicios 9-5 para analizar en clase</u>

Consideremos la expresión decimal del número racional $\frac{1}{7}$.

```
    0.142857142857...
7 ) 1.000000000000
```

1. Sin continuar la división, ¿puedes decir qué dígitos aparecerán en cada una de las seis cifras siguientes?
2. ¿Hay un grupo de dígitos que continúa repitiéndose indefinidamente? Coloquemos una barra horizontal sobre el grupo de dígitos que se repiten. Entónces en el caso $0.142857\overline{142857}\ldots$ la barra significa que los mismos dígitos se repiten en el mismo orden y los 3 puntos indican que el decimal no tiene fin.

3. Obtén la expresión decimal de $\frac{1}{11}$.
4. ¿A partir de qué momento reconoces que has encontrado un período, es decir un grupo de dígitos que se repite?
5. ¿Habrá algún resto cero si continúas dividiendo?
6. ¿Se repetirán los dígitos de este decimal? ¿Cómo debes indicarlo?
7. Observa que el decimal se repite cuando el resto se repite. Examina el procedimiento que seguimos para obtener un numeral decimal para $\frac{1}{7}$.

```
     0.142857142857...
7 ) 1.000000000000
    7
    30      Después de la primera sustracción el resto es 3.
    28
     20     El segundo resto es 2.
     14
      60    El tercer resto es 6.
      56
       40   El cuarto resto es 4.
       35
        50  El quinto resto es 5.
        49
         10 El sexto resto es 1.
          7
         30 El séptimo resto es 3. ¿Es el séptimo
         28 dígito a la derecha del punto decimal el
          20 mismo que el primero?
          14
           60 El octavo resto es el mismo que el se-
           56 gundo. ¿Es el octavo dígito a la dere-
            40 cha del punto decimal el mismo que el
            35 segundo?
             50
             49
              1
```

Observa que los dígitos de este cociente comienzan a repetirse cuando cualquiera de los restos anteriores aparece por segunda vez.

8. Haz consideraciones similares cuando divides 1 por 37 para encontrar un numeral decimal para $\frac{1}{37}$.

De estas ilustraciones podemos concluir que todo número racional puede ser nombrado por un decimal numeral en el cual o bien se repite un solo dígito o se repite indefinidamente un grupo de dígitos.

Ejercicios 9-5

1. Escribe un numeral decimal (o decimal) para $\frac{1}{13}$.
   (a) ¿A partir de qué momento puedes reconocer el período?
   (b) ¿Tiene fin este decimal?
   (c) ¿Cómo deberías indicar que no tiene fin?
   (d) ¿Hay algún grupo de dígitos que se repite periódicamente?
   (e) ¿Cómo podrías indicarlo?

2. Escribe decimales para:

   (a) $\frac{1}{3}$
   (b) $\frac{1}{4}$
   (c) $\frac{1}{6}$
   (d) $\frac{7}{8}$
   (e) $\frac{1}{9}$

   Indica a partir de qué momento puedes reconocer el período en cada caso. Al efectuar la división observa los restos, pues te pueden dar una idea de cuándo un numeral decimal comienza a repetirse.

3. Escribe decimales para:

   (a) $\frac{1}{11}$ (c) $\frac{3}{11}$ (e) $\frac{14}{11}$
   (b) $\frac{2}{11}$ (d) $\frac{9}{11}$ (f) $\frac{23}{11}$

4. Estudia los siguientes numerales decimales y ve si puedes encontrar una relación
   (a) Entre el decimal que corresponde a $\frac{1}{11}$ y el decimal que corresponde a $\frac{2}{11}$.
   (b) Entre el decimal que corresponde a $\frac{1}{11}$ y el decimal que corresponde a $\frac{3}{11}$, $\frac{9}{11}$, $\frac{14}{11}$, etc.

5. ¿Puedes encontrar un decimal para $\frac{5}{11}$ sin dividir?

6. ¿Es cierto que el número $0.6\overline{363}...$ es igual al número $0.09\overline{09}...$ multiplicado por siete?

7. Halla el numeral decimal para el primer número de cada uno de los siguientes grupos y calcula los otros sin dividir:

(a) $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}$

(b) $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}$

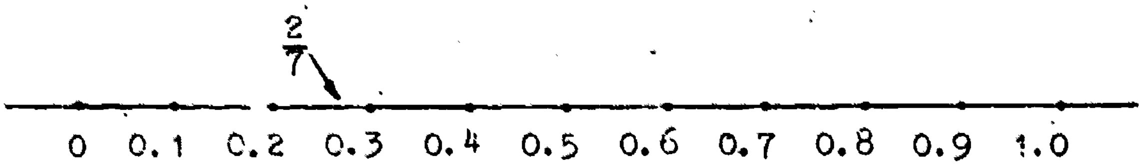
(c) $\frac{1}{20}, \frac{3}{20}, \frac{11}{20}$

(d) $\frac{1}{50}, \frac{42}{50}, \frac{47}{50}$

(e) $\frac{1}{1000}, \frac{111}{1000}, \frac{927}{1000}$

9-6. Redondeo

Supongamos que queremos encontrar un valor decimal aproximado para $\frac{2}{7}$. Podríamos querer, por ejemplo, representar este número sobre una recta numérica en la cual cada segmento represente 0.1 como se muestra a continuación:



¿Dónde estaría $\frac{2}{7}$ en esta recta? Sabemos que su forma decimal es 0.285714... . Probablemente te das cuenta a simple vista de que $\frac{2}{7}$ debe estar entre 0.20 y 0.30. Si esto no te resulta claro, míralo con mayor atención. En primer lugar: 0.285714... = 0.2 + 0.08 + 0.005 + (otros decimales), y en consecuencia, es mayor que 0.2, que es el primer sumando. En segundo lugar, 0.2 es menor que 0.3; 0.28 es menor que 0.30; 0.285 es menor que 0.300, y así sucesivamente. Independientemente del número de cifras decimales que se calculan, obtenemos siempre un número menor que 0.3000000... . También puedes ver que $\frac{2}{7}$ está más próximo de 0.30 que de 0.20, puesto que está entre 0.25 y 0.30, y 0.25 está a mitad de camino entre 0.20 y 0.30. Resulta así que $\frac{2}{7}$ estaría situado en la recta numérica en un lugar como el que se indica con la flecha.

Podríamos representar a $\frac{2}{7}$ con mayor exactitud sobre la recta numérica si dividiéramos cada uno de los segmentos en diez partes. Entonces veríamos que $\frac{2}{7}$ está entre 0.28 y 0.29 pero un poco más cerca de 0.29. (Es posible que quieras exponer las razones de esto con mayor detalle que como lo hemos hecho arriba, a fin de tener una idea bien clara.) Diremos que $\frac{2}{7}$ es 0.29 con la aproximación de un centésimo. Llamamos a esto "redondeo de $\frac{2}{7}$ a dos cifras". ¿Cómo sería $\frac{2}{7}$ redondeado a tres cifras? La respuesta es 0.286.

Este redondeo es útil para estimar resultados. Por ejemplo, supongo que quieres calcular el producto de 1.34×3.56. Este producto podría ser, aproximadamente, $1 \times 4 = 4$ ó, si queremos una estimación más aproximada, podríamos calcular $1.3 \times 3.6 = 4.7$, aproximadamente.

El redondeo también es útil cuando se consideran porcentajes aproximados. Por ejemplo, si se tratara de expresar que de cada 7 familias 2 tienen perro, no sería juicioso efectuar un cálculo con muchas cifras decimales para dar la respuesta en porcentaje. Utilizaríamos exactamente dos cifras y diríamos que alrededor de 29% de todas las familias tienen perro, o aún podríamos redondear más y decir que 30%.

Ocurre un problema particular cuando los números por redondear están exactamente a mitad de camino entre dos números aproximados. Por ejemplo, ¿cómo se podría redondear 3.1215 a tres cifras decimales? Los dos números aproximados son 3.121 y 3.122 y el uno es tan aproximado como el otro. Frecuentemente se usa cualquiera de los dos sin notar mayor diferencia. Sin embargo, si para una suma de varios números se redondeara siempre al número menor, probablemente la respuesta resultaría muy pequeña. Por esta razón nos pondremos de acuerdo en escoger el decimal cuyo último dígito es par. Así, en el caso anterior, escogeríamos 3.122 pues su último dígito es par; este número es un poco más grande que el número dado. En cambio, si el número dado fuera 3.1425, habríamos escogido 3.142 como aproximación, pues el número dado está entre 3.142 y 3.143, pero el primero, 3.142, es el que tiene su último dígito par; en este caso hemos escogido el más pequeño de los dos números aproximados. Esto no es particularmente importante en esta clase pero encontrarás en tus estudios de ciencias que es así como se hace.

Ejercicios 9-6

1. Redondea los siguientes números a dos cifras:
   (a) 0.0351 (c) 0.0051
   (b) 0.0449 (d) 0.0193

2. Redondea los siguientes números a tres cifras:
   (a) 0.1599 (c) 0.00009
   (b) 0.0009 (d) 0.3249
3. Expresa los siguientes números como decimales correctos a tres cifras:
   (a) $\frac{3}{8}$ (c) $\frac{2}{3}$
   (b) $\frac{1}{4}$
4. Expresa los siguientes números como decimales correctos a una cifra:
   (a) $\frac{7}{23}$ (c) $\frac{2}{23}$
   (b) $\frac{6}{23}$ (d) $\frac{1}{23}$
5. (a) Se han tomado las medidas de un terreno expresándolas con la aproximación de una décima de vara larga. (En otras palabras, las medidas han sido redondeadas a una cifra decimal.) El largo redondeado es 11.1 varas largas y el ancho redondeado es 3.9 varas largas. Halla el área, redondeándola a una décima de vara larga cuadrada.
   (b) Suponte que el largo es 11.14 varas largas y el ancho 3.94 varas largas redondeadas con la aproximación de un centésimo de vara larga. Halla el área, redondeándola a un centésimo de vara larga cuadrada. ¿Cuál es la diferencia entre esta respuesta y la de la pregunta (a)?

9-7. Porcentajes y decimales

Has aprendido que el número $\frac{51}{100}$ puede escribirse como 51% y también como 0.51. Leemos tanto 0.51 como $\frac{51}{100}$ así: "Cincuenta y un centésimos". Tenemos tres expresiones diferentes para el mismo número:

$$\frac{51}{100} = 51\% = 0.51$$

que leemos: "la razón de 51 a 100 es igual a cincuenta y uno por ciento y es igual a cincuenta y un centésimos". En forma semejante, tenemos que

$$\frac{1}{2} = \frac{50}{100} = 0.50 = 50\% = 0.5$$

También $65\% = 0.65 = \frac{65}{100} = \frac{13}{20}$, y $\frac{3}{5} = \frac{60}{100} = 0.60 = 60\% = 0.6.$

Ejercicios de clase 9-7a

1. Expresa como porcentajes:

(a) $\frac{3}{25}$ (c) $\frac{73}{5}$

(b) 0.4 (d) 1.2

2. Expresa como decimales:

(a) 33% (c) $\frac{75}{4}$

(b) 12% (d) 3%

Es un poco más difícil expresar $\frac{1}{8}$ como porcentaje, pues 8 no es un factor de 100. Sabemos que su forma decimal es 0.125. Otra manera de escribir este número es: $\frac{12.5}{100}$ ó 12.5%; también, $\frac{12\frac{1}{2}}{100}$ ó $12\frac{1}{2}\%$. En forma semejante, 0.375 es lo mismo que 37.5% ó $37\frac{1}{2}\%$ y entonces puede ser escrito como:

$$\frac{375}{1000} = \frac{25 \cdot 15}{25 \cdot 40} = \frac{15}{40} = \frac{3 \cdot 5}{8 \cdot 5} = \frac{3}{8}$$

Es decir, 0.375 es igual tanto a $37\frac{1}{2}\%$ como a $\frac{3}{8}$.

Ejercicios de clase 9-7b

1. Expresa como porcentajes:

(a) $\frac{5}{8}$ (c) $\frac{1}{125}$

(b) $\frac{3}{16}$ (d) 0.475

2. Expresa como decimales:

(a) $62\frac{1}{2}\%$ (c) $16\frac{1}{4}\%$

(b) $\frac{1}{125}$ (d) $\frac{3}{16}$

¿Cómo encontramos el porcentaje equivalente de $\frac{1}{3}$ cuya expresión decimal, 0.333... se repite indefinidamente? Si queremos un valor aproximado podemos redondear el decimal a dos cifras y decir que

$$\frac{1}{3} \text{ es aproximadamente igual a } 0.33 \text{ ó } 33\%.$$

Se puede encontrar un porcentaje muy exacto para un tercio de la siguiente manera:

$$\frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 100}{100} = \frac{33\frac{1}{3}}{100} = 33\frac{1}{3}\%$$

Resulta así que una expresión exacta para $\frac{1}{3}$ es $33\frac{1}{3}\%$.

Ejercicios de clase 9-7c

1. Expresa aproximadamente como porcentajes:

(a) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{10}{9}$

(b) $\frac{1}{9}$ (d) $\frac{2}{7}$

2. Expresa los porcentajes de arriba con mayor aproximación.

¿Cómo se puede expresar como fracción $28\frac{4}{7}\%$?

$$28\frac{4}{7}\% = \frac{28\frac{4}{7}}{100} = \frac{\frac{200}{7}}{100} = \left(\frac{200}{7} \times \frac{1}{100}\right) = \frac{2}{7}$$

Ejercicios de clase 9-7d

Expresa como fracción los siguientes porcentajes:

(a) $66\frac{2}{3}\%$ (c) $25\frac{1}{4}\%$

(b) $11\frac{1}{9}\%$ (d) $125\frac{1}{2}\%$

Ejercicios 9-7

1. Copia la siguiente tabla y llena los nombres de los números que faltan. La tabla completa puede ayudarte en las lecciones futuras.

Fracción forma más simple	Ciento como denominador	Decimal	Porcentaje
(a) $\frac{1}{2}$	$\frac{50}{100}$	0.50	50%
(b) $\frac{1}{4}$			
(c)	$\frac{75}{100}$		

Fracción forma más simple	Ciento como denominador	Decimal	Porcentaje
(d)		0.20	
(e)			40%
(f)	$\frac{60}{100}$		
(g) $\frac{4}{5}$			
(h)		$0.3\overline{3}\ldots$	
(i)	$\frac{70}{100}$		
(j)		$0.6\overline{6}\ldots$	
(k) $\frac{4}{80}$			
(l)		0.10	
(m)			90%
(n) $\frac{1}{8}$			
(o)	$\frac{300}{100}$		
(p)		0.375	
(q)			150%
(r)	$\frac{62.5}{100}$		
(s)		0.01	
(t) $\frac{7}{8}$			
(u)			100%
(v)	$\frac{16\frac{2}{3}}{100}$		
(w) $\frac{5}{6}$			

Fracción forma más simple	Ciento como denominador	Decimal	Porcentaje
(x) $\frac{1}{9}$			
(y)	$\frac{60\frac{1}{2}}{100}$		
(z)		0.005	

2. Dibuja una recta numérica y marca en ella los puntos que corresponden a los porcentajes en el problema 1.
3. Utilizando papel cuadriculado, dibuja un cuadrado grande que contenga 100 cuadrados pequeños. Sombreando en forma conveniente, indica los porcentajes de las preguntas (b), (d), (l), (p) y (s).
4. ¿Qué fracción en su forma simplificada es otro nombre de
   (a) 32%?   (b) 90%?   (c) 120%?
5. Da los nombres porcentuales para los siguientes números:
   (a) $\frac{13}{25}$ (c) $\frac{19}{20}$
   (b) $\frac{7}{20}$ (d) $\frac{3}{10}$

9-8. Aplicaciones de los porcentajes

Los porcentajes se usan en la vida diaria para expresar razones de cantidades numéricas. Es importante que comprendas la notación de porcentaje, así como también que puedas calcular con suficiente aproximación las operaciones entre números indicados como porcentajes. Veamos algunos ejemplos en que se usan los porcentajes.

Ejemplo 1. Suponte que una familia tiene un ingreso anual de \$4,500 (después de deducir los impuestos). El presupuesto de la familia incluye una partida para alimentos de $33\frac{1}{3}\%$ del presupuesto. ¿Qué cantidad de dinero se destina para alimentos durante el año? ¿Puedes responder a esta pregunta sin utilizar papel ni lápiz? Si puedes, hazlo, y comprueba luego con los resultados que siguen.

Desarrollamos este ejemplo en la forma que tiene para ilustrar un método que utilizaremos luego en problemas más difíciles. Sabemos que $33\frac{1}{3}\%$ es igual a $\frac{1}{3}$; entonces, si x representa el número de dólares destinados a alimentos, tenemos que

$$\frac{x}{4500} = \frac{1}{3}$$

Para encontrar x usamos la propiedad 1 de la Sección 9-1, la cual nos dice que

$$\text{si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ entonces } ad = bc.$$

Por ejemplo, esto significa que

$$\text{si } \frac{6}{10} = \frac{9}{15} \text{ entonces } 6 \cdot 15 = 9 \cdot 10.$$

Así, en nuestro ejemplo,

$$\text{si } \frac{x}{4500} = \frac{1}{3} \text{ entonces } 3x = 4{,}500.$$

Por lo tanto, $x = \frac{4500}{3} = 1{,}500$, y 1,500 será el número de dólares que se pueden gastar en alimentos.

<u>Ejemplo 2</u>. Suponte que el ingreso anual de la familia del ejemplo 1 es \$4,560 de lo cual gasta 32% en alimentos. Entonces si x representa el número de dólares destinados a alimentos, tenemos que

$$\frac{x}{4560} = \frac{32}{100}$$

Utilizando la propiedad 1, tenemos

$$100x = 32(4{,}560) = 145{,}920$$
$$x = 1{,}459.20$$

Por lo tanto, el monto destinado a alimentos sería \$1,459.20, que es un resultado muy próximo al de la respuesta del ejemplo 1.

<u>Ejemplo 3</u>. ¿Cuánto por ciento de 1,500 es 900? ¿Puedes encontrar la respuesta a esta pregunta sin emplear el lápiz? Es un poco más difícil que el ejemplo 1 pero puedes resolverlo mentalmente. Aquí es igualmente útil el método que hemos usado anteriormente. Si $x\%$ representa el porcentaje de 1,500 que es 900, tenemos que

$$\frac{x}{100} = \frac{900}{1500}$$

Nuevamente, usando la propiedad 1, tenemos que

$$1,500x = 100(900) = 90,000$$

$$x = \frac{90000}{1500} = 60$$

Por lo tanto, 900 es 60% de 1,500.

Ejemplo 4. Suponte que una familia tiene un ingreso anual de \$4,560 y paga por alquiler de una casa, \$77.00 al mes. ¿Qué porcentaje de su ingreso gasta la familia en alquiler? En primer lugar, el alquiler anual será doce veces mayor que el alquiler mensual, es decir, \$924.00. Si x% representa el porcentaje que de 4,560 es 924, tenemos, como antes, que

$$\frac{x}{100} = \frac{924}{4560}$$

y, usando nuevamente la propiedad 1, resulta que

$$4,560x = 100(924)$$

$$4,560x = 92,400$$

$$x = \frac{92400}{4560} = 20.3\ldots$$

Entonces x% es alrededor de 20%; es decir, que alrededor de 20% del ingreso de la familia se gasta en alquiler de casa.

Ejemplo 5. Un anuncio dice que se puede comprar a plazos una bicicleta pagando inicialmente \$14.70. El comerciante dice además que este pago es 25% del precio. ¿Cuánto cuesta la bicicleta? Si el precio de la bicicleta es x dólares, queremos determinar x de tal modo que

$$\frac{14.70}{x} = \frac{25}{100}$$

Antes de calcular x con exactitud, debemos estimar su valor. Después, para encontrar un valor más aproximado, usamos el mismo método que hemos aplicado anteriormente:

$$100(14.70) = 25x$$

esto es,

$$\frac{1470}{25} = x = 58.80$$

Entonces el precio debe ser \$58.80.

Comisiones y descuentos

Los vendedores frecuentemente reciben su pago en forma de comisiones en vez de sueldo. Un vendedor de libros recibe una comision de 25% del precio de venta de los libros. Si vende libros por \$60.00, su comisión es 25% de \$60.00, es decir \$15.00.

Definición. Comisión es la cantidad que se paga a un vendedor por sus servicios. Frecuentemente se basa en un porcentaje del precio de venta.

Algunas veces los comerciantes venden sus artículos con un descuento. Durante una liquidación de mercancías, un anuncio decía: "Se venden todos los gabanes con 30% de descuento". Un gabán cuyo precio está marcado en \$70.00 se venderá con un descuento de 30% de \$70.00, es decir, \$21.00. El precio de venta (a veces llamado precio neto) es \$70.00 - \$21.00, es decir \$49.00.

Definición. Descuento es la cantidad que se resta del precio marcado.

Definición. Precio de venta o precio neto es el precio marcado menos el descuento.

Ejercicios 9-8a

En los problemas siguientes puede ser necesario redondear algunas respuestas. Redondea las respuestas referentes a monedas con la aproximación de un centavo, y las referentes a porcentajes redondéalas a porcentajes expresados como números cardinales.

1. En un examen hay un total de 40 problemas. El maestro asigna igual valor a cada uno de ellos y da las calificaciones en porcentajes. ¿Cuántas respuestas correctas indican las siguientes calificaciones?

   (a) 100% (c) 50%

   (b) 80% (d) 65%

2. Al calificar los exámenes mencionados en el problema 1, ¿qué porcentajes asignaría el maestro a los siguientes exámenes?

   (a) Todos los problemas abordados pero 10 de las respuestas están mal.

   (b) 36 problemas abordados y todas las respuestas son correctas.

(c) 20 problemas abordados y 2 respuestas están mal.

(d) Un problema no ha sido contestado y hay una respuesta mal.

3. Si el impuesto a las ventas en cierto estado es 4% del precio, ¿cuánto se recaudaría por impuestos en las siguientes ventas?

(a) Un traje vendido por $17.50.

(b) Una bicicleta vendida por $49.50.

4. Un agente vendedor de casas recibe una comisión de 5% por cualquier venta que haga. ¿Cuánto recibiría de comisión al vender una casa por $17,500?

5. El agente vendedor del problema 4 aspira a ganar anualmente en comisiones por lo menos $9,000. ¿Cuál debería ser el total anual de sus ventas para conseguirlo?

6. Un vendedor de aspiradores de polvo gana una comisión de $25.50 por cada máquina que vende. Si el precio de venta de una máquina es $85.00, ¿qué porcentaje recibe de comisión el vendedor?

7. Algunas veces el porcentaje de la comisión es muy pequeño. Los vendedores de maquinaria pesada frecuentemente reciben una comisión de 1%. Si en un año uno de estos vendedores vende dos máquinas, una por $658,000 y otra por $482,000, ¿tiene un buen ingreso anual?

8. Una tienda de artículos deportivos anuncia una liquidación de accesorios de fútbol. El descuento es 27%.

(a) ¿Cuánto costaría una pelota de fútbol que estuviera marcada con un precio de $5.98?

(b) ¿Cuánto costaría un casco cuyo precio marcado fuese $3.40?

9. En una escuela de primer ciclo secundario hay 380 alumnos del séptimo grado, 385 alumnos del octavo grado y 352 alumnos del noveno grado.

(a) ¿Cuántos alumnos hay en la escuela?

(b) ¿Qué porcentaje del total del alumnado está en el séptimo grado?

(c) ¿Qué porcentaje del alumnado está en el octavo grado?

(d) ¿Qué porcentaje del alumnado está en el noveno grado?

(e) ¿Cuál es la suma de los números de las respuestas a (b), (c) y (d)?

10. El señor Martín lleva una cuenta de lo que paga su familia por

impuesto en las compras. Al final del año encuentra que el total de impuesto asciende a $96.00 (por el año). Si el porcentaje del impuesto es 4%, ¿qué cantidad gastó la familia Martín durante el año en artículos gravados con impuesto?

11. El señor Gutiérrez solicitó a su banco un préstamo de $1,000 prometiendo pagarlo en un año. El banco le cobra un 6% de los $1,000. Esto se llama el "tipo de interés". ¿Qué cantidad tiene que pagar por intereses? Si devuelve el total del préstamo al final del año juntamente con los intereses, ¿qué cantidad paga?

12. El señor Palacios obtuvo en su banco un préstamo por valor de $2,000. Al final del año paga al banco $2,140. ¿Cuál es el tipo de interés? ¿Qué porcentaje es $2,140 de $2,000?

*13. Un bono del gobierno cuyo costo es $18.75 vale $25.00 diez años después de su compra. ¿En qué porcentaje subió su valor durante esos diez años? ¿Cuál fue el porcentaje medio de aumento por año?

14. El impuesto por la venta de inmuebles es de $12 para una casa tasada en $1,000; $24 para una casa tasada en $2,000; $36 para una casa tasada en $3,000. ¿Qué porcentaje del valor de las casas es, en cada caso, el total del impuesto? A base del mismo porcentaje, ¿a cuánto ascendería el impuesto por la venta de una casa tasada en $25,000?

*15. Una tienda da 10% de descuento por compras al contado más 5% de descuento si la compra se hace el lunes. Es decir, si un cliente compra un artículo cuyo precio es $100 y paga al contado le costará $100 - $10 = $90. Además, si hace la compra un lunes, recibirá 5% de descuento adicional, con lo que el precio neto será $85.50, pues el 5% de 90 es 4.50 y

$$90 - 4.50 = 85.50$$

Suponte que el 5% de descuento sobre $100 se haya calculado primero y que luego se haya rebajado el otro 10%. ¿Sería el precio neto final el mismo que antes? ¿Darían el mismo resultado final estos dos métodos de cálculo del precio neto para un artículo cuyo precio es $200? ¿Por qué?

*16. En cierta tienda los clientes pagan un impuesto de 2% y se les da un 10% de descuento por compras al contado. Es decir, si el cliente compra un artículo cuyo precio de lista es $100 y paga al contado, le cuesta solamente $90 más el impuesto, o sea $91.80, pues 2% de $90 es $1.80. Suponte ahora que el impuesto fuera calculado sobre $100 y luego el 10% de descuento. ¿Resultaría igual el costo neto? ¿Por qué sí o por qué no?

*17. Un cliente de la tienda del problema 15 suma los descuentos y piensa que, pagando al contado y siendo lunes, debe recibir 15% de descuento. Si tal fuera el caso, debería pagar $85.00, en lugar de $85.50, por el artículo marcado en $100. ¿Cómo podría explicar el cobrador de la tienda al cliente que el cálculo debe hacerse como en el problema 15?

Uso de los porcentajes para comparaciones

En el problema 1 de los Ejercicios 9-7, algunos de los porcentajes no eran enteros. El número $\frac{1}{8}$ escrito como porcentaje es $12\frac{1}{2}\%$. Has aprendido que $\frac{1}{2}\%$ puede leerse "$\frac{1}{2}$ de 1%". Los decimales se usan frecuentemente en los porcentajes, por ejemplo, 0.7%.

$$0.7\%(0.7 \text{ de } 1\%) = 0.7 \times \frac{1}{100} = \frac{0.7}{100} = \frac{7}{1000} = 0.007$$

Todas estas expresiones son nombres para el mismo número. Si queremos calcular 0.7% de $300, tenemos que determinar x de tal modo que

$$\frac{x}{300} = \frac{0.7}{100} \qquad \text{ó} \qquad \frac{x}{300} = 0.007$$

$$100x = 210 \qquad\qquad x = 300(0.007)$$

$$x = 2.10 \quad (\$2.10) \qquad\qquad x = 2.10 \quad (\$2.10)$$

0.7% es menor que 1%. Como 1% de $300 es $3.00, la respuesta $2.10 es razonable.

Suponte que queremos determinar el 2.3% de $\$500$.

$2.3\% = \frac{2.3}{100} = \frac{23}{1000} = 0.023$. Calcula el número que te dé

$$\frac{x}{500} = \frac{2.3}{100} \quad \text{ó} \quad \frac{x}{500} = 0.023$$

$$100x = 1,150 \qquad x = 500(0.023)$$

$$x = 11.50 \quad (\$11.50) \qquad x = 11.50 \quad (\$11.50)$$

El prorrateo de bateo de un jugador de béisbol se obtiene dividiendo el número de batazos indiscutibles que conecta por el número de veces que le toca batear. La división se efectúa generalmente hasta las milésimas. El prorrateo de bateo se puede considerar, pues, como un porcentaje expresado con la aproximación de una décima. Si un jugador conecta 23 indiscutibles en un total de 71 veces que batea, su prorrateo es $\frac{23}{71} = 0.324$.

Algunas veces se piden las respuestas con la aproximación de una décima de uno por ciento. Un maestro da 163 calificaciones, de las cuales 35 son B. Podría preguntársele qué porcentaje de sus calificaciones son B. Debe entonces calcular el valor de x de modo que $\frac{35}{163} = \frac{x}{100}$.

$$\frac{35}{163} = \frac{x}{100} \quad \text{ó} \quad \frac{35}{163} = \frac{x}{100}$$

$$x = \frac{35}{163} \cdot 100 \qquad 163x = 3,500$$

$$x = 21.47\ldots \qquad x = 21.47\ldots$$

En la Sección 9-6 has aprendido cómo redondear decimales. Si se pide la respuesta con una aproximación de una décima de uno por ciento, $21.47\ldots$ debe ser redondeado a 21.5%.

Porcentajes de crecimiento y decrecimiento

Los porcentajes se usan para indicar el crecimiento o decrecimiento de alguna cantidad. Suponte que una ciudad tenía en el año 1950, una población de 32,000 habitantes (redondeada con la aproximación de un millar). Si la población ha aumentado a 40,000 habitantes para el año 1960, ¿cuál ha sido el porcentaje de crecimiento?

$$\begin{array}{r} 40{,}000 \\ -\ 32{,}000 \\ \hline 8{,}000 \end{array} \quad \text{(crecimiento real)}$$

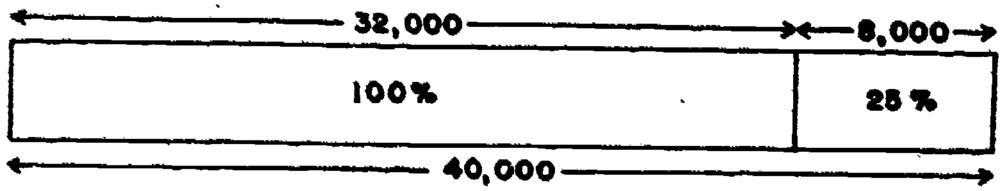
$$\frac{8000}{32000} = \frac{x}{100}$$

$$x = \frac{800000}{32000}$$

$$x = 25$$

Ha habido un crecimiento de 25%.

Observa que el porcentaje de crecimiento se obtiene comparando el crecimiento real con el número que representa la población anterior.



Los 40,000 habitantes se componen de 32,000 habitantes (100%) más el incremento de 8,000 (25%). Entonces, la población de 40,000 habitantes en 1960 ha sido 125% de la población de 32,000 habitantes en 1950.

Suponte que otra ciudad tiene una población de 15,000 habitantes en 1950. Si su población en 1960 era de 12,000 habitantes, ¿cuál es el porcentaje de su decrecimiento? Si x representa el porcentaje de decrecimiento, entonces

$$\begin{array}{r} 15{,}000 \\ -\ 12{,}000 \\ \hline 3{,}000 \end{array} \quad \text{(decrecimiento real)}$$

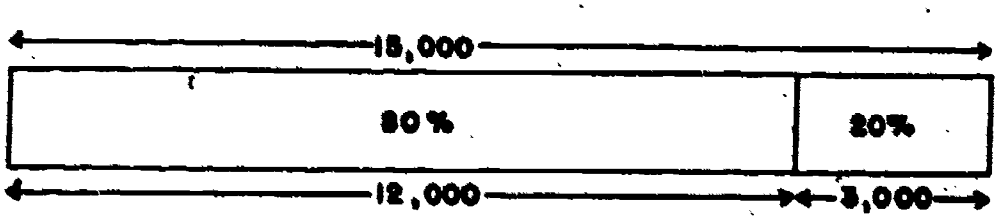
$$\frac{3000}{15000} = \frac{x}{100}$$

$$x = 100 \cdot \frac{3000}{15000}$$

$$x = 20$$

Hay un decrecimiento de 20%.

Observa que el decrecimiento de la población también se encuentra comparando el decrecimiento real con la población anterior.



El número 12,000 es la diferencia entre 15,000 (100%) y el decrecimiento de 3,000 (20%). Entonces la población de 12,000 habitantes en 1960 ha sido el 80% de la población de 15,000 habitantes en 1950.

Si los alquileres en una casa de apartamentos han aumentado 5%, todo inquilino puede calcular su nuevo alquiler. Suponte que un inquilino paga $80. ¿Cuánto debe pagar de alquiler después del aumento? Si x representa el aumento en dólares, entonces

$$\frac{x}{80} = \frac{5}{100}$$

$$x = 80 \cdot \frac{5}{100}$$

$$x = 4 \quad \text{(El aumento fue \$4.00.)}$$

El nuevo alquiler será $80 + $4 = $84.

Ejercicios 9-8b

1. Un maestro en una escuela secundaria de primer ciclo tiene 176 alumnos en sus 5 clases. Las calificaciones semestrales de los alumnos se distribuyeron de la siguiente manera: A, 20; B, 37; C, 65; D, 40; E, 14.
   (a) ¿Qué porcentaje de los alumnos recibió la calificación A? (con la aproximación de una décima.)
   (b) ¿Qué porcentaje de los alumnos recibió la calificación B?
   (c) ¿Qué porcentaje de los alumnos recibió la calificacion C?
   (d) ¿Qué porcentaje de los alumnos recibió la calificación D?
   (e) ¿Qué porcentaje de los alumnos recibió la calificación E?
   (f) ¿Cuál es la suma de las respuestas a las preguntas (a), (b), (c), (d) y (e)? ¿Permite esta suma comprobar las respuestas?
2. El peso de Roberto ha aumentado durante el año escolar de 65 libras a 78 libras. ¿Cuál fue el porcentaje de aumento?
3. Durante el mismo año, la madre de Roberto rebajó de peso de 160 libras a 144 libras. ¿Cuál fue el porcentaje de disminución?

4. El alumnado de una escuela secundaria de primer ciclo era 1,240 en 1954. En 1960 el número de alumnos aumentó en 25%. ¿Cuál fue el número de alumnos en 1960?
5. María ganó $14.00 durante el mes de agosto, pero en setiembre ganó sólo $9.50. ¿Cuál es el porcentaje de disminución de sus ganancias?
6. Un vendedor de maquinaria pesada ha ganado una comisión de $4,850 por la venta de una máquina de $970,000.
   (a) ¿Qué porcentaje de comisión se le pagó?
   (b) ¿Cuál será su comisión por la venta de otra máquina de $847,500?
7. La estatura de Jaime era de 5 pies en setiembre. En junio su estatura era de 5 pies 5 pulgadas. Ambas estaturas se han medido con la aproximación de una pulgada. ¿Cuál es el porcentaje de crecimiento de su estatura?
8. ¿Recuerdas cuánto medías al comenzar el año escolar? ¿Y ahora? ¿Sabes cuánto pesabas al comienzo del año escolar? ¿Y ahora?
   (a) ¿Cuál es el porcentaje de crecimiento de tu estatura desde setiembre del año pasado?
   (b) ¿Cuál es el porcentaje de aumento de tu peso desde setiembre del año pasado?
9. Un jugador de béisbol llamado Sánchez ha conectado 25 indiscutibles en 83 turnos al bate. Otro jugador llamado Sosa conectó 42 indiscutibles en las 143 veces que le tocó batear.
   (a) ¿Cuál es el promedio de bateo de cada jugador?
   (b) ¿Cuál de los dos jugadores tiene mejor récord?
10. Una escuela elemental tenía 790 alumnos en setiembre de 1955. En setiembre de 1959 el número de alumnos era 1,012. ¿Cuál ha sido el porcentaje de crecimiendo del alumnado?
11. El primero de setiembre la madre de Roberto pesaba 130 libras. Durante ese mes su peso disminuyó en 15%. Sin embargo, durante el mes de octubre su peso aumentó en 15%. ¿Cuánto pesaba el primero de noviembre? ¿Te sorprende tu respuesta? ¿Por qué sí o por qué no?
12. Suponte que en el problema anterior, el peso de la madre de Roberto <u>aumentó</u> en 15% durante el mes de setiembre y <u>disminuyó</u>

en 15% durante el mes de octubre. ¿Sería la respuesta igual a la del último problema? ¿Puedes comprender por qué sí o por qué no? Comprueba tu respuesta haciendo el cálculo.

Dos métodos para resolver problemas de porcentajes de crecimiento o decrecimiento

En la solución de los problemas que contienen porcentajes de crecimiento o decrecimiento, se pueden utilizar dos métodos.

Si el precio de la mantequilla aumenta de 80 centavos por libra a 92 centavos por libra, ¿cuál es el porcentaje de aumento? El método que has utilizado es 92¢ - 80¢ = 12¢ (aumento). Si 12 es x por ciento de 80, entonces

$$\frac{12}{80} = \frac{x}{100}$$

$$x = 100 \cdot \frac{12}{80}$$

$$x = 15$$

Ha habido 15% de aumento.

Mediante otro método se puede calcular qué porcentaje de 80 centavos son 92 centavos. Como 92 es mayor que 80, entonces 92 es más que el 100% de 80. Si 92 es x por ciento de 80, entonces

$$\frac{92}{80} = \frac{x}{100}$$

$$x = 100 \cdot \frac{92}{80}$$

$$x = 115$$

Esto significa que 92 centavos son 115% de 80 centavos. Si se sustrae 100% de 115%, resulta el porcentaje de aumento, o sea 15%.

En cierta ciudad el cuerpo de bomberos extinguió 160 incendios durante 1958. Durante el año 1959 el número de incendios bajó a 120. ¿Cuál fue el porcentaje de decrecimiento? Mostraremos dos maneras de resolver este problema. Utilizando un método, encontramos qué porcentaje de 160 es la diferencia (160 - 120). Utilizando el otro método, hallamos qué porcentaje del número de incendios del primer año es el número de incendios del año más reciente. Este porcentaje se compara luego con el

100%. Si 120 es w% de 160, entonces

$$\begin{array}{r} 160 \\ -\ 120 \\ \hline 40 \end{array} \quad \text{(incendios menos)}$$

$$\frac{120}{160} = \frac{w}{100}$$

$$w = 100 \cdot \frac{120}{160}$$

$$w = 75$$

$$100\% - 75\% = 25\%$$

El último número de incendios fue 75% del número anterior. Hubo un decrecimiento de 25% en el número de incendios extinguidos durante 1959 con respecto al número de incendios apagados en 1958.

Si 40 es x por ciento de 160, entonces

$$\frac{40}{160} = \frac{x}{100}$$

$$x = 100 \cdot \frac{40}{160}$$

$$x = 25$$

Hubo un decrecimiento de 25% en el número de incendios extinguidos durante 1959 con respecto al número de incendios apagados en 1958.

Naturalmente, las respuestas deben resultar iguales.

Ejercicios 9-8c

En cada uno de los primeros cinco problemas, calcula el porcentaje de crecimiento o decrecimiento por los dos métodos antes indicados. Si es necesario, redondea los porcentajes con la aproximación de una décima de uno por ciento.

1. En una escuela de primer ciclo secundario las listas de los alumnos ausentes del séptimo grado durante la semana arrojan las siguientes cifras: 29, 31, 32, 28 y 30. La siguiente semana las ausencias fueron 22, 26, 24, 25 y 23.
   (a) ¿Cuál ha sido el número total de faltas de asistencia diaria de los alumnos durante la primera semana?
   (b) ¿Cuál ha sido el total durante la segunda semana?
   (c) Calcula el porcentaje de crecimiento o decrecimiento del número de faltas de asistencia diaria de los alumnos.
2. El primer día de clase de una escuela de primer ciclo secundario concurrieron 1,050 alumnos. Un mes después, el alumnado era de 1,200 estudiantes. ¿Cuál fue el porcentaje de crecimiento?

3. Cierta semana el ingreso semanal del comedor escolar fue de $4[illegible]0. La siguiente semana el ingreso fue de $425. ¿Cuál fue el porcentaje de decrecimiento?

4. Normalmente durante los primeros seis meses los bebés aumentan de peso en un 100% del peso que tenían al nacer.
   (a) ¿Cuál será el peso de un niño de seis meses si al nacer pesa 7 libras 9 onzas?
   (b) Suponte que el bebé de la pregunta (a) pesa 17 libras a los seis meses de nacido. ¿Cuál es el porcentaje de su crecimiento?

5. Durante el año 1958 una familia gastó $1,490 en alimentos. En 19[illegible] la misma familia gastó $1,950 en alimentos. ¿Cuál fue el porcentaje de crecimiento del dinero gastado en alimentos?

*6. Un comerciante había encontrado que durante el año 1958 el total de las ventas estuvo por debajo de lo normal. Anunció entonces a sus empleados que durante 1959 sus sueldos se reducirían en 20%. Sin embargo, el comerciante observó al final de 1959 que las ventas habían alcanzado su nivel de 19[illegible]7. Anunció entonces a sus empleados que durante 1960 recibirían un aumento de sueldo de 20% sobre lo que percibían en 1959.
   (a) ¿Cuál de las siguientes proposiciones es cierta?
      (1) Los sueldos de 1960 eran los mismos que los de 1958.
      (2) Los sueldos de 1960 eran menores que los de 1958.
      (3) Los sueldos de 1960 eran mayores que los de 1958.
   (b) Si tu respuesta a la pregunta (a) es la proposición (1), justifícala. Si tu respuesta a la pregunta (a) es la proposición (2) ó (3), expresa los sueldos de 1960 como un porcentaje de los sueldos de 1958.

*7. En una fábrica de automóviles se supone que el número de carros que salen diariamente de la sección de montaje asciende a 500. Una semana la fábrica tuvo operaciones normales el lunes. El martes hubo una interrupción como consecuencia de la cual se redujo el número de carros montados a 425 ese día. El miércoles la fabricación volvió a su estado normal.

(a) ¿Cuál fue el porcentaje de decrecimiento de la producción el martes comparada con la del lunes?

(b) ¿Cuál fue el porcentaje de crecimiento de la producción el miércoles comparada con la del martes?

8. (a) Un vendedor recibe 6% de comisión sobre un artículo que vende por $1,000. ¿Cuál es el importe de su comisión?

(b) Un banco recibe 6% de intereses anuales por un préstamo de $1,000. ¿Cuánto recibe en intereses?

(c) El impuesto a las joyas es 6%. ¿Cuánto se paga de impuesto por un collar de perlas que cuesta $1,000?

(d) ¿Puedes encontrar alguna relación entre (a), (b) y (c)?

9. (a) Un artículo se vende con 5% de descuento. Si el precio marcado es $510, ¿por cuánto debe venderse?

(b) Una aldea tenía una población de 510 habitantes el primero de enero de 1958. La población disminuyó en un 5% durante los siguientes doce meses. ¿Cuál era la población el primero de enero de 1959?

(c) Un banco concede un préstamo de $510, y en vez de cobrar periódicamente los intereses, como es costumbre, descuenta de la cantidad prestada el 5% por adelantado. Es decir, da al cliente $510 menos 5% de $510 al comienzo del año, con el compromiso de que éste devuelva los $510 completos al final del año. ¿Cuánto recibe el cliente al comienzo del año?

(d) ¿Puedes encontrar alguna relación entre (a), (b) y (c)?

10. ¿Cuál fue el tipo de interés del problema 9(c) anterior?

11. (a) El señor López pagó $210 por impuesto sobre la gasolina durante un año. Si el impuesto sobre la gasolina es 31%, ¿cuánto gastó en gasolina?

(b) El señor Sosa pagó $210 como primera cuota del pago de una máquina de lavar que compró a plazos. Si esta suma es el 31% del costo total, ¿cuánto le costó la máquina?

(c) La población infantil de una aldea es 31% de la población total. Si hay 210 niños, ¿cuántos habitantes tiene la aldea?

(d) Un comerciante gana 31% en la venta de un artículo cuyo precio es \$210. ¿Cuál es su ganancia en dólares?

(e) ¿Puedes encontrar alguna relación entre (a), (b), (c) y (d)?

*12. El cobrador de los impuestos sobre la renta investiga el pago de impuestos del señor López, mencionado en el problema 11(a). Encuentra que el señor López maneja un Volkswagen que rinde alrededor de 30 millas por galón de gasolina, y que, además, va a pie a la oficina.

(a) Si la gasolina cuesta \$0.30 por galón (incluyendo impuestos), ¿cuántos galones compra el señor López? (Utiliza los datos del problema 11(a)).

(b) ¿Qué distancia puede recorrer con esa cantidad de gasolina?

(c) ¿Qué distancia media recorre por día?

(d) ¿Por qué el cobrador de impuestos investigó el pago del señor López?

Capítulo 10

PARALELAS, PARALELOGRAMOS, TRIANGULOS Y PRISMAS RECTOS

10-1. Dos rectas en un plano

Desde épocas muy antiguas, por lo menos 4,000 años a. de J.C. la geometría ha ejercido influencia en el modo de vivir del hombre. Las tablillas de arcilla escritas en Babilonia hace unos 6,000 años manifiestan que los babilonios sabían calcular el área de un campo rectangular, usando la misma relación que has aprendido en el Capítulo 8.

La gran pirámide de Giza, en Egipto, fue construida alrededor de 2,900 años a. de J.C. La construcción de esta pirámide y de otras, muestra que los egipcios tenían amplios conocimientos de geometría. Sus manuscritos de hacia el año 1850 a. de J.C. revelan que entonces los egipcios estaban desarrollando reglas geométricas. Una de ellas era la regla general para determinar el área de un triángulo, que discutiremos después, en este capítulo.

Cuando un matemático comienza una investigación, habitualmente empieza con un caso muy simple. Cuando llega a la conclusión de que comprende bien ese caso, procede a analizar problemas más complicados. A fin de conseguir una buena intuición de las relaciones espaciales, comencemos estudiando algo más sobre las figuras formadas por dos rectas.

La figura 10-1-a muestra que la intersección de las rectas ℓ_1 y ℓ_2 es el punto A. $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son rayos sobre ℓ_2. (Recuerda que $\overrightarrow{AB}$ significa el rayo que tiene por extremo el punto A y contiene el punto B.) $\overrightarrow{AE}$ y $\overrightarrow{AD}$ son rayos sobre ℓ_1.

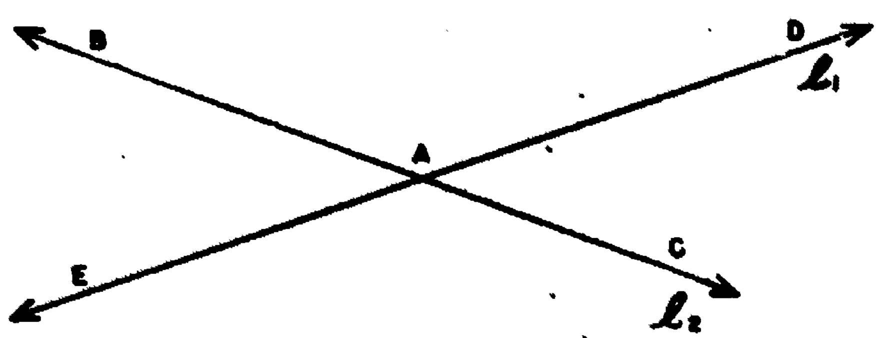


Figura 10-1-a

Observa que hay cuatro ángulos formados por los rayos de la figura 10-1-a: ángulo BAE, ángulo BAD, ángulo CAD y ángulo CAE. Diremos que son los ángulos formados por ℓ_1 y ℓ_2. En este capítulo, pues, nos referiremos a dos rectas que se intersecan y determinan así cuatro ángulos.

Observa los ángulos CAD y DAB. Estos dos ángulos tienen un rayo en común, AD, y un vértice en común, el punto A. Dos ángulos cualesquiera que tienen un rayo y un vértice en común, y cuyos interiores no tienen ningún punto en común se llaman <u>ángulos adyacentes</u>. (<u>Adyacentes</u> significa "vecinos".) En consecuencia, los ángulos CAD y DAB son adyacentes. ¿Hay más pares de ángulos adyacentes en la figura? Sí: DAB y BAE, BAE y EAC, y EAC y CAD, son pares de ángulos adyacentes.

¿Son adyacentes los ángulos BAD y EAC? No, ¡no lo son! Pero ambos están formados por rayos de las dos rectas ℓ_1 y ℓ_2. En este capítulo, cuando decimos rectas, nos referimos a líneas rectas ilimitadas en ambas direcciones. Cuando dos rectas se intersecan, los dos pares de ángulos no adyacentes formados por esas rectas se llaman <u>ángulos opuestos por el vértice</u>. Los ángulos BAE y CAD son, pues, opuestos por el vértice.

En la figura 10-1-a, considera la recta $\overleftrightarrow{BC}$ que contiene los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Recuerda que en el Capítulo 7 has aprendido que si colocas un limbo graduado con vértice en A de manera que $\overrightarrow{AC}$ sea el rayo que pasa por cero, entonces $\overrightarrow{AB}$ corresponde al número 180 en el limbo graduado.

Una recta divide al plano en dos semiplanos. En la figura 10-1-b, se muestra un semiplano determinado por ℓ_1 como la zona sombreada encima de ℓ_1. El otro semiplano es la zona no sombreada debajo de ℓ_1.

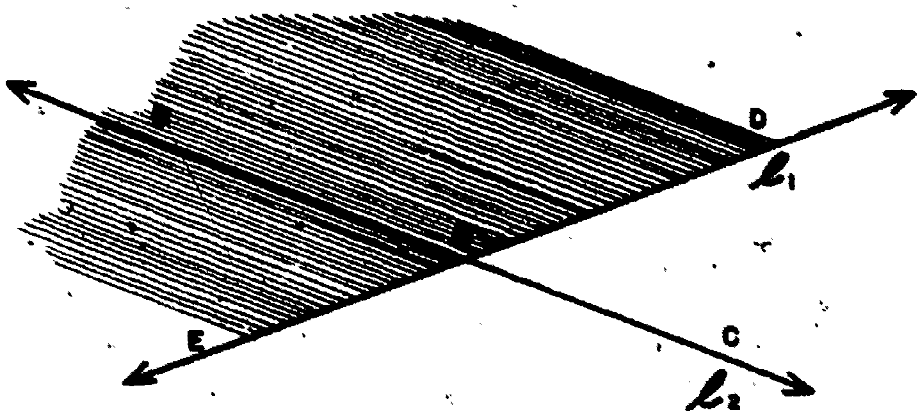


Figura 10-1-b

En la figura 10-1-c se representan los dos semiplanos determinados por ℓ_2, uno por la región sombreada debajo de ℓ_2 y el otro por la región no sombreada encima de ℓ_2.

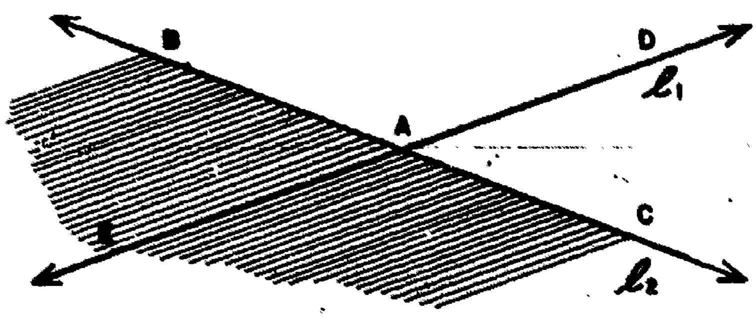


Figura 10-1-c

De este modo, dos rectas que se intersecan separan a un plano en cuatro regiones. Cada una de esas regiones es el interior de un ángulo. El interior de cada ángulo es la intersección de dos semiplanos. En la figura 10-1-d se muestra la intersección del semiplano sombreado de la figura 10-1-b con el semiplano sombreado de la figura 10-1-c. La intersección de estos dos semiplanos es el interior del ángulo BAE. El interior del ángulo CAD es la intersección de los dos semiplanos no sombreados restantes. Esos dos ángulos, el ángulo BAE y el ángulo CAD, son opuestos por el vértice. ¿Puedes encontrar los dos semiplanos que incluyen el interior del ángulo CAD? ¿Puedes encontrar los dos semiplanos que incluyen el ángulo BAD?

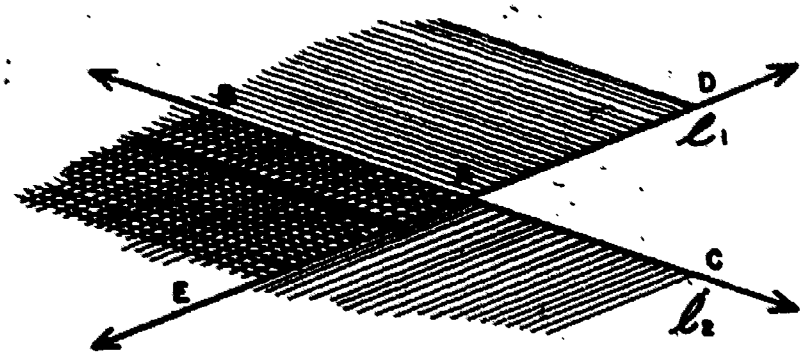


Figura 10-1-d

Si la suma de las medidas en grados de dos ángulos es 180, esos ángulos se llaman <u>ángulos suplementarios</u>. En la figura 10-1-d, los ángulos sombreados BAE y BAD son suplementarios. ¿Hay algunos otros pares de ángulos suplementarios en esta figura? ¿Son suplementarios los ángulos CAD y BAD? ¿Y los ángulos CAE y CAD? En la figura 10-1-a los ángulos suplementarios son también ángulos adyacentes. Los ángulos BAE y BAD son ángulos adyacentes, así como también lo son los ángulos CAD y BAD. Si la medida del ángulo M, en la figura 10-1-e, es 40 y la medida del ángulo N es 140, entonces los ángulos M y N son suplementarios.

Figura 10-1-e

En el Capítulo 7 has aprendido a medir ángulos. En este capítulo hablaremos frecuentemente de la "medida de un ángulo". Por consiguiente, conviene tener un símbolo para esta expresión. Para indicar el número de unidades de medida que hay en un ángulo, usaremos el símbolo "m" seguido del nombre del ángulo puesto entre paréntesis. Por ejemplo, $m(\angle ABC)$ se refiere al número de unidades del ángulo ABC.

Has aprendido que se puede utilizar cualquier ángulo como unidad de medida, pero en este capítulo usaremos el grado como unidad. Así, cuando escribamos $m(\angle ABC) = 40$, debemos entender que el ángulo ABC es un ángulo de 40 grados (40°). Observa que, siendo $m(\angle ABC)$ un número, escribimos solamente $m(\angle ABC) = 40$, y no $m(\angle ABC) = 40°$.

<u>Ejercicios 10-1</u>

Usa la figura 10-1-f para resolver los tres primeros problemas.

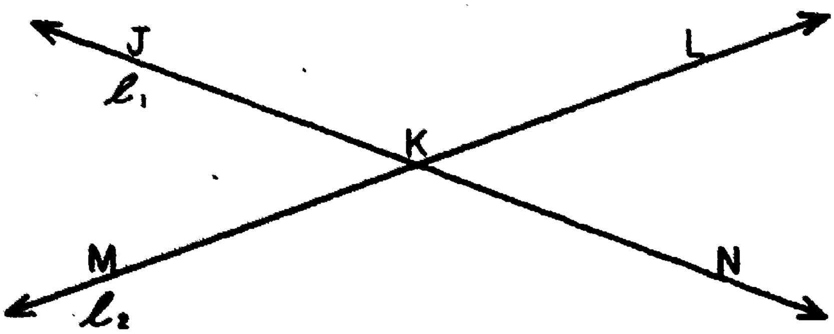


Figura 10-1-f

1. (a) Indica los ángulos adyacentes a $\angle$ JKM.
   (b) Indica los ángulos adyacentes a $\angle$ LKN.
   (c) Indica los ángulos adyacentes a $\angle$ JKL.
2. (a) Indica el ángulo opuesto por el vértice a $\angle$ JKM.
   (b) En la figura, indica otro par de ángulos opuestos por el vértice.
   (c) ¿Cuántos pares de ángulos opuestos por el vértice se forman cuando dos rectas se intersecan en un punto?

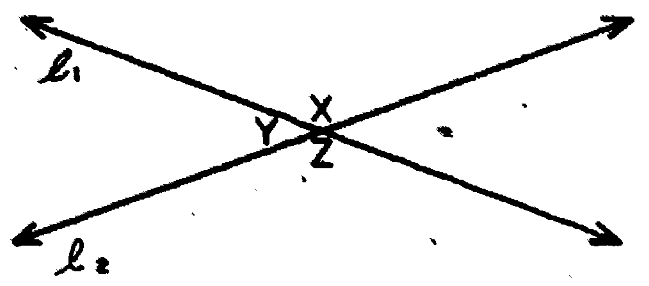
3. (a) Utiliza un limbo graduado para hallar las medidas de los ángulos opuestos por el vértice, $\angle$ JKM y $\angle$ LKN.
   (b) ¿Cuáles son las medidas de los ángulos NKM y JKL?
   (c) ¿Qué parece ser cierto referente a las medidas de un par de ángulos opuestos por el vértice?
   (d) Dibuja conjuntos de pares de rectas que se intersecan como en la figura 10-1-f. Varía el tamaño de los ángulos comprendidos entre las rectas. Con un limbo graduado, halla las medidas de cada par de ángulos opuestos por el vértice. ¿Te parece que son iguales?

4. Estudia tus respuestas al problema 3. Luego enuncia tus resultados en la forma de una propiedad general, copiando y completando la siguiente proposición:

   <u>Propiedad 1.</u> <u>Cuando dos rectas se intersecan, los dos ángulos de cada par de ángulos ___?___ formados por ellas tienen ___?___ medida, es decir, son congruentes.</u>

*5. Has encontrado experimentalmente que cierta relación es verdadera en algunos casos. Veamos por qué esa relación debe ser verdadera en todos los casos.
   (a) En la figura 10-1-f, ¿cuál es la suma de las medidas de $\angle$ JKL y $\angle$ JKM?
   (b) ¿Cuál es la suma de las medidas de $\angle$ NKM y $\angle$ JKM?
   (c) Si la medida de $\angle$ JKM es 60, ¿cuál es la medida de $\angle$ JKL? ¿Y la de $\angle$ NKM?
   (d) Si la medida de $\angle$ JKM es 70, ¿cuál es la medida de $\angle$ JKL? ¿Y la de $\angle$ NKM?
   (e) ¿Qué puedes decir de las medidas de los ángulos JKL y NKM cuando la medida del ángulo JKM cambia? Explica por qué los ángulos JKL y NKM en la figura 10-1-f deben tener la misma medida.

*6. La siguiente figura es semejante a la figura 10-1-f. Representemos los ángulos LKJ, JKM y NKM por las letras x, y y z, respectivamente. En la figura se indican los ángulos de esta manera:



Copia y completa las siguientes proposiciones:

(a) $m(\angle x) + m(\angle y) =$ __?__.

(b) $m(\angle z) + m(\angle y) =$ __?__.

(c) Si se conoce $m(\angle y)$, ¿cómo puedes encontrar $m(\angle x)$? ¿Cómo puedes encontrar $m(\angle z)$?

(d) Escribe tu respuesta a la pregunta (c) en la forma de una proposición numérica como se ha hecho en las preguntas (a) y (b), copiando y completando lo siguiente:

$$m(\angle x) = \underline{\ \ ?\ \ } - \underline{\ \ ?\ \ }$$
$$m(\angle z) = \underline{\ \ ?\ \ } - \underline{\ \ ?\ \ }$$

(e) Escribe una proposición numérica para mostrar la relación entre $m(\angle x)$ y $m(\angle z)$.

*7. Imagina dos rectas en el espacio.

(a) ¿Hay alguna relación posible entre dos rectas en el espacio que no pueda ocurrir entre dos rectas en un plano?

(b) Para explicar tu respuesta, presenta una ilustración tomada de tu salón de clase.

10-2. Tres rectas en un plano

Los griegos fueron los primeros en estudiar la geometría como un ramo del conocimiento. Thales (640 - 546 a. de J.C.) estudió en Egipto, e introdujo el estudio de la geometría en Grecia. A él se atribuye el descubrimiento de la propiedad de los pares de ángulos opuestos por el vértice que hemos estudiado en la sección anterior. A medida que estudias la geometría vas a aprender propiedades descubiertas por él y otros matemáticos griegos.

En la sección anterior hemos estudiado las figuras formadas por dos rectas en un plano. En esta sección estudiaremos figuras formadas por tres rectas en un plano.

Dibuja una figura semejante a la 10-1-a. ¿Puedes dibujar otra recta, ℓ_3, que pase por el punto A? ¿Pueden tener un punto común de intersección las rectas ℓ_1, ℓ_2 y ℓ_3? Tu dibujo debe parecerse al siguiente:

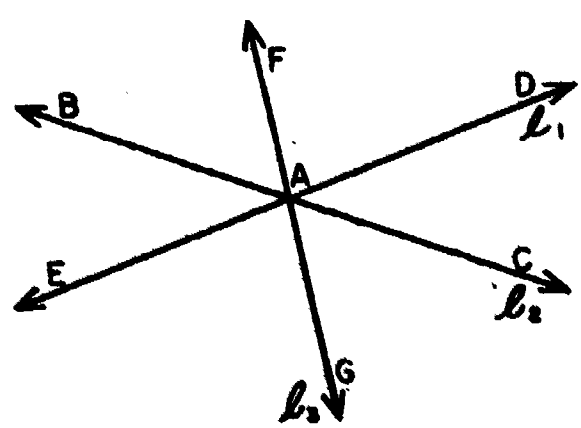


Figura 10-2-a

Tres rectas dibujadas en un plano, ¿tendrán siempre un punto de intersección? Observa la figura 10-2-b en la cual la recta t interseca a las rectas ℓ_1 y ℓ_2. En el lenguaje de los conjuntos diríamos que $\ell_1 \cap t$ no es el conjunto vacío (y que $\ell_2 \cap t$ no es el conjunto vacío). Una recta que interseca a dos o más rectas en puntos diferentes se llama una <u>secante</u> de esas rectas. Como la recta t interseca a ℓ_1 y a ℓ_2, es una secante de las rectas ℓ_1 y ℓ_2.

