DOCUMENT RESUME

ED 186 213 SE 030 376

AUTHOR Anderson, R. D.; And Others
TITLE Matematicas Para El Primer Ciclo Secundario, Volumen I (Parte 1). Traduccion Preliminar de la Edicion Inglesa Revisada. (Mathematics for Junior High School, Volume I, Part 1, Preliminary Translation of the Revised English Edition).
INSTITUTION Stanford Univ., Calif. School Mathematics Study Group.
SPONS AGENCY National Science Foundation, Washington, D.C.
PUB DATE 62
NOTE 351p.; For related documents in Spanish, see SE 030 377-379. Not available in hard copy due to marginal legibility of original document.
LANGUAGE Spanish

EDRS PRICE MF01 Plus Postage. PC Not Available from EDRS.
DESCRIPTORS *Arithmetic; Bilingual Education; *Geometry; *Instructional Materials; Mathematics Curriculum; Mathematics Education; Mathematics Instruction; Numbers; Secondary Education; *Secondary School Mathematics; *Textbooks
IDENTIFIERS *School Mathematics Study Group

ABSTRACT

This is part one of a two-part SMSG mathematics text for junior high school students. Key ideas emphasized are structure of arithmetic from an algebraic viewpoint, the real number system, and metric and non-metric relations in geometry. Topics included are numbers; cardinal numbers; geometry of lines, points, and planes; geometry of angles, triangles, and other forms; factors and prime numbers; real numbers; area; volume; and rectangles. (RH)

GRUPO DE ESTUDIO DE LA MATEMATICA ESCOLAR

MATEMATICAS PARA EL PRIMER CICLO SECUNDARIO

VOLUMEN I (Parte 1)

(Traducción preliminar de la edición inglesa revisada)

Mary L. Charles
of the NSF

MATEMATICAS PARA EL PRIMER CICLO SECUNDARIO

VOLUMEN I (Parte 1)

(Traducción preliminar de la edición inglesa revisada)

Texto preparado bajo la supervisión del personal para los grados de estudio 7° y 8°, del Grupo de Estudio de la Matemática Escolar:

R.D. Anderson, Universidad del Estado de Luisiana

J.A. Brown, Universidad de Delaware

Lenore John, Universidad de Chicago

B.W. Jones, Universidad de Colorado

P.S. Jones, Universidad de Michigan

J.R. Mayor, Asociación Americana para el Avance de la Ciencia

P.C. Rosenbloom, Universidad de Minnesota

Veryl Schult, Supervisor de Matemáticas, Wáshington, D.C.

El apoyo financiero para el Grupo de Estudio de la Matemática Escolar provino de la Fundación Nacional de Ciencias.

© 1962 by The Board of Trustees of the Leland Stanford Junior University

Printed in the United States of America

La edición preliminar de este volumen fue preparada en una convención realizada en la Universidad de Michigan durante el verano de 1959 y se basó, en parte en el material preparado durante la primera convención del Grupo de Estudio de la Matemática Escolar (en inglés, SMSG) realizada en la Universidad de Yale, en el verano de 1958. La presente revisión se hizo en la Universidad de Stánford en el verano de 1960, teniendo en cuenta las experiencias de clase adquiridas con la edición preliminar durante el año escolar de 1959 - 60.

Participaron en la preparación de este volumen las siguientes personas:

R.D. Anderson, Universidad del Estado de Luisiana
B.H. Arnold, Colegio del Estado de Oregón
J.A. Brown, Universidad de Delaware
Kenneth E. Brown, Oficina Estadounidense para la Educación
Mildred B. Cole, Escuela K.D. Waldo de Primer Ciclo Secundario, Aurora, Illinois
B.H. Colvin, Laboratorios Boeing para la Investigación Científica
J.A. Cooley, Universidad de Tennessee
Richard Dean, Instituto Tecnológico de California
H.M. Gehman, Universidad de Búffalo
L. Roland Genise, Escuela de Primer Ciclo Secundario de Brentwood, Nueva York
E. Glenadine Gibb, Colegio para Maestros del Estado de Iowa
Richard Good, Universidad de Maryland
Alice Hach, Escuelas Públicas de Racine, Wisconsin
S.B. Jackson, Universidad de Maryland
Lenore John, Escuela Secundaria de la Universidad de Chicago
B.W. Jones, Universidad de Colorado
P.S. Jones, Universidad de Míchigan
Houston Karnes, Univérsidad del Estado de Luisiana
Mildred Keiffer, Escuelas Públicas de Cincinnati, Ohío
Nick Lovdjieff, Escuela Anthony de Primer Ciclo Secundario, Minneápolis, Minnesota
J.R. Mayor, Asociación Americana para el Avance de la Ciencia
Sheldon Meyers, Servicio de Control Educacional
Muriel Mills, Escuela Hill de Primer Ciclo Secundario, Dénver, Colorado
P.C. Rosenbloom, Universidad de Minnesota
Elizabeth Roudebush, Escuelas Públicas de Seattle, Wáshington
Veryl Schult, Escuelas Públicas de Wáshington, Wáshington, D.C.
George Schaefer, Escuela Secundaria Alexis I. DuPont, Wilmington, Delaware
Allen Shields, Universidad de Míchigan
Rothwell Stephens, Colegio Knox
John Wagner, Grupo de Estudio de la Matemática Escolar, New Haven, Connecticut
Ray Walch, Escuelas Públicas de Westport, Connecticut
G.C. Webber, Universidad de Delaware
A.B. Wilcox, Colegio Amherst

Proyecto de traducción al español

Comisión consultiva

Edward G. Begle, Universidad de Stanford

Howard F. Fehr, Universidad de Columbia

Mariano García, Universidad de Puerto Rico

Max Kramer, San Jose State College

PROLOGO

La creciente contribución de las matemáticas a la cultura del mundo moderno, y su importancia como parte vital de la educación científica y humanística, han hecho necesario que las matemáticas del programa escolar se seleccionen juiciosamente y que se enseñen bien en nuestras escuelas.

Tomando esto en consideración, las organizaciones de matemáticas en los Estados Unidos cooperaron en la formación del Grupo de Estudio de la Matemática Escolar (SMSG). Este grupo lo constituyen matemáticos de colegios y universidades, maestros de matemáticas de todos los niveles, expertos en educación y representantes de la ciencia y la tecnología. El propósito general del SMSG es el mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas en las escuelas de los Estados Unidos. La Fundación Nacional de Ciencias ha provisto fondos sustanciales para el financiamiento de esta labor.

Uno de los prerrequisitos para el mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas en nuestras escuelas es un mejor programa de estudios, un programa que tome en consideración el uso creciente de las matemáticas en la ciencia, la tecnología y otros campos del conocimiento y que, a la vez, refleje los avances recientes de las matemáticas mismas. Uno de los primeros proyectos del SMSG fue reclutar un grupo de matemáticos y maestros de matemáticas distinguidos para preparar una serie de libros de texto ilustrativos de un programa de estudios como el ya mencionado.

Los matemáticos profesionales en el SMSG creen que el contenido matemático presentado en este texto es valioso para todos los ciudadanos cultos de nuestra sociedad, y que su aprendizaje es importante para los estudiantes que van a ingresar en universidades, como preparación para estudios avanzados en este campo. Al mismo tiempo, los maestros en el SMSG creen que la forma en que aquí se presenta el material de estudio facilita al estudiante su asimilación.

En la mayoría de los casos el material parecerá familiar, pero su presentación y punto de vista serán diferentes. Algún material será completamente nuevo en relación con los programas de estudios tradicionales. Así debe ser, porque las matemáticas constituyen una disciplina viva y en constante crecimiento y no un producto inerte y rígido de la antigüedad. Esta fusión saludable entre lo antiguo y lo nuevo debe guiar a los estudiantes hacia una mejor comprensión de los conceptos básicos y de la estructura de las matemáticas y ofrecer una base sólida para la comprensión y el uso de las matemáticas en una sociedad científica.

No pretendemos que este libro se considere como la única manera definitiva de presentar correctamente las matemáticas a los estudiantes en este nivel. En cambio debe considerarse como una muestra de la clase de programa de estudios que necesitamos y como una fuente de sugerencias para los autores de textos comerciales. Esperamos sinceramente que estos textos señalen el camino hacia una enseñanza más inspirada y significativa de las matemáticas, disciplina que es la reina y sierva de las ciencias.

TABLA DE MATERIAS

8

Capítulo

NOTA: Algunos ejercicios han sido marcados con un asterisco (*) para orientar al maestro en la selección de los mismos.

PREFACIO

Las ideas fundamentales de las matemáticas para el primer ciclo secundario sobre las que se insiste en este texto son: la estructura de la aritmética desde un punto de vista algebraico; el sistema de los números reales como un desarrollo progresivo; relaciones métricas y no métricas en geometría. A lo largo del texto esas ideas se asocian a sus aplicaciones. En este nivel es importante la experiencia con los conceptos abstractos y la apreciación de los mismos, así como la del papel de la definición, del desarrollo de un pensamiento y un vocabulario precisos, de la experimentación y de la demostración. En la escuela secundaria de primer ciclo se pueden hacer progresos sustanciales.

En el verano de 1958 se escribieron para los grados de estudio séptimo y octavo, catorce libros que fueron probados por aproximadamente 100 maestros en 12 centros de educación de varias partes del país, durante el año escolar de 1958 - 59. Se revisaron luego esos libros, sobre la base de las observaciones de los maestros, durante el verano de 1959. Con algunos libros nuevos, se imprimió una parte de los textos modelos para el 7° grado y un volumen de textos experimentales para el 8° grado. Durante el año escolar de 1959 - 60 unos 175 maestros de varias partes del país enseñaron matemáticas en los grados séptimo y octavo a base de estos libros, que luego se revisaron en el verano de 1960.

Las matemáticas fascinan a muchas personas tanto por las oportunidades que brindan a la creación y al descubrimiento como por su utilidad. Crecen continua y rápidamente con el doble estímulo de la curiosidad intelectual y de la utilidad práctica. Aun los estudiantes del primer ciclo secundario pueden formular preguntas e hipótesis matemáticas que pueden comprobar o establecer; pueden desarrollar intentos sistemáticos para resolver problemas matemáticos tengan o no éstos, soluciones rutinarias o fáciles de determinar. En gran parte, la selección del contenido y del método de este texto se basó en el reconocimiento de estos importantes factores.

Creemos firmemente que las matemáticas pueden y deben estudiarse con éxito y agrado. Esperamos que este texto pueda ayudar a todos los maestros que lo usen, en el logro de este muy deseable fin.

Capítulo 1

¿QUE SON LAS MATEMATICAS?

1-1. Las matemáticas como método de razonamiento

"Viajando una vez en avión, entablé conversación con el pasajero que se sentaba a mi lado. Cuando me preguntó en qué me ocupaba, le contesté que era matemático. Entonces me volvió a preguntar: '¿No se cansa usted de pasarse el día entero sumando columnas de números?' Debí explicarle que esas sumas se hacen a máquina. Mi trabajo consiste mayormente en razonar lógicamente".

¿Qué son en realidad estas matemáticas de las cuales tanto se habla actualmente? ¿Son el arte de contar y calcular? ¿Tienen por objeto escribir cifras y calcular su magnitud? ¿Se trata de un lenguaje que usa símbolos como claves misteriosas? No, las matemáticas no se circunscriben a ninguno de estos fines. Los incluyen todos, pero abarcan muchos más. Las matemáticas son una manera de pensar, una forma de razonamiento. Algunas clases de matemáticas implican experimentación y observación, pero la mayoría de ellas consisten en razonamiento deductivo.

Mediante el razonamiento deductivo, probamos que a base de ciertas condiciones dadas, se llega necesariamente a una conclusión precisa. Al estudiar aritmética aprendiste a demostrar proposiciones precisas acerca de los números. Si en un aula hay 7 hileras de asientos con 5 asientos en cada una, entonces hay 35 asientos. Sabes esto sin necesidad de contar los asientos y sin ver el aula.

Los matemáticos usan este tipo de razonamiento. Demuestran proposiciones que empiezan con la palabra "si". Mediante el razonamiento, prueban que si algo es verdadero, entonces una cierta conclusión también es verdadera.

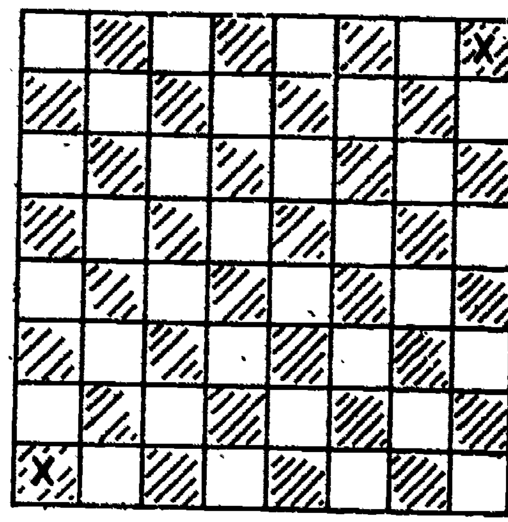
Gracias al razonamiento lógico, puedes a menudo encontrar todas las diferentes maneras de resolver un problema. Por medio de razonamiento, logras demostrar a veces que un problema no tiene solución. Todos los problemas de los Ejercicios 1-1 que se dan más abajo pueden resolverse mediante razonamiento. No se necesita hacer cálculos, aunque en algunos casos te convendrá trazar un diagrama. ¿Puedes resolverlos?

Ejercicios 1-1

1. [illegible] 00 libras y dos hijos suyos, que pesan [illegible] libras cada uno, desean cruzar un río. Si tienen sólo un bote [illegible] transporta con seguridad un peso de 200 libras, ¿cómo pueden cruzar todos el río?
2. Si el hombre mencionado en el problema 1 pesara 175 libras, uno de sus hijos pesara 12[illegible] libras y el otro 100 libras, ¿podrían usar el mismo bote? Si no, ¿qué peso debería poder transportar [illegible] un bote a fin de que todos pasaran el río?
3. Un agricultor [illegible] transportar al otro lado del río un ganso, un [illegible] y un saco de maíz. Si el agricultor no está con [illegible] el [illegible] come al ganso o el ganso se come el maíz. Si el agricultor tuviera un bote donde apenas cupieran él y [illegible] los animales o el saco de maíz, ¿cómo podría cruzar el río?
4. ¿Es posible medir [illegible] galones, usando solamente un recipiente [illegible] galones y otro de [illegible] galones? Los recipientes [illegible] para un galón, ni ninguna otra clase de [illegible].
5. PROBLEMA DIFÍCIL. Tres caníbales y tres misioneros desean cruzar un río. Deben usar un bote en que sólo caben dos personas. En ningún momento los caníbales deben ser más numerosos que los misioneros, pero los misioneros pueden ser más numerosos que los caníbales. ¿Cómo podrán pasar todos el río usando el mismo bote?
6. PROBLEMA DIFÍCIL. Hay ocho bolitas, todas del mismo tamaño, color y forma. Siete de ellas son del mismo peso y una es más pesada. Usando una balanza de dos platillos, ¿cómo encontrarías la bolita más pesada si solamente pudieras pesar dos veces?

7. PROBLEMA DIFICIL. Supón que tienes un tablero para el juego de damas, y fichas de dominó. Cada ficha de dominó es suficientemente grande como para cubrir dos cuadrados del tablero de las damas. ¿Cómo dispondrías las fichas de dominó en el tablero de manera que todo el tablero quedara cubierto, con excepción de los dos cuadrados de las esquinas opuestas?

Nota: Todos los cuadrados deben quedar cubiertos, con excepción de los dos situados en esquinas opuestas.
Puedes dejar sin cubrir las dos esquinas blancas en vez de las dos negras marcadas con la letra "x".



1-3. <u>Razonamiento deductivo</u>

Puedes resolver otros tipos de problemas mediante el razonamiento deductivo. Supón que hay treinta alumnos en tu clase. ¿Puedes demostrar que por lo menos dos de ellos cumplen años en el mismo mes? Sin necesidad de saber cuándo es el cumpleaños de ninguno de ellos, te será fácil demostrarlo de muchas maneras. Una de ellas sería imaginarte que existen doce cajas, una para cada mes del año, y que tu maestro escribe los nombres de cada uno de los alumnos en papelitos separados y los va poniendo en las cajas correspondientes. Si ninguna caja tuviera más de un papelito, entonces no podría haber más de doce nombres en total. Pero, como hay 30 nombres, por lo menos una de las cajas debe contener más de un nombre.

Los matemáticos siempre tratan de llegar al mejor resultado posible. En este caso podemos usar el mismo método para demostrar que por lo menos <u>tres</u> alumnos de la clase cumplen años en el mismo mes. Si ninguna caja tuviera más de dos papelitos, entonces no habría más de 24 nombres en total. Puesto que hay 30 nombres, entonces por lo menos tres alumnos cumplen años en el mismo mes. Cada problema de los siguientes ejercicios puede resolverse mediante un razonamiento de este tipo.

Ejercicios 4-2

1. Imagínate que tienes cinco lápices para distribuir entre cuatro de tus compañeros de clase. Di por qué uno de ellos recibirá por lo menos dos lápices.
2. (a) ¿Tendrías que dar dos lápices por lo menos a una persona si distribuyeras diez lápices entre seis personas?

   (b) ¿Qué harías si tuvieras que repartir una docena de lápices entre cinco personas?
3. ¿Cuál es el número menor de alumnos que deberán ser matriculados en una escuela para que estés seguro de que por lo menos dos de ellos cumplirán años en el mismo día?
4. ¿Cuál es el número mayor de estudiantes que podrán matricularse en una escuela para que estés seguro de que todos tendrán cumpleaños en días distintos?
5. En un pueblo hay cinco cines. ¿Cuál es el número mínimo de personas que deben ir al cine para que estés seguro de que por lo menos dos de ellas ven la misma película?
6. En el problema 5, ¿cuál es el número mayor de personas que deberán ir al cine para que estés seguro de que dos de ellas no verán la misma película?
7. Si tuvieras que repartir 8 chocolatines entre 5 niños, ¿cuántos de ellos recibirían tres chocolatines si cada uno tuviera que recibir por lo menos un chocolatín?

8. En una clase de 42 estudiantes se deberán formar varias comisiones. Ningún estudiante puede estar en más de una comisión. Cada comisión contiene de 5 a 8 estudiantes. ¿Cuál es el número mayor de comisiones que se puede formar?

9. PROBLEMA DIFÍCIL. ¿Qué respuesta darías al problema 8 si cada estudiante pudiera estar en una o dos comisiones?

1-4. De la aritmética a las matemáticas

Una manera como los matemáticos y otros hombres de ciencia resuelven problemas es mediante experimentos y observaciones. Este método se llama método experimental. ¿Recuerdas algunos problemas científicos que se han resuelto de esta manera?

En matemáticas muchas veces experimentamos para descubrir un método general de resolver todo un conjunto de problemas. Una vez descubierto el método general, tratamos de demostrar, mediante razonamientos lógicos, que son correctos.

La parte de las matemáticas que conoces mejor es la aritmética. En aritmética, puedes a menudo obtener resultados mediante experimentos o mediante el razonamiento, con lo cual puedes economizar mucho trabajo arduo y tiempo que de otra manera gastarías en hacer cálculos.

Cuando Karl Friedrich Gauss, un famoso matemático, tenía unos 10 años de edad, su maestro, para mantener la clase quieta por un rato, ordenó a los niños que sumaran todos los números del 1 al 100, esto es $1 + 2 + 3 + \ldots + 100$. (Nota: Para no tener que escribir todos los números entre 3 y 100, se acostumbra usar tres puntos suspensivos, que se leen "etcétera".) Después de unos dos minutos, Gauss había vuelto a sus travesuras, y el maestro le preguntó por qué no trabajaba en el problema. El niño le contestó:

—Lo he terminado.

—¡Imposible! —exclamó el maestro.

—Es muy fácil —repuso el niño—. Primero escribí:

1 + 2 + 3 + 4 + ... + 100, luego ordené los números en orden inverso:

$\underline{100} + \underline{99} + \underline{98} + \underline{97} + \ldots + \underline{1}$, después sumé cada par de números:

$101 + 101 + 101 + 101 + \ldots + 101.$

Obtuve cien veces el número 101. Esto me dio $100 \times 101 = 10{,}100$. Pero usé cada número dos veces. Por ejemplo, añadí 1 a 100 al principio, y luego añadí 100 a 1 al final. Así, dividí la suma 10,100 entre 2. La respuesta es $\frac{10{,}100}{2}$, o sea 5,050.

¿Quién era Karl Friedrich Gauss? ¿Cuándo vivió? Puedes buscar la respuesta en una enciclopedia.

Ejercicios 1-3

1. Suma todos los números del 1 al 5, esto es, 1 + 2 + 3 + 4 + 5, usando el método de Gauss. ¿Puedes descubrir otro método breve que sea diferente al de Gauss?
2. ¿Se puede aplicar el método de Gauss al problema de sumar los siguientes números: 0 + 2 + 4 + 6 + 8?
3. Usando un método breve, suma todos los números impares del 1 al 15, esto es, 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 15. (Para economizar la escritura de los números impares entre 5 y 15, se acostumbra usar tres puntos suspensivos, que se leen "etcétera".)
4. Este problema te da la oportunidad de hacer otro descubrimiento en matemáticas.

Suma los siguientes números:		Multiplica estos otros:	
(a) 1 + 3	= ?	2 × 2	= ?
(b) 1 + 3 + 5	= ?	3 × 3	= ?
(c) 1 + 3 + 5 + 7	= ?	4 × 4	= ?

   (d) Fíjate en las sumas de la izquierda y en los productos de la derecha. ¿Cuál te parece que es la regla general para encontrar las sumas de los números de la izquierda?

   (e) Aplica tu nueva regla a 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15. Compara con la respuesta que diste al ejercicio 3.
5. Suma los siguientes números impares: 7 + 9 + 11 + ... + 17.

6. [illegible] entre [illegible] y 40: 22 + 24 + [illegible] + ... + [illegible].
7. Suma [illegible] números del 0 al [illegible]0: 0 + 1 + 2 + ... + [illegible]0.
8. ¿Se aplica [illegible] de Gauss a cualquier serie de números que [illegible] 0, con 1, o con cualquier otro número?
9. PROBLEMA [illegible]. Usando el método de Gauss, suma todos los números del [illegible] al [illegible]. [illegible] todos los números del 0 al [illegible], [illegible] método de Gauss. ¿Son iguales las resp[illegible] problemas? ¿Por qué?
10. PROBLEMA [illegible]. [illegible] que el maestro de Gauss le hubiera [illegible] números: 1 + 2 + 4 + 8 + [illegible] + ... + [illegible]. (Aquí comenzamos con 1 y duplicamos cada número para [illegible] que le sigue.) ¿Existe algún método corto para [illegible] la suma?
11. PROBLEMA [illegible]. Si has encontrado un método corto para resolver el problema [illegible], trata de hacer el siguiente problema. Suma los números: [illegible] + 18 + ... + 486 (empezando con 2, multiplica cada número por 3 para obtener el que le sigue). La respuesta es [illegible]. ¿Puedes hallar un método breve para obtener la suma?

1-4. Clases de matemáticas

Los matemáticos razonan acerca de toda clase de preguntas difíciles y de problemas. Cuando resuelven un problema, generalmente crean un poco más de matemáticas para añadir al acervo creciente de conocimientos matemáticos. Las nuevas matemáticas pueden usarse junto con las antiguas para resolver problemas aún más difíciles. Este procedimiento se ha venido siguiendo desde hace muchos siglos, y la acumulación total de las matemáticas es bastante mayor de lo que mucha gente piensa. La aritmética es una clase de matemáticas. Otras clases de matemáticas que estudiarás más adelante son la trigonometría, el álgebra y la geometría plana.

Actualmente existen más de ochenta diferentes clases de matemáticas. Ningún matemático puede aspirar a conocer más que una parte pequeña de todo esto. En verdad el estudio de cualquiera de estas ochenta diferentes ramas de las matemáticas

... por toda la vida. Por tanto, ¡no ... todas las respuestas!

... de páginas de ..., lo que ... de lo que una persona ... es que durante los últimos ... más matemáticas que en todos los miles ... del hombre.

Azar y probabilidad

... matemáticos que a los matemáticos ... para resolver problemas, es ... probabilidad.

... de nuestra vida carecen de certeza. ... Existe, por ejemplo, la probabilidad ... de los tomateros mientras lees esto ... que el profesor dé un escrito hoy. Es ... la probabilidad de cualquiera de estos ..., aunque en estos casos nos contentamos con saber ...

En otros casos, sin embargo, nos gustaría calcular más precisamente la probabilidad, a fin de comparar las probabilidades de ... alternativas. Pues bien, los matemáticos han estado ... eso desde hace muchos años, mediante lo que se llama el cálculo de probabilidades.

Disney necesitó los servicios de los matemáticos

Antes de que Walt Disney construyera Disneyland, los matemáticos le respondieron a muchas preguntas de esta clase. Cuando se propuso fundar Disneyland, Disney deseaba saber de qué tamaño debía construirla, dónde debería estar situada, cuánto debía cobrar por la entrada y qué clase de entretenimientos debía ofrecer para los días feriados. No deseaba arriesgar una inversión de $...,000,000 al construir Disneyland sin saber algo de las probabilidades de su buen éxito.

Las preguntas para las cuales Disney deseaba encontrar respuestas eran de este tipo: Si construyo cierta clase de entretenimiento, en determinado lugar y cobro tanto por la entrada, ¿qué probabilidad tendré de obtener cierta ganancia?

Disney se fue al Instituto de Investigaciones de Stánford, donde conversó con un grupo de personas especializadas en aplicar el razonamiento matemático a los problemas de los negocios. Lo primero que hicieron los hombres de Stánford fue recoger varias estadísticas acerca de la gente (sus ganancias, sus hábitos de viaje, sus entretenimientos preferidos, número de hijos, etc.). Combinando esta información mediante razonamientos matemáticos, predijeron la probabilidad de que la gente fuera a un lugar dado y pagara cierta suma por derecho de entrada. Gracias a esta clase de razonamiento, pudieron predecir la probabilidad de tener una Disneyland próspera con cierto tipo de entretenimiento en un determinado lugar. Sabiendo ahora la probabilidad de tener buen éxito bajo ciertas condiciones, Disney estaba mejor capacitado para resolver cómo y dónde construir Disneyland, y cuánto cobrar por la entrada.

Este ejemplo es típico de la manera como se usa la probabilidad para calcular el grado de inseguridad de un acontecimiento o la probabilidad de tener éxito en cualquier acción que se proyecta realizar.

Los siguientes problemas tratan de darte una idea de lo que es la probabilidad simple.

<u>Ejercicios 1-4</u>

1. Para ver cómo un matemático puede comenzar a hacer un cálculo de probabilidades, imagínate que arrojas dos monedas. Hay cuatro maneras igualmente posibles como pueden caer las monedas:

Primera moneda	C	C	R	R
Segunda moneda	C	R	C	R

Usamos la C para representar cara y la R para representar el revés de la moneda. CC describe el caso en que las dos monedas caen con la cara hacia arriba. Decimos que la probabilidad de tirar 2 monedas con 2 caras hacia arriba es 1 en 4, ó $\frac{1}{4}$. No podemos predecir qué sucederá cada vez que se tiren las dos monedas, pero podemos predecir que si las monedas se tiran unas 100,000 veces, caerán ambas con sus caras hacia arriba $\frac{1}{4}$ de las veces. Prueba este experimento 100 veces con alguno de tus compañeros de clase y anota los resultados. Anota también los [illegible] de los experimentos hechos por el resto de la clase y averigua cuántas veces se ha repetido CC en el total de veces que fueron arrojadas las monedas.

2. ¿Qué probabilidad hay de que las dos monedas caigan con el revés hacia arriba?
3. ¿Qué probabilidad hay de que aparezca la cara hacia arriba cuando se tira una sola moneda?
4. ¿Qué probabilidad hay de sacar el as de espadas de una baraja de 52 cartas o naipes?
5. ¿Qué probabilidad hay de sacar algún as de una baraja de 52 cartas o naipes?
6. ¿Qué probabilidad hay de tirar un dado y hacerlo caer con la cara que tiene dos puntos hacia arriba?
7. Cuatro personas juegan con una baraja de 52 naipes, que, como sabes, contiene cuatro ases. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera persona que reciba un naipe obtenga un as de corazón?
8. PROBLEMA DIFÍCIL. Al tirar dos dados, ¿qué probabilidad hay de que ambos caigan con la cara que tiene un solo punto hacia arriba?
9. PROBLEMA DIFÍCIL. ¿Qué probabilidad hay de que caigan tres caras hacia arriba al tirar tres monedas? ¿Qué probabilidad hay de tener dos caras hacia arriba? ¿Por lo menos dos caras?

1-4. Las matemáticas de hoy

Te ha tocado vivir en un mundo que cambia muy rápidamente. Para que tengas mejor idea de los cambios que han ocurrido en los últimos 20 años, pregunta a tus padres cómo era la vida cuando ellos asistían a la escuela secundaria. ¿Te das cuenta de que muchas cosas como la televisión en colores, los submarinos atómicos, los aviones de propulsión a chorro y los satélites artificiales son todas invenciones recientes? Existen medicinas y vacunas nuevas. También hay diferentes modos de tomar decisiones en los negocios. Hay nuevas maneras de computar. Cada día se hacen cientos de descubrimientos o invenciones. ¿Puedes mencionar algunos descubrimientos, desarrollos o productos nuevos? Lo interesantes problemas matemáticos y las matemáticas han contribuido a toda clase de formas de progreso.

En la <u>industria telefónica</u>, las matemáticas se usan para diseñar maneras de pasar de un circuito a otro, a fin de que, cuando marque un número telefónico, tenga buena probabilidad de no encontrarse con una línea ocupada. Las matemáticas han contribuido especialmente al descubrimiento de mejores medios para enviar información a través de hilos telefónicos o mediante sistemas de comunicación inalámbrica.

En la <u>industria de la aviación y en la astronáutica</u> las matemáticas ayudan a determinar la mejor forma para un avión o para una nave interplanetaria, y la necesaria solidez de su construcción. Otra clase de matemáticas predice el riesgo de que un avión se desintegre al [illegible]le a grandes velocidades a través de una zona turbulenta. También hay otras formas de matemáticas que ayudan a diseñar la radio y el radar que se usan para guiar los aviones y mediante los cuales unos aparatos pueden comunicarse con otros y con los aeropuertos.

En casi toda clase de <u>fábricas</u>, las matemáticas (el cálculo de probabilidades mencionado en la última sección) se usan para predecir la durabilidad o eficiencia de los objetos fabricados. Muchas veces el fabricante debe garantizar el funcionamiento correcto de su producto basado en una predicción matemática. Si un matemático se equivoca, el fabricante pierde dinero (¡y el matemático puede perder su empleo!).

Otras clases de matemáticas nuevas ayudan a los <u>comerciantes</u> a decidir cuánto deben producir, cómo distribuir mejor el tiempo de producción para no tener que pagar sobresueldo a los operarios, y dónde construir nuevas instalaciones a fin de reducir los gastos de transporte.

En la <u>industria petrolera</u> las matemáticas se utilizan extensamente para decidir cuántos pozos deben abrirse, y dónde debe perforarse para obtener la mayor cantidad posible de petróleo con el menor costo. Las técnicas matemáticas también ayudan al fabricante de gasolina a decidir cuánta gasolina de cada clase debe refinar, partiendo de distintos tipos de petróleo crudo.

En todos estos negocios e industrias, como asimismo en universidades y organismos gubernamentales, se calcula extensamente mediante las matemáticas y las nuevas computadoras electrónicas.

¿Por qué se usan tanto las matemáticas actualmente en tan distintas actividades? Una de las razones es: porque el razonamiento matemático, y las distintas clases de matemáticas que se han desarrollado, permiten de una manera precisa describir situaciones complicadas y analizar problemas difíciles. El lenguaje de las matemáticas se expresa en símbolos breves, precisos, definidos y usados de acuerdo a reglas lógicas. Esto hace que a menudo sea posible estudiar problemas demasiado complicados como para ser visualizados directamente. Frecuentemente, el razonamiento matemático predice la posibilidad o imposibilidad de realizar un experimento científico. A veces, la respuesta más útil que un matemático puede encontrar es demostrar sin lugar a dudas que el problema (o la máquina, o el sistema, o el experimento) que se estudia es imposible. El trabajo matemático puede también mostrar por qué el problema es imposible en la forma actual y sugerir una manera de evitar las dificultades.

1-. Las matemáticas como vocación.

Antes de la segunda guerra mundial, casi todos los matemáticos eran profesores en las escuelas secundarias y en las universidades. Desde entonces, el mundo de las matemáticas y de los matemáticos ha cambiado muchísimo. Actualmente hay más profesores de matemáticas que nunca antes. Sólo en Estados Unidos hay cerca de 50,000 personas que enseñan matemáticas en el nivel de la escuela secundaria. Unos 5,000 profesores más trabajan en los colegios y universidades. Pero ahora (1960), hay más de 20,000 personas que trabajan como matemáticos para el comercio, la industria y el gobierno.

Numerosos organismos o agencias del gobierno federal emplean matemáticos para diversas actividades. Hay miles de personas que trabajan con computadoras y usan las matemáticas calculatorias. Las industrias de todos los tipos emplean matemáticos para [illegible] [illegible] [illegible], para ayudar a otros empleados con [illegible] difíciles de matemáticas y aun para enseñar matemáticas a [illegible].

[illegible], [illegible], se [illegible] a los adelantos [illegible] en la ciencia y la tecnología. Cuando estés listo para buscar trabajo, las oportunidades para una carrera en matemáticas serán más numerosas y variadas.

En las noticias [illegible], encontrarás mucha información acerca de las matemáticas y su función en la vida actual. Las actividades [illegible] en las Secciones 1-[illegible] y 1-7 sugieren algunas [illegible] esta información.

[illegible] ahora y continuar coleccionando material [illegible]. Muchos recortes se prestarán muy bien para [illegible] el tablero donde se colocan las noticias de la [illegible].

Actividades de clase 1-[illegible]

1. [illegible] comercios e industrias que emplean matemáticos [illegible]. Puedes hacerlo simplemente coleccionando [illegible] de los diarios corrientes o de revistas especializadas en matemáticas, o de revistas técnicas, en que se solicitan los servicios de matemáticos.
2. Colecciona información dada por el gobierno acerca de la posibilidad de empleo para matemáticos en servicios oficiales.
3. [illegible] artículos acerca de los matemáticos y de las matemáticas en los diarios, revistas semanales y revistas científicas.

1-7. Las matemáticas en otras vocaciones

Muchas personas que no se especializan en matemáticas necesitan conocer bastantes matemáticas, y las usan todos los días en el ejercicio de diversas profesiones. Este siempre fue el caso de los ingenieros y los físicos, quienes ahora necesitan usar matemáticas aún más avanzadas. Cada proyecto nuevo en la aviación, en astronáutica o en electrónica requiere una capacitación mayor de los ingenieros, los hombres de ciencia y los técnicos.

Las matemáticas se usan [illegible] se requieren en disciplinas como ciencias sociales, medicina, psicología, [illegible] administración [illegible]. En todas estas ramas del saber se [illegible] razonamiento matemático y diferentes clases de matemáticas. El uso de las computadoras electrónicas en el comercio y en la industria está generalmente a cargo de personas que deben aprender más matemáticas y cálculo a fin de realizar sus trabajos regulares. Para que una persona pueda obtener esos empleos necesita conocer mucho acerca de las matemáticas. Simplemente para comprender estos aspectos de la vida moderna y para apreciarlos suficientemente como buen ciudadano, necesitas conocer algo acerca de las matemáticas.

Una de las razones principales por las que se ha escrito este libro es porque sabemos que necesitarás conocer más matemáticas de las que necesitaron tus padres o de las que se exigió aprender a tus maestros. Esperamos darte un fundamento para todos tus estudios de matemáticas y otras ciencias, y al mismo tiempo compartir contigo algo del placer que se puede obtener al descubrir y usar las matemáticas.

Actividades de clase 1-7

1. Amplía tus lecturas de diarios y revistas para obtener información respecto a oportunidades de trabajo, y artículos especiales acerca de la gente que emplea sus conocimientos matemáticos en otras vocaciones.
2. Revisa los folletos de información del servicio civil para averiguar qué conocimientos matemáticos se requieren de quienes aspiran a emplearse como ingenieros, físicos y estadísticos.
3. Busca los requisitos para algunas de las siguientes profesiones (tu consejero de vocación profesional te podrá indicar dónde obtener publicaciones acerca de esta materia o prospectos de colegios):

Actuario	Economista
Albañil	Electricista
Carpintero	Enfermera
Contable	Estadístico

Físico
Granjero
Ingeniero agrónomo
Ingeniero aeronáutico
Ingeniero electricista
Ingeniero químico
Maquinista
Matemático
Médico
Plomero
Programador
Psicólogo
Químico

A.

1-8. Las matemáticas como recreación.

Así como la música es el arte de crear belleza mediante sonidos, y la pintura el arte que la crea mediante colores y formas, las matemáticas son el arte que crea belleza mediante la combinación de ideas. Mucha gente disfruta de las matemáticas como una afición fascinante. Hay quienes estudian las matemáticas por entretenimiento, así como otras personas cultivan la música o la pintura simplemente por placer.

Durante muchos miles de años la gente encontró placer en tratar de resolver diversas clases de problemas. Un buen ejemplo de esto es el problema relacionado con los puentes de Königsberg. Alrededor del año 1700, la ciudad de Königsberg, en Alemania, estaba unida por siete puentes. Mucha gente que vivía entonces en la ciudad se interesaba en saber si era posible recorrer toda la ciudad sin cruzar cada puente más de una vez.

Mediante el diagrama de estos puentes, ¿puedes resolver si esto es posible o no? Te interesará saber que un matemático contestó esta pregunta en el año 1736.

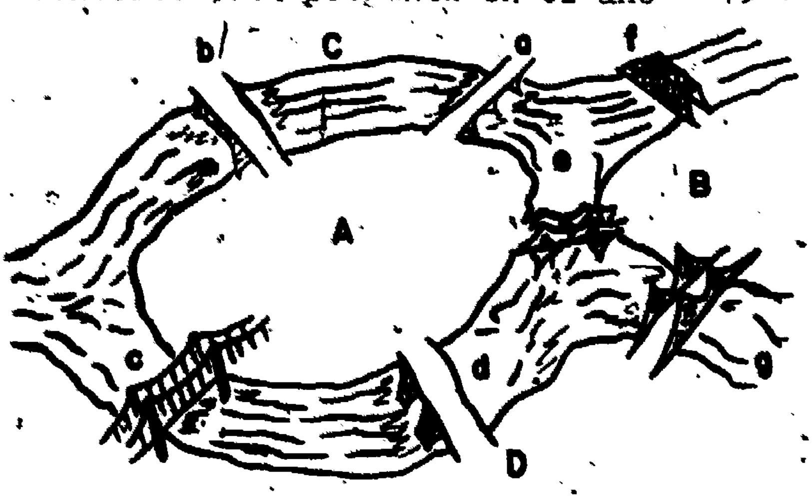


Figura 1-8-a

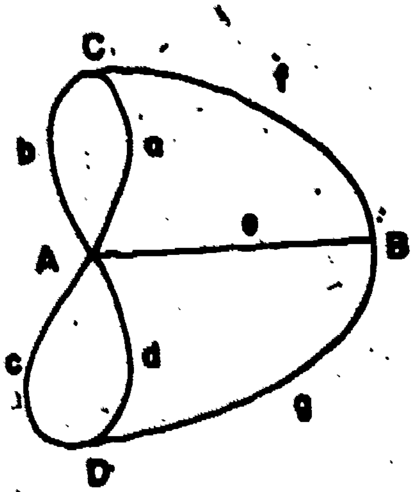


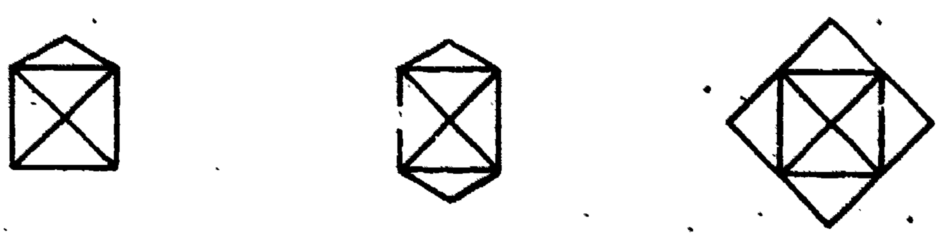
Figura 1-8-b

Observando la figura 1-8a podrás ver las distintas maneras de caminar a través de la ciudad usando los puentes que van de una parte de tierra firme a otra. Usa C en lugar de la tierra firme del norte, D, en lugar de la tierra firme del sur. A es la isla. B es la tierra firme del este. Las líneas que van de A, B, C y D señalan las rutas que pasan por los puentes para ir a diversas partes de la ciudad. Los puentes están indicados con las siguientes letras: a, b, c, d, e, f y g. En los puntos B, C y D convergen tres rutas, y en el punto A, convergen cinco rutas.

Varios tipos de matemáticas han surgido del trabajo que realizaron los matemáticos al tratar de resolver problemas como éste.

Ejercicio 1-8

1. PROBLEMA [illegible]. De las tres figuras siguientes, dos pueden trazarse sin levantar el lápiz y sin volver sobre la misma línea, mientras que una de ellas no se puede trazar de esa manera. ¿Cuáles se pueden trazar sin levantar el lápiz y sin necesidad de pasar dos veces sobre las mismas líneas?



1-9. Detalles interesantes en el estudio de las matemáticas del primer año de la escuela secundaria

Durante este año comprenderás mejor lo que realmente son las matemáticas. Tendrás muchas oportunidades de experimentar con ellas y de usar el razonamiento deductivo. Aunque las matemáticas implican mucho más que contar, calcular, medir y dibujar, usarás muchas operaciones y aplicaciones en los siguientes capítulos. Los párrafos siguientes te darán una idea general de los distintos asuntos que habrás de explorar.

Te familiarizarás con la historia de los números desde las marcas hechas por pueblos primitivos en la tierra hasta los [illegible] números. El símbolo egipcio [illegible] ([illegible]) para representar 1,000,000 y los símbolos [illegible] ‹‹Y para representar 21 te dan una idea de lo [illegible] el papel [illegible]. Encontrarás que el numeral [illegible] (uno, cero, cero) no siempre representa [illegible].

[illegible] acostumbrado a los números [illegible] 1, 2, 3, 4, etc. ¿Hay otras clases de números? [illegible] muchas otras clases.

[illegible] se comportan los números cuando los sumas o multiplicas, [illegible] algunas propiedades que son siempre [illegible] en la multiplicación. El <u>cero</u> y el <u>uno</u> [illegible] propiedades especiales que probablemente has des- [illegible] año observarás los números de una manera [illegible] antes. A veces te resultará como [illegible] a través de un lente de aumento. Cuando [illegible] problema, [illegible] cuánto se aclaran las [illegible]. Te preguntas: "¿Qué ha sucedido con [illegible] de lo que parece verdadero?"

[illegible] la palabra "igual" y conoces un [illegible]. ¿Son siempre iguales las cosas? ¿Puedes [illegible] para "no es igual a"? Te has familiarizado bien [illegible] matemáticas. Conoces tanto algunos de [illegible] sin pensar. Mira este símbolo: $\frac{23}{30}$. ¿Te [illegible] fracción? Observa ahora cómo escribían los egipcios [illegible] fracción hace muchos años: $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15}$. ¿Notas [illegible] el símbolo $\frac{23}{30}$ es mucho más simple y más fácil de [illegible]. Este año aprenderás nuevos símbolos. Ellos te ayudarán a ser más preciso en tu conversación corriente.

[illegible] otra etapa interesante de este año considerando ideas acerca de puntos, líneas y planos, y del espacio. Ya debes tener [illegible] estos elementos. ¿Has construido modelos? Si [illegible] ideas propias acerca de puntos, líneas y planos, y del espacio. Estas ideas tendrán que ser [illegible] consideradas y ampliadas. Después que estudies más [illegible], probablemente tendrás que modificar tus primeras [illegible].

Has de distinguir entre cantidades que se cuentan y cantidades que se miden. Se necesitan distintas clases de números para contar y para medir, pero tal vez ya has estudiado algo acerca de estos números y estás listo para usarlos al medir varias clases de cosas. Tus maestros de trabajos manuales y de economía doméstica son buenos jueces para juzgar cuán bien puedes hacer esto.

En un solo capítulo, no podemos decirte todo lo que contendrá tu estudio de matemáticas en el primer año de la escuela secundaria, ni qué son las matemáticas. Sin embargo, esperamos que mientras estudias matemáticas este año, te formarás una mejor idea acerca de qué son las matemáticas y de por qué debes saber de ellas lo más posible.

Bibliografía

General

1. Adler, Irving. MATHEMATICS, THE STORY OF NUMBERS, SYMBOLS AND SPACE. New York: Golden Press, 1958.

Recreación

1. Bakst, Aaron. MATHEMATICS: ITS MAGIC AND MASTERY. New York: D. Van Nostrand Company, 1941.
2. Glenn, William H. and Johnson, Donovan A. FUN WITH MATHEMATICS. New York: Webster Publishing Company, 1960.
3. Heath, Royal. MATHEMAGIC. New York: Dover Publications, 1953.
4. Merrill, Helen. MATHEMATICAL EXCURSIONS. New York: Dover Publications, 1957. Paperbound.
5. Mott-Smith, Geoffrey. MATHEMATICAL PUZZLES FOR BEGINNERS AND ENTHUSIASTS. New York: Dover Publications, 1954. Paperbound.
6. Wylie, C.R. 101 PUZZLES IN THOUGHT AND LOGIC. New York: Dover Publications, 1957. Paperbound.

Avanzado

1. Bell, Eric T. MEN OF MATHEMATICS. New York: Simon and Schuster, 1937.
2. Boehm, George A.W. and the Editors of Fortune. THE NEW WORLD OF MATH. New York: Dial Press, 1959.
   V. especialmente las páginas 17-46 (The New Mathematics).
3. Courant, Richard and Robbins, Herbert. WHAT IS MATHEMATICS? New York: Oxford University Press, 1943.
4. Kline, Morris. MATHEMATICS IN WESTERN CULTURE. New York: Oxford University Press, 1953.
   V. especialmente las páginas 3-12 (General Concepts), pág. 21-39 (Deductive Reasoning), pág. 359-369 (Probability).
5. Newman, James R. THE WORLD OF MATHEMATICS. New York: Simon and Schuster, 1953.
6. Sawyer, W.W. PRELUDE TO MATHEMATICS. Baltimore: Penguin Books, 1957.

Capítulo 2

NUMERACION

2-1. Los numerales del hombre primitivo

En tiempos prehistóricos los niños de tu edad probablemente se daban cuenta de números simples al contar, como por ejemplo, "un ciervo", o "dos flechas". Los pueblos primitivos también aprendieron a tomar nota de los números. A veces hacían nudos en una cuerda, otras veces usaban montones de piedrecitas, o hacían marcas en un palo para contar los objetos. Para contar las ovejas, por ejemplo, un niño tendría piedrecitas, o haría cortes en un palo, así . Cada piedrecita o marca representaba una oveja. Así podía darse cuenta días después de que no tenía todas sus ovejas, si no había una por cada piedrecita, o por cada marca en el palo. Haces el mismo tipo de anotaciones al contar los votos en una elección escolar, una marca por cada voto, así . Cuando la gente empezó a anotar números con marcas, haciendo rayas en una piedra o en el suelo, o cortes en un palo, estaban en efecto, por primera vez, escribiendo numerales. Los numerales son símbolos que representan números. Así, el numeral "7" es un símbolo que representa el número siete. La numeración es el estudio de cómo se escriben los símbolos con los que se representan los números.

En el transcurso de los siglos, la gente empezó a usar sonidos, o nombres, para los números. Actualmente tenemos un conjunto patrón de nombres para los números. Al contar ovejas, un ranchero asocia una oveja con la palabra "uno", y dos ovejas con la palabra "dos", y así sucesivamente. Hoy en día el hombre posee tantos símbolos (1, 2, 3, ...), como palabras (uno, dos, tres, ...) para representar los números.

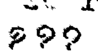
Sistemas antiguos de numeración

Uno de los sistemas más antiguos para escribir numerales del que tenemos noticia es el egipcio. Desde el año 3300 a. de J.C., los egipcios usaban jeroglíficos (es decir, imágenes) para representar números. Así, hace unos 5,000 años, los egipcios habían desarrollado un sistema con el cual podían expresar los números [illegible] y el símbolo egipcio aparecen a continuación.

nuestro número	símbolo egipcio	objeto que representa
[illegible]		una raya
[illegible]		un hueso
[illegible]		una cuerda arrollada o un rollo
[illegible]		una flor de loto
[illegible]		un dedo apuntando
[illegible]		un pez
1,[illegible],[illegible]		un hombre asombrado

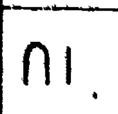
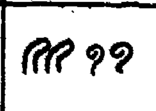
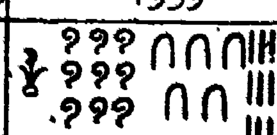
Estos símbolos se grababan sobre madera o piedra. El sistema egipcio [illegible] un avance sobre el sistema del hombre de las cavernas [illegible] las ideas siguientes:

1. Un solo símbolo podía representar el número de objetos de [illegible]. Por ejemplo, el hueso representaba el número diez.

2. Los símbolos se repetían para formar otros números. El grupo de símbolos  significaba 100 + 100 + 100, o sea 300.

3. Este sistema se basaba en grupos de diez. Diez rayas valían un hueso; diez huesos equivalían a un rollo, y así sucesivamente.

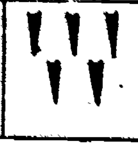
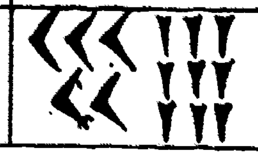
La tabla siguiente muestra cómo los egipcios escribían los numerales:

nuestros numerales	4	11	23	20,200	1959
numerales egipcios					

Hace unos 4,000 años, alrededor del año 2000 a. de J.C. los babilonios, que vivían en la parte sur de lo que hoy es el Irak, en el Cercano Oriente, escribían con un pedazo de madera sobre tablas de arcilla. A estas tablas se les dio más tarde el nombre de tablas cuneiformes porque los símbolos se escribían en ellas mediante un estilete de madera parecido a una cuña[1]. Los babilonios usaban arcilla porque no conocían el papel. Los

[1]Cuneiforme viene de cuneus, cuña, y forma, figura.

pedazos de madera con que escribían tenían aristas en forma de cuña, así . Un instrumento de dibujo de este tipo se llama estilete. Para representar el número "uno", hacían una marca  con el estilete. Dando vuelta el estilete, formaban el símbolo  para "diez". Combinando estos símbolos, escribían numerales hasta 59, como muestra la tabla siguiente:

nuestros numerales	5	13	32	59
numerales babilonios				

Más adelante en este capítulo verás cómo los babilonios escribían números mayores que 59.

Durante cientos de años se usó el sistema romano, que todavía hoy se emplea en algunos lugares para escribir fechas en las lápidas y numerar capítulos en los libros. Los historiadores creen que los numerales romanos eran imágenes de los dedos, como por ejemplo: |, ||, ||| y ||||. Los romanos usaban entonces una mano para cinco, . Gradualmente algunas de las marcas fueron omitidas y finalmente escribieron cinco así: V. Con dos cincos juntos representaron diez, X. Los otros símbolos eran letras de su alfabeto. La tabla siguiente muestra las otras letras usadas por los romanos:

nuestro numeral	1	5	10	50	100	500	1,000
numeral romano	I	V	X	L	C	D	M

En épocas antiguas, los romanos repitieron los símbolos para formar números más grandes, como habían hecho los egipcios muchos años antes. Posteriormente, los romanos usaron la sustracción para abreviar algunos números.

Los valores de los símbolos romanos se suman cuando en un numeral el símbolo de una cantidad mayor se coloca a la izquierda.

MDCLXVI = 1,000 + 500 + 100 + 50 + 10 + 5 + 1 = 1,666

DLXI = 500 + 50 + 10 + 1 = 561

Cuando un símbolo de una cantidad menor se escribe a la izquierda de otro que representa una cantidad mayor, el valor menor se sustrae del mayor. Así,

$IX = 10 - 1 = 9$

$XC = 100 - 10 = 90$

El sistema romano tiene excepciones en la resta (o sustracción).

1. V, L y D (símbolos de números que empiezan con 5), nunca se restan.
2. Un número puede ser sustraído sólo en los siguientes casos:

   I sólo puede ser sustraído de V y de X,
   X sólo puede ser sustraído de L y de C, y
   C sólo puede ser sustraído de D y de M.

Tanto la suma como la resta se pueden usar para escribir números. Primero, todo número cuyo símbolo se coloca para indicar sustracción, se resta del número que figura a su derecha; segundo, los valores hallados mediante la resta se suman a los otros números del numeral.

$CIX = 100 + (10 - 1) = 100 + 9 = 109$

$MCMLX = 1{,}000 + (1{,}000 - 100) + 50 + 10$
$= 1{,}000 + 900 + 50 + 10 = 1{,}960$

A veces los romanos escribían una raya encima de un número. Esto multiplicaba el valor del símbolo por 1,000.

$\overline{X} = 10{,}000$, $\overline{C} = 100{,}000$ y $\overline{XXII} = 22{,}000$.

Hay muchos otros sistemas de numeración usados en el transcurso de la historia: el coreano, el chino, el japonés y los sistemas hindúes en Asia; el maya, el inca y el azteca en las Américas; el hebreo, el griego y el árabe en las regiones mediterráneas. Tal vez te guste leer acerca de alguno de éstos. Si lo haces, encontrarás muy interesante el estudio de estos diversos sistemas. No disponemos del tiempo necesario para estudiarlos todos en este capítulo.

Ejercicios 2-1

1. Escribe los números siguientes, usando numerales egipcios:
   (a) 19 (b) 53 (c) 666 (d) 1,960 (e) 1,003,214
2.* Los egipcios solían usar un arreglo determinado para escribir números elevados. Sin embargo, los significados de sus símbolos no se alteraban al cambiar su posición en

un numeral. ¿De cuántas maneras diferentes puede escribirse veintidós en el sistema egipcio?

3. Escribe con nuestras cifras los números siguientes:

4. Escribe los números siguientes usando numerales babilonios:
(a) 9 (b) 22 (c) 31

5. Escribe con nuestras cifras los siguientes números:

6. Escribe con nuestros símbolos cada uno de los siguientes números:
(a) XXIX (b) LXI (c) XC (d) CV (e) DCLXVI (f) $\overline{D}$
(g) MCDXCII

7. Escribe los números siguientes en numerales romanos:
(a) 19 (b) [illegible] (c) 888 (d) 1,690 (e) 1,000,000
(f) [illegible],000

8. (a) ¿Cuántos símbolos diferentes se usaban para escribir numerales egipcios?
(b) ¿Cuántos símbolos diferentes se usaban para escribir los numerales de los números hasta 59 en el sistema babilonio?
(c) ¿Cuántos símbolos diferentes usaban los romanos para escribir sus numerales?
(d) ¿Cuántos símbolos diferentes hay en nuestro sistema?

9. (a) ¿Valen XC y CX, escritos en numerales romanos, lo mismo? Explícalo, usando nuestros numerales.
(b) En el sistema romano de las últimas épocas, ¿tenía importancia la posición de un símbolo? Si así fuese, ¿qué indica la posición del símbolo?

10. (a) ¿Qué cantidad representa el símbolo III en el sistema romano?
(b) ¿Qué cantidad representa el símbolo 111 en nuestro sistema?

(c) ¿Te explicas por qué las respuestas a las preguntas (a) y (b) son diferentes?

11. Escribe cada uno de los siguientes pares de números en nuestro sistema; luego, suma los resultados y cambia las respuestas al sistema romano.