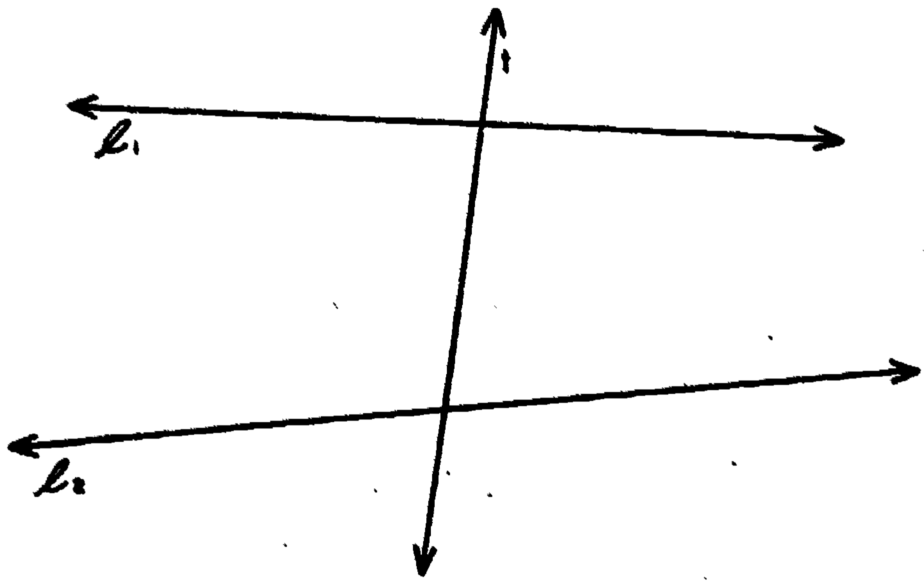
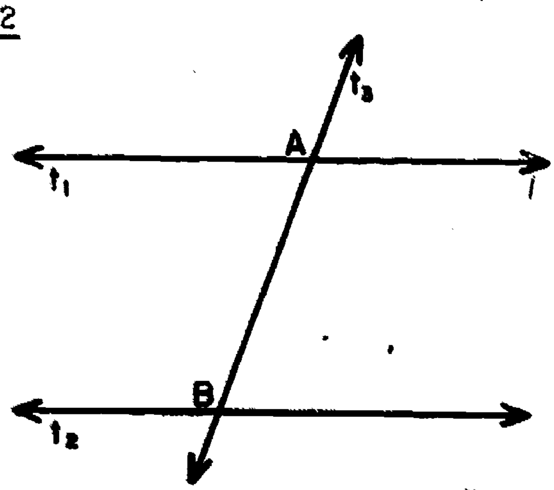


Figura 10-2-b

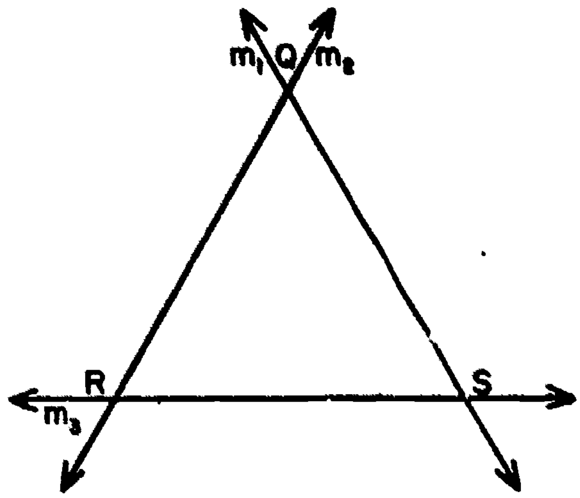
Ejercicios 10-2



1. Dibuja una figura parecida a la de la derecha. Las rectas t_1 y t_2 no se intersecan. ($t_1 \cap t_2$ es el conjunto vacío.) La recta t_3 interseca a la recta t_1; llama A a su punto de intersección. La recta t_3 interseca a la recta t_2; llama B a su punto de intersección.
   (a) ¿Cuántos pares de ángulos opuestos por el vértice hay en la figura que has dibujado?
   (b) ¿Cuántos pares de ángulos adyacentes hay en la figura que has dibujado?
   (c) ¿Es la recta t_3 una secante de las rectas t_1 y t_2?
   (d) ¿Es t_1 una secante de las rectas t_2 y t_3? Explícalo.

2. Dibuja dos rectas, m_1 y m_2, que se intersequen en un punto Q. Dibuja una tercera recta, m_3, que interseque a m_1 y m_2 fuera del punto Q. Llama S a la intersección de m_1 y m_3, y R a la intersección de m_2 y m_3.

(a) ¿Cuál es el nombre del conjunto de puntos formado por los segmentos $\overline{SQ}$, $\overline{QR}$ y $\overline{RS}$ en la figura que has dibujado? (Si no lo reconoces, consulta el Capítulo 4.)



(b) ¿Cuántos pares de ángulos opuestos por el vértice hay en la figura que has dibujado?

(c) ¿Cuántos pares de ángulos adyacentes hay en la figura que has dibujado?

3. Usa la figura 10-2-c para responder a las siguientes preguntas:

(a) Nombra la secante dibujada en la figura e indica a qué líneas interseca.

(b) En la figura, ¿cuántos ángulos forman las tres rectas?

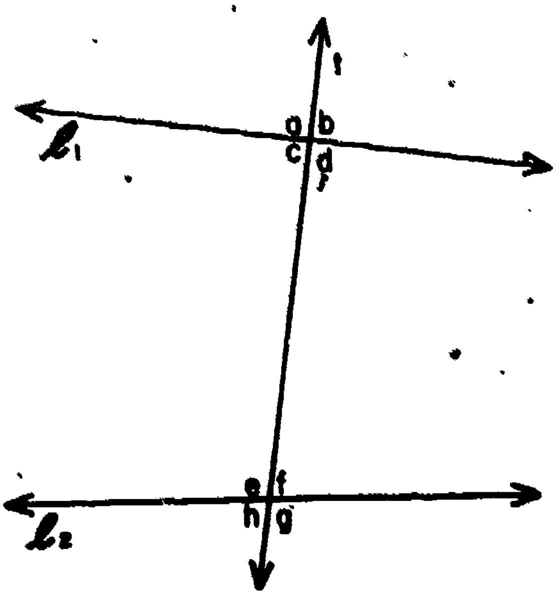


Figura 10-2-c

(c) ¿Cuántos pares de ángulos opuestos por el vértice hay en esta figura?

(d) ¿Qué sabes acerca de las medidas de cada ángulo de un par de ángulos opuestos por el vértice?

(e) ¿Es $m(\angle h) = m(\angle f)$? ¿Por qué razón?

(f) ¿Es $\angle c$ congruente con $\angle d$? ¿Por qué razón?

4. (a) ¿Cuántos pares de ángulos adyacentes hay en la figura 10-2-c?

(b) ¿Qué puedes decir acerca de la suma de las medidas de un par de ángulos adyacentes de la figura 10-2-c?

5. (a) ¿Son suplementarios los ángulos c y d en la figura 10-2-c?

(b) Son suplementarios los ángulos a y d en la figura 10-2-c?

(c) ¿Son suplementarios los ángulos de cada par de ángulos adyacentes de la figura 10-2-c?

(d) Si la medida de $\angle h$ es 80, ¿cuál es la medida de $\angle g$? ¿Cuál es la medida de $\angle e$? ¿Y la de $\angle f$?

(e) Si la medida de $\angle h$ es 90, ¿son suplementarios los ángulos h y f?

(f) Si $m(\angle h) = m(\angle g)$, ¿son suplementarios los ángulos e y g?

6. Observa los ángulos b y f en la figura 10-2-d de la derecha. Del vértice del ángulo f parte un rayo de la recta t, hacia arriba, que contiene un rayo del ángulo b. Además, los interiores de los ángulos b y f están de un mismo lado de la secante t. Los ángulos colocados de esta manera se llaman <u>ángulos correspondientes</u>.

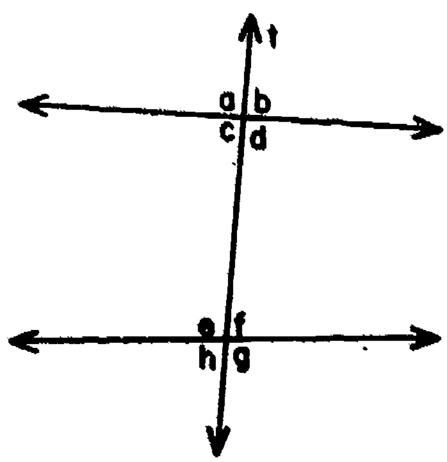


Figura 10-2-d

(a) Indica otro par de ángulos correspondientes que estén colocados del mismo lado de la secante en que están los ángulos b y f.

(b) ¿Son correspondientes los ángulos a y e? (Observa que el rayo de la recta t que forma el ángulo a es solamente una <u>parte</u> del rayo de la recta t que forma el ángulo e; sin embargo, ninguno de los rayos que forman el ángulo e es <u>parte</u> de los rayos que forman el ángulo a.)

(c) ¿Son correspondientes los ángulos c y g?

(d) ¿Cuántos pares de ángulos correspondientes hay en la figura 10-2-c?

(e) Si la medida de $\angle b$ es 80, ¿puedes decir cuál es la medida de $\angle f$?

(f) Si tanto la medida de $\angle a$ como la de $\angle e$ es 90, ¿qué puedes decir de las medidas de todos los ángulos de la figura 10-2-c?

(g) Si la medida tanto de $\angle a$ como la de $\angle e$ es 90, ¿son suplementarios los ángulos h y b?

*7. (a) ¿En qué se parecen las figuras de los problemas 1, 2 y 3?

(b) ¿En qué difieren esas figuras?

(c) ¿Puedes imaginar otra manera de dibujar un conjunto de tres rectas en un plano? (No hagas pasar las tres rectas por un mismo punto.)

(d) Copia y completa la siguiente proposición: "La intersección de tres rectas diferentes en un plano puede consistir en __?__, __?__, __?__ ó __?__ puntos".

*8. Si buscas alrededor tuyo, puedes encontrar ejemplos de conjuntos de tres rectas como aquellos de las figuras que has dibujado en estos ejercicios. Ahora, trata de imaginar tres planos en el espacio. Describe la manera en que tres planos en el espacio puedan tener las siguientes intersecciones:

(a) Un punto.

(b) Dos rectas paralelas.

(c) Tres rectas paralelas.

(d) El conjunto vacío.

10-3. Rectas paralelas y ángulos correspondientes

Sean dos rectas r_1 y r_2 cortadas por la secante t. Supongamos que las rectas r_1 y r_2 no se intersecan. En el lenguaje de los conjuntos diríamos:

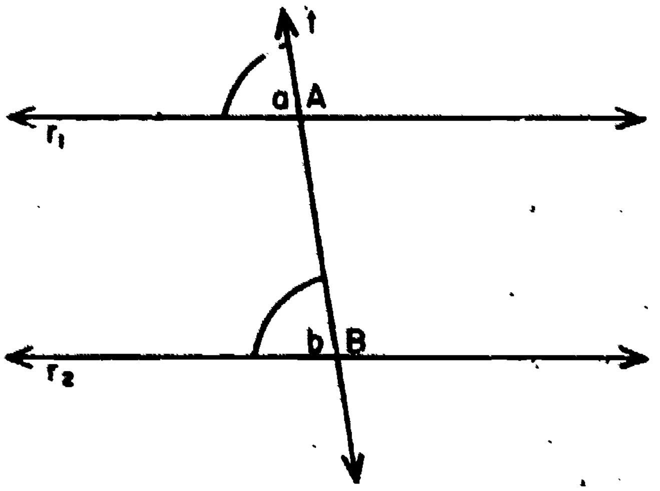


Figura 10-3-a

$r_1 \cap t$ no es el conjunto vacío.

$r_2 \cap t$ no es el conjunto vacío.

$r_1 \cap r_2$ es el conjunto vacío.

Es decir, r_1 y r_2 son paralelas. Ni r_1 ni r_2 es paralela a t.

Ejercicios 10-3 para analizar en clase

1. Vas a dibujar una figura según se indica a continuación; resultará parecida a la figura 10-3-a. Traza una recta t, y marca en ella los puntos A y B separados por una distancia de aproximadamente $1\frac{1}{2}$ pulgadas. En el punto A dibuja un ángulo con medida 70 y llámalo $\angle$ a. En el punto B dibuja $\angle$ b con una medida de 40. ¿Se intersecarán esas rectas si se prolongan? Si así fuera, ¿de qué lado de la recta t se intersecarán, a la izquierda o a la derecha?
2. Dibuja otra figura de manera que $\angle$ a tenga por medida 30 y $\angle$ b tenga por medida 40. ¿Se intersecarán estas rectas si se prolongan? Si así fuera, ¿de qué lado de t se intersecarán, a la izquierda o a la derecha?
3. Haz por lo menos seis experimentos de esta clase con varias medidas para los ángulos a y b. En dos de ellos por lo menos utiliza para $\angle$ a la misma medida que has usado para $\angle$ b. Escribe tus resultados así:

Medida de $\angle$ a en grados	Medida de $\angle$ b en grados	Intersección de r_1 y r_2
70	40	A la izquierda de t
30	40	A la derecha de t
40	40	?

4. Copia la siguiente tabla. Responde a simple vista si r_1 y r_2 se intersecan, y si tu respuesta fuera afirmativa, indica de qué lado de la recta t se intersecan. Haz un dibujo para verificar tus respuestas. (Si deseas puedes extender la tabla con medidas inventadas por ti mismo.)

Medida de $\angle$ a en grados	Medida de $\angle$ b en grados	Intersección de r_1 y r_2
50	80	
50	50	
50	40	

5. Después de analizar en clase los problemas 1 a 4, copia y completa la siguiente proposición:

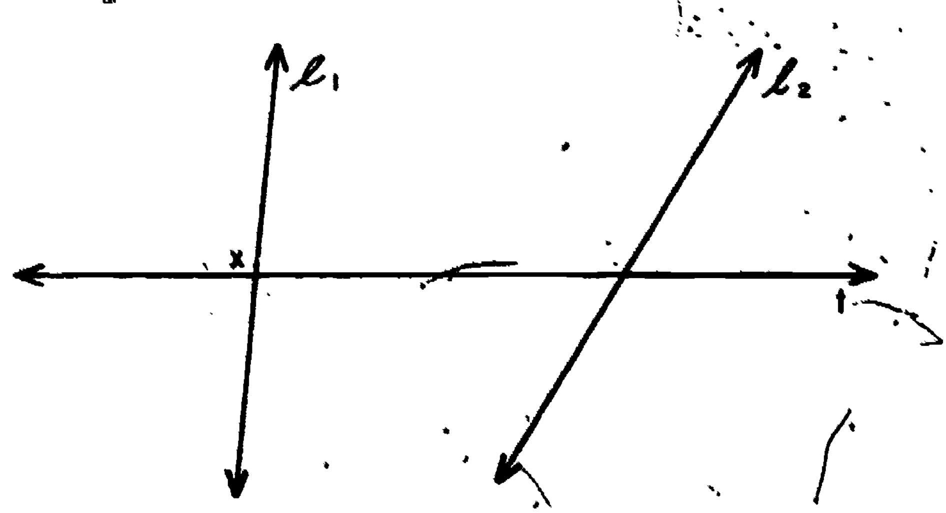
Propiedad 2. Si, en un mismo plano, una secante interseca a dos rectas y un par de ángulos correspondientes tienen diferente __?__, entonces las rectas __?__.

6. Considera el caso en que los ángulos correspondientes son congruentes (tienen iguales medidas). Escribe la proposición para este caso. Copia y completa:

Propiedad 2a. Si, en un mismo plano, una secante interseca a dos rectas y un par de ángulos correspondientes son congruentes, entonces las rectas son __?__.

Ejercicios 10-3

1. Dibuja una figura como la siguiente. ¿Qué ángulo forma con $\angle x$ un par de ángulos correspondientes? Llámalo $\angle p$. Si los ángulos x y p tienen las medidas indicadas en la tabla siguiente, determina si ℓ_1 y ℓ_2 se intersecan encima de t, debajo de t ó si son paralelas.



Copia y completa:

Medida de x en grados	Medida de p en grados.	ℓ_1 y ℓ_2		
		Son paralelas	Se intersecan encima de t.	Se intersecan debajo de t.
(a) 120	140			
(b) 120	120			
(c) 120	90			
(d) 90	120			
(e) 90	90			
(f) 90	70			
(g) 40	90			
(h) 40	40			
(i) 40	20			

2. Haz una lista de varios ejemplos de rectas paralelas que encuentres en tu salón de clase.

*3. Pon una vara o una regla a través de algún par de rectas paralelas de las consideradas en el problema 2 y forma, de esta manera, una secante. Hazlo de manera que las intersecciones con las rectas paralelas estén separadas lo menos posible. Mide las distancias entre las intersecciones en cada posición. ¿Cuál es la medida del ángulo formado por la secante y cada recta paralela cuando llegas a la posición en que la distancia es mínima?

10-4. Recíproca (inversión de una proposición)

Hemos visto que si algo es cierto, entonces algo distinto también es cierto. Por ejemplo:

(a) "Si dos ángulos son opuestos por el vértice, entonces los ángulos tienen la misma medida".

Suponte que construimos una nueva proposición cambiando la parte del "si" por la parte del "entonces". La nueva proposición es:

(b) "Si dos ángulos tienen la misma medida, entonces los ángulos son opuestos por el vértice". Una proposición obtenida mediante ese cambio se llama una proposición recíproca (en inglés, converse). En el ejemplo anterior, la proposición (b) se llama la recíproca de la proposición (a). Puesto que con un cambio igual al anterior en la proposición (b), volvemos de nuevo a la proposición (a), decimos también que (a) es la recíproca de (b).

Si "inviertes una proposición verdadera", ¿será su recíproca siempre verdadera? Veamos primero un par de proposiciones y sus recíprocas antes de responder.

1. "Si María y Luisa son hermanas, entonces María y Luisa son niñas".

La recíproca de 1 es: "Si María y Luisa son niñas, entonces María y Luisa son hermanas". ¿Es la proposición original verdadera? ¿Es la proposición recíproca también verdadera?

Consideremos ahora la proposición siguiente:

2. "Si Pedro es hijo de César, entonces César es padre de Pedro".

La recíproca de 2 es: "Si César es padre de Pedro, entonces Pedro es hijo de César". ¿Es verdadera la proposición original? ¿Es verdadera la recíproca?

Con estos dos ejemplos podemos ver que, si una proposición es verdadera, una recíproca obtenida cambiando la parte "si" por la parte "entonces", puede ser verdadera o falsa.

3. ¿Es verdadera la proposición (a) relativa a los ángulos opuestos por el vértice? ¿Es verdadera la proposición recíproca (b)? No podemos aceptar que la recíproca de una proposición verdadera sea siempre verdadera. Algunas veces, cuando se "invierte" una proposición verdadera, su recíproca es verdadera. Otras veces,

cuando se "invierte" una proposición verdadera, la recíproca es falsa.

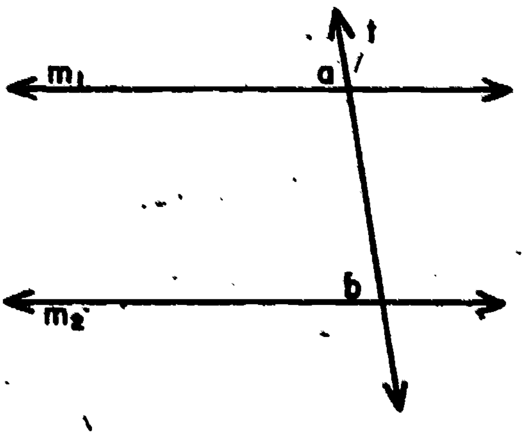
Ejercicios 10-4

1. Haz un dibujo en el que se muestre que la recíproca de la proposición (a) de la Sección 10-4 no es verdadera. ¿Deben ser opuestos por el vértice dos ángulos cualesquiera que tienen la misma medida?
2. Para cada una de las siguientes proposiciones, escribe "verdadera" si la proposición es siempre verdadera, y "falsa" si la proposición es falsa en algunos casos.
   (a) Si Duque es un perro, entonces Duque es de raza cocker.
   (b) Si es el día 4 de julio, entonces es feriado en los Estados Unidos.
   (c) Si Roberto es el niño de mayor estatura en su escuela, Roberto es el niño de mayor estatura de su clase.
   (d) Si un animal es un caballo, ese animal tiene cuatro patas.
   (e) Si un animal es un oso, ese animal tiene piel gruesa.
   (f) Si Susana es la hermana de Marcos, entonces Marcos es el hermano de Susana.
3. Escribe una recíproca para cada proposición del problema 2 e indica si esa recíproca es verdadera o falsa.
4. Lee las siguientes proposiciones. Escribe "verdadera" si la proposición es siempre verdadera, y "falsa" si la proposición es algunas veces falsa.
   (a) Si una figura es una circunferencia, entonces la figura es una curva simple cerrada.
   (b) Si una figura es una curva simple cerrada compuesta de tres segmentos de recta, entonces la figura es un triángulo.
   (c) Si dos ángulos son congruentes, son ángulos rectos.
   (d) Si dos rectas son paralelas, entonces esas rectas no tienen ningún punto en común.
   (e) Si dos ángulos son suplementarios, son adyacentes.
   (f) Si dos ángulos adyacentes son ambos rectos, son suplementarios.

5\. (a) Escribe una proposición recíproca de la siguiente propiedad.

Propiedad 2a. Si una secante interseca a dos rectas contenidas en un mismo plano, y un par de ángulos correspondientes son congruentes, entonces las rectas son paralelas.

(b) Para averiguar la posible verdad de la recíproca, dibuja m_1 y m_2, y la secante t, como en la figura. ¿Son congruentes los ángulos correspondientes? Luego dibuja otra secante de m_1 y m_2. Llámala t_1. Mide los ángulos de cada par de ángulos correspondientes determinados por t_1. ¿Son congruentes?



Compara tus resultados con los de tus condiscípulos.

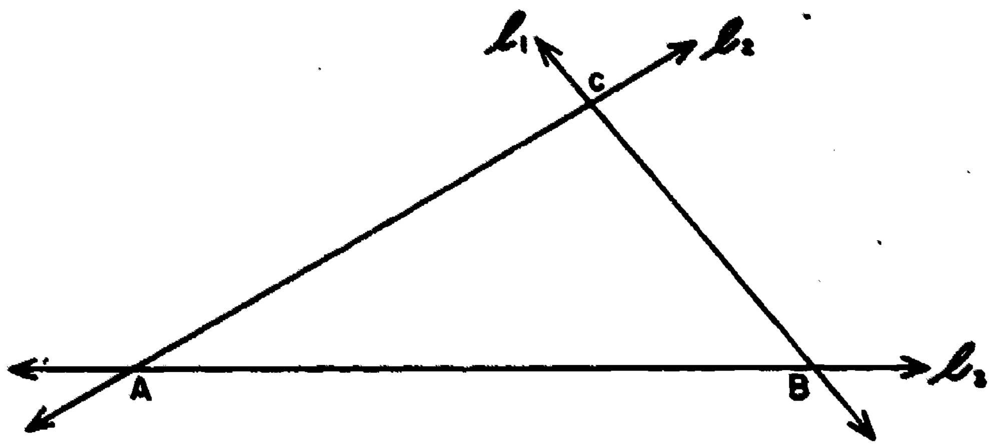
(c) Basándote en estas medidas, ¿piensas que la recíproca de la propiedad 2a enunciada en (a) es verdadera o falsa?

*6. Escribe una proposición recíproca para la propiedad 2: Si una secante interseca a dos rectas contenidas en un mismo plano, y un par de ángulos correspondientes tienen diferentes medidas, entonces las rectas se intersecan. ¿Te parece verdadero o falso este enunciado? Puedes comprobar tu respuesta dibujando figuras como en el problema 5.

*7. ¿Puede ser verdadera la recíproca de una proposición falsa? Si es así, ¿puedes dar un ejemplo?

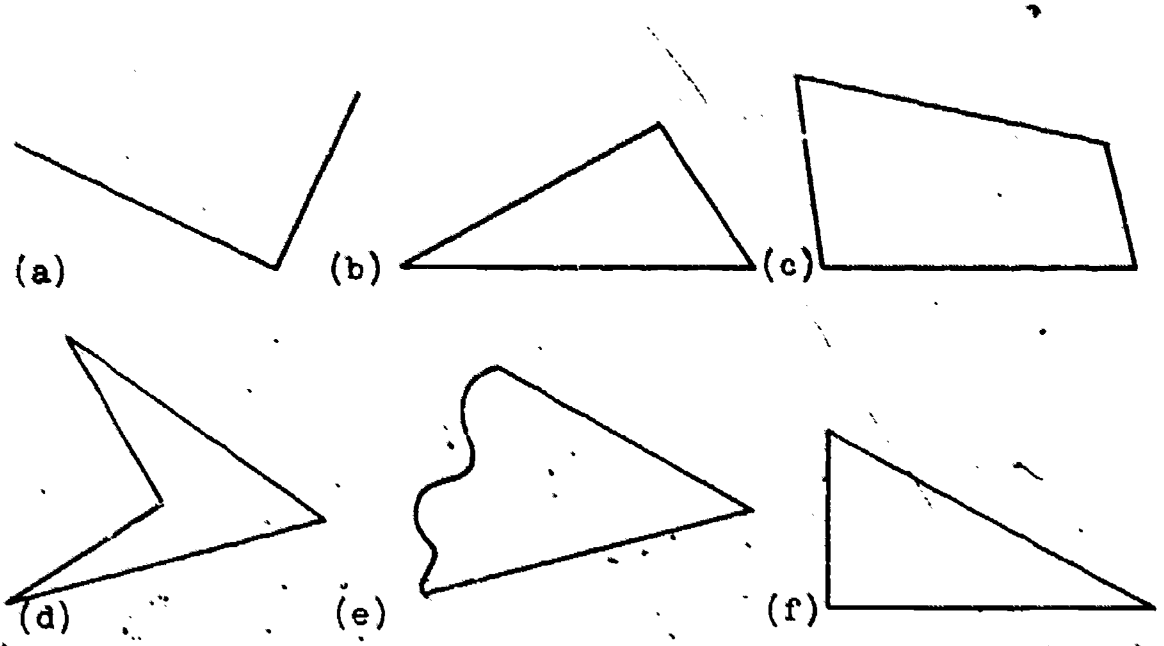
10-5. Triángulos

Has descubierto las relaciones que existen entre los ángulos de una figura compuesta por tres rectas, dos rectas paralelas y una secante. Suponte ahora que las rectas están dispuestas de tal manera que cada recta es una secante de las otras dos. ¿Resultará una figura parecida a la siguiente?

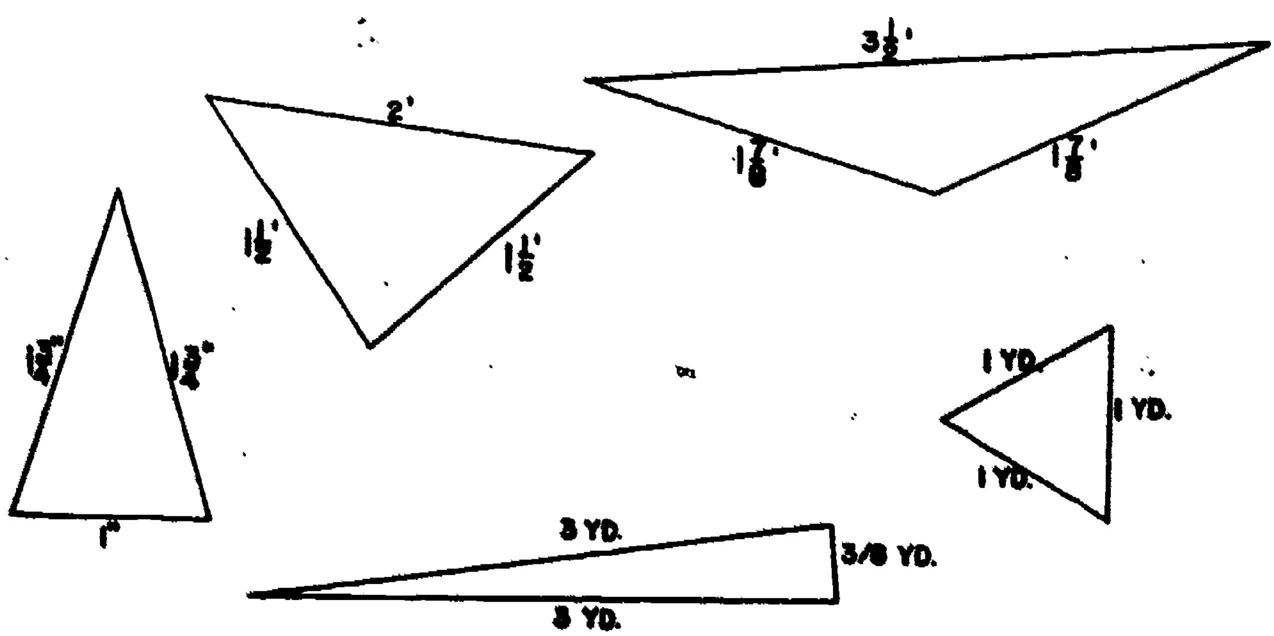


En esta figura, ℓ_1 es una secante de ℓ_2 y de ℓ_3; ℓ_2 es una secante de ℓ_1 y de ℓ_3; y ℓ_3 es una secante de ℓ_1 y de ℓ_2. A, B y C son tres puntos y $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ son segmentos que los unen dos a dos. En el Capítulo 4 (Geometría de posición), la reunión de tres puntos que no están en una misma recta y de los segmentos que los unen dos a dos fue llamada un triángulo. De acuerdo con esta definición, nuestra figura contiene el triángulo ABC. Los puntos A, B y C se llaman los vértices del triángulo y los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ se llaman los lados del triángulo.

¿Cuáles de las siguientes figuras son triángulos? Para cada una de estas figuras que no sea un triángulo, indica qué condición de la definición no se cumple.

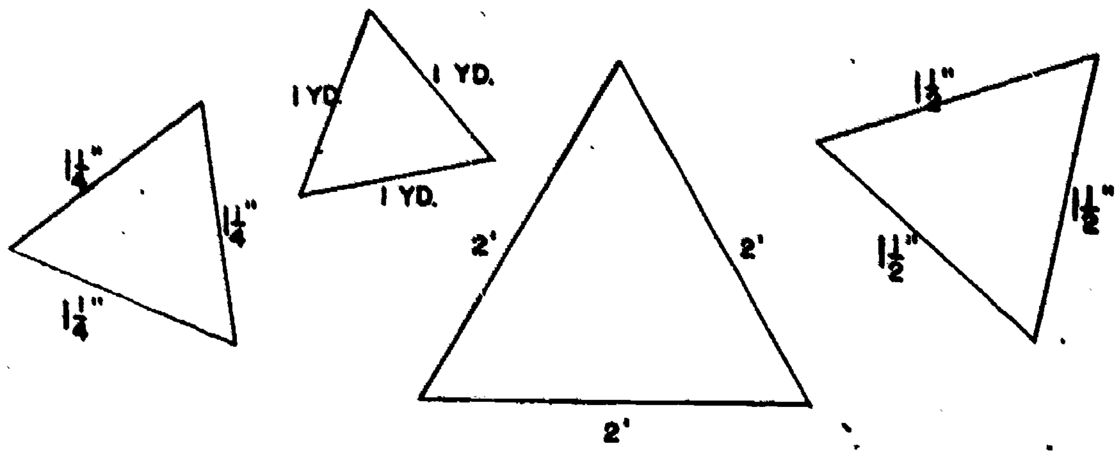


Los triángulos del siguiente grupo son elementos de un conjunto particular de triángulos porque tienen una propiedad común. ¿Qué observas acerca de las longitudes de los lados de los triángulos? (El símbolo 3" significa tres <u>pulgadas</u>. El símbolo 3' significa tres <u>pies</u>.)



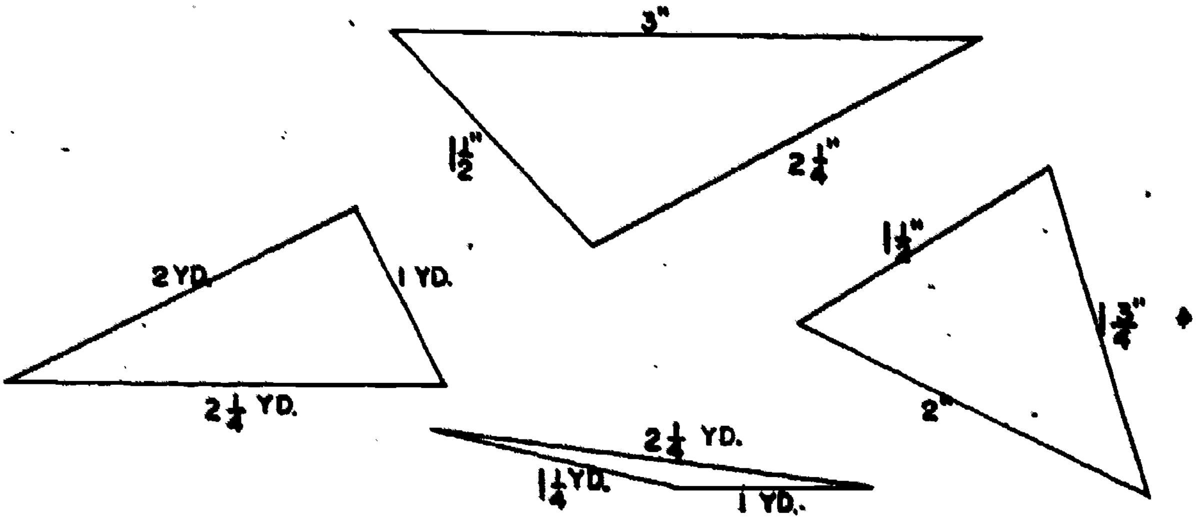
Observa que cada triángulo tiene por lo menos dos lados de longitud igual. Los triángulos de este conjunto, y todos aquellos que tengan la misma propiedad, se llaman triángulos isósceles.

Los triángulos del siguiente grupo son elementos de otro conjunto particular de triángulos. ¿Cuál es la propiedad común a todos los elementos del conjunto?



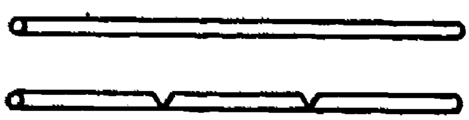
Observa que cada triángulo tiene sus tres lados de longitud igual. Otra manera de decir lo mismo es: todos los lados de un mismo triángulo tienen iguales medidas. Los triángulos de este conjunto, y todos aquellos que tengan la misma propiedad, se llaman triángulos equiláteros. La palabra "equilátero" procede de la palabra latina aequilaterus, compuesta de aequos: igual y latus: lado.

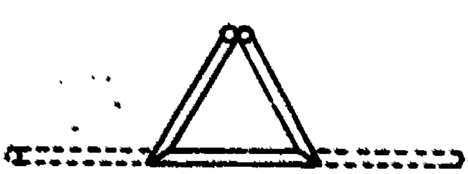
Los triángulos del siguiente grupo son también elementos de otro conjunto de triángulos. ¿Te parece que estos triángulos tienen una propiedad en común?



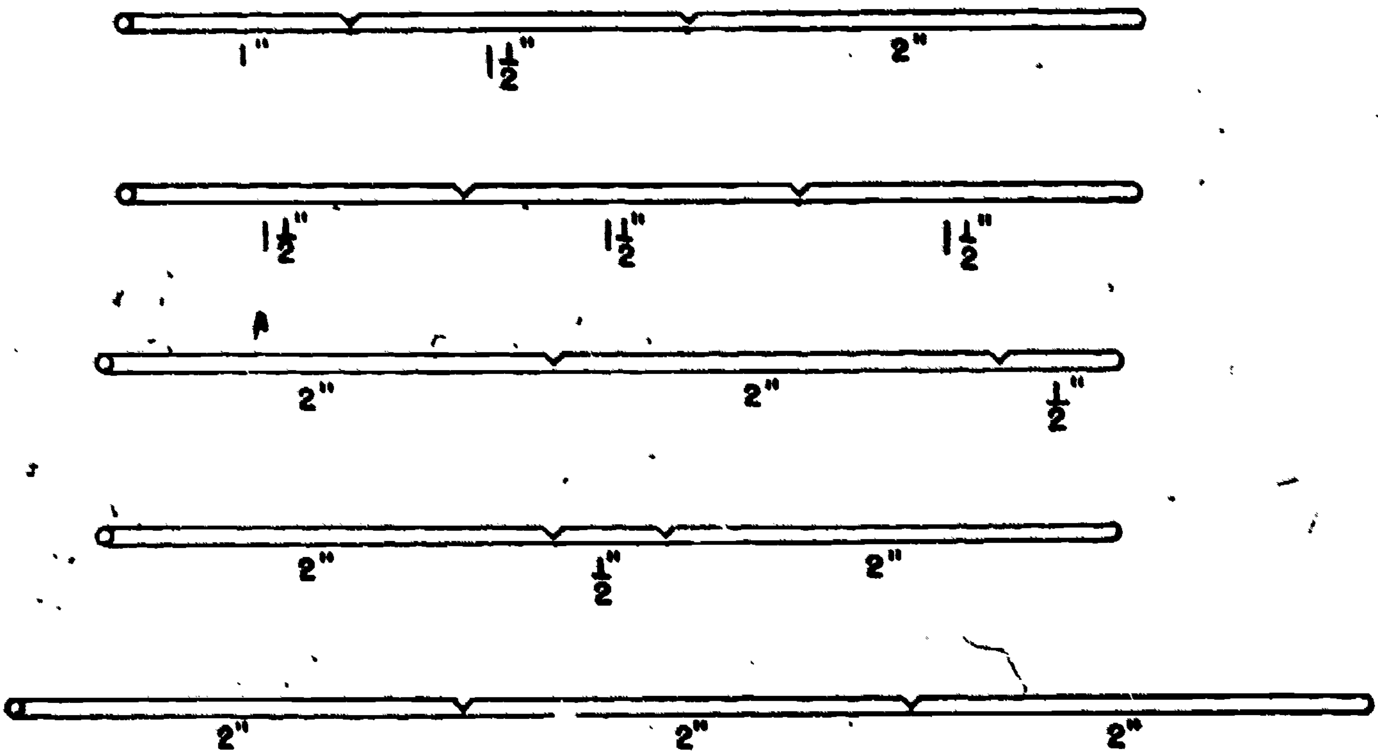
En cualquiera de estos triángulos, ¿tienen dos de los lados la misma medida? ¿Tiene alguno de estos triángulos tres lados de medidas iguales? Ninguno de los triángulos en cuestión tiene dos lados de igual medida. Los triángulos de este conjunto particular, y todos aquellos triángulos que tengan la misma propiedad, se llaman triángulos escalenos.

En la figura se muestra en primer lugar una cañita para tomar soda y luego la misma quebrada en dos puntos y lista para ser plegada de manera que sus extremos se junten, de esta manera:

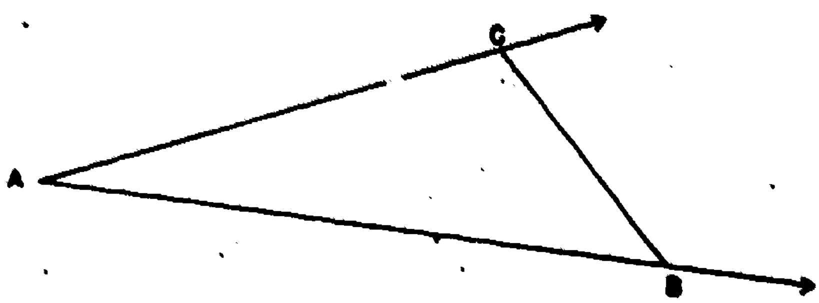




¿Qué clases de triángulos pueden ser representados de esta manera, plegando las siguientes cañitas?

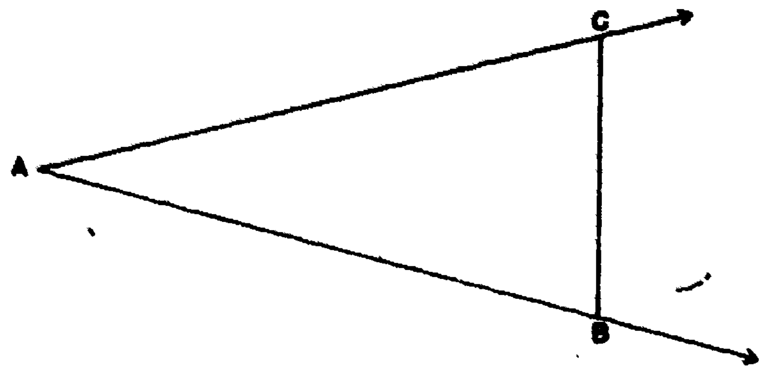


Ahora vas a dibujar unos triángulos. Dibuja un ángulo y llama A a su vértice. Toma un punto B en uno de los rayos del ángulo, y un punto C en el otro. Dibuja el segmento $\overline{BC}$. Tu figura debe parecerse a la siguiente:



La reunión de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se llama "triángulo ABC". Observa en tu figura que los puntos C y B son los únicos compartidos por el ángulo A y el lado $\overline{BC}$. El ángulo A y el lado $\overline{BC}$ se llaman opuestos uno de otro porque su intersección consiste solamente en los extremos de $\overline{BC}$. ¿Es $\angle$ B opuesto a $\overline{AC}$? ¿Por qué? ¿Es $\angle$ C opuesto a $\overline{AC}$? ¿Por qué? ¿Qué otros ángulos y lados son opuestos uno de otro, en tu dibujo? ¿Por qué?

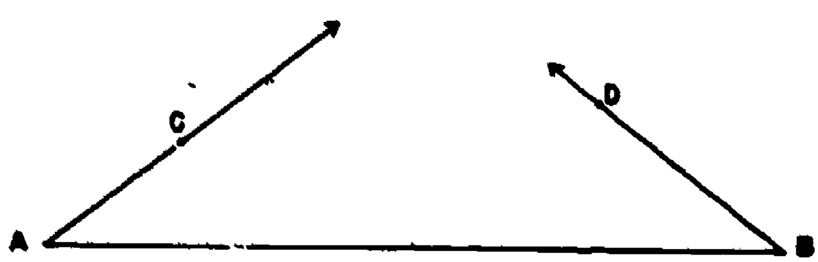
Dibuja otro triángulo como el anterior, pero esta vez localiza cuidadosamente los puntos B y C de manera que $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ sean congruentes, como se muestra a continuación:



¿Qué clase de triángulo es ΔABC? ¿Por qué? Copia el ángulo B y trata de hacerlo coincidir con el ángulo C. ¿Qué sugiere esto sobre las medidas de los ángulos B y C? Haz varias copias más de los triángulos isósceles de la segunda página de esta sección. ¿Qué observas? Copia y completa la siguiente proposición:

<u>Propiedad 3.</u> <u>Si dos lados de un triángulo son ___?___ en longitud, entonces los ángulos ___?___ de esos lados tienen ___?___ medidas.</u>

Ahora, haz un dibujo como el que sigue. Dibuja $\overline{AB}$ aproximadamente de cuatro pulgadas de longitud. Dibuja ángulos de 40 grados en A y B, como se indica. Marca puntos C y D en lugares convenientes de los rayos de esos ángulos.



Observa que hemos dibujado dos ángulos de igual medida. Prolonga $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ y llama E a su punto de intersección. Resulta así formado el triángulo ABE.

¿Qué observas acerca de los lados opuestos a los ángulos A y B de este triángulo? Haz varias otras figuras según estas directivas. Dibuja los ángulos A y B siempre agudos y de igual medida, pero cambia esa medida de un triángulo a otro. ¿Qué observas acerca de los lados de cada figura? ¿A qué conjunto particular de triángulos parecen pertenecer tus figuras?

Copia y completa el siguiente enunciado:

<u>Si dos ángulos de un triángulo tienen medidas ? , entonces los lados ? a esos ángulos tienen longitudes ? .</u>

¿Te has dado cuenta de que este enunciado se parece al que anteriormente completaste como propiedad 3? ¿Qué nueva palabra, de las que aprendiste al estudiar la Sección 10-4, podría usarse para describir la relación que hay entre estas dos proposiciones? Llamaremos recíproco de la propiedad 3 a este enunciado.

<u>Problemas 10-5 para analizar en clase</u>

1. ¿Se podrían determinar los tres conjuntos de triángulos que hemos estudiado (isósceles, equiláteros y escalenos) por alguna propiedad común que se refiera a las medidas de los ángulos en vez de las medidas de los lados? ¿Qué ventajas o desventajas tendría este método de clasificación?
2. ¿Cómo se podría utilizar la recíproca de la propiedad 3 para demostrar que un triángulo que tiene sus tres ángulos de igual medida debe ser, necesariamente, equilátero?

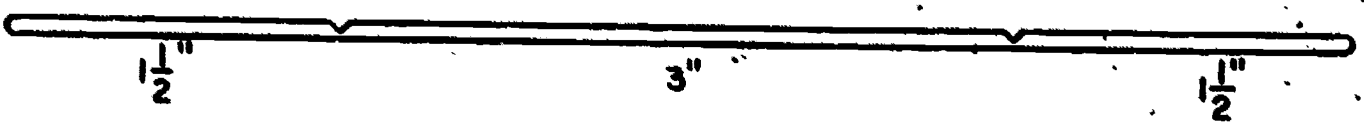
<u>Ejercicios 10-5</u>

1. Dibuja un triángulo isósceles.
2. Dibuja un triángulo equilátero.
3. Dibuja un triángulo escaleno.
4. Si un triángulo es isósceles, ¿es también equilátero? Explica tu respuesta.

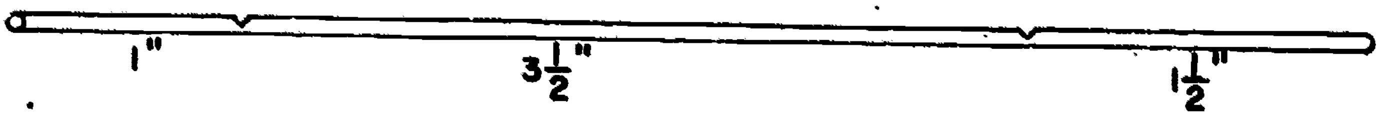
5. Si un triángulo es equilátero, ¿es también isósceles? Explica tu respuesta.

6. Dibuja un triángulo equilátero y llama P, Q y R a sus vértices. Haz una lista en que se correspondan los ángulos con sus lados opuestos.

7. (a) ¿Se podría representar un triángulo doblando la cañita para tomar soda que se muestra en la figura? Explica tu respuesta.

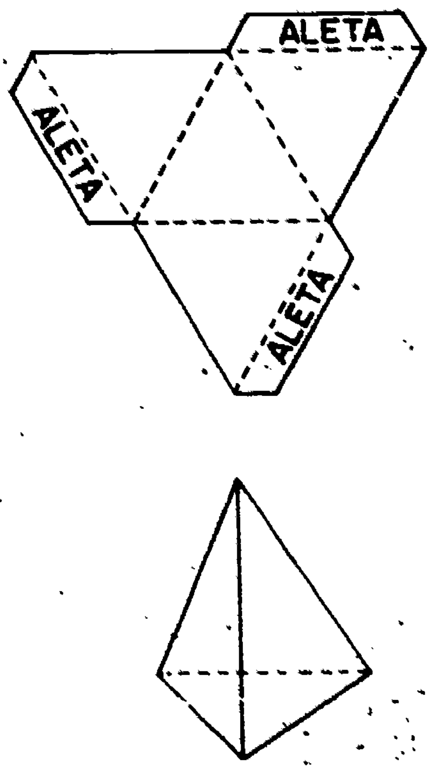


(b) ¿Se podría representar un triángulo doblando la cañita que se muestra aquí? Explica tu respuesta.



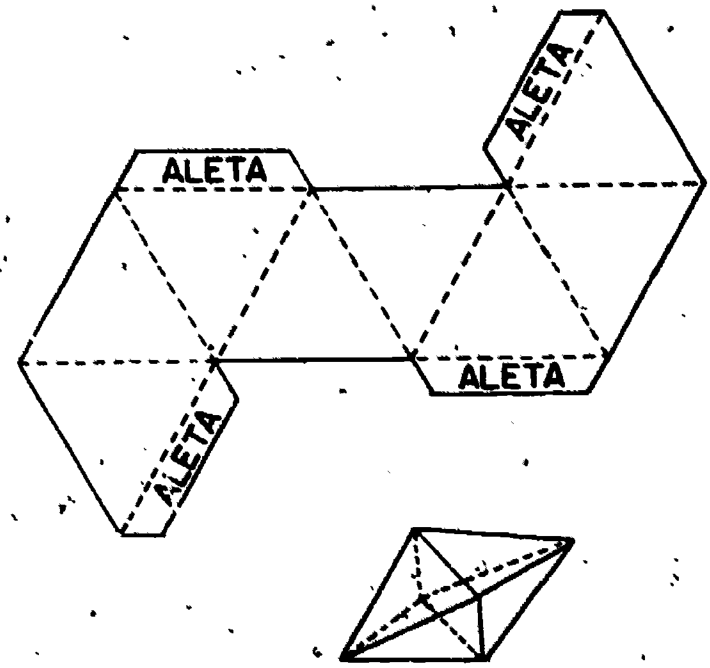
*(c) Enuncia una propiedad sobre las longitudes de los lados de un triángulo, sugerida por tus observaciones de las preguntas (a) y (b).

8. OPCIONAL. Copia los siguientes modelos, dóblalos por las líneas de trazos después de haberlos recortado siguiendo los bordes y pega las aletas. Observa los triángulos equiláteros. Para obtener mejores resultados, amplía estos modelos.



tetraedro

(cuatro caras)



octaedro

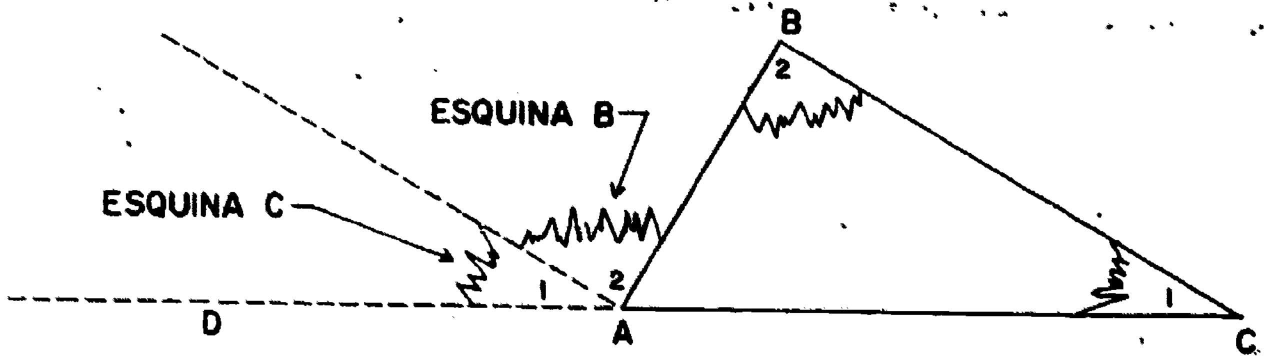
(ocho caras)

10-6. Angulos de un triángulo

En las secciones anteriores hemos estudiado propiedades especiales de ciertos triángulos. En esta sección nos ocuparemos de una propiedad que es verdadera para todo triángulo.

Ejercicios 10-6 para analizar en clase

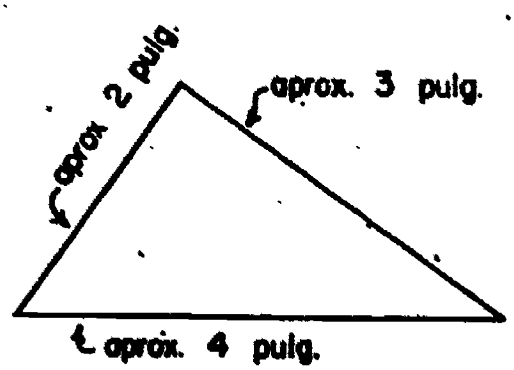
1. Dibuja un triángulo, de modo que cada lado tenga unas dos o tres pulgadas de longitud. Recorta la región triangular a lo largo de los lados del triángulo. Arranca dos de las esquinas de esa región y pega la figura completa sobre cartón o sobre una hoja de papel, como se indica en la figura siguiente. Nota: Las esquinas B y C han sido colocadas alrededor del vértice A, pegándolas en este lugar.



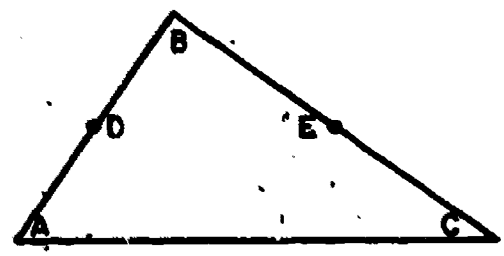
(a) Halla las medidas de los tres ángulos cuyos vértices están en A. Halla la suma de esas tres medidas y compara tu resultado con los de tus condiscípulos. En la figura anterior, ¿te parece que $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{AC}$ están sobre la misma recta? ¿Te parece que esto es cierto en la figura que has hecho?

(b) ¿Qué observas acerca de los ángulos 1, 2 y BAC en esta nueva disposición?

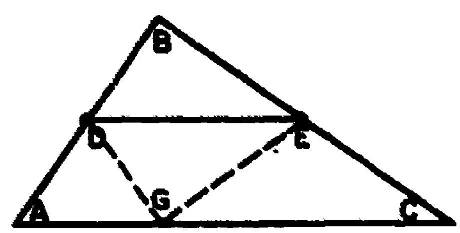
2. (a) Dibuja un triángulo haciendo el lado más largo de unas 4 pulgadas, uno de los dos lados restantes de unas 3 pulgadas, y el tercer lado de unas 2 pulgadas de largo. Recorta el interior del triángulo.



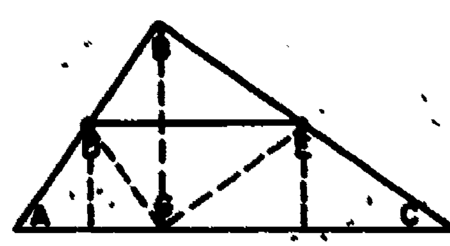
(b) Marca los vértices A, B y C en el interior del triángulo, como se indica en la figura de la derecha. Toma el punto medio de $\overline{AB}$ e indícalo con la letra D. (El punto medio es el que está a mitad de camino de un extremo del segmento al otro.) Toma el punto medio de $\overline{BC}$ e indícalo con la letra E. $\overline{AD}$ y $\overline{DB}$ deben ser de la misma longitud. $\overline{BE}$ y $\overline{EC}$ deben ser de la misma longitud.

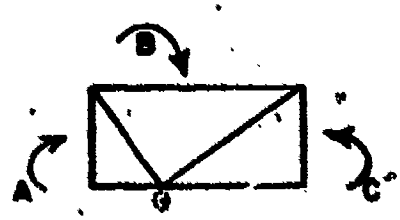


(c) Dibuja un segmento de recta que una D y E. Dobla luego hacia abajo, a lo largo del segmento $\overline{DE}$, la porción del triángulo que contiene el vértice B, de manera que el vértice B caiga sobre $\overline{AC}$. Marca con la letra G el punto en que cae B sobre $\overline{AC}$.



(d) Dobla la porción del triángulo que contiene el vértice A hacia la derecha de manera que A caiga sobre el punto G. Dobla la porción del triángulo que contiene el vértice C hacia la izquierda de manera que C también caiga sobre el punto G. La figura resultante será un rectángulo.



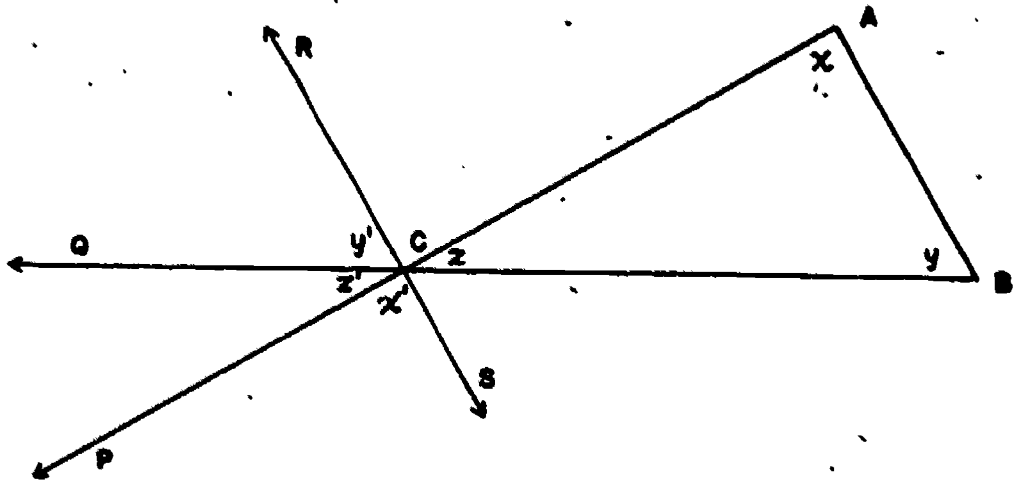


(e) ¿Qué parece ocurrir con la suma de las medidas de los ángulos A, B y C?

(f) ¿Se puede repetir este experimento con otros triángulos? Compara tus resultados con los de tus condiscípulos.

(g) ¿Concuerda con tus observaciones la propiedad que has encontrado en el problema 1?

3. Considera el triángulo ABC y los rayos $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{BA}$ como se muestra en seguida. Por el punto C se traza la recta RS de manera que la medida de $\angle$ y sea igual a la medida de $\angle$ y'. Ahora estamos usando una nueva notación y', que se lee "y prima". (En este problema usaremos la notación para designar ángulos.)



Cada vez que te sea posible, emplea una propiedad para explicar "por qué", en cada una de las siguientes preguntas:

(a) ¿Es $\overleftrightarrow{RS}$ paralela a $\overline{AB}$? ¿Por qué?

(b) ¿De qué clase son los dos ángulos marcados con las letras x y x'? ¿Es $m(\angle x) = m(\angle x')$? ¿Por qué?

(c) ¿De qué clase son los dos ángulos marcados con las letras z y z'? ¿Es $m(\angle z) = m(\angle z')$? ¿Por qué?

(d) $m(\angle y) = m(\angle y')$ ¿Por qué?

(e) $m(\angle x) + m(\angle y) + m(\angle z) = m(\angle x') + m(\angle y') + m(\angle z')$ ¿Por qué?

(f) $m(\angle x) + m(\angle y) + m(\angle z)$ es la suma de las medidas de los ángulos del triángulo. ¿Por qué?

(g) $m(\angle x') + m(\angle y') + m(\angle z') = 180$ ¿Por qué?

(h) $m(\angle x) + m(\angle y) + m(\angle z) = 180$ ¿Por qué?

(i) Concluimos, en consecuencia, que la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180. ¿Por qué?

Esta es una demostración de la propiedad 4.

Propiedad 4. La suma de las medidas, en grados, de los ángulos de un triángulo es 180.

No estudiaremos este año muchas demostraciones, pero en algunos ejercicios se te pedirá que trates de descubrir una demostración. Cuando estudies más geometría, en los años próximos, se te desarrollará mucho la habilidad para descubrir demostraciones.

Observa que en esta demostración hemos dibujado un triángulo cualquiera. ¿Se podrá aplicar esta demostración a todo triángulo? Si lo dudas, dibuja otros triángulos de forma muy diferente al que hemos utilizado aquí, marca puntos, ángulos, segmentos, rayos y rectas de la misma manera. Luego trata de rehacer esta demostración para la figura que has dibujado.

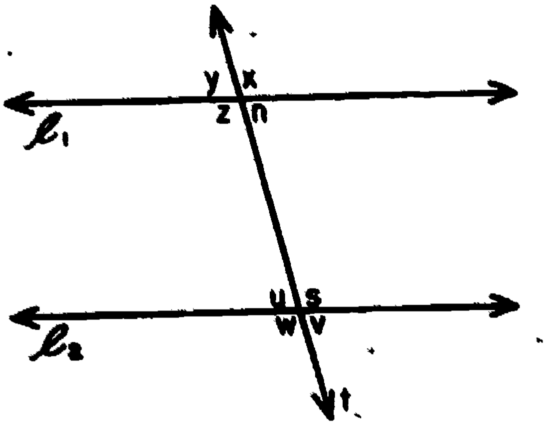
Ejercicios 10-6

1. ¿Cuál es la medida de cada ángulo de un triángulo equilátero?
2. ¿Cuál es la medida del tercer ángulo de un triángulo si los otros dos tienen las siguientes medidas?
   (a) 40 y 80
   (b) 100 y 50
   (c) 70 y 105
   (d) 80 y 80

3. Suponte que un ángulo de un triángulo isósceles tiene por medida 50. Halla las medidas de los otros dos ángulos. ¿Hay dos conjuntos diferentes de respuestas posibles?
4. Si se dibujan dos triángulos, ABC y DEF, de manera que $m(\angle BAC) = m(\angle EDF) = m(\angle BCA) = m(\angle EFD)$, ¿qué se puede afirmar acerca de los ángulos ABC y DEF? ¿En qué propiedad se basa tu respuesta?
5. En cada una de las siguientes preguntas se dan las medidas de ciertas partes del triángulo ABC, las de los lados se dan en pulgadas y las de los ángulos en grados. Se te pide determinar la medida de alguna otra parte del triángulo. En cada caso, justifica tu respuesta.

Dados	Determina	Propiedad
(a) $m(\angle ABC) = 60$, $m(\angle BCA) = 40$	$m(\angle CAB)$	?
(b) $m(\angle CAB) = 52$, $m(\angle BCA) = 37$	$m(\angle ABC)$	?
(c) $m(\angle ABC) = 40$, $m(\overline{AB}) = 2$, $m(\overline{AC}) = 2$	$m(\angle ACB)$	?
(d) $m(\overline{AB}) = 3$, $m(\overline{AC}) = 3$, $m(\overline{BC}) = 3$	$m(\angle BCA)$	?
(e) $m(\angle BAC) = 100$, $m(\angle BCA) = 40$, $m(\overline{AB}) = 4$	$m(\overline{AC})$	?

*6. En la figura de la derecha ℓ_1 y ℓ_2 son paralelas.



(a) ¿Es $m(\angle y) = m(\angle n)$? ¿Por qué?