(a) MDCCIX y DCLIV

(b) MMDCXL y MCDVIII

2-3. El sistema decimal

Historia y descripción

Todos los sistemas antiguos de numeración ya representaban un avance sobre el método de las marcas o piedrecitas. Aunque es más bien fácil representar un número en cualquiera de ellos, es difícil usarlos para sumar y multiplicar. Algunos pueblos antiguos usaron instrumentos como el ábaco para resolver sus problemas aritméticos.

La manera como nosotros escribimos numerales se desarrolló en la India. Los estudiosos árabes aprendieron este sistema y lo llevaron a Europa. Por esto nuestro sistema se llama hindu-arábico. Es interesante notar que la mayoría de los árabes nunca han usado estos símbolos. Nuestro sistema se llama decimal porque usa grupos de a diez. La palabra decimal viene de la palabra latina "decem" que significa "diez". El sistema decimal se usa hoy en la mayor parte del mundo, porque es mejor que los otros sistemas que hemos visto previamente. Por ello es importante que lo entiendas y sepas usarlo para leer y escribir numerales.

Hace mucho tiempo que el hombre se dio cuenta de que era más fácil contar un conjunto de muchos objetos si los agrupaba primero. Usamos la misma idea hoy en día llamando "dime" a un grupo de diez centavos estadounidenses, y dólar a un grupo de diez "dimes". Puesto que tenemos diez dedos en las manos, es natural que contemos por grupos de a diez. Empleamos diez símbolos para nuestros numerales. Estos símbolos, llamados dígitos[1], son 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 0. Con ellos podemos escribir números tan grandes o tan pequeños como queramos.

El sistema decimal utiliza la idea del valor de posición para representar el tamaño de un grupo. El tamaño del grupo depende, pues, de la posición del símbolo que lo representa en el numeral. El símbolo en sí nos dice cuántos de esos grupos tenemos. En el numeral 123, el "1" representa un grupo de cien; el "2" representa dos grupos de diez, o sea veinte; y el "3" representa tres unidades, o sea tres. Esta idea ingeniosa del valor de posición hace del sistema decimal el más conveniente del mundo.

Puesto que agrupamos por grupos de a diez en el sistema decimal, decimos que su base es diez. Por esto, al pasar de un lugar al lugar inmediato a su izquierda, pasamos a un grupo diez veces mayor. El primer lugar de la derecha nos dice cuántos grupos de a uno hay. El segundo lugar nos dice cuántos grupos hay de a diez, o sea diez veces uno (10×1). El tercer lugar nos dice cuántos grupos hay de diez veces diez (10×10), o sea un ciento; el siguiente, diez veces diez veces diez $(10 \times 10 \times 10)$, o sea mil, y así sucesivamente. Usando una base (el número diez) y la idea del valor de posición, se puede escribir cualquier número en el sistema decimal, usando solamente los diez símbolos básicos. No hay limitación para la magnitud de los números que se puedan representar por medio del sistema decimal.

Para entender el significado del número representado por un numeral como 123, sumamos los números representados por cada uno de los símbolos. Así, pues, 123 significa $(1 \times 100) + (2 \times 10) + (3 \times 1)$, o sea $100 + 20 + 3$. Por lo tanto, $100 + 20 + 3$ y 123 representan el mismo número. Cuando escribimos un numeral como 123 usamos símbolos numéricos, la idea del valor de posición, y la base diez.

Una de las ventajas de nuestro sistema decimal es que posee un símbolo para cero. El cero se usa para llenar posiciones que, al quedar vacías, se prestarían a mucha confusión. Para representar el número trescientos siete, escribimos el numeral 307.

---

[1]La palabra dígito proviene de digitus (en latín), que quiere decir dedo.

Sin un símbolo para cero podríamos vernos forzados a escribir 3-7. Las interpretaciones de 3-7 y de 3 7 podrían entonces confundirse. El origen del cero es incierto, pero se sabe que los hindúes usaban un símbolo para cero alrededor del año 600 d. de J.C., y se cree que lo hayan tenido desde mucho antes.

El uso ingenioso del valor de posición y del símbolo para cero hace del sistema decimal uno de los sistemas más eficientes. Pierre Simon Laplace (1749 - 1827), un famoso matemático francés, llamó el sistema decimal una de las invenciones más útiles del mundo.

Lectura y representación de numerales decimales

Empezando con el primer lugar a la derecha, cada lugar en el sistema decimal tiene un nombre. El primer lugar es el de las unidades, el segundo el de las decenas, el tercero el de los cientos (o centenas), el cuarto el de los miles (o millares), y así sucesivamente. Los lugares continúan indefinidamente. No debemos confundir los nombres de nuestros diez símbolos con los nombres de los lugares (o sea, posiciones). Los números grandes se leen más fácilmente cuando los dígitos están separados a intervalos regulares. Empezando por la derecha, se toman grupos de tres dígitos, separados por una coma. Estos grupos también llevan nombres, como se indica en la tabla siguiente para los primeros cuatro grupos de dígitos.

nombre del grupo	billones			millones			miles			unidades		
nombre del lugar (o posición)	cien billones	diez billones	billón	cien millones	diez millones	millón	cien mil	diez mil	mil	cien	diez	unidad
dígitos	5	4	5,	4	6	5,	7	3	8,	9	2	1

Para leer un número, se deben tener en cuenta los nombres de los dígitos, el concepto de valor de posición, y el nombre del grupo. Para leer el numeral indicado en la tabla, empezamos con el grupo de la izquierda leyendo el número representado por el primer grupo de dígitos como un solo numeral. A esto sigue el nombre del grupo, así: "quinientos cuarenta y cinco billones". Luego leemos cada uno de los grupos siguientes, usando el nombre de cada grupo según aparece en la tabla, excepto que no usamos el nombre "unidad" al leer el último grupo de la derecha. El numeral completo indicado en la tabla, se lee así: "quinientos cuarenta y cinco billones, cuatrocientos sesenta y cinco millones, setecientos treinta y ocho mil, novecientos veintiuno.

Aunque sólo poseemos diez símbolos, los usamos una y otra vez. Se los usa en distintas posiciones para expresar números diferentes. Del mismo modo, al leer numerales nos valemos de unas pocas palabras básicas. Usamos los nombres de los símbolos, "uno", "dos", "tres", "cuatro", y así sucesivamente. Luego tenemos las palabras "diez", "once", "doce", "trece", "catorce", "quince", "cien", "mil", y así sucesivamente. Para otros numerales, usamos nombres combinados, como en "dieciséis" que no es sino "diez y seis", o como en "ciento veinticinco", que es "un ciento, dos decenas y cinco unidades".

Ejercicios 2-2

1. ¿Cuántos símbolos se usan en el sistema decimal de numeración? Escribe estos símbolos.
2. Escribe los nombres para los primeros nueve lugares en el sistema decimal. Empieza con el más bajo y sigue en orden creciente como: "uno, diez, ?, ?, ...".
3. Practica leyendo oralmente, o escribiendo en palabras, los numerales siguientes:

(a)	300	(d)	15,015	(g)	100,009
(b)	3,007	(e)	234,000	(h)	430,001
(c)	7,109	(f)	608,014	(i)	999,999

4. Practica como en el caso anterior con los numerales que siguen:

(a)	7,036,298	(c)	20,300,400,500
(b)	9,300,708,500,000	(d)	900,000,000,000

5. Usando numerales decimales, escribe:
   (a) Ciento cincuenta y nueve.

(b) Quinientos tres.
(c) Seis mil, ochocientos cincuenta y siete.
(d) Tres millones, setenta mil, trece.
(e) Cuatro billones, trescientos setenta y seis millones, siete mil.
(f) Veinte mil, diez.
(g) Nueve millones, quince mil, doscientos.

6. (a) Escribe el numeral que representa el mayor número de cinco cifras en el sistema decimal.
(b) Explica el significado de este número, del mismo modo como $(3 \times 10) + (5 \times 1)$ explica el significado de 35.
(c) Escribe el numeral con palabras.

7. (a) Escribe el numeral que representa el menor número de seis cifras en el sistema decimal.
(b) Explica el significado de este número.
(c) Escribe el numeral con palabras.

2-3. El desarrollo de los numerales y la notación exponencial

Decimos que el sistema decimal de numeración tiene como base diez. Empezando con el lugar de las unidades, cada lugar a la izquierda tiene un valor diez veces mayor que el correspondiente lugar a su derecha. Los primeros seis lugares, yendo de derecha a izquierda, se indican abajo:

cien mil	diez mil	mil	cien	diez	uno
$(10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10)$	$(10 \times 10 \times 10 \times 10)$	$(10 \times 10 \times 10)$	(10×10)	(10)	(1)

A menudo abreviamos la escritura de tales numerales con un numeral escrito en letra pequeña arriba y a la derecha del 10. Este numeral indica cuántos dieces se multiplican entre ellos. Los números que se multiplican así, se llaman <u>factores</u>. De esta manera los valores de los diversos lugares se escriben y leen como sigue:

$(10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10)$	10^5	"diez a la quinta potencia"
$(10 \times 10 \times 10 \times 10)$	10^4	"diez a la cuarta potencia"
$(10 \times 10 \times 10)$	10^3	"diez a la tercera potencia"
(10×10)	10^2	"diez a la segunda potencia"
(10)	10^1	"diez a la primera potencia"
(1)	1	"uno"

En una expresión como 10^2, el número 10 se llama la <u>base</u>, y el 2 se llama el <u>exponente</u>. El exponente nos dice cuántas veces se toma la base como factor en un producto. 10^2 indica (10×10), o sea 100. Un número como 10^2 se llama una <u>potencia</u> de 10, y en este caso se dice que el número diez está elevado a la segunda potencia. El exponente se omite en general cuando se trata de la primera potencia; es decir, escribimos 10 en vez de 10^1. Todos los demás exponentes se escriben siempre. Otra manera de escribir $(4 \times 4 \times 4)$ es 4^3, donde ahora 4 es la base y 3 es el exponente.

¿Cómo podemos expresar el significado de "352" con exponentes?

$352 = (3 \times 10 \times 10) + (5 \times 10) + (2 \times 1)$

$= (3 \times 10^2) + (5 \times 10^1) + (2 \times 1)$. Esto se llama la <u>notación desarrollada</u>. La escritura de los numerales en notación desarrollada ayuda a explicar el significado del numeral entero.

<u>Historia</u>

Parece probable que la razón de que usemos un sistema de numeración de base diez sea que tenemos diez dedos en las manos. Esto explica por qué los diez símbolos se llaman "dígitos" cuando se usan como numerales. Usamos el término "dígitos" cuando queremos referirnos a los diez símbolos en sí, independientemente de los numerales en que figuren.

Los celtas, que vivieron en Europa hace más de 2,000 años, y los mayas, de la América Central y México, usaban veinte como base. ¿Puedes pensar en alguna razón para esto? ¿Qué nombre especial usamos a veces para veinte? Algunas tribus de esquimales agrupan y cuentan de cinco en cinco. ¿Puedes encontrar una buena explicación para esto? Más adelante veremos cómo funcionan los sistemas que usan otros números como bases.

Ejercicios 2-3

1. Escribe con palabras: 10^1 como "diez a la primera potencia", y así sucesivamente hasta $10^{[illegible]}$.

2. Escribe mediante el uso de exponentes:
   (a) [illegible] $\times$ [illegible] $\times$ [illegible] $\times 3 \times 3$ (e) $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$
   (b) [illegible] (f) 4×4
   (c) [illegible] (g) $279 \times 279 \times 279 \times 279 \times 279$
   (d) [illegible] (h) [illegible]

3. ¿Cuántos cincos se usan como factores en las expresiones siguientes?
   (a) [illegible] (c) 5^2 (e) 5^1
   (b) [illegible] (d) 5^{10} (f) 5^5

4. Escribe los números siguientes sin exponentes, como en $2^3 = 2 \times 2 \times 2$:
   (a) [illegible] (c) [illegible] (e) 33^5
   (b) [illegible] (d) $10^{[illegible]}$ (f) 175^6

5. ¿Qué nos dice un exponente?

6. Escribe cada una de las expresiones siguientes como se indica. Por ejemplo: 4^3 significa $4 \times 4 \times 4 = 64$.
   (a) [illegible] (d) [illegible] (g) 8^2 (j) 3^4
   (b) [illegible] (e) [illegible] (h) 9^2 (k) 2^6
   (c) [illegible] (f) 7^3 (i) 10^3 (l) 4^5

7. ¿Cuál de los numerales representa el número mayor?
   (a) [illegible] (b) 2^9 ó 9^2

8. Escribe las siguientes cifras en notación desarrollada, según este ejemplo: $210 = (2 \times 10^2) + (1 \times 10^1) + (0 \times 1)$.
   (a) [illegible] (c) 7,062
   (b) [illegible] (d) 59,126
   (e) 109,180

9. Completa la tabla de potencias de diez que aparece más abajo, empezando con 10^{10}. La siguiente expresión es 10^9, y así sucesivamente. Escribe el numeral representado por cada expresión, y luego escríbelo con palabras. Continúa hasta alcanzar 10^1.

Potencia	Numeral	Palabras
10^{10}	10,000,000,000	diez billones
10^{9}	1,000,000,000	un billón
10^{8}	?	?

10. En la tabla del problema 9, ¿cuál es la relación entre el exponente de una potencia de 10 y los ceros cuando el número se expresa en el sistema decimal?
11. Escribe con exponentes:
    (a) 1,000 (c) 1,000,000
    (b) 100,000 (d) cien millones
12. Un matemático conversaba un día acerca de la aritmética con un grupo de estudiantes. Hablaban de un número elevado que decidieron llamar un "googol". El "googol" es 1 seguido de 100 ceros. Escribe esto con exponentes.
13. PROBLEMA DIFICIL. ¿Qué significa 10^2? ¿Y 10^1? ¿Cómo te parece que debería interpretarse 10^0?

2-4. Numerales en base siete

Desde hace mucho tiempo conoces y usas el sistema decimal; por eso puedes sentirte tentado a pensar que lo entiendes completamente. No obstante, es posible que se te hayan escapado algunas de sus características, simplemente porque los numerales te son tan familiares. En esta sección estudiaremos un sistema de notación con base diferente. Así entenderás mejor los numerales decimales.

Suponte que encontremos habitantes de otro planeta, que tengan siete dedos. En vez de contar de diez en diez, estos habitantes podrían tal vez contar de siete en siete. Veamos cómo se escriben los numerales en base siete. Esta vez nos disponemos a trabajar con grupos de a siete. Mira las letras equis que aparecen más abajo reunidas en grupos de a siete, junto a otras equis sueltas.

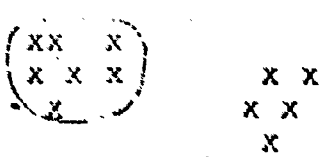


Figura 2-4-a

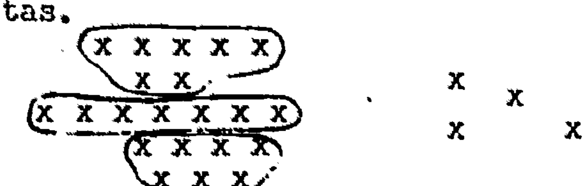


Figura 2-4-b

En la figura 2-4-a vemos un grupo de siete equis, seguido de cinco equis sueltas. El numeral se escribe 15_{siete}. En este numeral, el 1 nos dice que hay un grupo de siete, mientras que el 5 indica que hay cinco unidades.

¿Cuántos grupos de siete hay en la figura 2-4-b? ¿Cuántas equis quedan fuera de los grupos de siete? El numeral que representa el número total de equis es 34_{siete}. El 3 indica que hay tres grupos de siete, y el 4 representa cuatro equis aisladas, es decir cuatro unidades. El siete "escrito abajo", nos recuerda que estamos trabajando en base siete.

Cuando agrupamos de siete en siete, el número de objetos individuales que quedan, puede sólo ser cero, uno, dos, tres, cuatro, cinco o seis. Se requieren símbolos para representar estos números. Suponte que usemos los símbolos familiares 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 en vez de inventar nuevos símbolos. Como notarás, no se necesitan otros símbolos para el sistema de base siete.

Si las equis representan marcas para los días, podemos considerar 15_{siete} como un modo de escribir una semana y cinco días. En nuestro sistema decimal este número se llama "doce" y se escribe "12", para indicar un grupo de diez más dos unidades. No escribimos la base al usar nuestros numerales usuales (en base diez) pues sabemos de qué base se trata.

No conviene usar el nombre "quince" para 15_{siete} porque "quince" designa un grupo de diez más cinco unidades. Vamos simplemente a leer 15_{siete} como "uno, cinco, base siete".

Sabes cómo contar en base diez y cómo escribir los numerales en sucesión. Observa que uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, cada uno se representa por un solo símbolo. ¿Cómo se representa "diez"? Esta representación, 10, significa un grupo de diez más cero.

Teniendo en cuenta esta idea, piensa cómo se debe contar en base siete. Pruébalo tú mismo y compara con la tabla, agregando los numerales desde 21_{siete} hasta 63_{siete}. En esta tabla se ha omitido la indicación en "base siete".

Contando en base siete

número	símbolo	número	símbolo
uno	1	uno, cuatro	14
dos	2	uno, cinco	15
tres	3	uno, seis	16
cuatro	4	dos, cero	20
cinco	5	dos, uno	21
seis	6	---------	--
uno, cero	10	seis, tres	63
uno, uno	11	seis, cuatro	64
uno, dos	12	seis, cinco	65
uno, tres	13	seis, seis	66

¿Cómo obtuviste el numeral que sigue al 16_{siete}? Probablemente pensaste así:

x x x x x x x   x x x x x x   más   x   es lo mismo que   x x x x x x x   x x x x x x x

que son dos grupos de siete equis más cero equis.

¿Qué numeral sigue a 66_{siete}? Ahí tendrías 6 sietes y 6 unidades, más otra unidad. Esto da 6 sietes más otro siete; en total, siete sietes. ¿Cómo podríamos representar $(\text{siete})^2$ sin usar un nuevo símbolo? Introduciendo un nuevo grupo, el de los $(\text{siete})^2$. Este grupo se escribiría 100_{siete}. ¿Qué denota realmente este número? Parte de ahí y escribe algunos otros. ¿Cuál sería el numeral que sigue a 666_{siete}?

Ahora estás en condiciones de escribir una lista de valores de posición para la base siete. ¿Puedes hacer esto por ti mismo, estudiando los valores de posición decimales de la página 31 y pensando en el significado de 100_{siete}?

Valores de posición en base siete

$(\text{siete})^5$	$(\text{siete})^4$	$(\text{siete})^3$	$(\text{siete})^2$	$(\text{siete})^1$	(uno)

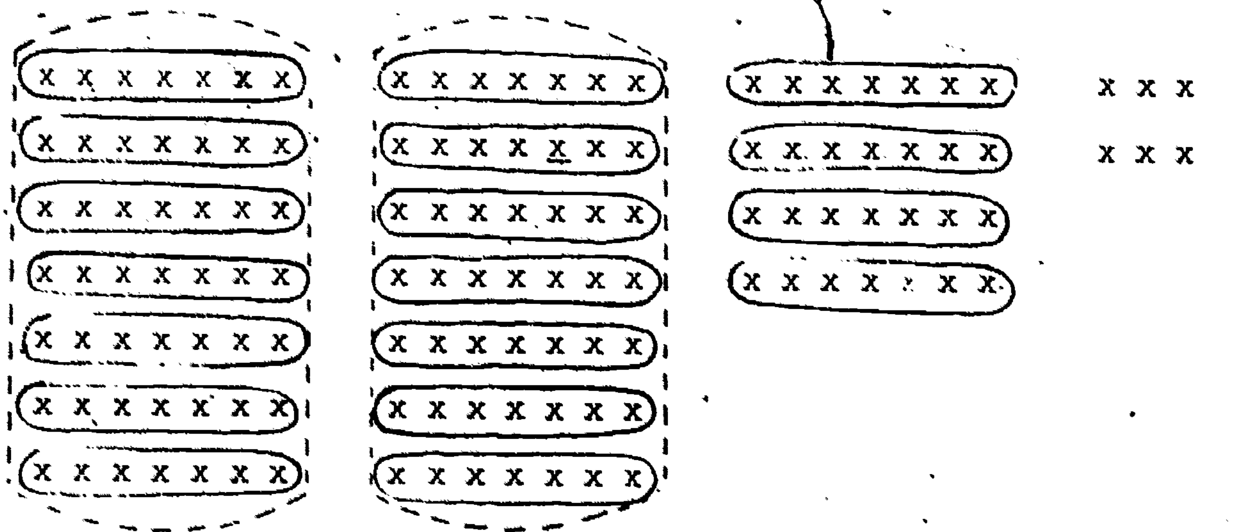
Observa que cada lugar representa siete veces el valor del lugar inmediato a la derecha. El primer lugar a la derecha es el <u>lugar de las unidades</u> en ambos sistemas, el decimal y el de base siete. El valor del segundo lugar es la <u>base multiplicada por</u>

uno. En este caso, ¿cuánto es? El valor en el tercer lugar de la derecha es (siete × siete), y en el lugar siguiente (siete × siete × siete).

¿Qué nombre se da en el sistema decimal a (siete × siete)? Tenemos que usar éste (cuarenta y nueve) cuando cambiamos de base siete a base diez. Muestra que el numeral decimal para $(\text{siete})^3$ es 343. ¿Cuál es el numeral decimal equivalente a $(\text{siete})^4$?

Usando los resultados anteriores vemos que $246_{\text{siete}} = (2 \times \text{siete} \times \text{siete}) + (4 \times \text{siete}) + (6 \times \text{uno})$.

El siguiente diagrama muestra el agrupamiento representado efectivamente por los dígitos y los valores de posición en el numeral 246_{siete}:



(2 × siete × siete) (4 × siete) (6 × uno)

Si deseamos escribir el número de las equis que figuran arriba en el sistema decimal, podemos escribir:

$$
\begin{aligned}
246_{\text{siete}} &= (2 \times 7 \times 7) + (4 \times 7) + (6 \times 1) \\
&= (2 \times 49) \quad + (4 \times 7) + (6 \times 1) \\
&= \quad 98 \quad + \quad 28 \quad + \quad 6 \\
&= 132_{\text{diez}}
\end{aligned}
$$

Reagrupa las equis que figuran más arriba para mostrar que hay 1 grupo de (diez × diez), 3 grupos de (diez) y 2 unidades más. Esto deberá ayudarte a comprender que $246_{\text{siete}} = 132_{\text{diez}}$.

Ejercicios 2-4

1. Agrupa las equis que aparecen a continuación y escribe el número de ellas en base siete:

   (a) x x x x x

   x x x x x

   (b) x x x x x

   x x x x x

   x x x x

   x x x x

   (c) x x x x x x x x x

   x x x x x x x x x

   x x x x x x x x x

   x x x x x x x x x

   x x x x x x x x x

   x x x x x x x x x

   x x x x x x x x

2. Dibuja equis (cruces) agrupadas de tal modo que representen los siguientes numerales:

   (a) 11_{siete} (b) $2[illegible]_{siete}$ (c) 35_{siete} (d) 101_{siete}

3. Escribe cada uno de los numerales siguientes en notación desarrollada y luego en notación decimal:

   (a) 33_{siete} (b) 45_{siete} (c) 100_{siete} (d) 524_{siete}

4. Escribe el numeral que sigue a cada uno de los siguientes numerales:

   (a) [illegible]$_{siete}$ (c) 54_{siete} (e) 666_{siete}

   (b) $10[illegible]_{siete}$ (d) 162_{siete} (f) 1006_{siete}

5. ¿Cuál es el valor del "6" en cada uno de los siguientes numerales?

   (a) [illegible]0_{siete} (b) 56_{siete} (c) 605_{siete} (d) 6050_{siete}

6. Escribe en el sistema de base siete el valor del quinto lugar, contando de derecha a izquierda, desde las unidades.

7. En el sistema de base siete, ¿qué valor tiene el décimo lugar empezando por la derecha?

*8. ¿Qué numeral en el sistema de base siete representa el número que llamamos seis docenas?

9. ¿Qué número es mayor, 452_{siete} ó 432_{siete}?

10. ¿Qué número es mayor, 250_{siete} ó 205_{diez}?

11. ¿Qué número es menor, 2125_{siete} ó 754_{diez}?

12. Un número es divisible por diez si se obtiene un resto cero al dividirlo por diez.

(a) ¿Es 30_{diez} divisible por diez? ¿Por qué?
(b) ¿Es 31_{diez} divisible por diez? ¿Por qué?
(c) ¿Cómo puedes saber, a simple vista, si un número escrito en base diez es divisible por diez?

*13. ¿Es 30_{siete} divisible por diez? Explica cómo obtuviste la respuesta. ¿Es 40_{siete} divisible por diez?

*14. (a) ¿Qué significa la frase "un número natural es divisible por siete"?
(b) ¿Es 30_{siete} divisible por siete? ¿Por qué?

*15. ¿Es 31_{siete} divisible por siete? Explica la respuesta.

*16. Enuncia una regla para determinar cuándo un número escrito en base siete es divisible por siete.

De los ejercicios 11 hasta 16 puedes deducir que la manera de averiguar si un número es divisible por diez depende del sistema en el cual este número se represente. La regla de divisibilidad por diez en el sistema de base diez es análoga a la regla de divisibilidad por siete en el sistema de base siete.

17. ¿Cuáles de los números 24_{diez}, 31_{diez} y 68_{diez}, son divisibles por dos? ¿Cómo te das cuenta de ello? ¿Cómo se llama a un número divisible por dos? ¿Cómo se llama a un número que no es divisible por dos?

*18. ¿Es [illegible]$_{siete}$ par o impar? ¿Puedes, a simple vista, decir cuáles de los siguientes numerales representan números pares y cuáles impares?

12_{siete}, 13_{siete}, 14_{siete}, 25_{siete} y 66_{siete}.

¿Qué podrías hacer para averiguarlo?

De nuevo una regla de divisibilidad para el sistema en base diez no se aplica al sistema en base siete. Las reglas de divisibilidad parecen depender del sistema en que trabajamos.

19. PROBLEMA DIFICIL. En el planeta X-101 las páginas de los libros están numeradas en el orden que sigue: 1, ∠, △, □, ⧅, ⊠, 1-, 11, 1∠, 1△, 1□, 1⧅, 1⊠, ∠-, ∠1, y así sucesivamente. ¿Cuál parece ser la base del sistema de numeración usado por los habitantes del planeta supuesto? ¿Por qué? ¿Cómo se escribiría el número que sigue a ∠1? ¿Qué símbolo corresponde a nuestro cero? Escribe numerales para

los números que van de □ - a ⧄△.

20. PROBLEMA DIFICIL. Determina una regla para averiguar cuándo un número escrito en base siete es divisible por dos.

2-5. Cálculos en base siete

Suma

En el sistema decimal, o sea de base diez, hay 100 combinaciones aditivas "básicas". A tu edad éstas te son familiares. Las combinaciones pueden ser dispuestas en una tabla conveniente. Parte de esta tabla se indica a continuación:

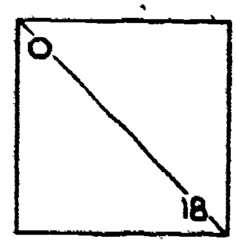
Suma, base diez

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0									
1	1	2								
2				5						
3	3	4	5	6						
4	4	5	6	7	8					
5	5	6	7	8	9	10	11			
6										
7										
8										
9									17	

Los números representados en la fila horizontal por encima de la primera raya se suman a los números que se hallan en la columna de la izquierda, debajo del signo " + ". La suma de cada par de números se escribe en la tabla. La suma 2 + 3 es 5, como se indica con las flechas.

Ejercicios 2-5a

1. Efectúa las siguientes sumas:
   (a) $6 + 5$ (b) $9 + 8$
2. Usando papel cuadriculado, completa la tabla de sumar de la página 39. (La usarás luego.)
3. Traza una línea diagonal de la esquina superior izquierda a la esquina inferior derecha de la tabla como se indica a la derecha.



   (a) ¿Es $3 + 4$ igual a $4 + 3$?
   (b) ¿Cómo podría obtenerse en la tabla la respuesta a la pregunta anterior?
   (c) ¿Qué observas respecto a las dos partes de la tabla?
   (d) ¿Qué te dice esto en cuanto al número de las __diferentes__ combinaciones que debes conocer? Asegúrate de que puedes recordar cualquiera de estas combinaciones cuando sea necesario.
4. Haz una tabla de las sumas básicas cuando los números se representan en base siete. Se han indicado cuatro sumas como guía.

+	0	1	2	3	4	5	6
0							
1				4			
2					6		
3						11	
4							13
5							
6							

5. (a) ¿Cuántas combinaciones __diferentes__ de números hay en la tabla en base siete? ¿Por qué?
   (b) ¿Qué es más fácil, aprender las combinaciones necesarias en base siete, o en base diez? ¿Por qué?

(c) Halla en las tablas las respuestas para $4_{diez} + 5_{diez}$ y $4_{siete} + 5_{siete}$. ¿Son iguales los resultados? Esto es, ¿representan el mismo número?

La respuesta al ejercicio 5(c) ilustra el hecho de que un número es una idea independiente de los numerales usados para representar su nombre. En efecto, 9_{diez} y 12_{siete} son dos nombres diferentes para el mismo número.

No trates de memorizar las combinaciones aditivas en base siete. El interés en construir tal tabla reside en que esto te ayuda a entender las operaciones con números.

La tabla que se pide completar en el ejercicio 4 del último grupo de ejercicios, muestra las sumas de pares de números del cero al seis. En verdad, no es mucho más difícil sumar números grandes. Para aprenderlo, veamos cómo sumamos en base diez. ¿Qué pasos sigues mentalmente cuando sumas, por ejemplo, veinticinco y cuarenta y ocho en el sistema decimal?

25 = 2 decenas + 5 unidades = ⟶ 25
48 = 4 decenas + 8 unidades = ⟶ 48
6 decenas + 13 unidades = 7 decenas + 3 unidades = 73

Trata ahora de sumar en base siete: $14_{siete} + 35_{siete}$.

1 siete + 4 unidades
3 sietes + 5 unidades
4 sietes + 12 unidades = 5 sietes + 2 unidades = 52_{siete}

(Puedes usar la tabla de sumar en base siete para hacer las sumas 5 + 4, 3 + 1.)

¿En qué se parecen los dos ejemplos anteriores? ¿En qué difieren estos dos ejemplos? ¿Cuándo es necesario "llevar" (o sea, reagrupar) en el sistema decimal? ¿Cuándo es necesario "llevar" (o sea, reagrupar) en el sistema de base siete?

Revisa tu dominio de la adición, con los ejercicios siguientes. Usa la tabla de sumar para las sumas básicas.

42_{siete}	65_{siete}	32_{siete}	254_{siete}	435_{siete}	524_{siete}
$\underline{13_{siete}}$	$\underline{11_{siete}}$	$\underline{25_{siete}}$	$\underline{105_{siete}}$	$\underline{625_{siete}}$	$\underline{564_{siete}}$

Las respuestas son, respectivamente, 55_{siete}, 106_{siete}, 60_{siete},

362_{siete}, 1363_{siete} y 1421_{siete}.

Resta o sustracción

¿Cómo aprendiste a restar en base diez? Probablemente practicaste con combinaciones como 14 - 5 hasta familiarizarte bien con esta operación. Sabes la respuesta a este ejemplo, pero suponte por un instante que no la conozcas. ¿Podrías obtener la respuesta usando la tabla de sumar? En realidad, la pregunta que te conviene formular es: "¿Qué número, sumado a 5, nos da 14?" Puesto que la séptima fila de la tabla de sumar en base diez, nos da los resultados de sumar 5 a varios números, debemos buscar 14 en esta fila. ¿Dónde está la respuesta a 14 - 5? ¿Contestaste "la última columna"? Usa la tabla de sumar en base diez para hallar:

9 - 2, 8 - 5, 12 - 7 y 17 - 9.

El principio que acabamos de estudiar se aplica a toda operación de resta. Hay otra idea que se necesita en muchos casos, la idea de "pedir prestado", es decir "reagrupar". Esta última idea se ilustra más abajo, en base diez, para hallar 761 - 283:

7 cientos + 6 dec. + 1 unid.	=	6 cientos + 15 dec. + 11 unid.	=	761
2 cientos + 8 dec. + 3 unid.	=	2 cientos + 8 dec. + 3 unid.	=	283
		4 cientos + 7 dec. + 8 unid.	=	478

Ahora ensayemos la resta en base siete. ¿Cómo hallarías $6_{siete} - 2_{siete}$? Halla $13_{siete} - 6_{siete}$. ¿Cómo usaste la tabla de sumar para la base siete? Halla las respuestas para las restas siguientes:

15_{siete}	12_{siete}	11_{siete}	14_{siete}	13_{siete}
$\underline{6_{siete}}$	$\underline{4_{siete}}$	$\underline{6_{siete}}$	$\underline{5_{siete}}$	$\underline{4_{siete}}$

Las respuestas para estos problemas son 6_{siete}, 5_{siete}, 2_{siete}, 6_{siete} y 6_{siete}.

Resolvamos ahora un problema más difícil en base siete comparando el procedimiento con el usado más arriba:

$$
\begin{array}{rcccccl}
43_{siete} & = & 4 \text{ sietes} + 3 \text{ unidades} & = & 3 \text{ sietes} + 13 \text{ unidades} & = & 43_{siete} \\
\underline{16_{siete}} & = & \underline{1 \text{ siete} + 6 \text{ unidades}} & = & \underline{1 \text{ siete} + 6 \text{ unidades}} & = & \underline{16_{siete}} \\
 & & & & 2 \text{ sietes} + 4 \text{ unidades} & = & 24_{siete}
\end{array}
$$

Es importante observar que la expresión "13 unidades" de arriba se refiere al sistema en base siete y es "un siete, tres unidades". ¿Cómo puedes hallar en la tabla el número que sumado a 6_{siete} da 13_{siete}? Tal vez podrás encontrar la respuesta sin necesidad de usar la tabla.

Practica con las siguientes restas:

$$
\begin{array}{rrrrr}
56_{siete} & 61_{siete} & 34_{siete} & 452_{siete} & 503_{siete} \\
\underline{14_{siete}} & \underline{35_{siete}} & \underline{26_{siete}} & \underline{263_{siete}} & \underline{140_{siete}}
\end{array}
$$

Las respuestas son 42_{siete}, 23_{siete}, 5_{siete}, 156_{siete} y 333_{siete}.

Ejercicios 2-5b

1. Cada uno de los ejemplos siguientes está escrito en base siete. Suma. Luego verifica, cambiando los numerales al sistema decimal y sumando en base diez como en el ejemplo:

Base siete		Base diez
16_{siete}	=	13
$\underline{23_{siete}}$	=	$\underline{17}$
42_{siete}		30

¿Es $42_{siete} = 30$?

(a) $\begin{array}{r} 25_{siete} \\ \underline{31_{siete}} \end{array}$ (b) $\begin{array}{r} 56_{siete} \\ \underline{21_{siete}} \end{array}$ (c) $\begin{array}{r} 214_{siete} \\ \underline{53_{siete}} \end{array}$

(d) $160_{siete} + 430_{siete}$ (e) $45_{siete} + 163_{siete}$

(f) $403_{siete} + 563_{siete}$ (g) $645_{siete} + 605_{siete}$

(h) $6245_{siete} + 5314_{siete}$ (i) $6204_{siete} + 234_{siete}$

(j) $645_{siete} + 666_{siete}$ (k) $5406_{siete} + 6245_{siete}$

2. Usa la tabla de sumar en base siete para hallar:

(a) $6_{siete} - 4_{siete}$ (b) $11_{siete} - 4_{siete}$

(c) $12_{siete} - 5_{siete}$

3. Cada uno de los ejemplos siguientes está escrito en base siete. Resta. Luego verifica, pasando al sistema decimal.

(a) $\begin{array}{r} 10_{siete} \\ \underline{5_{siete}} \end{array}$ (b) $\begin{array}{r} 65_{siete} \\ \underline{26_{siete}} \end{array}$ (c) $\begin{array}{r} 200_{siete} \\ \underline{4_{siete}} \end{array}$ (d) $\begin{array}{r} 160_{siete} \\ \underline{6_{siete}} \end{array}$

(e) $44_{siete} - 35_{siete}$ (f) $641_{siete} - 132_{siete}$

(g) $502_{siete} - 266_{siete}$ (h) $5000_{siete} - 4261_{siete}$

(i) $634_{siete} - 52_{siete}$ (j) $134_{siete} - 65_{siete}$

(k) $3451_{siete} - 2164_{siete}$ (l) $253_{siete} - 166_{siete}$

4. Dibujando grupos de equis, muestra que:

(a) 4 dos = 11_{siete} (c) 3 cincos = 21_{siete}

(b) 6 tres = 24_{siete} (d) 5 seis = 42_{siete}

Multiplicación

Para multiplicar, podemos usar una tabla de datos básicos. Completa la tabla que sigue en numerales decimales y cerciórate de que conoces y recuerdas en todo momento el producto de dos números cualesquiera de cero a nueve.

Multiplicación, base diez

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0								
1	0	1								
2			4	6						
3				9	12					
4										
5										
6										
7										
8										
9										

Ejercicios 2-5

1. Refiérete a la tabla precedente.
   (a) Explica la presencia de la columna y la fila de ceros.
   (b) ¿Qué fila de la tabla es exactamente igual a la fila de arriba? ¿Por qué?
2. Imagina una diagonal trazada desde el signo " × " hasta la esquina inferior derecha. ¿Qué puedes decir de las dos partes triangulares que quedan a cada lado de está línea?
3. Completa la tabla de multiplicar en base siete indicada más abajo. Sugerencia: Para hallar $4_{siete} \times 3_{siete}$ puedes escribir cuatro equis tres veces, y reagrupar para encontrar el numeral en base siete. Aún mejor, puedes proceder así: $3_{siete} + 3_{siete} + 3_{siete} + 3_{siete}$.

Multiplicación, base siete

×	0	1	2	3	4	5	6
0							
1							
2					11	13	
3							
4				15			
5							
6							51

4. Hay menos entradas en la tabla de multiplicar en base siete que en la tabla del sistema en base diez. ¿Qué te dice esto en cuanto a la facilidad para aprender la multiplicación en base siete?
5. Imagina una diagonal trazada desde el signo " × " hasta la esquina inferior derecha en la última tabla.
   (a) ¿Cómo se relacionan las entradas por encima de la diagonal con las que hay debajo de ella?
   (b) ¿En qué te hace pensar la observación de la parte (a) en cuanto a $3_{siete} \times 4_{siete}$?

No vale la pena memorizar la tabla en base siete. Lo que interesa es que entiendas cómo funciona y cómo se construye dicha tabla.

[illegible]. Multiplica los números siguientes con numerales en base diez:

$$\begin{array}{r} 4[illegible] \\ \times\ [illegible]3 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} [illegible]9 \\ \times\ [illegible] \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4[illegible]27 \\ \times\ 43[illegible] \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7634 \\ \times\ 89 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 51043 \\ \times\ 78 \\ \hline \end{array}$$

Conoces el mecanismo de llevar (o sea, reagrupar) en la adición, y tienes experiencia en la multiplicación en base diez. Usa la tabla de multiplicar en base siete para hallar los productos siguientes:

$$\begin{array}{r} 52_{siete} \\ \times\ 3_{siete} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 34_{siete} \\ \times\ 6_{siete} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 421_{siete} \\ \times\ 4_{siete} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 621_{siete} \\ \times\ 2_{siete} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 604_{siete} \\ \times\ 35_{siete} \\ \hline \end{array}$$

Las respuestas son 216_{siete}, 303_{siete}, 2314_{siete}, 1542_{siete} y 31406_{siete}.

Verifica la multiplicación que se indica a la derecha y luego contesta a las preguntas siguientes: ¿Cómo se obtiene la expresión 123 en la tercera fila? ¿Cómo se obtiene la expresión 201 en la cuarta fila? ¿Por qué está el 1 de la cuarta fila colocado debajo del 2 de la tercera fila? ¿Por qué está el 0 de la cuarta fila colocado debajo del 1 de la tercera fila? No te preocupes si no te das cuenta de por qué las expresiones de las filas 3 y 4 se suman, pues estudiarás esto con más detalle luego.

$$\begin{array}{r} 45_{siete} \\ \times\ 32_{siete} \\ \hline 123 \\ 201\ \ \\ \hline 2133_{siete} \end{array}$$

Un método de verificación consiste en pasar de los numerales en base siete a numerales en base diez, como se indica aquí:

$$\begin{array}{rl} 604_{siete} & = (6 \times 49) + (0 \times 7) + (4) = 294 + 4 = \\ \times\ 35_{siete} & = (3 \times 7) + (5) \qquad\qquad = 21 + 5 = \\ \hline 4226 & \\ 2415\ \ & \\ \hline 31406_{siete} & = (3\times2401) + (1\times343) + (4\times49) + (0\times7) + (6) = \end{array} \qquad \begin{array}{r} 298_{diez} \\ \times\ 26_{diez} \\ \hline 1788 \\ 596\ \ \\ \hline 7748_{diez} \end{array}$$

División

La división queda como ejercicio para ti. Tal vez no te resulte fácil. El trabajar en base siete deberá ayudarte a entender por qué algunos estudiantes tienen dificultad con la división en base diez. Aquí hay dos ejemplos que te conviene examinar. Todos los numerales en los ejemplos están escritos en base siete. ¿Cómo puedes usar la tabla de multiplicación aquí?

División en base siete

$$[illegible]_{siete}\ \overline{)\ 40[illegible]3_{siete}}\qquad \text{quotient: } [illegible]_{siete}$$
$$\begin{array}{l} \underline{5[illegible]} \\ [illegible] \\ \underline{42} \\ [illegible] \\ \underline{33} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2015_{siete} \\ 46_{siete}\ \overline{)\ 126125_{siete}} \\ \underline{125} \\ 112 \\ \underline{46} \\ 335 \\ \underline{332} \\ 3 \end{array}$$

Ejercicios 2-5d

1. Multiplica los números siguientes en base siete y verifica, pasando al sistema en base diez:
   (a) $[illegible]_{siete} \times 5_{siete}$ (b) $6_{siete} \times 25_{siete}$
   (c) $[illegible]_{siete} \times 12_{siete}$ (d) $5_{siete} \times 461_{siete}$
   (e) $[illegible]_{siete} \times 43_{siete}$ (f) $654_{siete} \times 453_{siete}$
   (g) $304_{siete} \times 24_{siete}$ (h) $5643_{siete} \times 652_{siete}$
   (i) $[illegible]_{siete} \times 341_{siete}$ (j) $26403_{siete} \times 45_{siete}$

*2. Divide. Todos los numerales de este ejercicio están en base siete.
   (a) $[illegible]_{siete}\ \overline{)\ 42_{siete}}$ (b) $5_{siete}\ \overline{)\ 433_{siete}}$
   (c) $4_{siete}\ \overline{)\ 2316_{siete}}$ (d) $21_{siete}\ \overline{)\ 2625_{siete}}$

3. Escribe en forma desarrollada:
   (a) 403_{siete} (b) 189_{diez}

4. De los numerales en el ejercicio 3, ¿cuál representa el número mayor?

5. Suma:
   (a) $[illegible]_{siete} + 14_{siete}$ (b) $\begin{array}{r} 65_{siete} \\ \underline{25_{siete}} \end{array}$

(c) 434_{siete}
$\underline{324_{siete}}$

(d) $601_{siete} + 304_{siete}$

6. Resta:

(a) 13_{siete}
$\underline{[illegible]_{siete}}$

(b) $30_{siete} - 1_{siete}$

(c) 402_{siete}
$\underline{35_{siete}}$

7. Repite el párrafo siguiente, reemplazando los numerales en base siete por numerales en base diez.

Luisa sigue el curso de matemáticas del grado (año) 10_{siete}, en el salón 234_{siete}. El libro que usa se llama <u>Matemática de liceo 10_{siete}</u>. Tiene 21_{siete} capítulos y 1102_{siete} páginas. Hay 44_{siete} alumnos en la clase, que se reúne 5_{siete} veces por semana, por períodos de 106_{siete} minutos cada día. 16_{siete} de los alumnos son niñas y 25_{siete} son varones. El alumno más joven de la clase tiene 14_{siete} años y el más alto mide 123_{siete} pulgadas.

2-6. <u>Cambio de base diez a base siete</u>

Has aprendido a cambiar números escritos en base siete por numerales en base diez. Veamos ahora cómo se pasa de la base diez a la base siete. En base siete los valores de posición son: uno, $siete^1$, $siete^2$, $siete^3$, y así sucesivamente. Dicho de otro modo, los valores de posición son <u>uno</u> y <u>las potencias de siete</u>.

$$siete^1 = 7_{diez}$$
$$siete^2 = (7 \times 7) \text{ o sea } 49_{diez}$$
$$siete^3 = (7 \times 7 \times 7) \text{ o sea } 343_{diez}$$

Suponte que quieres cambiar 12_{diez} en un numeral en base siete. Esta vez vamos a <u>pensar</u> en grupos de potencias de siete en vez de agrupar marcas. ¿Cuál es la mayor potencia de siete contenida en 12_{diez}? ¿Es $siete^1$ la mayor? ¿Qué pasa con $siete^2$ (cuarenta y nueve), o con $siete^3$ (trescientos cuarenta y tres)? Vemos que sólo $siete^1$ es lo bastante pequeño como para estar contenido en 12_{diez}.

Cuando dividimos 12 por 7 tenemos:

$$7\overline{)\,12}\quad \text{cociente } 1,\ \ 12-7=5$$

¿Qué significa el 1 de más arriba? ¿Qué significa el 5? Estas expresiones nos indican que 12_{diez} contiene 1 vez siete más 5 unidades de sobra, o sea $12_{diez} = (1 \times \text{siete}) + (5 \times \text{uno})$. Por lo tanto, $12_{diez} = 15_{siete}$.

Cerciórate de que sabes cuál es la posición (o sea el lugar) que corresponde en base siete a siete^2, siete^3, siete^4, y así sucesivamente.

¿Cómo se reagrupa 54_{diez} para expresarlo, como un numeral en base siete? ¿Cuál es la mayor potencia de siete contenida en 54_{diez}?

En 54_{diez} tenemos ___?___ $\times \text{siete}^2$ + ___?___ $\times$ siete + ___?___ $\times$ uno.

$$49\overline{)\,54}\quad \text{cociente } 1,\ \ 54-49=5$$

Tenemos (___1___ $\times \text{siete}^2$) + (0 $\times$ siete) + (___5___ $\times$ uno). Entonces $54_{diez} = 105_{siete}$.

Supongamos ahora que se trate de pasar 524_{diez} a un numeral en base siete. Puesto que 524_{diez} es mayor que 343 (siete^3), vamos a hallar cuántas veces ese número contiene a 343.

$$343\overline{)\,524}\quad \text{cociente } 1,\ \ 524-343=181$$

Por lo tanto, 524 contiene un siete^3, con un resto de 181, o sea $524 = (1 \times \text{siete}^3) + 181$, y entonces habrá un "1" en el lugar correspondiente a siete^3.

Ahora vamos a hallar cuántas veces 49 (siete^2) entra en los restantes 181.

$$49\overline{)\,181}\quad \text{cociente } 3,\ \ 181-147=34$$

Por lo tanto, 181 contiene 3 veces 49 con un resto de 34, o sea $181 = (3 \times \text{siete}^2) + 34$, y habrá un "3" en el lugar correspondiente a siete^2.

¿Cuántas veces entra siete en los 34 restantes?

$$\begin{array}{r} 4 \\ 7 \overline{)\,34} \\ \underline{28} \\ 6 \end{array}$$

Por lo tanto, 34 contiene 4 veces siete con un resto de 6, o sea $34 = (4 \times \text{siete}) + 6$, y habrá, pues, un "4" en el lugar correspondiente a siete[1].

¿Qué habrá en el lugar de las unidades? Tenemos:

$$524_{\text{diez}} = (1 \times \text{siete}^3) + (3 \times \text{siete}^2) + (4 \times \text{siete}) + (6 \times \text{uno})$$

$$524_{\text{diez}} = 1346_{\text{siete}}$$

Tapa las respuestas de los siguientes ejemplos hasta que hayas hecho los cambios tú solo, y luego compara los resultados.

$$10_{\text{diez}} = (1 \times \text{siete}) + (3 \times \text{uno}) = 13_{\text{siete}}$$

$$46_{\text{diez}} = (6 \times \text{siete}) + (4 \times \text{uno}) = 64_{\text{siete}}$$

$$162_{\text{diez}} = (3 \times \text{siete}^2) + (2 \times \text{siete}) + (1 \times \text{uno}) = 321_{\text{siete}}$$

$$1{,}738_{\text{diez}} = (5 \times \text{siete}^3) + (0 \times \text{siete}^2) + (3 \times \text{siete}) + (2 \times \text{uno})$$
$$= 5032_{\text{siete}}$$

Al pasar numerales del sistema de base diez al sistema de base siete, primero se selecciona el valor de posición <u>más elevado</u> en base siete (es decir, potencia de siete) contenido en el número. Dividimos el número por esta potencia de siete y hallamos el cociente y el resto. El <u>cociente</u> es el primer dígito del numeral en base siete. Dividimos el resto por la potencia siguiente inferior de siete y este cociente es el segundo dígito. Continuamos dividiendo restos por las potencias siguientes inferiores de siete hasta determinar todos los dígitos en el numeral en base siete.

<u>Ejercicios 2-6</u>

1. Muestra que:

   (a) $50_{\text{diez}} = 101_{\text{siete}}$ (b) $145_{\text{diez}} = 265_{\text{siete}}$

   (c) $1{,}024_{\text{diez}} = 2662_{\text{siete}}$

2. Cambia los numerales siguientes por numerales en base siete:
   (a) 12
   (b) 36
   (c) 44
   (d) 53
   (e) 218
   (f) 1,320

Los ejercicios 3, 4 y 5 te ayudarán a descubrir un nuevo método para cambiar numerales en base diez por numerales en base siete.

3. Divide $1{,}958_{diez}$ por diez. ¿Cuál es el cociente? ¿Cuál es el resto? Divide el cociente por diez. ¿Cuál es el nuevo cociente? ¿Y el nuevo resto? Continúa de la misma manera, dividiendo cada cociente por diez hasta llegar a un cociente cero. ¿Qué relación hay entre los restos sucesivos y el número original? Usa el mismo procedimiento con 123,4[illegible],759_{diez}. Aplícalo a un número cualquiera.
4. Divide 524_{diez} por siete. ¿Cuál es el cociente? ¿Y el resto? Divide el cociente por siete y continúa como se indica en el ejercicio 3, pero esta vez divide por siete en vez de dividir por diez. Ahora escribe 524_{diez} como numeral en base siete y compáralo con los restos que has obtenido.
5. ¿Puedes descubrir un nuevo método para cambiar numerales en base diez por numerales en base siete?
6. En todos los ejemplos que se indican a continuación faltan algunos numerales. Escribe los numerales necesarios para que los ejemplos resulten correctos. Recuerda que si no se indica la base, se trata de la base diez.

(a) Suma:
$$\begin{array}{r} 6\ 7\ 5 \\ 4\ 8\ 6 \\ \hline ?\ ?\ ?\ ? \end{array}$$

(b) Suma:
$$\begin{array}{r} 8\ 9\ 4 \\ ?\ ?\ ? \\ \hline 1\ 1\ 6\ 9 \end{array}$$

(c) Suma:
$$\begin{array}{r} 4\ 3\ 2_{siete} \\ ?\ ?\ ?_{siete} \\ \hline 1\ 4\ 1\ 6_{siete} \end{array}$$

(d) Suma:
$$\begin{array}{r} 2\ 3\ 0\ 5_{siete} \\ ?\ ?\ ?_{siete} \\ \hline 3\ 1\ 0\ 0_{siete} \end{array}$$

(e) Suma:

$$\begin{array}{r} 2\ 6\ 4_{siete} \\ 3\ 5\ 2_{siete} \\ 1\ 4\ 0_{siete} \\ \hline \end{array}$$

(f) Multiplicación:

$$\begin{array}{r} 5\ 1\ 4_{siete} \\ \times \quad ?_{siete} \\ \hline 2\ 1\ 4\ 5_{siete} \end{array}$$

*(g) Multiplicación:

$$\begin{array}{r} ?\ ?\ ?_{siete} \\ \times\ 5\ 4_{siete} \\ \hline 3\ 6\ 2\ 0\ 1_{siete} \end{array}$$

2-7. Numerales en otras bases

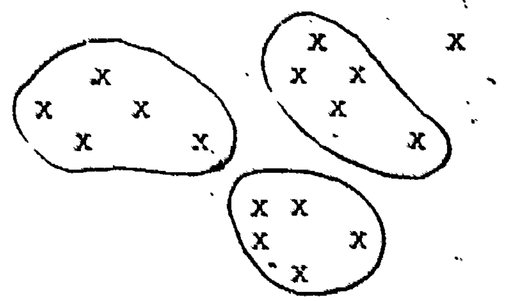
Puesto que acabas de estudiar numerales en base siete, sabes ahora que es posible expresar números en sistemas diferentes del decimal. Muchos piensan que se usa el sistema decimal porque la base diez es mejor que otras, o porque el número diez posee propiedades especiales. Más arriba hemos indicado que la causa probable del uso de la base diez es la de que tenemos diez dedos en las manos. Era muy natural para los pueblos primitivos el contar coordinando con sus dedos. Si el hombre tuviera seis u ocho dedos, habría aprendido a contar por medias docenas o por grupos de a ocho.

Nuestro sistema familiar de notación decimal es mejor que el egipcio, el babilonio y otros más, porque usa la idea del valor de posición y tiene el símbolo cero, y no porque su base es diez. El sistema egipcio era decimal, pero era menos práctico por otras razones.

En bases cinco y seis

Nuestro sistema decimal usa diez símbolos. En el sistema de base siete usaste sólo siete símbolos: 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6. ¿Cuántos símbolos usarán los esquimales para contar en base cinco? ¿Cuántos símbolos se necesitarían para contar en base seis? Pensándolo un poco, probablemente obtendrás las respuestas correctas. ¿Puedes sugerir cuántos símbolos se necesitan para contar en base veinte?

Las equis de la derecha están dispuestas en grupos de a cinco. ¿Cuántos de estos grupos hay? ¿Cuántas equis sobran?



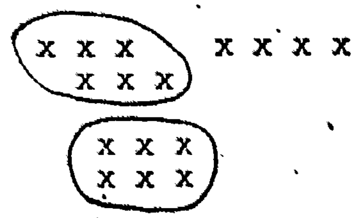
El numeral decimal para representar el número de equis eh este diagrama es 16. Usando los símbolos 0, 1, 2, 3 y 4, ¿cómo estaría representado 16_{diez}, como un numeral en base cinco? Un esquimal, contando en base cinco, pensaría:

hay 3 grupos de cinco y 1 más,

$$16_{\text{diez}} = (3 \times \text{cinco}) + (1 \times \text{uno})$$

$$16_{\text{diez}} = 31_{\text{cinco}}$$

En el dibujo de la derecha hay dieciséis equis, dispuestas en grupos de a seis. ¿Cuántos grupos de a seis hay? ¿Cuántas equis sobran? ¿Cómo escribirías 16_{diez} en base seis?



Hay 2 grupos de seis y 4 más,

$$16_{\text{diez}} = (2 \times \text{seis}) + (4 \times \text{uno})$$

$$16_{\text{diez}} = 24_{\text{seis}}$$

Escribe dieciséis equis. Agrúpalas en grupos de a cuatro. ¿Puedes escribir el numeral 16_{diez} en base cuatro? ¿Cuántos grupos de a cuatro hay? Recuerda que no puedes usar el símbolo "4" en base cuatro. A continuación se indica una tabla de potencias de cuatro en numerales decimales:

(cuatro^3)	(cuatro^2)	(cuatro^1)	(uno)
$(4 \times 4 \times 4)$	(4×4)	(4)	(1)
(64)	(16)	(4)	(1)

Para escribir dieciséis equis en base cuatro necesitamos $(1$ grupo de $\text{cuatro}^2) + (0$ grupo de cuatro$) + (0$ unidad$)$. Vale decir, $16_{\text{diez}} = 100_{\text{cuatro}}$.