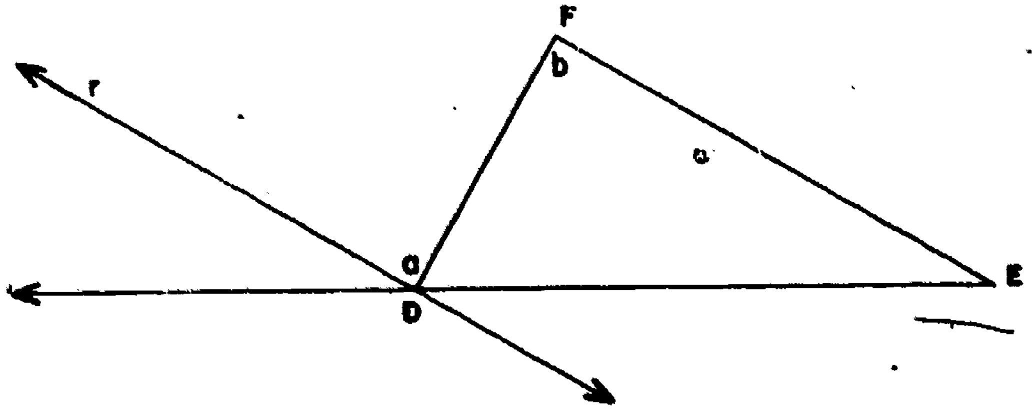
(b) ¿Es $m(\angle y) = m(\angle u)$? ¿Por qué?

(c) Trata de demostrar que $m(\angle n) = m(\angle u)$.

(d) Comenta con tus condiscípulos las condiciones que requiere una buena demostración.

(e) Después del análisis hecho en clase, redacta tu demostración de acuerdo con los puntos de vista expresados por ti y tus condiscípulos.

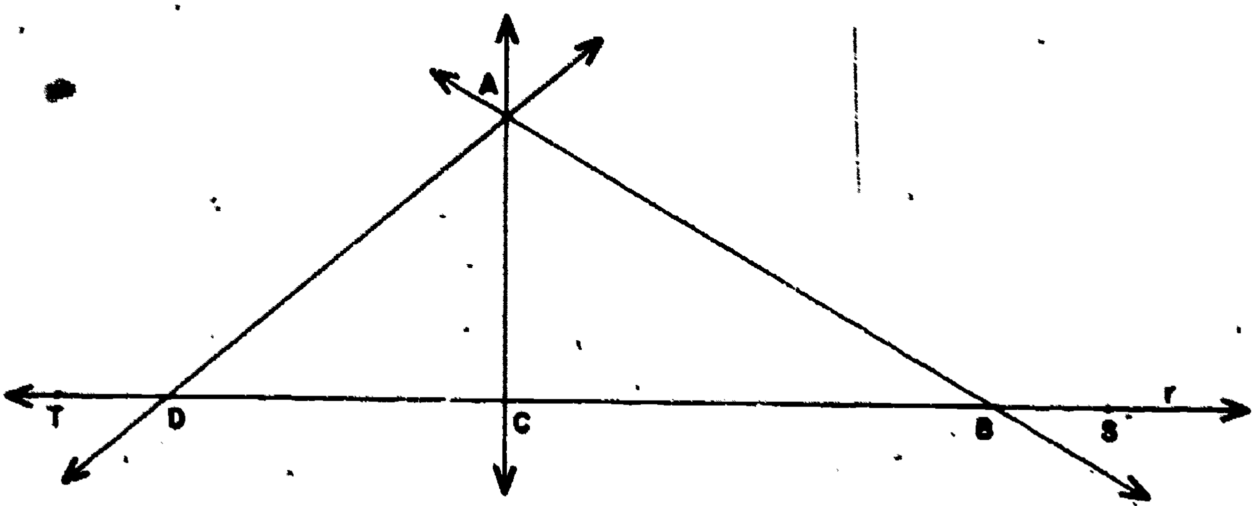
*7. En el problema 6 se ha visto que las medidas de los ángulos a y b de la figura que sigue, son iguales si la recta r es paralela a $\overleftrightarrow{EF}$. Usa esta propiedad para demostrar que la suma de las medidas de los ángulos del triángulo DEF es 180.



10-7. Paralelogramos

Distancia entre rectas paralelas

Observa la siguiente figura, en la que se presentan algunas rectas que pasan por el punto A y la recta r que las interseca.



Utiliza un limbo graduado para verificar las medidas de los ángulos que se dan a continuación.

m(∠ SDA) = 40 m(∠ SCA) = 90 m(∠ SBA) = 150

Da las siguientes medidas:

m(∠ TDA) = ? m(∠ TCA) = ? m(∠ TBA) = ?

Mide los segmentos $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$.

¿Cuál es el más corto?

Copia la figura y dibuja otras rectas que pasen por A e intersequen a r.

Mide los segmentos de esas rectas desde el punto A hasta las intersecciones de ellas con la recta r.

¿Encuentras que alguno de estos segmentos es más corto que $\overline{AC}$?

Observa que $\overleftrightarrow{AC}$ es perpendicular a r.

A base de tus experiencias en este caso, copia y completa la siguiente proposición:

> El segmento más corto desde el punto A hasta la recta r es el segmento ________ a r.

La longitud de este segmento se llama frecuentemente la distancia de A a r.

En la siguiente figura, k_1 y k_2 representan rectas paralelas. Las rectas a, b y c son perpendiculares a k_2 y pasan por tres puntos, D, E y F de k_1. Es decir, las longitudes de $\overline{FA}$, $\overline{EB}$ y $\overline{DC}$ son las distancias de F, E y D a la recta k_2, respectivamente. Se acostumbra dibujar un cuadradito, como se ve en la figura en los puntos A, B y C, para indicar que un ángulo es recto.

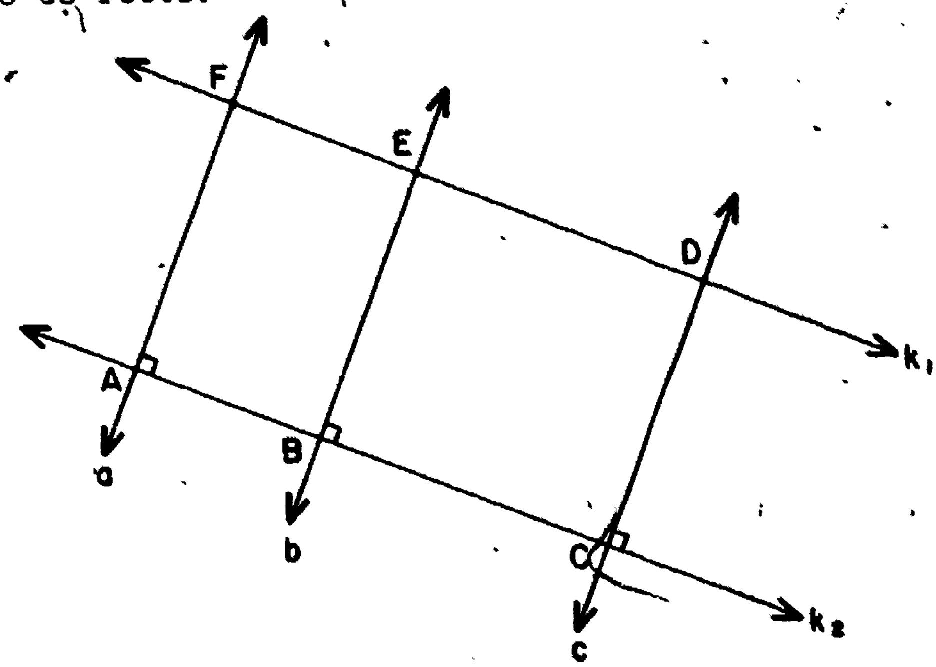
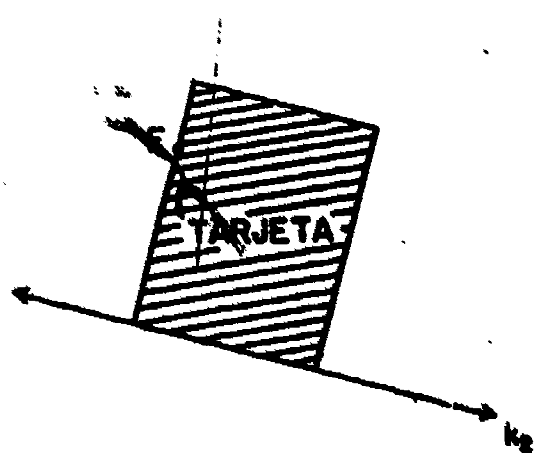


Figura 10-7-a

El trazado de una recta tal como c, que pasa por D y sea perpendicular a k_2, puede hacerse fácilmente utilizando una tarjeta o una hoja de papel que tenga una esquina formando ángulo recto. El procedimiento se ilustra en la figura de la derecha.



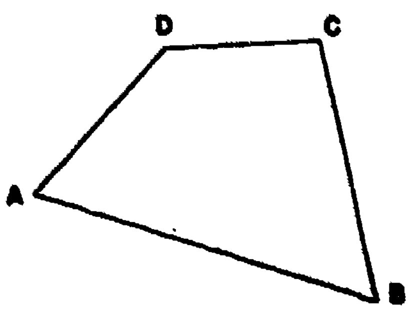
En la figura 10-7-a hay 21 ángulos rectos además de los marcados. ¿Puedes señalarlos? ¿Cómo sabes que son ángulos rectos?

Mide las longitudes de $\overline{FA}$, $\overline{EB}$ y $\overline{DC}$ en la figura 10-7-a. ¿Te parece que estas longitudes son iguales? Esta longitud común se llama la distancia entre las rectas k_1 y k_2. Entonces, se puede definir la distancia entre dos rectas paralelas como la longitud de cualquier segmento contenido en una recta perpendicular a esas dos rectas, y que tenga un extremo en cada una de las rectas.

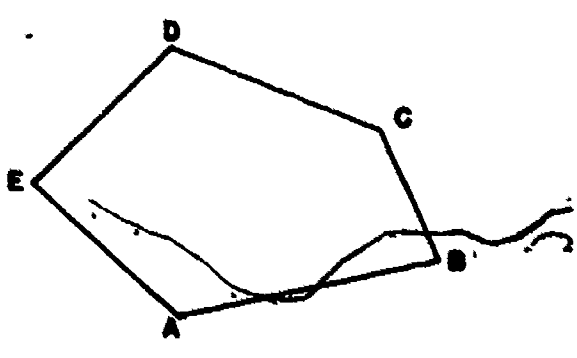
Paralelogramos

En el Capítulo 4 hemos introducido la idea de curva simple cerrada. Se puede llamar polígono a toda curva simple cerrada que es una reunión de segmentos. En tus estudios posteriores, es probable que veas a veces aplicada la palabra "polígono" a curvas que no son simples, pero todos los polígonos que estudiaremos en este capítulo serán curvas simples cerradas. A menos que se indique lo contrario, entenderemos que un polígono está contenido en un plano.

Se dan nombres especiales a los polígonos que tienen ciertos números de lados (es decir, de segmentos). Ya sabes que un polígono de tres lados se llama triángulo. De modo análogo, un polígono de cuatro lados se llama cuadrilátero y un polígono de cinco lados se llama pentágono.



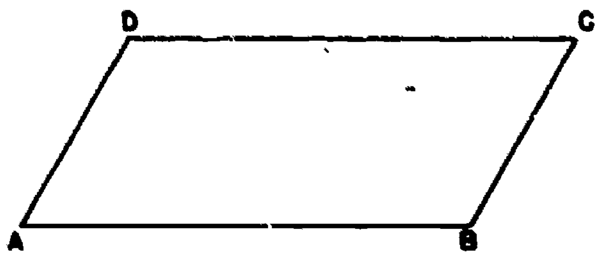
Cuadrilátero



Pentágono

Dos lados (segmentos) de un cuadrilátero que no se intersecan se llaman <u>lados opuestos</u>. (¿Cómo describirías dos lados opuestos refiriéndote a su intersección?) Indica los pares de lados opuestos del cuadrilátero anterior.

Una especie particularmente importante de cuadrilátero es el paralelogramo. Es un cuadrilátero cuyos lados opuestos están sobre rectas paralelas. La figura ABCD que sigue, representa un paralelogramo. Indica sus pares de lados opuestos.

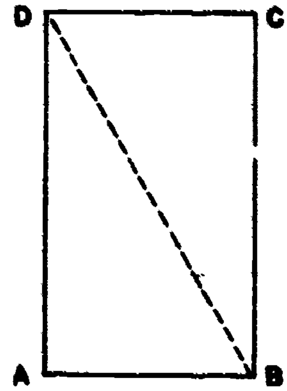


De ahora en adelante, si dos segmentos están sobre rectas paralelas diremos que son <u>segmentos</u> paralelos. En consecuencia, podemos decir que los lados opuestos de un paralelogramo son paralelos.

<u>Propiedad 5. Los lados opuestos de un paralelogramo son paralelos y congruentes.</u>

Ya sabemos que los lados opuestos son paralelos. Para saber si son iguales, mide los lados del paralelogramo de la figura anterior. ¿Encuentras que los lados opuestos tienen igual longitud? Dibuja varios paralelogramos y mide las longitudes de los pares de lados opuestos. ¿Estás de acuerdo con la propiedad anterior (subrayada)?

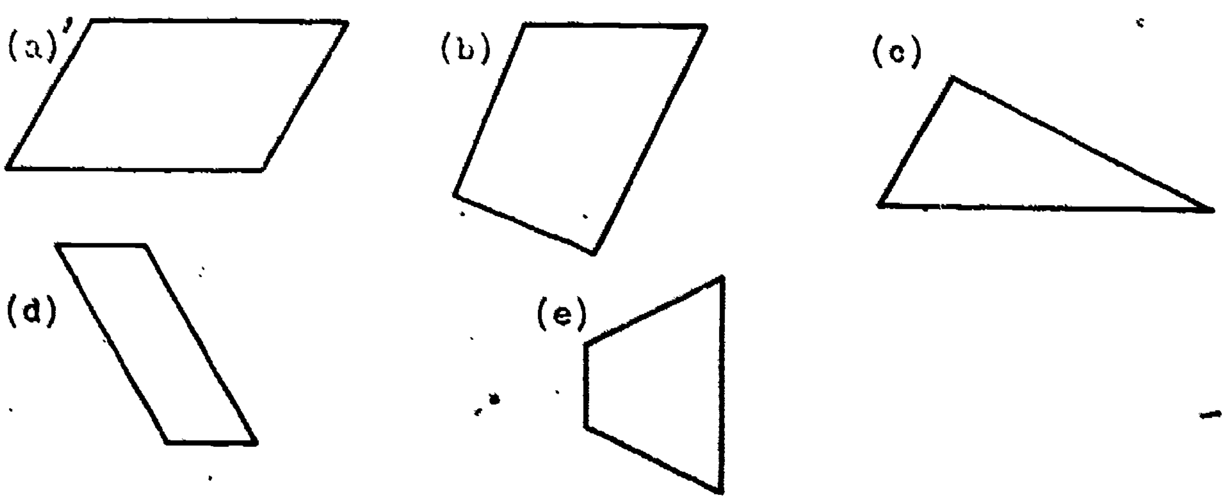
La figura de la derecha representa una hoja rectangular de papel. (Observa que un rectángulo es un caso particular de paralelogramo.) Toma la hoja de papel, dóblala por la línea de trazos y córtala a lo largo de esa línea, en dos partes. Superponiendo una pieza sobre la otra muestra que los triángulos ABD y BCD tienen el mismo tamaño. ¿Es el área de uno de esos triángulos igual a la mitad del área del rectángulo? ¿Por qué?



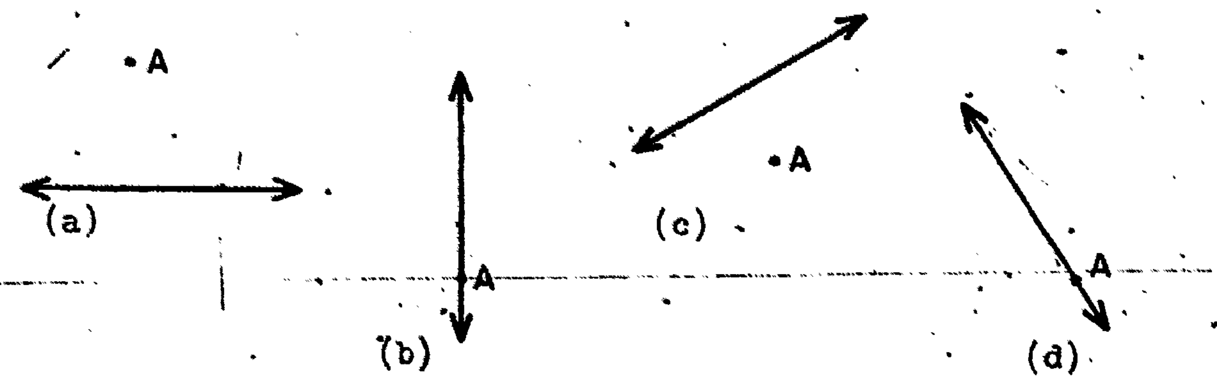
En el problema 5 de los ejercicios siguientes se te pide que repitas la misma operación, utilizando paralelogramos de diferentes formas.

Ejercicios 10-7

1. Señala varios pares de rectas paralelas en tu salón de clase y mide las distancias que hay entre ellas.
2. Señala varios ejemplos de paralelogramos en tu salón de clase.
3. ¿Cuáles de las siguientes figuras son paralelogramos, suponiendo que los segmentos que parecen ser paralelos, realmente lo sean?

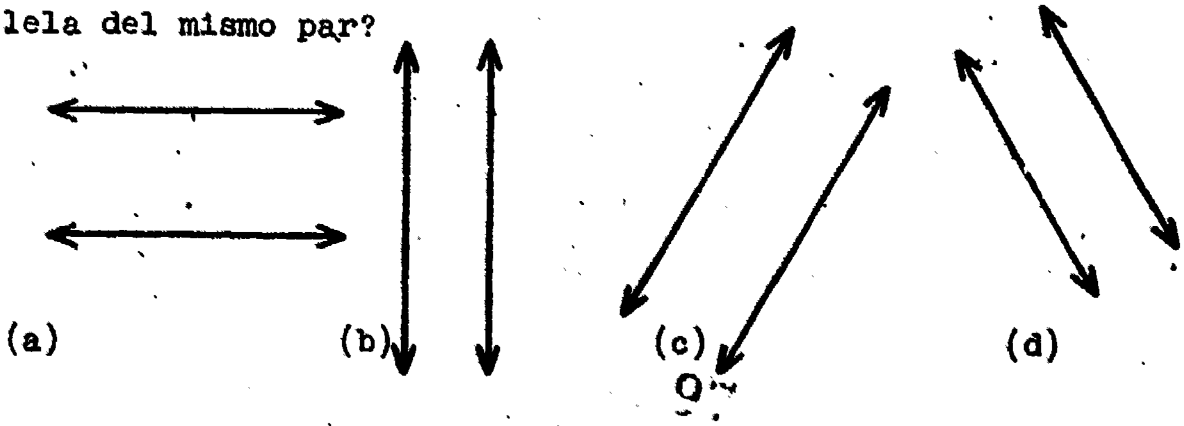


4. Dibuja perpendiculares a las rectas cuyas posiciones aproximadas se indican, de manera que pasen por los puntos A señalados en la figura. No dibujes en tu libro. Utiliza una hoja de papel aparte.

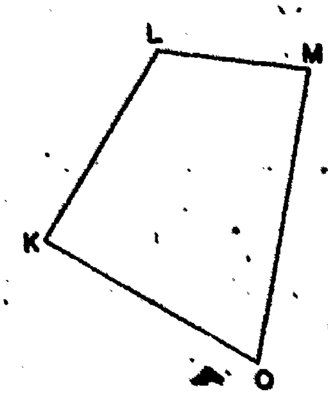


5. Dibuja un paralelogramo y recórtalo cuidadosamente siguiendo sus lados. Obtienes así un trozo de papel que representa el interior del paralelogramo. Dibuja una diagonal (una recta que une vértices opuestos) y corta el papel a lo largo de esa diagonal. Compara las dos piezas triangulares. ¿Qué concluyes acerca de esas piezas triangulares? Repite el mismo procedimiento con otros dos paralelogramos de formas distintas. Escribe un enunciado que parezca verdadero a base de tus experiencias con este problema.

6. En la figura siguiente se muestran varios pares de rectas paralelas. Toma cada uno de ellos y dibuja una recta perpendicular a una de las dos rectas de ese par. (No escribas en tu libro. Copia las rectas en papel aparte, conservando aproximadamente sus posiciones.) Las rectas perpendiculares a una paralela, ¿son también perpendiculares a la otra paralela del mismo par?



7. Las siguientes preguntas se refieren a un cuadrilátero, como se sugiere en el dibujo. Cada pregunta, sin embargo, se refiere a un cuadrilátero distinto.



(a) $\overline{KL}$ es paralelo a $\overline{OM}$, $\overline{LM}$ es paralelo a $\overline{KO}$, $\overline{KL}$ tiene una longitud de 3 pulgadas y $\overline{OK}$ tiene una longitud de 6 pulgadas. ¿Cuáles son las longitudes de $\overline{LM}$ y de $\overline{OM}$?

(b) $\overleftrightarrow{KL} \cap \overleftrightarrow{OM}$ es el conjunto vacío, $\overleftrightarrow{LM} \cap \overleftrightarrow{OK}$ es también el conjunto vacío. $\overline{LM}$ tiene una longitud de 4 pulgadas y $\overline{OM}$ es tres veces más largo que $\overline{LM}$. Halla las longitudes de $\overline{KL}$ y de $\overline{OK}$.

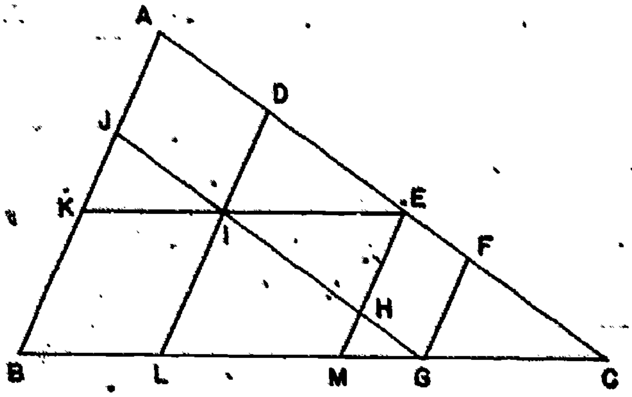
(c) $\overleftrightarrow{LM} \cap \overleftrightarrow{OK}$ es el conjunto vacío, pero $\overleftrightarrow{OM} \cap \overleftrightarrow{KL}$ no es el conjunto vacío. ¿Pueden tener dos lados opuestos la misma longitud? ¿Pueden tener ambos pares de lados opuestos esta propiedad? (Dibuja figuras para ilustrar tus respuestas.)

*8. (a) Copia y completa el siguiente enunciado de una propiedad:

Si, en un plano, una recta es perpendicular a una de varias rectas paralelas, entonces es ______________.

(b) Demuestra la propiedad. (Debes suponer que una recta perpendicular a una de dos paralelas interseca a la otra.)

*9. Con referencia al triángulo ABC que se muestra a la derecha, supónte que los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{DL}$, $\overline{EM}$ y $\overline{FG}$ son paralelos; que $\overline{AC}$ es paralelo a $\overline{JG}$ y que $\overline{BC}$ es paralelo a $\overline{KE}$.



(a) Haz una lista de los paralelogramos que hay en la figura. (Son 10.)

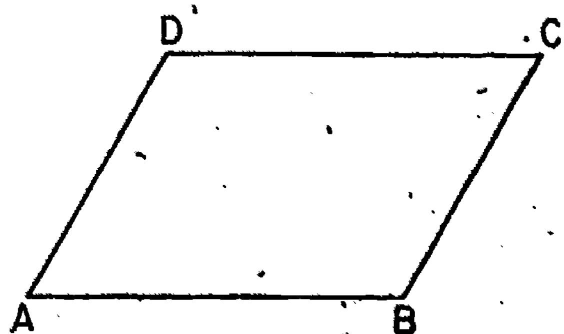
(b) Haz una lista de los segmentos de la figura anterior que son congruentes con $\overline{AJ}$, sin medirlos.

(c) Haz una lista de los segmentos de la figura anterior que son congruentes con $\overline{BK}$, sin medirlos.

(d) Haz una lista de los segmentos de la figura anterior que son congruentes con $\overline{GI}$, sin medirlos.

10-8. <u>Areas de los paralelogramos y de los triángulos</u>

Un <u>cuadrilátero</u> es una figura de cuatro lados. Todo cuadrilátero cuyos lados opuestos están sobre rectas paralelas se llama <u>paralelogramo</u>. ¿Qué has descubierto ya sobre las longitudes de los lados opuestos de un paralelogramo? La figura ABCD de la derecha es un paralelogramo. ¿Qué pares de lados de esta figura son congruentes?



Cada vértice de un paralelogramo es el vértice de un ángulo cuyo interior contiene al interior del paralelogramo. En la figura de la página anterior, el vértice A del paralelogramo lo es también del ángulo BAD cuyo interior contiene al interior del paralelogramo. ¿Cuáles son los otros ángulos cuyo interior contiene al del paralelogramo? ¿Cuántos ángulos con esta propiedad hay en total? Tales ángulos se llaman los ángulos del paralelogramo.

Si los lados de un paralelogramo se prolongan con líneas de trazos, como se ve en la figura 10-8-a,

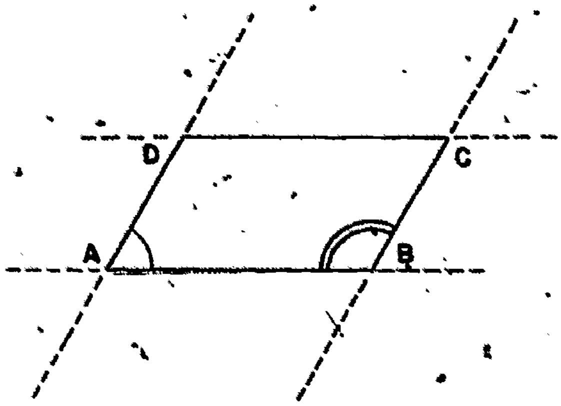


Figura 10-8-a

hay varios pares de rectas paralelas cortadas por una secante. ¿Cuántas secantes encuentras?

Copia la figura 10-8-a. Marca el ángulo del paralelogramo cuyo vértice está en A, como se muestra. A este ángulo del paralelogramo lo llamaremos "ángulo A". Análogamente, marca el ángulo B del paralelogramo como se ve en la figura. Marca, como lo has hecho con el ángulo A, todos los ángulos de la figura que son congruentes con el ángulo A. Repite la operación con los ángulos que son congruentes con el ángulo B. En cada caso indica la razón que justifica la marca.

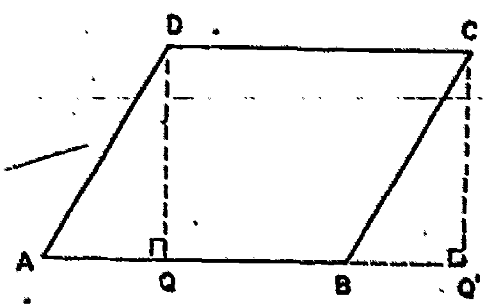
Si has procedido correctamente, deben quedar marcados todos los ángulos determinados por las rectas de la figura. Basándote en los resultados que acabas de obtener, completa las siguientes proposiciones:

$$m(\angle A) + m(\angle B) = \underline{\ ?\ }$$

Propiedad 5a. Los ángulos de un paralelogramo correspondientes a dos vértices consecutivos son ___?___.

Propiedad 5b. Los ángulos de un paralelogramo correspondientes a dos vértices opuestos son ___?___.

De acuerdo con los resultados anteriores, ¿qué puedes decir de un paralelogramo cuyo $\angle A$ es recto? ¿Estás seguro de que se trata de un rectángulo? (¿Recuerdas cómo hallábamos el área de un rectángulo en el Capítulo 8?) Si la figura no es un rectángulo, entonces $\angle A$ y $\angle B$ no son rectos, y uno de ellos es un ángulo agudo. ¿Por qué? Suponte que el ángulo agudo es $\angle A$. Por el punto D traza el segmento $\overline{DQ}$ perpendicular a la base $\overline{AB}$ del paralelogramo, como se ve en la figura a la derecha. Como sabemos que $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son congruentes, imagina que el triángulo AQD se mueve rígidamente, es decir, sin cambiar de tamaño ni de forma, hasta tomar la posición del triángulo BQ'C. Entonces el punto Q' caerá sobre una prolongación de $\overline{AB}$. ¿Cómo lo sabes?



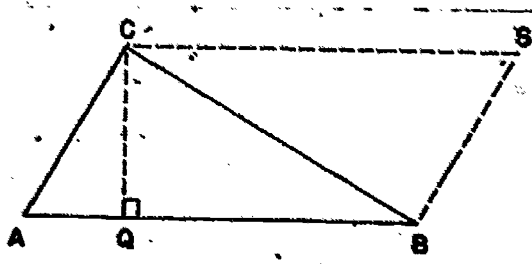
La figura QQ'CD es ahora un rectángulo. (¿Cómo sabes que sus ángulos en C y D son rectos?) Además, el rectángulo QQ'CD y el paralelogramo ABCD están formados por piezas del mismo tamaño y, en consecuencia, tienen la misma área, de acuerdo con la propiedad de la coincidencia, Sección 1 del Capítulo 7. Por consiguiente, para hallar el área de un paralelogramo, sólo se necesita hallar el área de un rectángulo, lo que ya sabemos hacer. Si no recuerdas, revísalo en el Capítulo 8.

Observa que la base $\overline{AB}$ del paralelogramo es congruente con el lado $\overline{QQ'}$ del rectángulo. ¿Cómo sabes que esto es cierto? El lado $\overline{QD}$ del rectángulo es un segmento perpendicular a las rectas paralelas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$. Tal segmento se llama una altura del paralelogramo respecto a la base $\overline{AB}$. La longitud de la altura es la distancia que hay entre las dos rectas paralelas y, como ya lo hemos visto, es la misma cualquiera que sea el sitio en que se mida. Como consecuencia, es lo mismo considerar la altura que pasa por D, la que pasa por C o la que pasa por cualquier otro punto del segmento $\overline{DC}$. Además, cualquier lado de un paralelogramo puede ser considerado como base.

Basándote en la exposición anterior, copia y completa la siguiente proposición: "El número de unidades cuadradas de área del paralelogramo es el __?__ del número de unidades de longitud de la __?__ por el número de unidades de longitud de la __?__ respecto de esa base.

Observa que si un paralelogramo es un rectángulo, las longitudes de la base y de la altura son, simplemente, el "largo" y el "ancho" del rectángulo, resultando así igual el método anterior al que hemos empleado en el Capítulo 8.

Considera un triángulo cualquiera ABC, como se muestra a la derecha. Por C y B traza rectas paralelas a los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, las cuales se intersecan en algún punto S. La figura ABSC es, entonces, un paralelogramo. El segmento $\overline{CQ}$ que pasa por C y es perpendicular a la recta $\overleftrightarrow{AB}$ se llama la altura del triángulo ABC respecto de la base $\overline{AB}$. La longitud de la altura $\overline{CQ}$ es la distancia de C a la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Observa que $\overline{AB}$ y $\overline{CQ}$ son también una base y una altura del paralelogramo.



En la Sección 10-7 has descubierto que las áreas de los triángulos ABC y SCB son iguales. Como las dos regiones triangulares cubren la totalidad del paralelogramo y de su interior, se deduce que el área del triángulo ABC es la mitad del área del paralelogramo ABSC. Usando el método que ya hemos visto para determinar el área del paralelogramo, copia y completa la siguiente proposición: "El número de unidades cuadradas del área de un triángulo es _____ del _____ del número de unidades de longitud de la

_____ por el número de unidades de longitud de la _____ respecto de esa base".

Como cualquier lado de un triángulo puede ser considerado como base, esta regla da tres maneras de encontrar el área del triángulo; esto se ilustra en las figuras siguientes, donde se muestra un mismo triángulo sucesivamente con sus 3 lados como base:

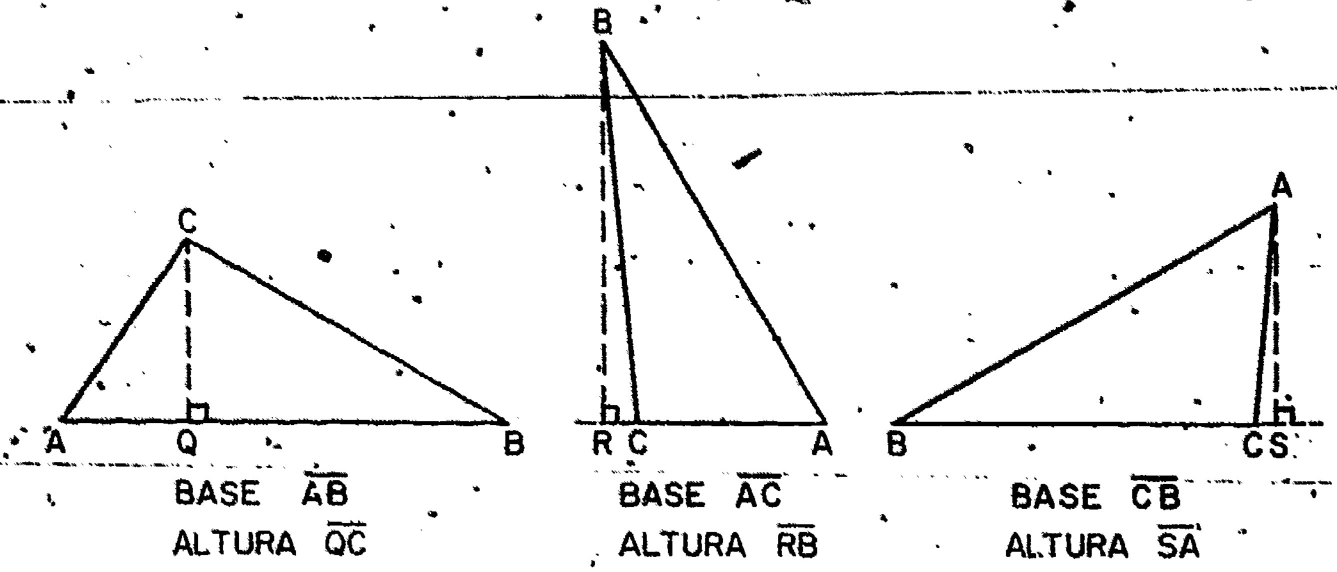


Figura 10-8-b

En la ilustración anterior, se muestra el mismo triángulo en tres posiciones de manera que en cada caso la base esté colocada horizontalmente. Esto no es necesario, y debes habituarte a imaginar las bases y las alturas correspondientes en distintas posiciones diferentes de la horizontal.

Por ejemplo, hubiera sido mejor no mover el triángulo sino mostrar los tres casos de la manera siguiente:

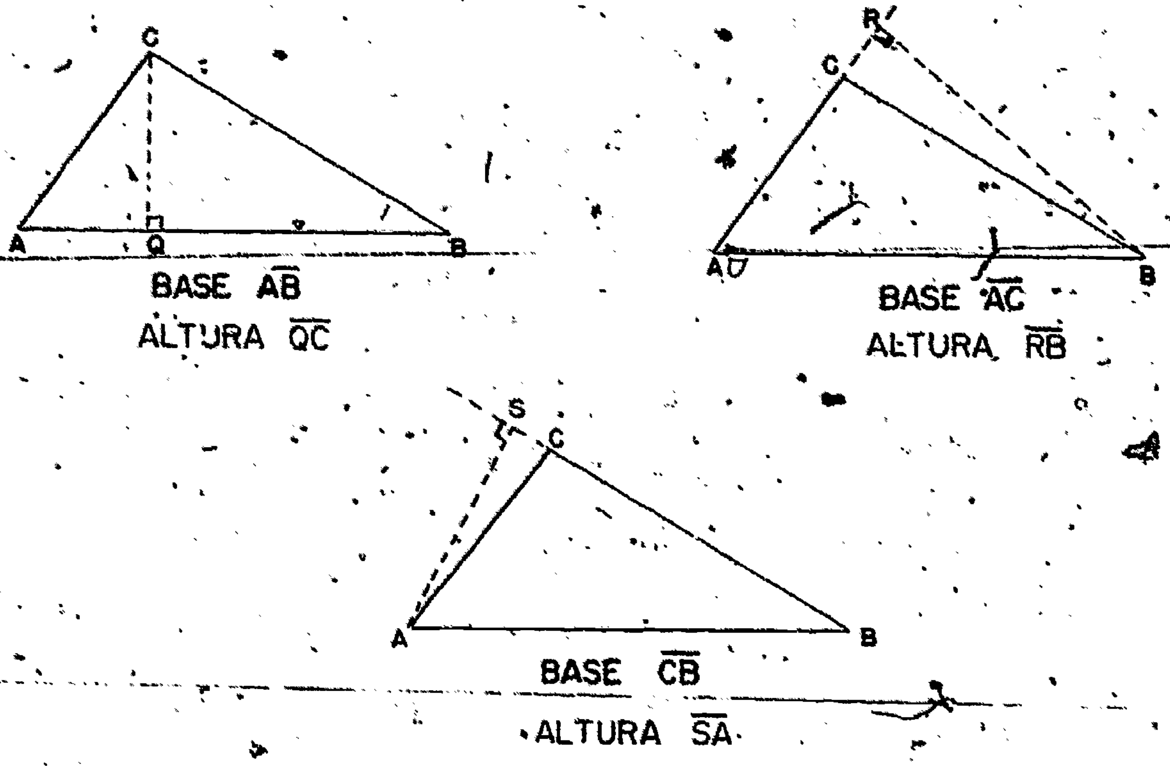
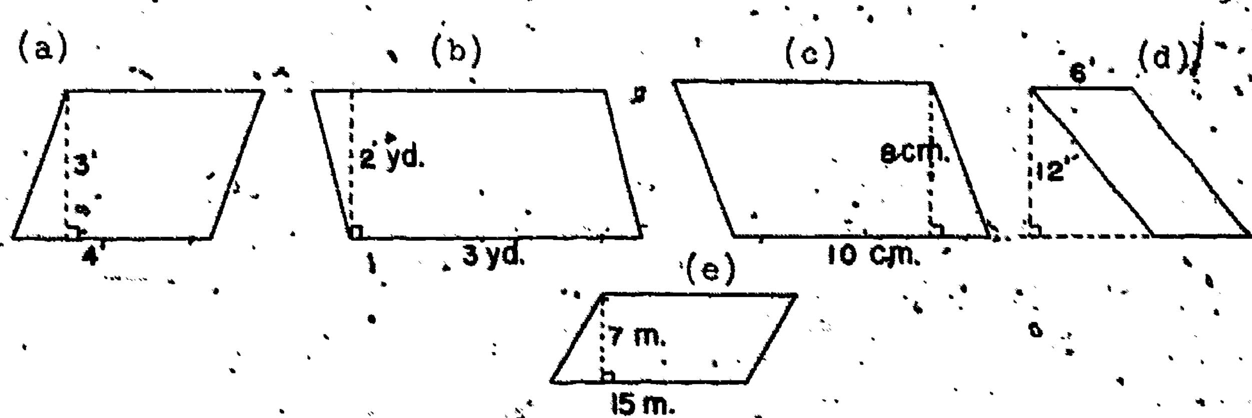


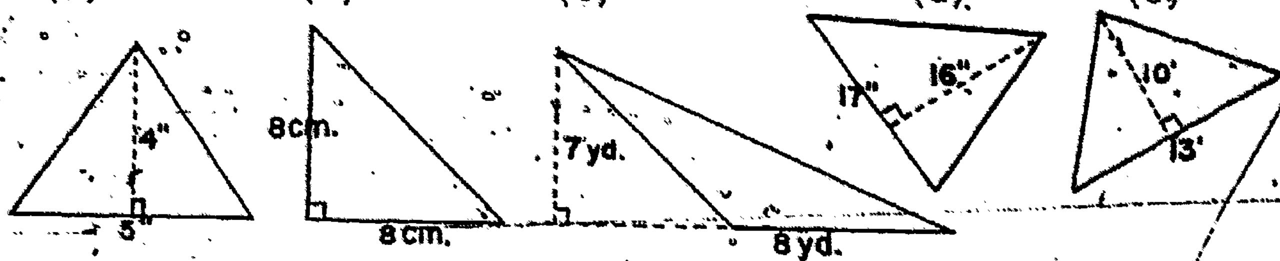
Figura 10-8-c

Ejercicios 10-8

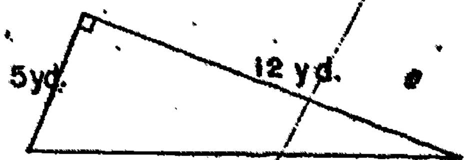
1. Halla las áreas de los paralelogramos que se muestran a continuación, usando las dimensiones que se indican.



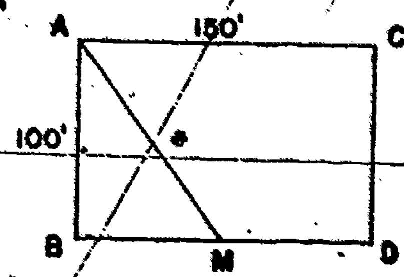
2. Usando las dimensiones que se indican, halla las áreas de los triángulos que se muestran a continuación:



3. Un triángulo rectángulo tiene dos de sus lados de 5 yardas y 12 yardas, respectivamente, como se muestra en la figura. Halla el número de yardas cuadradas de su área.



4. Un hombre posee un terreno rectangular de 150 pies por 100 pies. El terreno tiene una cerca que va desde la esquina A al punto medio M del lado opuesto más largo, como se indica.

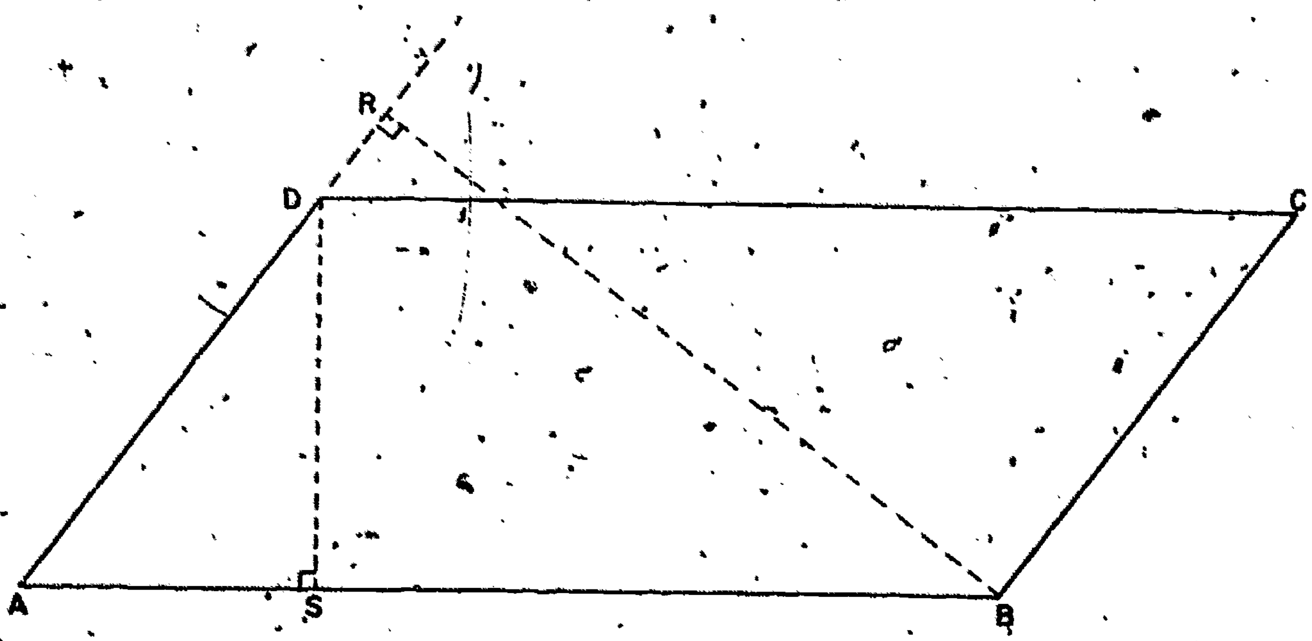


(a) Halla el área de ABDC.
(b) Halla el área de AMB.
(c) Halla el área de AMDC.

5. Si b es el número de unidades de la longitud de la base de un paralelogramo y h es el número de unidades de la longitud de la altura respecto de esa base, escribe una proposición numérica que muestre cómo encontrar el número A de unidades cuadradas del área del paralelogramo.

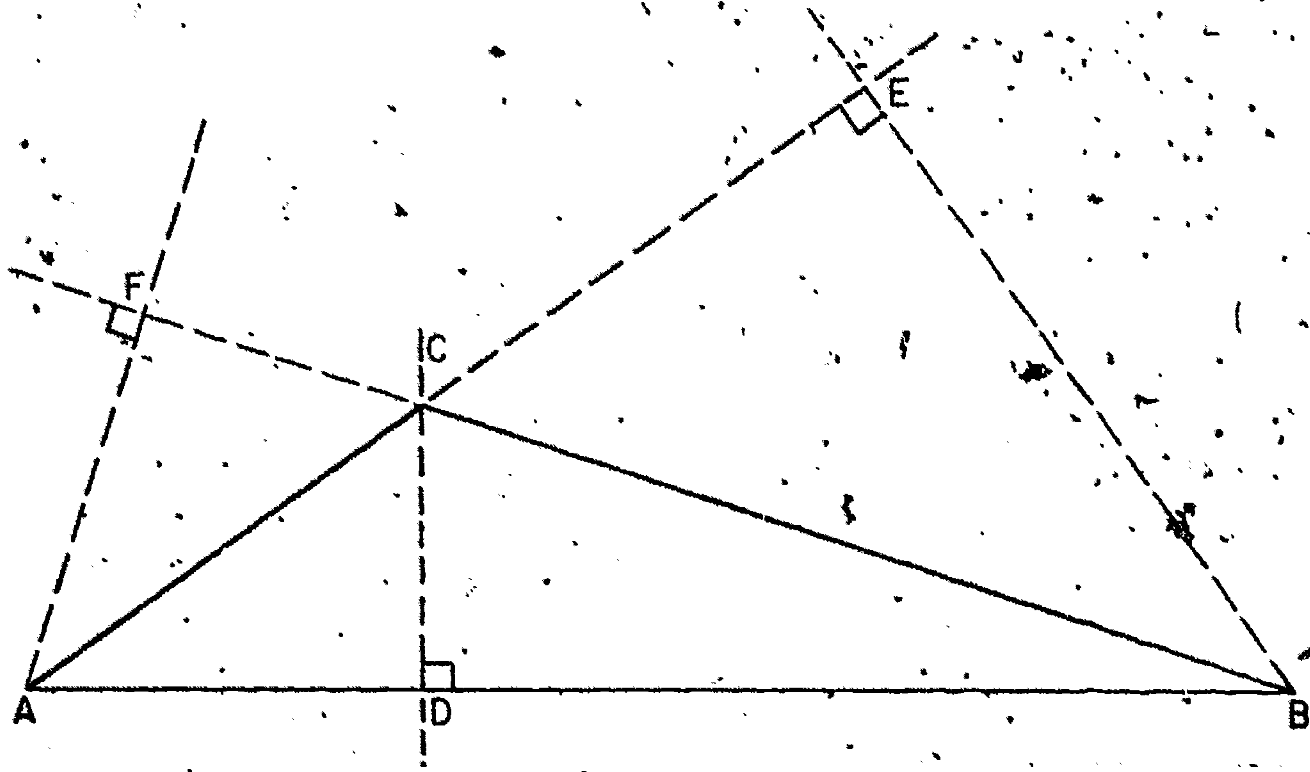
6. Si b es el número de unidades de la longitud de la base de un triángulo y h es el número de unidades de la longitud de la altura respecto de esa base, escribe una proposición numérica que indique la manera de encontrar el número A de unidades cuadradas de su área.

7. (a) En el dibujo que sigue, mide $\overline{AB}$ y $\overline{DS}$. Utilizando estas medidas, halla el área del paralelogramo.
   (b) Mide $\overline{AD}$ y $\overline{RB}$. Usando estas medidas, halla el área del paralelogramo.
   (c) ¿Concuerdan tus resultados de (a) y (b)? Como la medición es aproximada, puede ser que no resulten exactamente iguales, pero deben ser números muy próximos.



8. (a) Si una figura es un cuadrilátero, ¿debe ser un paralelogramo? Explica tu respuesta.
   (b) ¿Se puede llamar rectángulos a todos los paralelogramos? Explica tu respuesta.
   (c) ¿Se puede llamar paralelogramo a un cuadrado? Explica tu respuesta.
   (d) ¿Deben ser cuadriláteros todos los paralelogramos, rectángulos y cuadrados? Explica tu respuesta.

9. Para este problema, utiliza el dibujo siguiente, haciendo todas las mediciones con la aproximación de un cuarto de pulgada.



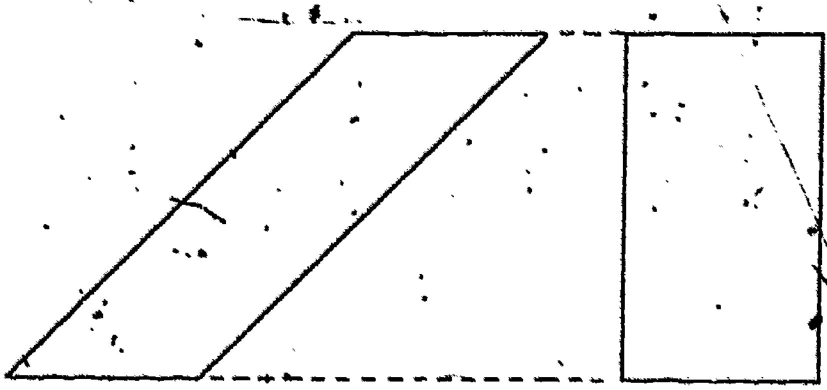
(a) Halla el área del triángulo ABC, utilizando las medidas de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

(b) Halla el área del triángulo ABC, utilizando las medidas de $\overline{CB}$ y $\overline{AF}$.

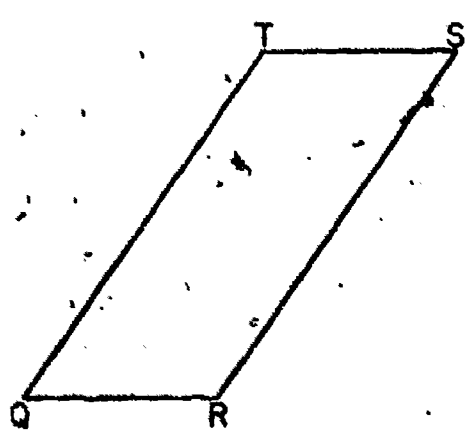
(c) Halla el área del triángulo ABC, utilizando las medidas de $\overline{AC}$ y $\overline{BE}$.

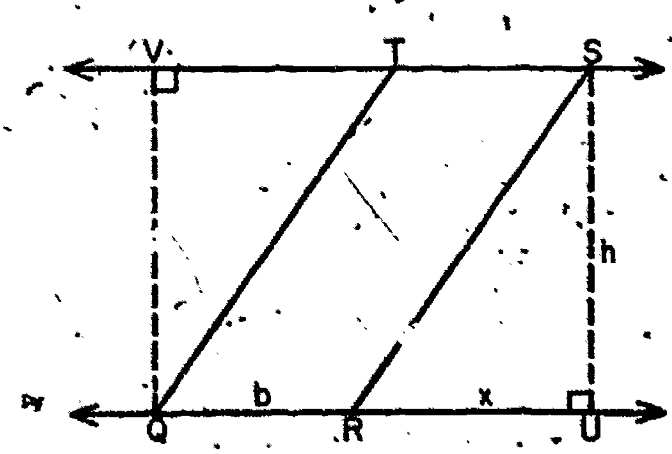
(d) ¿Son tus resultados de (a), (b) y (c) los mismos? Como en el problema 7, pueden no ser idénticos, pero deben ser números muy próximos.

10. PROBLEMA DIFICIL. El paralelogramo y el rectángulo que se muestran a la derecha tienen sus bases de igual longitud y sus alturas respecto de esas bases tienen también igual longitud. Dibuja las figuras en otra hoja de papel. Recorta el paralelogramo y luego córtalo en piezas de manera que al reunirlas formen el rectángulo.



11. PROBLEMA DIFICIL. Sea QRST un paralelogramo cualquiera que no sea un rectángulo. A continuación se muestra un posible dibujo de tal paralelogramo. Prolonga los segmentos $\overline{TS}$ y $\overline{QR}$ como se indica en la segunda figura. Por los vértices Q y S, en los que los ángulos del paralelogramo son agudos, traza perpendiculares $\overline{QV}$ y $\overline{SU}$. QUSV es un rectángulo. Sea b la medida de $\overline{QR}$, h la medida de $\overline{US}$ y x la medida de $\overline{RU}$.





(a) Si la medida de $\overline{QU}$ es $b + x$, ¿cuál es la medida de $\overline{VS}$?

(b) ¿Cuál es la medida de $\overline{QV}$?

(c) ¿Cuál es la medida de $\overline{TS}$?

(d) ¿Cuál es la medida de $\overline{VT}$?

(e) ¿Cuál es el área de QUSV?

(f) ¿Cuál es el área del triángulo RUS?

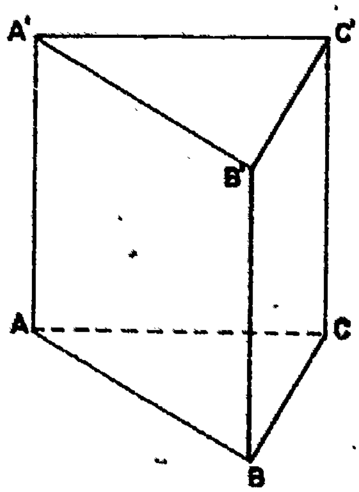
(g) ¿Cuál es el área del triángulo QVT?

(h) Mediante tus respuestas a (e), (f) y (g), muestra que el área de QRST está dada por la proposición

$$A = bh$$

10-9. Prismas rectos

En el Capítulo 8 has estudiado los prismas rectangulares. Ahora estudiarás otras clases de prismas. Imaginemos dos triángulos exactamente del mismo tamaño y forma, situados en planos paralelos, como se muestra en la siguiente figura (triángulos ABC y A'B'C'). Diremos que los triángulos que tienen exactamente la misma forma y tamaño son congruentes.

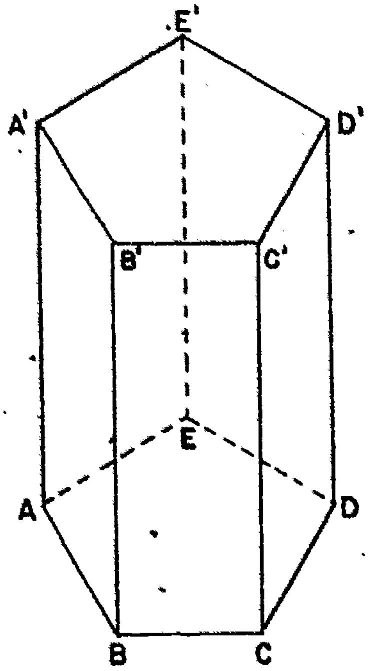


Si se trazan segmentos que unan los vértices correspondientes, se obtienen tres cuadriláteros (polígonos de cuatro lados). En el caso de nuestra figura estos cuadriláteros son ABB'A', BCC'B' y CAA'C'. Si los triángulos están colocados, uno respecto del otro, de tal manera que estos cuadriláteros sean rectángulos, la figura resultante se llama un prisma recto triangular.

Los seis puntos A, B, C, A', B' y C' se llaman los vértices del prisma; los segmentos que aparecen en la figura se llaman sus aristas, y los interiores de los dos triángulos de los extremos y de los tres lados rectangulares se llaman sus caras. Para distinguir los interiores de los dos extremos triangulares de los interiores de los lados rectangulares, se les llama frecuentemente bases del prisma. ¿Cuántas aristas, vértices y caras hay en un prisma triangular?

Es muy posible que hayas visto algún trozo de vidrio cuya superficie es un prisma triangular. Cuando se le pone a la luz del sol, tal prisma produce el efecto de curvar los rayos de luz, formando así un arco iris.

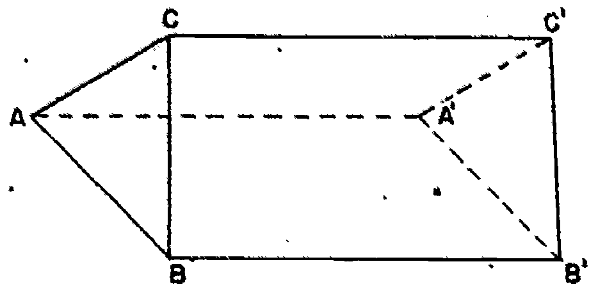
Si en vez de usar regiones triangulares como bases, usamos regiones limitadas por ~~otros~~ polígonos, las figuras resultantes son otras clases de prismas. (Revisa la definición de polígono dada en la Sección 10-7.) Por ejemplo, mira la figura que se muestra en la siguiente página, en la que los extremos son pentágonos (polígonos de cinco lados) de la misma forma y tamaño, colocados en planos paralelos de manera que los cuadriláteros ABB'A', BCC'B', etc., sean rectángulos. Esta figura se llama un prisma recto pentagonal.



En general, un prisma recto es una figura obtenida a partir de dos polígonos congruentes colocados en planos paralelos, de tal manera que los segmentos que unen los vértices correspondientes de los polígonos determinen cuadriláteros que sean todos rectángulos. El prisma es la reunión de las regiones rectangulares cerradas y de las dos regiones poligonales cerradas. Las regiones rectangulares se llaman <u>caras</u> del prisma, los segmentos se llaman <u>aristas</u> y los puntos en que se intersecan dos o más aristas se llaman <u>vértices</u>. Las <u>bases</u> del prisma son las regiones encerradas por los polígonos originales.

Las figuras que hemos descrito se llaman <u>prismas rectos</u>, como ya se ha indicado. Después encontrarás prismas más generales, para los cuales los cuadriláteros mencionados pueden ser paralelogramos cualesquiera. En este capítulo, sin embargo, consideraremos solamente prismas rectos, y todas las veces que usemos la palabra prisma será para referirnos a prismas rectos. Los prismas rectangulares tratados en el Capítulo 8 son, simplemente, prismas rectos cuyas bases son regiones rectangulares. Esos prismas tienen una propiedad muy interesante. Es posible imaginar un prisma rectangular como prisma de <u>tres</u> maneras diferentes, pues cada par de caras opuestas pueden ser usadas como bases. Ninguna otra figura puede ser imaginada como prisma recto de más de una manera.

En los dibujos de los prismas de las páginas anteriores se ha creído conveniente dibujar las bases horizontalmente. Sin embargo, no es difícil identificar tales figuras cuando ocupan posiciones diferentes. Por ejemplo, la siguiente figura representa un prisma triangular con bases ABC y A'B'C', aun cuando se le presenta apoyado sobre una de sus caras rectangulares.



Abordemos ahora el problema de determinar el volumen de un prisma. Vuelve al Capítulo 8 y relee lo que allí se trató acerca del volumen de un prisma rectangular. Se vio entonces que si el área de la base fuera 12 unidades cuadradas, entonces, utilizando un total de 12 unidades cúbicas de volumen (algunas de las cuales podían estar subdivididas), podemos formar una capa de espesor unidad sobre el fondo del prisma. Si el prisma tuviera $3\frac{1}{2}$ unidades de alto, necesitaríamos $3\frac{1}{2}$ de tales capas para llenarlo, es decir un total de $(12)(3\frac{1}{2})$ unidades cúbicas; resulta así que el volumen es 42 unidades cúbicas.

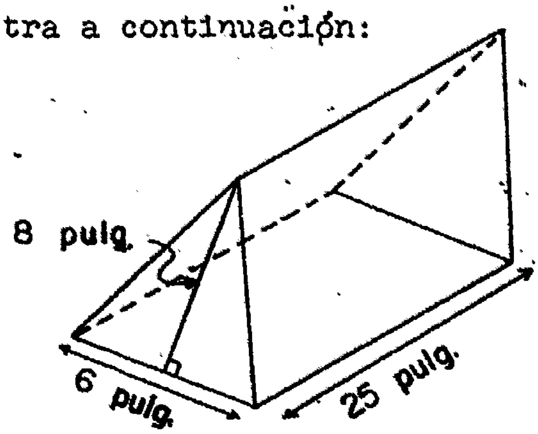
En esa discusión no era necesario tener en cuenta la forma real de la base. En efecto, el mismo razonamiento se aplica al cálculo del volumen de cualquier prisma recto, independientemente de la forma de la base, ya que se puede considerar el volumen de cualquier prisma recto ser como formado por una serie de capas superpuestas.

Deducimos, pues, la siguiente conclusión:

> El número de unidades cúbicas de volumen de un prisma recto es el producto del número de unidades cuadradas del área de la base por el número de unidades de longitud de la altura.

En este enunciado, el término <u>altura</u> se refiere a un segmento perpendicular a los planos de las bases y cuyos extremos están en esos planos; es decir, es uno cualquiera de los segmentos que unen un vértice de una base con su correspondiente vértice de la otra base. Observa cuidadosamente que la altura no se considera vertical, salvo que los planos de las bases estén colocados horizontalmente. En la última figura, por ejemplo, la altura es cualquiera de los segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ o $\overline{CC'}$.

A modo de ejemplo, calculemos el volumen del prisma triangular que se muestra a continuación:

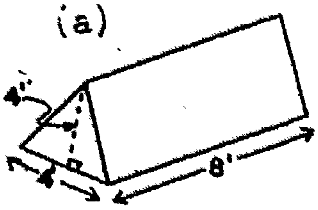


Como las bases son regiones triangulares, el número A de pulgadas cuadradas de una de ellas es $A = \frac{1}{2}(6)(8) = 24$ (v. la Sección 10-8), resultando el área de 24 pulgadas cuadradas; el número de pulgadas de la altura del prisma es 25. Entonces, en virtud de la conclusión anterior, el número de pulgadas cúbicas del volumen es $24 \cdot 25 = 600$, de manera que el volumen es 600 pulgadas cúbicas.