Ejercicios 2-7

1. Dibuja dieciséis letras equis y agrúpalas en grupos de a tres.
   (a) Hay _____ grupos de tres letras y _____ que sobra.
   (b) ¿Son ambos números correspondientes a las respuestas de la parte (a) dígitos en el sistema de base tres? ¿Por qué no?
   (c) En dieciséis letras equis hay (_____ grupos de $tres^2$) + (_____ grupos de tres) + (_____ que sobra).
   (d) 16_{diez} = _____$_{tres}$
2. Dibuja grupos de equis para mostrar los números correspondientes a los siguientes numerales. Luego escribe los numerales decimales para estos números.
   (a) 23_{cuatro} (b) 15_{seis} (c) 102_{tres} (d) 21_{cinco}
3. Escribe en la notación de base cinco los números desde uno hasta treinta. Empieza una tabla como se indica a continuación:

Base diez	0	1	2	3	4	5	6	7
Base cinco	0	1	?	?	?	?	?	?

4. (a) ¿Cuántos tres hay en 20_{tres}?
   (b) ¿Cuántos cuatros hay en 20_{cuatro}?
   (c) ¿Cuántos cincos hay en 20_{cinco}?
   (d) ¿Cuántos seis hay en 20_{seis}?
5. Escribe los ejemplos siguientes en notación desarrollada. Luego escribe el numeral en base diez para cada caso, como se indica en el ejemplo siguiente.
   Ejemplo. $102_{cinco} = (1 \times 25) + (0 \times 5) + (2 \times 1) = 27$
   (a) 245_{seis} (c) 1002_{tres}
   (b) 412_{cinco} (d) 1021_{cuatro}
6. Escribe los siguientes numerales decimales en las bases seis, cinco, cuatro y tres. Recuerda los valores de las potencias para cada una de estas bases. Observa el ejemplo:
   $$7_{diez} = 11_{seis} = 12_{cinco} = 13_{cuatro} = 21_{tres}$$
   (a) 11_{diez} (c) 28_{diez}
   (b) 15_{diez} (d) 36_{diez}

7. ¿Cuál es el menor número cardinal que se puede usar como base para un sistema de notación?

*8. Efectúa los siguientes cálculos:

(a) Suma: $132_{cuatro} + 211_{cuatro}$.

(b) Suma: $15_{seis} + 231_{seis} + 420_{seis}$.

(c) Resta: $1211_{tres} - 202_{tres}$.

(d) Resta: $1423_{cinco} - 444_{cinco}$.

(e) Multiplica: $13_{cuatro} \times 3_{cuatro}$.

(f) Multiplica: $121_{seis} \times 5_{seis}$.

(g) $4_{seis} \overline{)\, 452_{seis}}$

(h) $2_{tres} \overline{)\, 121_{seis}}$

9. PROBLEMA DIFICIL. Construye un sistema de numeración análogo al decimal en el que se usen los siguientes símbolos:

símbolo	valor decimal	nombre
0	0	do
1	1	re
$\wedge$	2	mi
$\geq$	3	fa
10	4	re do

Escribe los numerales para los números desde cero hasta veinte en este sistema. Escribe los nombres correspondientes en palabras, usando "do, re", etc.

10. PROBLEMA DIFICIL. Usando los resultados del ejercicio anterior, completa las tablas de adición y multiplicación indicadas más abajo.

+	0	1	$\wedge$	$\geq$
0				
1				
$\wedge$				
$\geq$				

×	0	1	$\wedge$	$\geq$
0				
1				
$\wedge$				
$\geq$				

2-8. Sistemas binario y duodecimal

Hay otras dos bases de interés especial. El sistema de base dos, también llamado binario, se usa en algunas máquinas calculadoras modernas de alta velocidad. Estas calculadoras, llamadas a veces incorrectamente "cerebros electrónicos", usan la base dos como nosotros usamos la base diez. El sistema de base doce, también llamado sistema duodecimal, es considerado por algunos como un sistema de notación más ventajoso que el de base diez.

Sistema binario

Los historiadores nos hablan de pueblos primitivos que usaban el sistema binario. Algunas tribus australianas cuentan aún por pares, "uno, dos, dos y uno, dos dos, dos dos y uno", y así sucesivamente.

El sistema binario forma grupos de pares del mismo modo indicado aquí, a la derecha, con las tres equis. ¿Cuántos grupos de dos letras hay? ¿Cuántas equis aisladas quedan? Tres equis significan 1 grupo de dos y 1 más. En la notación binaria el numeral 3_{diez} se escribe 11_{dos}.

x x x

La numeración en el sistema binario empieza como sigue:

Numerales decimales	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Numerales binarios	1	10	11	100	101	110	111	?	?	?

¿Cuántos símbolos se necesitan para expresar numerales en base dos? Observa que el numeral 101_{dos} representa el número de dedos de una mano. ¿Qué representa 111_{dos}?

$$111_{dos} = (1 \times dos^2) + (1 \times dos^1) + (1 \times uno) = 4 + 2 + 1 = 7_{diez}$$

¿Cómo escribirías 8_{diez} en notación binaria? ¿Cómo escribirías 10_{diez} en notación binaria? Compara este numeral con 101_{dos}.

Las calculadoras modernas de alta velocidad funcionan eléctricamente. Una llave eléctrica simple tiene solamente dos posiciones, la posición abierta y la posición cerrada. Las máquinas calculadoras de alta velocidad usan estos dispositivos; teniendo, pues, sólo dos posiciones para cada cifra, usan el sistema de notación binario.

Usaremos el diagrama de la derecha para representar una calculadora. Los cuatro círculos representan cuatro luces de un tablero; cada luz corresponde a un lugar en el sistema binario. Al conectarse la corriente, se enciende la luz, lo cual se indica en la figura 2-8-b así ◌. La figura ◌ corresponde al símbolo "1". Cuando se desconecta la corriente, la luz se apaga, lo cual se indica así ○ en la figura 2-8-b. A este dibujo corresponde el símbolo "0". El tablero de la figura 2-8-b representa el numeral binario 1010_{dos}. ¿Qué numeral decimal representa este numeral? La tabla de la derecha muestra los valores de posición correspondientes a los cinco primeros lugares en base dos.

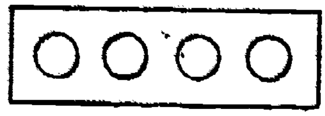


Figura 2-8-a

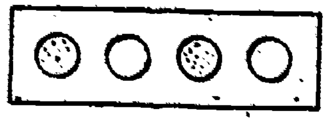


Figura 2-8-b

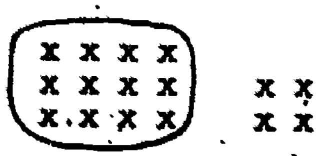
dos^4	dos^3	dos^2	dos^1	uno
2x2x2x2	2x2x2	2x2	2	1
16	8	4	2	1

$$\begin{aligned} 1010_{dos} &= (1 \times dos^3) + (0 \times dos^2) + (1 \times dos^1) + (0 \times uno) \\ &= (1 \times 8) + (0 \times 4) + (1 \times 2) + (0 \times 1) \\ &= 10_{diez} \end{aligned}$$

<u>Sistema duodecimal</u>

En el sistema duodecimal, o sea de base doce, agrupamos por docenas. Por ejemplo, una docena de huevos, una docena de manzanas o una docena de lápices. Doce docenas (12 × 12) se llama una gruesa. Las escuelas, a veces, compran lápices por gruesas.

Las dieciséis equis que se indican a la derecha están agrupadas así: un grupo de doce y cuatro equis sobrantes. Escrito como un numeral en base doce sería,



$$16_{diez} = (1 \times doce) + (4 \times uno) = 14_{doce}$$

Dibuja veinticinco equis en un papel. Traza un círculo alrededor de cada docena. ¿Cuántos grupos de doce hay? ¿Sobran algunas equis? ¿Cómo escribirías 25_{diez} en notación duodecimal? ¿Por qué este número se escribe 21_{doce}?

$$25_{diez} = (2 \times doce) + (1 \times uno) = 21_{doce}$$

Para escribir numerales en base doce hay que inventar nuevos símbolos además de usar los diez símbolos del sistema decimal. ¿Cuántos símbolos nuevos se necesitan? Para la base doce hacen falta doce símbolos; es decir, dos más que en el sistema decimal. Podemos usar la letra "T" para indicar diez y la letra "E" para indicar once como se muestra en la siguiente tabla:

Base diez	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Base doce	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	T	E	10	11	12	?	?

Observa que "T" es simplemente otro modo de escribir 10_{diez}, y "E" otro modo de escribir 11_{diez}. ¿Por qué se escribe 12_{diez} como 10_{doce}? Para escribir 195_{doce} en notación desarrollada, tenemos que

$$\begin{aligned} 195_{doce} &= (1 \times doce^2) + (9 \times doce^1) + (5 \times uno) \\ &= (1 \times 144) + (9 \times 12) + (5 \times 1) \\ &= 257_{diez} \end{aligned}$$

Ejercicios 2-8

1. Haz una tabla para representar los números desde cero hasta treinta y tres en el sistema de base dos.

Base diez	1	2		4	. . .	33
Base dos	1	1			. . .	

2. Copia y completa la tabla de sumar para la base dos que se muestra a la derecha. ¿Cuántas son las sumas elementales?

Adición, base dos

+	0	1
0		
1		

3. Empleando la misma forma que la del ejercicio 2, haz una tabla de multiplicar para la base dos. ¿Cuál es el número de productos elementales? Coteja ahora estas tablas. Según tu comparación, ¿es fácil o difícil trabajar con el sistema binario? Explica tu respuesta.

4. Escribe los siguientes numerales binarios en notación desarrollada y luego en notación de base diez:

(a) 111_{dos} (c) 10101_{dos}

(b) 1000_{dos} (d) 11000_{dos}

(e) 10100_{dos}

5. Escribe en notación duodecimal los tres números que siguen a veintiuno.

6. Para escribir $2T0_{doce}$ en notación desarrollada, tenemos:

$$2T0_{doce} = (2 \times doce^2) + (T \times doce) + (0 \times uno)$$

Para escribir $2T0_{doce}$ como un numeral decimal tendríamos primero que escribirlo como

$$(2 \times 144) + (10 \times 12) + (0 \times 1)$$

¿Cuál es el numeral decimal que representa $2T0_{doce}$?

7. Escribe los numerales siguientes en notación desarrollada y luego en base diez:

(a) 111_{doce} (c) $47E_{doce}$

(b) $3T4_{doce}$ (d) $T0E_{doce}$

8. Suma los siguientes números expresados en notación binaria. Verifica los resultados, expresando los números de los ejercicios y las respuestas en notación decimal y sumando en la forma usual.

(a) $\begin{array}{r} 101_{dos} \\ \underline{10_{dos}} \end{array}$ (b) $\begin{array}{r} 110_{dos} \\ \underline{101_{dos}} \end{array}$ (c) $\begin{array}{r} 10110_{dos} \\ \underline{11010_{dos}} \end{array}$ (d) $\begin{array}{r} 10111_{dos} \\ \underline{11111_{dos}} \end{array}$

9. Resta los siguientes números en base dos, y luego verifica los resultados como en el ejercicio 8.

(a) $\begin{array}{r} 111_{dos} \\ \underline{101_{dos}} \end{array}$ (b) $\begin{array}{r} 110_{dos} \\ \underline{11_{dos}} \end{array}$ (c) $\begin{array}{r} 1011_{dos} \\ \underline{100_{dos}} \end{array}$ (d) $\begin{array}{r} 11001_{dos} \\ \underline{10110_{dos}} \end{array}$

10. Cuando se opera con ciertas calculadoras de alta velocidad, es necesario expresar los números en el sistema binario. Cambia a notación binaria los siguientes numerales decimales:

(a) 35 (b) 128 (c) 12 (d) 100

11. Suma y resta los siguientes numerales duodecimales. Verifica los resultados, expresando los números en notación decimal y sumando y restando en la forma corriente.

(a) $2\ 3\ [illegible]_{doce}$ / $T\ 9_{doce}$ (b) $T\ 3\ 2_{doce}$ / $1\ 9\ 3_{doce}$

12. ¿Qué ventajas y desventajas, si las hay, poseen los sistemas duodecimal y binario con respecto al sistema decimal?

13. Escribe los números siguientes en notación duodecimal:

(a) $42[illegible]_{diez}$ (b) 524_{diez}

14. PROBLEMA DIFICIL. Un inspector de pesas y medidas lleva una colección de pesas que usa para verificar la exactitud de las balanzas. Diversas pesas se colocan sobre una balanza para verificar la exactitud al pesar una cantidad que varía desde 1 hasta 16 onzas. Hay que hacer varias verificaciones porque una balanza que mide correctamente 5 onzas puede, por diversas razones, ser inexacta al medir 11 onzas o más.

Halla el mínimo número de pesas, así como su peso, necesarias para verificar balanzas desde 1 onza hasta 15 onzas. Halla el mínimo número de pesas, así como su peso, necesarias para verificar balanzas desde 1 onza hasta 31 onzas.

15. PROBLEMA DIFICIL. Al trabajar con máquinas computadoras de alta velocidad resulta a veces conveniente expresar los números en el sistema de base ocho en lugar del sistema de base dos. Se pueden hacer conversiones de un sistema a otro muy rápidamente. ¿Puedes descubrir qué método debe utilizarse para estas conversiones?

Haz una tabla de numerales como se indica más abajo:

Base diez	Base ocho	Base dos
1	1	1
2	2	10
5	5	101
7	?	?
15	?	?
16	?	?
32	?	?
64	?	?
256	?	?

Compara las potencias de ocho y dos hasta 256. Estudia las potencias y la tabla anterior. ¿Es $101011010_{dos} = 532_{ocho}$? ¿Te das cuenta por qué?

2-9. Resumen

El sistema decimal es el resultado de los esfuerzos del hombre durante miles de años para desarrollar un sistema de notación eficaz. No es perfecto, pero tiene ventajas de que carecen otros sistemas. En este capítulo has estudiado algunos de los sistemas antiguos, los cuales en su tiempo representaron tremendos avances en la historia del hombre. También has estudiado sistemas con bases diferentes de la usual. Has estudiado estos sistemas para obtener un mejor entendimiento del sistema usual.

El estudiar otros sistemas te ha enseñado que un mismo número puede ser expresado por numerales diferentes. Por ejemplo, se puede escribir doce como ∩||, XII, 12_{diez}, 15_{siete} ó 1100_{dos}, y así sucesivamente. Estos numerales no son iguales, sin embargo representan el mismo número. Los símbolos que usamos no son en sí mismos números. "XII" no es doce cosas, ni tampoco es "10_{doce}". Son simplemente diferentes numerales, o sea símbolos para doce.

A veces confundimos números y numerales. Un número es una idea, mientras que un numeral es un símbolo para esta idea.

Podemos escribir "2" sobre una pizarra para representar un conjunto de dos objetos, como por ejemplo dos estudiantes, o dos libros. Si borramos el "2", retiramos el numeral, pero no destruimos el número. De la misma manera, la palabra "lápiz" no es lo mismo que el objeto que tienes en la mano cuando escribes en un papel.

Posiblemente los egipcios no se dieron cuenta de que su sistema de notación estaba basado en diez. Para darse cuenta de esto tendrían que haber sabido que es posible usar otras bases para un sistema de numeración. Tú sabes esto ahora, y aprendiste también que es posible usar cualquier número cardinal mayor que uno como base. Algunos de estos sistemas de base diferente de diez se usan realmente. El sistema binario se usa en las máquinas calculadoras de alta velocidad. Es bueno, sin embargo, que sepas que una calculadora de alta velocidad no es un "cerebro". Es más bien un esclavo de alta velocidad que hace solamente lo que se le ordena. Los cálculos rápidos con estas máquinas son posibles porque ellas funcionan a la velocidad del flujo de la electricidad y tienen gran "memoria" para almacenar información. El hombre ha sido capaz de inventar máquinas modernas de alta velocidad para calcular porque ha inventado la manera de escribir los números que se usan en el funcionamiento de estas máquinas.

Ejercicios 2-9

1. Agrupa estas veinte rayas oblícuas (////////////////////) para mostrar los valores de posición en cada una de las bases indicadas a continuación. Luego escribe el numeral que representa veinte para cada una de esas bases.
   (a) cinco (b) siete (c) diez (d) doce
2. Los numerales que se indican representan al número quince en diversas bases. Escribe la base que falta para cada numeral.
   (a) 13 ___?___ (b) 21 ___?___ (c) 30 ___?___ (d) 1111 ___?___
3. Escribe los siguientes numerales en notación desarrollada y en notación decimal:

( ) [illegible] (:) [illegible]$_{cuatro}$ (:) [illegible]$_{siete}$ (d) $37T_{doce}$

[illegible] numeral [illegible] solo y también en base dos.

[illegible] numerales que [illegible] a 88_{nueve}.

[illegible] los símbolos 𒁹 y 𒌋 para uno y diez, respectivamente. Repitiendo estos símbolos escribían cin-[illegible] así: 𒌋𒌋𒌋𒌋𒌋 𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹

[illegible] números mayores que cincuenta y nueve los babi-[illegible] los mismos símbolos indicados, más la idea [illegible] posición. La base de su sistema era muy grande: [illegible] nuestro sistema decimal, el primer lugar [illegible], así 𒌋𒌋𒌋𒌋𒌋 𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹 significaba (59 × 1).

El segundo lugar tenía por valor sesenta, así 𒌋𒁹𒁹 𒁹𒁹 significaba (𒌋𒁹𒁹 × sesenta) + (𒁹𒁹 × uno)

= ([illegible] × [illegible]) + (2 × 1)

= [illegible]

[illegible]

Los primeros tres valores de posición en el sistema babilonio [illegible]:

	sesenta^2	sesenta	uno
Significado en base diez	60 × 60	60	1

(:) En los primeros tiempos los babilonios no tenían un símbolo para cero. A veces dejaban espacios vacíos como por ejemplo en 𒁹 𒁹. El lector tenía que adivinar, según el sentido de lo escrito, si el numeral 𒁹 𒁹 significaba (𒁹 + 𒁹) × uno
o (𒁹 × sesenta) + (𒁹 × uno)
o (𒁹 × sesenta^2) + (𒁹 × uno).
Escriba tres numerales decimales para el numeral babilonio 𒁹 𒁹

(:) ¿Tiene más de una interpretación posible el número decimal "11"? ¿Por qué?

(c) Halla el valor decimal de ▼▼ <▼▼ <▼.
$= ($▼▼ $\times$ ___?___$) + ($<▼▼ $\times$ ___?___$) + ($<▼ $\times$ ___?___$)$
$=$? + ? + ?
$=$?

(d) Escribe los numerales decimales 70, 111 y 4,000 en notación babilonia.

(e) Escribe <▼ <▼ + ▼▼▼ << como un numeral babilonio.

*7. En el Discurso de Lincoln en Gettysburg, se usa el término "cuatro veintenas y siete". ¿De qué base se trata? Escribe este número en notación decimal.

*8. Un sistema de numeración usa los símbolos O, A, B, C y D para representar los números desde cero hasta cuatro, más el valor de posición. Si estos son los únicos símbolos que se usan en el sistema, escribe el numeral decimal correspondiente a D C B A O.

*9. Un número escrito en base diez consiste en tres dígitos, 9, [illegible] y otro, escritos en este orden. Si estos dígitos se invierten y el número resultante se resta del número original, se obtiene una respuesta que consiste aún en los mismos dígitos dispuestos en orden diferente. ¿Cuál es este dígito?

10. PROBLEMA DIFICIL. Suponte que un sistema utiliza las letras mayúsculas del alfabeto (A, B, C, ... Y, Z) como símbolos para numerales, más el valor de posición. La letra "O" se saca de su posición habitual entre N y P y se utiliza como símbolo del cero. ¿Cuál es la base para este sistema de notación? ¿Qué numeral decimal está representado por "B E" en esta base? ¿Qué numeral está representado por "T W O"? ¿Y por "F O U R"?

11. PROBLEMA DIFICIL. Hay varias maneras de pasar numerales escritos en otras bases a la notación en base diez. Un estudiante sugirió el siguiente método:

Ejemplo A. Cambiar 46_{doce} por la notación en base diez. Puesto que hay 2 símbolos de más en base doce, se multiplica (2×4) y se suma el resultado a 46_{diez}. ¿Funciona este método para [illegible]$_{doce}$? ¿Es este método correcto para cualquier número de dos dígitos escrito en base doce?

Ejemplo E. [illegible] [illegible]$_{siete}$ a la base diez. Puesto que hay tres símbolos de menos, se multiplica (3×4) y se resta de [illegible]$_{diez}$. ¿Funciona este método para 46_{siete}? ¿Es correcto este método para cualquier número de dos dígitos escrito en base siete?

Capítulo 3

NÚMEROS CARDINALES

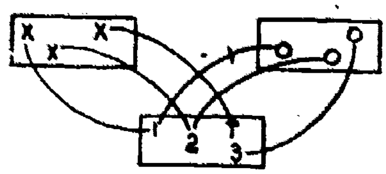
3-1. Números naturales

Los números naturales son los números que se usan para contestar a la pregunta "¿Cuántos?" El hombre primitivo desarrolló la idea de número con la práctica de hacer corresponder objetos o cosas de un conjunto, a objetos de otro conjunto. Cuando el rebaño de un pastor salía por la mañana, podía éste ir amontonando una piedra por cada una de las ovejas que salía. Al volver el rebaño por la tarde, podía retirar una piedra del montón por cada oveja que volvía. Si no sobraban piedras al volver la última oveja, sabía el pastor que todas las ovejas habían regresado. De la misma manera, para contar el número de animales salvajes que había matado podía hacer marcas en un palo—una marca por cada animal. Al preguntársele cuántos animales había matado, podía mostrar las marcas en el palo. Con esto querría decir que había matado tantos animales como marcas había en el palo. Así, pues, el hombre trataba de contestar a la pregunta "¿Cuántos?" estableciendo una correspondencia uno a uno entre los animales y las marcas del palo. También trataba de establecer una correspondencia uno a uno entre las piedras del montón y las ovejas en el rebaño. Con la frase "correspondencia uno a uno" o "correspondencia biunívoca" se quiere decir que a cada piedra le corresponde exactamente una oveja, y que a cada oveja le corresponde exactamente una piedra. Esto significa que el número de ovejas es el mismo que el número de piedras.

Algunos niños aprenden el significado de los números al contar, haciendo correspondencias uno a uno como se ha descrito antes. Examinemos diversos conjuntos de objetos como los de la figura de al lado.

Vemos que hay cierta propiedad que poseen estos conjuntos. Esta propiedad puede describirse diciendo que hay "exactamente tantas" marcas en un conjunto como en el otro. Una correspondencia uno a uno entre los conjuntos puede indicarse uniendo las marcas con trazos, o líneas. Cada marca de un conjunto se une a una marca del otro conjunto. No se deja de lado ninguna marca en ninguno de los conjuntos si se usan dos veces una misma marca. Esta correspondencia nos dice que hay "exactamente tantas" marcas en un conjunto como en el otro, pero no nos dice "cuántas hay" en términos de un número.

Afortunadamente tenemos un conjunto patrón que podemos usar para expresar "cuántos objetos hay" o "cuántas marcas hay" en cada uno de los conjuntos. También se puede usar este conjunto para decir que hay "tantos" elementos en un conjunto como en el otro. Este conjunto patrón es el de los números naturales, representados por los numerales 1, 2, 3, 4, , ... En la figura adjunta cada uno de los conjuntos de marcas está puesto en una correspondencia



uno a uno con el conjunto de numerales 1, 2, 3. El número de marcas es el mismo que el número representado por el último numeral del conjunto de numerales. Este tipo de correspondencia uno a uno entre las marcas y el conjunto de numerales nos dice que hay "tantos" elementos en un conjunto como en el otro, pero también nos dice "cuántas" marcas hay en cada uno de los conjuntos.

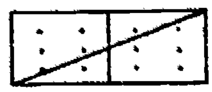
La manera de usar tales números para contar es tan natural que estos números se llaman los "números naturales".

Convenimos en que nuestro primer número natural sea 1. Si deseamos referirnos al conjunto de todos los números naturales <u>más el cero</u>, entonces lo llamaremos el conjunto de los "números cardinales".

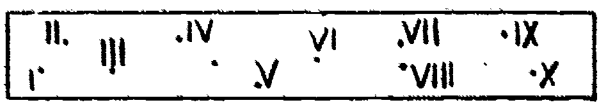
<u>Ejercicios 3-1</u>

1. Reagrupa los numerales siguientes de tal modo que los números que representan estén en orden de magnitud creciente. Pon el más pequeño al principio:
   (a) 1, 2, 3, 6, 4, 5
   (b) 2 + 1, 1 + 1, 3 + 1, 0 + 5, 1 + 6, 5 + 1, 5 + 3
   (c) IV, XI, V, VI, VII, VIII, X, IX
   (d) ^{3}siete, ^{10}siete, ^{4}siete, ^{1}siete, ^{5}siete, ^{2}siete, siete

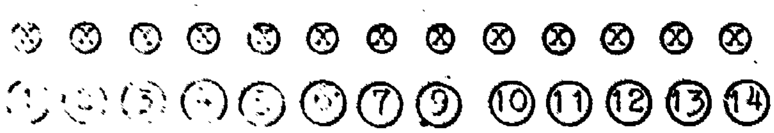
2. ¿Cuáles de los números, representados por los numerales 2, 5, [illegible] y [illegible], son números naturales entre uno y diez? ¿Entre seis y once?
3. ¿Cómo se pueden disponer 24 marcas de tal modo que se pueda decir cuántas hay, sin contarlas? Explica o ilustra tu respuesta.
4. Reagrupa las marcas siguientes de tal modo que se pueda determinar su número más fácilmente.
   (a) | | | | | | | | | |
   (b) - - - - - - - - - - -
5. Explica dos maneras de hallar el número de puntos de la figura adjunta sin contar.



6. Trata de averiguar el nombre del primer número natural en otras lenguas (francés, inglés, alemán, ruso, etc.).
7. Al contar el número de puntos de la figura se ha cometido un error. ¿Cuál es ese error?



8. ¿Se ha cometido algún error al contar el número de equis en esta figura? Si la respuesta es sí, ¿cuál es el error?



9. Supón que se han vendido 15 boletos y que el primero llevaba escrito el numeral dos. ¿Cuál es el numeral escrito en el último boleto, si todos se vendieron en su orden natural?
10. El propietario de un cine desea saber cuánta gente estuvo presente en la función de la noche anterior. Sabe que el primer boleto estaba marcado con un 27 y que el último boleto llevaba un 81. ¿Cómo llega a la conclusión de que 54 personas concurrieron a la función? ¿Es su conclusión correcta?
11. Si hay una correspondencia uno a uno entre el conjunto de personas presentes en una habitación y el conjunto de pares de zapatos en esa habitación, entonces hay una correspondencia dos a uno entre el conjunto de los zapatos que hay en la

habitación y el de personas en la misma. Da otros ejemplos de correspondencia dos a uno y cuatro a uno.

12. Lo que se indica a continuación ilustra una correspondencia uno a uno entre los números ________ y los números ________.

1	2	3	4	5	6	.	.	.
↕	↕	↕	↕	↕	↕			
2	4	6	8	10	12	.	.	.

3-2. <u>Propiedades conmutativas para los números cardinales</u>

Si tienes tres manzanas en un cesto y pones dos más, entonces el número total se obtiene sumando 2 a 3. Piensas en 3 + 2. Si hubieras empezado con dos manzanas en el cesto, y puesto 3 más, entonces el número de manzanas en el cesto se obtendría sumando 3 a 2. Pensarías entonces en 2 + 3. En ambos casos evidentemente pondrías 5 manzanas en el cesto. Podemos entonces escribir 2 + 3 = 3 + 2.

El maestro de aritmética ha leído dos números grandes que se deben sumar. Un alumno no comprendió lo que el maestro dijo cuando leyó el primer número. Escribió, pues, el segundo número y luego pidió al maestro que repitiera el primer número. Cuando éste repitió el número, el alumno lo escribió debajo del segundo número en vez de escribirlo encima. Si todos los alumnos hicieron bien las sumas, ¿obtendrá este alumno el mismo resultado que los demás?

El niño escribió: 2437 / 6254 Los otros escribieron: 6254 / 2437

La idea que acabamos de comentar se llama <u>propiedad conmutativa de la adición para los números cardinales</u>. Quiere decir que el orden en que sumamos dos números no afecta la suma. La palabra <u>propiedad</u> es usada aquí con su significado habitual, algo que <u>pertenece a</u> la operación de sumar:

3 sumado al 4 es 7 ó 4 + 3 = 7,

4 sumado al 3 es 7 ó 3 + 4 = 7.

Por lo tanto, podemos escribir $4 + 3 = 3 + 4$. Esto comprueba la propiedad conmutativa de la adición para estos dos números cardinales.

La propiedad conmutativa de la adición para números cardinales en general puede enunciarse como sigue:

Propiedad 1. Si a y b representan números cardinales, entonces $a + b = b + a$.

En el ejemplo anterior a es 4 y b es 3.

La multiplicación es otra operación que efectuamos con números. ¿Existe una propiedad conmutativa para la multiplicación? Veamos cómo hallar la respuesta a esta pregunta.

Supongamos que tenemos cinco filas de sillas con 3 sillas en cada fila. Supongamos ahora que decidimos cambiar el arreglo para hacer tres filas de 5 sillas en cada fila. ¿Necesitaremos más sillas que las que ya tenemos? ¿O, por otro lado, sobrarán algunas sillas?

• • •	• • • • •
• • •	• • • • •
• • •	• • • • •
• • •	
• • •	3 filas de 5 cada una: $3 \times 5 = 15$

5 filas de 3 cada una: $5 \times 3 = 15$

Al aprender la tabla de multiplicar te diste cuenta que $7 \times 5 = 35$ y $5 \times 7 = 35$. Del mismo modo $9 \times 8 = 72$ y $8 \times 9 = 72$. Si los números son los mismos, los productos son iguales, cualquiera que sea el orden en que se escriben estos números.

Estos ejemplos indican que hay una propiedad conmutativa para la multiplicación. Esta propiedad conmutativa de la multiplicación para los números cardinales dice que el producto de dos números cardinales es el mismo sea cual fuere el orden en que se multipliquen. Enunciamos esto del siguiente modo:

Propiedad 2. Si a y b representan números cardinales, entonces $a \times b = b \times a$.

Podemos usar esta propiedad para descubrir los errores que hayamos cometido al multiplicar dos números. Hemos hallado estos productos:

$$\begin{array}{r} 436 \\ \underline{125} \\ 2130 \\ 872 \\ \underline{436} \\ 54500 \end{array} \qquad\qquad\qquad \begin{array}{r} 125 \\ \underline{436} \\ 730 \\ 365 \\ \underline{600} \\ 63380 \end{array}$$

En este cálculo la propiedad conmutativa nos muestra que hemos cometido al menos un error. Halla todos los errores.

Tanto en la propiedad 1 como en la propiedad 2 hemos usado letras para representar números. Esta idea de usar letras para representar números cualesquiera al enunciar principios generales es una parte muy útil del lenguaje matemático. A veces se produce confusión entre la letra x y el signo de multiplicación, por eso usamos a menudo un punto alto (·) para indicar multiplicación. Por ejemplo, podemos escribir $4 \cdot 3$ en lugar de 4×3 y $a \cdot b$ en vez de $a \times b$.

Se usan en efecto muchos símbolos para simplificar la escritura en las matemáticas. Se puede usar cualquier símbolo si convenimos primero en su significado y siempre lo empleamos con ese significado. El uso del punto alto es un buen ejemplo de este convenio.

En matemáticas decimos a menudo que un número es mayor que otro. Para simplificar la escritura de la frase "es mayor que" usamos el símbolo " > ". Así, expresamos que "5 es mayor que 3" simplemente escribiendo $5 > 3$. Para indicar que "a es mayor que b" escribimos $a > b$. En forma semejante, usamos el símbolo " < " para indicar "es menor que". Por lo tanto, escribimos $4 < 7$ en vez de "4 es menor que 7". Observa que en cada caso el vértice de este nuevo símbolo está hacia el menor de los dos números que se comparan.

A veces queremos indicar simplemente que dos números son diferentes. Entonces usamos el símbolo " ≠ " en vez de "es diferente de" ó "no es igual a". Por ejemplo, $5 \neq 3$ y $4 \neq 0$.

Al comparar tres números como, por ejemplo, 3, 6 y 11, podemos escribir $3 < 6 < 11$ ó $11 > 6 > 3$. Observa que la expresión $3 < 6 < 11$ en realidad reemplaza las dos expresiones: "3 es menor que 6" y "6 es menor que 11".

Ejercicios 3-2a

1. Indica si cada uno de los enunciados siguientes es verdadero o falso:
   (a) [illegible] = 4 + [illegible]
   (b) $13_{\text{cuatro}} + 32_{\text{cuatro}} < 32_{\text{cuatro}} + 13_{\text{cuatro}}$
   (c) [illegible] < 7 < [illegible]
   (d) [illegible] = [illegible]
   (e) [illegible] = [illegible]
   (f) [illegible] = [illegible]
   (g) [illegible] < [illegible]
   (h) $5 + 4 > 5 + 3$
   (i) $315 + 462 = 462 + 315$
   (j) $5 > 3 > 10$
   (k) $8 + 2 = 2 + 8$
   (l) $851 + 367 = 158 + 763$
   (m) Si $16 > 7$ y $7 > 5$, entonces $16 > 5$

2. Suma las siguientes expresiones, y luego utiliza la propiedad conmutativa para verificar la suma:
   (a) [illegible]
   (b) [illegible]
   (c) $\begin{array}{r} 73967 \\ \underline{81785} \end{array}$
   (d) $\begin{array}{r} 43_{\text{siete}} \\ \underline{32_{\text{siete}}} \end{array}$

3. Empleando los símbolos $=$, $<$, $>$, completa las expresiones siguientes para que sean ciertas:
   (a) [illegible] ? 4 + [illegible]
   (b) [illegible]
   (c) [illegible]
   (d) 3 ? [illegible]
   (e) [illegible] ? 9 ? 3
   (f) $(3 \cdot 2) + 5 \ ? \ 5 + (3 \cdot 2)$
   (g) $8 - 3 \ ? \ 9 - 3$
   (h) $86 \cdot 135 \ ? \ 135 \cdot 86$
   (i) $24 + 3 \ ? \ 3 + 24$
   (j) Dado que a, b y c son números cardinales: Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a \ ? \ c$.

4. Multiplica las siguientes expresiones, y luego usa la propiedad conmutativa para verificar la multiplicación:
   (a) [illegible]
   (b) $\begin{array}{r} 305 \\ \underline{84} \end{array}$
   (c) $\begin{array}{r} 476 \\ \underline{609} \end{array}$
   (d) $\begin{array}{r} 31_{\text{siete}} \\ \underline{25_{\text{siete}}} \end{array}$

5. Da el número o los números cardinales que pueden usarse en lugar de la letra a para hacer que los enunciados que siguen sean correctos:
   (a) $3 + a = 3 + 5$
   (b) $5 \cdot 7 = 7 \cdot a$
   (c) $2 \cdot a < 2 \cdot 1$
   (d) $3 \cdot a < 3 \cdot 2$
   (e) $132 + a = 46 + 132$
   (f) $2 + a < 2 + 7$
   (g) $7 \cdot 3 > a \cdot 5$
   (h) $a + 3 = 3 + a$

Las propiedades conmutativas para la suma y la multiplicación se enuncian en forma simbólica así:

$$a + b = b + a \quad y \quad a \cdot b = b \cdot a.$$

Observa la semejanza entre estos dos enunciados.

¿Piensas que la resta tiene la propiedad conmutativa? Para contestar a esta pregunta debes ver si $a - b$ es igual a $b - a$ para todos los números cardinales a y b. Si podemos hallar por lo menos un par de números cardinales para los cuales esto no es verdadero, entonces la resta no gozará de la propiedad conmutativa. Por ejemplo, ¿es $9 - 4$ igual a $4 - 9$? La respuesta es, no. En efecto, $(9 - 4)$, es 5 mientras que no hay ningún número cardinal que sea igual a $(4 - 9)$.

Ejercicios 3-2b

1. Intercambia los números en cada una de las expresiones siguientes. ¿En cuáles de las expresiones resultantes se conserva el mismo resultado?

   (a) [illegible] (d) $4 - 8$ (g) $8 - 4$

   (b) [illegible] (e) $12 \div 3$ (h) $3 + 12$

   (c) [illegible] (f) $9 \div 4$ (i) $4 + 9$

2. ¿Tiene la división de números cardinales la propiedad conmutativa? Da un ejemplo que ilustre tu respuesta.

3. ¿Cuáles de las siguientes actividades son conmutativas?

   (a) Ponerse un sombrero y luego un sobretodo.

   (b) Ponerse medias y luego zapatos.

   (c) Agregar pintura roja a pintura azul.

   (d) Cerrar la escotilla y sumergirse en un submarino.

   (e) Ponerse el zapato izquierdo y luego el zapato derecho.

4. Vamos a inventar la operación "M" que consistirá en elegir el mayor de dos números. Si los números son el mismo, elegimos ese número. ¿Es esta operación conmutativa?

   Ejemplo. $3 \text{ M } 4 = 4$.

5. ¿Cuáles de las operaciones que definimos a continuación son conmutativas?

   (a) "D" consiste en hallar la suma del primer número más dos veces el segundo. Por ejemplo, $3 \text{ D } 5 = 3 + (2 \cdot 5)$ ó 13.

(b) [illegible] hallar la suma del primer número [illegible] producto del primero por el segundo. Por ejemplo, [illegible].

(c) "[illegible]" significa [illegible] el producto del primer número por el [illegible]. Por ejemplo, [illegible].

(d) "[illegible]" significa hallar tres veces la suma del primer número y el segundo. Por ejemplo, [illegible] ó 39.

6. Indica algunas [illegible] que son conmutativas y algunas que no lo son.

3-4. [illegible] para los números cardinales

¿Qué significa [illegible]? ¿Quiere decir $(1 + 2) + 3$, en que sumamos [illegible] y sumamos [illegible] a la suma de éstos? ¿O significa [illegible] $(\ldots)$, [illegible] que sumamos [illegible] y luego sumamos [illegible]? ¿Da lo mismo hacerlo de uno u otro modo? [illegible] el orden en el cual se suman dos números [illegible] (propiedad conmutativa de la adición). Ahora [illegible] agrupamos tres números para sumarlos [illegible]. Por ejemplo,

[illegible]

[illegible]

Llamamos [illegible] agrupar números de modo diferente [illegible] cambiar el valor de la suma, la propiedad asociativa de la adición para números cardinales. Esta propiedad puede usarse para simplificar la adición si la suma de un par de números es más simple de calcular que la de otro par. Si se te pidiera que sumaras $12 + 4 + 2$, podrías primero sumar 12 y 4 y luego sumar 2 y 16. O podrías pensar primero en sumar 4 y 2 y luego sumar 6 y 12. Al efectuar cada una de las sumas siguientes, agrupando los números en forma diferente, estaremos aplicando la propiedad asociativa.

$$7 + 9 + 11 = 7 + (9 + 11) = 7 + 20 = 27$$

$$12 + 7 + 33 = 12 + (7 + 33) = 12 + 40 = 52$$

$$97 + 53 + 100 = (97 + 53) + 100 = 150 + 100 = 250$$

Se puede emplear la propiedad asociativa para hallar la suma de 12 y 7. Tal vez has usado este método desde hace mucho tiempo, pero sin llamarlo por su nombre. Observa cómo se lo puede usar: $12 + 7 = (10 + 2) + 7 = 10 + (2 + 7) = 19$.

Del mismo modo que hemos enunciado explícitamente la propiedad conmutativa de la adición, enunciamos ahora la propiedad asociativa:

<u>Propiedad 3.</u> <u>Si</u> a, b <u>y</u> c <u>representan números cardinales cualesquiera,</u> $(a + b) + c = a + (b + c)$.

En la vida diaria hablamos de "sumar", o agregar, o combinar diversos objetos. Tales combinaciones tendrán o no la propiedad asociativa, según las características de los objetos que combinemos. ¿Es (gasolina + fuego) + agua lo mismo que gasolina + (fuego + agua)?

La propiedad conmutativa de la suma expresa que podemos cambiar el orden de dos números cualesquiera sin alterar la suma. La propiedad asociativa a su vez significa que podemos agrupar números en parejas con el propósito de sumar pares de éstos sin alterar la suma. Del mismo modo que tenemos una propiedad conmutativa para la adición y para la multiplicación, nos parece posible que la propiedad asociativa pertenezca a ambas operaciones.

¿Qué significa $2 \cdot 5 \cdot 4$? ¿Queremos decir $(2 \cdot 5) \cdot 4$, en que primero multiplicamos 2 por 5 y luego 10 por 4? ¿O queremos significar $2 \cdot (5 \cdot 4)$ en que primero multiplicamos 5 por 4 y luego 2 por 20? Ambos dan la misma respuesta, y por eso concluimos que podemos dar ambos significados a $2 \cdot 5 \cdot 4$. Lo mismo se cumple si tomamos tres números cardinales cualesquiera.

<u>Propiedad 4.</u> <u>Si</u> a, b <u>y</u> c <u>representan números cardinales cualesquiera,</u> $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Este es el enunciado simbólico de la propiedad asociativa de la multiplicación para números cardinales.

A veces resulta conveniente cambiar el orden de los números que se han de sumar o multiplicar, con el propósito de simplificar la operación. Esto puede hacerse usando la propiedad conmutativa. Entonces la adición o multiplicación puede efectuarse agrupando los números de acuerdo a la propiedad asociativa. Los ejemplos siguientes ilustran el uso de ambas propiedades en el mismo problema:

$$17 + (19 + 13) = 17 + (13 + 19) = (17 + 13) + 19 =$$
$$30 + 19 = 49$$
$$50 \cdot (17 \cdot 4) = 50 \cdot (4 \cdot 17) = (50 \cdot 4) \cdot 17 =$$
$$200 \cdot 17 = 3,400$$

¿Hay una propiedad asociativa para la resta? Quizá podemos contestar a esta pregunta por medio de un ejemplo. Consideremos $10 - (6 - 4)$ lo cual nos da $10 - 2$, o sea 8. Pero $(10 - 6) - 4 = 0$, de modo que $10 - (6 - 4)$ no es igual a $(10 - 6) - 4$. Esto nos muestra que la resta no tiene la propiedad asociativa. Tal vez puedes pensar que un ejemplo no es suficiente y que la propiedad se verificaría si usáramos otros números. Sin embargo, si la propiedad asociativa se cumple para la resta, entonces debe entenderse que es cierta para todos los números cardinales. Por lo tanto, al exhibir un conjunto de tres números cardinales para los cuales esta propiedad no es cierta, deducimos que no puede ser cierta para <u>todos</u> los números cardinales.

¿Piensas que la propiedad asociativa se aplica a la división? ¿Qué significa $16 \div 4 \div 2$? No podemos contestar. Podría significar $(16 \div 4) \div 2$, o si no, $16 \div (4 \div 2)$. En el primer caso el resultado es 2, y en el segundo caso el resultado es 8. Estos dos resultados no son iguales, lo que muestra que la división no posee la propiedad asociativa.

Tales observaciones acerca de la sustracción y la división nos muestran que ciertas expresiones tales como $10 - 6 - 4$ y $16 \div 4 \div 2$ no están definidas. No tienen significado. Por supuesto, las expresiones $(10 - 6) - 4$ y $10 - (6 - 4)$, están definidas y son diferentes. También, $(16 \div 4) \div 2$ y $16 \div (4 \div 2)$ tienen sentido, pero sus significados son diferentes.

<u>Ejercicios 3-3</u>

1. <u>Ejemplo</u>. $(4 + 3) + 2 = 4 + (3 + 2)$
   Es, $(4 + 3) + 2 = 7 + 2 = 9$, y $4 + (3 + 2) = 4 + 5 = 9$.
   Esto ilustra la propiedad asociativa de la suma. Muestra que en forma semejante se cumple lo indicado a continuación. Enuncia la propiedad que se usa en cada ejemplo.
   (a) $(4 + 7) + 2 = 4 + (7 + 2)$

(b) [illegible]
(c) [illegible]
(d) [illegible]
(e) [illegible]
(f) [illegible]
(g) [illegible]
(h) [illegible]

3. (a) ¿Es [illegible] igual a [illegible]?
(b) ¿Es [illegible] igual a [illegible]?
(c) ¿Qué generalización puedes hacer con respecto a la propiedad asociativa y la resta?

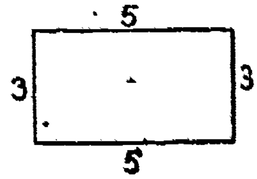
4. (a) ¿Es [illegible] igual a [illegible]?
(b) ¿Es [illegible] igual a [illegible]?
(c) Coloca paréntesis en [illegible] de modo que resulte 1.
(d) Coloca paréntesis en [illegible] de modo que resulte 25.
(e) Coloca paréntesis en [illegible] de modo que resulte 8.
(f) Coloca paréntesis en [illegible] de modo que resulte 2.
(g) ¿Qué generalización puedes hacer con respecto a la propiedad asociativa y la división?

5. [illegible] los ejercicios indicados a continuación usando, sea la propiedad asociativa, sea la propiedad conmutativa, todas [illegible] que convenga para que las operaciones sean más sencillas. [illegible] paréntesis para indicar cuál es la operación [illegible] primero. Halla las respuestas. Por ejemplo,

[illegible]
= [illegible] por la propiedad conmutativa de la adición
= [illegible] por la propiedad asociativa de la adición
= 100 + 3[illegible]
= 13[illegible]

(a) $(6 + 1) + 9$
(b) $2 \cdot (13 \cdot 10)$
(c) $(12 \cdot 9) \cdot 10$
(d) $4 \cdot (25 \cdot 76)$
(e) $340 + (522 + 60)$
(f) $(5 \cdot 67) \cdot 2$

[illegible] pupitre, [illegible]



[illegible] por [illegible], pero más laborioso de lo necesario. [illegible] y 3, y luego multiplicar, [illegible] por [illegible] misma respuesta? Un tercer alumno [illegible] multiplicar [illegible] por 2, y 3 por 2, y [illegible] productos. [illegible] que el segundo y el tercer [illegible] principio [illegible] tenía un [illegible] principio útil e importante. [illegible] principio [illegible] llama la propiedad distributiva. En el [illegible] que

$$2 \cdot (\quad \cdot \quad) = (2 \cdot \quad) + (2 \cdot 3)$$

$$\cdot (\quad \cdot\cdot) = (2 \cdot \quad).$$

[illegible] niñas y cuatro niños piensan ir a patinar. Luego, cada [illegible] y cada niño invita a otro niño. El número original de niñas [illegible]. El número original de niños también se [illegible] el número total de jóvenes? Veamos. En total [illegible] niñas y $(2 \cdot 4)$ niños, o sea un total de [illegible] jóvenes que van a patinar. Examinemos lo mismo desde otro punto de vista. Al principio se trataba de [illegible] jóvenes. El número final de jóvenes es $2 \cdot (8 + 4)$ o sea [illegible]. Hemos visto que

$$(\quad \cdot \quad) + (2 \cdot 4) \quad 1 \quad \quad = 24$$

y que

$$2 \cdot (\quad + 4) = 2 \cdot 12 = 24.$$

[illegible] escribir $(2 \cdot 8) + (2 \cdot 4) = 2 \cdot (8 + 4)$.

[illegible] esta propiedad de muchas maneras durante mucho tiempo. Por ejemplo, [illegible] $3 \cdot 13$, o sea $\begin{array}{r} 13 \\ \times\ 3 \\ \hline 39 \end{array}$. En realidad, utilizas la propiedad distributiva, puesto que:

$$3 \cdot 13 \quad 3 \cdot (10 \cdot 3) = (3 \cdot 10) + (3 \cdot 3) = 30 + 9 = 39$$

Veamos cómo usas la propiedad distributiva para hallar el producto $9 \cdot 36$. Probablemente haces esta multiplicación más o menos así:

$$\begin{array}{r} 36 \\ \underline{\times\ 9} \\ 324 \end{array} \qquad \text{ó} \qquad \begin{array}{rl} 36 & \\ \underline{\times\ 9} & \\ 54 & (9 \times 6) \\ \underline{270} & (9 \times 30) \\ 324 & \end{array}$$

¿Te das cuenta que el ejemplo de la izquierda resulta un modo rápido de resolver el problema? En realidad estás usando la propiedad distributiva en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 9 \cdot 36 &= 9 \cdot (30 + 6) \\ &= (9 \cdot 30) + (9 \cdot 6) \quad \text{propiedad distributiva} \\ &= 270 + 54 \\ &= 324 \end{aligned}$$

La propiedad distributiva es también importante en operaciones en que hay fracciones. Hallemos el producto de 8 por $12\frac{1}{4}$. Primero recuerda que $12\frac{1}{4}$ significa $12 + \frac{1}{4}$. Entonces

$$\begin{aligned} 8 \cdot 12\tfrac{1}{4} &= 8 \cdot (12 + \tfrac{1}{4}) \\ &= (8 \cdot 12) + (8 \cdot \tfrac{1}{4}) = 96 + 2 \\ &= 98 \end{aligned}$$

La propiedad distributiva es:

<u>Propiedad 5</u>. <u>Si</u> a, b <u>y</u> c <u>son números cardinales cualesquiera</u>, <u>entonces</u> $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

La propiedad distributiva es la única de las tres propiedades que hemos estudiado en este capítulo en la que entran dos operaciones, a saber, la adición y la multiplicación. Esto no quiere decir que todo problema en que figuran estas dos operaciones se resuelve por medio de la propiedad distributiva. Por ejemplo, $(3 \cdot 5) + 14$ significa que ha de hallarse el producto de 3 por 5 y luego sumar 14 al resultado: $(3 \cdot 5) + 14 = 15 + 14 = 29$. Pero $3 \cdot (5 + 14) = (3 \cdot 5) + (3 \cdot 14) = 15 + 42 = 57$.

La propiedad conmutativa de la multiplicación nos permite escribir $(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$. Veamos por qué. Primero

$(b + c) \cdot a = a \cdot (b + c)$, propiedad conmutativa

y $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$, propiedad distributiva.

Por lo tanto, $(b + c) \cdot a = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

También, $(a \cdot b) = (b \cdot a)$, propiedad conmutativa

y $(a \cdot c) = (c \cdot a)$, propiedad conmutativa.

Por lo tanto, $(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$.

Esto justifica la multiplicación de $12\frac{1}{4}$ por 8 en la forma

$$12\tfrac{1}{4} \cdot 8 = (12 + \tfrac{1}{4}) \cdot 8 = (12 \cdot 8) + (\tfrac{1}{4} \cdot 8)$$
$$= 96 + 2 = 98$$

Tal vez prefieras utilizar un diagrama para recordar que el primero de los factores se distribuye entre todos los números que se suman en el segundo factor. Un dibujo de este tipo es el que se indica a continuación. Por ejemplo, considera el producto $3 \cdot (7 + 9)$.

Diagrama.

$$3 \begin{array}{l} \nearrow 7 \quad (3 \cdot 7) \\ + \\ \searrow 9 \quad (3 \cdot 9) \end{array} = 21 + 27 = 48$$

Observa que $3 \begin{array}{l} \nearrow 7 \\ + \\ \searrow 9 \end{array}$ indica que 3 multiplica a ambos, 7 y 9, y que estos productos deben luego ser sumados. Las flechas siempre van hacia los números que deben sumarse. Otro ejemplo podría ser el siguiente:

$$6 \cdot (5 + 8).$$

Diagrama.

$$6 \begin{array}{l} \nearrow 5 \quad (6 \cdot 5) \\ + \\ \searrow 8 \quad (6 \cdot 8) \end{array} = 30 + 48 = 78$$

$$= 7[illegible]$$

Otro ejemplo. ([illegible] puede ser útil para el problema 7 de los ejercicios.)

$$(2 + 3) \cdot (4 + 5)$$

10

12

15

$$= (8 + 10) + (12 + 15) = 45$$

Ejercicios 3-4

1. [illegible] diagramas [illegible] se ilustra más arriba para indicar las operaciones siguientes:
   (a) [illegible] · [illegible]
   (b) [illegible] · [illegible]
   (c) 12 · [illegible]
   (d) 3 · (15 + 17)
   (e) (6 + 4) · (8 + 7)
   (f) (20 + 7) · (10 + 4)
2. Muestre que las siguientes relaciones son correctas, efectuando las operaciones indicadas. Por ejemplo, 3 · (4 + 3) = (3 · 4) + (3 · 3)

   $$3 \cdot (4 + 3) = 3 \cdot 7 = 21$$
   $$(3 \cdot 4) + (3 \cdot 3) = 12 + 9 = 21$$

   (a) $4 \cdot (7 + 5) = (4 \cdot 7) + (4 \cdot 5)$
   (b) $(3 \cdot [illegible]) + (4 \cdot [illegible]) = [illegible] \cdot (3 + 4)$
   (c) $([illegible] \cdot 6) + (7 \cdot 6) = (3 + 7) \cdot 6$
   (d) $23 \cdot (2 + 3) = (23 \cdot 2) + (23 \cdot 3)$
   (e) $11 \cdot (3 + 4) = (11 \cdot 3) + (11 \cdot 4)$
   (f) $(6 \cdot 5) + (6 \cdot 3) = 6 \cdot (5 + 3)$
   (g) $2 \cdot (16 + 8) = (2 \cdot 16) + (2 \cdot 8)$
   (h) $12 \cdot (5 + \frac{1}{4}) = (12 \cdot 5) + (12 \cdot \frac{1}{4})$

(f) ([illegible] · [illegible]) + ([illegible] · [illegible]) = [illegible] · (18 + 12)

(g) ([illegible] · $\frac{1}{[illegible]}$) + ($\frac{1}{[illegible]}$ · [illegible]) = [illegible] · ($\frac{1}{[illegible]}$ + $\frac{1}{2}$)

3. Completa las [illegible] expresiones de modo que quede ilustrada la propiedad distributiva:

(a) [illegible] · ([illegible] + [illegible]) = ([illegible] · [illegible]) + ([illegible] · [illegible])

(b) [illegible] · (· [illegible]) = ([illegible] · [illegible]) + (· [illegible])

(c) [illegible] · ([illegible] + [illegible]) = [illegible] · ( ) + [illegible] · ( )

(d) ([illegible] · [illegible]) + ([illegible] ·) = ( ) · 7

(e) (· [illegible]) + (· [illegible]) = ([illegible] + [illegible]) · ( )

4. Usando la propiedad distributiva reescribe cada una de las expresiones siguientes:

Ejemplos. A. [illegible] · ([illegible] + 3) = ([illegible] · 2) + ([illegible] · 3)

B. ([illegible] · [illegible]) + ([illegible] · 3) = [illegible] · (4 + 3)

(a) ([illegible] · [illegible]) + ([illegible] · [illegible])

(b) [illegible] · ([illegible] + [illegible])

(c) [illegible] · ([illegible] + [illegible])

(d) (1[illegible] + 27) · [illegible]

(e) 1[illegible] · ([illegible] + 13)

(f) ([illegible] · 12) + (4 · 12)

5. Usando la [illegible] la propiedad distributiva podemos reescribir, por ejemplo:

A. [illegible] + [illegible] como ([illegible] · [illegible]) + ([illegible] · 3), o sea [illegible] · (2 + 3).

B. [illegible] + [illegible] como (3 · [illegible]) + (3 · 7), o sea 3 · (5 + 7).

Usa la propiedad distributiva para reescribir las expresiones siguientes de modo similar:

(a) [illegible] + [illegible]

(b) [illegible] + [illegible]

(c) [illegible] + [illegible]

(d) 27 + 51

(e) 100 + 115

(f) 30 + 21

6. ¿Cuáles de las expresiones indicadas a continuación son correctas?