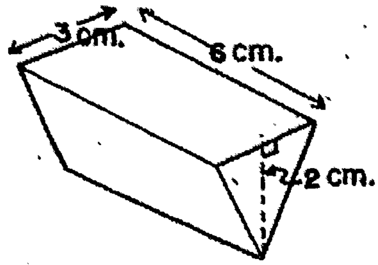
Ejercicios 10-9

1. Halla el número de unidades cúbicas de volumen de cada uno de los prismas que siguen:

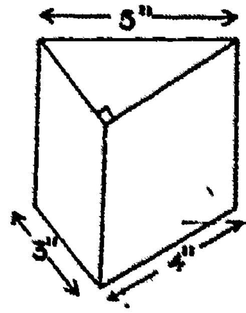
(a)



(b)

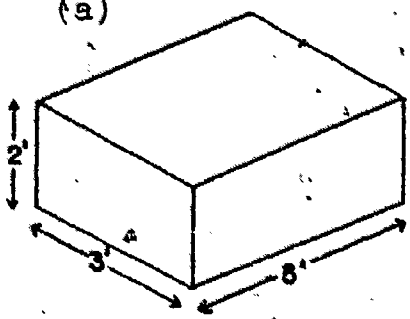


(c)

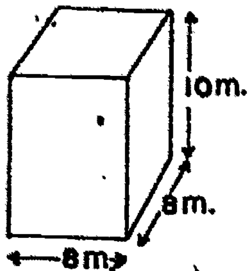


2. Halla el número de unidades cúbicas de volumen de cada uno de los siguientes prismas:

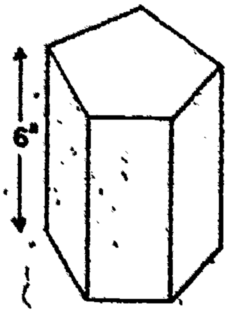
(a)



(b)



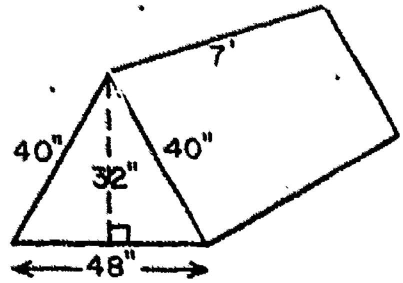
(c)



El área del pentágono es 21 pulgadas cuadradas.

3. Las columnas de la fachada de un edificio tienen la forma de prismas de 18 pies de alto. Sus bases son hexágonos de 15 pulgadas de lado. (Un hexágono es un polígono de seis lados.) Si tuvieras que pintar estas columnas, ¿cuántos pies cuadrados de superficie tendrías que pintar en cada columna? (Observa que las bases—es decir, los extremos—no se pintan.)

4. Una tienda de campaña para un perrito, tiene la forma de un prisma triangular de 7 pies de largo. En el dibujo se indican las medidas de uno de sus extremos.



(a) Si la tienda tiene techo, extremos y piso de lona, ¿cuántos pies cuadrados de lona se han utilizado en su construcción? (No tomes en cuenta las costuras.)

(b) Si la tienda tiene techo y ambos extremos de lona, pero no tiene piso, ¿con qué cantidad de lona está hecha?

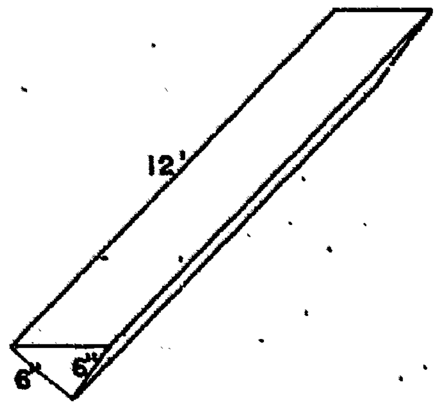
(c) ¿Cuántos pies cúbicos de aire hay en el interior de la tienda?

5. Si B representa el número de unidades cuadradas de área de la base de un prisma, y h el número de unidades de longitud de su altura, formula una proposición en la que se indique la manera de encontrar el número V de unidades cúbicas del volumen de ese prisma.

6. Un recipiente de un galón de capacidad tiene la forma de un prisma de 11 pulgadas de alto. ¿Cuántas pulgadas cuadradas tiene la base? ¿Conoces la forma de esa base? (Un galón tiene 231 pulgadas cúbicas.)

7. Un prisma triangular tiene por base un triángulo rectángulo cuyos lados perpendiculares miden, uno de ellos 3 pulgadas y el otro 4 pulgadas. Si el prisma tiene 20 pulgadas de alto, ¿cuál es su volumen en pulgadas cúbicas?

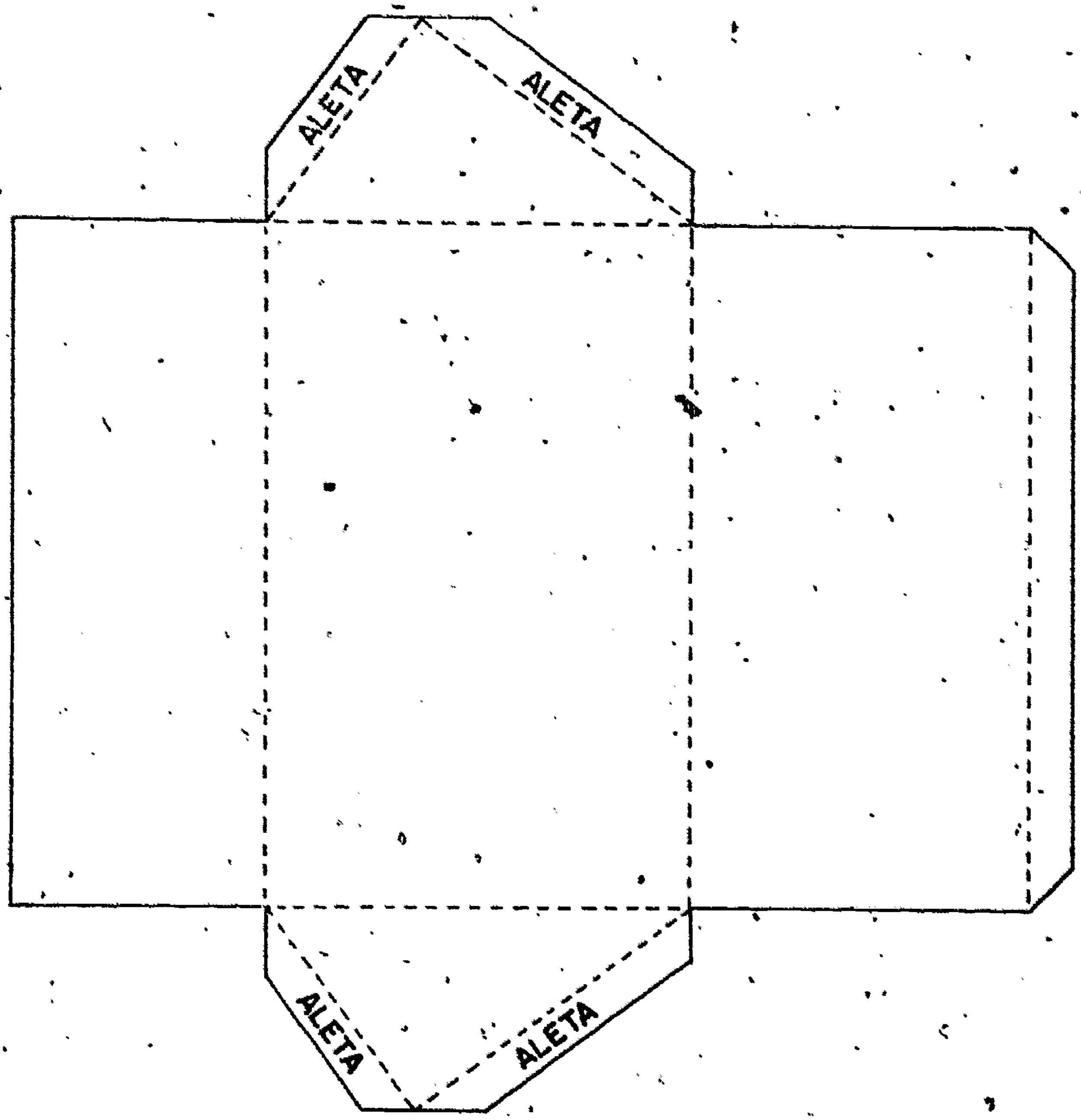
8. Se ha construido una canaleta con la forma de un prisma triangular fijando entre sí, en ángulo recto, dos tablas y poniéndole extremos. Si sus medidas interiores son 6 pulgadas y si la canaleta tiene 12 pies de largo, como se muestra en la figura, ¿cuántos pies cúbicos de agua puede contener?



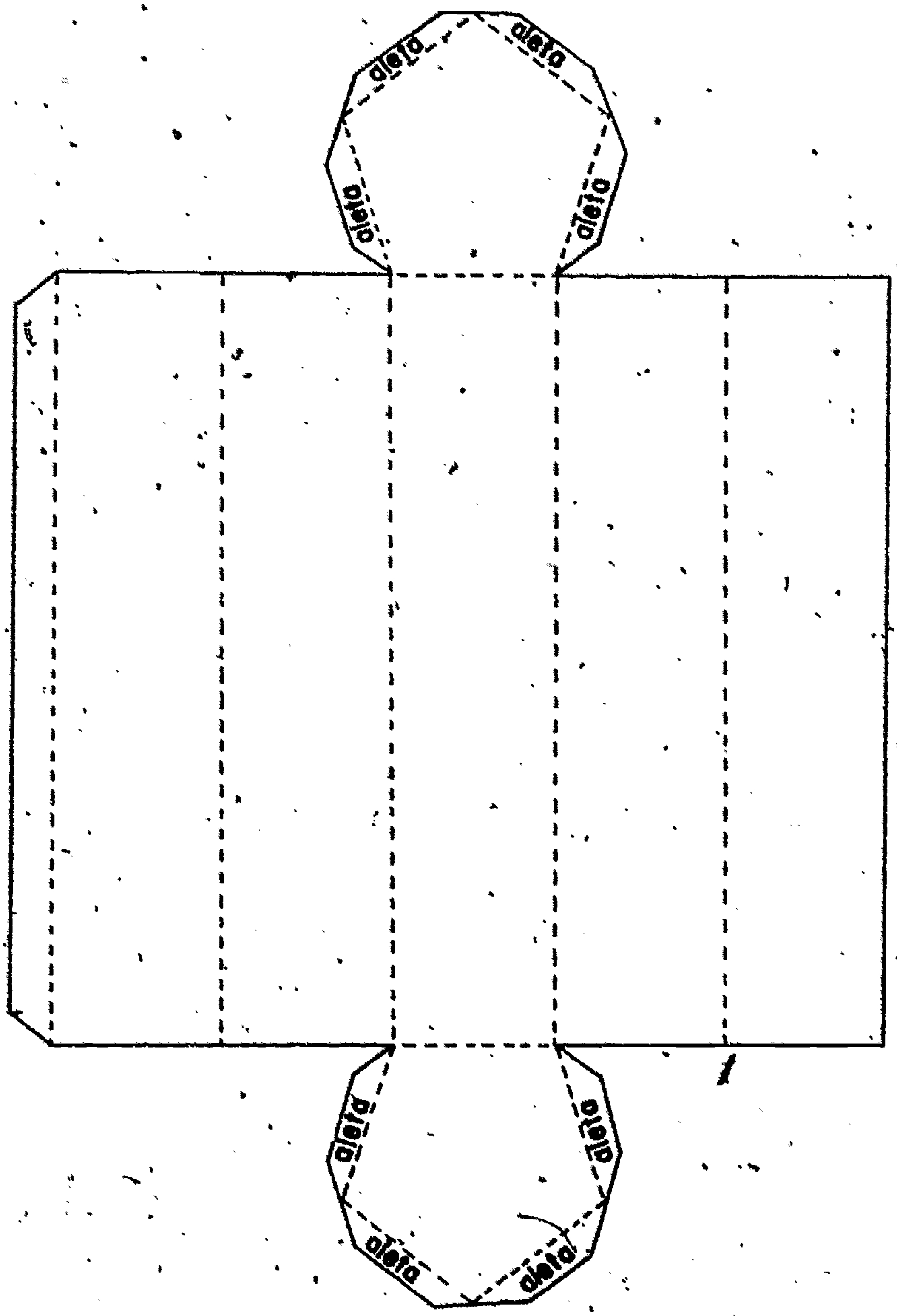
9. Construye modelos en cartulina de prismas triangulares y pentagonales. Dibuja tú mismo los croquis en la cartulina y si no puedes, utiliza los de las páginas siguientes.

10. ¿Cuántas aristas, caras y vértices hay en un prisma triangular? ¿Y en un prisma pentagonal? ¿Y en un prisma hexagonal (6 lados)? ¿Y en un prisma octogonal (8 lados)?

Croquis de un prisma triangular



Croquis de un prisma pe. tagonal



10-10. Resumen

El Capítulo 10 trata extensamente de algunas relaciones que existen entre las rectas de un plano. La Sección 10-1 se refiere a las propiedades de dos rectas en un plano. En ella se consideran pares de ángulos llamados opuestos por el vértice y se establece la siguiente propiedad:

Propiedad 1. Si dos rectas se intersecan, los ángulos opuestos por el vértice forman pares de ángulos congruentes.

En esta misma sección se han estudiado también los ángulos adyacentes y los ángulos suplementarios.

La Sección 10-2 trata de las propiedades de tres rectas en un plano, introduciendo las ideas de secante y de pares de ángulos correspondientes. ¿Recuerdas las diferentes clases de figuras que se pueden formar trazando tres rectas en un plano?

En la Sección 10-3, se utilizó lo aprendido en las Secciones 1 y 2 para averiguar dos propiedades importantes:

Propiedad 2. Si, en un plano, una secante interseca a dos rectas y un par de ángulos correspondientes no son congruentes, entonces esas rectas se intersecan.

Propiedad 2a. Si, en un plano, una secante interseca a dos rectas y un par de ángulos correspondientes son congruentes, entonces esas rectas son paralelas.

En el lenguaje de los conjuntos, la propiedad 2 se refiere a dos rectas cuya intersección no es el conjunto vacío, mientras la propiedad 2a se refiere a dos rectas cuya intersección es el conjunto vacío.

En la Sección 10-4 se analizaron los enunciados recíprocos. Se dieron ejemplos para mostrar que el recíproco de un enunciado verdadero puede ser verdadero y que el recíproco de otro enunciado verdadero puede ser falso. Se te pidió que escribieras recíprocas de las propiedades 2 y 2a, como sigue:

Recíproca de la propiedad 2. Si, en un plano, una secante interseca a dos rectas no paralelas, entonces los ángulos correspondientes no son congruentes.

Recíproca de la propiedad 2a. Si, en un plano, una secante interseca a dos rectas paralelas, entonces los ángulos de cualquier par de ángulos correspondientes son congruentes.

Recordarás que has encontrado que ambas recíprocas eran verdaderas.

En la Sección 10-5 se han introducido nombres para las diferentes clases de triángulos: isósceles, equiláteros y escalenos. Se llaman triángulos escalenos a los que no tienen ningún par de lados congruentes. Los triángulos isósceles son aquellos que tienen por lo menos dos lados congruentes, y se denominan triángulos equiláteros a los triángulos isósceles especiales para los cuales los tres lados son congruentes. En esa sección descubrimos la propiedad de los triángulos isósceles que enunciamos más abajo y encontramos que su recíproca también es verdadera.

Propiedad 3. Si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces los ángulos opuestos a estos lados son congruentes.

Recíproca de la propiedad 3. Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos a estos ángulos son congruentes.

En la Sección 10-6 hemos observado que:

Propiedad 4. La suma de las medidas, en grados, de los ángulos de cualquier triángulo es 180.

Obtuviste esta propiedad utilizando el método inductivo de razonamiento cuando arrancaste las esquinas de una región triangular y las colocaste como ángulos adyacentes. Aprendiste también a demostrar esta propiedad por el método deductivo cuando utilizaste propiedades antes demostradas para hacer ver que

$$m(\angle x) + m(\angle y) + m(\angle z) = 180$$

donde $\angle x$, $\angle y$ y $\angle z$ representan los ángulos de un triángulo.

El paralelogramo estudiado en la Sección 10-7 pertenece a un conjunto especial de polígonos llamados cuadriláteros. ¿Recuerdas lo que significa cuadrilátero? Un paralelogramo pertenece al conjunto especial de cuadriláteros cuyos segmentos opuestos están sobre rectas paralelas.

Propiedad 5. Los lados opuestos de un paralelogramo son paralelos y congruentes.

También has aprendido en esta sección que el segmento más corto de un punto a una recta es el que es perpendicular a la recta, y que la distancia entre dos rectas paralelas es constante.

En la Sección 10-8 se introdujeron dos propiedades referentes a los ángulos de un paralelogramo:

Propiedad 6a. Los ángulos de un paralelogramo correspondientes a vértices consecutivos son suplementarios.

Propiedad 6b. Los ángulos de un paralelogramo correspondientes a vértices opuestos son congruentes.

En esta sección has usado también ciertas propiedades de los paralelogramos para encontrar las fórmulas de las áreas de un paralelogramo y de un triángulo:

(a) El número de unidades cuadradas del área de un paralelogramo es el producto del número de unidades de longitud de la base por el número de unidades de longitud de la altura respecto de esa base.

(b) El número de unidades cuadradas del área de un triángulo es la mitad del producto del número de unidades de longitud de la base por el número de unidades de longitud de la altura respecto de esa base.

La Sección 10-9 trata de los volúmenes de los prismas rectos, ampliando lo aprendido sobre los prismas rectangulares en el Capítulo 8. Has aprendido a hallar el volumen del interior de cualquier prisma recto:

El número de unidades cúbicas del volumen de un prisma recto es el producto del número de unidades cuadradas del área de la base por el número de unidades de longitud de la altura.

10-11. Nota histórica

Algunas de las ideas geométricas del Capítulo 10 fueron descubiertas por los egipcios y los babilonios hace unos 4,000 años. Por ejemplo, sabían cómo encontrar el área de un triángulo y utilizaban este conocimiento para medir los terrenos.

Se atribuye a Thales, mencionado en la Sección 10-2, el descubrimiento de que los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales. Parece cierto también que Thales conocía que la suma de las medidas, en grados, de los ángulos de un triángulo es 180.

Hubo muchos otros matemáticos griegos famosos. Sus trabajos lograron para Grecia el nombre de "cuna de los conocimientos". Nos referiremos brevemente a algunos de ellos. Pitágoras (569 ? - 500 a. de J.C.) organizó escuelas en Crotona, al sur de Italia, que contribuyeron posteriormente al progreso del estudio de la geometría. El próximo año estudiarás algunos de los descubrimientos que se le atribuyen. Euclides (365 ? - 300 ? a. de J.C.) se hizo famoso escribiendo uno de los primeros textos de geometría llamado los <u>Elementos</u>. Este libro de texto se tradujo a muchos idiomas y se lo usó, sin hacérsele cambios notables, para enseñar la geometría durante unos 2,000 años. Aunque su forma ha sido modernizada un poco para satisfacer las necesidades presentes, todas las propiedades que hemos estudiado en este capítulo pueden encontrarse en los <u>Elementos</u>.

Desde el siglo VII hasta el siglo XIII se progresó muy poco en las matemáticas. Desde el siglo XIII, sin embargo, los estudios de la geometría y de otras ramas de las matemáticas se difundieron por toda Europa. Los matemáticos comenzaron a examinar nuevos caminos para estudiar las matemáticas elementales. A medida que continúes tus estudios de matemáticas, aprenderás algo acerca de las obras de hombres como René Descartes (1596 - 1650, Francia); Blaise Pascal (1623 - 1662, Francia); Pierre Fermat (1601 - 16[illegible], Francia); Karl Friederich Gauss (1776 - 1855, Alemania); y de otros más.

En la actualidad se estan haciendo muchos nuevos descubrimientos matemáticos en varias partes del mundo. Hay aún muchos problemas importantes por resolver en la geometría. Como ejemplo, supónte que tienes un montón de bolitas, todas exactamente del mismo tamaño. ¿Cómo puedes ponerlas dentro de un recipiente grande de la mejor manera posible?, es decir, de tal forma que quepa el máximo número de bolitas en el volumen dado. Nadie lo sabe aún. Conocemos muy buenas maneras de poner las bolitas dentro del depósito, pero nunca se ha demostrado que una de ellas es la mejor manera posible.

Originalmente la palabra geometría significaba el estudio de las medidas de los terrenos. "Geometría" viene de las dos palabras griegas: geo, que significa tierra, y metría, que significa medición. En el transcurso de los años, la geometría se ha convertido en el estudio de elementos tales como puntos, rectas, planos, el espacio, superficies y sólidos. Estos elementos se usan para describir la forma, el tamaño, la posición y las relaciones entre los objetos en el espacio.

Capítulo 11

CIRCUNFERENCIAS Y CIRCULOS

Una de las curvas simples cerradas más comunes es la circunferencia. No importa donde estés, es posible que encuentres siempre algún objeto que te sugiera una circunferencia. ¿Puedes hallar alguno en tu salón de clase, ahora? Señala tantos como puedas en tu casa. Hay una "circunferencia" para indicar el tránsito cerca de tu escuela. ¿Piensas que una circunferencia es una figura conveniente para usarla de este modo?

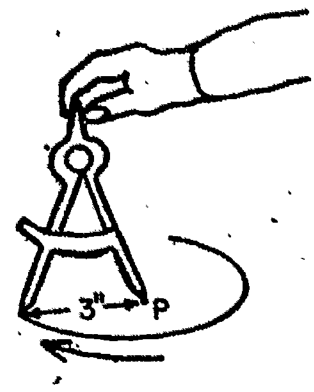
En el Capítulo 4 has estudiado algo de las curvas simples cerradas. En capítulos posteriores has visto algunas de las características de varias clases de curvas simples cerradas, tales como paralelogramos, rectángulos y triángulos. En este capítulo estudiarás algunas de las propiedades de la circunferencia como figura matemática.

Ya sabes que se puede imaginar una recta o una curva simple cerrada como un conjunto de puntos. Veamos ahora cómo se puede describir una circunferencia como conjunto de puntos.

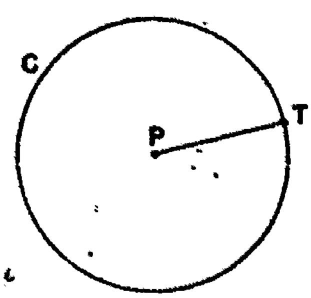
11-1. La circunferencia y el compás

Toma un punto cerca del centro de una hoja de papel. Márcalo con la letra P. Luego, valiéndote de una regla y un lápiz, marca por lo menos diez puntos, cada uno de ellos a una distancia de 3 pulgadas de P. ¿Qué figura te sugieren estos puntos? Si has colocado los diez puntos en varias direcciones que parten de P, te sugieren una circunferencia.

Para dibujar una circunferencia completa, usas un compás. Probablemente ya estás familiarizado con el compás como un instrumento para dibujar circunferencias. Para dibujar una circunferencia con un compás, ajusta los brazos del compás de manera que la distancia entre la punta metálica y la punta del lápiz sea la distancia deseada, que en este caso es de 3 pulgadas. Coloca la punta metálica del compás en el punto P, que has dibujado previamente en tu hoja de papel. ¡No muevas la punta del compás mientras dibujas! Gira el compás alrededor del punto P de manera que la punta del lápiz dibuje una curva. Sostén el compás entre el pulgar y el índice como se muestra en la figura, y mientras haces esto, gira lateralmente el compás en la misma dirección en que haces avanzar la punta del lápiz. Cuando la punta del lápiz llegue nuevamente al punto de partida, has completado el dibujo de una circunferencia. ¿Es la circunferencia una curva simple cerrada? ¿Concuerda tu dibujo con la descripción de curva simple cerrada dada en el Capítulo 4? Si has situado los diez puntos cuidadosamente, tu dibujo de la circunferencia pasará por cada uno de ellos.



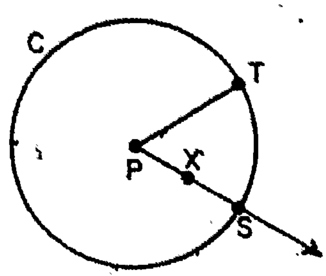
En tu circunferencia, el punto P es el <u>centro</u> de la circunferencia. Toma cualquiera de los puntos que has colocado a la distancia de 3 pulgadas de P y llámalo T. Dibuja un segmento que una T y P, como se muestra en la figura de la derecha. $\overline{PT}$ tiene la longitud de 3 pulgadas. Esta circunferencia puede llamarse "circunferencia P", con lo que se indica que la circunferencia tiene por centro el punto P. A veces designamos una curva simple cerrada con una sola letra, por ejemplo, "circunferencia C". Cuando decimos "circunferencia C", C no representa sólo un punto de la circunferencia, sino la circunferencia completa.



El segmento $\overline{PT}$ se llama un radio de la circunferencia. Un radio es cualquier segmento de recta que una el centro P con un punto de la circunferencia. Dibuja un segundo radio y llámalo $\overline{PY}$. $\overline{PT}$ y $\overline{PY}$ son radios de la circunferencia. ¿Cuántos radios puede tener una circunferencia?

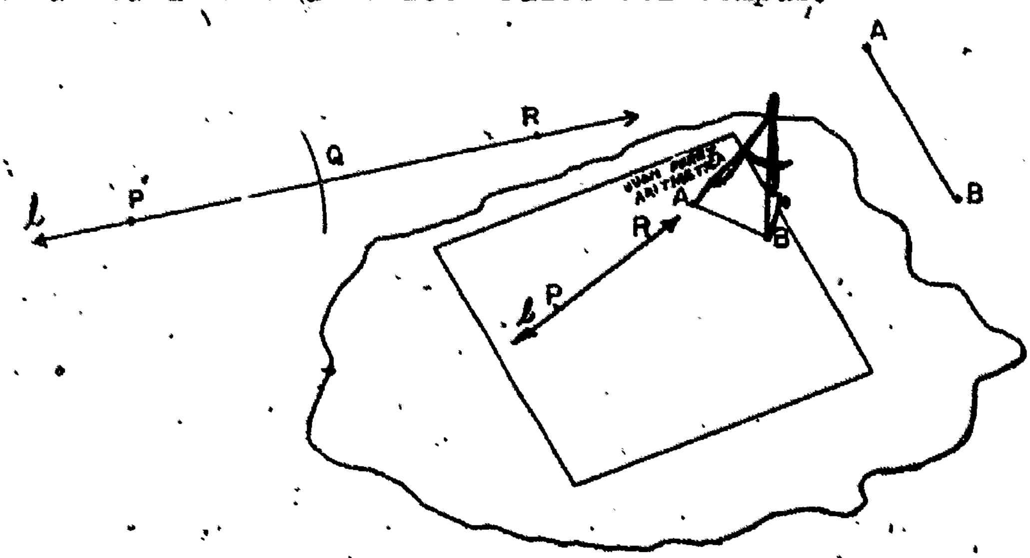
También usamos la palabra "radio" con otro significado: como distancia del centro a cualquier punto de la circunferencia. El radio de la circunferencia que has dibujado mide 3 pulgadas. Hay exactamente una distancia que es "el radio de una circunferencia", pero "un" radio puede ser cualquier segmento de recta que tenga uno de sus extremos en el centro y el otro en cualquier punto de la circunferencia.

Vuelve a tu figura, toma cualquier punto en el interior de la circunferencia y llámalo X. Dibuja el rayo $\overrightarrow{PX}$, y sobre él mide una distancia de 3 pulgadas a partir de P. El punto que obtienes deberá estar sobre la circunferencia. Llámalo S. ¿Es $\overline{PS}$ un radio de la circunferencia?



Podemos ahora describir una circunferencia como un conjunto de puntos. La circunferencia con centro P y radio r unidades, es el conjunto de todos los puntos de un plano que están a la distancia r de P.

El compás puede servir también para transportar distancias. Traza una recta ℓ y marca sobre ella dos puntos, P y R. Dibuja un segmento $\overline{AB}$ cualquiera en tu hoja de papel. Sin utilizar una regla para medir la longitud de $\overline{AB}$, queremos encontrar un punto Q sobre $\overline{PR}$ tal que la longitud de $\overline{PQ}$ sea la misma que la longitud de $\overline{AB}$. Ajusta los brazos de tu compás como se muestra en la figura siguiente, de manera que la punta metálica esté sobre A y la punta del lápiz esté sobre B. Luego, sin cambiar la abertura de los brazos del compás, transpórtalo hasta colocar la punta metálica en P. Dibuja luego una partecita de circunferencia que corte al rayo $\overrightarrow{PR}$, siempre sin cambiar la abertura de los brazos del compás.



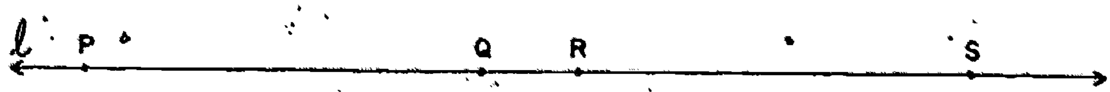
Designa con la letra Q el punto de intersección. Entonces la longitud de $\overline{PQ}$ es la misma que la longitud de $\overline{AB}$.

Ejercicios 11-1

En los problemas que siguen, practicarás el uso del compás para dibujar circunferencias y transportar distancias. Lee cuidadosamente las instrucciones. Marca cada punto, circunferencia o segmento de recta de tu dibujo antes de seguir con la directiva inmediata.

1. (a) Marca un punto P en tu hoja de papel. Dibuja una circunferencia con centro P y radio 7 cm. Llámala circunferencia C.
   (b) Toma un punto Q sobre la circunferencia C. Dibuja una circunferencia con centro en Q y radio 3.5 cm.
   (c) Dibuja una circunferencia con centro en P y radio 3.5 cm.
   (d) ¿Cuál parece ser la intersección de las dos últimas circunferencias?

2. La siguiente figura te proporcionará algunos datos para este problema. Sigue las instrucciones que se dan después de la figura.



   (a) Dibuja una recta vertical de unas 6 pulgadas de largo, cerca del centro de una hoja de papel, y llámala m. Toma un punto A en la parte inferior de la recta.
   (b) Utiliza el compás y sitúa sobre la recta m un punto B encima de A, de manera que AB = PQ. (Observa que "AB", sin ningún símbolo encima, significa "la medida del segmento $\overline{AB}$".)
   (c) Sobre la recta m, toma un punto E de manera que esté encima de A y sea AE = PR.
   (d) Sobre la recta m, marca un punto F encima de A, de manera que AF = PS.
   (e) Dibuja una circunferencia de centro B y radio $\overline{BF}$.
   (f) Si tu dibujo es bastante preciso, estarán sobre la circunferencia dos de los puntos anteriormente marcados. ¿Cuáles son esos puntos?

3\. (a) Dibuja dos rectas, ℓ_1 y ℓ_2, que se intersequen y no sean perpendiculares. (Observa que hemos designado a ambas rectas con la misma letra, pero después de las letras y un poco más abajo, hemos escrito numerales diferentes. Recordarás que tales numerales se llaman "subíndices". ℓ_1 se lee "ℓ sub uno", o también "ℓ uno". ℓ_2 se lee "ℓ sub dos".)

(b) Llama B al punto de intersección de ℓ_1 y ℓ_2. Dibuja una circunferencia de radio 1 pulgada que tenga a B como centro.

(c) Marca con las letras R y S las intersecciones de la circunferencia con la recta ℓ_1 y con las letras T e Y las intersecciones de la circunferencia con la recta ℓ_2.

(d) Dibuja $\overline{RT}$, $\overline{RY}$, $\overline{ST}$ y $\overline{SY}$. ¿De qué clase parece ser la figura RTSY?

4\. Dibuja una recta ℓ y marca sobre ella dos puntos, X e Y, que disten entre sí 1 pulgada.

(a) Dibuja la circunferencia C_1 de centro X y que pasa por Y.

(b) Dibuja la circunferencia C_2 de centro Y y que pasa por X.

(c) Marca con Z la otra intersección de la circunferencia C_2 con la recta ℓ.

(d) Dibuja la circunferencia C_3 de centro Z y que pasa por X.

(e) ¿Cómo es $C_1 \cap C_3$?

(f) ¿Cómo es $C_2 \cap C_3$?

*5. (a) Dibuja dos rectas, ℓ_1 y ℓ_2, que se intersequen, y llama B a su intersección.

(b) Toma un punto A de ℓ_1 y un punto C de ℓ_2, de manera que la longitud de $\overline{BA}$ sea diferente de la longitud de $\overline{BC}$.

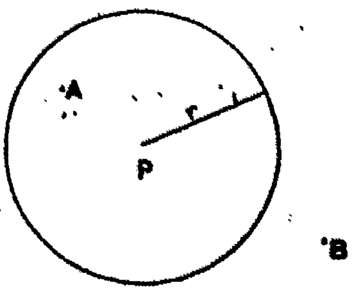
(c) Utiliza el compás para marcar un punto A_1 sobre $\overrightarrow{AB}$ de manera que no esté sobre $\overrightarrow{BA}$, y sea $A_1B = AB$.

(d) Toma un punto C_1 sobre $\overrightarrow{CB}$, que no esté sobre $\overrightarrow{BC}$, y tal que $BC_1 = BC$.

(e) Dibuja $\overline{AC}$, $\overline{AC_1}$, $\overline{A_1C}$ y $\overline{A_1C_1}$. ¿Qué clase de figura parece ser ACA_1C_1?

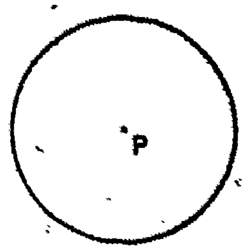
11-2. Interiores e intersecciones

Como la circunferencia es una curva simple cerrada, tiene un interior y un exterior. Supongamos que tenemos una circunferencia de centro P y de radio r unidades. Un punto tal como A, dentro de la circunferencia, está a una distancia AP menor que r unidades, mientras que todo punto B fuera de la circunferencia, dista de P más de r unidades. En el caso de la circunferencia resulta fácil describir con precisión su interior y su exterior. El interior es el conjunto de todos los puntos que distan de P menos de r unidades. El exterior es el conjunto de todos los puntos que distan de P más de r unidades.

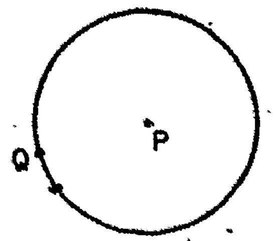


Hemos utilizado con frecuencia la noción de intersección de dos conjuntos. La circunferencia es un ejemplo de un conjunto de puntos. En consecuencia, podemos proponer problemas de intersecciones que se refieran a circunferencias.

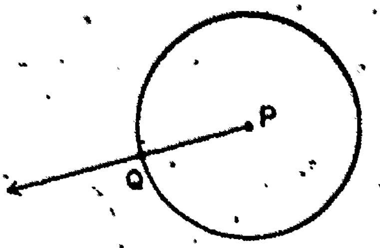
Tomemos un punto P y un segmento de recta de longitud cualquiera. Dibujemos la circunferencia de centro P y cuyo radio sea igual a ese segmento. Utilizando el compás, haz el dibujo en una hoja de papel. Tu dibujo debe parecerse a la figura de la derecha.



Luego tomemos un punto cualquiera Q sobre la circunferencia. (Después de haberlo escogido, la figura se parecerá a la de la derecha.)



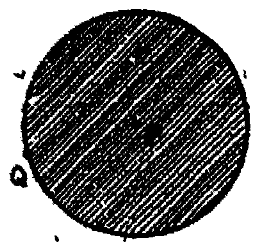
¿Cuántos puntos de la circunferencia están también sobre el rayo $\overrightarrow{PQ}$? Para ayudarte a responder a esta pregunta puedes trazar el rayo en tu papel. En tal caso tu figura debería ser semejante a la que aparece adjunta.



(En general, debes habituarte a escribir o dibujar en el papel todo lo que necesites para entender las ideas que estás estudiando. Observa cómo lo hemos hecho, paso a paso, en nuestra exposición. Sigue esta sugerencia en todo lo que resta del capítulo.)

Para la misma situación del párrafo anterior, ¿cuántos puntos de la circunferencia están también sobre el rayo $\overrightarrow{QP}$? (¿Has dibujado el rayo $\overrightarrow{QP}$ antes de intentar la respuesta?) ¿Sientes la necesidad de marcar uno o más puntos de los que hemos señalado hasta ahora? ¿Puedes describir cuidadosamente (en palabras) la situación de los puntos nuevos que crees se deben marcar?

Ahora sombrea el interior de la circunferência como se muestra en la figura. ¿Cuál es la reunión de la circunferencia y de su interior? En el Capítulo 8 hemos llamado "región cerrada" a la reunión de una curva simple y de su interior. La reunión de la circunferencia y de su interior es una <u>región circular cerrada</u>, o un <u>círculo</u>.



El conjunto de todos los puntos que están o bien en el interior de la curva o sobre ella, es la reunión de la circunferencia y su interior. Otra manera de imaginar la reunión de la circunferencia y de su interior es la siguiente:

> Esta reunión es el conjunto de todos los puntos cuya distancia al centro P es igual o menor que el radio de la circunferencia.

¿Cuál es la intersección de la circunferencia y de su interior? Ningún punto de la circunferencia está también en el interior de la misma. Decimos que la intersección de la circunferencia y de su interior es el conjunto vacío.

Representemos por Y al círculo, es decir a la reunión de la circunferencia con su interior. ¿Cuál es la intersección del conjunto Y con la recta $\overleftrightarrow{PQ}$? ¿Por qué es $Y \cap \overleftrightarrow{PQ}$ muy diferente de la intersección de $\overleftrightarrow{PQ}$ con la circunferencia?

En la figura de la derecha, el punto P es el centro de la circunferencia. Los puntos A, F, B y G están sobre la circunferencia. La intersección de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{FG}$ consiste en el punto P, y $\overleftrightarrow{AB}$ es perpendicular a $\overleftrightarrow{FG}$. Sigue estas instrucciones para copiar la

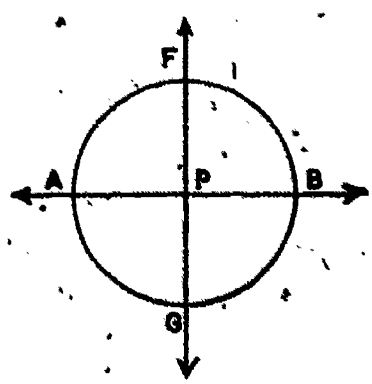


figura en una hoja de papel:

1. Dibuja la circunferencia con un compás, marca su centro y llámalo P.
2. Dibuja una recta que pase por P. Marca con A y B sus puntos de intersección con la circunferencia.
3. Utiliza un limbo graduado para dibujar un ángulo recto, y traza una recta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$. Marca con F y G los puntos de intersección de la recta con la circunferencia.
4. Sombrea el semiplano que contiene a F y cuya frontera es $\overleftrightarrow{AB}$. (Sería bueno que utilices un lápiz de color para el sombreado. Si no tienes un lápiz de color, sombrea ligeramente con tu lápiz negro.)

Llamemos H a este semiplano particular. Ahora responde a las siguientes preguntas:

(a) ¿Cuál es la intersección del semiplano H con la circunferencia?

(b) ¿Pertenece el punto A a esta intersección? ¿Pertenece a ella el punto G? ¿Y el punto F? ¿Y el punto P?

(c) ¿Puedes contar todos los puntos que pertenecen a esta intersección? Explica por qué sí o por qué no.

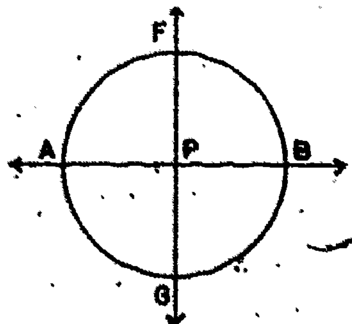
Toma dos puntos de la circunferencia que también pertenezcan al interior del ángulo BPF, y llámalos M y N. De igual manera, toma un punto, al cual llamaremos K, que pertenezca a la circunferencia y esté en el interior del ángulo APF.

(d) ¿Cuál es la intersección de la circunferencia y el ángulo MKN?

(e) ¿Cuál es la intersección del interior de la circunferencia con el interior del ángulo MKN?

Ejercicios 11-2

1. Sea C una circunferencia de centro P y radio r unidades. Sea S otro punto cualquiera en el plano de la circunferencia. (¿Vas dibujando la figura, paso a paso, a medida que la describe el problema?)
   (a) ¿Cuántos puntos pertenecen a la intersección de la circunferencia C y el rayo $\overrightarrow{PS}$?
   (b) ¿Cuántos puntos pertenecen al conjunto $C \cap \overleftrightarrow{PS}$?
   (c) ¿Dependen tus respuestas a (a) y (b) de la manera como hayas escogido el punto S?
   (d) ¿Cuántos puntos pertenecen al conjunto $C \cap \overline{PS}$? ¿Depende esta respuesta de la elección de S? Si es así, ¿cómo?
2. En un plano, ¿puede haber dos circunferencias cuya intersección consista exactamente en un punto?
3. Toma dos puntos y márcalos P y Q. Dibuja dos circunferencias con centro en P de manera que Q esté en el exterior de una de ellas y en el interior de la otra. Marca la primera con C y la segunda con D.
4. En la figura de la derecha, sea H el semiplano de $\overleftrightarrow{AB}$ en que está F. Sea J el semiplano de $\overleftrightarrow{FG}$ en que está B.



   (a) ¿Cuál es el conjunto $H \cap J$?
   (b) ¿Cuál es la intersección de los tres conjuntos, J, H y la circunferencia?
   (c) ¿Te sugiere el diagrama que la circunferencia ha sido separada en lo que podríamos llamar cuadrantes? Si es así, ¿puedes describir varias de esas porciones?
   (d) ¿Puedes encontrar una porción que se pueda llamar semicircunferencia? ¿Puedes describirla en el lenguaje de las intersecciones o reuniones de conjuntos? ¿Puedes identificar varias de tales porciones? ¿Hay más de dos?
5. Toma dos puntos distintos P y Q. Dibuja la circunferencia cuyo centro es P y cuyo radio es $\overline{PQ}$. Luego dibuja la

circunferencia de centro Q de manera que P esté sobre ella.

(a) ¿Cuál es la intersección de las dos circunferencias?

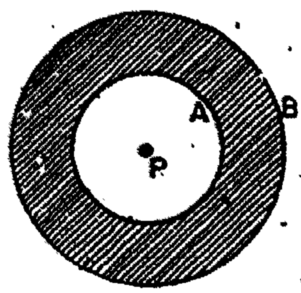
(b) ¿Puedes dibujar una recta que pase por todos los puntos de intersección de las dos circunferencias? ¿Puedes dibujar más de una de tales rectas? ¿Por qué?

(c) Sombrea en tu dibujo la intersección de los dos círculos. (Si tienes un lápiz de color a mano, úsalo para sombrear; si no lo tienes, usa tu lápiz ordinario y sombrea ligeramente.)

(d) (Para esta parte, usa un tipo diferente de sombreo o un lápiz de otro color.) Sombrea la intersección del interior de la circunferencia cuyo centro es P y del exterior de la circunferencia cuyo centro es Q. (Antes de sombrear la intersección, puede resultarte conveniente marcar por separado los dos conjuntos cuya intersección se desea.)

(e) Haz otra copia de la figura que muestre las dos circunferencias, y marca en ella la reunión de los interiores de las dos circunferencias.

6. Las dos circunferencias que se muestran a la derecha están colocadas en un mismo plano y tienen un mismo centro, P. Las circunferencias que tienen el mismo centro se llaman concéntricas.



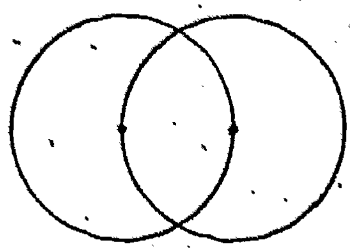
(En las ruedas de los automóviles, el borde de la rueda y el borde circular del neumático son ejemplos de circunferencias concéntricas. Si lanzas una piedra a un estanque de agua, las ondas circulares que se forman son también ejemplos de circunferencias concéntricas.)

(a) Describe la intersección de la circunferencia A con la circunferencia B.

(b) Describe verbalmente la región sombreada, empleando palabras tales como "intersección", "exterior", etc.

*7. Refiriéndonos a la figura del problema 6, ¿cuál sería la manera más simple de describir la intersección de los exteriores de las dos circunferencias?

*8. En la figura de la derecha, el centro de cada una de las circunferencias está sobre la otra. Copia la figura en una hoja de papel y sombrea la reunión de los exteriores de las dos circunferencias.

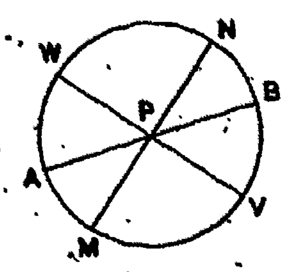


*9. Toma dos puntos distintos P y Q. Dibuja la recta $\overleftrightarrow{PQ}$. Dibuja la circunferencia cuyo centro es P y que pasa por Q. Dibuja la circunferencia cuyo centro es Q y cuyo radio es $\overline{QP}$. Dibuja una recta que pase por todos los puntos de intersección de las dos circunferencias, y llámala ℓ. Observando la figura, averigua la relación que hay entre la recta ℓ y la recta $\overleftrightarrow{PQ}$. Utiliza el limbo graduado para comprobar tu observación.

11-3. Diámetros y tangentes.

Hemos visto que la palabra "radio" puede usarse de dos maneras. A manera de repaso, un radio de una circunferencia es uno de los segmentos que une un punto de la circunferencia con su centro. La longitud de uno de esos segmentos es el radio de la circunferencia.

La palabra diámetro está íntimamente relacionada con la palabra radio. Un diámetro de una circunferencia es un segmento de recta que contiene el centro de la circunferencia y cuyos extremos están en la misma. En la circunferencia representada por la figura de la derecha, se muestran tres diámetros: $\overline{AB}$, $\overline{MN}$ y $\overline{VW}$. (Un diámetro de una circunferencia es el mayor segmento de recta que se puede dibujar en el interior de la



circunferencia de manera que sus extremos estén sobre ella.) ¿Cuántos radios aparecen en la figura?

Se puede describir de otra manera el conjunto de puntos que es un diámetro. Un diámetro de una circunferencia es la reunión de dos radios distintos que son segmentos de una misma recta. ¿Qué comparación se puede establecer entre la longitud de un diámetro y la longitud de un radio?

La longitud de cualquier diámetro de una circunferencia se llama también diámetro de la misma. El diámetro y el radio son distancias.

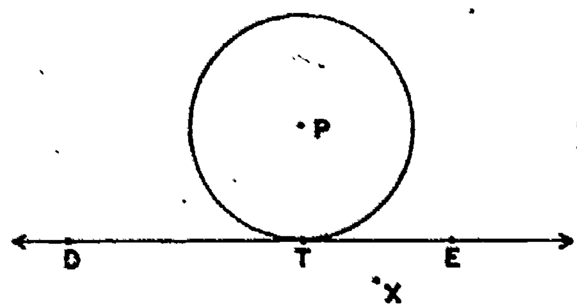
¿Cuántas veces menor es la medida del radio que la medida del diámetro? Si escogemos una unidad de longitud cualquiera, y si r y d son, respectivamente, las medidas del radio y del diámetro, entonces tenemos esta importante relación:

$$d = 2r$$

¿Por qué número hay que sustituir el signo de interrogación de la siguiente proposición numérica para hacerla verdadera?

$$r = ?\ d$$

La recta y la circunferencia de la figura de la derecha nos recuerdan la rueda de un tren apoyada sobre el carril, con la salvedad de que no se muestra el borde de la rueda que la guía sobre el carril. ¿Cuántos puntos están a la vez en la circunferencia y en la recta?



Hay un solo punto, el que se ha marcado con T. Decimos en este caso que la recta es <u>tangente</u> a la circunferencia. El único punto de su intersección es el <u>punto de tangencia</u>. En esta figura, T es el punto de tangencia. Otra manera de describir un punto de tangencia es decir que es el único punto de la circunferencia que también está sobre la recta. Responde ahora a las siguientes preguntas:

1. En la figura, la recta $\overleftrightarrow{DE}$ separa al plano DPX en dos semiplanos. ¿Cómo puedes describir la intersección del semiplano que contiene el punto X con la circunferencia?

2. ¿Cuál es la intersección del semiplano que contiene el punto P con el interior de la circunferencia?

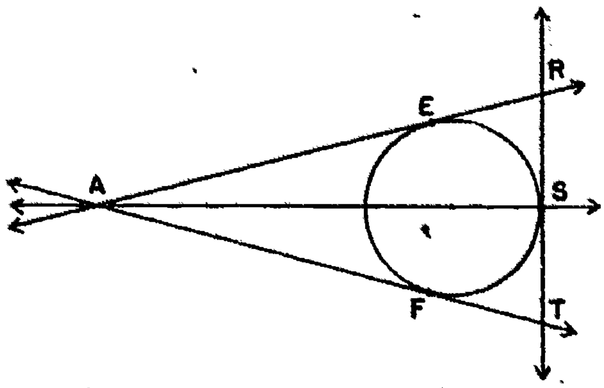
3. ¿Puedes dibujar una circunferencia y una recta en un mismo plano de manera que su intersección sea el conjunto vacío? Explícalo.

4. ¿Puedes dibujar una circunferencia y una recta de manera que su intersección contenga exactamente cuatro puntos? Explícalo.

5. (a) ¿Cuántas rectas se ven en la figura de la derecha?

   (b) ¿Cuántas de esas rectas no son tangentes a la circunferencia?

   (c) Designa con una letra cada punto de tangencia.



6. Suponte que damos una circunferencia y un punto sobre ella.

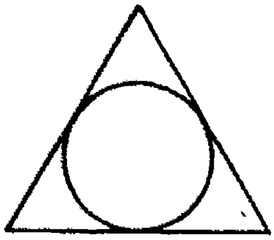
   (a) ¿Cuántos radios de la circunferencia contienen el punto dado?

   (b) ¿Cuántas rectas, tangentes a la circunferencia, contienen el punto dado?

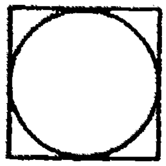
Ejercicios 11-3

1. ¿Cuántas tangentes encuentras en cada una de las siguientes figuras?

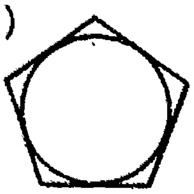
(a)



(b)



(c)



2. Busca ejemplos que representen la idea de una circunferencia y de una recta tangente a esa circunferencia, es decir, de una recta y una circunferencia cuya intersección consista en un solo punto. Describe esos ejemplos.

3. A continuación se da una lista de los diámetros de algunas circunferencias. En cada caso, halla la distancia del centro de la circunferencia a un punto cualquiera de ella.

(a) 42 cm. (d) 4 yd.

(b) 28 pulg. (e) 30 pies

(c) 10 pies

4. Se dan a continuación las distancias del centro de una circunferencia a un punto de la misma. Halla el diámetro de cada circunferencia:

(a) 6 pulg. (d) 5 pies

(b) 3 m. (e) $3\frac{1}{2}$ pies

(c) 17 cm.

5. Dibuja una circunferencia C con centro en el punto P. Dibuja tres diámetros de C. Dibuja una circunferencia con centro P cuyo radio es igual al diámetro de C.

6. (Atención: Este problema requiere un manejo muy cuidadoso del compás.)

(a) Marca un punto Q cerca del centro de una hoja de papel.

(b) Dibuja una circunferencia C con centro en Q y con radio de aproximadamente 2 pulgadas. Mantén la abertura del compás fija con el radio que has elegido hasta que se complete el dibujo.

(c) Marca un punto U sobre la circunferencia C.

(d) Usando el compás, marca un punto V sobre la circunferencia C de manera que $\overline{UV}$ tenga la misma longitud que el radio $\overline{QU}$.

(e) Todavía con el compás, dibuja un tercer punto W sobre C de manera que $\overline{VW}$ tenga la misma longitud que $\overline{QU}$.

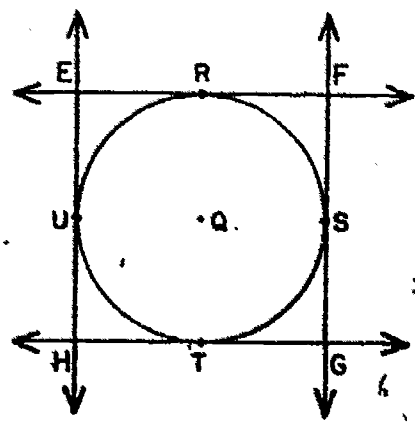
(f) Continúa girando el compás, y marca puntos X, Y y Z sobre C (usa el compás tres veces) de manera que la longitud de cada uno de los segmentos $\overline{WX}$, $\overline{XY}$ y $\overline{YZ}$ sea la misma que el radio de la circunferencia.

(g) Ahora compara la longitud del segmento $\overline{ZU}$ con el radio de la circunferencia.

Si tienes un compás de buena calidad y puedes dibujar cuidadosamente, la curva simple cerrada UVWXYZ te representará un <u>hexágono</u>. (Si esa figura tiene lados congruentes y ángulos congruentes, se llama hexágono <u>regular</u>. Tu dibujo debe parecerse a un hexágono regular. Observa que los segmentos que son lados de tu hexágono son un poquito más pequeños que un sexto de la circunferencia, esto es, que el arco que tiene los mismos extremos que el segmento.)

(h) ¿Qué nombre darías a cada uno de los segmentos $\overline{UX}$, $\overline{VY}$ y $\overline{WZ}$?

7. En la figura, el punto Q es centro de la circunferencia y centro del cuadrado EFGH.



(a) ¿Cuál es la intersección de la circunferencia y del cuadrado?

(b) ¿Cuál es la intersección de la recta $\overleftrightarrow{GH}$ con la circunferencia?

(c) ¿Qué nombre nuevo hemos dado al punto T?

(d) ¿Cuántas rectas son tangentes a la circunferencia?

(e) Enumera todos los puntos de tangencia.

8. En una hoja de papel, haz un croquis del diagrama del problema 7. (No se necesita en este caso una figura cuidadosamente dibujada.) En tu papel, dibuja el cuadrilátero RSTU.

(a) ¿Cuántos lados de ese cuadrilátero son segmentos de recta tangentes a la circunferencia?

(b) ¿Cuál es la intersección del interior de la circunferencia y el exterior del cuadrado EFGH?

(c) Describe cuidadosamente la intersección del exterior de la circunferencia y el interior del cuadrado EFGH.

(d) ¿Cuál es la intersección del interior de la circunferencia con el exterior del cuadrilátero RSTU? Explica tu respuesta sombreando la región correcta en la figura.

*9. Refiérete aún a la figura del problema 7, que fue cuidadosamente dibujada.

(a) ¿Crees que los puntos R, Q y T están sobre una recta?

(b) ¿Te parece que los tres puntos U, Q y S están colocados sobre una recta?

(c) Estima el tamaño del ángulo QTG y luego comprueba tu estimación usando el limbo graduado.

(d) Haz un comentario sobre la relación que hay entre la recta $\overleftrightarrow{QS}$ y la recta $\overleftrightarrow{FG}$. Comprueba tu comentario con el limbo graduado.

*10. Dibuja una circunferencia cualquiera y una recta tangente a esa circunferencia. Dibuja también la recta que une el centro la circunferencia con el punto de tangencia.

(a) ¿Crees que hay una relación importante entre estas dos rectas? Si es así, ¿cuál es esa relación?

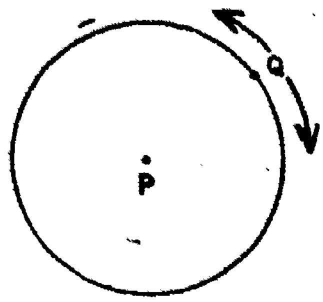
(b) ¿Cuántos radios de una circunferencia se pueden trazar de manera que uno de sus extremos sea un punto de tangencia?

*11. Sabemos por la descripción de una circunferencia que todos los radios son congruentes. ¿Cómo podemos utilizar este hecho para mostrar que por nuestra definición de diámetro todos los diámetros de una cierta circunferencia son congruentes?

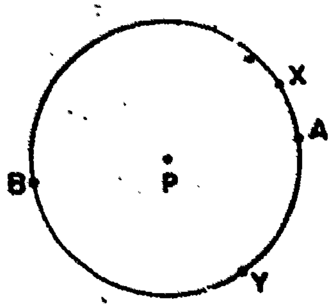
11-4. Arcos

En el Capítulo 4 hemos aprendido que un solo punto sobre una recta la separa en dos semirrectas. Utilizando esta idea de separación, decimos que sobre una recta, un único punto determina dos semirrectas. Recuerda que si A, B y Q son puntos sobre una recta, como se muestra en la figura de la derecha, Q se considera "entre" A y B. Sobre la recta, la idea de "estar entre" y la idea de "separación" están estrechamente relacionadas.

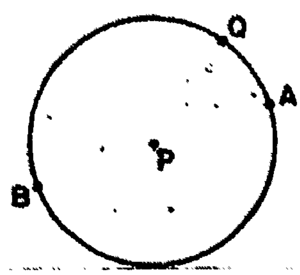
¿Basta un único punto sobre una circunferencia para separarla en dos partes? ¿Separa el punto Q a la circunferencia de la derecha en dos partes? Si partimos de Q y nos movemos en la dirección de las agujas del reloj podemos, a su debido tiempo, llegar nuevamente a Q. Lo mismo ocurre si nos movemos en dirección contraria a las agujas del reloj. Un único punto no separa a una circunferencia en dos partes.



En la figura de la derecha, los puntos X e Y separan a la circunferencia en dos partes. Una de las partes contiene el punto A, la otra contiene el punto B. Ningún camino que lleve de X a Y a lo largo de la circunferencia puede evitar por lo menos a uno de los puntos A o B. Vemos, pues, que necesitamos dos puntos diferentes para separar a la circunferencia en dos partes distintas.



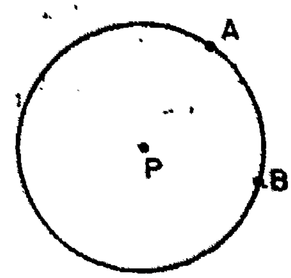
Sobre la circunferencia de la derecha están los puntos A, B y Q. ¿Está el punto A entre B y Q? ¿Está el punto Q entre A y B? ¿Está el punto B entre A y Q? Como podemos movernos tanto en la



dirección de las agujas del reloj como en la dirección contraria, las respuestas a estas preguntas son afirmativas. A diferencia de la recta en que la separación y la propiedad de "estar entre" se vinculan estrechamente, sobre la circunferencia o cualquier otra curva simple cerrada podemos observar estas dos posibilidades:

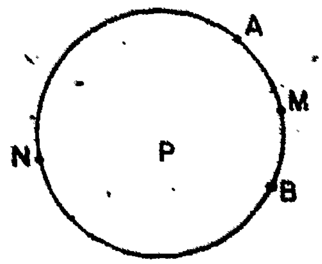
1. Un único punto no separa la curva en dos partes.
2. La separación y la propiedad de "estar entre", no son nociones íntimamente relacionadas para las curvas simples cerradas.

En nuestros estudios previos de geometría nos hemos referido a las partes de rectas como segmentos de recta. Será necesario considerar en el futuro partes de circunferencias. Una parte de circunferencia se llama <u>arco</u>. En el dibujo de la derecha, los puntos A y B separan a la circunferencia en dos partes. Cada una de esas partes, juntamente con los puntos A y B, es un arco. A y B son los extremos del arco.



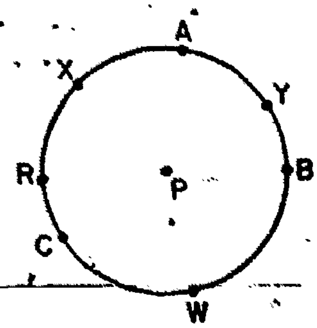
Dos puntos cualesquiera distintos de una circunferencia determinan dos arcos diferentes que tienen esos puntos como extremos. En el dibujo anterior, el arco que parte de A y se prolonga en la dirección de las agujas del reloj hasta el punto B, es más corto que el arco que parte del punto A y se prolonga en sentido contrario al de las agujas del reloj hasta el punto B.

Con sólo dos puntos sobre una circunferencia, tales como A y B, no podemos distinguir fácilmente uno de los arcos determinados por A y B. En la figura de la derecha, hemos marcado y dado nombre a un punto entre los dos extremos para cada arco. Estos puntos están convenientemente localizados cerca del centro de cada uno de esos arcos. Usamos el símbolo "$\frown$" para representar la palabra "arco". Entonces, $\widehat{AMB}$ representa el arco que contiene el punto M. $\widehat{ANB}$ representa el arco que contiene a N. En lugar de $\widehat{AMB}$ podemos usar $\widehat{BMA}$. ¿Qué otros símbolos representarán el mismo arco que $\widehat{ANB}$? ¿Qué punto está contenido en el arco $\widehat{MAN}$?



Ejercicios 11-4

1. Utilizando la figura de la derecha, señala el arco más corto que contiene los siguientes puntos, que no son extremos del arco.



(a) A
(b) B
(c) C
(d) R
(e) X
(f) Y

2. Utilizando la figura del problema 1, nombra el punto o los puntos que no son extremos de cada uno de los siguientes arcos:

(a) $\widehat{BWC}$
(b) $\widehat{ABC}$
(c) $\widehat{WAX}$
(d) $\widehat{CAB}$
(e) $\widehat{XBY}$
*(f) $\widehat{AC}$

3. Haciendo uso de la figura del problema 1, ¿cuáles son los extremos de estos arcos?

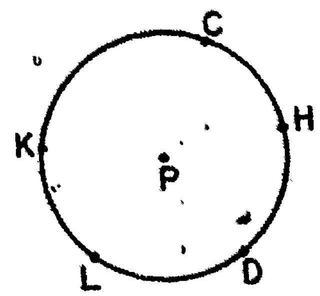
(a) $\widehat{AYB}$ (d) $\widehat{YWC}$

(b) $\widehat{AXR}$ (e) $\widehat{WRA}$

(c) $\widehat{ACB}$ (f) $\widehat{BAC}$

4. ¿Ha sido necesario dibujar una figura para responder a la pregunta anterior? Explica tu respuesta.

5. Usa la figura de la derecha para responder a las preguntas siguientes:



(a) ¿Se ha especificado sobre la circunferencia algún punto entre C y D? Explica tu respuesta.

(b) ¿Se ha especificado un punto entre C y D, sobre $\widehat{CHD}$? Si es así, ¿cuál es ese punto?

(c) El punto L separa a $\widehat{CLH}$ en dos arcos. ¿Cuáles son?