(a) $3 + (4 \cdot 2) = (3 + 4) \cdot (3 + 2)$

(b) $3 \cdot (4 - 2) = (3 \cdot 4) - (3 \cdot 2)$

(c) $(4 + 6) \cdot 2 = (4 \cdot 2) + (6 \cdot 2)$

(d) $(4 + 6) \div 2 = (4 \div 2) + (6 \div 2)$

(e) $3 + (4 \cdot 2) = (3 \cdot 4) + (3 \cdot 2)$

7. Podemos escribir 45 como (40 + 5) y 23 como (20 + 3). Usando la propiedad distributiva, el producto de 45 y 23 se escribiría:

Verificación:

$(40 + 5) \cdot (20 + 3)$ o sea

$40 \cdot (20 + 3) + 5 \cdot (20 + 3)$ o sea

$(40 \cdot 20) + (40 \cdot 3) + (5 \cdot 20) + (5 \cdot 3)$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times\ 23 \\ \hline 135 \\ 90\ \\ \hline 1035 \end{array}$$

Completando las operaciones, obtenemos:

$800 + 120 + 100 + 15$, o sea 1,035.

Usando la propiedad distributiva, reescribe las siguientes expresiones y verifica como en el ejemplo. Trata de usar el método diagramático con (a) y (d).

(a) $27 \cdot 34$ (d) $64 \cdot 66$

(b) $13 \cdot 22$ (e) $75 \cdot 75$

(c) $34 \cdot 35$ (f) $21 \cdot 29$

8. PROBLEMA DIFICIL. Indica qué propiedad se usó para ir de una línea a la siguiente, en las expresiones:

(a) $[(5 \cdot 3) + (3 \cdot 2)] + (5 \cdot 2) \cdot 7$

(b) $[(3 \cdot 5) + (3 \cdot 2)] + (5 \cdot 2) \cdot 7$ propiedad conmutativa de la multiplicación

(c) $[(3 \cdot 5) + (3 \cdot 2)] + 5 \cdot (2 \cdot 7)$ "?"

(d) $[(3 \cdot 5) + (3 \cdot 2)] + 5 \cdot (2 \cdot 7)$ "?"

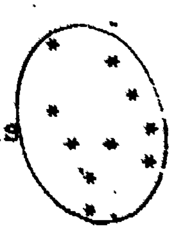
(e) $(3 \cdot 5) + [(3 \cdot 2) + 5 \cdot (2 \cdot 7)]$ "?"

(f) $(3 \cdot 5) + [(3 \cdot 2) + 5 \cdot (7 \cdot 2)]$ "?"

(g) $(3 \cdot 5) + [(3 \cdot 2) + (5 \cdot 7) \cdot 2]$ "?"

(h) $(3 \cdot [5 + (5 \cdot 7)]) \cdot 2$ "?"

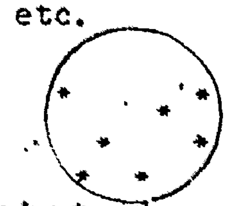
3-5. Los conjuntos y la propiedad de clausura



Suponte que quieres referirte a los asteriscos que se indican en el dibujo adjunto. ¿Cómo lo harías? ¿Dirías el conjunto de asteriscos? ¿La colección de asteriscos? ¿El grupo de asteriscos? Si hablas de alumnos en una cierta clase puede que digas, "la clase de la señorita Johnson". ¿Tendría la frase "el conjunto de alumnos de la señorita Johnson" el mismo significado? ¿Y qué dirías de la expresión, "la colección de alumnos de la señorita Johnson"? Tanto la palabra colección como la palabra conjunto pueden usarse aquí. Tienen el mismo significado. (Si has estudiado francés, podría ocurrírsete emplear igualmente la palabra <u>ensemble</u>.) Cuando necesitemos una palabra así en matemáticas, usaremos la palabra <u>conjunto</u>, sea que se trate de un conjunto de números, un conjunto de marcas sobre el papel, un conjunto de asteriscos como en la figura, etc.

Un conjunto de números: 5, 36, 7, 8

Un conjunto de marcas: / / / / / / / / /

El conjunto de asteriscos de la figura: 

Otros ejemplos de conjuntos son los siguientes: el conjunto de las monedas que tienes en el bolsillo, el conjunto de vocales de nuestro alfabeto, un conjunto de piezas de ajedrez, un conjunto de animales (podrías también decir un rebaño en el caso de algunos animales), el conjunto de las ciudades de los Estados Unidos que tienen una población superior a un millón de habitantes.

Los números naturales forman un conjunto. Recuerda que los números naturales son 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... donde los puntos suspensivos se utilizan para indicar que el conjunto de números continúa indefinidamente. No hay último número. Vamos a usar N para representar el conjunto de los números naturales, a los que pondremos entre llaves { } para indicar que son los objetos del conjunto que designamos con N. Es decir, podemos escribir

$$N = \{1, 2, 3, ...\}$$

que leeremos: "N es el conjunto de los números naturales".

Podíamos haber elegido cualquier letra mayúscula para designar este conjunto. Podemos describir el conjunto S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} diciendo que es el conjunto de los números naturales del 1 al 7, inclusive; es decir, S es el conjunto que consiste en los números naturales menores que 8.

Para ayudar a esclarecer este concepto daremos algunos otros ejemplos de conjuntos y de cómo éstos se escriben en notación abreviada: "V es el conjunto de vocales en nuestro alfabeto" se transforma en "V = {a, e, i, o, u}". "M es el conjunto de números naturales mayores que 20 y menores que 25" se transforma en "M = {21, 22, 23, 24}". "E es el conjunto de estados en los Estados Unidos, que bordean el Lago Erie" se transforma en "E = {Michigan, Ohio, Pennsylvania, Nueva York}". Puede ayudarnos una

Ilustración [illegible]:

[illegible] a Michigan Ohio Nueva York Pennsylvania

En el primer conjunto los objetos son letras, en el segundo son números, y en el tercero son estados. Usamos la palabra <u>elemento</u> para cualquier objeto de un conjunto. Por lo tanto, un elemento puede ser una letra, un número, una palabra, un gato, una piedra o cualquier cosa que esté en el conjunto del cual nos ocupamos.

Nos [illegible] referir ahora al conjunto de los números naturales para [illegible] mejor una nueva idea que se relaciona con el [illegible] de los conjuntos. Se trata de la idea de clausura. Si sumamos dos números naturales, la suma es un cierto número natural. Por ejemplo, $7 + 9 = 16$, $234 + 543 = 777$ y cada suma es un número natural. Si la suma de dos elementos cualesquiera de un conjunto es un elemento del conjunto decimos que el conjunto es <u>cerrado</u> respecto de la adición. Puesto que la suma de dos números naturales cualesquiera es un número natural, el conjunto N de los números naturales es cerrado respecto de la adición. Es necesario hacer notar que cuando decimos <u>dos</u> <u>números</u> naturales <u>cualesquiera</u>, lo que queremos decir es <u>dos</u> <u>números</u> tomados de <u>todas</u> las maneras posibles. El conjunto $S = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$ no es cerrado respecto de la adición porque podemos hallar dos números en este conjunto cuya suma no está en el conjunto; así por ejemplo, [illegible] 11 no está en S. ¿Es el conjunto $M = \{21, 22, 23, 24\}$ cerrado respecto de la adición? Fundamenta tu respuesta. Observa que si hay siquiera un par de elementos en M cuya suma no está en M, entonces M no es cerrado respecto de la adición.

Clausura es la propiedad de un conjunto de ser cerrado respecto de una cierta operación. El conjunto no tiene que ser necesariamente siempre el de los números naturales. La operación tampoco tiene por qué ser necesariamente la adición. Por ejemplo, sea T el conjunto de todos los números naturales que terminan en 0 ó 5. Este conjunto es cerrado respecto de la multiplicación. No es cerrado respecto de la división puesto que, por [illegible], [illegible] no es un elemento de I.

Ejercicios [illegible]

1. Sea [illegible] {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...} el conjunto de todos los números naturales impares.
   (a) ¿Es la suma de dos números impares siempre un número impar?
   (b) ¿Es el conjunto de los números impares cerrado respecto de la adición?
2. ¿Es el conjunto de [illegible] números pares cerrado respecto de la adición?
3. [illegible] múltiplos de [illegible] ([illegible], 10, [illegible], 20, 25, ...) [illegible] la adición?
4. [illegible] ejercicios 1, 2 y 3, reemplazando [illegible] multiplicación.
5. [illegible] que se indican a continuación son [illegible] adición:
   (a) [illegible] números naturales mayores que 10.
   (b) [illegible] números naturales que van de 100 a [illegible].
   (c) [illegible] números naturales menores que [illegible].
   (d) [illegible] números naturales cuyos numerales [illegible].
6. [illegible] números que se mencionan en el ejercicio 5 [illegible] multiplicación?
7. [illegible] de números naturales cerrados respecto [illegible] cerrados respecto de la multiplicación? [illegible]
8. ¿Es [illegible] conjuntos de números que se mencionan en el [illegible] respecto de la resta?
9. ¿Es [illegible] de los conjuntos de números que se mencionan en el [illegible] cerrado respecto de la división?

Ejercicios 5-5b

[illegible] de los procedimientos aritméticos

1. Suma: (a)

[illegible]
498
72[illegible]
59
305
54

(b)

403
213
414
898
777
460

2. Resta:

40302
20305

8. Multiplica: [illegible] 7 1.09 [illegible] Suma: $\frac{1}{2}$

$2\frac{1}{4}$

$9\frac{1}{4}$

$8\frac{3}{4}$

(a) [illegible] [illegible] $[illegible]

(b) [illegible] $[illegible]

(c) [illegible] $[illegible]

Resta $ [illegible] de $[illegible].04.

9. Redondea [illegible], a la centena más próxima.

10. Escribe con palabras: [illegible]

11. [illegible] centavos, ¿cuánto cuesta una [illegible] al mismo precio?

12. Multiplica: (a) [illegible] (b) .0103 × 9 (c) 5.7082 × 7

Operaciones Inversas

A menudo [illegible] que hacemos algo y luego lo deshacemos. Abrimos la puerta; luego la cerramos. Abrimos la ventana; luego la cerramos. En estos ejemplos, una operación es la inversa de la otra.

La operación inversa de ponerse el saco es quitarse el saco. La operación inversa de la división es la multiplicación. La operación inversa de la suma es la resta.

Suponte que tienes $220 en el banco y que le agregas $10. Entonces tienes $220 + $10 = $230. Ahora puedes deshacer esto sacando $10 del banco. La cantidad que queda es entonces $230 - $10 = $220. Suponte que la caja del club atlético tiene $1,800 y después de un partido hay $300 más. Entonces la caja tiene $1,800 + $300, o sea $2,100. Pero suponte que el equipo necesita uniformes nuevos que cuestan $300, o sea que se retiran $300 de la caja para pagar. Lo que queda es entonces $2,100 - $300, o sea $1,800. Estas operaciones son inversas la una de la otra. La sustracción es inversa de la adición.

Por supuesto, podríamos expresar esta idea en una forma más general. Sea x el número de dólares que había originalmento en el banco. Si la cantidad que depositamos es b, entonces $x + b = a$, donde a representa el número de dólares que queda en el banco. ¿Cómo invertimos el procedimiento? Del número de dólares representado por a, sustraemos el número de dólares que retiramos, representado por b, y tenemos el número representado por x. Escribimos $x = a - b$.

Se usa esta idea de operación inversa al verificar una resta por medio de una suma. Así por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 203 \\ -\ 96 \\ \hline 107 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a \\ -\ b \\ \hline x \end{array} \qquad\qquad \text{verificación:} \quad \begin{array}{r} 107 \\ +\ 96 \\ \hline 203 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x \\ +\ b \\ \hline a \end{array}$$

También se usa el concepto de operación inversa cuando se comprueba la división por medio de una multiplicación. Así por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 18 \\ 16\ \overline{)\ 288} \\ \underline{160} \\ 128 \\ \underline{128} \\ 0 \end{array} \qquad\qquad \text{comprobación:} \quad \begin{array}{r} 16 \\ \times\ 18 \\ \hline 128 \\ 160 \\ \hline 288 \end{array}$$

o sea $288 : 16 = 18$ comprobación: $288 = 18 \times 16$

Observa que si a y b son números cardinales, y si $a > b$, entonces existe un número cardinal x tal que $b + x = a$. Ejemplos: Si a es 17 y b es 10, entonces x es el número cardinal 7, de tal modo que $10 + 7 = 17$; si a es 41 y b es 35, entonces x es el número cardinal 6 y se verifica que $35 + 6 = 41$. Cuando a es mayor que b, es siempre posible hallar x de tal modo que $a = b + x$. ¿Puedes hacer la misma generalización cuando la operación $b + x = a$ se cambia por la multiplicación $b \cdot x = a$? Si sustituyes 2 por b y 3 por a, verás que no hay ningún número cardinal que pueda ser sustituido por x de modo que $2 \cdot x = 3$. Si se sustituyen ciertos números por a y b—por ejemplo, si $a = 20$ y $b = 4$—entonces hay un número cardinal que puede ser sustituido por x, de modo que $4 \cdot x = 20$. En este ejemplo x es 5, puesto que $4 \cdot 5 = 20$. Obtenemos el 5 dividiendo 20 por 4. También:

Si b es 6 y a es 24, entonces x es igual a 4, puesto que $6 \cdot 4 = 24$.

Si b es 5 y a es 40, entonces x es igual a 8, puesto que $5 \cdot 8 = 40$.

Si b es 3 y a es 30, entonces x es igual a 10, puesto que 3 · 10 = 30.

En cada uno de los ejemplos anteriores el valor que hay que dar a x se halla dividiendo el número representado por a por el número representado por b. En general, si hay un número natural x que se puede multiplicar por el número natural b para obtener el número natural a, entonces este número x puede hallarse dividiendo a por b. Escribimos esto como $b \cdot x = a$. Multiplicamos x por b para obtener a. Para deshacer la operación debemos efectuar la operación inversa, lo cual quiere decir que tenemos que dividir a por b para obtener x: $\begin{array}{r} x \\ b\overline{)a} \end{array}$. La operación inversa de multiplicar por b es la de dividir por b.

Ejercicios 3-6

1. Selecciona las palabras o frases que describen operaciones que tienen un inverso. Una operación seguida por la operación inversa nos vuelve al estado original.
   (a) Levantar el lápiz. (Recuerda que "<u>no</u> levantar el lápiz" no es una operación inversa. "<u>No</u> levantar el lápiz" no deshace la operación de levantar el lápiz.)
   (b) Ponerse el sombrero.
   (c) Entrar en el coche.
   (d) Extender la mano.
   (e) Multiplicar.
   (f) Construir.
   (g) Oler la rosa.
   (h) Dar un paso adelante.
   (i) Saltar desde un aeroplano en vuelo.
   (j) Sumar.
   (k) Cortar la cola de un perro.
   (l) Sustraer.
   (m) Mirar las estrellas.
   (n) Hablar.
   (o) Sacar una llanta de un coche.
2. Escribe las operaciones inversas que corresponden a cada una de las operaciones seleccionadas en el ejercicio 1.

3. Efectúa las operaciones indicadas y verifica haciendo las operaciones inversas.

Resta en los ejercicios de (a) hasta (f):

(a) $\begin{array}{r} [illegible]9251 \\ \underline{42760} \end{array}$ (b) $\begin{array}{r} \$805.00 \\ \underline{\$297.98} \end{array}$ (c) $\begin{array}{r} 803 \text{ pies} \\ \underline{297} \text{ pies} \end{array}$

(d) $\begin{array}{r} \$4302.14 \\ \underline{\$[illegible]339.36} \end{array}$ (e) $\begin{array}{r} \$8000.03 \\ \underline{\$6898.98} \end{array}$ (f) $\begin{array}{r} \$10040.50 \\ \underline{\$\ 8697.83} \end{array}$

(g) [illegible] (h) $38 \overline{)\,3760[illegible]}$ (i) $27 \overline{)\,21546}$

(j) [illegible]

(k) Ciento veinte menos ochenta y siete.

(l) La suma de seiscientos cuarenta y siete y ochocientos veintinueve.

(m) La diferencia entre ochenta y nueve y veintiuno.

(n) Setenta y seis más sesenta y siete.

(o) El producto de trescientos seis y ciento noventa.

4. Halla, si es posible, un número cardinal que pueda usarse en vez de x en cada una de las expresiones siguientes. Si no existe tal número cardinal, responde diciendo que no hay ninguno.

(a) $9 + x = 14$

(b) $x + 9 = 14$

(c) $x - 1 = 2$

(d) $4 + x = 11$

(e) $10 + x = 7$

(f) $5 + x = 5$

(g) $10 = x + 2$

(h) $x = 9 - 5$

(i) $x = 11 - 8$

(j) $8 + x = 11$

(k) $0 + x = 3$

(l) $x = 13 - 6$

(m) $3 + x = x + 3$

(n) $3 \cdot x = 12$

(o) $4 \cdot x = 20$

(p) $x = 20 \div 4$

(q) $2 \cdot x = 18$

(r) $x = 18 \div 2$

(s) $5 \cdot x = 30$

(t) $2 \cdot x = 0$

(u) $x = 0 \div 2$

(v) $9 \cdot x = 0$

(w) $x = 0 \div 9$

(x) $3 \cdot x = 3$

(y) $x = 3 \div 3$

(z) $11 \cdot x = 11$

(a) Si en un mueble caben 123 libros y en otro mueble caben [illegible] libros, ¿cuántos libros más caben en el primero que en el segundo?

(b) Un cine vendió 4,759 entradas un mes y 6,781 entradas el mes siguiente. ¿Cuánta más gente vino al cine el segundo mes?

(c) Si un edificio tiene 900 ventanas y otro edificio, 811, ¿cuántas ventanas más hay en el primer edificio?

(d) La población de una ciudad era 19,891. Cinco años más tarde la población ascendió a 39,110. ¿Cuál fue el incremento de población durante estos cinco años?

(e) Si un camión puede llevar 2,099 cajas, ¿cuántas cajas pueden llevar [illegible]9 camiones del mismo tipo?

(f) ¿Cuántos estantes se necesitan para almacenar 208 sillas, si en cada estante caben 16 sillas?

(g) Para una fiesta se dispone de 288 bombones. Si hay 48 niños en esta fiesta, ¿cuántos bombones hay para cada uno?

(h) Un grupo de niñas escuchas o exploradoras tiene 29 miembros. Cada miembro debe vender cajas de bollitos. Si el grupo tiene [illegible]80 cajas para vender, ¿cuántas cajas debe vender cada niña para que se vendan todas?

2. Efectúa las siguientes operaciones:

(a) Suma [illegible] y 17. De la suma sustrae 12.

(b) Sustrae 24 de 89. A esta diferencia súmale 19.

(c) Multiplica 27 por 34. Divide el producto por 9 y luego suma 100.

(d) Halla la suma de 9, 9 y 9. De ella sustrae 4 seis veces.

(e) Toma 308. Divídelo por 28. Multiplica el cociente por [illegible]. Sustrae 9 del producto.

(f) Halla la diferencia entre 47 y 38. Divide esta diferencia por 3 y luego suma 17.

(g) Divide 272 por 16, multiplica el cociente por 12 y sustrae 100 de este producto.

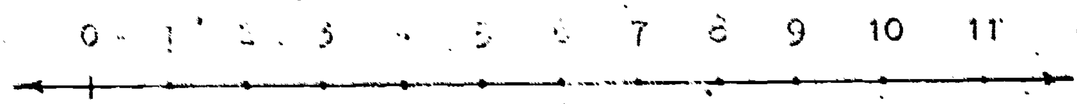
(h) Multiplica 12 por 13 y suma 39. Divide la suma por el producto de 3 por 13.

(i) Suma [illegible] y divide la suma por [illegible]. A esto súmale 117 y divide esta suma por [illegible].

(j) Halla la diferencia entre [illegible] y [illegible]. Multiplica esta diferencia por [illegible] y resta 40. Divide esta última diferencia por [illegible] y luego suma [illegible].

3-7. Ordenación y la recta numérica

Una relación que hay entre los números cardinales puede ilustrarse con un dibujo. Elige un punto cualquiera sobre una recta como se indica más abajo y llámalo cero (0). Al primer punto a la derecha



de éste llámalo uno y luego asocia a cada uno de los puntos de la derecha, de un modo similar, los números naturales siguientes. Esta representación se llama a menudo la recta numérica. Todo número cardinal es, entonces, menor que cualquiera de los números que están a su derecha y es mayor que cualquiera de los números que están a su izquierda. Por ejemplo, 3 es menor que 5 y mayor que 2. Esto puede escribirse $2 < 3 < 5$, puesto que 2 es menor que 3 y 3 es menor que 5. Utilizando la recta numérica, también podemos determinar cuántos números cardinales hay entre dos números cardinales dados. Por ejemplo, para hallar cuántos números cardinales hay entre 6 y 11 podemos mirar la representación anterior y contarlos. Vemos así que hay cuatro: 7, 8, 9 y 10.

Ejercicios 3-7

1. ¿Cuántos números cardinales hay entre:

(a) 7 y 25? (e) 25 y 25?
(b) 3 y 25? (f) 23 y 25?
(c) 20 y 25? (g) 26 y 25?
(d) 17 y 25? (h) 114 y 25?

*(i) Si a y b son números cardinales, y $a > b$, entonces ¿cuál de las expresiones que aparecen más abajo da realmente el número de números cardinales comprendidos entre a y b?

(1) $b - a$ (3) $a - (b + 1)$
(2) $(a - 1) + b$ (4) $(a - b) + 1$

2. ¿Cuál es el número cardinal que está a mitad de camino entre:
   - (a) [illegible] y [illegible]?
   - (b) 9 y 13?
   - (c) 20 y [illegible]?
   - (d) 10 y 20?
   - (e) 17 y 19?
   - (f) 1[illegible] y 27?
   - (g) 12 y 20?
   - (h) 12 y 6?

3. ¿Cuáles de los siguientes pares de números cardinales tienen un número cardinal a mitad de camino entre ellos?
   - (a) [illegible], [illegible]
   - (b) [illegible], [illegible]
   - (c) [illegible], [illegible]
   - (d) [illegible], 1[illegible]
   - (e) 7, 1[illegible]
   - (f) [illegible], 3[illegible]
   - (g) 9, 17
   - (h) 19, 3[illegible]
   - (i) a, b si a y b son números pares
   - (j) a, b si a y b son números impares
   - (k) a, b si b es par y a es impar

4. Los números cardinales a, b y c están colocados de tal manera sobre la recta numérica que b está entre a y c, y a < b.
   - (a) ¿Es c > a? Explícalo usando la recta numérica.
   - (b) ¿Es b > a? Explícalo usando la recta numérica.
   - (c) ¿Es b < c? Explícalo con palabras.

5. Los números cardinales a, b, c y d están colocados sobre la recta numérica de tal manera que b está entre a y c, y a está entre b y d. ¿Qué relación, si existe alguna, hay entre b, c y d?

3-8. El número uno.

El número uno es un número especial desde varios puntos de vista. El uno es el menor de los números naturales. Podemos construir cualquier número, por grande que sea, empezando con 1 y sumando unos hasta que hayamos alcanzado el número deseado. Por ejemplo, para obtener el número cinco, podemos comenzar con nuestro número especial 1 y repetir la adición de 1 así: $1 + 1 = 2$, $2 + 1 = 3$, $3 + 1 = 4$ y $4 + 1 = 5$. No hay ningún número que sea mayor que todos los números naturales.

También se observará que para cualquier número natural (1, 2, 3, ...) que consideremos, obtendremos el número natural siguiente sumando 1. Esto puede parecer obvio porque se han usado los números muchas veces. En algunas de las operaciones fundamentales no obtenemos el número natural siguiente con operaciones en que sólo interviene el número 1; por ejemplo, $3 \cdot 1 = 3$, $3 - 1 = 2$. Hay un caso en que ni siquiera obtenemos lo que hemos llamado números naturales. Observa lo que pasa cuando usamos la operación de sustracción: $1 - 1 = 0$. El cero no es un número natural.

En la multiplicación, si queremos obtener un numeral diferente para un número, podemos multiplicar por una forma especial del número 1. De esta manera podemos obtener un numeral diferente, pero siempre representando el mismo número. Tal vez recuerdes que al escribir $\frac{4}{5}$ como $\frac{8}{10}$, estás simplemente multiplicando $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{2}$. Por supuesto, $\frac{2}{2}$ es nuestro número especial 1. Multiplica $\frac{1}{3}$ por $\frac{3}{3}$ para obtener $\frac{3}{9}$; multiplica $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{2}$ para obtener $\frac{8}{10}$. Estos son ejemplos en que se multiplica por el número 1 en sus formas especiales $\frac{3}{3}$ y $\frac{2}{2}$. Esto significa que las nuevas fracciones son diferentes en forma de las originales, pero siempre representan el mismo número. El número especial uno, cuando se usa de esta manera como factor hace que el producto resulte igual al multiplicando. Debido a que el producto de cualquier número natural por uno es igual al número natural original, se dice que el número 1 es un "elemento idéntico" para la multiplicación.

Puesto que la división es la operación inversa de la multiplicación, ¿tiene el número uno también propiedades especiales con respecto a la división? ¿Qué pasa si dividimos un número natural cualquiera por uno? Obtenemos el mismo número natural. Pero si dividimos 1 por un número natural no obtenemos el número natural. Por esta razón no podemos decir que el número uno es un elemento idéntico o neutral para la división. Un número natural multiplicado por 1 nos da el mismo resultado que 1 multiplicado por ese número, pero la situación no es la misma para la división. Si convenimos en representar por C un número natural cualquiera, podemos expresar estas operaciones de multiplicación y división usando el número 1 de las siguientes maneras:

$$C \cdot 1 = 1 \cdot C$$
$$C \div 1 = C$$
$$C \div C = 1$$
$$1 \div C \neq C \text{ si } C \neq 1$$

Hemos aprendido antes a usar 10^2 para representar $10 \cdot 10$; 10^3 para representar $10 \cdot 10 \cdot 10$; 10^6 para representar $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$. El "2", "3" y "6" se llaman exponentes. Los exponentes son pequeños, pero los números representados por 10^2, 10^3 y 10^6 son muy grandes. Si en cambio usamos 1 en lugar de 10, esto no es cierto, pues $1^2 = 1 \cdot 1$; $1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1$; $1^6 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$, y en todos estos casos el resultado es siempre el número 1. En efecto, 1^2 ó 1^{200} ó 1^{3056} es siempre 1.

Cuando decimos 1^2 ó 1^{200} se trata realmente sólo del número 1. Estamos simplemente dando nombres diferentes a la misma cosa. Es cierto que el número representado por cada una de estas expresiones es 1. ¿Puedes pensar en otras combinaciones de símbolos de este tipo que también representen 1? ¿Qué número está representado por $5 - 4$? ¿Y por X - IX?

Nuestro estudio del número uno puede resumirse brevemente en expresiones matemáticas como se indica más abajo. ¿Puedes traducir tales expresiones en palabras? La letra C, en este caso, representa un número natural cualquiera.

(a) $C = 1$ ó $(1 + 1)$ ó $(1 + 1 + 1)$ ó ...

(b) $1 \cdot C = C$

(c) $C \div 1 = C$

(d) $C \div C = 1$

(e) $1^C = 1$

Ejercicios 3-8

1. De los siguientes símbolos, selecciona los que representen el número 1:

(a) I

(b) $\frac{4}{4}$

(c) $5 - 4$

(d) $1 - 0$

(e) $1 + 0$

(f) $1 \cdot 2$

(g) $\frac{3}{4}$ (l) 1^{10}

(h) $\frac{4}{1}$ (m) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

(i) 1 (n) $1 \cdot 100$

(j) $1 \cdot 0$ (o) $\frac{8 - 1}{12 - 5}$

(k) $\frac{200}{200}$ (p) $\frac{2 - 1}{1}$

2. Copia y llena los lugares vacíos:

(a) $100 \cdot 1 =$ _____ (d) $1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 =$ _____

(b) $10 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 =$ _____ (e) $0 \cdot 1 =$ _____

(c) $\frac{14}{1} =$ _____ (f) $1 \cdot 0 =$ _____

3. ¿Puedes obtener cualquier número natural a partir de otro cualquiera sumándole o restándole repetidamente el número 1? Da un ejemplo para apoyar tu conclusión.