(d) ¿Separa el punto L a la circunferencia en dos arcos? Explica por qué sí o por qué no.

6. Haz uso de tus respuestas al problema 5 para contestar las siguientes preguntas:

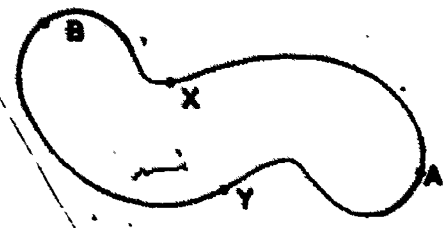
(a) Un punto de un arco, ¿separa a ese arco en dos arcos?

(b) Un punto de un arco que no es uno de sus extremos, ¿debe estar entre dos puntos del arco?

(c) ¿Tiene un arco un punto inicial y un punto terminal? Si es así, ¿cómo se les llama?

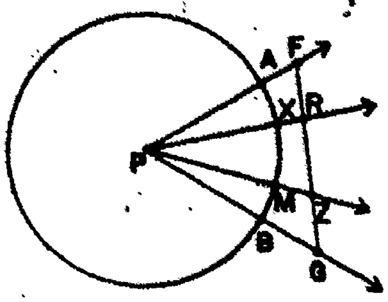
(d) Las nociones de "estar entre" y de separación para un arco, ¿son más parecidas a las mismas nociones referentes al segmento de recta, o a las que se relacionan con una circunferencia?

7. En la figura de la derecha el par de puntos A y B separa los puntos X e Y. ¿Qué puntos, si los hay, están separados por los pares de puntos que se dan a continuación?



(a) B, Y
(b) A, Y
(c) X, Y
(d) A, X

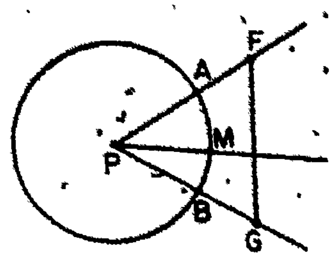
*8. En la figura de la derecha se asocia $\overset{\frown}{AMB}$ con el interior de $\angle$ APB. $\overline{FG}$ conecta un punto de $\overrightarrow{PA}$ con un punto de $\overrightarrow{PB}$.



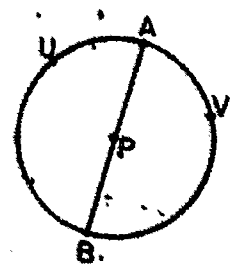
(a) ¿Están sobre $\overrightarrow{PA}$ los dos puntos A y F?
(b) ¿Corresponde el punto F de $\overline{FG}$ al punto A de $\overset{\frown}{AMB}$?
(c) Para cada rayo que parte de P y pasa por $\overset{\frown}{AMB}$, ¿hay un punto de $\overline{FG}$ que también está sobre ese rayo?
(d) ¿Hay una correspondencia biunívoca entre los puntos de $\overset{\frown}{AMB}$ y los puntos de $\overline{FG}$? Si es así, describe esa correspondencia.

11-5. Angulos centrales

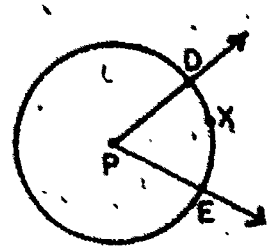
Los arcos tienen algunas propiedades semejantes a las de los segmentos de recta. En la figura de la derecha se muestra una correspondencia biunívoca natural entre el conjunto de puntos de $\overset{\frown}{AMB}$ y el conjunto de puntos de $\overline{FG}$. Un punto puede separar al segmento en dos partes. En la misma forma, un arco puede ser separado en dos arcos por un punto que esté sobre el arco, pero que no sea uno de sus extremos. Como los segmentos, los arcos tienen un punto inicial y un punto terminal: sus extremos. Aunque los arcos son partes de circunferencias, un arco tiene algunas propiedades que no son las mismas que para la circunferencia.



En la figura de la derecha, $\overline{AB}$ es un diámetro de la circunferencia P. Sus extremos A y B determinan dos arcos muy especiales que se llaman semicircunferencias. Una semicircunferencia es un arco determinado por los extremos de un diámetro de la circunferencia. En la figura, $\overset{\frown}{AVB}$ es una semicircunferencia. ¿Puedes indicar otra semicircunferencia en esa figura? ¿Es $\overset{\frown}{BUA}$ una semicircunferencia?



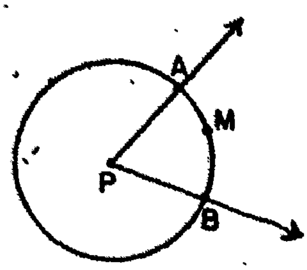
Los extremos de una semicircunferencia y el centro de la misma están sobre una recta. Esto, sin embargo, no es cierto para todos los arcos. En la figura de la derecha, los extremos de $\overset{\frown}{DXE}$ no están sobre una recta que pasa por el centro de la circunferencia. D y E están sobre los rayos $\overrightarrow{PD}$ y $\overrightarrow{PE}$. El ángulo EPD tiene su vértice en el centro de la circunferencia. Llamamos ángulos centrales a los ángulos como éste. Un ángulo



central es un ángulo que tiene su vértice en el centro de la circunferencia. Tales ángulos se miden de la misma manera como los otros. La unidad de medida de ángulos es un ángulo de un grado. En la figura, la medida del ángulo EPD es aproximadamente 85.

Cuando se trabaja con arcos, es necesario comparar uno con otro. En consecuencia, será conveniente desarrollar un método para medir arcos. Imaginemos una circunferencia dividida en 360 arcos congruentes, es decir, cada uno de dichos 360 arcos de una circunferencia dada tiene la misma medida. Cada uno de esos arcos determina una unidad de medida de arcos. Llamamos a esta unidad <u>un grado de arco</u>.

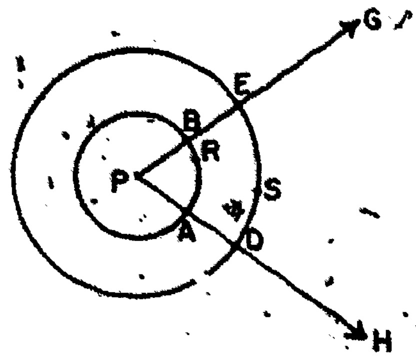
Los rayos que parten del centro de la circunferencia y pasan por los extremos de una unidad de medida de arco, determinan un ángulo central. Nos representamos un grado de arco como si fuera determinado por un ángulo central que es un ángulo unitario de un grado. En la figura de la derecha, si la medida de $\widehat{AMB}$ en grados de arco es 80, entonces la medida de $\angle$ APB en grados de ángulo es 80. El símbolo para un grado de arco, " ° ", es el mismo que para grados de ángulo.



Para medir grados de arco, podemos usar un instrumento de forma circular que contenga 360 arcos congruentes. La mayor parte de estos instrumentos, llamados limbos graduados, muestran exactamente la mitad de esta escala.

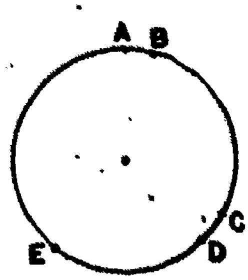
En el conjunto de rayos numerados de la escala angular, los números 0 y 180 corresponden a rayos opuestos, esto es, rayos que están sobre la misma recta y tienen el mismo extremo. La reunión de estos dos rayos forma una recta, cuya intersección con la circunferencia es el par de extremos de un diámetro. Estos dos puntos determinan un arco especial, una semicircunferencia, que hemos mencionado antes en este capítulo. Considerando esta escala, podemos imaginar que la semicircunferencia tiene una medida en grados de arco de 180°, pues consiste en 180 arcos de un grado.

Correspondiendo a la clase especial de arco que hemos llamado una semicircunferencia hay una clase especial de ángulo central con una medida de 180°. Algunas personas encuentran conveniente hablar del ángulo central de 180° como de un "ángulo llano". (¿Por qué "ángulo llano" no concuerda con nuestra definición de ángulo?)



En la figura de la derecha hay dos circunferencias con centro común P. Las circunferencias están en un mismo plano. Tales circunferencias se llaman circunferencias concéntricas. Los dos arcos, $\overset{\frown}{ARB}$ y $\overset{\frown}{ESD}$ tienen el mismo ángulo central, $\angle$ GPH. Por consiguiente, $\overset{\frown}{ARB}$ y $\overset{\frown}{ESD}$ deben tener la misma medida de arco. Si la medida angular de $\angle$ BPA es 70, entonces la medida del arco $\overset{\frown}{ARB}$ es 70. La medida del arco $\overset{\frown}{ESD}$ debe ser también 70. Sin embargo, $\overset{\frown}{ARB}$ parece más corto que $\overset{\frown}{ESD}$. Recuerda que la medida de arco no es una medida de longitud. Dos arcos pueden tener la misma medida de arco, pero tener diferentes longitudes. La razón será más clara cuando hayas estudiado el resto de este capítulo.

Ejercicios 11-5



1. Usando tu limbo graduado, determina la medida de los arcos marcados en la figura de la derecha. Indica tus resultados haciendo uso correcto de los símbolos, por ejemplo $m(\overset{\frown}{AB}) = 15$.

   (a) $\overset{\frown}{ABC}$
   (b) $\overset{\frown}{ABCD}$
   (c) $\overset{\frown}{DE}$
   (d) $\overset{\frown}{BCD}$
   (e) $\overset{\frown}{CDE}$

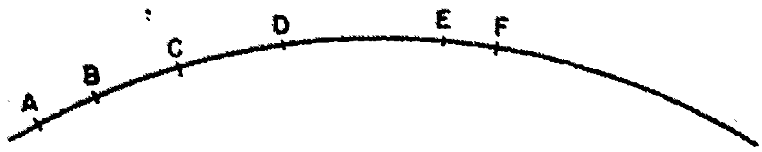
2. Construye una circunferencia de radio aproximadamente igual a $1\frac{1}{2}$ pulgadas. En este ejercicio, marca los puntos que se necesitan en sentido contrario a las agujas del reloj, a lo largo de la circunferencia, partiendo de un punto A cualquiera de la misma. Marca y rotula arcos de las siguientes medidas:

(a) $m(\widehat{AB}) = 10$
(b) $m(\widehat{AC}) = 45$
(c) $m(\widehat{BD}) = 50$
(d) $m(\widehat{DF}) = 170$
(e) ¿Cuánto es $m(\widehat{BC})$?

3. (a) ¿Cuántos grados de arco hay en un cuadrante de una circunferencia?
(b) ¿Cuántos grados de arco hay en un octavo de circunferencia?
(c) ¿Cuántos grados de arco hay en un sexto de circunferencia?
(d) ¿Cuántos grados de arco hay en tres cuartos de circunferencia?

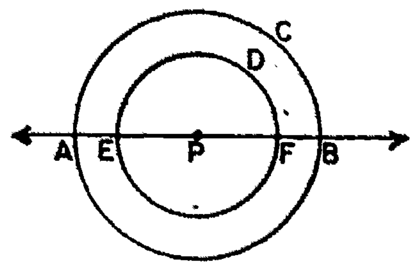
4. Dibuja una circunferencia con un radio de 2 pulgadas. Partiendo de un punto cualquiera de ella, usa un compás con la misma abertura (2 pulgadas) para marcar una serie de puntos igualmente espaciados a lo largo de la circunferencia.
ATENCION: Ten cuidado de que tu compás no cambie de abertura.
(a) ¿Llegas exactamente al mismo punto de partida?
(b) ¿Cuántos arcos has marcado?
(c) ¿Cuál es la medida del ángulo central de cualquiera de esos arcos?
(d) ¿Cuál es la medida en grados de uno cualquiera de esos arcos?

5. Considera el arco $\overset{\frown}{ABCDEF}$, o más brevemente $\overset{\frown}{AF}$, presentado en la figura siguiente. Determina:



(a) $\overset{\frown}{AC} \cap \overset{\frown}{BD}$
(b) $\overset{\frown}{AF} \cap \overset{\frown}{DF}$
(c) $\overset{\frown}{AD} \cap \overset{\frown}{CF}$
(d) $\overset{\frown}{CD} \cap \overset{\frown}{DE}$
(e) $\overset{\frown}{DF} \cap \overset{\frown}{AE}$

6. En la figura de la derecha, las circunferencias C y D son concéntricas y están en un mismo plano.



(a) Señala un diámetro de la circunferencia D.
(b) Señala un diámetro de la circunferencia C.
(c) ¿Cuál de las circunferencias tiene mayor diámetro?
(d) ¿Cuál de las circunferencias parece ser más larga?
(e) ¿Por qué sería difícil medir con precisión las longitudes de las circunferencias, recorriendo a lo largo de ellas?

7. Experimento para hallar la relación entre el diámetro y la longitud de una circunferencia.
(a) Toma tres objetos circulares en tu casa, tales como un vaso, un molde para pasteles, un plato o la rueda de un juguete (o bien, puedes recortar una pieza circular de cartulina o cartón). Utiliza una cinta de medir (de tela o de acero flexible) para hallar la longitud de cada una de las circunferencias. Si no tienes una cinta de medir, utiliza un trozo de cuerda, y luego mide la longitud del trozo de cuerda utilizado.
(b) Mide el diámetro de los mismos tres objetos circulares. Como puede ser difícil localizar el centro exacto de la circunferencia, mide transversalmente la circunferencia

varias veces hasta obtener una medida del diámetro tan buena como sea posible. La más larga de estas medidas es el diámetro.

(c) Dispón tus resultados en una tabla igual a la que se muestra más abajo. Compara las medidas de cada uno de los objetos. Para comparar dos cantidades, podemos hallar su diferencia o su razón. En la tabla, la columna "c - d" representa la diferencia entre las medidas de las circunferencias y los diámetros. La columna "$\frac{c}{d}$" representa la razón de las medidas de las circunferencias a los diámetros. (Halla las razones con la aproximación de un décimo.)

Nombre del objeto	Medida de la circunferencia	Medida del diámetro	c - d	$\frac{c}{d}$
vaso				
molde para pastel				
plato				

(d) ¿Parecen iguales todas las diferencias "c - d"?

(e) ¿Parecen iguales todas las razones "$\frac{c}{d}$"?

*8. La circunferencia A tiene un radio de 5 pulgadas. La circunferencia B tiene un radio de 25 pulgadas. Explica por qué la medida angular de un cuadrante del círculo A es la misma que la medida angular de un cuadrante del círculo B.

*9. Pon en evidencia una correspondencia biunívoca entre los conjuntos de puntos de las dos semicircunferencias de una circunferencia dada que sean determinadas por un diámetro.

11-6. Longitud de la circunferencia

Es difícil medir con precisión la longitud de una circunferencia. En el problema 7, Ejercicios 11-5, has visto que parece haber una relación entre el diámetro de una circunferencia y la longitud de esa circunferencia.

La diferencia "c - d" para una determinada circunferencia no nos da una relación que parezca cierta para las otras circunferencias. Para todas ellas, sin embargo, la razón "$\frac{c}{d}$" de las medidas de la longitud al diámetro, parece ser la misma.

¿Qué resultados has obtenido para la razón de c a d? ¿Era ese número aproximadamente el mismo en cada caso? ¿Era ese número un poco mayor que 3? Si hiciste cuidadosamente el experimento, tus resultados para la razón $\frac{c}{d}$ deben haber sido aproximadamente 3.1 ó 3.2. Parece, pues, que la longitud de cualquier circunferencia es un poco más de tres veces el diámetro de esa circunferencia.

Los matemáticos han demostrado que, para cualquier circunferencia, la razón de la medida de la longitud de la circunferencia a la medida del diámetro es siempre el mismo número. Se usa un símbolo especial para este número. Este símbolo se escribe " π ", que es una letra del alfabeto griego. Se lee "pi". π es la primera letra de la palabra griega para "perímetro".

En lenguaje matemático, decimos que la relación de la medida c de la longitud de la circunferencia a la medida d de su diámetro es:

$$\frac{c}{d} = \pi \qquad \text{ó} \qquad c = \pi d$$

El valor de π es aproximadamente 3.14 ó $3\frac{1}{7}$. Usamos este número para determinar la longitud de cualquier circunferencia.

Es mucho más fácil medir el diámetro de una circunferencia que la longitud de la misma. Se puede calcular la longitud de la circunferencia usando la medida del diámetro y la relación que antes hemos encontrado. Suponte que el diámetro de una circunferencia es 5 pulgadas. Entonces, se puede hallar la longitud de esa circunferencia de la siguiente manera:

(Usando $\pi \approx 3.14$)

$c = \pi d$

$c = 3.14 \cdot 5$

$c = 15.7$

(Usando $\pi \approx 3\frac{1}{7}$)

$c = \pi d$

$c = \frac{22}{7} \cdot 5$

$c = 15\frac{5}{7}$

Ejercicios 11-6a

1. Completa los datos que faltan acerca de las circunferencias consideradas (usando $\pi \approx 3.14$), en el siguiente cuadro.

	Circunferencia	Radio	Diámetro	Longitud de la circunferencia
(a)	A	10 plg.	?	?
(b)	B	?	15 pies	?
(c)	C	3.6 yd.	?	?
(d)	D	4.2 cm.	?	?
(e)	E	?	5.6 plg.	?

2. (a) ¿Qué número se obtiene dividiendo la medida de la longitud de una circunferencia por la medida del diámetro de la misma?

   (b) ¿Cómo puedes determinar la longitud de una circunferencia si sólo conoces el diámetro?

   (c) ¿Puedes determinar el diámetro de una circunferencia conociendo solamente la longitud de esa circunferencia? Explica tu respuesta.

3. Copia y completa las siguientes proposiciones numéricas que muestran la relación entre la longitud de una circunferencia y el diámetro de la misma:

   (a) $\pi = \frac{?}{?}$ (b) $? = \pi\ ?$ (c) $\frac{?}{\pi} = ?$

4. Completa los datos que faltan referentes a las circunferencias consideradas (usando $\pi \approx 3\frac{1}{7}$), en el siguiente cuadro:

	Circunferencia	Radio	Diámetro	Longitud de la circunferencia
(a)	V	?	?	22 pies.
(b)	W	?	?	25 plg.
(c)	X	?	?	16 cm.
(d)	Y	?	?	43 yd.
(e)	Z	?	?	88 mm.

5. (a) ¿Cómo puedes determinar la medida del radio de una circunferencia si conoces solamente la medida del diámetro?
   (b) ¿Cómo puedes determinar la medida del diámetro de una circunferencia si sólo conoces la medida del radio de la misma?
   (c) ¿Cómo puedes determinar la medida de la longitud de una circunferencia valiéndote de la medida del radio de la circunferencia?

6. Copia y completa las siguientes proposiciones numéricas que muestran la relación entre la longitud de la circunferencia y el radio de la misma:

   (a) $c = \pi(? \cdot r)$
   (b) $c = (\pi \cdot ?)r$
   (c) $c = (2\ ?)r$
   (d) $\frac{c}{? \cdot ?} = r$
   (e) $\frac{c}{r} = ? \cdot ?$
   (f) $\frac{c}{2 \cdot r} = ?$

7. Completa los datos que faltan referentes a las circunferencias que se consideran (usando $\pi \approx 3.1$), en el siguiente cuadro:

	Circunferencia	Radio	Longitud de la circunferencia
(a)	K	5 plg.	?
(b)	L	?	51 pies
(c)	M	17 cm.	?
(d)	N	?	100 yd.

Para los problemas 8 a 11, emplea $\pi \approx 3.14$.

8. Una pantalla circular para cierta lámpara tiene 12 pulgadas de diámetro y necesita una nueva cenefa en el borde inferior. ¿Qué longitud de cinta se necesitará? (No tomes en cuenta la parte que se superpone en los extremos.)
9. Se va a construir un aro circular con una varilla de metal de 62 pulgadas de largo. ¿Cuál será su diámetro? ¿Será suficientemente grande para usarlo como aro de canasta para el juego de básketbol? (El diámetro oficial de la canasta es de 18 pulgadas.)
10. En un campo de juegos, un tiovivo tiene 15 pies de radio. Si te sientas al borde, ¿qué distancia recorres en una vuelta?
11. Una rueda se desplaza 12 pies a lo largo de la pista cuando da una vuelta completa. ¿Cuál es el diámetro de la rueda?

*12. Una circunferencia de 20 pulgadas de diámetro está subdividida por puntos en 8 arcos de igual longitud.
   (a) ¿Cuál es la longitud de la circunferencia completa?
   (b) ¿Cuál es la longitud de cada arco?
   (c) ¿Cuál es la medida angular de cada arco?
   (d) En esta circunferencia, ¿qué longitud tiene un arco de un grado?

OPCIONAL: El número π

El número representado por el símbolo " π " es una nueva clase de número. No es un número cardinal. Tampoco es un número racional. Recuerda que todo desarrollo decimal de un número racional es periódico. Los matemáticos han demostrado que el desarrollo decimal de π no puede ser periódico. En un artículo escrito por F. Genuys en Chiffres I (1958), aparece un desarrollo con 10,000 cifras decimales para π.

He aquí el valor de π con cincuenta y cinco cifras decimales: 3.14159 26534 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 36510 58209...

(Los tres puntos al final indican que el desarrollo decimal continúa indefinidamente.)

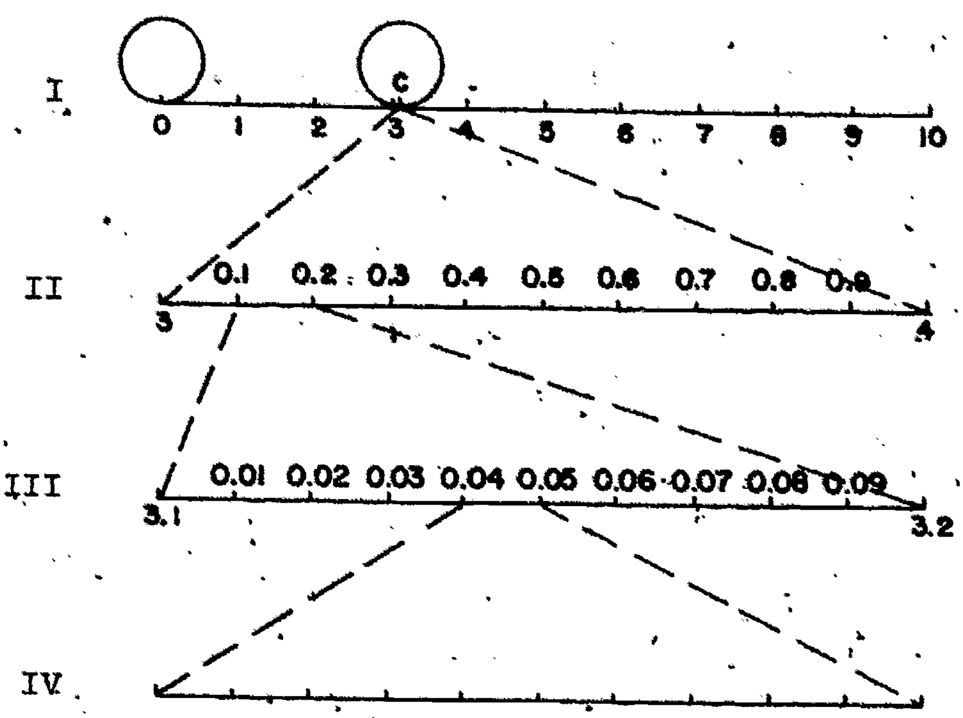
Si examinas este desarrollo decimal para el número π ves que es difícil localizar el punto sobre la recta numérica al cual corresponde. Sin embargo, examinando los dígitos ordenadamente, podemos encontrar segmentos de la recta numérica cada vez más pequeños, que contengan el punto correspondiente a π.

Estudia los siguientes enunciados:

1. $\pi = 3 + 0.141592...$. Por consiguiente, $\pi > 3$ y $\pi < 4$. ¿Por qué? $(3 < \pi < 4)$
2. $\pi = 3.1 + 0.041592...$. Por consiguiente, $\pi > 3.1$ y $\pi < 3.2$. ¿Por qué? $(3.1 < \pi < 3.2)$
3. $\pi = 3.14 + 0.001592...$. Por consiguiente, $\pi > 3.14$ y $\pi < 3.15$. ¿Por qué? $(3.14 < \pi < 3.15)$

¿Cuál debe ser el siguiente enunciado?

En la figura siguiente se muestra una recta numérica. En el punto 0 se indica la primera posición de una circunferencia cuyo diámetro tiene una unidad de longitud, y se seña a también su posición después de haber rodado a lo largo de la recta numérica. La posición aproximada del punto que corresponde al número π es el punto de tangencia, C.



La recta I en la figura ilustra el enunciado 1. El punto correspondiente a π está sobre el segmento cuyos extremos son 3 y 4.

En la recta II se muestra, ampliado diez veces, el segmento de la recta I de extremos 3 y 4. Se ha subdividido el segmento para marcar las décimas, de manera que los puntos de división corresponden a los números 3.1, 3.2, 3.3, etc. El enunciado 2 nos dice que el punto para π está sobre el segmento de extremos 3.1 y 3.2.

Sobre la recta III se muestra, ampliado diez veces, el segmento de extremos 3.1 y 3.2. Los puntos marcados sobre la recta III la subdividen en décimas, y corresponden a los números 3.11, 3.12, etc. Por el enunciado 3 sabemos que el punto que corresponde a π está sobre el segmento de extremos 3.14 y 3.15.

¿Qué números se deben escribir en los extremos del segmento marcado IV? ¿A qué números corresponden los puntos de subdivisión? ¿Sobre qué segmento de la recta IV está el punto correspondiente a π?

Observa nuevamente la recta III. Verás que el segmento completo de la recta III es una ampliación 100 veces más grande que el correspondiente segmento sobre la recta numérica I, sobre la que ha rodado la circunferencia. Empleando exactamente tres dígitos en el decimal para π, hemos visto que el punto π está en un segmento particular que es muy pequeño— exactamente $\frac{1}{100}$ del segmento de la recta numérica entre los puntos 3 y 4.

Si utilizaras un dígito más, podrías mostrar que los extremos del segmento que contiene a π son ___?___ y ___?___.

Ejercicios 11-6b

1. (a) Halla, con tres cifras decimales, la diferencia entre π y cada uno de los siguientes números racionales:

   $\frac{19}{6}$ $\frac{22}{7}$ $\frac{25}{8}$

   (b) ¿Cuál de los números racionales de la pregunta (a) está más próximo de π?

   Utilizando $\pi \approx \frac{22}{7}$, calcula lo siguiente:

   (c) La longitud de una circunferencia cuyo diámetro es 14 pulgadas.

   (d) La longitud de una circunferencia cuyo radio es 21 pies.

   (e) El diámetro de una circunferencia cuya longitud es 132 pulgadas.

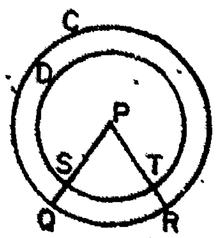
   (f) El radio de una circunferencia cuya longitud es 44 pies.

   (g) La longitud de una circunferencia cuyo radio es $10\frac{1}{2}$ pulgadas.

2. (a) Halla, con cuatro cifras decimales, la expresión decimal para 2π.

   (b) Halla, con cinco cifras decimales, la expresión decimal para 3π.

3. Es una buena idea usar π algunas veces, como numeral en lugar de utilizar su expresión decimal. Responde a las siguientes preguntas usando π como numeral. Decimos que las respuestas están expresadas "en términos de π".
   (a) Si la longitud de una circunferencia es 54π pulgadas, ¿cuál es su diámetro? ¿Cuál es su radio?
   (b) Si el diámetro de una circunferencia es 13 pulgadas, ¿cuál es la longitud de la circunferencia?
   (c) Si el radio de una circunferencia es 3.6 centímetros, ¿cuál es la longitud de la circunferencia?
4. Suponte que el diámetro de la circunferencia C es tres veces más largo que el diámetro de la circunferencia D. ¿Cuál es la razón de las medidas de las longitudes de estas circunferencias? (Sugerencia: Elige longitudes para los diámetros y luego halla las longitudes de las circunferencias. Usa π como numeral.)
5. En la figura, las circunferencias C y D tienen el mismo centro P. El radio de la circunferencia C es 7 pulgadas y el de la circunferencia D es 5 pulgadas.



   (a) Halla la longitud de cada circunferencia.
   (b) Si el ángulo QPR contiene 70 grados, ¿cuál es la medida angular del arco $\widehat{ST}$? ¿Cuál es la medida angular de $\widehat{QR}$?
   (c) ¿Qué parte fraccionaria de la circunferencia C es el arco $\widehat{QR}$? ¿Qué parte fraccionaria de la circunferencia D es el arco $\widehat{ST}$?
   (d) ¿Cuál es la medida lineal del arco $\widehat{QR}$? ¿Cuál es la medida lineal del arco $\widehat{ST}$?

6. PROBLEMA DIFICIL. Suponte que se coloca una cinta bien tensa alrededor de la tierra, sobre el ecuador; y luego se le aumenta 1 pie de longitud, de manera que se afloje un poco, pero dejándola igualmente separada de la tierra en toda su longitud.
   (a) ¿Podría pasar un ratón entre la cinta y la tierra?
   (b) ¿Podrías pasar tú entre la cinta y la tierra? Si no es así, ¿en cuánto debe alargarse la cinta de manera que te sea posible pasar debajo de ella?
   (c) ¿Qué propiedad matemática puedes usar para responder a estas preguntas?

11-7. Area del círculo

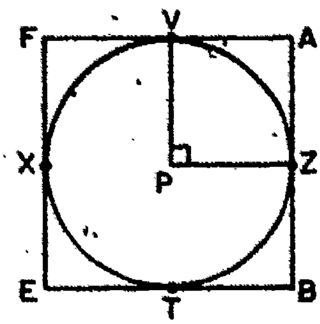
En la cocina de tu casa puedes encontrar una sartén circular de nueve pulgadas. El borde de la superficie en que se fríe representa una circunferencia, y las "nueve pulgadas" representan el diámetro de esa circunferencia. Algunas sartenes son cuadradas. Probablemente puedes encontrar también una sartén cuadrada de ocho pulgadas. Una persona que tratara de decidir la compra de una sartén circular de nueve pulgadas o de una sartén cuadrada de ocho pulgadas podría preguntarse: "¿Cuál es más grande?" Por "más grande" debemos entender mayor superficie para freír. En otras palabras, se quiere comparar el área de la región cerrada de un cuadrado de ocho pulgadas de lado con el área de la región cerrada correspondiente a una circunferencia de nueve pulgadas de diámetro.

Después de una cuidadosa inspección de las dos sartenes, concluirías que las áreas son tan aproximadas que no puedes decidir cuál es más grande. Tratemos de encontrar cuál de las dos sartenes tiene mayor superficie para freír.

"Area de un círculo" significa "área de la región circular cerrada". Cuando sepamos cómo calcular el área de un círculo, podremos expresar esta área en términos del radio. Esto se hace frecuentemente cuando se habla de una región circular.

Como cada lado del cuadrado tiene ocho pulgadas de longitud, sabemos que su área es sesenta y cuatro pulgadas cuadradas. En cambio, aún no hemos estudiado un método que nos permita calcular el área de un círculo. Podemos medir el diámetro. Esta medida puede utilizarse para calcular el radio o la longitud de la circunferencia. Pero es difícil medir el área de un círculo.

En la figura, el punto P es a la vez el centro de la circunferencia y el centro del cuadrado ABEF. Sea r la medida del radio de la circunferencia. Entonces, cada uno de los segmentos $\overline{VP}$ y $\overline{PZ}$ es un radio con medida r. El ángulo VPZ es recto. ¿Es el área del cuadrado ABEF cuatro veces el área del cuadrado VAZP?



Observa que en la figura la circunferencia tiene un diámetro que es igual en longitud al lado del cuadrado; luego contesta a las siguientes preguntas:

I. (a) ¿Es el área del círculo mayor o menor que el área del cuadrado ABEF?

(b) ¿Es el área del círculo mayor que el área del cuadrado VAZP?

(c) ¿Es el área del círculo mayor o menor que el cuádruple del área del cuadrado VAZP?

(d) ¿Nos da esto el área del círculo?

Tratemos de calcular aproximadamente el área del círculo haciendo una medición más cuidadosa. En la parte superior de la página siguiente se presenta un cuadrado pequeño. Cada uno de sus lados tiene una unidad de longitud. El cuadrado pequeño representa una unidad de área.

La figura grande representa una circunferencia cuyo radio tiene diez unidades de longitud. El cuadrado grande, cuyos lados son tangentes a la circunferencia, tiene su lado de veinte unidades de longitud. La región interior a esa circunferencia ha sido cubierta con unidades de área. Usa este dibujo para hallar el área aproximada del círculo.

¿Qué método sería bueno para contar el número de unidades cuadradas de la región circular? Podríamos contar el número de tales unidades en el cuadrante limitado por el cuadrado ABCD. Luego podríamos multiplicar ese número por 4. Observa, sin embargo, que algunas de las unidades de área están parcialmente en el interior del círculo y parcialmente en su exterior. Tenemos que determinar el total de unidades cuadradas, lo cual se puede hacer contando las unidades que tienen más de su mitad en el interior, como unidades enteras. Entonces, despreciamos las unidades para las cuales la menor parte está en el interior.

Hay unas 79 unidades de área en el cuadrante. El número total de unidades de área en el círculo será, entonces, 4 veces 79, es decir 316.

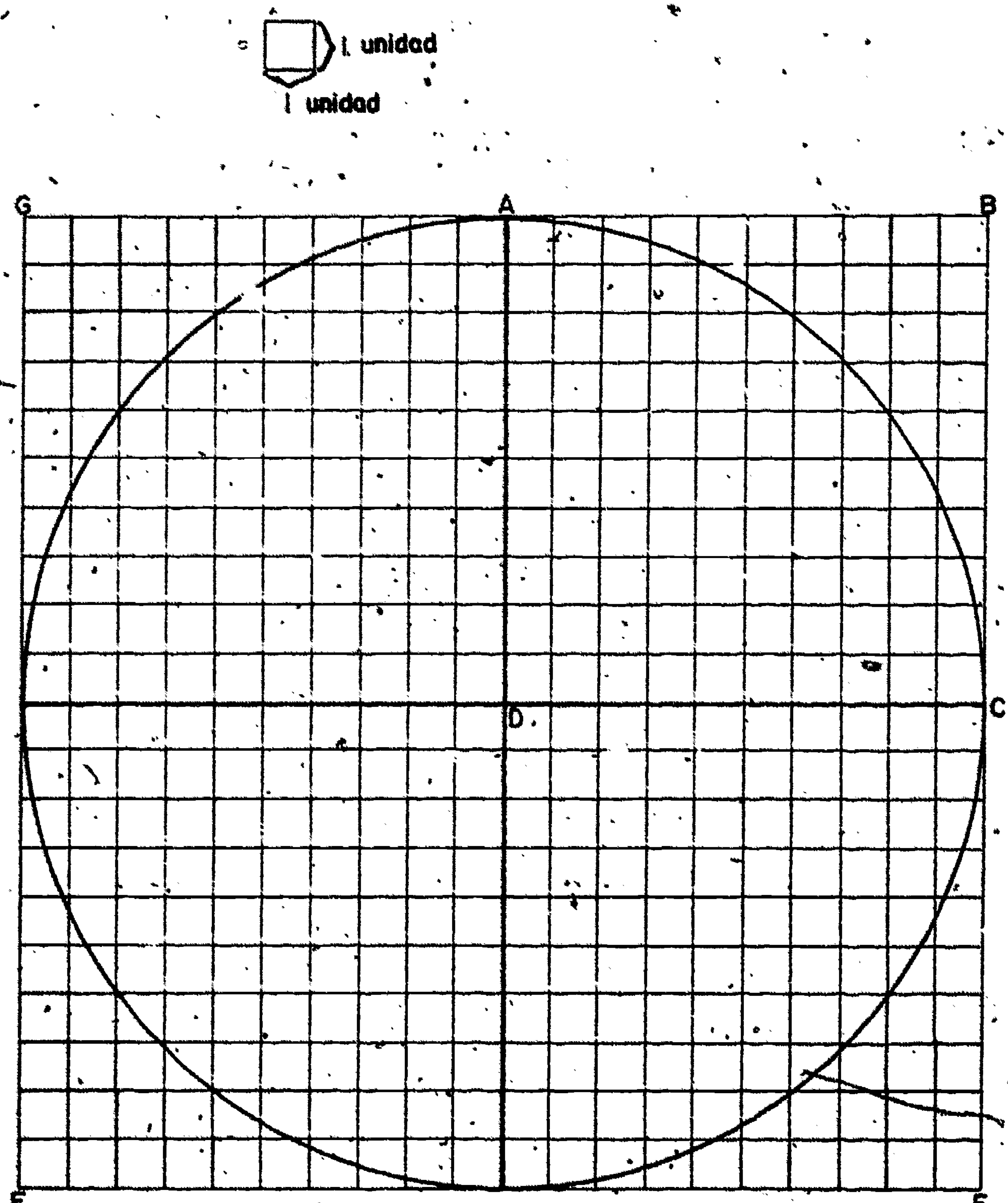
¿Cuál es el área del cuadrado ABCD? El área de ABCD es 100 unidades cuadradas. Entonces el área de BEFG es 400 unidades cuadradas. Ahora responde a las siguientes preguntas:

II. (a). ¿Qué relación hay entre el área del círculo y el área de BEFG?

(b) ¿Es el área del círculo un poco mayor que tres veces el área de ABCD?

(c) ¿Cómo puedes determinar rápidamente el área del cuadrado ABCD?

Como hemos visto por las respuestas a [illegible] preguntas anteriores, el área de BEFG es mayor que el [illegible] del círculo. Puesto que el área de BEFG es cuatro veces el área de ABCD, entonces, cuatro veces diez veces diez $(4 \cdot 10 \cdot 10)$ da un producto mayor que el área del círculo. Pero el área del círculo es un poco mayor que tres veces diez veces diez $(3 \cdot 10 \cdot 10)$.


1 unidad
1 unidad
G
A
B
D
C
F
E

Los matemáticos han demostrado que para cualquier círculo, su área es un poco mayor que tres veces la medida de su radio multiplicado por sí mismo. (La medida del radio del círculo en la figura era 10. Esta era la misma que la medida del lado del cuadrado ABCD.) El área de un círculo es igual al producto de π por el cuadrado del radio. En lenguaje matemático, decimos que

$$A = \pi r^2.$$

donde A es el número de unidades de área y r es la medida del radio.

Volvamos a la comparación de las dos sartenes. Una sartén circular de nueve pulgadas de diámetro tiene un radio de $\frac{9}{2}$ pulgadas (ó $4\frac{1}{2}$ pulgadas). El área de la sartén puede ser calculada así:

$$A = \pi r^2 \quad (\text{Usando } \pi \approx 3\tfrac{1}{7})$$

$$A \approx \frac{22}{7} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{9}{2}$$

$$A \approx \frac{1782}{28} \text{ ó } 63\frac{18}{28}$$

Ahora podemos responder a la pregunta: "¿Qué sartén tiene mayor superficie para freír, una circular de nueve pulgadas de diámetro o una cuadrada de ocho pulgadas de lado?" ¿Cuál es tu respuesta?

Ejercicios 11-7

1. Usando $\pi \approx 3\frac{1}{7}$, halla las áreas de los círculos cuyos radios se indican a continuación:

   (a) 7 pulg. (d) 21 yd.
   (b) 5 pies (e) 3.5 mm.
   (c) 14 cm. (f) 4.2 yd.

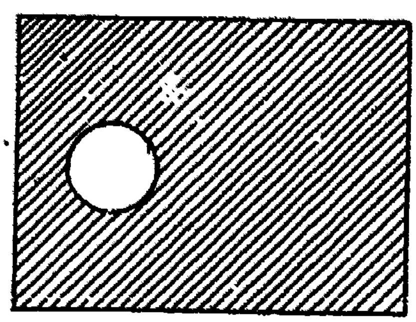
2. Usando $\pi \approx 3.14$, halla las áreas de los círculos cuyos radios son los siguientes:

   (a) 5 pies (d) 20 pies
   (b) 10 yd. (e) 18 pulg.
   (c) 15 cm. (f) 2.5 yd.

3. En la siguiente tabla se dan datos sobre cinco circunferencias. Halla los datos que faltan, tomando 3.1 como aproximación para π.

	Circunferencia	Radio	Diámetro	Longitud de la circunferencia	Area
(a)	A	4 pies			
(b)	B		16 cm.		
(c)	C		20 pies		
(d)	D			100 mi.	
(e)	E	111 plg.			

4. ¿Qué sartén tiene mayor superficie para freír, una circular de ocho pulgadas de diámetro o una cuadrada de siete pulgadas de lado? ($\pi \approx 3.14$)
5. La parte superior de un tambor circular tiene doce pulgadas de diámetro. ¿Cuál es su área?
6. (a) ¿Qué método es más fácil para hallar el área de un círculo—medir su radio y calcular el área, con la ayuda de πr^2, o medir el área directamente con una unidad de medida apropiada?
   (b) ¿Deben dar los dos métodos el mismo resultado?
7. Un terreno rectangular mide 40 pies por 30 pies y tiene su mayor parte sembrada con grama, salvo un macizo circular de flores que tiene 7 pies de radio. ¿Cuál es el área sembrada con grama?

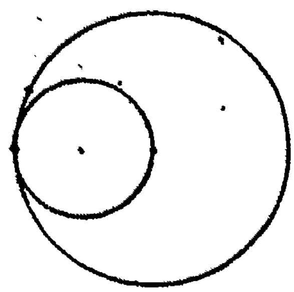


8. La figura representa una curva simple cerrada formada por un arco de circunferencia y un diámetro de la misma. El área del interior de esta curva simple cerrada, medida en pulgadas cuadradas, es 8π. No emplees ninguna aproximación para π en este problema.

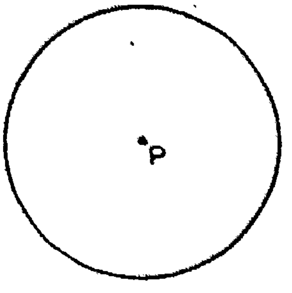
   (a) ¿Cuál es el área del círculo entero?
   (b) ¿Cuál es el cuadrado del radio?
   (c) ¿Cuál es la longitud del radio?
   (d) ¿De qué longitud es el tramo recto de la curva simple cerrada representada por la figura?
   (e) ¿Cuál es la longitud de la circunferencia completa?
   (f) ¿Cuál es la longitud del arco circular representado por la figura?
   (g) ¿Cuál es la longitud total de la curva simple cerrada?

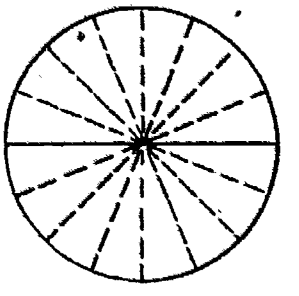
*9. La tierra está a unos 150 millones de kilómetros del sol. La órbita (o trayectoria) de la tierra alrededor del sol no es realmente circular, pero sí lo es aproximadamente. Supónte que la órbita es circular; entonces la trayectoria estará en un plano y tendrá una región interior (en el mismo plano). ¿En cuánto se puede estimar el área de ese interior?

*10. El centro de la circunferencia más grande está sobre la circunferencia más pequeña. La intersección de las dos circunferencias es un punto único. Este punto y los centros de las dos circunferencias están sobre una recta. Si se toma como unidad de medida el interior de la circunferencia más pequeña, ¿cuál será la medida de la región interior de la circunferencia grande, pero exterior a la circunferencia pequeña?



*11. Sigue las instrucciones que se sugieren a continuación y aprenderás otra manera de descubrir una relación entre el radio y el área de un mismo círculo. Utilizando tu compás, dibuja una circunferencia grande sobre una hoja de cartulina. Llama P al centro de la circunferencia. (V. la figura a la izquierda.) Usa el limbo graduado para trazar ocho rectas que pasen por P y dividan el interior del círculo en dieciséis regiones, todas de igual área. (V. la figura a la derecha.)

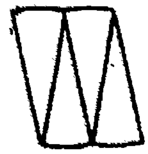




¿Puedes calcular cuántos grados de arco tendrá cada uno de los dieciséis arcos?

Recorta el círculo separándolo del resto de la cartulina. Corta el interior del círculo a lo largo del diámetro en línea llena. Toma luego cada una de las dos mitades, y corta cuidadosamente a lo largo de las líneas punteadas de los rayos, partiendo de P y hasta casi llegar a la circunferencia misma. Colgando las ocho porciones angulares, deben parecer dientes.

Junta luego los dos semicírculos de manera que las salientes del uno se coloquen en las entrantes del otro. (En la figura se muestran unos pocos de los dieciséis dientes.)



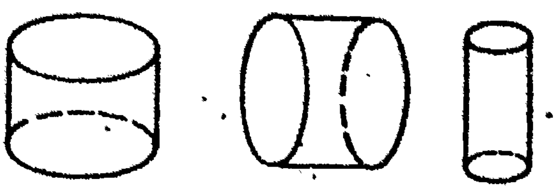
Los bordes superior e inferior de la figura así formada tienen aspecto ondulado. Si fueran rectos, la figura entera sería el interior de un __________ (llena el espacio en blanco con un nombre adecuado para esta curva simple cerrada). Como aplicación de los resultados del Capítulo 10 puedes estimar el área del interior de esta curva usando las medidas de su base aparente y de su altura. ¿Qué relación hay entre tu resultado y el producto de π por la segunda potencia del radio?

12. PROBLEMA DIFICIL. Un establo tiene 40 pies de largo y 20 pies de ancho. En el punto medio de uno de los lados más largos se ha fijado una cadena de 35 pies de largo. Otra cadena de 35 pies de largo se ha fijado en una de las esquinas del establo. Cualquiera de estas cadenas puede utilizarse para atar una vaca mientras come la grama.
   (a) ¿Qué cadena da a la vaca atada la mayor área en la que puede pastar?
   (b) ¿Qué diferencia hay entre las áreas de las dos regiones? (Usa 3.1416 como aproximación para π.)

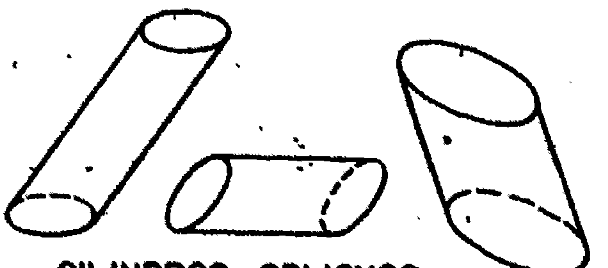
11-8. Sólidos cilíndricos—Volumen

En el Capítulo 8, has estudiado los sólidos rectangulares, su volumen y el área de su superficie. En el Capítulo 10, has visto el prisma, su volumen y el área de su superficie. Aquí estudiaremos otros sólidos que se encuentran frecuentemente en la vida diaria. Suponte que un sólido tiene una base circular, como en el caso de una lata de conservas, en vez de una base rectangular como una caja cualquiera. Ese sólido se llama sólido cilíndrico (o simplemente cilindro). Te son familiares otros ejemplos de sólidos cilíndricos, como tubos de papel, tanques, silos y algunos vasos para beber.

Las figuras que se muestran a continuación representan cilindros. Las de la izquierda se llaman cilindros rectos. Compáralas con las de los cilindros oblicuos de la derecha.



CILINDROS RECTOS



CILINDROS OBLICUOS

Raramente vemos cilindros oblicuos en la vida diaria. Por consiguiente, supondremos en este capítulo que nuestros sólidos son cilindros rectos.

He aquí una lista de algunas propiedades importantes de un cilindro recto:

(1) Tiene dos bases congruentes (una tapa y un fondo) y cada una de ellas es una región circular.

(2) Cada una de las bases está en un plano y los dos planos son paralelos.

(3) Si los planos de las bases se colocan horizontalmente, la base superior está directamente encima de la base inferior.

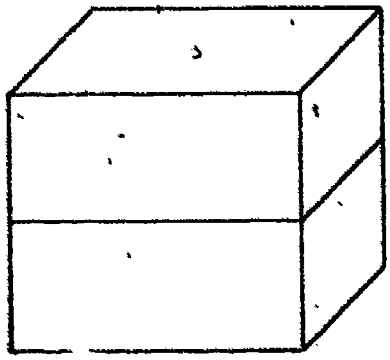
(4) La superficie lateral del cilindro se compone de los

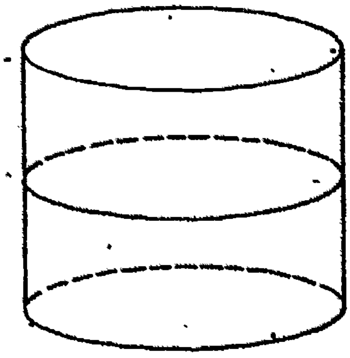
puntos de los segmentos que unen un punto de la circunferencia inferior con el punto que está directamente encima de él en la circunferencia superior.

Hay dos números que representan longitudes que permiten caracterizar un sólido cilíndrico: el radio de la base del cilindro y el alto (o altura) del mismo. La altura es la distancia (perpendicular) entre los planos paralelos que contienen las bases. La altura de un cilindro recto se puede también imaginar como la longitud del segmento más pequeño posible contenido en la superficie lateral y que une las dos bases.

¿Cómo podemos hallar el volumen de un sólido cilíndrico? En cierto sentido hay un método bastante fácil. Si el sólido es como una lata de conservas y puede contener agua (o arena) podemos llenarlo y luego vaciar su contenido en un depósito de tamaño normalizado. Sin embargo, queremos conocer una manera de llegar a la respuesta sin hacer esta operación cada vez. Para algunos cilindros, este método sería impracticable, muchas veces imposible.

Recuerda cómo hemos encontrado el volumen de una caja o de un prisma (recto). Primero hemos considerado una caja o prisma de una unidad de alto. El número de unidades cúbicas de esta caja o prisma sería el mismo que el número de unidades cuadradas de su base. Luego la medida del volumen era, claramente, la medida del área de la base por uno. Si la caja o prisma tenía una altura de dos unidades, entonces la medida del volumen era claramente el doble de la medida del área de la base. Es decir, sería 2 veces la medida del área de la base.





En general, si el área de la base fuera B unidades cuadradas y el alto de la caja o prisma fuera h unidades, entonces el volumen sería $B \cdot h$ unidades cúbicas.

Exactamente lo mismo ocurre con un sólido cilíndrico. La medida del volumen del cilindro es simplemente la medida del área de la base por la medida de la altura. El área de la base del cilindro es πr^2 unidades cuadradas. Entonces el volumen es $\pi r^2 \cdot h$ unidades cúbicas.

Tenemos ahora un principio básico que se aplica a las cajas, a los otros prismas y a los cilindros. La medida del volumen es la medida del área de la base por la medida de la altura. En términos matemáticos, se escribe esto frecuentemente así:

$$V = Bh$$

donde B representa la medida del área de la base y h representa la medida de la altura.

Debes aprender y recordar la manera de calcular el volumen de los sólidos cilíndricos. Para calcular el volumen de cualquier sólido de este tipo simplemente multiplicas la medida del área de la base por la medida de la altura. La altura es la distancia (perpendicular) entre los planos paralelos que contienen las bases. Si te imaginas la figura geométrica y lo que quieres determinar, entonces muchos problemas de este tipo son muy fáciles.

Por ejemplo, suponte que quieres calcular el volumen de un cilindro cuyo radio tiene una medida de 7 y cuyo alto (o altura) tiene una medida de 10.

$$V = Bh;\ \text{para un cilindro, } B = \pi r^2$$

Por consiguiente, $V = \pi r^2 h$

$$V = \frac{22}{7} \cdot 7 \cdot 7 \cdot 10$$

$$V = 1{,}540$$

El volumen del cilindro tiene unas 1,540 unidades cúbicas.

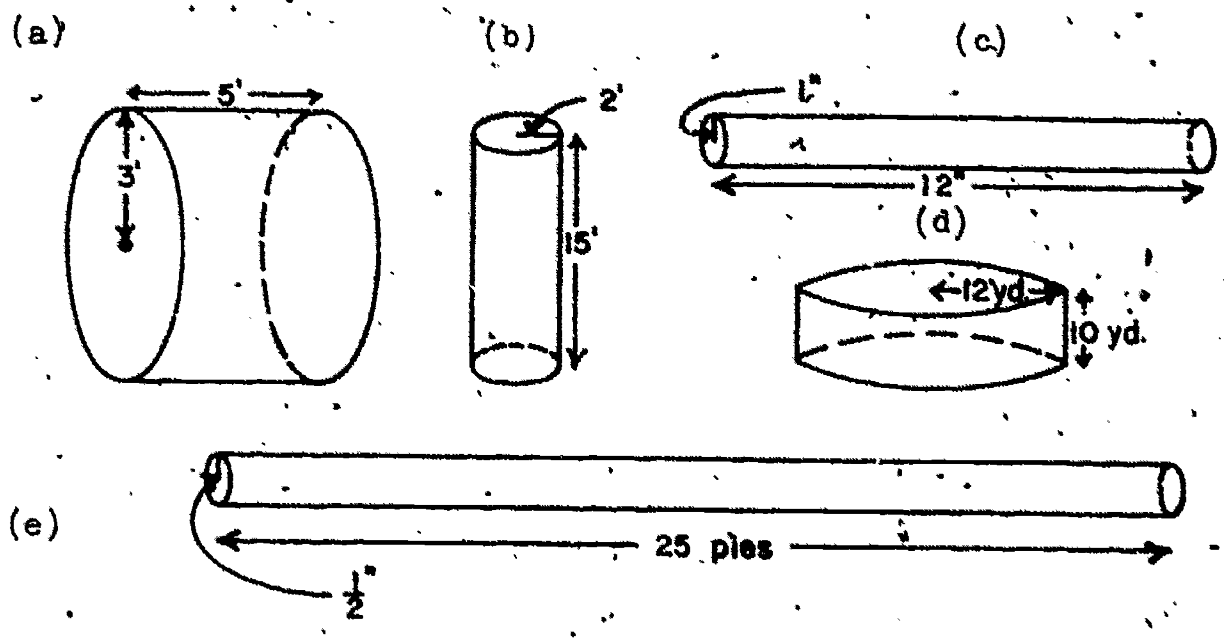
Nota sobre los cálculos. Algunas veces, cuando se hacen cálculos en los que interviene π, resulta más fácil usar su aproximación decimal solamente en las últimas partes del cálculo aritmético. De esta manera utilizamos lo menos posible los decimales con muchas cifras. Considera, por ejemplo, $\pi \cdot 5^2 \cdot 8$. Observamos que $5^2 = 25$ y que $25 \cdot 8 = 200$. Por consiguiente, $\pi \cdot 5^2 \cdot 8 = \pi \cdot 200 \approx (3.14) \cdot (200) = 628$. Este procedimiento es mucho más simple que multiplicar 3.14 por 25 y luego multiplicar el resultado por 8.

Ejercicios 11-8

1. En el siguiente cuadro se dan datos de cinco cilindros rectos. Las letras r y h son las medidas del radio de la base circular y de la altura del cilindro, respectivamente. Usando 3.1 como aproximación para π, halla los volúmenes de los cilindros.

	Cilindro	Radio (r)	Alto (h)	Volumen
(a)	A	4 plg.	8 plg.	?
(b)	B	8 pies	4 pies	?
(c)	C	10 cm.	30 cm.	?
(d)	D	7 yd.	25 yd.	?
(e)	E	12 plg.	12 plg.	?

2. Halla los volúmenes de los cilindros rectos que se muestran a continuación. Se dan las dimensiones para el radio y la altura de cada cilindro. Las figuras no están dibujadas a escala. Usa $\pi \approx 3.1$.



3. Un silo (con techo plano) tiene 30 pies de alto y su radio interior mide 6 pies. ¿Cuántos pies cúbicos de granos puede contener? (¿Cuál es su volumen?) Usa $\pi \approx 3.14$.
4. Un tanque cilíndrico para agua tiene 8 pies de alto. El diámetro (no el radio) de su base mide 1 pie. Halla el volumen (en pies cúbicos) de agua que puede contener. Deja expresada tu respuesta en términos de π. Si usas una aproximación para π, ¿cuál es tu respuesta con la aproximación de un pie cúbico?
5. En un pie cúbico de agua hay unos $7\frac{1}{2}$ galones. ¿Cuántos galones contendrá, aproximadamente, el tanque del problema 4?
6. Halla la cantidad de agua (volumen en pulgadas cúbicas) que puede contener un tubo de 400 <u>pies</u> de largo si el radio interior de su sección transversal es 1 pulgada. Toma $\pi \approx 3.14$. (Una sección transversal tiene la forma de la base. Una sección transversal es la intersección del sólido con un plano paralelo a los planos de las bases y colocado entre ellos.)

*7. Halla el volumen de un sólido cilíndrico cuya altura es 10 centímetros y cuyo radio de la base es 3 centímetros. Deja tu respuesta en términos de π.

*8. En el problema 7, ¿cuál sería el volumen si el alto se duplicara y la base permaneciera sin cambiar?

*9. En el problema 7, ¿cuál sería el volumen si el radio de la base se duplicara y la altura permaneciera sin cambiar?

*10. En el problema 7, ¿cuál sería el volumen si se duplicaran a la vez la altura y el radio de la base? (Imagina que primero se duplica la altura y luego se duplica el radio de la base de este nuevo cilindro.)

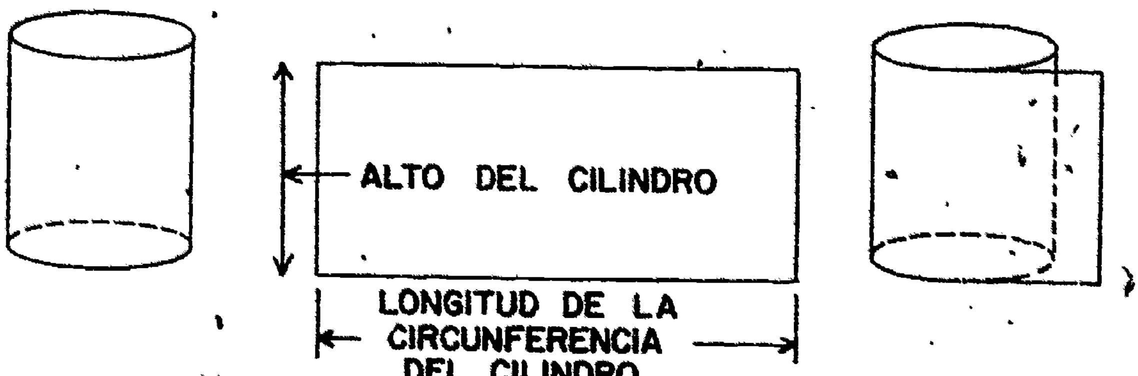
*11. En general, ¿cuál es el efecto sobre el volumen de un sólido cilíndrico cuando se duplica la altura? ¿Y cuando se duplica el radio de la base? ¿Y cuando se duplican ambos, el radio de la base y la altura?

12. PROBLEMA DIFÍCIL. ¿Cuál es la cantidad (volumen) de metal en un trozo de tubería de agua de 30" de largo si el diámetro interior de una sección transversal de la tubería es 2" y el diámetro exterior es 2.5". Usa $\pi \approx 3.1$.

11-9. Sólidos cilíndricos—Area total

En la sección anterior hemos considerado problemas sobre el volumen de un cilindro. Consideraremos ahora el área de su superficie. Hay dos preguntas que se pueden proponer: (1) ¿Cuál es el área de una superficie curva? (2) ¿Cuál es el área total? Es fácil ver la relación entre estas dos preguntas si nos imaginamos el sólido. El área total es el área de la superficie curva más el área de las bases superior e inferior. Pero el área de las dos bases es la misma. La medida de una de ellas es πr^2, donde r es la medida del radio de la base. Así, pues, si encontramos una manera de hallar el área de la superficie curva, podemos encontrar el área total.

La etiqueta de una lata de conservas cubre casi toda la superficie curva de la lata. Supondremos que esta etiqueta cubre completamente la superficie curva de la lata. Entonces, el área de la etiqueta es el área lateral del cilindro. ¿Cómo se fabrican las etiquetas? Se cortan y se imprimen en forma de regiones rectangulares. El alto de tal rectángulo es el alto del sólido cilíndrico. La longitud de la base es la circunferencia de la base circular del cilindro. (Cuando se fabrican, las etiquetas tienen esta longitud y un poquito más, para permitir la superposición de los bordes extremos.) El área lateral de un cilindro, entonces, no es otra cosa que el área de un rectángulo como se muestra a continuación.



Hemos observado que el área lateral de un cilindro es el área de cierto rectángulo. La altura del rectángulo y la altura del cilindro son iguales. La longitud de la base del rectángulo y la longitud de la circunferencia de la base del cilindro son iguales. Por consiguiente, la medida del área lateral del cilindro es el producto de la medida de la longitud de la circunferencia de la base y la medida de la altura. Entonces, la medida es

$$2\pi r \cdot h$$

Y la medida del área total es

$$2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$$

Hay ciertas superficies curvas, como la superficie de una bola, por ejemplo, que no pueden ser tratadas de una manera tan sencilla. Las superficies rectangulares y algunas otras superficies planas no pueden ser extendidas bien sobre ellas. Las áreas de tales superficies pueden ser tratadas de otras maneras. Felizmente los cilindros tienen superficies curvas "fáciles".

Con referencia a las medidas sobre los círculos, son muy importantes dos de las fórmulas presentadas en este capítulo. Esas fórmulas son:

1. $c = 2\pi r$ (ó $c = \pi d$)
2. $A = \pi r^2$

Las fórmulas para el volumen y el área de la superficie de un sólido cilíndrico utilizan esas dos fórmulas. Por consiguiente, no es esencial que memorices las fórmulas para el volumen y el área de la superficie, sí puedes recordar lo que ellas representan.

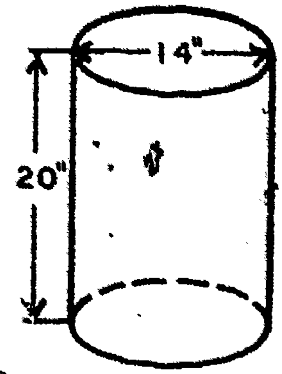
Debes entender y conocer el principio general básico para la obtención de los volúmenes de varios sólidos. Para sólidos que son prismas rectos y cilindros rectos, este principio nos dice que la medida del volumen es el producto de la medida del área de la base por la medida de la altura, o en símbolos matemáticos, $V = Bh$.

Finalmente, en varios problemas tales como el cálculo de áreas de las superficies, debes imaginarte los objetos geométricos y lo que ya conoces. Por ejemplo, para hallar el área lateral de un sólido cilíndrico, imagina cómo sería esta superficie lateral si fuera aplanada. Entonces el área lateral es el área de un rectángulo. Para obtener el área total, suma al área lateral el doble del área de la base. En símbolos matemáticos,

$$S_T = \pi dh + 2\pi r^2$$

donde S_T representa la medida del área total de un cilindro,
d representa la medida del diámetro de la base,
r representa la medida del radio de la base y
h representa la medida de la altura del cilindro.

Hallar el área total del cilindro que se muestra a la derecha: (Usa $\pi \approx 3\frac{1}{7}$.)



$S_T = \pi dh + 2\pi r^2$

$S_T = (\frac{22}{7} \cdot 14 \cdot 20) + (2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 7 \cdot 7)$

$S_T = 880 + 308$

$S_T = 1,188$

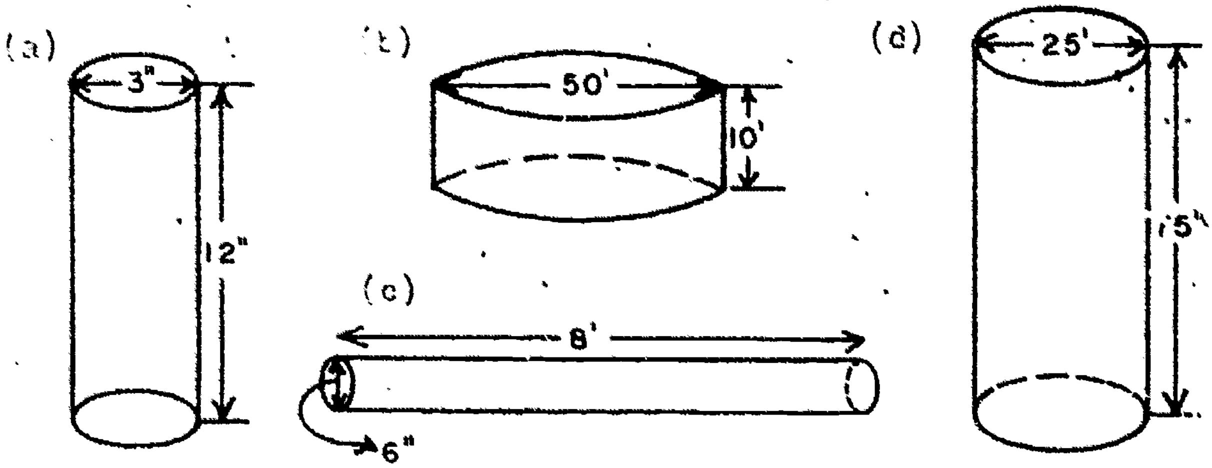
El área total es aproximadamente 1,188 pulgadas cuadradas.

Ejercicios 11-9

1. En la tabla se dan los datos de cinco cilindros. Tomando $\pi \approx 3.1$, halla los datos que faltan.

	Cilindro	Radio de la base	Diámetro de la base	Altura	Area total (A_t)
(a)	A	?	10 plg.	10 plg.	?
(b)	B	1 pie	?	3 pies	?
(c)	C	?	16 pies	17 pies	?
(d)	D	15 cm.	?	50 cm.	?
(e)	E	?	8 yd.	12 yd.	?

2. Halla el área total de cada uno de los cilindros diseñados en esta página. (Toma $\pi \approx 3.1$.)



3. PROYECTO PARA EJECUTAR EN CASA. Completa el siguiente proyecto fuera del aula.

(a) Toma una lata de conservas cualquiera. Mídela y ponle luego una etiqueta de manera que cubra su superficie curva sin superposiciones. Tu etiqueta tendrá la forma de un ________. Su alto será el ________ de la lata. La longitud de su base será la ________ de la lata. Trata de aplicar tu etiqueta a ver si coincide.

(b) Toma otra lata de conservas de diferente tamaño de la anterior. Haz una etiqueta sin efectuar ninguna medición. Determina el tamaño deseado de la etiqueta por comparación con la lata.

(c) Con una cinta de medir o una cuerda (que medirás después) calcula el área lateral de la lata de la parte (b), midiendo directamente la circunferencia de la base y la altura.

(d) Mide el diámetro (y luego calcula el radio) de la base de la lata de la parte (b). Utilizando estos datos y la altura, halla el área lateral de la lata. ¿Coincide tu respuesta con la que obtuviste en la parte (c)?

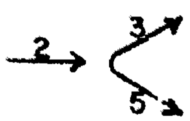
4. Halla el área lateral (en centímetros cuadrados) de un sólido cilíndrico cuyo alto es 8 centímetros y el radio de cuya base es $1\frac{1}{4}$ centímetros. Toma $\pi \approx 3.14$.
5. Halla el área total del cilindro del problema 4.
*6. ¿Cuántos metros cuadrados de lámina metálica necesitas para construir un tanque cilíndrico cerrado cuya altura es 1.2 metros y el radio de cuya base es 0.8 metros? ¿Cuántos metros cuadrados necesitarías si el tanque estuviera abierto en la parte superior?
*7. Una aldea tiene un gran tanque cilíndrico para agua, que necesita pintarse. Un galón de pintura cubre unos 400 pies cuadrados. ¿Qué cantidad de pintura se necesita para cubrir todo el tanque si el radio de la base es 8 pies y el alto del tanque es 20 pies? Da tu respuesta con la aproximación de un décimo de galón.

11-10. OPCIONAL: Repaso de los Capítulos 10 y 11

1. Frecuentemente el uso de diagramas ayuda mucho a poner de manifiesto ciertas relaciones. Por ejemplo,

puede representar $2 \cdot 3 = 6$

Mediante diagramas se pueden representar las relaciones referentes a sumas y productos.



puede representar

$$2(3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$$
$$= 6 + 10$$

Has estudiado maneras de calcular perímetros, áreas y volúmenes para cierto número de figuras geométricas y sus interiores, y has expresado estos métodos brevemente en proposiciones numéricas o fórmulas.

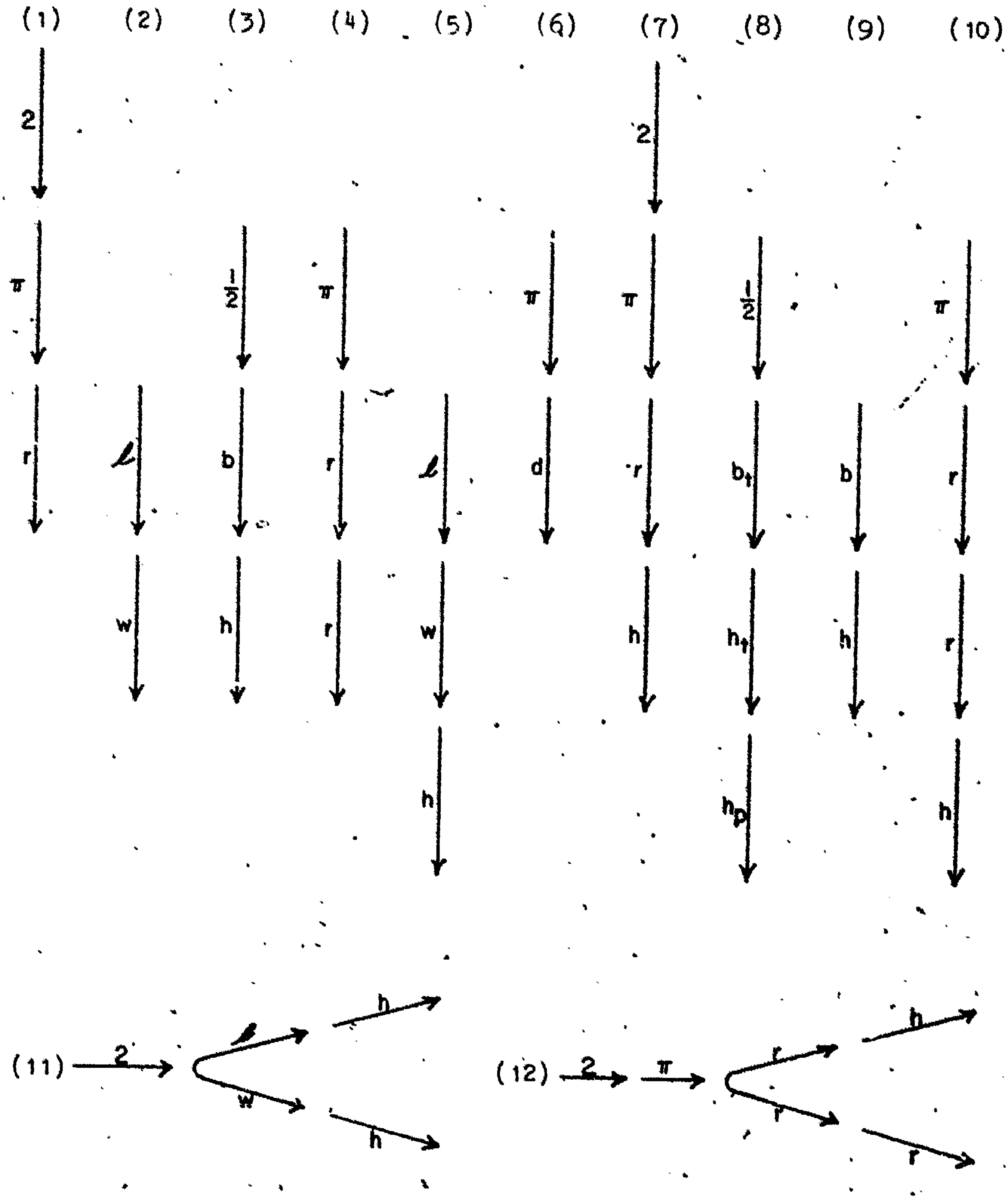
A continuación se dan doce diagramas de varias de estas fórmulas y una lista de las figuras geométricas a las cuales se aplican una (o más) de esas fórmulas. Copia cada diagrama en una hoja de papel y escribe al lado lo siguiente:

(a) El nombre de la figura (o figuras) a las cuales se aplica el diagrama. (Toma figuras de la lista indicada.)

(b) Lo que la fórmula dice acerca de la figura: área, perímetro, volumen, circunferencia y área lateral.

(c) La fórmula que representa el diagrama.

Lista de figuras: paralelogramo
prisma rectangular
circunferencia
triángulo
rectángulo
prisma triangular
cilindro


(1)
(2)
(3)
(4)
(5)
(6)
(7)
(8)
(9)
(10)
2
π
r
ℓ
w
1/2
b
h
π
r
r
ℓ
w
h
π
d
2
π
r
h
1/2
b_t
h_t
h_p
b
h
π
r
r
h
(11)
2
ℓ
w
h
h
(12)
2
π
r
r
h
r

2. (a) En tus copias de los diagramas, dibuja una circunferencia alrededor de cada numeral.

(b) Dibuja un cuadrado alrededor de cada símbolo para una medida que tienes que conocer para aplicar la fórmula a una figura particular.

(c) Aplica una regla horizontalmente a través de los diagramas (1) a (10) en tu texto, para separar los numerales de los símbolos para las medidas. ¿Por qué hay en algunos diagramas más flechas debajo de la regla que en otros?

(d) Cada una de las fórmulas indica la manera de encontrar la medida de una cantidad que tiene una dimensión, dos dimensiones o tres dimensiones. Coloca "1", "2" ó "3" al lado de cada diagrama para mostrar la dimensión de la especie de cantidad con que se relaciona.

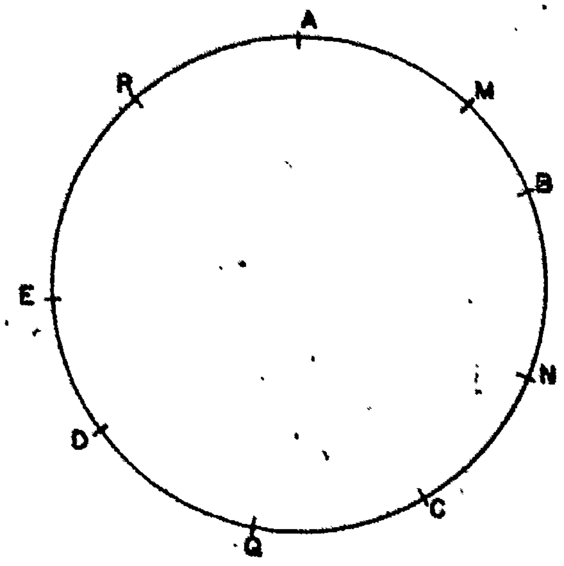
(e) ¿Ves alguna conexión entre tus respuestas a las preguntas 2(b) y 2(d)?

(f) Mira los diagramas de las fórmulas para hallar volúmenes. (Hay tres.). Pon una B en el extremo de una flecha, para separar la parte de la fórmula que da el área de la base del resto de la fórmula.

*(g) Construye fórmulas referentes a cuadrados y cubos. Haz diagramas para esas fórmulas, e indica lo que significa cada diagrama.

*(h) Dibuja los diagramas (11) y (12) de diferente manera. Escribe las fórmulas para tus nuevos diagramas.

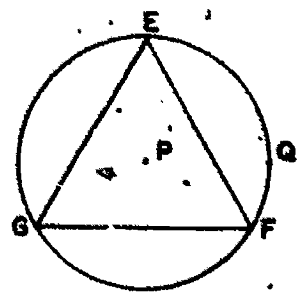
3.



En la figura anterior, determina con tu limbo graduado, la medida de los siguientes arcos. Indica tus resultados usando correctamente los símbolos.

(a) $\overset{\frown}{AMB}$ (d) $\overset{\frown}{CDE}$
(b) $\overset{\frown}{ABC}$ (e) $\overset{\frown}{RAM}$
(c) $\overset{\frown}{CQD}$

4. La longitud de cada lado del triángulo EFG es 34.6 metros. La distancia entre E y el centro P de la circunferencia es 20.0 metros. La medida de la altura del triángulo EFG de E al lado $\overline{FG}$ es 30.0 metros.



(a) ¿Cuál es el área del triángulo EFG?
(b) ¿Cuál es el área del círculo? (Utiliza 3.142 como aproximación para π, y redondea tus respuestas con la aproximación de un metro cuadrado.)

(c) Dibuja en tu papel un croquis de la figura y sombrea la intersección del interior de la circunferencia y el exterior del triángulo EFG.

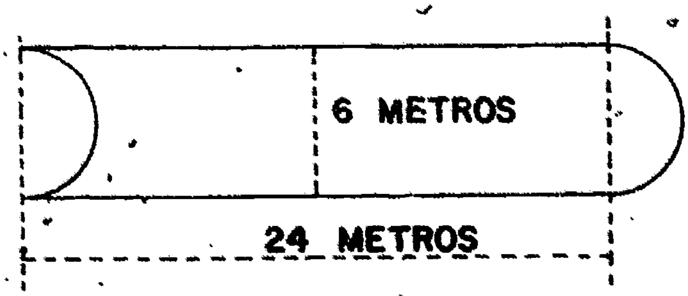
(d) ¿Cuál es el área de esta intersección?

(e) El semiplano de EF en que está el punto Q se interseca con el interior de la circunferencia. ¿Cuál es el área de esta intersección?

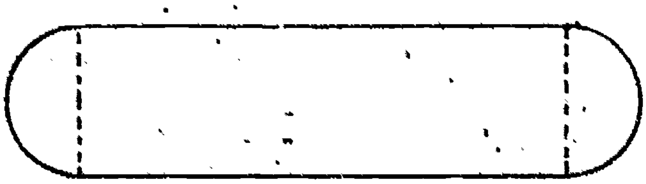
5. A continuación se muestran cuatro figuras que representan curvas simples cerradas. Cada curva es la reunión de varios segmentos y de uno o dos arcos de circunferencia. Cada arco es, o bien una semicircunferencia o mide 90 grados. Los segmentos punteados no forman parte de las curvas simples cerradas, pero son útiles para indicar longitudes. Para cada curva, halla su longitud total y el área de su región cerrada.

(a)

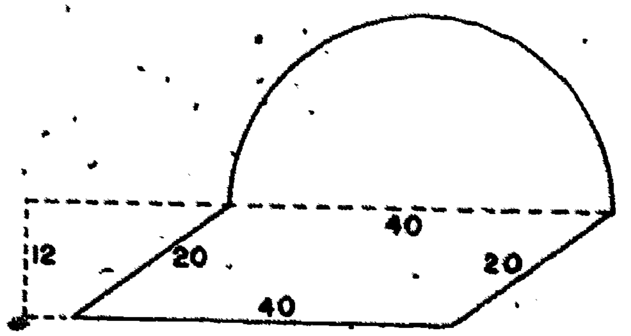
(Usa $\pi \approx 3.$)



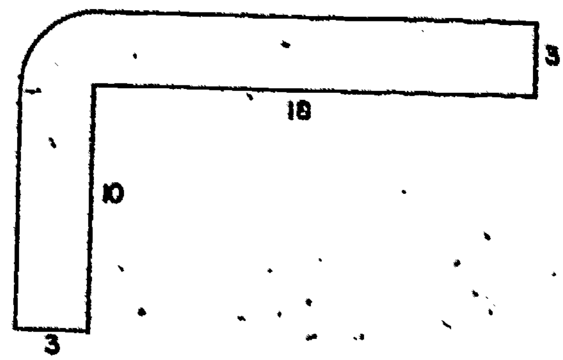
(b) Cada segmento tiene 31.4 centímetros de longitud. La distancia entre los segmentos paralelos es 17.9 centímetros. (Toma $\pi \approx 3.14$, y redondea las respuestas finales con la aproximación de un centímetro o de un centímetro cuadrado.)



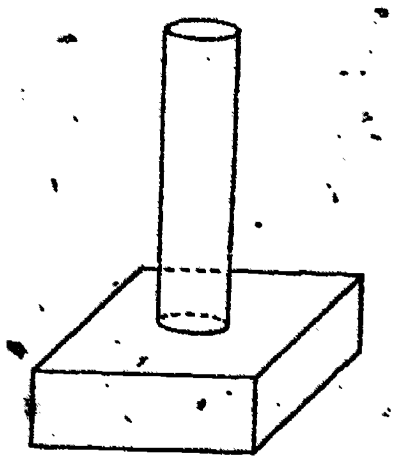
(c) La unidad de medida es el pie. (Deja tus respuestas en términos de π.)



*(d) La unidad de medida es el milímetro. (Deja tus respuestas en términos de π.)



6. Halla el volumen de un monumento construido de la siguiente manera: la base es un bloque rectangular de mármol de dimensiones 4' por 6' por 2' de alto. Sobre el centro del bloque hay un sólido cilíndrico de 8' de alto, siendo el radio de su circunferencia de base 1'. Toma $\pi \approx 3.1$.

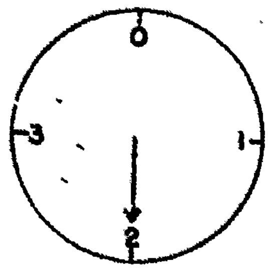


*7. Halla el área total de la superficie libre del monumento del problema anterior. La parte inferior de la base <u>no</u> se considera como superficie libre.

Capítulo 12

SISTEMAS MATEMATICOS

12-1. Una nueva clase de adición



La figura anterior representa el disco de un reloj de cuatro minutos. El cero es el punto de partida y también el punto de llegada de una rotación de la aguja.

Con este modelo podríamos partir de 0 y movernos hasta una cierta posición (numeral) y luego movernos hasta otra posición de la misma manera como se mueve la aguja del reloj. Por ejemplo, podríamos partir de 0 y movernos $\frac{2}{4}$ de la distancia en torno del disco. Nos detendríamos en 2. Si a continuación efectuamos una rotación de $\frac{1}{4}$ de vuelta (moviéndonos como la aguja del reloj), nos detendríamos en 3. Después de una rotación de $\frac{2}{4}$ a partir de 0 podríamos seguir con una rotación de $\frac{3}{4}$, lo que nos llevaría a 1. El primer ejemplo podría formularse así: 2 + 1 da 3, donde el 2 indica $\frac{2}{4}$ de la rotación a partir de 0, el signo " + " significa que hay que seguir esa rotación con otra rotación (como la aguja del reloj), y el 1 significa una rotación de $\frac{1}{4}$; entonces llegamos a la posición marcada 3 (ó $\frac{3}{4}$ de rotación a partir de 0). El segundo ejemplo sería 2 + 3 da 1 donde el 2 y el signo + significan lo mismo que en el primero, y el 3 significa una rotación de $\frac{3}{4}$. Una manera fácil de escribir esto es:

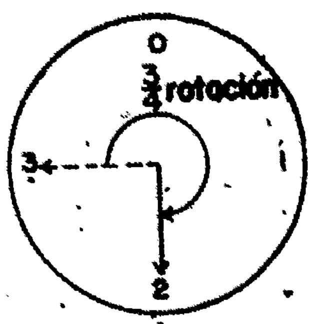
$$2 + 3 \equiv 1 \pmod 4$$

que se lee:

Dos más tres es equivalente a uno (mod 4) o también dos más tres es congruente con uno (mod 4).

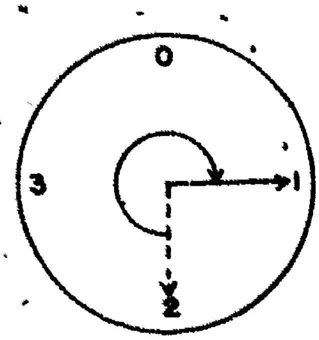
El (mod 4) significa que hay cuatro numerales: 0, 1, 2 y 3 en el disco del reloj. El signo + significa lo que describimos antes como nuestro nuevo tipo de adición. El " ≡ " entre $2 + 3$ y el 1 indican que $2 + 3$ y 1 son lo mismo (esto es, "equivalentes") <u>en este reloj</u>. Abreviando, la llamamos "adición (mod 4)". Por supuesto se podrían haber utilizado otras notaciones, pero ésta es la más común. La expresión "(mod 4)" deriva de que algunas veces 4 se llama "el módulo" que indica cuántas etapas hay que pasar antes de repetir el modelo.

<u>Ejemplo 1.</u> Halla $3 + 3$ (mod 4).

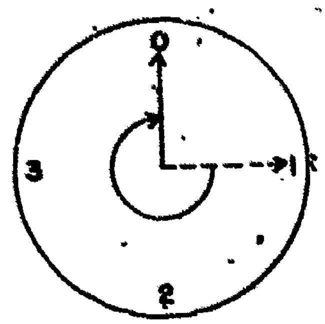


$3 + 3 \equiv 2 \pmod 4$

<u>Ejemplo 2.</u> Halla $(2 + 3) + 3$ (mod 4).



$2 + 3 \equiv 1 \pmod 4$



$1 + 3 \equiv 0 \pmod 4$

$(2 + 3) + 3 \equiv 1 + 3 \equiv 0 \pmod 4$

La siguiente tabla ilustra algo de lo que pasa con la adición en el sistema (mod 4).

(Mod 4)

+	0	1	2	3
0	0	1	2	
1			3	0
2				1
3		0		

Leemos una de estas tablas siguiendo la horizontal que comienza en una entrada de la columna de la izquierda, por ejemplo 2, hasta cierto lugar debajo de alguna entrada de la fila superior, tal como 3 (observa las flechas). El número correspondiente a esta posición en la tabla se toma como resultado de combinar el elemento de la columna de la izquierda con el elemento de la fila superior (en este orden). En el caso anterior escribimos $2 + 3 \equiv 1 \pmod 4$. Emplea la tabla para comprobar que $3 + 1 \equiv 0 \pmod 4$.

<u>Ejemplo</u> 3. Completa las siguientes proposiciones numéricas para convertirlas en enunciados verdaderos.

(a) $3 + 4 \equiv ? \pmod 5$

Si se representara el sistema (mod 5) por el disco de un reloj, éste tendría marcadas cinco posiciones; es decir, 0, 1, 2, 3 y 4. Si dibujas este reloj verás que $3 + 4 \equiv 2 \pmod 5$ puesto que 3 significa una rotación de $\frac{3}{5}$ a partir de 0. A ésta sigue una rotación de $\frac{4}{5}$ que termina en 2.

(b) $2 + 3 \equiv ? \pmod 5$

$2 + 3 \equiv 0 \pmod 5$. Esta es una rotación de $\frac{2}{5}$ a partir de 0 seguida de una rotación de $\frac{3}{5}$ que conduce a 0.

(c) $4 + 3 \equiv ? \pmod 6$

En el sistema (mod 6) las posiciones en el disco del reloj están marcadas 0, 1, 2, 3, 4 y 5. Si dibujas este reloj verás que $4 + 3 \equiv \pmod 6$.

Ejercicios 12-1

1. Copia y completa la tabla de sumar (mod 4). Empléala para completar las siguientes proposiciones numéricas:
   (a) $1 + 3 \equiv ?$ (mod 4) (c) $2 + 2 \equiv ?$ (mod 4)
   (b) $3 + 3 \equiv ?$ (mod 4) (d) $2 + 3 \equiv ?$ (mod 4)
2. Construye una tabla de sumar (mod 3) y una tabla de sumar (mod 5).
3. Usa las tablas del problema 2 para calcular lo siguiente:
   (a) $1 + 2 \equiv ?$ (mod 3) (c) $2 + 2 \equiv ?$ (mod 3)
   (b) $3 + 3 \equiv ?$ (mod 5) (d) $4 + 3 \equiv ?$ (mod 5)
4. Construye tantas tablas como necesites para completar las siguientes proposiciones numéricas:
   (a) $5 + 3 \equiv ?$ (mod 6) (c) $3 + 6 \equiv ?$ (mod 7)
   (b) $5 + 5 \equiv ?$ (mod 6) (d) $4 + 5 \equiv ?$ (mod 7)

   Nota: Conserva todas las tablas que has construido, pues las usaremos más adelante en este capítulo.
5. Sustituye x de manera que las siguientes proposiciones numéricas se conviertan en enunciados verdaderos:
   (a) $4 + x \equiv 0$ (mod 5) (e) $3 + x \equiv 2$ (mod 5)
   (b) $x + 1 \equiv 2$ (mod 3) (f) $x + 4 \equiv 3$ (mod 5)
   (c) $1 + x \equiv 2$ (mod 3) (g) $x + 2 \equiv 0$ (mod 3)
   (d) $2 + x \equiv 4$ (mod 5) (h) $4 + x \equiv 4$ (mod 5)
6. Tienes un reloj de cinco minutos. ¿Cuántas revoluciones completas efectuaría la aguja para indicar que han pasado 23 minutos? ¿Cuál sería la posición de la aguja al final de los 23 minutos? (Suponte que la aguja parte de la posición 0.)
7. ¿Qué hora es siete horas después de las ocho? ¿Qué nueva clase de adición usarías aquí?
8. ¿Qué fecha es nueve días después del 27 de marzo? ¿Qué nueva clase de adición usarías aquí?

12-2. Una nueva clase de multiplicación

Antes de considerar una nueva multiplicación, veamos una parte de la tabla de multiplicar para los números cardinales. Hela aquí:

x	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	8	10	12
3	0	3	6	9	12	15	18
4	0	4	8	12	16	20	24
→ 5	0	5	10	15	20	25	30
6	0	6	12	18	24	30	36

Si, teniendo esta tabla, hubiéramos olvidado cuánto es 5 por 6, podríamos tomar la fila marcada con 5 y la columna marcada con 6 para hallar la respuesta, 30, en la fila 5 y en la columna 6 (indicadas con flechas). Es fácil memorizar la tabla, puesto que la usamos con frecuencia; pero si no la hubiéramos memorizado, sería muy conveniente llevar una en el bolsillo.

¿Cómo podrías construir esta tabla si no la conocieras ya? Esto sería muy fácil puesto que sabes sumar. La primera línea es sumamente fácil: escribes una fila de ceros. Para hacer la segunda línea sólo necesitas saber contar; para la tercera, sumas 2 cada vez; para la cuarta, sumas 3 cada vez, y así sucesivamente.

Ahora, si usamos el mismo método, podemos obtener una tabla de multiplicación (mod 4). Primero llenemos las filas primera y segunda y las columnas primera y segunda:

(Mod 4)

x	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
→ 2	0	2		
3	0	3		

Tenemos ahora exactamente cuatro espacios en blanco por llenar. Para obtener la segunda fila (indicada con la flecha), sumamos el número dos en cada caso. Por tanto, la tercera cifra (que es 2×2) es $2 + 2 \equiv 0 \pmod 4$. Entonces nuestros tres primeros lugares serán así:

2	0	2	0

Para obtener la cifra del cuatro lugar, sumamos 2 a la del tercero. Como $0 + 2 \equiv 2 \pmod 4$, la segunda fila completa es entonces:

2	0	2	0	2

Para la última fila tenemos que sumar tres en cada caso. En este caso $3 + 3 \equiv 2 \pmod 4$, y $3 + 2 \equiv 1 \pmod 4$. Entonces, la tabla completa es:

x	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Veamos ahora una manera de usar esta tabla. Suponte que una lámpara tiene un interruptor con cuatro posiciones marcadas: abierto, bajo, medio y alto. Podríamos adjudicar números a estas posiciones, de la siguiente manera:

abierto	bajo	medio	alto
0	1	2	3

Si la luz estuviera en la posición medio y giráramos el interruptor tres posiciones, la luz llegaría a la posición bajo, pues $2 + 3 \equiv 1 \pmod 4$. Suponte que la luz estuviera en la posición "abierto" y tres personas giraran el interruptor tres posiciones cada una; ¿cuál sería la posición final del interruptor? La respuesta sería "bajo", pues $3 \cdot 3 \equiv 1 \pmod 4$ y el número 1 corresponde a "bajo".

Consideremos ahora una aplicación de otra tabla de multiplicar. La familia Pérez gasta un tarro de jugo en tres días. Un sábado, la señora Pérez compra seis tarros, y la familia comienza a consumirlos al siguiente día. ¿Qué día de la semana deberá ella comprar más jugo? Naturalmente, sería posible contar con los dedos y decir: 3 días después del sábado es martes, 3 días después del martes es viernes, etc. Pero es mucho más fácil observar que, puesto que hay siete días en la semana, esto está relacionado con la multiplicación (mod 7). Podríamos asignar el número 0 al sábado, pues es el día en que comenzamos:

sábado	domingo	lunes	martes	miércoles	jueves	viernes
0	1	2	3	4	5	6

Ahora necesitamos hallar cuánto es $6 \cdot 3 \pmod 7$. No necesitamos tener la tabla de multiplicación completa, pues tratamos de encontrar un múltiplo de 6. Nos basta, pues, calcular la fila 6 de la manera habitual, sumando el número seis repetidas veces, para lo cual usamos la tabla de sumar (mod 7) que hemos construido en el problema 4 del anterior conjunto de ejercicios.

(Mod 7)

x	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
.	.	.	.	.	.	.	.
6	0	6	5	4	3	2	1

Esto significa que $6 \cdot 3 \equiv 4 \pmod 7$ y como al miércoles pertenece el 4, se sigue que la señora Pérez necesita hacer la siguiente compra un miércoles. En realidad no necesitamos construir la sexta fila completa.

Ejercicios 12-2

1. (a) Construye una tabla de multiplicar (mod 5).
   (b) Construye una tabla de multiplicar (mod 7).
   (c) Construye una tabla de multiplicar (mod 6).
   Nota: Conserva estas tablas para usarlas después.
2. Completa las siguientes proposiciones numéricas para convertirlas en enunciados verdaderos. Puedes utilizar las tablas que has construido en el problema 1.
   (a) $3 \times 2 \equiv ? \pmod 5$ (d) $1 + (3 \times 4) \equiv ? \pmod 6$
   (b) $3 \times 4 \equiv ? \pmod 6$ (e) $5 + (6 \times 5) \equiv ? \pmod 7$
   (c) $6 \times 4 \equiv ? \pmod 7$
3. Sustituye x de manera que cada una de las proposiciones numéricas se convierta en un enunciado verdadero. (Dibuja los relojes que necesites.)
   (a) $5 \cdot 10 \equiv x \pmod{11}$ (c) $(3 \cdot 4) + 2 \equiv x \pmod 8$
   (b) $7 \cdot 13 \equiv x \pmod{15}$ (d) $(4 \cdot 7) + 11 \equiv x \pmod{13}$
4. (a) Halla la fecha que corresponde a 10 semanas después del cuatro de diciembre.
   (b) En 1957, el seis de agosto fue martes. ¿Qué día de la semana fue el seis de agosto en 1959?

5. Construye una tabla de restos de la división por 5, en la que la cifra de la intersección de una columna y de una fila sea el resto de la división por 5 del producto. Por ejemplo, puesto que el resto es 1 cuando 2 · 3 se divide por 5, tendremos un 1 en la intersección de la segunda fila y la tercera columna. (V. las flechas.) Hemos llenado algunos lugares de la tabla para mostrar cómo se construye. Por ejemplo, para obtener la intersección de la segunda fila y la cuarta columna, multiplicamos 2 por 4 y obtenemos 8; puesto que el resto de dividir 8 por 5 es 3, ponemos 3 en la intersección de la segunda fila y la cuarta columna. Completa la tabla:

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2		1	3
3	0	3		4	
4	0	4	3		

6. ¿Observas alguna relación entre la tabla del problema 5 y otra tabla que ya has construido? ¿Puedes dar alguna razón para esto? ¿Cómo se puede utilizar esto para hacer más sencilla la solución de algunos problemas?

*7. Emplea la tabla de multiplicar (mod 5) para sustituir x de manera que se convierta en un enunciado verdadero cada una de las siguientes proposiciones numéricas:

(a) $3x \equiv 1 \pmod 5$ (d) $3x \equiv 4 \pmod 5$

(b) $3x \equiv 2 \pmod 5$ (e) $3x \equiv 0 \pmod 5$

(c) $3x \equiv 3 \pmod 5$

*8. Si se hubiera empleado (mod 6) en vez de (mod 5) en el problema anterior, ¿podrías encontrar x en cada caso? Si no es así, ¿qué equivalencias darían algún valor de x?

12-3. ¿Qué es una operación?

Estamos familiarizados con las operaciones de la aritmética ordinaria: adición, multiplicación, sustracción y división de números. En la Sección 12-1 se han estudiado operaciones diferentes. Hemos construido una tabla para un nuevo tipo de adición de los números 0, 1, 2 y 3. Esta operación está completamente descrita por la tabla que has construido en el problema 1 de los Ejercicios 12-1. Es decir, la operación se puede aplicar solamente a los números dados, y los resultados de operar sobre todos los pares de esos números están indicados en la tabla. La tabla indica entre qué números se puede efectuar la operación. Por ejemplo, nos dice que no se puede combinar el número 5 con ningún otro en este nuevo tipo de adición, pues "5" no aparece ni en la columna de la izquierda ni en la fila superior. La tabla nos dice también que $2 + 3 \equiv 1 \pmod 4$. Estudia las siguientes tablas:

(a)

+	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	1
2	3	4	5	1	2
3	4	5	1	2	3
4	5	1	2	3	4
5	1	2	3	4	5

(b)

+	3	5	7	9
3	6	8	10	12
5	8	10	12	14
7	10	12	14	16
9	12	14	16	18

(c)

□	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	2	3	4	5
2	4	5	6	7
3	6	7	8	9

(d)

⊙	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

(e)

Δ	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

Las únicas operaciones a las que nos hemos referido anteriormente se llamaban multiplicación o adición. Ahora, en (c), (d) y (e) tenemos operaciones diferentes y debemos utilizar diferentes símbolos: □ , ⊙ y Δ.

En cada una de estas tablas podemos encontrar cierto conjunto (el conjunto de elementos de la columna de la izquierda y la fila superior) y podemos operar con sus elementos para obtener una única respuesta. Por ejemplo, en la tabla (a) el conjunto es {1, 2, 3, 4, 5}, puesto que son los números que aparecen en la columna de la izquierda y la fila superior. Estos son los únicos números con los cuales se puede operar en la tabla (a). En la tabla (b), el conjunto es {3, 5, 7, 9}. ¿Qué conjunto se da en la tabla (c)? ¿Y en la tabla (d)? ¿Y en la tabla (e)?

He aquí algunos ejemplos tomados de las tablas:

$3 + 5 = 3$ en la tabla (a),

$3 + 5 = 8$ en la tabla (b),

$2 \square 1 = 5$ y $2 \square 2 = 6$ en la tabla (c). Lee "2 cuadrado 1 es igual a 5".

$1 \odot 1 = 3$ en la tabla (d). Lee "1 círculo-punto 1 es igual a 3".

$5 \Delta 2 = 3$ en la tabla (e). Lee "5 triángulo 2 es igual a 3".

En cada uno de los casos tenemos un conjunto de elementos: en (a) el conjunto es {1, 2, 3, 4, 5}; en (d) es {1, 2, 3}. Tenemos también una operación: en (a) +; en (d) ⊕. Finalmente tenemos el resultado de combinar dos elementos cualesquiera por medio de la operación; en (a) los resultados son 1, 2, 3, 4 ó 5; en (c) son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ó 9. Todas estas operaciones se llaman <u>operaciones binarias</u>, pues se aplican a dos elementos para obtener un tercero. Hasta ahora los elementos han sido números, pero se verá más tarde que esto no es necesario.

Los dos elementos que combinamos pueden ser el mismo y el resultado de la operación puede ser o no un elemento del conjunto, pero debe estar unívocamente definido—es decir, la operación no puede dar varios resultados.

Ya estás familiarizado con algunas operaciones definidas sobre el conjunto de los números cardinales.

Dos números cardinales cualesquiera pueden sumarse. La suma de 8 y 2 da 10.

Dos números cardinales cualesquiera pueden multiplicarse. El producto de 8 por 2 es 16.

La adición y la multiplicación son dos operaciones diferentes definidas sobre el conjunto de los números cardinales.

Para estudiar la sustracción, por ejemplo entre números cardinales, es conveniente adelantarse y consultar el trabajo del octavo grado. La expresión "6 - 9" no es el nombre de nada que hayas estudiado en este curso. Es decir, no te es posible combinar 6 y 9 (en este orden) por sustracción y obtener "una cosa definida"; por tanto, puedes llegar a dudar de que la sustracción sea una operación. El próximo año aprenderás que hay "una cosa definida" (en efecto, un número) que se llama "6 - 9". Teniendo esto presente, consideraremos la sustracción como una operación binaria definida sobre el conjunto de los números cardinales (o números racionales, etc.), aun cuando no estamos familiarizados con todos los resultados que se obtienen por sustracción.

Cuando una operación se describe mediante una tabla, los elementos del conjunto se escriben en el mismo orden en la fila superior (de izquierda a derecha) y en la columna de la izquierda (de arriba abajo). La conservación del mismo orden nos facilitará el trabajo posterior.

Debemos también ser muy cuidadosos con el orden en que se combinan dos elementos. Por ejemplo,

$$2 \square 1 = 5, \text{ pero } 1 \square 2 = 4.$$

Por esta razón, debemos recordar que cuando se explicó el procedimiento para leer una tabla, se convino en escribir primero el elemento de la columna de la izquierda y después el elemento de la fila superior con el símbolo de la operación entre ambos. Debemos examinar toda nueva operación para ver si es conmutativa y asociativa. Haremos ahora una breve revisión de estas propiedades, que se han estudiado en los capítulos anteriores.

Una operación $+$ definida sobre un conjunto se llama <u>conmutativa</u> si, para dos elementos cualesquiera a, b del conjunto, $a + b = b + a$.

Una operación $+$ definida sobre un conjunto se llama <u>asociativa</u> si cualesquiera elementos a, b, c del conjunto, se pueden combinar en la forma $(a + b) + c$, y también en la forma $a + (b + c)$, y los dos resultados son iguales: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

<u>Ejercicios 12-3</u>

1. Usa las tablas de las páginas 536 y 537 para responder a las siguientes preguntas:
   (a) $3 + 3 = ?$ si usamos la tabla (a).
   (b) $3 + 3 = ?$ si usamos la tabla (b).
   (c) $3 \square 2 = ?$
   (d) $2 \square 3 = ?$
   (e) $2 \odot 2 = ?$
   (f) $1 \odot 1 = ?$

(g) $(2 \odot 3) \odot 3 = ?$
(h) $2 \odot (3 \odot 3) = ?$
(i) $(1 \square 1) \square 2 = ?$
(j) $1 \square (1 \square 2) = ?$
(k) $2 \triangle (3 \triangle 4) = ?$
(l) $(2 \triangle 3) \triangle 4 = ?$

2. (a) ¿Cuáles de las operaciones binarias descritas en las tablas de esta sección son conmutativas?
   (b) ¿Hay alguna manera fácil de saber si una operación es conmutativa cuando se examina la tabla de esa operación? ¿Cuál es esa manera?

3. ¿Cómo puedes saber si una operación es asociativa examinando la tabla de esa operación? ¿Te parece que las operaciones descritas en las tablas de esta sección son asociativas?

4. ¿Son conmutativas las siguientes operaciones binarias? Construye por lo menos una tabla parcial para cada operación. ¿Cuáles te parece que son asociativas?
   (a) Conjunto: Todos los números naturales entre 25 y 75.
       Operación: Elección del menor número.
       Ejemplo. 28 combinado con 36 da 28.
   (b) Conjunto: Todos los números naturales entre 500 y 536.
       Operación: Elección del número mayor.
       Ejemplo. 520 combinado con 509 da 520.
   (c) Conjunto: Los números primos.
       Operación: Elección del número mayor.
   (d) Conjunto: Todos los números pares entre 39 y 61.
       Operación: Elección del primer número.
       Ejemplo. 52 combinado con 46 da 52.
       46 combinado con 52 da 46.
   *(e) Conjunto: Todos los números naturales menores que 50.
       Operación: Multiplicar el primero por 2 y luego sumarle el segundo.
       Ejemplo. 3 combinado con 5 da 11, puesto que $2 \cdot 3 + 5 = 11$.

(f) Conjunto: Todos los números naturales.
Operación: Hallar el máximo común divisor.
Ejemplo. 12 combinado con 18 da 6.

(g) Conjunto: Todos los números naturales.
Operación: Hallar el mínimo común múltiplo.
Ejemplo. 12 combinado con 18 da 36.

(h) Conjunto: Todos los números naturales.
Operación: Elevar el primer número a una potencia cuyo exponente es el segundo número.
Ejemplo. 5 combinado con 3 da 5^3.

5. Construye una tabla para una operación que tenga la propiedad conmutativa.
6. Construye una tabla para una operación que no tenga la propiedad conmutativa.

Hemos estudiado operaciones binarias. La palabra "binaria" indica que cada vez se combinan dos elementos para obtener el resultado. Hay otras clases de operaciones. Se puede obtener un resultado a partir de un único elemento o combinando tres o más elementos. Si tenemos un conjunto y de uno cualquiera de sus elementos podemos determinar una cosa definida, decimos que hay una "operación unitaria" definida sobre el conjunto. Si combinamos tres elementos para obtener un cuarto elemento podemos llamarla "operación ternaria". Un caso de operación ternaria sería el cálculo del máximo común divisor de tres números naturales; por ejemplo, el máximo común divisor de 6, 8 y 10 es 2.

*7. Usando alguna clase de tabla, trata de hallar una manera de describir las siguientes operaciones unitarias:
Conjunto: Todos los números cardinales de 0 a 10.
Operación unitaria: Elevar un número al cubo.
Ejemplo. Aplicando la operación a 5 se obtiene $5^3 = 125$.

12-4. Clausura

(a)

+	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	1
2	3	4	5	1	2
3	4	5	1	2	3
4	5	1	2	3	4
5	1	2	3	4	5

(b)

+	3	5	7	9
3	6	8	10	12
5	8	10	12	14
7	10	12	14	16
9	12	14	16	18

(c)

□	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	2	3	4	5
2	4	5	6	7
3	6	7	8	9

(d)

⊙	1	2	3
1	3	1	2
2	1	2	3
3	2	3	1

Estudia las tablas (a) y (b). En la tabla (a) los resultados de efectuar las operaciones son los mismos números que fueron combinados por la operación (1, 2, 3, 4, 5 nuevamente). Pero en la tabla (b) los resultados de efectuar las operaciones son números distintos de los que se combinaron (6, 8, 10, etc. en lugar de 3, 5, 7, 9). Ya hemos visto esa clase de diferencia, y tenemos un nombre para ella. Hemos dicho que el conjunto de los números cardinales es "cerrado respecto de la adición" porque si dos números cardinales cualesquiera se combinan por adición, el resultado es un número cardinal. De la misma manera {1, 2, 3, 4, 5} en la tabla (a) es un conjunto cerrado respecto de ese nuevo tipo de adición, puesto que los resultados de la operación son elementos del mismo conjunto.

Sin embargo, el conjunto de los números impares no es cerrado respecto de la adición porque el resultado de sumar dos números impares no es un número impar. De la misma manera, en la tabla (b) el conjunto {3, 5, 7, 9} no es cerrado respecto de la operación de adición allí indicada, puerto que el resultado no es un elemento del conjunto, {3, 5, 7, 9}.

Ejemplo 1. El conjunto de números cardinales $\{1, 2, 3, 4\}$ no es cerrado respecto de la multiplicación porque $2 \cdot 3 = 6$ no es un elemento del conjunto. Naturalmente, $1 \cdot 2 = 2$ está en el conjunto; pero, para que un conjunto sea cerrado, el resultado debe estar en el conjunto cualesquiera que sean los números del conjunto que se combinen.

Ejemplo 2. El conjunto de todos los números cardinales es cerrado respecto de la multiplicación porque el producto de dos números cardinales cualesquiera es nuevamente un número cardinal.

Ejemplo 3. El conjunto de los números cardinales no es cerrado respecto de la sustracción. Por ejemplo, considera los dos números cardinales 6 y 9. Hay dos maneras diferentes de disponer estos dos números para restar uno de otro: $9 - 6$ y $6 - 9$. El primer numeral, "9 - 6" es el nombre del número cardinal 3, pero el numeral "6 - 9" no es nombre de ningún número cardinal. Entonces, la sustracción de dos números cardinales no siempre da un número cardinal.

Ejemplo 4. El conjunto de los números naturales no es cerrado respecto de la división. Es cierto que $\frac{8}{2} = 8 \div 2$ es un número natural, pero no hay ningún número natural $\frac{9}{2}$. ¿Puedes dar algunos otros ejemplos de clausura, es decir, de conjuntos cerrados respecto de una operación, y de conjuntos no cerrados respecto de una operación?

Ejemplo 5. ¿Qué podemos decir de un conjunto S de números naturales cerrado respecto de la adición y que contiene el número 3? ¿Qué otros números debe contener? Puesto que 3 está en S, $3 + 3$, ó 6, debe estar también en S. Puesto que $(3 + 3)$ y 3 son miembros de S, $(3 + 3) + 3 = 6 + 3 = 9$ debe estar en S. Como $(3 + 3 + 3)$ y 3 están en S, $(3 + 3 + 3) + 3 = 9 + 3 = 12$ debe estar también en S. Podemos continuar agregando 3 a los números que resultan para mostrar que $3k$ debe estar en S para todo número natural k. Entonces S debe contener a todos los múltiplos de 3. ¿Cuál es el mínimo conjunto S de números naturales que contiene a 3 y es cerrado respecto de la adición? Como hemos visto, S debe contener a todos los múltiplos de 3.

¿Qué pasa si S contiene <u>solamente</u> estos números:

$$S = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}?$$

¿Es S cerrado respecto de la adición? ¿Es la suma de dos múltiplos cualesquiera de 3 un múltiplo de 3? Si k y m son números naturales, ¿es $3k + 3m$ un múltiplo de 3? La respuesta es sí, naturalmente, pues, por la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición, se tiene que

$$3k + 3m = 3(k + m)$$

Entonces, $S = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}$ es cerrado respecto de la adición, y es el <u>mínimo</u> conjunto cerrado respecto de la adición que contiene a 3. Decimos que S es el conjunto <u>engendrado</u> por 3 mediante la adición.

<u>Ejemplo 6</u>. Acerca de la multiplicación podemos formular la misma pregunta que hicimos en el ejemplo 5 con respecto a la adición. ¿Cuál es el mínimo conjunto cerrado respecto de la multiplicación que contiene a 3? Tal conjunto ciertamente debe contener

$$3,$$
$$3 \cdot 3 = 3^2,$$
$$3^2 \cdot 3 = (3 \cdot 3) \cdot 3 = 3^3,$$
$$3^3 \cdot 3 = [(3 \cdot 3) \cdot 3] \cdot 3 = 3^4,$$

y así sucesivamente.

Es decir, todo número 3^k, donde k es un número natural, debe estar en el conjunto. ¿Es el conjunto $T = \{3, 3^2, 3^3, \ldots\}$ cerrado respecto de la multiplicación? Si n y m son números naturales, ¿es $3^n \cdot 3^m$ un miembro de T?

Escribe

$$3^n = \overbrace{3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}^{n \text{ factores}},$$

$$3^m = \overbrace{3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}^{m \text{ factores}},$$

$$3^n \cdot 3^m = \overbrace{3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}^{n} \cdot \overbrace{3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}^{m} = \overbrace{3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}^{n + m}$$
$$= 3^{n + m}$$

Entonces $3^n \cdot 3^m = 3^{n + m}$ es también una potencia de 3, de manera que si 3^n y 3^m están en T, también está su producto. En consecuencia,

$$T = \{3, 3^2, 3^3, 3^4, \ldots\}$$

es el mínimo conjunto cerrado respecto de la multiplicación que contiene a 3. Llamamos a T el conjunto engendrado por 3 mediante la multiplicación.

Siguiendo los ejemplos 5 y 6, decimos que el conjunto engendrado por un elemento a mediante la operación * es el conjunto {a, a * a, (a * a) * a, [(a * a) * a] * a, ...}.

Ejercicios 12-4

1. Observa una vez más las tablas (a) - (d) en esta sección, página 542. ¿Qué tablas determinan un conjunto que es cerrado respecto de la operación? ¿Qué tablas determinan un conjunto que no es cerrado respecto de la operación? ¿Cómo lo sabes?
2. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son cerrados respecto de las correspondientes operaciones?
   (a) El conjunto de los números pares respecto de la adición.
   (b) El conjunto de los números pares respecto de la multiplicación.
   (c) El conjunto de los números impares respecto de la multiplicación.
   (d) El conjunto de los números impares respecto de la adición.
   (e) El conjunto de los múltiplos de 5 respecto de la adición.
   (f) El conjunto de los múltiplos de 5 respecto de la sustracción.
   (g) El conjunto {1, 2, 3, 4} respecto de la multiplicación (mod 5).
   (h) El conjunto de los números naturales menores que 50 respecto de la operación de escoger el número menor.

(i) El conjunto de los números primos respecto de la adición.

(j) El conjunto de los números cuyos numerales en base cinco terminan en "3" respecto de la adición.

3. Halla el menor conjunto de números naturales:

(a) Cerrado respecto de la adición y que contiene a 2.

(b) Cerrado respecto de la multiplicación y que contiene a 2.

4. (a) Halla el conjunto engendrado por 7 mediante la adición.

(b) Halla el conjunto engendrado por 7 mediante la multiplicación.

5. Sea S el conjunto determinado por la tabla (d) de esta sección. Halla el subconjunto de S que está engendrado por 1 mediante $\odot$. Halla el subconjunto de S que está engendrado por 2 mediante $\odot$.

*6. ¿Qué subconjunto del conjunto de los números racionales está engendrado por 3? ¿Es este conjunto cerrado respecto de la división? (¿Está 3 en el conjunto? ¿Está $\frac{1}{3}$ en el conjunto? ¿Está $3 + \frac{1}{3}$ en el conjunto?) ¿Es cierto que $(3 \div 3) \div 3 = 3 \div (3 \div 3)$? ¿Es la división asociativa?

*7. Si una operación definida sobre un conjunto es conmutativa, ¿tiene que ser el conjunto cerrado respecto de la operación?

*8. Si una operación definida sobre un conjunto es asociativa, ¿tiene que ser el conjunto cerrado respecto de esa operación?

*9. Construye una tabla para una operación definida sobre el conjunto {0, 43, 100} de manera que este conjunto sea cerrado respecto de esa operación.

*10. Construye una tabla para una operación definida sobre el conjunto {0, 43, 100} de manera que este conjunto no sea cerrado respecto de la operación.

12-5. <u>Identidad o elemento idéntico; inverso de un elemento</u>

Cuando estudiamos el número uno en la aritmética ordinaria, observamos que el producto de cualquier número por 1 (en cualquier orden) es el mismo número.

Por ejemplo,

$$2 \times 1 = 2, \quad 1 \times 2 = 2, \quad 156 \times 1 = 156, \quad 1 \times 156 = 156.$$

Para todo número n en la aritmética de los números racionales, $n \cdot 1 = n$ y $1 \cdot n = n$.

Cuando estudiamos el número cero en la aritmética de los números racionales observamos que la suma de cero y cualquier número (en cualquier orden) daba el mismo número; es decir, la suma de cualquier número y 0 es ese número. Por ejemplo,

$$2 + 0 = 2, \quad 0 + 2 = 2, \quad 468 + 0 = 468, \quad 0 + 468 = 468$$

Para todo número n en la aritmética ordinaria, $n + 0 = n$ y $0 + n = n$.

<u>Uno</u> es la identidad para la multiplicación en la aritmética ordinaria.

<u>Cero</u> es la identidad para la adición en la aritmética ordinaria.

Representemos con * una operación binaria. Algunas de las posibilidades para * son las siguientes:

1. Si * significa adición de números racionales, 0 es un elemento idéntico porque $0 * a = a = a * 0$ para todo número racional a.
2. Si * significa multiplicación de números racionales, 1 es un elemento idéntico porque $1 * a = a = a * 1$ para todo número racional a.
3. Si * significa el mayor de dos números naturales, entonces $1 * 2 = 2$ porque 2 es mayor que 1; $1 * 3 = 3$ porque 3 es mayor que 1; $1 * 4 = 4$ pues 4 es mayor que 1, etc. En efecto,

$$1 * a = a = a * 1$$

para todo número natural a. Entonces 1 es la identidad para este significado de la operación * .

Podríamos establecer esto formalmente como sigue: Si $*$ representa una operación binaria sobre un conjunto de elementos y si hay algún elemento, que llamaremos e, que tiene la propiedad expresada por

$$e * a = a * e = a$$

para todo elemento a del conjunto, entonces e se llama un elemento idéntico para la operación $*$.

Otro ejemplo: Considera la siguiente tabla para una operación que podríamos llamar #.

#	A	B	C	D
A	B	C	D	A
B	C	D	A	B
C	D	A	B	C
D	A	B	C	D

¿Hay un elemento idéntico para #? ¿Puede serlo A? ¿Es A # B = B? (Lee "A sostenido[1] B es igual a B"). Como de la tabla se saca A # B = C, la respuesta a la pregunta es "no" y vemos que A no puede ser la identidad. Tampoco B puede ser la identidad puesto que A # B no es A. Sin embargo, D es una identidad para #, puesto que

A # D = D # A = A,
B # D = D # B = B,
C # D = D # C = C,
D # D = D.

Compara la columna D con la columna debajo de #. Compara la fila a la derecha de D con la fila a la derecha de #. ¿Qué observas? ¿Te sugiere esto un método para localizar un elemento idéntico cuando se te da la tabla de una operación?

Si tenemos un elemento idéntico, entonces podemos tener también un elemento inverso. Si la operación es la multiplicación de los números racionales, la identidad es 1 y decimos que dos números racionales a y b son inversos uno de otro

[1] El símbolo # se usa en música para indicar "sostenido".

si su producto es 1, es decir, si cada uno de ellos es el recíproco del otro.

Suponte ahora que la operación es la adición (mod 4). Ahora 0 es el elemento idéntico y decimos que dos números son inversos si su suma es 0, esto es, si combinando los dos números mediante la operación se obtiene 0. Hallamos los inversos (mod 4) para la adición, de esta tabla:

0 es la identidad

$2 + 2 \equiv 0 \pmod 4$

$3 + 1 \equiv 0 \pmod 4$

$1 + 3 \equiv 0 \pmod 4$

(Mod 4)

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Aquí 0 es su propio inverso, 2 es su propio inverso, y 3 y 1 son inversos uno del otro.

<u>Definición</u>. Dos elementos a <u>y</u> b son <u>inversos</u> (o uno es <u>inverso</u> del otro) para la operación binaria * con elemento idéntico e si $a * b = e$ <u>y</u> $b * a = e$.

Escribe nuevamente la tabla para # que teníamos al comienzo de esta sección.

#	A	B	C	D
A	B	C	D	A
B	C	D	A	B
C	D	A	B	C
D	A	B	C	D.

Recuerda que hemos mostrado que D es el elemento idéntico para esta tabla.

¿Puedes encontrar un elemento del conjunto {A, B, C, D} que haga verdadero el enunciado A # ___ = D? Sí, es C: A # C = D. A y C son inversos uno de otro respecto de #. ¿Puedes encontrar otros elementos cualesquiera con inversos respecto de # ?

Ejercicios 12-5a

1. Estudia las tablas (a) - (d) de la Sección 12-3.
   (a) ¿Qué tablas describen operaciones que tienen una identidad, y cuál es esa identidad?
   (b) Toma pares de elementos que sean inversos uno de otro para esta operación. ¿Tiene un inverso cada elemento del conjunto?
2. Para cada una de las operaciones del problema 4, Ejercicios 12-3,
   (a) ¿Tiene la operación una identidad? Si es así, ¿cuál es esa identidad?
   (b) Toma pares de elementos que sean inversos uno de otro para estas operaciones.
   (c) ¿Para qué operaciones tiene cada elemento un inverso?

*3. ¿Puede haber más de un elemento idéntico para una operación binaria dada?

Si la operación es la multiplicación, llamamos <u>inversos multiplicativos</u> a los inversos. Considera el conjunto de los números naturales con la multiplicación como operación. ¿Qué elementos tienen inversos multiplicativos? ¿Tiene 5 un inverso multiplicativo en el conjunto de los números naturales? ¿Es $\frac{1}{5}$ un número natural? El elemento 5 no tiene inverso multiplicativo en este conjunto. ¿Tiene 1 un inverso multiplicativo en este conjunto? Sí, lo tiene, pues $1 \cdot 1 = 1$. Este es el único elemento del conjunto que tiene un inverso multiplicativo, y es inverso multiplicativo de sí mismo. Naturalmente, si extendemos el conjunto que hemos considerado para incluir todos los números racionales excepto cero, entonces cada elemento tiene un inverso multiplicativo. Los números de los pares 5 y $\frac{1}{5}$, 1 y 1, y $\frac{4}{9}$ y $\frac{9}{4}$ son inversos multiplicativos uno de otro. ¿Tiene 0 un inverso multiplicativo? ¿Hay algún número b tal que $0 \cdot b = 1$?

Volvamos a la multiplicación (mod 5).

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

¿Cómo podemos determinar qué elementos del conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ tienen inversos (multiplicativos) en este sistema matemático? La identidad para la multiplicación (mod 5) es 1. Debemos buscar los pares de factores cuyos productos son la identidad; es decir, tenemos que buscar cuántas veces el número uno aparece en la tabla. Se repite 4 veces en esta tabla, lo cual nos dice que $1 \cdot 1 \equiv 1 \pmod 5$, $2 \cdot 3 \equiv 1 \pmod 5$, $3 \cdot \_\_\_ \equiv 1 \pmod 5$ y $4 \cdot \_\_\_ \equiv 1 \pmod 5$. (Escribe los números que faltan.) Entonces el inverso multiplicativo (mod 5) de 2 es 3. ¿Cuál es el inverso multiplicativo (mod 5) de 3? ¿Y de 4?

¿Ves alguna conexión entre los inversos multiplicativos y la propiedad de clausura respecto de la división? Suponte que te han dado un conjunto S de números cerrado respecto de la multiplicación y que a es un elemento de S. ¿Cómo podrías saber si es posible "dividir por a en S"? Es decir, ¿cuándo es posible dividir cualquier elemento de S (a incluido) por a y obtener otro elemento de S?

Ante todo, S debe contener el numero 1, puesto que $a \div a = 1$. Por ejemplo, si S fuese un conjunto de números racionales cerrado respecto de la multiplicación, y si $\frac{1}{2}$ estuviera en el conjunto, entonces $\frac{1}{2} \div \frac{1}{2} = 1$ también tendría que estar en el conjunto.

En segundo lugar, como 1 está en S, S debe contener $1 \div a = \frac{1}{a}$, sea cual fuere el elemento de S que represente a. Esto significa que si 2 está en S, entonces $\frac{1}{2}$ debe estar también en S. Si $\frac{1}{2}$ está en S, entonces 2 tiene que estar también en S. S no puede contener a cero puesto que $1 \div 0$ no tiene significado.

En tercer lugar, si b es un elemento cualquiera de S y $\frac{1}{a}$ está en S, entonces

$$b \cdot \frac{1}{a} = b \div a = \frac{b}{a}$$

es un elemento de S. Por ejemplo, si 2 está en S y $\frac{1}{3}$ está en S, entonces $2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ también está en S.

Si S debe ser cerrado respecto de la división, tiene que ser posible dividir cualquier elemento de S por cualquier otro elemento de S. Entonces S debe contener a 1, todo elemento de S debe tener un inverso multiplicativo en S y se podrá dividir todo elemento por cualquier otro elemento.

Si el sistema fuera no conmutativo, $b \cdot \frac{1}{a}$ podría no ser igual a $\frac{1}{a} \cdot b$ lo que quiere decir que $\frac{b}{a}$ podría significar dos cosas. Por esto, en este capítulo consideraremos la división solamente cuando la multiplicación es conmutativa.

Podemos resumir lo que hemos aprendido: Sea S un conjunto de números cerrado respecto de la multiplicacion, siendo la multiplicación conmutativa. Entonces:

Si S es cerrado respecto de la división, S contiene el número 1, y <u>todo</u> elemento de S tiene un inverso multiplicativo en S. (Si a está en S, entonces $\frac{1}{a}$ también está en S.)

También, siguiendo el camino inverso:

Si S contiene a 1 y si <u>todo</u> elemento de S tiene su inverso multiplicativo en S, entonces S es cerrado respecto de la división.

Probablemente puedes ver ahora otra razón por la cual llamamos división a la operación inversa de la multiplicación:

Dividir por un número a es lo mismo que multiplicar por el inverso multiplicativo de a.

Por ejemplo, si S es el conjunto de los números racionales (con exclusión del cero), $\frac{1}{2}$ es el inverso multiplicativo de 2 y, por consiguiente, la multiplicación por $\frac{1}{2}$ da siempre el mismo resultado que la división por 2. Si S fuera el conjunto de los números $0, 1, 2, 3, 4$ y la multiplicación fuera (mod 5) como en la tabla anterior, entonces, como 3 es el inverso de 2, multiplicar por 3 da el mismo resultado que dividir por 2; esto es, los valores de x en las dos equivalencias siguientes son iguales:

$$1 \equiv 2x \pmod 5; \quad 1 \cdot 3 \equiv x \pmod 5.$$

En el primer caso $x \equiv 1 \div 2 \pmod 5$ y en el segundo caso $x \equiv 1 \cdot 3 \pmod 5$.

Todo lo que hemos dicho acerca de la división y los inversos multiplicativos se aplica también a la sustracción y a los inversos aditivos. Nuevamente, consideramos la sustracción solamente cuando la adición es conmutativa en el sistema. Considera primero la sustracción (mod 4). ¿Cuánto es $3 - 1 \pmod 4$? Como la sustraccion es la operación inversa de la adición, para encontrar $3 - 1 \pmod 4$, primero hallamos el número que falta en la proposición $? + 1 \equiv 3 \pmod 4$.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Podemos hallar la respuesta utilizando la tabla. Observa que, como la tabla da sumas, el 3 debe estar dentro de la tabla, y como 1 es el número que se suma, debe aparecer en la fila superior de la tabla. Si seguimos de arriba abajo la columna 1 hasta encontrar un 3, vemos que está en la fila correspondiente al número 2 de la columna de la izquierda. Entonces 2 es el número que, sumado con 1, da 3. Como el sistema es conmutativo la respuesta para $1 + ? \equiv 3 \pmod 4$ es también 2; es decir, si recorremos de izquierda a derecha la fila que corresponde a 1 en la columna de la izquierda, hasta que lleguemos a un 3, éste se encontrará en la columna que corresponde a 2 en la fila superior. Si el sistema no fuera conmutativo $3 - 1$ podría tener dos significados, lo que sería inconveniente. ¿Cuánto es $2 - 3 \pmod 4$? ¿Qué número debe sumarse a 3 en (mod 4) para obtenerse 2? Vemos en la tabla que $3 + 3 \equiv 2 \pmod 4$, entonces $2 - 3 \equiv 3 \pmod 4$. ¿Cuánto es $1 - 3 \pmod 4$?

Ahora abordemos otro problema. ¿Hay algún número tal que sumado a 2 dé $2 - 3 \pmod 4$? Sabemos que $2 - 3 \equiv 3 \pmod 4$ puesto que $2 \equiv 3 + 3 \pmod 4$. Si observamos la tabla, vemos que $2 + 1 \equiv 3 \pmod 4$ y por consiguiente,

$$2 - 3 \equiv 2 + 1 \pmod 4$$

Esto significa que si restamos 3 de 2 tenemos el mismo resultado que si sumamos 1 a 2. En otras palabras, sumar 1 a 2 da el mismo resultado que restar su inverso, 3, de 2.

De la misma manera podríamos mostrar que

$$1 - 3 \equiv 1 + 1 \pmod 4$$
$$3 - 1 \equiv 3 + 3 \pmod 4$$

De los dos primeros ejemplos resulta que en la adición (mod 4), sustraer 3 produce el mismo resultado que sumar 1. ¿Es siempre esto cierto en este sistema? ¿Es $0 - 3 \equiv 0 + 1 \pmod 4$? ¿Es $3 - 3 \equiv 3 + 1 \pmod 4$?

¿Qué relación hay entre 1 y 3 en (mod 4)? Como $1 + 3 \equiv 0 \pmod 4$, y 0 es la identidad para la adición (mod 4), ¿qué decimos de 1 y 3? Son inversos aditivos uno de otro.

Probablemente puedes inferir un principio general de este ejemplo. Observa que:

Sustraer un número produce el mismo resultado que sumar el inverso aditivo del número.

Este principio será verdadero en todo sistema conmutativo en que llamemos "adición" a la operación, y en que los elementos tengan inversos. De igual manera, para la propiedad que hemos observado respecto de la multiplicación, tenemos la analogía siguiente:

Un conjunto que es cerrado respecto de la adición (en el que la adición es conmutativa) será cerrado respecto de la sustracción si contiene a 0 y contiene el inverso aditivo de cada uno de sus elementos.

Observa que en la adición (mod m) tenemos nuestros primeros ejemplos de conjuntos cerrados respecto de la sustracción. En ningún momento del estudio que hemos hecho este año de los números naturales, cardinales y racionales, hemos tenido inversos aditivos, con la excepción de cero, que es inverso aditivo de sí mismo en todos estos sistemas.

Tendrás la ocasión de comprobar estos principios generales en los siguientes ejercicios.

Ejercicios 12-5b

1. (a) Usa la tabla de multiplicación (mod 6) para determinar, cuando sea posible, por qué hay ~~que sustituir~~ x para que cada una de las proposiciones numéricas siguientes se convierta en un enunciado verdadero:

   $1 \cdot x \equiv 1 \pmod{6}$ $\qquad$ $4x \equiv 1 \pmod{6}$

   $2x \equiv 1 \pmod{6}$ $\qquad$ $5x \equiv 1 \pmod{6}$

   $3x \equiv 1 \pmod{6}$

   (b) ¿Qué elementos del conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ tienen inversos multiplicativos (mod 6)?

2. Recuerda que la división se define como la operación inversa de la multiplicación. Entonces, en la aritmética de los números racionales, la pregunta "¿Cuánto es seis dividido por dos?" significa, realmente, "¿Por cuánto hay que multiplicar dos para obtener seis?" Podemos definir la división (mod 5) de esta manera:

   $6 \div 4 \equiv ? \pmod{5}$ $\qquad$ significa

   $(4)(?) \equiv 6 \pmod{5}$

   Usando la multiplicación y la división (mod 5), copia y completa la siguiente tabla:

(Mod 5)

b	a	inverso multiplicativo de a	b + a	b · (inverso multiplicativo de a)
1	2	3	1 + 2 ≡ 3	1 · 3 ≡ 3
2	2	3	2 + 2 ≡ 4	2 · 3 ≡ 1
3	2	3	3 + 2 ≡	3 · 3 ≡
2	3			
3	3			
4	3			
1	4			
2	4			
3	4			
4	4			

3. He aquí una tabla para la adición (mod 5):

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Copia y completa la siguiente tabla:

(Mod 5)

b	a	inverso aditivo de a	b - a	b + inverso aditivo de a
0	1	4	$0 - 1 \equiv 4$	$0 + 4 \equiv 4$
2	1		$2 - 1 \equiv$	$2 + 4 \equiv$
4	1			
1	2		4.	
2	2			
3	2			
2	4			
3	4			
4	4			

4. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son cerrados respecto de la división en la aritmética de los números racionales?
   (a) $\{1, 2, \frac{1}{2}\}$
   (b) $\{1, 2, 2^2, 2^3, \ldots\}$
   (c) Los números naturales no nulos.
   (d) Los números racionales.

5. (a) ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son cerrados respecto de la multiplicación (mod 6)?

   $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $\{2, 4\}$, $\{0, 1, 5\}$, $\{1, 5\}$, $\{5\}$

   (b) ¿Qué conjuntos mencionados en (a) contienen un inverso multiplicativo (mod 6) para cada uno de sus elementos?

   (c) ¿Qué conjuntos mencionados en (a) son cerrados respecto de la división (mod 6)?

6. (a) ¿Cuáles de los conjuntos {A, B}, {C, D}, {B, C, D}, {A, D} son cerrados respecto de la operación * definida por la tabla siguiente?

*	A	B	C	D
A	A	A	A	A
B	A	A	B	B
C	A	B	D	C
D	A	B	C	D

Por ejemplo, {A, D} es cerrado respecto de la operación porque si separamos la parte correspondiente de la tabla tendremos la tabla parcial que sigue:

*	A	D
A	A	A
D	A	D

que contiene solamente Aes y Des. Por otra parte, el conjunto {A, C} no es cerrado porque si separamos su tabla parcial tendríamos

*	A	C
A	A	A
C	A	D

y esta tabla contiene una D, que no es un elemento del conjunto {A, C}.

(b) ¿Hay una identidad para * ? Si es así, ¿cuál es?

(c) ¿Cuáles de los conjuntos de (a) tienen un inverso para * para cada uno de sus elementos?

*(d). ¿Cuáles de los conjuntos de (a) son cerrados respecto de la operación inversa de * ? (Puedes usar los símbolos $\underset{*}{\overset{*}{-}}$ para esta operación, de manera que $a \underset{*}{\overset{*}{-}} b = ?$ significa $b * ? = a$.)

12-6. ¿Qué es un sistema matemático?

La idea de conjunto ha sido muy útil en este libro—se ha usado algo en casi todos los capítulos. Pero, realmente, no es mucho lo que se puede hacer con sólo un conjunto de elementos. Un conjunto es más interesante si se puede hacer algo con sus elementos (por ejemplo, si los elementos son números, pueden ser sumados o multiplicados). Si tenemos un conjunto y una operación definida sobre el mismo, es interesante hallar la manera como se comporta la operación. ¿Es conmutativa? ¿Es asociativa? ¿Hay un elemento idéntico? ¿Tiene cada elemento un inverso? El "comportamiento" de las operaciones aritméticas (adición, sustracción, multiplicación y división) sobre los números se ha estudiado en los Capítulos 3 y 6. Hemos visto que operaciones diferentes pueden "comportarse de la misma manera" (ambas conmutativas, por ejemplo). Esto nos sugiere que estudiemos los conjuntos con operaciones definidas sobre ellos para ver las diferentes posibilidades que hay. Es demasiado difícil hacer una lista de todas las posibilidades, pero en esta sección y en la próxima daremos algunos ejemplos. Son precisamente ejemplos de sistemas matemáticos.

> Definición. Un sistema matemático es un conjunto de elementos con una o más operaciones binarias definidas sobre el conjunto.

Los elementos no tienen por qué ser números, pudiendo ser objetos cualesquiera. Algunos de los ejemplos siguientes se refieren a letras o a figuras geométricas en vez de números.

Ejemplo 1. Observemos la aritmética del reloj de tres minutos—aritmética (mod 3).

(a) Hay un conjunto de elementos: el conjunto de los números $\{0, 1, 2\}$.

(b) Hay una operación + (mod 3), definida sobre el conjunto $\{0, 1, 2\}$.

(Mod 3)

+	1	2	0
1	2	0	1
2	0	1	2
0	1	2	0

Por consiguiente, la aritmética del reloj de tres minutos es un sistema matemático. ¿Tiene este sistema algunas propiedades interesantes?

(c) La operación + (mod 3), tiene la propiedad conmutativa. ¿Puedes averiguarlo con sólo mirar la tabla? Si es así, ¿cómo? Podemos también comprobar algunos casos especiales. $1 + 2 \equiv 0 \pmod 3$ y $2 + 1 \equiv 0 \pmod 3$, entonces $1 + 2 \equiv 2 + 1 \pmod 3$.

(d) Hay una identidad para la operación + (mod 3) (el número 0).

(e) Cada elemento del conjunto tiene un inverso para la operación + (mod 3).

Estudia las siguientes tablas:

(a)

•	A	B
A	A	B
B	A	B

(b)

*	P	Q	R	S
P	R	S	P	Q
Q	S	R	Q	P
R	P	Q	R	S
S	Q	P	S	R

(c)

~	△	□	○	/
△	△	□	○	/
□	□	○	/	△
○	○	/	△	□
/	/	△	□	○

Ejercicios 12-6

1. ¿Cuál o cuáles de las tablas (a), (b), (c) describen un sistema matemático? Prueba que tu respuesta es correcta.
2. Utiliza las tablas anteriores para completar correctamente los siguientes enunciados:

(a) B ∘ A = ?	(e) Q * R = ?	(i) / ~ □ = ?
(b) △ ~ ○ = ?	(f) R * S = ?	(j) B ∘ B = ?
(c) / ~ / = ?	(g) P * R = ?	(k) A ∘ A = ?
(d) A ∘ B = ?	(h) □ ~ ⊘ = ?	(l) S * S = ?

3. ¿Cuál o cuáles de las operaciones binarias ∘ , * , ~ son conmutativas? Prueba que tu respuesta es correcta.
4. ¿Cuál o cuáles de las operaciones binarias ∘ , * , ~ tienen un elemento idéntico? ¿Cuál es ese elemento en cada caso?
5. Usa las tablas anteriores para completar correctamente los siguientes enunciados:

(a) P * (Q * R) = ?	(f) R * (P * S) = ?
(b) (P * Q) * R = ?	(g) △ ~ (△ ~ /) = ?
(c) P * (Q * S) = ?	(h) (△ ~ △) ~ / = ?
(d) (P * Q) * S = ?	(i) (○ ~ □) ~ △ = ?
(e) (R * P) * S = ?	(j) ○ ~ (□ ~ △) = ?

6. ¿Te parece que alguna de las operaciones descritas por las tablas (b) o (c) es asociativa? ¿Por qué? ¿Cómo puedes demostrar tu afirmación? ¿Cómo podría otra persona probar que tu respuesta no es correcta?
7. (a) En la tabla (c), ¿cuál es el conjunto engendrado por el elemento □ ?

   (b) En la tabla (b), ¿cuál es el conjunto engendrado por el elemento P?

8. PROBLEMA DIFICIL. Indica por qué <u>no</u> describen sistemas matemáticos las siguientes tablas:

(a)

*	1	2
1	1	1
2	1	

(b)

*	1	2
1	el producto de 3 y 6	la suma de 2 y 4
2	un número entre 3 y 8	0

(c)

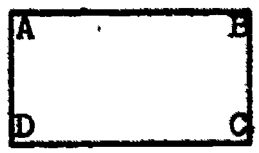
*	1	2
3	1	4
4	2	3

12-7. Sistemas matemáticos sin números

En la sección anterior hemos dado algunos ejemplos de sistemas matemáticos sin números. Suponiendo que queremos inventar uno, ¿qué necesitamos?

Debemos, por lo pronto, disponer de un conjunto de objetos; luego, necesitamos alguna operación binaria—algo que pueda hacerse con dos cualesquiera de los elementos de nuestro conjunto. Hemos aprendido que las propiedades de clausura, conmutatividad, asociatividad, etc., son muy útiles para simplificar expresiones. Sería cómodo tener en nuestro sistema matemático algunas de esas propiedades.

Empecemos con una tarjeta. Cualquier clase de tarjeta rectangular nos es útil. La utilizaremos para representar una región rectangular cerrada. Coloca la tarjeta sobre tu escritorio y marca las esquinas como en la figura. Ahora vuelve del reves la tarjeta y escribe una "A" detrás de la "A" que ya habías escrito. Asegúrate de que las dos letras "A" estén una detrás de la otra de manera que designen una sola esquina de la tarjeta. De la misma manera, escribe las letras B, C y D detrás de las que ya has escrito, de manera que coincidan las Bes, las Ces y las Des.

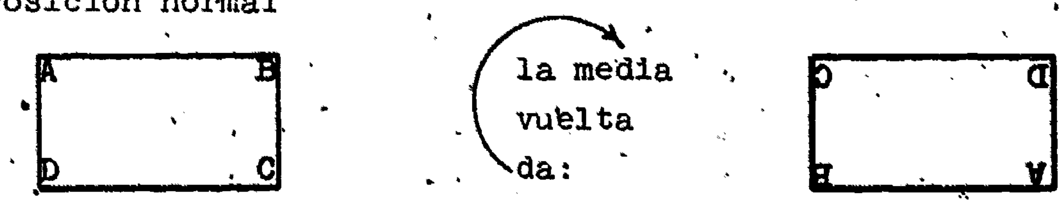


¿Qué conjunto tomamos? En lugar de números, tomemos elementos que tienen algo que ver con la tarjeta. Comienza con la tarjeta en el centro de tu escritorio de manera que los lados más largos estén colocados paralelamente al borde más cercano de tu escritorio. Ahora mueve la tarjeta—levántala, ponla al revés o muévela en alguna forma—y colócala nuevamente en el centro de tu escritorio con sus lados más largos paralelos al borde más cercano del tablero. La tarjeta aparece exactamente en la misma posición que antes, pero las esquinas pueden estar marcadas con diferentes letras (una esquina que antes estaba arriba puede aparecer ahora abajo, por ejemplo). La posición de la tarjeta ha cambiado, pero la región rectangular cerrada aparece como al principio. (La "figura" es la misma. Los puntos individuales pueden haberse movido.) Los elementos de nuestro conjunto serán justamente esos cambios de posición. Consideremos todos los cambios de posición necesarios para que la región rectangular cerrada vuelva a su posición primitiva (lados más largos paralelos al borde más cercano del escritorio). ¿Cuántos cambios hay?

Podemos empezar con la tarjeta en alguna posición que llamaremos posición normal, como se muestra en la figura.

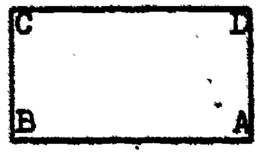
Sin levantar la tarjeta del escritorio, hazla girar media vuelta alrededor de su centro. Una figura transformada de este modo, es:

Posición normal

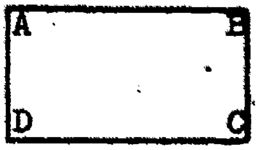


Como las letras "A", "B", etc., son solamente marcas para distinguir las esquinas de la tarjeta, unas de otras, no alteraremos el movimiento si giramos las letras de modo que resulten en su posición habitual de lectura. Este cambio de posición—designando la rotación de la tarjeta con "R"—se representa en el diagrama siguiente:

R:
Gira la tarjeta
media vuelta.



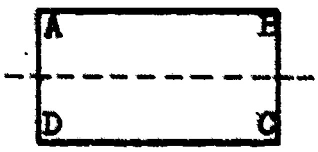
¿Qué habría ocurrido si la tarjeta hubiera girado un cuarto de vuelta?.



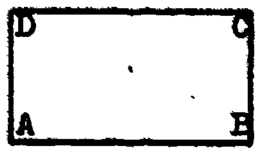
un cuarto
de vuelta

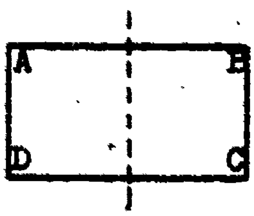
¿Resultará en la misma posición la tarjeta, después de este cambio? No, este cambio de posición no puede estar en nuestro conjunto, pues las dos figuras son bastante diferentes.

¿Hay algunos otros cambios de posición de la tarjeta que dejen la región rectangular cerrada en su posición primitiva? Sí, podemos dar vuelta a la tarjeta de dos maneras diferentes, como se indica en estos diagramas:

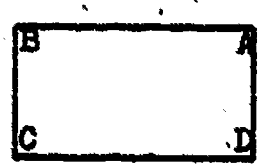


H:
Da vuelta a
la tarjeta,
utilizando un
eje horizontal.



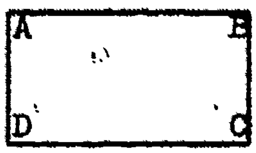


V:
Da vuelta a
la tarjeta,
utilizando un
eje vertical.

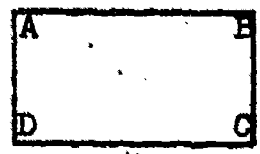


Ahora comprendes por qué convenía marcar tan cuidadosamente ambos lados de la tarjeta. Recuerda que para nosotros la tarjeta representa solamente una figura geométrica. Dada vuelta, la tarjeta aparece de modo diferente: se le ve la otra cara; pero la región rectangular cerrada, aunque esté volteada, no cambia. (Algunos puntos particulares pueden estar en posiciones distintas, por supuesto, pero la figura geométrica en sí es la misma.)

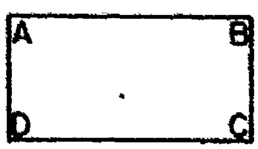
Hay otro cambio de posición que debemos considerar. Es el cambio que deja la tarjeta sin mover (coloca cada punto en su propio sitio). Llamemos "I" a este cambio de posición.



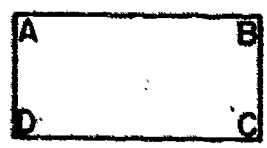
I:
Deja la tarjeta en su sitio.

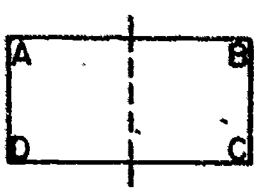


Ahora tenemos nuestro conjunto de elementos; es I, B, H, R. Resumamos lo que significan para consultarlos fácilmente:

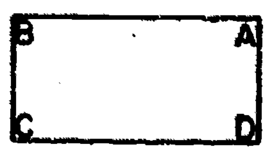


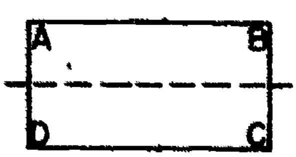
Elemento I:
Deja la tarjeta en su sitio.



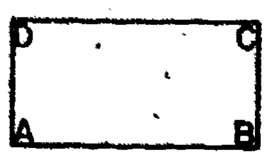


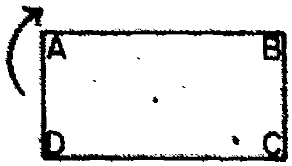
Elemento V:
Da vuelta a la tarjeta, utilizando un eje vertical.





Elemento H:
Da vuelta a la tarjeta, utilizando un eje horizontal.





Elemento R:
Gira la tarjeta media vuelta en la dirección indicada por la flecha.

Recuerda la definición de sistema matemático. Había dos requisitos:

(a) Un conjunto de elementos.

(b) Una o más operaciones binarias definidas sobre el conjunto de elementos considerado.

Nuestro conjunto {I, V, H, R} satisface la primera condición. Tenemos ahora que cumplir la segunda condición: necesitamos una operación. ¿Qué operación utilizaremos? ¿Cómo podemos "combinar dos elementos cualesquiera de nuestro conjunto" para obtener un "objeto definido"? Si el conjunto debe ser cerrado respecto de la operación, el "objeto definido" que es resultado de la operación debe ser nuevamente uno de los elementos del conjunto.

He aquí una manera de combinar dos elementos cualesquiera de nuestro conjunto: Efectuaremos uno de nuestros cambios Y LUEGO el otro. Utilizaremos el símbolo "YLU" para esta operación. (Probablemente puedes imaginar un símbolo más conveniente.) Entonces "H YLU V" significa "voltear la tarjeta usando un eje horizontal y luego dar vuelta a la tarjeta usando un eje vertical". Comienza con la tarjeta en la posición normal y efectúa estos cambios. ¿Cuál es la posición final de la tarjeta? ¿Es el resultado de estos dos cambios el mismo que el cambio R? ¿Qué significa "V YLU H"? Hazlo con la tarjeta. Ahora podemos completar la tabla de nuestra operación. Algunos de sus elementos se indican en la tabla de la derecha.

YLU	I	V	H	R
I	I	V		
V			R	H
H	H	R		
R			V	

Ejercicios 12-7

1. Verifica los elementos que se dan en la tabla anterior y encuentra los otros. Utiliza la tarjeta.
2. Llena los espacios vacíos para hacer las siguientes igualdades correctas. Usa tu tabla para la operación YLU, o la tarjeta.

   (a) R YLU H = ?

   (b) R YLU ? = H

   (c) ? YLU R = H

   (d) ? YLU H = R

   (e) (R YLU H) YLU V = ?

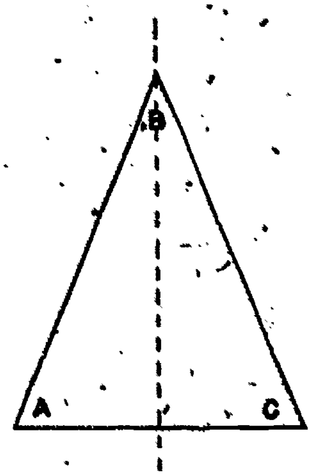
   (f) R YLU (H YLU V) = ?

   (g) (R YLU H) YLU ? = V

   (h) (R YLU ?) YLU V = H

   (i) (? YLU H) YLU V = R

3. Examina la tabla para la operación YLU.
   (a) ¿Es cerrado el conjunto respecto de la operación?
   (b) ¿Es la operación conmutativa?
   (c) ¿Te parece que la operación es asociativa? Utiliza la tabla de la operación para comprobar varios ejemplos.
   (d) ¿Hay un elemento idéntico para la operación YLU?
   (e) ¿Tiene cada elemento del conjunto un inverso respecto de la operación YLU?
4. He aquí otro sistema de cambios o transformaciones. Corta una tarjeta triangular con dos lados iguales. Marca las esquinas como se indica en la figura. (Marca el revés de cada esquina con la misma letra original.) El conjunto de nuestro sistema consistirá en dos cambios o transformaciones. El primer



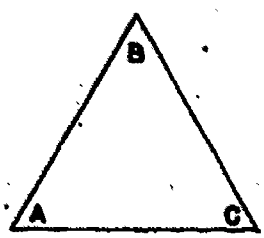
cambio, llamado I, será: Deja la tarjeta en su sitio. El segundo cambio, llamado F, será: Vuelve la tarjeta del revés, utilizando el eje vertical. F YLU I significará: da vuelta a la tarjeta, usando su eje vertical, y luego déjala en su sitio. ¿Cómo se verá la tarjeta—como si se la hubiera dejado en su sitio, I, o como si se hubiera efectuado el cambio F? ¿Qué significa I YLU F? ¿Es F YLU I = F o es F YLU I = I?

(a) Completa la tabla siguiente:

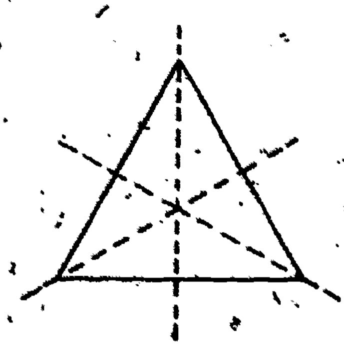
YLU	I	F
I		
F		

(b) ¿Es cerrado el conjunto respecto de esta operación?
(c) ¿Es la operación conmutativa?
(d) ¿Es la operación asociativa? ¿Estás seguro?
(e) ¿Hay una identidad para la operación?
(f) ¿Tiene cada elemento del conjunto un inverso respecto de la operación?

5. Recorta una tarjeta triangular de tres lados iguales y marca sus esquinas como en la figura (por ambos lados, coincidiendo las letras). El conjunto para este sistema se compondrá de los siguientes seis cambios o transformaciones:



I: Dejar la tarjeta en su sitio.
R: Girar la tarjeta en el sentido de las agujas del reloj $\frac{1}{3}$ de vuelta.
S: Girar la tarjeta en el sentido de las agujas del reloj $\frac{2}{3}$ de vuelta.
T: Dar vuelta a la tarjeta, usando un eje vertical.
U: Dar vuelta a la tarjeta,



usando un eje que pase por el vértice inferior derecho.
V: Dar vuelta a la tarjeta; usando un eje que pase por el vértice inferior izquierdo.

Tres de estos cambios serán rotaciones alrededor del centro: I, R y S. Los otros tres serán abatimientos alrededor de los ejes. (Ten cuidado: los ejes son fijos; no giran con la tarjeta. Por ejemplo, el eje vertical permanece vertical— pero pasará por otro vértice diferente de la tarjeta después que ésta haya girado un tercio de vuelta alrededor de su centro.) Construye una tabla de estos cambios. Examina la tabla. ¿Es conmutativa la operación? ¿Hay un cambio idéntico? ¿Tiene cada cambio un inverso?

*6. Trata de hacer una tabla de cambios para una tarjeta cuadrada. Hay ocho cambios (es decir, ocho elementos en el conjunto). ¿Cuáles son? ¿Hay un elemento idéntico? ¿Es la operación YLU conmutativa?

12-8. Los números naturales y los números cardinales

Los sistemas matemáticos que hemos estudiado hasta ahora en este capítulo se componen de un conjunto y una operación. Son ejemplos la adición o la multiplicación modular y los movimientos de una tarjeta rectangular o triangular. Un sistema matemático dado por un conjunto y dos operaciones parecería mucho más complicado que estos ejemplos. Sin embargo, como puedes ya haber adivinado, la aritmética ordinaria es también un sistema matemático y sabemos que podemos efectuar más de una operación utilizando los mismos números—por ejemplo, pueden ser sumados y multiplicados.

Para concretar, tomemos el conjunto de los números racionales. Este conjunto, con las dos operaciones—adición y multiplicación—forma un sistema matemático que se ha estudiado en los Capítulos 6 y 8. ¿Hay propiedades de este sistema que son completamente diferentes de las que hemos considerado en los sistemas con una sola operación? Sí, te es familiar el hecho de que

$2 \cdot (3 + 5) = (2 \cdot 3) + (2 \cdot 5)$. Este es un ejemplo de la propiedad distributiva. Más precisamente, esto pone de manifiesto que la multiplicación es distributiva respecto de la suma. La propiedad distributiva es también de interés en otros sistemas matemáticos.

<u>Definición</u>. Suponte que tenemos un conjunto y dos operaciones binarias, $*$ y $\circ$, definidas sobre el conjunto. La operación $*$ es distributiva respecto de la operación $\circ$ si $a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c)$ para elementos a, b, c cualesquiera del conjunto. (Y podemos efectuar todas estas operaciones.)

En un sistema matemático con dos operaciones, están las propiedades que previamente hemos estudiado para cada una de esas operaciones separadamente. La única propiedad que se refiere a ambas operaciones a la vez es la propiedad distributiva.

Ejercicios 12-8

1. Considera el conjunto de los números naturales:
   (a) ¿Es cerrado el conjunto respecto de la adición? ¿Y respecto de la multiplicación? Explícalo.
   (b) ¿Valen las propiedades conmutativa y asociativa para la adición? ¿Y para la multiplicación? Da un ejemplo de cada una.
   (c) ¿Cuál es el elemento idéntico para la adición? ¿Y para la multiplicación?
   (d) ¿Es cerrado el conjunto de los números naturales respecto de la sustracción? ¿Y respecto de la división? Explícalo.

   Las respuestas a las preguntas (a), (b) y (c) se refieren a algunas de las propiedades del sistema matemático compuesto del conjunto de los números naturales y de las operaciones de la adición y la multiplicación.

2. Contesta a las preguntas del problema 1(a), (b) y (c) para el conjunto de los números cardinales. ¿Son tus respuestas las mismas que para los números naturales?

3. (a) Para el sistema de los números cardinales, escribe tres proposiciones numéricas que ilustren la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición.
   (b) ¿Es distributiva la adición respecto de la multiplicación? Trata con algunos ejemplos.
4. Las dos tablas siguientes describen un sistema matemático compuesto del conjunto {A, B, C, D} y de las dos operaciones *, y ∘.

*	A	B	C	D
A	A	A	A	A
B	A	B	A	B
C	A	A	C	C
D	A	B	C	D

∘	A	B	C	D
A	A	B	C	D
B	B	B	D	D
C	C	D	C	D
D	D	D	D	D

   (a) ¿Te parece que * es distributiva respecto de ∘ ? Trata con varios ejemplos.
   (b) ¿Te parece que ∘ es distributiva respecto de * ? Trata con varios ejemplos.
5. Contesta a estas preguntas para cada uno de los siguientes sistemas. ¿Es cerrado el conjunto respecto de la operación? ¿Es la operación conmutativa? ¿Es asociativa? ¿Hay un elemento idéntico? ¿Qué elementos tienen inversos?
   (a) El sistema cuyo conjunto es el conjunto de los números impares y cuya operación es la multiplicación.
   (b) El sistema cuyo conjunto se compone de cero y de los múltiplos de 3, y cuya operación es la multiplicación.
   (c) El sistema cuyo conjunto se compone de cero y de los múltiplos de 3, y cuya operación es la adición.
   (d) El sistema cuyo conjunto se compone de los números racionales entre 0 y 1 (no incluyendo a 0 ni a 1), y cuya operación es la multiplicación.
   (e) El sistema cuyo conjunto se compone de los números pares, y cuya operación es la adición. (Cero es un número par.)

(f) El sistema cuyo conjunto se compone de los números racionales entre 0 y 1, y cuya operación es la adición.

6. (a) ¿En qué sentido es el sistema 5(b) el mismo que el 5(c)?

   (b) ¿En qué sentido es el sistema 5(a) diferente del sistema 5(b)?

*7. Inventa un sistema matemático que se componga de un conjunto y de dos operaciones definidas sobre el conjunto. Construye por lo menos tablas parciales para las operaciones de tu sistema. Haz una lista de las propiedades de tu sistema.

*8. He aquí un sistema matemático compuesto de un conjunto y de dos operaciones definidas sobre ese conjunto.

Conjunto: Todos los números naturales.

Operación * : Hallar el máximo común divisor.

Operación ∘ : Hallar el mínimo común múltiplo.

   (a) ¿Te parece que la operación * es distributiva respecto de la operación ∘ ? Ensaya varios ejemplos.

   (b) ¿Te parece que la operación ∘ es distributiva respecto de la operación * ? Ensaya varios ejemplos.

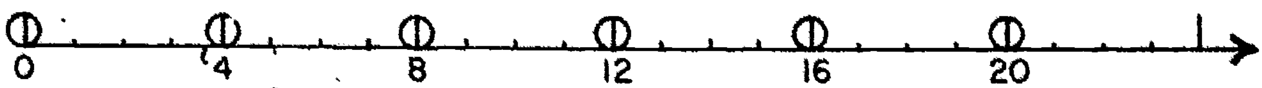
12-9. Aritmética modular

En la Sección 12-1 hemos estudiado una nueva adición que se practica girando la aguja de un reloj. Si usamos un reloj de cuatro minutos, decimos que $2 + 3 \equiv 1 \pmod 4$. Las tablas que construimos, describían el sistema matemático (mod 4). En la Sección 12-2 hemos estudiado una nueva multiplicación usando el mismo reloj.

Los sistemas modulares son el resultado de clasificar números cardinales de determinada manera. Por ejemplo, podríamos clasificar los números cardinales como pares e impares. En este caso los números pares: 0, 2, 4, 6, ... se ponen en la misma familia, y esa familia se designa por el menor de los números: 0. Entonces la clase de todos los números pares es 0 (mod 2).

Partiendo de 1, los números impares: 1, 3, 5, 7, ... se ponen en una misma familia que se designa por 1 (mod 2). Para los números pares e impares tenemos dos clases, 0 (mod 2) y 1 (mod 2). El número 5 pertenece a la clase 1 (mod 2), el 8 pertenece a la clase 0 (mod 2).

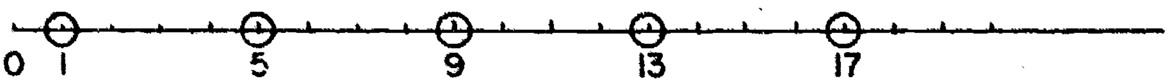
Si ponemos en una misma clase un número cardinal tomado del conjunto 0, 1, 2, 3, y todos los números cardinales que se obtienen de él sumándole 4, tenemos el sistema (mod 4). He aquí un esquema de algunos de los números que pertenecen a la clase 0 (mod 4).



La construcción de este ejemplo se podría describir más brevemente así: ponemos en una misma clase los números cardinales "tomados cíclicamente de cuatro en cuatro".

Todo número cardinal tomado cíclicamente de cuatro en cuatro, partiendo de cero, pertenece a una misma clase. Entonces, los números que son múltiplos de 4 pertenecen a la clase 0 (mod 4).

En este otro dibujo se muestran algunos de los números que pertenecen a la clase 1 (mod 4).



Todo número cardinal tomado cíclicamente de cuatro en cuatro, a partir de 1, pertenece a la misma clase, esto es, 1 (mod 4). Entonces los números que son 1 más un múltiplo de 4 pertenecen a esta clase.

Los dibujos que siguen muestran algunos de los números que pertenecen a las clases 0 (mod 5) y 3 (mod 5).

Los números que pertenecen a la clase 0 (mod 5) son los múltiplos de 5.

Los números que pertenecen a la clase 3 (mod 5) son 3 más los múltiplos de 5.

Nuestros primeros problemas de sistemas modulares han utilizado como operación la adición. Cuando cambiamos esta operación por la multiplicación, obtenemos un sistema matemático diferente. Con ambas operaciones, la aritmética modular se parece más a la aritmética ordinaria que cuando se usa una sola operación.

En cada uno de los sistemas modulares podemos conocer el número de elementos de su conjunto. Por ejemplo, hay cuatro elementos si es un sistema (mod 4), siete elementos si es (mod 7), y así sucesivamente. Un conjunto de esta clase se llama <u>conjunto finito</u> y el sistema se llama <u>sistema finito</u>. Los sistemas modulares y los sistemas de la Sección 12-7 son sistemas finitos. Por otra parte, el conjunto de los números racionales que se consideró en la Sección 12-8 es tan grande que contiene más elementos de los que puedes nombrar. Ese conjunto se llama <u>conjunto infinito</u> y el sistema se llama <u>sistema infinito</u>.

<u>Ejercicios 12-9</u>

1. Escribe la tabla de multiplicar (mod 8) y recuerda o reconstruye la tabla de multiplicar (mod 5) que has encontrado en los Ejercicios 12-2.
2. Responde a cada una de las siguientes preguntas sobre los sistemas matemáticos de multiplicación (mod 5) y (mod 8).
   (a) ¿Es cerrado el sistema respecto de la operación?
   (b) ¿Es la operación conmutativa?
   (c) ¿Te parece que la operación es asociativa?
   (d) ¿Cuál es el elemento idéntico?
   (e) ¿Qué elementos tienen inversos, y cuáles son los pares de elementos inversos?
   (f) ¿Es cierto que si un producto es cero, por lo menos uno de los factores es cero?

3. A fin de convertirlas en enunciados verdaderos, completa cada una de las siguientes proposiciones numéricas:

(a) $2 \times 4 \equiv ? \pmod 5$ (c) $5^2 \equiv 1 \pmod ?$

(b) $4 \times 3 \equiv ? \pmod 5$ (d) $2^3 \equiv 0 \pmod ?$

4. Halla los siguientes productos:

(a) $2 \times 3 \equiv ? \pmod 4$ (e) $4^3 \equiv ? \pmod 5$

(b) $2 \times 3 \equiv ? \pmod 6$ (f) $6^2 \equiv ? \pmod 5$

(c) [illegible] $\times$ [illegible] $\equiv ? \pmod 7$ *(g) $6^{256} \equiv ? \pmod 5$

(d) $3 \times 4 \times$ [illegible] $\equiv ? \pmod 9$

5. Haz estas sumas:

(a) $1 + 3 \equiv ? \pmod 5$ (c) $2 + 4 \equiv ? \pmod 5$

(b) $4 + 3 \equiv ? \pmod 5$ (d) $4 + 4 \equiv ? \pmod 5$

6. (a) Halla los valores de $3(2 + 1) \pmod 5$ y $(3 \cdot 2) + (3 \cdot 1) \pmod 5$.

(b) Halla los valores de $4(3 + 1) \pmod 5$ y $(4 \cdot 3) + (4 \cdot 1) \pmod 5$.

(c) Halla los valores de $(3 \cdot 2) + (3 \cdot 4) \pmod 5$ y $3(2 + 4) \pmod 5$.

(d) En los ejemplos de este problema, ¿es la multiplicación distributuva respecto de la adición?

7. (a) Halla los valores de $3 + (2 \cdot 1) \pmod 5$ y $(3 + 2) \cdot (3 + 1) \pmod 5$.

(b) Halla los valores de $4 + (3 \cdot 1) \pmod 5$ y $(4 + 3) \cdot (4 + 1) \pmod 5$.

(c) Halla los valores de $(3 + 2) \cdot (3 + 4) \pmod 5$ y $3 + (2 \cdot 4) \pmod 5$.

(d) En los ejemplos de este problema, ¿es la adición distributiva respecto de la multiplicación?

Recuerda que la división se define después de conocer la multiplicación. Entonces, en la aritmética ordinaria, la pregunta "¿Cuánto es seis dividido por 2?" significa, realmente, "¿Por cuánto hay que multiplicar 2 para obtener seis?" Una operación que comienza con uno de los números y la "respuesta" de otra operación binaria y pregunta cuál es el otro número, se llama una operación inversa. La división es la operación inversa de la multiplicación.

*8. Halla los cocientes marcados con una interrogación.

(a) $2 + 3 \equiv ? \pmod 8$ (e) $0 + 2 \equiv ? \pmod 5$

(b) $6 + 2 \equiv ? \pmod 8$ (f) $0 + 4 \equiv ? \pmod 5$

(c) $0 + 2 \equiv ? \pmod 8$ (g) $7 + 3 \equiv ? \pmod{10}$

(d) $3 + 4 \equiv ? \pmod 5$ *(h) $7 + 6 \equiv ? \pmod 8$

9. Efectúa las siguientes operaciones. Recuerda que la sustracción es la operación inversa de la adición.

(a) $7 - 3 \pmod 8$ (c) $3 - 4 \pmod 8$

(b) $3 - 4 \pmod 5$ *(d) $4 - 9 \pmod{12}$

10. Construye una tabla para la sustracción (mod 5). ¿Es el conjunto cerrado respecto de esta operación?

11. Sustituye x de manera que las siguientes proposiciones numéricas se conviertan en enunciados verdaderos. Explícalo.

(a) $2x \equiv 1 \pmod 5$ (d) $3x \equiv 0 \pmod 6$

(b) $3x \equiv 1 \pmod 4$ (e) $x \cdot x \equiv 1 \pmod 8$

(c) $3x \equiv 0 \pmod 5$ (f) $4x \equiv 4 \pmod 8$

12. En el problema 11(d) y (f), determina por lo menos un modo de sustituir x, que haga verdadera la proposición numérica.

12-10. Resumen y repaso

Una *operación* binaria definida sobre un conjunto es una regla de combinación por medio de la cual dos elementos cualesquiera del conjunto pueden ser combinados para determinar un objeto definido.

Un *sistema matemático* es un conjunto con una o más operaciones binarias definidas sobre ese conjunto.

Un conjunto es *cerrado* respecto de una operación binaria si cada dos elementos del conjunto pueden ser combinados mediante la operación, y el resultado es siempre un elemento del conjunto.

Un *elemento idéntico* para una operación binaria definida sobre un conjunto es un elemento del conjunto que no altera ningún elemento con el cual se combina.

Dos elementos son *inversos* uno del otro para una operación binaria si el resultado de esta operación sobre esos dos elementos es el elemento idéntico de la operación.

Una operación binaria es *conmutativa* si, para dos elementos cualesquiera, se obtiene el mismo resultado combinándolos en un orden y luego en el orden inverso.

Una operación binaria $*$ es *asociativa* si, para tres elementos cualesquiera, el resultado de combinar el primero con la combinación del segundo y del tercero es el mismo que el resultado de combinar la combinación del primero y el segundo con el tercero.

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

La operación binaria $*$ *es distributiva* respecto de la operación binaria $\circ$ si se cumple

$$a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c)$$

para cualesquiera elementos a, b y c.

Un conjunto S es engendrado por un elemento b mediante la operación $*$ si

$$S = \{b,\ (b * b),\ (b * b) * b,\ [(b * b) * b] * b,\ \ldots\}$$

Capítulo 13

ESTADISTICAS Y GRAFICAS

13-1. Recolección de datos

Si observas a los alumnos de tu clase, se te puede ocurrir que varios de ellos parecen de la misma estatura, que unos son más altos y que otros son más bajos. Suponte que quieres saber la estatura del más alto, la estatura del más pequeño, y cuántos tienen la misma estatura. ¿Cómo te las arreglarías para obtener esta información? En primer lugar, tendrás que medir la estatura de cada alumno. De esta manera podrás recolectar datos para responder a las preguntas que te has planteado.

Supongamos que mides la estatura de cada alumno con la aproximación de una pulgada. Cuando hayas terminado de hacer esto, deberás disponer los datos de las mediciones de modo que de ellos se pueda obtener lo más fácilmente posible, la información necesaria. Frecuentemente, esta disposición de los datos consiste en una tabla como la señalada con 13-1. Si deseas, puedes hacer una lista de los alumnos por sus nombres, pero en nuestro caso hemos asignado un número a cada alumno.

Con los datos dispuestos de esta manera, es fácil contestar preguntas como las siguientes: ¿Qué estatura tiene el alumno más alto? ¿Y el más bajo? ¿Cuántos alumnos tienen una estatura de 60 pulgadas o más? ¿Cuántos alumnos tienen menos de 60 pulgadas de estatura? ¿Cuál es la estatura que aparece con más frecuencia?

Tabla 13-1

Estaturas de los 15 alumnos del séptimo grado

Alumno	Estatura en pulgadas
1	65
2	64
3	63
4	61
5	61
6	61
7	60
8	59
9	57
10	55
11	55
12	54
13	54
14	53
15	52

Este ejemplo de las estaturas de los alumnos de una clase es una muestra de la clase de asuntos que encontramos al estudiar las estadísticas. La estadística, en parte por lo menos, tiene que ver con la recolección de datos y la construcción de tablas y cuadros de números que representan los datos. Las tablas y los cuadros habitualmente facilitan la comprensión de la información que contienen los datos que se han recolectado. En este capítulo usaremos los datos de la tabla 13-1 anterior para ilustrar algo de lo que hacemos en nuestro estudio de la estadística.

Muchas de las tareas de diferentes oficinas del gobierno de los Estados Unidos no se podrían ejecutar si estas oficinas no pudieran coleccionar una gran cantidad de datos para utilizarlos en su trabajo. El Congreso de los Estados Unidos tiene el poder "de imponer y recaudar impuestos—para pagar las deudas y proveer a la defensa común y al bienestar de los Estados Unidos". El total de los impuestos a recaudar depende de varias circunstancias. Enumera algunas. Ciertamente depende del número de habitantes de los Estados Unidos. El Congreso debe hacer el censo de la población "dentro del plazo de cada decena de años". El censo tomado en 1950 mostró que había unos 151,000,000 habitantes en los Estados Unidos. Otro censo se efectuó en 1960. Pide a tu bibliotecario que te ayude a buscar este dato de la población de los Estados Unidos en 1960.

La tabla 13-2 muestra la población en millones de habitantes arrojada por cada censo desde 1790 hasta 1950. La tabla muestra que la población en 1790 era de 3.9 millones de habitantes. Esto significa que habían 3,900,000 (3.9 × 1,000,000) habitantes en los Estados Unidos en esa época. ¿Es éste un número exacto o aproximado? La columna titulada Porcentaje de crecimiento muestra el porcentaje de crecimiento de la población durante el decenio precedente.

Tabla 13-2

Datos de la población de los Estados Unidos*

Censos años	Población en millones	Crecimiento en millones	Porcentaje de crecimiento
1790	3.9		
1800	5.3	1.4	35.1
1810	7.2	1.9	36.4
1820	9.6	2.4	33.1
1830	12.9	3.3	33.5
1840	17.1	4.2	32.7
1850	23.2	6.1	35.9
1860	31.4	8.2	35.6
1870	39.8	8.4	26.6
1880	50.2	10.4	26.0
1890	62.9	12.7	25.5
1900	76.0	13.1	20.7
1910	92.0	16.0	21.0
1920	105.7	13.7	14.9
1930	122.8	17.1	16.1
1940	131.7	8.9	7.2
1950	150.7	19.0	14.5

*De los Resumenes Estadísticos de los Estados Unidos, 1956.

Ejercicios 13-1

1. ¿Ves alguna tendencia general en los datos que se muestran en

la tabla?

2. ¿En qué década fue mayor el porcentaje de crecimiento? De tus estudios de historia, ¿conoces alguna razón para esto?
3. ¿En qué década fue mínimo el porcentaje de crecimiento? ¿Puedes explicarlo por la historia que has estudiado?
4. El hambre en Irlanda ocurrió en los años 1845, 1846 y 1847. ¿Cómo afectó a la población de los Estados Unidos?
5. ¿Cuál fue el porcentaje de crecimiento de la población desde 1870 a 1880?
6. Dispón los siguientes datos en un orden lógico. Las calificaciones de los estudiantes en una prueba de matemáticas fueron: 72%, 80%, 77%, 95%, 84%, 61%, 98%, 75%, 80%, 100%, 67%, 77%, 83%, 75%, 88%, 91%, 70%, 78%, 82% y 86%.

Utiliza un almanaque u otra fuente de referencia para encontrar la información que necesites en los problemas que siguen.

7. Haz una lista de la población de la ciudad más grande de tu estado para los años 1900, 1910, 1920, 1930, 1940 y 1950. (Refiérete a la ciudad en que vives si es bastante grande como para aparecer en las listas de población, o si puedes encontrar los datos.)
8. (a) Haz una lista del número de inmigrantes a los Estados Unidos durante los años comprendidos entre 1935 y 1950.
   (b) Dispón los números de la parte (a) en orden de menor a mayor.
9. Haz una lista del número de automóviles vendidos por los fabricantes de los Estados Unidos en cada uno de los siguientes años: 1910, 1915, 1920, 1925, 1930, 1935, 1940, 1945, 1950 y 1955.

13-2. Gráficas de segmentos

Los datos de que hemos hablado en la última sección se representan frecuentemente "dibujando una figura". La "figura" para los datos de la tabla 13-2 se ve en la figura 13-1. Esta

POBLACION DE LOS ESTADOS UNIDOS

1790 - 1960

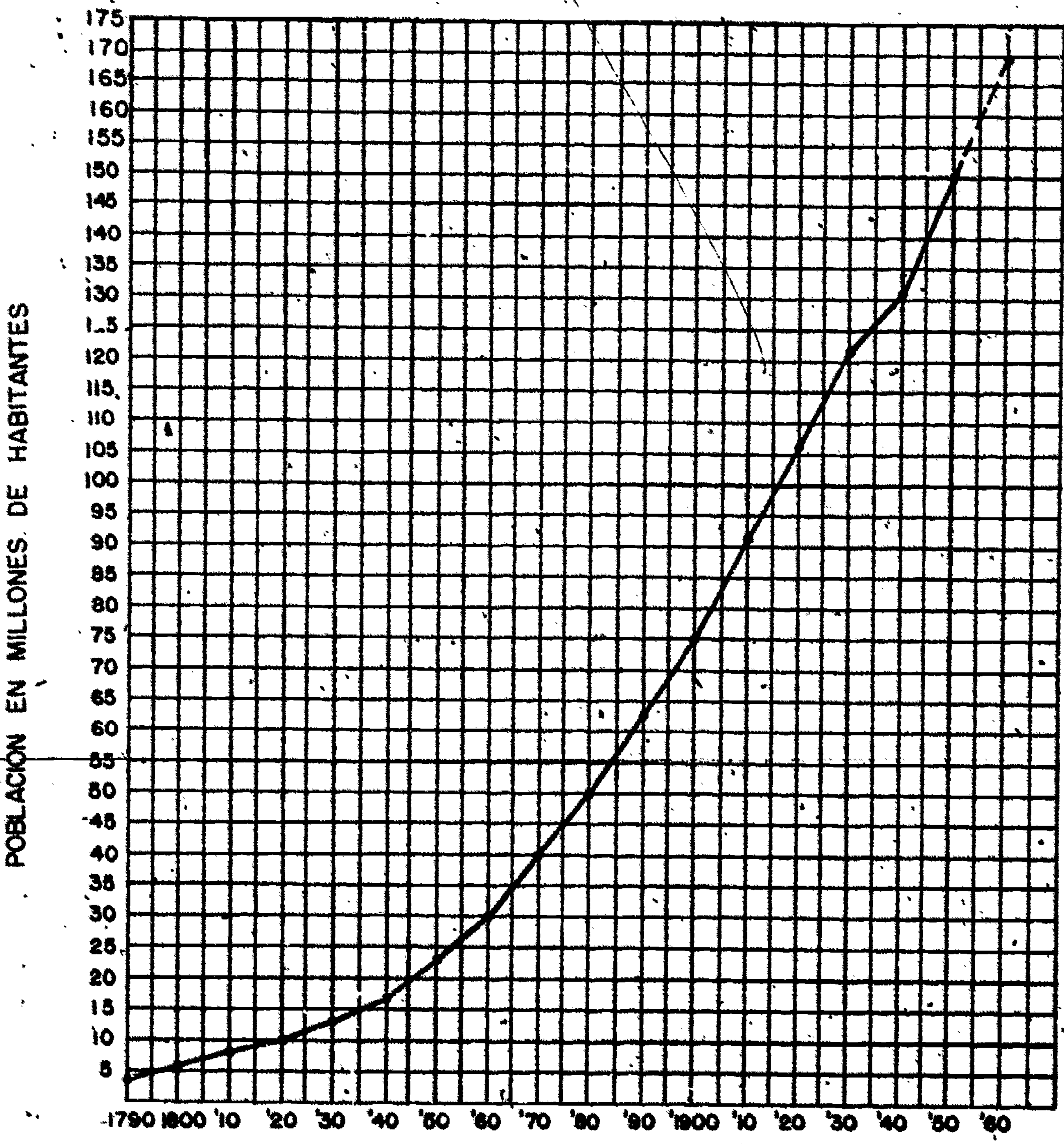


Figura 13-1

"figura" se llama gráfica de segmentos, como probablemente sepas. Tales gráficas se hacen habitualmente sobre papel cuadriculado como el que se muestra en la figura 13-1. Las gráficas de segmentos se usan para mostrar los cambios en algún artículo.

Se usan, como rectas numéricas, una recta horizontal y otra vertical. En la figura 13-1 la recta horizontal se utiliza para indicar tiempo. Observa que cada período de diez años está representado por la misma distancia a lo largo de la recta. La recta vertical indica el número de habitantes. ¿Cuántos habitantes representa cada unidad? Estas dos rectas se llaman rectas de referencia de la gráfica. Ellas muestran las escalas utilizadas para dibujar la gráfica.

¿Tendrían algún significado los números de las escalas si éstas no tuvieran nombre? ¿Serviría para algo una gráfica que no tuviera título? Una buena gráfica debe tener un título claramente escrito, que especifique la información, y sus escalas deben tener sentido completo y deben ser fáciles de leer.

Cada punto de la gráfica en la figura 13-1 representa la población del año cuyo número está en la escala horizontal exactamente debajo de ese punto. Para cada punto, la población se lee trazando una recta perpendicular desde el punto a la escala vertical y leyendo el número en ella. Los números que se usan en las gráficas son habitualmente aproximados, de manera que el número que se lee en un punto cualquiera es también un número aproximado. Para construir la gráfica, se marcan los puntos que representan la población para cada año del censo; luego estos puntos se unen mediante segmentos de recta. Los segmentos entre dos puntos consecutivos dan estimaciones de la población entre esos dos años del censo. Sin embargo, no hay seguridad de que estas estimaciones sean exactas, pues los cambios pueden haber sido más rápidos en una época que en otra.

Preguntas para analizar en clase

Usa la figura 13-1 para responder a las preguntas.

1. ¿Ha crecido la población entre 1900 y 1910 más que entre 1800 y 1810?

2. ¿Muestra la gráfica un decrecimiento de la población en algún período de diez años?
3. Si la población entre 1810 y 1820 hubiera sido la misma, ¿cómo se notaría esto en la gráfica?
4. ¿Cuál era la población aproximada en 1945? ¿Y en 1895? ¿En cuánto ha cambiado esa población entre los 50 años que indican estas fechas?
5. Si la población crece al mismo ritmo de 1950 a 1960 que de 1940 a 1950 (si la gráfica sube en línea recta de 1940 a 1960), ¿cuál será la población en 1960? Esta porción de la gráfica se indica por línea de puntos. Puesto que se conoce el censo de 1960, compara el resultado del censo con tu respuesta.

<u>Construcción de gráficas lineales</u>

Cuando se dibujan gráficas, los detalles se planean antes de poner la primera marca en el papel. Observa la información que quieres representar y el espacio que tienes disponible. Deja espacio suficiente para el título y para las marcas de las escalas. Las gráficas resultan mejor si todas las palabras se escriben con caracteres de imprenta en vez de manuscritas. Las gráficas deben ser tan grandes como el espacio lo permita. Traza las rectas con regla, y dibuja un marco para dar a la gráfica aspecto de acabada.

Las gráficas lineales requieren el uso de escalas. El mayor problema para construir una gráfica es elegir la escala que hay que utilizar. Hay maneras de saber cuánto debe representar cada unidad: si se usa papel de gráficas, los cuadrados del papel marcan unidades convenientes. Como ejemplo, usemos los datos de la tabla 13-2. Cuenta el número de censos entre 1790 y 1960. Como hay 18, la gráfica debe tener por lo menos 17 unidades a lo largo de la escala horizontal. (¿Por qué se necesitan sólo 17?) La escala horizontal comienza siempre al extremo izquierdo de la gráfica y en ese punto se pone un número. Si hubiera 344 unidades disponibles para usar en la escala horizontal, ¿qué podrías hacer? Cuenta los cuadrados a lo largo de la escala horizontal en la figura 13-1. En esta gráfica se han usado dos cuadrados para cada censo.

Ahora, observa la escala vertical. Representa el número de millones de habitantes de la población en los Estados Unidos. De la tabla 13-2, toma el mayor número de personas que necesitas representar en la gráfica. Antes de trabajar con los números de esta tabla se los puede redondear con la aproximación de un millón. Cuenta el número de unidades desde la escala horizontal hasta el extremo superior de la escala usada. (En la parte superior deja espacio suficiente para un título.) En la figura 13-1 hay 35 unidades disponibles a lo largo del eje vertical, y el mayor número de habitantes es 151,000,000. Divide el número de habitantes por el número de unidades disponibles. En este ejemplo el cociente resulta ser el enorme número 4,314,285 y todavía hay un resto. De acuerdo con esto, cada unidad debería representar 4,314,286 habitantes; pero sería muy difícil trabajar con este número. Cada unidad de la escala vertical debe representar el número más conveniente que exceda al cociente. En este caso, cada unidad representa 5,000,000 de habitantes. ¿Por qué debe ser el número utilizado para esta unidad mayor que el cociente?

¿Era necesario efectuar toda la división anterior? Como usaremos números aproximados para la gráfica, la división puede ser también aproximada. La población ha sido redondeada con la aproximación de un millón. Basta efectuar la división sólo hasta que el cociente indique el número de millones. Ahora el problema es fácil.

$$\begin{array}{r|l} & \;\;4 \\ 35 & 151000000 \\ & 140 \\ & \;\;11 \end{array}$$

El resto de las cifras no interesan, pues el número usado como unidad debe ser mayor que el cociente.

Las gráficas quedan mejor presentadas si se numeran sólo las líneas de las escalas que basten para hacerlas fácilmente legibles.

Ejercicios 13-2

1. Halla el número que debe representar cada unidad en cada uno de los casos siguientes:

	Número de cuadrados disponibles	Máximo número a representar
(a)	20	400
(b)	20	475
(c)	20	175,000
(d)	33	940
(e)	27	2,465,100

2. Construye una gráfica de segmentos para representar los datos que se dan en esta tabla:

Número de estudiantes de la Escuela Franklin de Primer Ciclo Secundario durante los años 1952 - 1957

1952 --- 86	1955 --- 196
1953 --- 150	1956 --- 235
1954 --- 164	1957 --- 254

3. Construye una gráfica de segmentos para representar los datos de la tabla 13-3.

Tabla 13-3

Votación popular en millones de votos para los candidatos presidenciales de los Estados Unidos 1928 a 1956.

Año	Partido Republicano	Partido Demócrata
1928	21.4	15.0
1932	15.8	22.8
1936	16.7	27.5
1940	22.3	26.8
1944	22.0	24.8
1948	22.0	24.1
1952	33.8	27.3
1956	35.6	25.7

Observa estas instrucciones:

(a) En la misma gráfica dibuja una línea quebrada para el partido Republicano y otra para el partido Demócrata.

(b) Busca en tus libros o en alguna otra parte el nombre del presidente electo y el nombre del candidato derrotado en cada elección.

(c) Utiliza las tablas 13-2 y 13-3 para hallar el porcentaje total de la población que votó por cada uno de los candidatos en la elección de 1940.

4. Construye una gráfica de segmentos para los datos del problema 7, Ejercicios 13-1.

5. Construye una gráfica de segmentos para los datos del problema 8, Ejercicios 13-1.

6. Construye una gráfica de segmentos para los datos del problema 9, Ejercicios 13-1.

13-3. Gráficas de barras

La tabla 13-4 da el alumnado del séptimo grado que hubo en los Estados Unidos entre los años 1952 - 1959 y el alumnado probable para los años 1960 - 1962.

Tabla 13-4

Alumnado del séptimo grado en los Estados Unidos entre 1952-1962

Año	Alumnado en miles
1952	2,159
1953	2,224
1954	2,354
1955	2,521
1956	2,586
1957	2,599
1958	2,707
1959	3,075
1960	*3,260
1961	*3,302
1962	*3,333

*Alumnado probable para los años 1960 - 1962.

Los datos de esta tabla se representan por la gráfica de la figura 13-2. Esta clase de gráfica se llama <u>gráfica de barras</u>. Las gráficas de barras representan comparaciones entre objetos semejantes. Los datos que se dan para las gráficas de segmentos pueden ser también adecuados para las gráficas de barras. Los datos que representan cambios pueden ser considerados igualmente como comparaciones entre conjuntos semejantes; un número asociado con cada período de tiempo se considera, entonces, como un conjunto de objetos semejantes. Hay algunos datos que son adecuados para las gráficas de barras y no lo son para las gráficas de segmentos. Un ejemplo sería una gráfica que compara las alturas de las 10 montañas más altas de Norteamérica. En la figura 13-2 los años se representan a lo largo de la recta horizontal de la base y el alumnado en millares se representa a lo largo de la recta vertical de la izquierda. Las barras se espacian a lo largo de la recta base de manera que la distancia entre dos barras cualesquiera sea la misma. También el ancho de cada barra es igual para todas. En esta gráfica particular, el ancho de los espacios y el ancho de las barras son iguales, pero esto no tiene por qué ser siempre así. El nombre de cada barra es el número del año escrito en ~~su~~ base. En algunas gráficas, las barras tendrán nombres que no son números. Cuando te propongas dibujar una gráfica, deja suficiente espacio en qué escribir el nombre de las barras.

El número representado por cada barra se puede leer en la escala vertical. Es el número representado por aquel punto de la escala vertical que está en la misma recta horizontal que el extremo superior de la barra.

Al construir gráficas de barras, sigue todos los principios que hemos dado para construir buenas gráficas. Trata de utilizar todo el ancho disponible. Esto te será posible porque el ancho de los espacios puede ser diferente del ancho de las barras. El número que representa cada unidad en la escala vertical se encuentra de la misma manera que en las gráficas de segmentos.

ALUMNADO DEL SEPTIMO GRADO EN LOS ESTADOS UNIDOS

1952 - 1962

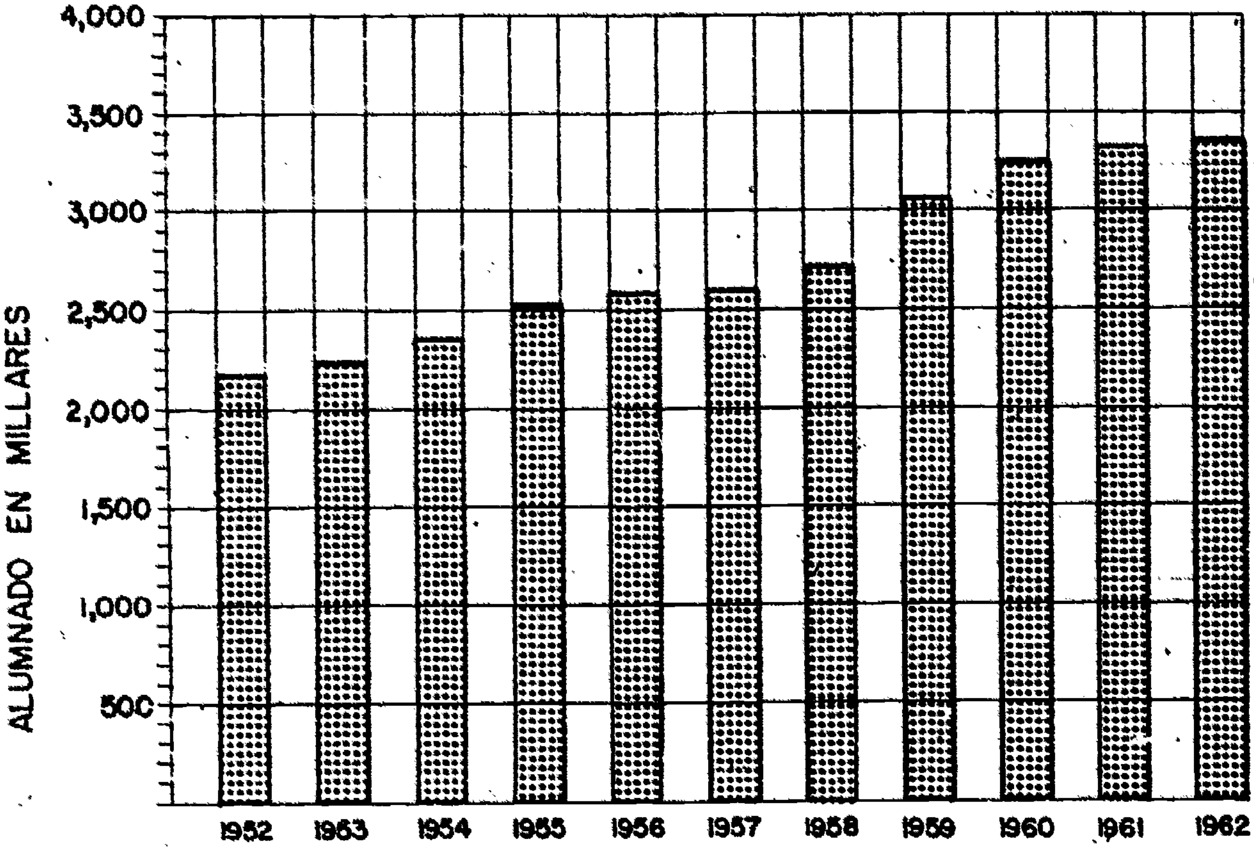


Figura 13-2

Ejercicios 13-3

1. Si cada alumno que cursó el séptimo grado en 1960 necesitaba un texto de matemáticas que costaba $3.25, ¿cuánto se gastó en total para proveerles libros a todos?
2. ¿Durante qué año el alumnado llegó a ser de 3 millones de alumnos?
3. ¿Entre qué par de años consecutivos hubo el mayor cambio de alumnado? Utiliza la figura 13-2 para obtener la respuesta, y luego consulta la tabla 13-4 para ver si tu respuesta es correcta.
4. Dibuja una gráfica de barras para representar el número de personas muertas en diferentes clases de accidentes durante 1956, como se muestra en esta tabla:

Accidentes en vehículos motorizados	40,000
Caídas	20,200
Incendios	6,500
Inundaciones	6,100
Accidentes ferroviarios	2,650

5. A continuación se dan las máximas altitudes de algunos estados. Redondea los datos con la aproximación de 100 pies, y luego construye una gráfica de barras.

Alabama	2,407 pies
Alaska	20,320 pies
Arizona	12,670 pies
Arkansas	2,830 pies
California	14,495 pies
Colorado	14,431 pies

6. Hasta cierta fecha durante la temporada de béisbol de 1960, los equipos de la Liga Nacional habían ganado los partidos que se indican. Represéntalos en una gráfica de barras.

Pittsburgh	64	San Francisco	51
San Luis	60	Cincinnati	46
Milwaukee	57	Filadelfia	42
Los Angeles	56	Chicago	39

13-4. Gráficas circulares

En la figura 13-3 se muestra una gráfica circular. Tal gráfica se usa para representar las relaciones que tienen entre sí las partes de un todo, y entre el todo y cualquiera de sus partes. Esta gráfica muestra los porcentajes de sus ingresos que una familia gasta en alimentos, ropa, alquiler y gastos varios, y el porcentaje de ingresos que ahorra.

COMO GASTA UNA FAMILIA SU DINERO

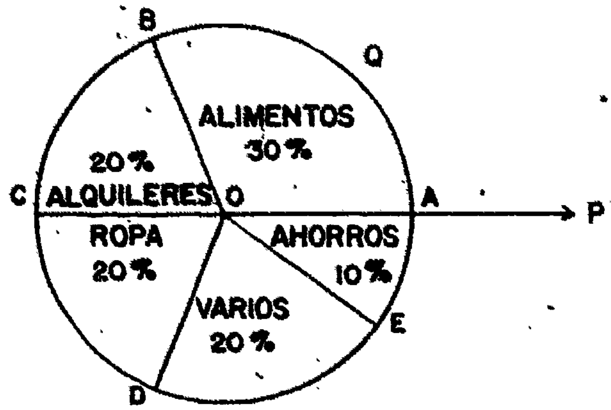


Figura 13-3

La familia gasta 30 por ciento de sus ingresos en alimentos, 20 por ciento en ropa, 20 por ciento en alquiler, 20 por ciento en gastos varios, y ahorra 10 por ciento. El ingreso total de la familia se representa por el área del círculo. El radio del círculo es arbitrario y se escoge de tal manera que quepa en el espacio disponible; pero que, al mismo tiempo, permita distinguir con claridad las partes en que se divida dicho círculo.

Para representar el 30 por ciento de los ingresos que la familia gasta en alimentos, necesitaremos 30 por ciento del área del círculo. Para obtener esta área, comenzamos dibujando el rayo $\overrightarrow{OP}$, marcando con la letra A la intersección del rayo con la circunferencia. Sabemos cómo dividir la circunferencia en 360 partes iguales, dibujando 360 ángulos de 1 grado, todos con vértice en O. Treinta por ciento de 360° es 108°. Si se coloca el limbo graduado a lo largo de $\overrightarrow{OA}$ con su vértice colocado en O y la marca de 0° sobre $\overrightarrow{OA}$, entonces la marca de 108° caerá en el rayo $\overrightarrow{OB}$. El área limitada por la curva cerrada OAQB es 30 por ciento del área del círculo. En consecuencia, el interior de la curva cerrada OAQB representa la parte de los ingresos que se gasta en alimentos.

¿Qué porcentaje del área del círculo representa los alquileres? Veinte por ciento de 360° es 72°. Colocando el limbo graduado a lo largo de $\overrightarrow{OB}$ con la marca del vértice en O y con la marca de 0° sobre $\overrightarrow{OB}$, la marca de 72° determinará el rayo $\overrightarrow{OC}$.

Continúa de la misma manera para determinar las áreas que representan ropa, gastos varios y ahorros.

Si el ingreso neto de la familia es $6,000, ¿cuánto gasta en alimentos? ¿Cuánto ahorra?

En cierta escuela hay 480 alumnos. Al mediodía 80 alumnos regresan a su casa para almorzar, 120 llevan su almuerzo y 280 compran su almuerzo en el comedor de la escuela. La gráfica circular de la figura 13-4 muestra la manera como se reparten los alumnos a la hora del almuerzo. Antes de construir la gráfica circular hemos tenido que hallar qué porcentaje o qué parte fraccionaria de los alumnos van a su casa para almorzar, qué porcentaje o parte fraccionaria llevan su almuerzo y qué porcentaje o parte fraccionaria van al comedor. En la tabla se muestran estos porcentajes y fracciones.

Número de alumnos		Parte fraccionaria del total	Porcentaje	Grados
Vuelven a su casa	80	$\frac{1}{6}$	$16\frac{2}{3}$	60
Llevan el almuerzo	120	$\frac{1}{4}$	25	90
Compran el almuerzo	280	$\frac{7}{12}$	$58\frac{1}{3}$	210
Total	480	1	100	360

COMO ALMUERZAN LOS ALUMNOS

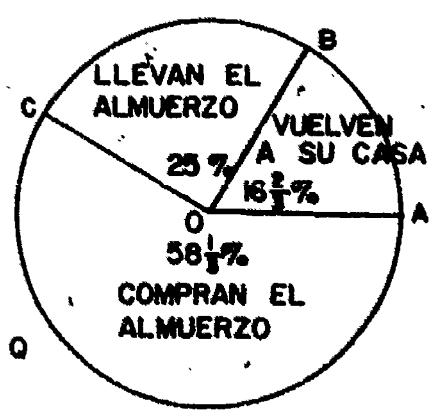


Figura 13-4

Para hallar el número de grados de la curva AB, tomamos $\frac{1}{6}$ de 360 y obtenemos 60; el número de grados de la curva BC se encuentra tomando $\frac{1}{4}$ de 360 y se obtiene 90; finalmente, para obtener el número de grados de la curva CQA se toma $\frac{7}{12}$ de 360, y se obtiene 210.

Ejercicios 13-4

Construye una gráfica circular para representar la información dada en cada uno de los siguientes problemas. Construye una gráfica para cada problema. Redondea los ángulos con la aproximación de un grado.

1. En 1949 se encontró que los accidentes relacionados con la escuela, que afectaron a los alumnos del séptimo grado en los Estados Unidos, ocurrieron como se indica. (Las cifras que se dan son muy próximas de las reales.)
   - 60 por ciento de los accidentes ocurrieron en los edificios escolares.
   - 30 por ciento de los accidentes ocurrieron en los campos deportivos escolares.
   - 10 por ciento de los accidentes ocurrieron en el camino de ida a la escuela o de regreso a la casa.
2. En 1956 las cifras (nuevamente, muy próximas a las reales) de los accidentes del problema 1 fueron las siguientes:
   - 36 por ciento de los accidentes ocurrieron en los edificios escolares.
   - 54 por ciento de los accidentes ocurrieron en los campos deportivos escolares.
   - 10 por ciento de los accidentes ocurrieron en el camino de ida a la escuela o de regreso a la casa.
3. El Club Teatro ha recaudado fondos con que comprar cortinas destinadas para su escenario. Un 79% del costo de las cortinas se obtuvo de la venta de boletos para una serie de representaciones escolares. Aproximadamente 16% de los fondos provino de la venta de programas, y el 5% restante se ganó vendiendo bombones.
4. Los alumnos de la Escuela Wáshington de Primer Ciclo Secundario hacen viajes más o menos largos para asistir a clase.

El 50% de ellos viven a una distancia no mayor de una milla de la escuela; aproximadamente 28% viven a más de una milla, pero a menos de dos millas de distancia; y 22% tienen sus casas a dos o más millas de distancia.

13-5. Síntesis de los datos

Ciertas informaciones pueden determinarse fácilmente mirando los datos tabulados. Sin embargo, algunas veces, las tablas resultan confusas cuando tienen demasiados datos. En estos casos suele ser mejor describir los datos utilizando unos pocos números. Suele ser muy útil la determinación de un prorrateo del conjunto de los números que se consideran.

¿Sabes cómo efectuar un prorrateo? Lo has hecho hace algún tiempo, pero ¿sabes que hay varias clases de prorrateos?

Media aritmética

Cuando efectúas el prorrateo de un conjunto de datos numéricos sumándolos y luego dividiendo la suma por el número de datos, hallas un número que se emplea como representante de los números del conjunto. Este prorrateo tan útil, con el cual ya estás familiarizado, se llama media aritmética o media. (En este capítulo, todas las veces en que se use sola la palabra media será para referirse a la media aritmética.)

Observemos una vez más las estaturas registradas en la tabla 13-1 que se reproduce a continuación. Esta tabla da una lista de las estaturas, ordenadas de mayor a menor, de 15 alumnos.

Tabla 13-1

Estaturas de 15 alumnos del séptimo grado

Alumno	Estatura en pulgadas
1	65
2	64
3	63
4	61
5	61
6	61
7	60
8	59
9	57
10	55
11	55
12	54
13	54
14	53
15	52

Para describir este conjunto de datos, ¿podemos encontrar un número que sirva para representar todas estas medidas? Un número tal podría ser la media aritmética. Para esta tabla la estatura media es $\frac{\text{suma de las alturas}}{\text{número de alumnos}} = \frac{874}{15} \approx 58$. Esta medida, comúnmente usada, se puede calcular sin necesidad de disponer los datos de una manera especial.

Promedio

Otro modo de obtener un número que represente a los números de un conjunto de datos es hallar un número tal que la mitad de los números del conjunto sean mayores y la otra mitad menores que el número hallado.

El promedio de un conjunto de números es el número situado en la mitad del conjunto cuando los números de este conjunto se disponen en orden creciente o decreciente. En el conjunto de las estaturas de la tabla 13-1 el número que está en el medio es 59. Este es el promedio del conjunto. La mitad de los números son mayores que 59 y la otra mitad son menores. Siete alumnos tienen estaturas mayores que 59 pulgadas y siete tienen estaturas menores que 59 pulgadas.

Si el número de elementos del conjunto es par, no hay número medio o central. Entonces, debemos definir el promedio en este caso. Si hay un número par de elementos en el conjunto, el promedio se toma generalmente como la media de los dos números centrales. Por ejemplo, en el conjunto de números 8, 10, 11, 12, 14, 16, 17, 19 los dos números centrales son 12 y 14. El promedio es 13, que es la media de 12 y 14, a pesar de que no está en el conjunto. Algunas veces hay varios números que son iguales al promedio. El conjunto de calificaciones 12, 13, 15, 15, 15, 15, 16, 18, 19, 20 tiene 10 números. Los dos números centrales son iguales a 15 y, por lo tanto, el promedio es 15. Pero los números tercero y cuarto son también 15, de manera que 15 no es un número tal que 5 de las calificaciones sean menores y 5 sean mayores que él.

En el conjunto de salarios \$2,050, \$2,100, \$2,300, \$2,400, \$2,500, \$2,600, \$2,700, \$2,700, \$2,700, \$3,150 el salario promedio es \$2,550. La media aritmética es \$2,520. El promedio y la media aritmética son aproximadamente iguales. Sin embargo, si el mayor salario hubiera sido \$5,150 en lugar de \$3,150, la media aritmética sería \$2,720, aunque el promedio continúa siendo \$2,550. Esto explica que la utilidad del promedio para describir un conjunto de números se funda frecuentemente en el hecho de que un número (o algunos números del conjunto) no afectan al promedio en la misma proporción en que afectan a la media aritmética.

Modo

¿Qué estatura aparece más veces que las otras en la tabla 13-1? ¿Cuántos alumnos tienen esta estatura? Esa estatura se llama el modo.

En conjuntos tales como los números naturales 1, 2, 3, 4, 5, ... ningún número aparece más de una vez. Pero en un conjunto de datos, un número o varios números pueden repetirse varias veces. Si un número aparece en el conjunto de datos más frecuentemente que ningún otro número, se le llama modo. Puede haber varios modos. En la tabla 13-1 había exactamente un modo: 61. En el conjunto de sueldos \$2,050, \$2,100, \$2,300, \$2,400, \$2,500, \$2,600, \$2,700, \$2,700, \$2,700, \$3,150 el modo es \$2,700. Pero en el conjunto de calificaciones 19, 20, 21, 21, 21, 24, 26, 26, 26, 29, 30 hay dos modos: 21 y 26. Si hubiera habido una calificación más, por ejemplo de 21, en este conjunto, ¿cuál habría sido el modo? Si en la tabla 13-1 el duodécimo alumno hubiera tenido 55 pulgadas de estatura, ¿cómo habría afectado esto al modo?

Ejercicios 13-5a

1. Halla el modo de la siguiente lista de calificaciones: 79, 94, 85, 81, 74, 85, 91, 87, 69, 85, 83.
2. Para las calificaciones del problema 1, halla:
   (a) La media. (b) El promedio.
3. Unos empleados han recibido los siguientes sueldos anuales: \$4,000, \$6,000, \$12,500, \$5,000, \$7,000, \$5,500, \$4,500, \$5,000, \$6,500, \$5,000.
   (a) Halla la media de los datos.
   (b) ¿Cuántos sueldos son mayores que la media?
   (c) ¿Cuántos sueldos son menores que la media?
   (d) ¿Te parece que la media es una buena manera de describir el sueldo tipo de estos empleados?
   (e) Halla el promedio del conjunto de datos.
   (f) ¿Te parece que el promedio representa bien estos datos?
4. A continuación se dan las temperaturas de cierta ciudad, en grados Fahrenheit a las 6 p.m. durante un período de dos semanas: 47, 68, 58, 80, 42, 43, 68, 74, 43, 46, 48, 76, 48, 50. Halla:
   (a) La media. (b) El promedio.

Agrupación de los datos

Si estuvieras haciendo una lista de las estaturas de un número muy grande de alumnos, podría resultarte enojoso anotar separadamente cada estatura. Te resultaría más simple agrupar los números de esta manera:

Estatura en pulgadas	Número de alumnos
62-64	12
59-61	17
56-58	42
53-55	57
50-52	33
47-49	14

Para hallar el promedio, averigua primero el número total de alumnos y divídelo por 2. La suma de 12 + 17 + 42 + 57 + 33 + 14 es 175, y $\frac{175}{2} = 37\frac{1}{2}$, de manera que el alumno que está en el medio será el 88 ésimo (octogésimo octavo), contado de arriba hacia abajo o de abajo hacia arriba. Si contamos desde arriba, 12 + 17 + 42 = 71, necesitamos 17 más para completar 88. Si del grupo de 57 tomamos 17 más, encontramos el promedio. Puesto que la 88 ésima (octogésima octava) persona estaba en ese grupo, decimos que el promedio de las estaturas del grupo completo de alumnos está entre 53 y 55 pulgadas. Como la 88 ésima persona aparece antes de pasar el punto medio de tal grupo contando hacia abajo, podríamos decir mejor que el promedio de las estaturas está más cerca de 55 que de 53.

Para verificar nuestro trabajo, contamos de abajo hacia arriba 88 personas. 14 + 33 = 47. Necesitamos 41 personas más para llegar a 88, lo que nos lleva a la parte superior del grupo de 57, como hemos encontrado cuando contábamos desde arriba. Nuevamente hallamos la 88 ésima persona dentro del grupo de 57, cuya estatura está entre 53 y 55. Entonces el promedio de las estaturas del grupo está entre 53 y 55 pulgadas.

Ejercicios 13-5b

1. Da un ejemplo de datos que el director de tu escuela preferiría tener en grupos y no en números separados.
2. Halla el promedio de los siguientes grupos de edades. ¿Cuál es el promedio de las edades?

Edades en años	Número en el grupo
27-29	35
24-26	48
21-23	68
18-20	18
15-17	94
12-14	53
9-11	73
6-8	26

3. Usando intervalos de 5, a saber 50-54, 55-59, etc., a 90-94, halla el promedio, agrupando los siguientes datos de temperaturas: 62, 74, 73, 91, 68, 84, 75, 76, 80, 77, 68, 72, 71, 56, 82, 74, 55, 72, 50, 63, 71. Marca una columna con la

palabra "temperatura" y otra columna con "frecuencia".

Dispersión

La media aritmética, el modo y el promedio son prorrateos. Cada uno de ellos es una medida que nos da una idea del tamaño de las mediciones, y puede ser considerado como un número representativo o típico.

Si queremos resumir un conjunto de datos, podemos hacerlo exactamente con dos números. Uno de los números será un prorrateo (media aritmética, modo o promedio) para darnos una noción del tamaño del elemento tipo. El otro número debe darnos una medida de cómo se diferencian los datos de nuestro prorrateo. Suponte que queremos resumir estos dos conjuntos de números:

$$A = \{40, 50, 60\}$$
$$B = \{49, 50, 51\}$$

La media y el promedio del conjunto A son los mismos que la media y el promedio del conjunto B, pero los números del conjunto B están menos separados que los números del conjunto A. Una manera de medir esta "separación" o "dispersión" es hallar la diferencia entre los números mayor y menor del conjunto. Esta diferencia se llama el rango. El rango de los números del conjunto A es 20; el rango de los números del conjunto B es 2.

Podemos ahora describir el conjunto A como el conjunto de los números cuya media es 50 y cuyo rango es 20. Estos dos números nos dan una breve descripción del conjunto. Podemos describir las estaturas dadas en la tabla 13-1 para los alumnos del séptimo grado diciendo que su media es 58 pulgadas y su rango es 13 pulgadas. Con esto podemos imaginar que la medida de las estaturas está alrededor de 58 y que una medida de la diferencia de las estaturas es 12.

Otra medida de la separación o dispersión de un conjunto de números es la desviación media. Para hallar la desviación media debemos primero hallar la desviación o diferencia que hay entre cada número y la media aritmética.

Considera el conjunto de números 4, 8, 10, 4, 5, 4, 7. ¿Cuál es la media de este conjunto? ¿Cuál es la diferencia (desviación) entre el mayor número de este conjunto y la media? Las desviaciones de los números de este conjunto respecto de la media son 2, 2, 4, 2, 1, 2, 1. Estos números nos indican cómo se dispersan, o separan, los números del conjunto respecto de la media. La desviación media es la media aritmética de estas desviaciones. Tomando la media de 2, 2, 4, 2, 1, 2, 1 obtenemos $\frac{2+2+4+2+1+2+1}{7} = 2$. Utilicemos esta medida, la desviación media, para describir otro conjunto de datos.

Los ingresos totales del gobierno federal en los años 1946 - 1955 fueron así:

Año	Billones	Desviaciones respecto de la media
1946	44	11.5
1947	45	10.5
1948	46	9.5
1949	43	12.5
1950	41	14.5
1951	53	2.5
1952	68	12.5
1953	73	17.5
1954	73	17.5
1955	69	13.5
Total	555	122.0

La media aritmética de estos ingresos es el total, 555, dividido por 10, es decir, 55.5. (555 y 55.5 representan billones.)

La tercera columna muestra la desviación del ingreso de cada año respecto de la media, 55.5.

La media de las desviaciones es 122 dividido por 10, es decir, 12.2.

Ahora podemos condensar la información de la tabla diciendo: Los ingresos del gobierno federal en los años 1946 - 1955, tuvieron una media de 55.5 billones de dólares y una desviación media de 12.2 billones de dólares.

Ejercicios 13-5c

(Las primeras tres preguntas de estos ejercicios se refieren a los datos de los ingresos del gobierno federal en 1946 - 1955.)

1. ¿En qué año o años fue máxima la desviación?

2. ¿En qué año o años fue mínima la desviación?
3. Halla la media y la desviación media para los años 1946 - 1949.
4. Halla, con la aproximación de una décima, la media y la desviación media de las siguientes calificaciones: 85, 82, 58, 7[illegible], 90, 64, 60, 62, 84 y 83.
5. Halla la media y la desviación media de las calificaciones (del mismo examen, pero en otra clase): 94, 84, 68, 74, 98, 70, 9[illegible], 84, [illegible] y 9[illegible].
*6. Otro método para calcular la media aritmética se muestra en el siguiente ejemplo:

   Ejemplo. Calcula la media aritmética de este conjunto de calificaciones: 10, 11, 13, 15, 19, 20, 21, 21, 23. Comenzamos tomando un número razonable como media. Suponte que optamos por 18. En seguida hallamos la desviación de cada calificación del conjunto respecto de 18.

Calificaciones	Desviaciones respecto de 18
10	8
11	7
13	5
15	3
19	1
20	2
21	3
21	3
23	5

   La suma de las desviaciones para las calificaciones menores que 18 es 23. La suma correspondiente a las desviaciones de las calificaciones mayores que 18 es 14. Tomamos la diferencia 23 - 14 = 9 y la dividimos por 9, que es el número de calificaciones: 9 ÷ 9 = 1. Como las desviaciones respecto de 18 eran mayores para las calificaciones menores de 18 que para las calificaciones mayores que 18, restamos 1 de 18 para obtener la media correcta: 17.

   Utiliza el método del ejemplo anterior para hallar la media del siguiente conjunto de calificaciones: 40, 43, 44, 47, 48, 49, 51.

La media, el promedio y el modo, para un conjunto de datos, se llaman medidas de tendencia central. Se los da este nombre porque cada una de ellas es un número hacia el cual los datos tienden a "centralizarse". Todas estas medidas de tendencia central se ilustran en el siguiente conjunto de sueldos de 12 personas y en la gráfica de la figura 13-5. Sueldos: $4,000, $4,500, $4,500, $5,000, $5,000, $5,000, $5,250, $5,250, $5,250, $5,250, $5,500, $6,000.

SUELDOS DE UN GRUPO SELECCIONADO

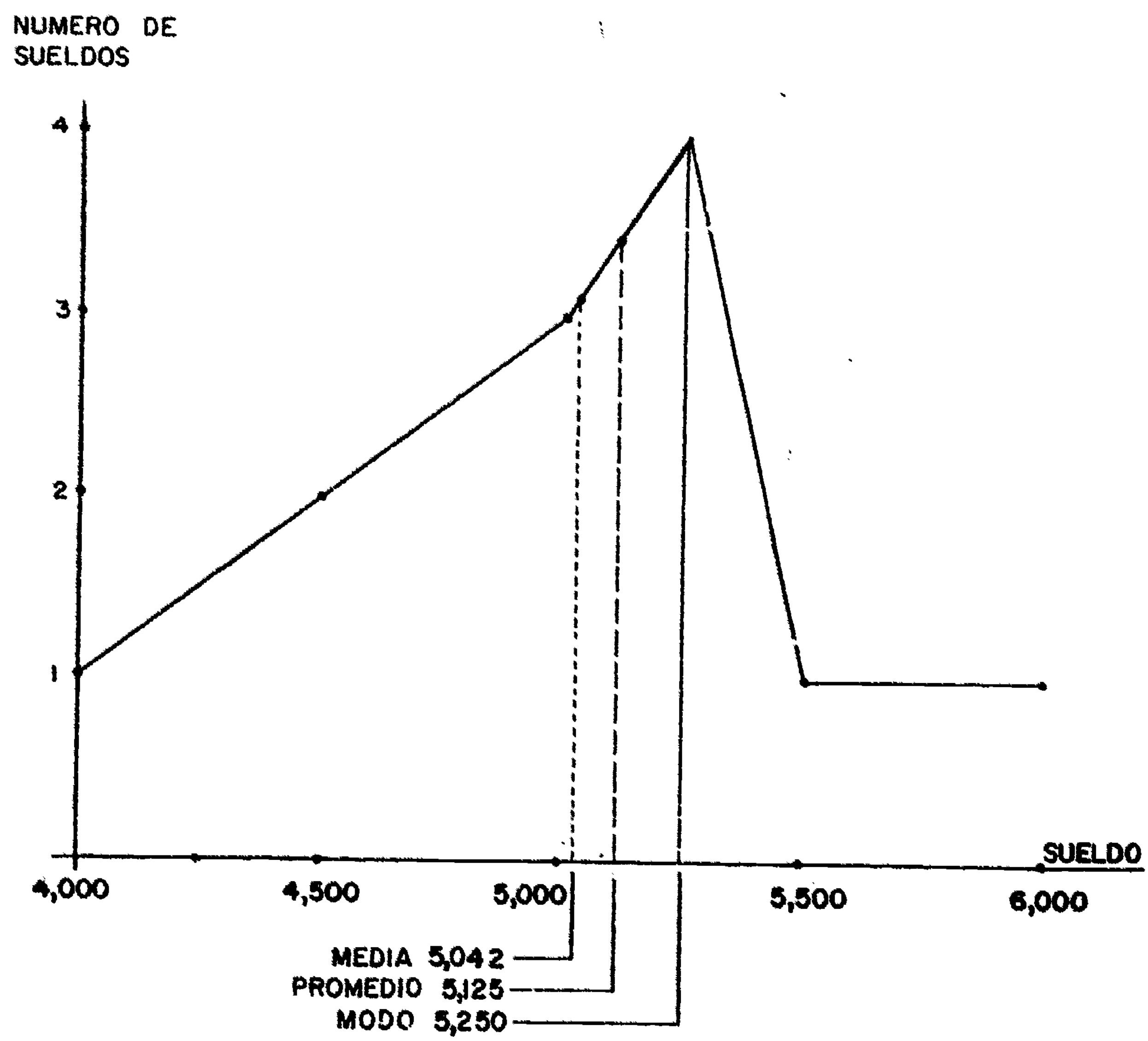


Figura 13-5

Cálculo de la desviación media respecto de la media aritmética, $5,042 (con la aproximación de un dólar).

Sueldos	Desviación respecto de $5,042
$4,000	$1,042
4,500	542
4,500	542
5,000	42
5,000	42
5,000	42
5,250	208
5,250	208
5,250	208
5,250	208
5,500	458
6,000	958
Total	$4,500

$\frac{\$4500}{12} = \$375$, desviación media respecto de la media aritmética.

Rango: $6,000 - $4,000 = $2,000.

La posición de las rectas que representan la media, el promedio y el modo muestran que estos números son aproximadamente iguales y la gráfica muestra que los sueldos están más o menos igualmente distribuidos a ambos lados de esas rectas.

13-6. Muestreo

Todos sabemos que las elecciones presidenciales se realizan cada cuatro años en los Estados Unidos. ¿En qué año se realizarán las próximas? La gente se interesa mucho por los resultados de las elecciones. Algunas veces, mucho antes de que las elecciones se realicen, algunas organizaciones hacen predicciones respecto de quien será elegido. Estas organizaciones no sólo predicen quién será elegido, sino también el porcentaje de votos que alcanzará cada candidato. Los candidatos, y el porcentaje de votos pronosticado para cada uno de ellos en la elección de 1948, para tres diferentes listas de votantes, se muestran en la tabla que sigue:

Candidatos	Dewey	Truman	Thurmond	Wallace
Lista número 1	49.5%	44.5%	2%	4%
Lista número 2	49.9%	44.8%	1.6%	3.3%
Lista número 3	52.2%	37.1%	5.2%	4.3%

En la elección, el porcentaje de votos para cada uno de ellos fue: Truman 49.4%, Dewey 45.0%, Thurmond 2.4% y Wallace 2.4%. ¿Ves por qué a esta elección se le llama "elección de las sorpresas"?

Aunque ninguna de las listas predijo la elección correctamente, sus pronósticos fueron aproximados. ¿Cómo lo hicieron? ¿Recorrieron los Estados Unidos y preguntaron a cada votante por quién iba a votar? ¿O escribieron una carta a cada votante? Cualquiera de estos procedimientos hubiera resultado muy costoso y hubiera necesitado mucho tiempo. En vez de eso, emplearon el método llamado <u>muestreo</u>. Esto significa que las organizaciones que hicieron las predicciones seleccionaron una "muestra" de la población de los Estados Unidos. Luego, después de preguntar a la gente de la "muestra" por quién iba a votar, las organizaciones predijeron que la votación en el país entero estaría aproximadamente en la misma razón que la votación de la "muestra".

Probablemente has visto alguna vez un contador de sangre; el médico te toma una pequeña cantidad de sangre de la punta del dedo, o del lóbulo de la oreja, y luego cuenta los glóbulos rojos y blancos que hay en ella. A pesar de que te ha tomado una muestra muy pequeña de la sangre, considera la cuenta que obtiene como una buena representación del número de glóbulos que tienes en toda la sangre. Probablemente puedes imaginar algunos otros ejemplos de muestreo.

Suponte que sabes que todos los empleados cuyos nombres aparecen en el registro de empleados de una gran fábrica son hombres cuya edad está por encima de los veintiún años. Preguntémonos cómo podemos usar el método del muestreo para obtener una estimación de la estatura media de esos hombres. Podrías elegir al primero y al último de los nombres indicados en el registro y hallar la media de su estatura. O, podrías elegir el primer nombre de cada letra del alfabeto, o el último nombre de cada letra, o ambos. Hay muchas maneras de escoger una muestra. Algunas pueden ser buenas y otras malas. ¿Encuentras alguna objeción para cualquiera de los métodos sugeridos? La manera de elegir una muestra de modo que represente bien al grupo del que se selecciona es una parte difícil de la tarea.

Ejercicios 13-6

1. Este problema es un proyecto de muestreo para tu clase. El objetivo es hallar la estatura media de tus condiscípulos. Como es probable que haya una diferencia entre las estaturas de los niños y de las niñas, halla separadamente las medias para los niños y para las niñas. Los niños hallarán la media de los niños y las niñas hallarán la media de las niñas. Las instrucciones se dan sólo para los niños, pero las niñas deben sustituir la palabra niños por "niñas".
   (a) Elige una muestra de cada una de las siguientes maneras:
      (1) Todos los niños que tienen su cumpleaños en marzo, agosto o diciembre.
      (2) Todos los niños cuyos nombres comiencen con G, M o T.
      (3) Todos los niños que se sienten en una misma fila escogida en el salón de matemáticas.
   (b) Halla la estatura media utilizando la muestra (1).
   (c) Halla la estatura media, utilizando la muestra (2).
   (d) Halla la estatura media, usando la muestra (3).
   (e) Halla la estatura media de todos los niños de la clase.
   (f) ¿Cuál de las tres muestras representaba mejor a todos los niños de la clase?
   (g) Al elegir las muestras, ¿es importante que la muestra se escoja de manera que no dé demasiada representación a una parte?

2. En la elección de 1948 para presidente de los Estados Unidos, votaron 48,834,000 electores (con la aproximación de un millar).

   (a) Si la lista número 1 de la página 605 del texto hubiera sido correcta, ¿cuántos votos habría alcanzado cada candidato? Da tu respuesta con una aproximación de 10,000.

   (b) Los porcentajes de los votos realmente alcanzados por cada candidato se dan después de la tabla de las listas. Utiliza esos porcentajes para hallar el número de votos que recibió cada candidato. Redondea las cantidades con una aproximación de 10,000 votos.

13-7. Resumen

El tema de la estadística trata, en parte, de la recopilación de datos, la tabulación de los mismos y su representación mediante gráficas. La tabulación y la representación gráfica de los datos deben efectuarse de tal manera que se pueda interpretar y resumir fácilmente lo que esos datos dicen. Las gráficas de segmentos, de barras y las circulares son unos pocos ejemplos de las clases de gráficas que se pueden emplear.

Has aprendido que hay varias medidas diferentes para la tendencia central de un mismo conjunto de datos. La próxima vez que veas gráficas o tablas de un conjunto de cifras en los periódicos, revistas o en tu libro de estudios sociales, obsérvalas cuidadosamente. Si se mencionan prorrateos, trata de averiguar qué prorrateo se usa. Cualquiera que sea la clase de prorrateo que se use, tienes la posibilidad de preguntar si da la mejor representación de todos los datos.

Para ayudarte, recuerda los nuevos términos que se te han dado al trabajar con las estadísticas, los cuales son:

Media aritmética o media -- la suma de todos los números del conjunto dividida por el número de elementos del conjunto.

Promedio -- número medio o central del conjunto cuando los datos se ordenan o bien de menor a mayor o bien de mayor a menor. Cuando no hay un número medio, el promedio es la media de los dos números medios o centrales.

Modo -- número que apareee más veces en la lista de datos. Puede haber varios modos.

Rango -- diferencia entre los números mayor y menor del conjunto.

Desviación media -- media de las desviaciones respecto de la media aritmética.

Capítulo 14

EL FUNCIONAMIENTO DE LAS MATEMATICAS EN LA CIENCIA

14-1. El sube y baja científico

¿Has jugado alguna vez al sube y baja?

Si pesas 100 libras y tu compañero de juegos del otro lado del sube y baja pesa 85 libras, ¿en qué sitio de la palanca debes sentarte para que se equilibren los dos lados? ¿Estará él más cerca o más lejos del centro que tú? ¿Puedes decir cuánto más?

El sube y baja es una especie de máquina simple llamada también balancín, que se usa mucho en el hogar, en el trabajo y en los laboratorios científicos. Pertenece a la familia de máquinas llamadas "palancas". Naturalmente, ¡no todas las palancas funcionan como un sube y baja! Utilizas una palanca para abrir una botella. Usas otra clase de palanca para levantar tu automóvil o mover una piedra. ¿Puedes imaginar algunos otros ejemplos de palancas?

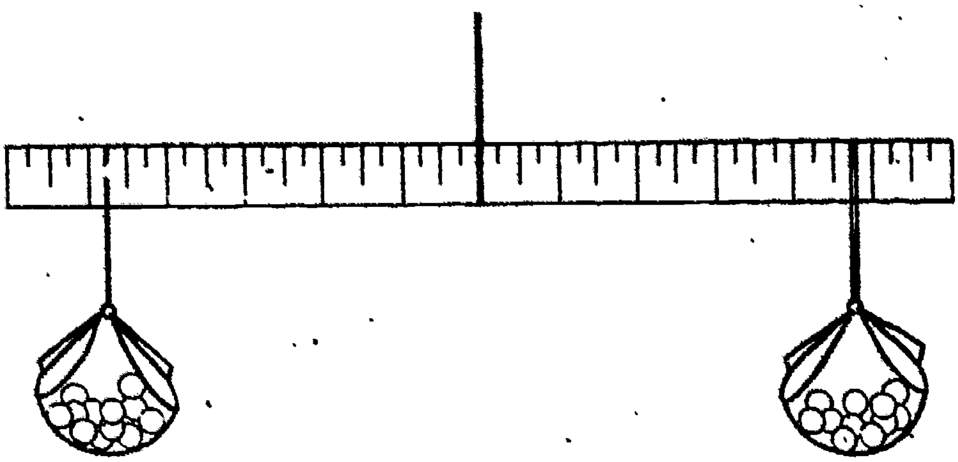
Los hombres de ciencia utilizan palancas de construcción muy fina en sus laboratorios. El tipo más simple de ellas es la balanza de laboratorio ordinaria. Probablemente tienes alguna en tu aula de ciencia. Los hombres de ciencia han estudiado desde hace muchos años estos balancines científicos, han aprendido a equilibrar objetos de diferentes pesos y a expresar sus descubrimientos en fórmulas matemáticas. El disponer de una fórmula nos permite usar y comprender más fácilmente el sube y baja científico.

Hoy vas a representar el papel de un hombre de ciencia. Vas a montar un experimento sencillo de sube y baja, harás observaciones y tratarás de descubrir una regla para luego establecerla en forma matemática.

El experimento nos enseña la manera como un hombre de ciencia efectúa observaciones en el laboratorio y cómo después las estudia matemáticamente y saca conclusiones de ellas. Luego el científico trata de establecer las conclusiones por medio de ecuaciones matemáticas. Finalmente usa la fórmula para predecir un nuevo resultado y luego vuelve al laboratorio para comprobar si esa regla es adecuada.

14-2. Un experimento de laboratorio

Tu equipo para estudiar el sube y baja científico se parecerá al siguiente:



Los materiales requeridos en tu laboratorio son:

Una vara de madera de un metro o de una yarda de largo.

Hilo fuerte y dos bolsas para contener los pesos (el plástico fino sirve para hacer bolsas muy satisfactorias).

Un conjunto de objetos de igual peso y tamaño conveniente (se recomienda un surtido de monedas o de bolitas).

Procedimiento

1. Equilibra la vara suspendiéndola de un hilo fuerte atado en su punto medio. Si la vara no se equilibra, puedes colocar una tachuela en varios puntos hasta que lo consigas. El punto por el cual la barra está suspendida se llama el apoyo.

2. Cuelga diez objetos de igual peso de un lado del apoyo y diez objetos idénticos a los anteriores del otro lado y trata de equilibrarlos. Toma dos objetos de peso diferente y trata de equilibrarlos. ¿Tienes que cambiar la distancia para lograr el equilibrio cuando los pesos son diferentes?

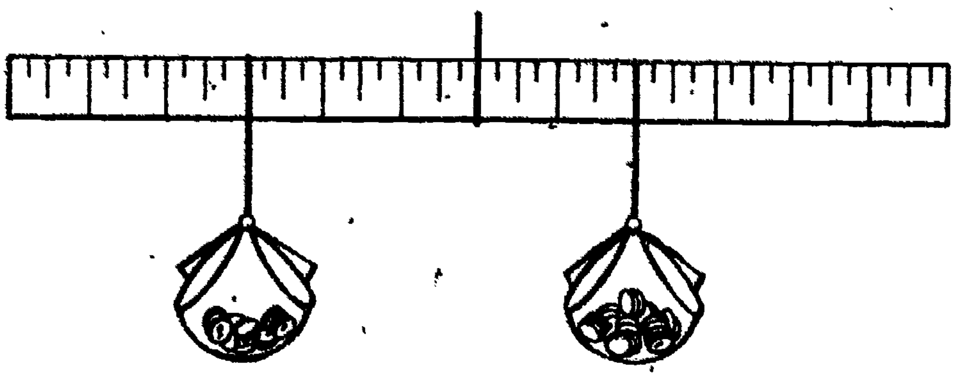
Nota. Los científicos habitualmente realizan algunas pruebas preliminares para determinar la mejor manera de montar y llevar a cabo un experimento. ¡Su primer montaje experimental no siempre funciona perfectamente! Puede ser que encuentres conveniente hacer algunas mejoras en tu equipo y en los procedimientos durante esta etapa.

Cuando tu equipo funcione con facilidad estarás listo para comenzar con la primera fase de tu experimento. Los científicos planean cuidadosamente el experimento por adelantado, pero nosotros desarrollaremos nuestro plan de trabajo a medida que lo ejecutemos.

3. (a) Cuelga 10 monedas iguales ó 10 bolitas (ó 10 otros objetos cualesquiera, manuables, de igual peso) a una distancia de 12 centímetros del apoyo, y equilibra el peso con 10 objetos idénticos en el otro lado. (Si tomas una vara de una yarda de longitud puedes ver que media pulgada es una unidad de distancia adecuada.) Observa a qué distancia se halla del apoyo esta segunda masa cuando la palanca está en equilibrio y escribe la distancia en una tabla, columna (a), análoga a la que se muestra a continuación. Observa que w y d representan las medidas del peso y distancia, respectivamente, de un lado del apoyo. W y D representan la medida del peso y la distancia del otro lado del apoyo.

TABLA I

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)	(i)	(j)
w =	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
d =	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
W =	10	20	5	8	15	24	12			
D =										



(b) Si W es 20, halla D de manera que la palanca esté en equilibrio. Escribe el número en tu tabla debajo de "20", columna (b).

(c) Si W es 5, halla D de manera que la palanca esté en equilibrio. Escribe el número en la tabla, columna (c), debajo de "5".

(d) Observa que en estas tres primeras pruebas, w y d permanecen iguales. Todos los cambios se han hecho en W y D. Utiliza los valores indicados en las columnas (d) - (g) para hallar el valor de D. Haz varios otros cambios para W y escribe los resultados correspondientes para D en tu tabla—columnas (h), (i) y (j).

4. Sea ahora $w = 16$ y $d = 6$, como se indica en la tabla II. Determina cuál debe ser el tamaño de W para que la palanca se equilibre cuando D es igual a 6. ¿Qué peso equilibrará la palanca a una distancia de 4 centímetros del apoyo? ¿Y a 16 centímetros? Ensaya varias otras distancias, medidas desde el apoyo, halla qué pesos se necesitan para equilibrar la palanca, y completa tu tabla II.

TABLA II

w	16	16	16	16	16	16	16
d	6	6	6	6	6	6	6
W							
D	6	4	16				

5. Ensaya otros valores para los pesos y distancias como se sugiere en las tablas III y IV y completa tablas similares dadas por ti mismo.

TABLA III

w	20	40	10			
d						
W	20	20	20	20	20	20
D	15	15	15	15	15	15

TABLA IV

w	18	18	18	18	18	18	18
d	5	5	5	5	5	5	5
W	15	10	30	45			
D					10	15	18

14-3. ¡Atención: razonamiento inductivo en funciones!

Después que un científico ha completado un experimento y recopilado los datos, trata de analizarlos. Trata de descubrir todos los hechos que los datos representan. Prueba también interpretar estos hechos de una manera conexa y adecuada, y de descubrir una regla general sugerida por los datos. Se propone establecer esos resultados de una manera precisa, preferentemente mediante una fórmula matemática simple.

Observa que los científicos estudian determinado número de resultados experimentales específicos y de ellos tratan de extraer una conclusión que se aplique a todos los casos. Razonando sobre un número de resultados experimentales específicos, se desarrolla un enunciado general que se aplicará a todas las situaciones análogas. Este proceso se llama razonamiento inductivo, que debe ser usado con cuidado. Puede suceder en algunas ocasiones que unos pocos ejemplos sugieran una conclusión que no es verdadera en general. Por ejemplo, si vas a Nueva York y encuentras cinco pelirrojos sucesivamente, no es razonable la conclusión de que todos los habitantes de Nueva York son pelirrojos. También si observas que $\frac{1\cancel{0}}{\cancel{5}5} = \frac{1}{5}$, $\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$, $\frac{4\cancel{9}}{\cancel{9}8} = \frac{4}{8}$ y $\frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5} = \frac{2}{5}$, estarás equivocado si supones que siempre puedes tachar los numerales de esta manera.

Cuando se propone una regla general, los científicos tratan de verificarla mediante más experimentación y, si es posible, por razonamiento deductivo. En todas estas etapas las matemáticas y el razonamiento matemático son especialmente importantes.

Consideremos los resultados de nuestras tablas desde este punto de vista. Tratamos de saber si existe una regla general que describe todas estas relaciones. Si es posible, deseamos expresar la regla en términos matemáticos. Si es una regla general, deberíamos poder usarla para predecir dónde colocar un objeto de peso conocido para equilibrar un segundo objeto de peso también conocido.

Ejercicios 14-3

1. (a) En la tabla I, ¿notas alguna conexión entre la colocación de las masas de igual peso en lados opuestos del apoyo? ¿Cuál es esa conexión?

   (b) Si el valor de W se duplica, permaneciendo inalterables w y d, ¿cómo cambia el valor correspondiente de D?

   (c) Si el valor de W se reduce a la mitad, ¿cómo cambia la correspondiente distancia D desde el punto de apoyo?

   (d) ¿Te parece que los valores de w, d y W, D están relacionados de alguna manera? ¿Puedes establecer una regla general que parezca válida, respecto de w, d, W y D? Enuncia la regla verbalmente y luego mediante una ecuación matemática en la cual aparezcan los símbolos w, W, d y D.

   (e) Verifica tu regla, aplicándola a algunos de los datos encontrados por experimento en las tablas II, III y IV.

2. Emplea l[illegible] ecuación sugerida en el ejercicio anterior para prede[illegible] las cifras que faltan en la tabla V.

TABLA V

w	2	3	12	45	21	15	23	11		14	10	100	100	100
d	3	4	2	3	5		4	8	7	5.5	50	50	300	5,000
W	15		7		14	20	12		13	10				
D		7		9		4.5		10	8		5	5	5	5

3. Vuelve a tu experimento y verifica los resultados de la tabla V para ver si realmente determinan el equilibrio de la palanca.

14-4. Interpretación gráfica

En el Capítulo 13 has aprendido algo sobre las gráficas y su utilidad para representar información numérica de manera clara y concisa. Los científicos se valen frecuente de las gráficas de observaciones obtenidas por experimentación para resumir e interpretar los datos.

En la ecuación $wd = WD$ que has obtenido tú mismo en el experimento anterior, aparecen cuatro cantidades. Se puede interpretar esta ecuación de varias maneras, según el camino que hayas seguido en la experimentación. En la primera parte del experimento, has considerado fijos w y d, y luego has encontrado los valores para W y D, que producen el equilibrio de la palanca. De cada experimento obtienes un par de valores que satisfacen la relación $WD = 120$. Una gráfica de $WD = 120$ describe muchos pares de valores que producen el equilibrio cuando $wd = 120$.

Entonces, la gráfica suministra no solamente la información de la tabla I, sino también otros posibles valores para W y D.

La siguiente etapa es dibujar una gráfica de la relación que conecta un valor de W con el correspondiente valor de D en la tabla I.

Si necesitas ayuda para dibujar la gráfica, la obtendrás en las siguientes sugerencias:

Toma un hoja de papel cuadriculado y comienza trazando las rectas perpendiculares que se llaman ejes. La intersección de los ejes se llama punto O ó punto origen.

Marca el eje horizontal con W y el vertical con D.

Si usas papel cuadriculado de $\frac{1}{4}$ de pulgada, te conviene la escala de uno por cada espacio.

En la tabla I, el primer valor para W es 10 y el correspondiente valor para D es 12. Sitúa 10 en el eje W. Sigue la recta vertical hasta 12 en el eje D. Este punto se llama (10, 12). Las líneas de puntos en la gráfica de la figura 14-4-a te ayudarán a localizar este punto. Dibuja una marquita circular para el punto.

Siguiendo con la tabla I, de modo análogo, cuando $W = 20$, es $D = 6$. Marca 20 en el eje W. Sigue la recta vertical que pasa por 20 hasta el punto en que encuentra la recta horizontal que pasa por 6 del eje D. Este punto se llama (20, 6).

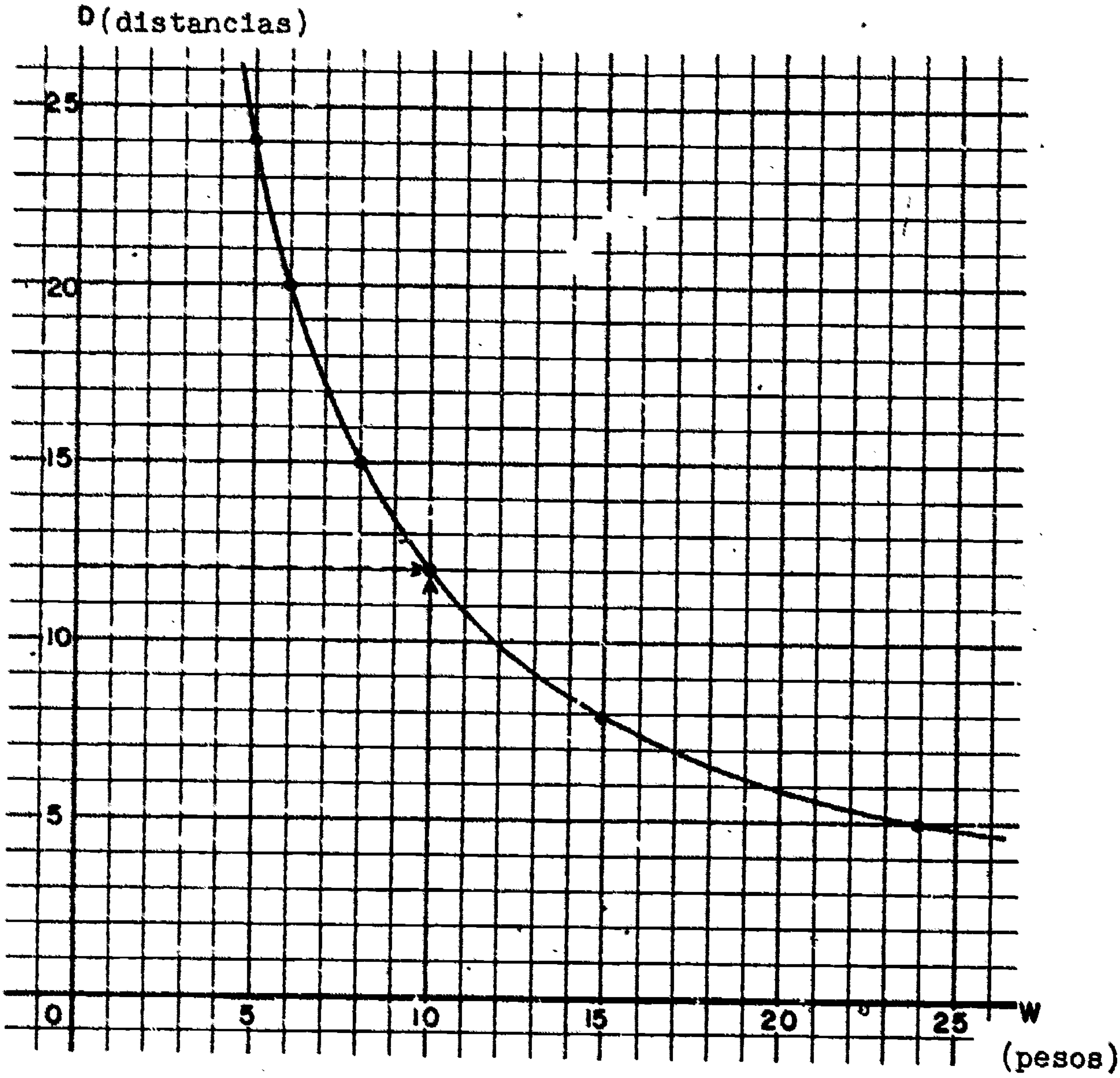
Antes de proceder a la interpretación, dibuja y marca los otros puntos de la tabla I, que son (5, 24), (8, 15), (24, 5) y (12,10).

Marca los puntos que corresponden a los resultados que has encontrado en las columnas (h), (i) y (j) de la tabla I.

Llena los espacios en blanco de los siguientes pares para (W, D) y marca los puntos correspondientes en la gráfica: (4,), (, 6), (16,) y (, 18). Usa $WD = 120$.

Traza a mano una curva continua por los puntos que has marcado. Esta curva te da la representación general de la relación entre pesos y distancias de la tabla I. Si algún punto queda de un lado o del otro de la curva continua, verifica tu cálculo. No todos los experimentos son perfectos y no todos los resultados se ajustan exactamente al modelo. Los puntos obtenidos mediante las mediciones que has efectuado deben caer muy cerca de la curva. Frecuentemente los científicos no aspiran a mayor precisión en un experimento de este tipo.

La curva que has dibujado es una parte de una curva llamada hipérbola. Aprenderás algo más acerca de esta curva en tus estudios de álgebra.



Gráfica de WD = 120
con los datos de la tabla I

Figura 14-4-a

Ejercicios 14-4

1. Estudia las gráficas y luego contesta a las siguientes preguntas:
   (a) Si el valor de w crece, ¿cómo cambia el correspondiente valor de d?
   (b) Si el valor de d crece, ¿cómo cambia el correspondiente valor de w?
2. Para hallar el valor de W cuando D es 24, marca 24 en el eje y sigue la recta horizontal que pasa por 24 hasta que interseque a la curva. Lee el valor en la escala W directamente debajo de ese punto. Debes obtener 5. Empleando la gráfica, halla los valores de W para los siguientes puntos:
   (a) (, 20) (b) (, 15) (c) (, 6)
3. Empleando la gráfica, halla los valores de D:
   (a) ([illegible],) (b) (4,) (c) (15,)
4. Indica cuáles de los siguientes puntos están sobre la gráfica y cuáles no lo están.
   (a) (10, 25) (c) (5, 5)
   (b) (16, 8) (d) (20, 15)
5. Determina los valores que faltan en los siguientes pares:
   (a) (7,) (d) (17,)
   (b) (8,) (e) (, 21)
   (c) (, 9) (f) (23,)
6. Dibuja una gráfica de la relación entre W y D con los datos de la tabla II. Emplea la fórmula WD = 96 para hallar los pares de números que necesites para localizar puntos. Verifica los valores que halles con los de la tabla II.
7. Empleando la gráfica, halla D cuando W es 20; halla W cuando D es 12.
8. ¿Cómo cambia el valor de d cuando el valor de w decrece? ¿Y cuando el valor de w crece?
9. ¿Tiene esta gráfica algo en común con la gráfica que dibujaste para WD = 120?

14-5. Otras clases de palancas

En la introducción a este capítulo has visto que no todas las palancas son como el sube y baja. Sería interesante que indagaras algo de ellas en tu clase de ciencias, en el momento oportuno. Además del gato para levantar automóviles, del abre-botellas y de la barra mencionados anteriormente, hay otros ejemplos del amplio uso de la palanca. Piensa en cuán útiles son algunas palancas, como las tenazas para hielo, los cascanueces, las tijeras, los sacaclavos y las tijeras de podar.

14-6. El papel de las matemáticas en la experimentación científica

Aunque los experimentos relativos a palancas no necesitan una gran cantidad de matemáticas, son un ejemplo de la manera de usar las matemáticas en las actividades científicas. Has visto cómo se utilizan las matemáticas en la medición, el recuento y la comparación de cantidades. Has tomado nota de cómo las observaciones de los datos se resumen en términos matemáticos.

Has tratado de encontrar un modelo estudiando los númer de los datos que has reunido. Razonando con un conjunto de casos específicos, desarrollaste un enunciado general que se aplica a todas las situaciones análogas. En la Sección 14-3 hemos llamado razonamiento inductivo a esta clase de razonamiento, pues de un número necesariamente restringido de casos conduce a la predicción de una relación general. Esta relación general se ha formulado en símbolos matemáticos como la ecuación: $WD = wd$. Para establecer este principio general, se han efectuado más experimentos.

Además, has dibujado una gráfica de $WD = 120$ y de $WD = 96$ para mostrar la manera en que estos enunciados describen completamente el fenómeno en cada caso. La gráfica es otra etapa del uso de las matemáticas para interpretar y resumir una colección de hechos. La gráfica también ha ayudado a revelar la ley general que se ha descubierto.

Muchos hechos científicos permanecieron sin descubrir durante miles de años hasta que algunos hombres de ciencia más atentos montaron experimentos, en gran parte como lo has hecho tú, y lograron descubrimientos sobre la base de observaciones. He aquí algunos ejemplos:

(a) Hasta el tiempo de Galileo se creía que si dos objetos se dejaban caer al mismo tiempo, uno pesado y otro liviano, el objeto pesado caería más rápidamente que el liviano. Consulta la historia de Galileo y de sus experimentos con los cuerpos que caen, y entérate de lo que descubrió.

(b) El hombre ha visto los eclipses de sol y de luna desde tiempos inmemoriales y observado la sombra redonda de la tierra que entonces se proyecta, pero no descubrió que la tierra era redonda. Eratóstenes, en el año 230 a. de J.C., calculó la longitud de la circunferencia terrestre, observando al sol desde dos posiciones en Egipto; sin embargo, diecisiete siglos después, cuando Colón partió para descubrir América, se seguía pensando que el mundo era plano. Consulta en un libro de historia de las matemáticas o en una enciclopedia, la historia de Eratóstenes y de su experimento.

(c) Los péndulos eran conocidos desde muchos siglos antes de que Galileo hiciera algunas mediciones y cálculos para descubrir la ley que da la relación entre la longitud del péndulo y el tiempo de su oscilación. Busca este experimento en un libro de historia de las matemáticas o de la ciencia.

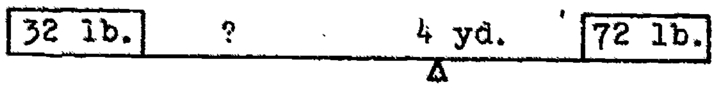
Observa que todos estos experimentos se basan en muchas observaciones y mediciones cuidadosas a fin de descubrir una ley científica. Luego se enuncia la ley en términos matemáticos. Justamente por este motivo, una gran parte de la ciencia depende de las matemáticas.

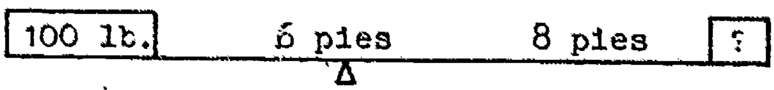
Los ejemplos que hemos dado aquí se refieren a descubrimientos fundamentales antiguos, los que usaban matemáticas relativamente simples. Los científicos de hoy utilizan matemáticas más avanzadas y muchas de las ramas nuevas de las matemáticas.

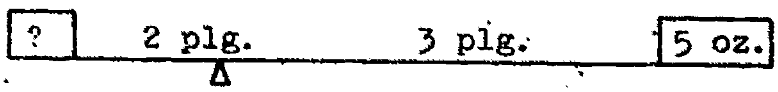
Ejercicios 14-6

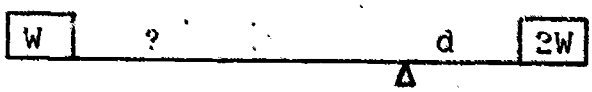
1. Algunos balancines se construyen de manera que puedan deslizarse un poco sobre su apoyo. ¿Por qué?

En cada uno de los problemas siguientes, halla los valores que faltan:

2.


3.


4.


5.


6. ¿Puedes imaginarte que una niña que pese 90 libras pueda levantar una caja que pese 1,000 libras? Fundamenta tu respuesta.
7. Un niño que pesaba 54 libras invitó a su padre (que pesaba 180 libras) a jugar al sube y baja. ¿En qué posición debe sentarse el padre para equilibrar al niño?

8. Se va a utilizar como palanca una barra de hierro de 6 pies de largo para levantar una piedra que pesa 75 libras. El apoyo está a 2 pies de la piedra. ¿Cuántas libras de fuerza se necesitarán para levantar la piedra?

9. Suponte que un niño que pese 100 libras se sienta en el extremo de una barra de seis pies, a $5\frac{1}{2}$ pies del apoyo. ¿Cuál será el peso máximo de un objeto colocado al otro extremo de la barra, que este niño puede levantar, sin considerar el peso propio de la barra?

10. ¿Cuáles de estos puntos están sobre la gráfica de $WD = 60$?
(a) $(12, 5)$ (b) $(\frac{1}{3}, 180)$ (c) $(1, 6)$

Bibliografía

1. Newman, James R. THE WORLD OF MATHEMATICS. New York: Simon and Schuster, 1956.

(Galileo, pp. 726-770; cuerpos que caen, p. 729; péndulo, pp. 729, 741; Eratóstenes, pp. 205-207.)

2. Kline, Morris. MATHEMATICS IN WESTERN CULTURE. New York: Oxford University Press, 1953.

Capítulo XIII Aproximación cuantitativa a la naturaleza
Capítulo XIV Deducción de las leyes universales

INDICE ALFABETICO

Los números indican las páginas en el texto.