4. Por medio del procedimiento indicado más arriba, ¿puedes obtener un número que no sea un número natural? Da un ejemplo que sustente tu conclusión.

5. Roberto dice: "Los números naturales no son cerrados respecto de la sustracción de unos, pero sí son cerrados respecto de la adición de unos". Muestra por medio de un ejemplo lo que Roberto quiere decir.

6. Efectúa las operaciones indicadas:

(a) $(4 - 3)\overline{)876429}$ (e) $3479 \cdot 1^{110}$

(b) $1\overline{)976538}$ (f) $97 \cdot x^6$ (si x es 1)

(c) $897638 \cdot (5 - 4)$ (g) $1^7 \cdot (489 + 489)$

(d) $896753 \cdot \frac{4}{4}$ (h) $\frac{8}{8} \cdot 1^5 + 1^4$

3-9. El número cero

Otro número especial es el número cero. Se le da a veces otros nombres. En una conversación telefónica podrías oir la pregunta: "¿Responde el uno, ocho, ó, tres?" Por supuesto, el que llama no se refiere a la letra "o", y entiendes que lo que quiere decir es "uno, ocho, cero, tres".

Aunque el cero no está incluido en los números naturales, se lo considera como uno de los números cardinales. Casi siempre usamos este número según las mismas reglas de los números naturales, y en un cierto sentido se utiliza para contar. Si retiras todo tu dinero del banco, puedes expresar el balance por medio de este número especial. Si no has contestado correctamente ninguna pregunta en un examen, tu nota puede ser cero. Si no hay borradores en el salón de clase, el número de borradores puede expresarse mediante el cero. En todos estos casos, vale decir, nada de dinero en el banco, ninguna respuesta correcta y ningún borrador, el cero indica que no hay objetos o elementos en el conjunto de objetos del que se está tratando. En este caso, vale decir, cuando no hay elementos en el conjunto, lo llamamos el conjunto vacío.

El número cero es el número de elementos del conjunto vacío. En este sentido, algunas personas dicen que cero significa "ninguno". Otros dicen que significa "nada" porque no hay nada en el conjunto. Como veremos más adelante, éstos representan más bien conceptos confusos y limitados del cero.

Una mañana muy fría se le preguntó a Pablo cuál era la temperatura. Al mirar el termómetro contestó: "Cero". ¿Quiso decir con esto que no había "ninguna"? ¿Quiso decir "nada"? No, lo que quiso decir es que el borde superior de la columna de mercurio estaba en el punto específico de la escala llamado cero. Federico tenía un altímetro en su automóvil de tal modo que podía verificar la altitud al atravesar las Montañas Rocosas. En una de sus excursiones llegaron a un punto en que Federico exclamó: "¡Mira, la altitud es cero!" Cuando el altímetro indica cero, esto no quiere decir "nada", sino que estamos en la altitud específica que se llama cero. Esta altitud es tan específica y real como una altitud de 999 pies.

Hemos observado antes que la suma de un número natural y uno es siempre el número natural siguiente. La suma de un número natural y cero es siempre el número natural original. Por ejemplo, $4 + 0 = 4$. Podríamos expresar este hecho en símbolos: $C + 0 = C$, donde C representa un número natural cualquiera. O podríamos expresar este hecho diciendo que cero es un "elemento idéntico" para la adición.

La diferencia que hay entre un número natural y sí mismo es el número especial cero. Por ejemplo, $4 - 4 = 0$. ¿Observas que en esta sustracción no se obtiene un número natural? Para expresar esta idea en un lenguaje más elegante, diríamos que el conjunto de los números naturales no es cerrado respecto de la sustracción.

Consideremos ahora el número especial cero desde el punto de vista de la multiplicación. ¿Qué significaría $3 \cdot 0$? Podríamos pensar en el número de sillas que hay en 3 salones, tales que cada salón contiene cero sillas. Por lo tanto, cualquier número de salones que contienen cero sillas tendría en definitiva un total de cero sillas. Podríamos expresar esta idea en símbolos, escribiendo $C \cdot 0 = 0$, donde C representa un número natural cualquiera.

El producto $0 \cdot 3$ resulta todavía más difícil de explicar. Pero aquí la propiedad conmutativa de la multiplicación nos dice que $3 \cdot 0 = 0 \cdot 3$. Hemos visto que $3 \cdot 0 = 0$. Por lo tanto, debemos tener $0 \cdot 3 = 0$, pues deseamos que la propiedad conmutativa sea cierta para todos los números cardinales. Si a representa un número cardinal cualquiera, podemos expresar esto escribiendo $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$. Si a es cero tendremos $0 \cdot 0 = 0$.

Hay un principio muy importante expresado en las fórmulas anteriores. Puede ser que se te haya escapado a primera vista. ¿Observas que si el producto de dos o más números cardinales es cero, entonces alguno de los números debe ser necesariamente cero? Por ejemplo, $4 \cdot$ [illegible] $\cdot\ 0 = 0$. En matemáticas has usado frecuentemente este principio.

Veamos ahora si cero sigue las reglas de la división para los números naturales.

¿Qué significaría cero divido por 3? Si tenemos una pieza con cero sillas y dividimos esta pieza en tres partes, querríamos significar el número de sillas en cada parte de esta pieza. Con esta interpretación, $0 \div 3$ debería ser 0. Si $3 \overline{)0}$ con cociente 0 entonces 0×3 debería ser cero, por la operación inversa. ¿Está esto de acuerdo con la definición de multiplicación por cero?

A veces los estudiantes olvidan que la división de cero por un número natural es siempre cero y nunca un número natural. Por ejemplo, $\frac{0}{7} = 0$, $\frac{0}{7} \neq 7$.

Si $\frac{0}{7} = 0$, ¿qué significa $\frac{7}{0}$? ¿Es $0 \overline{)7}$ un número natural? Admitamos por el momento que $0 \overline{)7}$ es igual a algún número que representaremos por N. Esto quiere decir que 7 debe ser igual a cero veces algún número N. ($7 = 0 \times N.$) El producto de cualquier número por cero es cero; por lo tanto, no hay ningún número N que sea igual a $0 \overline{)7}$. En lenguaje más elegante, podemos decir que $\frac{7}{0}$ no representa ningún número natural ni tampoco a cero. Por lo tanto, no podemos efectuar esta operación. No podemos dividir un número natural por cero.

¿Podríamos dividir cero por cero? En símbolos la pregunta es "$\frac{0}{0} = ?$"; o también $0 \overline{)0}$. Si $0 \overline{)0}$ fuera igual a algún número n, entonces por nuestra definición de multiplicación, $0 \times n = 0$. ¿Qué valores servirían para n? ¿Podría n ser 3? Por supuesto, n puede ser cualquier número natural y también cero. Puesto que $0 \overline{)0}$ podría ser cualquier número cardinal, el símbolo $\frac{0}{0}$ tiene demasiados significados. Por lo tanto, deberemos recordar que no podemos dividir ningún número natural, ni cero, por cero.

Más abajo se resumen las operaciones con el número especial cero, en símbolos. Expresa éstas con palabras si u y w representan números cardinales cualesquiera, y C representa cualquier número natural.

(a) $w + 0 = w$
(b) $0 + w = w$
(c) $w - 0 = w$
(d) $0 \cdot w = 0$
(e) $w \cdot 0 = 0$
(f) Si $u \cdot w = 0$, entonces o bien u es cero, o bien w es cero, o ambos son cero.
(g) $0 \div C = 0$
(h) $C \div 0$ no tiene significado.

Ejercicios 3-9

1. Selecciona los símbolos que representan cero:

(a) $1 + 0$

(b) 0

(c) $\frac{4}{0}$

(d) $\frac{0}{4}$

(e) [illegible] $-$ [illegible]

(f) [illegible] $-$ [illegible]

(g) $\frac{3}{0}$

(h) $0 + 0$

(i) $1 - 1$

(j) $100 - 100$

(k) $0 \cdot 4$

(l) [illegible] $\cdot$ [illegible]

(m) $0 \cdot 0$

(n) $\frac{0}{10}$

(o) $\frac{4 - 4}{2}$

(p) $\frac{4}{2 - 2}$

(q) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$

(r) $14 \cdot 25$

(s) $12 \cdot 0$

(t) $0 + 12$

(u) $2 \cdot (4 + 6 + 0)$

(v) $(2 \cdot 4) \div 0$

(w) $\frac{4}{4}$

(x) $\frac{36}{9} - \frac{36}{12}$

2. Efectúa las operaciones indicadas, si te es posible:

(a) [illegible] $\cdot$ [illegible]

(b) [illegible] $\cdot$ [illegible]

(c) [illegible] $\div$ [illegible]

(d) [illegible] $\div$ [illegible]2

(e) [illegible] $\times$ \$419.58

(f) [illegible] $\times$ \$[illegible]

(g) \$989.2[illegible]$(2 - 2)$

(h) $1 \times$ \$8[illegible].25

(i) [illegible] $\times$ \$14.15

(j) [illegible]79 $\cdot \frac{4}{4}$

(k) 379(14[illegible].8 − 145.8)

(l) $(34.6 - 33.6) \times 897$

(m) \$397.16 $\div (4 - 3)$

(n) \$897.40 $\div (3 - 3)$

(o) $(480 \div 24) \div 20$

(p) \$1846 $\div (\frac{1}{2} + \frac{1}{2})$

(q) $487.97 \times \frac{4}{4} \times 0$

(r) $49 \cdot 0 \cdot 47 \cdot 97$

(s) \$97.86 $\times 0 \times 0$

(t) $(9 - 9) \cdot \frac{7 + 2}{8 + 1}$

(u) $976 \cdot 1^6$

(v) $1^{12} \times$ \$97.46

3. ¿Puedes hallar un error en alguna de las expresiones siguientes? (a y b son números cardinales.)

(a) $4 \cdot 0 = 0$

(b) $0 \cdot 4 = 0$

(c) $2 \cdot 1 = 2$

(d) $1 \cdot 2 = 2$

(e) Si $a \cdot b = 0$, a ó $b = 0$

(f) Si $a \cdot b = 1$, a ó $b = 1$

(g) Si $a \cdot b = 2$, a ó $b = 2$

(h) Si $a \cdot b = 3$, a ó $b = 3$

(i) Si $a \cdot b = C$, a ó $b = C$

3-10. Resumen

1. El conjunto de numerales {1, 2, 3, 4, 5, ...} es el conjunto de símbolos para los números naturales.
2. El conjunto de numerales {0, 1, 2, 3, 4, 5, ...} es el conjunto de símbolos para los números cardinales.
3. Propiedad conmutativa para la adición: $a + b = b + a$, donde a y b representan números cardinales cualesquiera.
4. Propiedad conmutativa para la multiplicación: $a \cdot b = b \cdot a$, donde a y b representan números cardinales cualesquiera.
5. Propiedad asociativa para la adición: $a + (b + c) = (a + b) + c$, donde a, b y c representan números cardinales cualesquiera.
6. Propiedad asociativa para la multiplicación: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, donde a, b y c representan números cardinales cualesquiera.
7. Propiedad distributiva: $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ y $(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$ donde a, b y c son números cardinales cualesquiera.
8. Símbolos nuevos: { }, conjunto de elementos; >, es mayor que; <, es menor que; ≠, es diferente de.
9. Conjunto y clausura. Un conjunto es cerrado respecto de una operación si la combinación de dos elementos cualesquiera de este conjunto mediante esta operación da un elemento del conjunto. El conjunto de los números naturales es cerrado respecto de la adición y la multiplicación, pero no respecto de la división o la sustracción.
10. Operaciones inversas. La sustracción es la inversa de la adición, pero la sustracción no es siempre posible en un conjunto de números cardinales. La división es la inversa de la multiplicación, pero la división no es siempre posible en el conjunto de los números cardinales; esto es, la división de un número cardinal por otro número cardinal no siempre da un número cardinal.
11. La recta numérica y el concepto de ordenación. Todo número cardinal está asociado a un punto de la recta numérica. No siempre hay un número cardinal entre dos números cardinales

dados.

12. Números especiales: 0 y 1. Cero es la identidad para la adición; 1 es la identidad para la multiplicación; la multiplicación por 0 no tiene inverso; la división por 0 no es posible.

¿Cómo vas progresando?
(Preguntas de revisión, Capítulos 1 a 3)

1. $122_{tres} = \_\_\_\__{diez} = \_\_\_\__{cinco}$
2. Una niña quiere medir 4 tazas de harina, pero tiene solamente un recipiente de 5 tazas y un recipiente de 3 tazas. Usando estos dos recipientes y el recipiente que contiene la harina, ¿puede medir las cuatro tazas? Si la respuesta es sí, explica cómo.
3. ¿Qué probabilidad hay de que, tirando un dado, salga el número 2?
4. Escribe MCXI en numerales hindu-arábicos.
5. ¿Qué otra manera hay de escribir 1,767?
6. Cuando un empleado cuenta el cambio, después de una compra, ¿emplea generalmente la adición o la sustracción?
7. La base de numeración que tiene los resultados básicos más sencillos para la multiplicación es __?__.
8. 2010_{tres} escrito en notación desarrollada sería:
   $(2 \times \_) + (0 \times \_) + (1 \times \_) + (0 \times 1)$
9. Si usáramos la numeración en base 31 tendríamos _____ símbolos diferentes.
10. El valor del 4 en 4512_{seis} es _____ veces el valor del 4 en $41_{veintisiete}$.
11. ¿De qué modo difiere el conjunto de los números cardinales (si difiere) del conjunto de los números naturales?
12. ¿Es correcto el enunciado siguiente?: "Puedo concluir que el conjunto de números cardinales es cerrado respecto de la operación de sustracción si hallo un ejemplo como $12 - 8 = 4$ para ilustrar este hecho".
13. $(7 \cdot 3) + (3 \cdot 13) = (7 \cdot 3) + (13 \cdot 3)$. En este ejemplo,

¿Qué propiedad de los números cardinales se expresa?

14. En el conjunto de los números naturales la identidad para la multiplicación es _____.
15. El cero está incluido en nuestro conjunto de números cardinales con el propósito de _____. (Enuncia una de las propiedades especiales del cero.)
16. Usa la propiedad distributiva para reescribir: $(2 \cdot 13) + (5 \cdot 13)$.
17. Usa la propiedad asociativa para la adición de tal modo que se pueda calcular en forma simple la siguiente suma: $156 + 25 + 75$.
18. Verifica, usando la operación inversa, si $715 \div 11 = 65$.
19. El número de números naturales entre 6 y 47 es _____.
20. Si tenemos la expresión $(7 \cdot 3) + (6 \cdot 5) \cdot 3$ y aplicamos la propiedad asociativa para la multiplicación obtendremos _____.

Capítulo 4

GEOMETRIA DE POSICION

Este año has estudiado mucho acerca de los números y sus propiedades, pero los números no son los únicos objetos de las matemáticas que interesan a la gente. Viviendo como lo estamos en la "era del espacio", oímos mucho acerca de puntos, rectas, planos y espacio. El estudio de las ideas de este tipo se llama geometría.

Durante más de [illegible],000 años el hombre ha estudiado la geometría tratando de entender mejor el mundo en que vive. La geometría que estudiamos es, en verdad, la misma que estudiaron los griegos hace más de 2,000 años. Un famoso matemático griego llamado Euclides escribió muchos libros acerca de esta geometría. Aún hoy llamamos a esta parte de las matemáticas geometría "euclídea" o "euclidiana". Nuestra geometría es la misma, pero algunas de nuestras expresiones y maneras de considerar las cosas son muy distintas.

En este capítulo utilizaremos números solamente para contar. No usaremos la idea de distancia o de medida. Este capítulo se llama geometría "no métrica" o geometría "de posición", pero también podría llamarse geometría "sin medidas". ¿Te fijas en que "no métrica" significa ninguna medida?

Hoy en día, cuando enviamos cohetes hacia la luna y ponemos satélites en órbita, el estudio de las ideas geométricas es más importante que nunca.

4-1. Puntos, rectas y espacio

Puntos

La idea de punto en geometría está sugerida por la punta de un lápiz o un punto sobre la pizarra. Un punto geométrico es imaginado tan pequeño que carece de dimensión. En geometría no damos una definición para el término "punto". Lo que hacemos en vez de esto es describir varias propiedades de los puntos. De esta manera es como llegamos a entender qué quieren decir los matemáticos con el término "punto".

Espacio

Imaginamos el espacio como un conjunto de puntos. Hay una cantidad ilimitada de puntos en el espacio. En cierto sentido, pensamos en los puntos del espacio como descritos o determinados por su posición—sea que estén en el salón, en el mundo o en el universo.

Rectas

Para nosotros, una recta será un conjunto de puntos en el espacio, no cualquier conjunto de puntos, sino cierto tipo particular de conjunto de puntos. El término "recta" significa "línea recta". Una recta está sugerida por el borde de una regla. También lo está por la intersección de una pared lateral y la pared frontal de tu salón de clase.

Una recta geométrica se extiende sin límites en dos sentidos. No termina en ningún punto determinado. La intersección de las dos paredes que hemos mencionado termina en el piso y en el techo del salón. Sin embargo, la línea sugerida por esta intersección se extiende indefinidamente tanto hacia arriba como hacia abajo.

Probablemente habrás oído la expresión "a vuelo de cuervo". Un cuervo, en general, vuela directamente de un punto a otro, y por lo tanto la expresión quiere decir "en línea recta". La trayectoria de vuelo de un cuervo, entonces, sugiere una línea geométrica. Debemos, sin embargo, entender que esta "línea" no comienza ni termina en los puntos de descanso del pájaro. Se extiende sin fin en ambas direcciones.

Imagínate dos estudiantes que mantienen un hilo extendido entre ellos. Si este hilo está bien tenso, entonces cualquier parte de él representa una porción de recta. Es la recta que va de los dedos de uno de los estudiantes a los dedos del otro. La recta como tal va más allá de los estudiantes. La cuerda no es la recta, ni es tampoco ninguna parte de la recta. Simplemente es una representación de la recta que nosotros sabemos que está allí.

Sin cambiar la posición de los dedos de los estudiantes, ¿existe más de una posición posible para el hilo extendido? Probablemente pensarás: "Por supuesto que no", y tienes razón. Has descubierto ahora una propiedad básica del espacio.

<u>Propiedad 1.</u> <u>Por dos puntos diferentes del espacio pasa exactamente una recta.</u>

Como puedes ver, ¡hay un número ilimitado de rectas en el espacio!

Usando rectas podemos obtener una buena idea de cómo es el espacio. Considera un punto en una de las esquinas superiores del escritorio de tu profesor. Ahora considera el conjunto de todos los puntos sugeridos por las paredes, el piso y el techo del aula. Entonces en cada punto de este conjunto hay una recta que pasa por él y el punto que has elegido en el escritorio de tu profesor. Cada recta obtenida de esta manera es un conjunto de puntos. El espacio está hecho de todos estos puntos. Recuerda que estas rectas se extienden fuera del salón.

De la misma manera como no definimos en forma precisa "punto" y "recta", no definimos en forma precisa el término "espacio". Estudiamos sus propiedades y de esta manera lo entendemos. Recordemos que esta idea del espacio es la misma que tenían los griegos de la antigüedad, y se la ha estudiado en las escuelas desde entonces. Podemos realmente comprender ideas como las de espacio y punto sólo después de mucho estudio. No podemos pretender que se pueda aprender todo lo concerniente a ellos en pocos días, una semana o siquiera en todo el presente año.

<u>Problemas 4-1 para analizar en clase</u>

1. Considera una de las rectas que pasan por el sacapuntas

y el tirador de la puerta de tu salón de clase. ¿Por qué objetos del salón "atraviesa" esa recta? ¿Qué objetos fuera del salón son también atravesados por esa línea?

2. Un poeta matemático podría decir: "El espacio es como un puerco espín erizado de espinas". ¿De qué manera es esta descripción semejante a la de la exposición que sigue a la propiedad 1?

Ejercicios 4-1

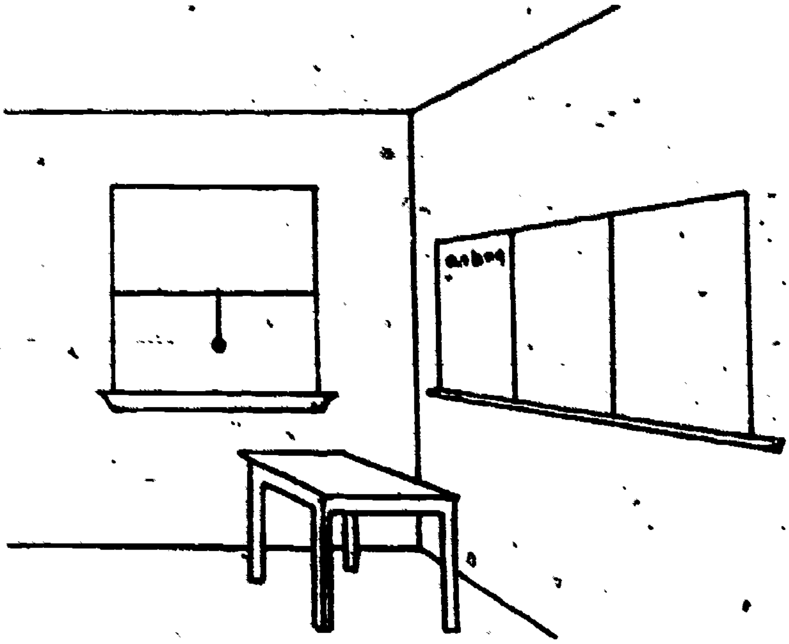
1. Para la decoración de un festival deportivo, se han tendido cintas de papel crepé entre dos puntos de una pared del gimnasio. ¿Demuestra esto, contradiciendo a la propiedad 1, que se pueden trazar varias rectas geométricas por dos puntos?
2. Cuando un topógrafo marca los límites de un terreno, pone "hitos" (pequeños bloques de piedra) en las esquinas. Un agujerito (o un clavo) puesto en la parte superior de cada hito representa un punto. El sabe que si nadie mueve los hitos, los límites originales pueden ser determinados en cualquier momento. ¿Por qué está seguro de ello?
3. Un violinista o un arpista aprende con exactitud dónde debe colocar los dedos en las cuerdas de su instrumento para producir el sonido que desea oir. Cuando se rompe una cuerda, se reemplaza por otra. ¿Cómo sabe el músico, sin mirar, dónde debe colocar los dedos de manera que pulsen la cuerda nueva?

4-2. Planos

Cualquier superficie plana, como una pared, el piso, el tablero del escritorio, un trozo de tabla o una puerta en cualquier posición, sugiere la idea de plano en matemáticas. Como la recta en matemáticas, un plano se imagina de extensión ilimitada. Si partes de un punto de un plano y sigues caminos sobre el mismo, en todas las direcciones posibles, esos caminos van a permanecer en el plano, pero sin tener fin. Un plano, pues, no tendría fronteras.

Pensamos que el plano contiene muchos puntos y rectas.

Cuando miras la pared, puedes imaginar muchos puntos en ella, así como las rectas que contienen esos puntos. El trazo en que la pared del salón encuentra al techo sugiere una recta tanto en el plano representado por el techo como en el plano de la pared. Los bordes de los portatizas representan rectas, una de las cuales, por lo menos, está en el plano representado por la pizarra. Cualquier número de puntos y rectas podría dibujarse en la pizarra para representar puntos y rectas en geometría.



Los matemáticos imaginan un plano como un conjunto de puntos del espacio. No es precisamente <u>cualquier</u> conjunto de puntos, sino una especie particular de conjunto. Hemos visto ya que una recta es un conjunto de puntos en el espacio, una especie particular de conjunto, diferente de la del plano. Un plano es una manera como los matemáticos imaginan el "ideal" de una superficie plana.

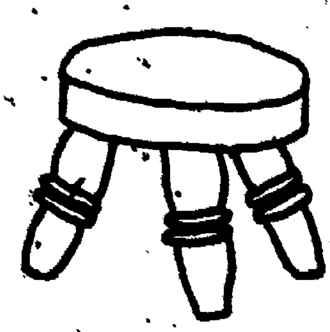
Si se marcan dos puntos en la pizarra, por ellos se puede trazar exactamente una recta. ¿Es esto, justamente, lo que dice la propiedad 1? Esta recta está sobre la pizarra. El plano representado por la pizarra contiene al conjunto de puntos representado por la recta que has trazado.

Imagina dos puntos marcados sobre una tabla. Una parte de la recta que pasa por esos dos puntos puede ser dibujada sobre la tabla. ¿Estará la recta que pasa por esos dos puntos sobre el plano de la tabla? Podemos ahora concluir:

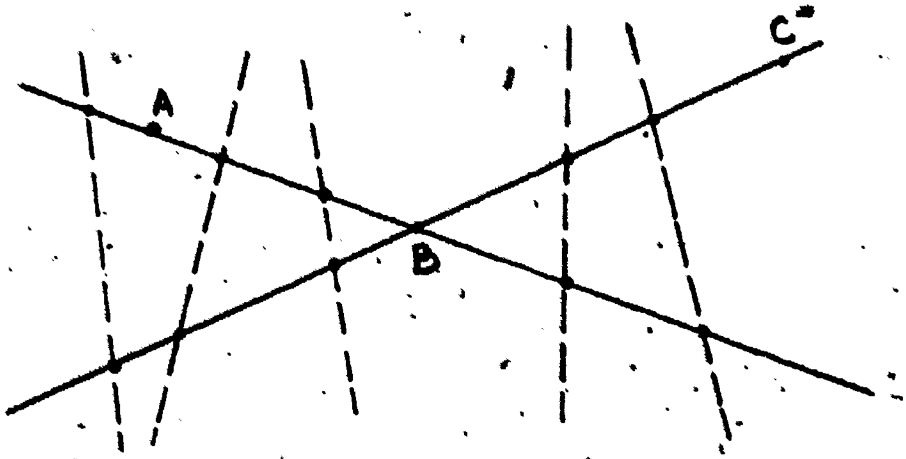
<u>Propiedad 2.</u> <u>Si una recta contiene dos diferentes puntos de un plano, esa recta está en el plano.</u>

Busca un par de esquinas de la parte delantera del techo de tu salón de clase. ¿En cuántos planos está contenido ese par de puntos? Si imaginamos como un par de puntos los extremos de la costura de un bloc de papel, podemos ver que los planos representados por las páginas del bloc contienen esos puntos.

La pregunta podría proponerse así: "¿Cuántos planos contienen un determinado par de puntos?" El bloc de papel, abierto, con sus hojas en distintas posiciones sugiere que hay muchos planos que pasan por un par de puntos especificado. La pared frontal y el techo representan dos planos que pasan por los puntos representados por las dos esquinas frontales superiores del salón. Muestra con movimientos de manos las posiciones de otros planos que pueden pasar por esos dos puntos. Una puerta en varias posiciones representa varios planos que pasan por dos puntos: sus bisagras. Podemos decir: "Muchos planos contienen un par de puntos".



Suponte ahora que tenemos tres puntos que no están situados sobre una misma recta, por ejemplo, tres esquinas del tablero del escritorio de tu maestro. El extremo inferior de las patas de un banco de tres patas es otro ejemplo. Tal banco se apoya firmemente sobre el suelo, mientras que una silla de cuatro patas no siempre se apoya tan bien, a menos que esté muy bien construida. Coloca los dedos pulgar, índice y medio de tu mano derecha como se indica en la figura de la página anterior, manténlos rígidos e imagina sus extremos como puntos. Ahora toma un libro o cualquier otra superficie plana y trata de colocarla de manera que se apoye en esos tres puntos. ¿Puedes sostener el libro en esa posición? ¿Si flexionas la muñeca y cambias la posición de los dedos, estará el libro en una nueva posición? Con las manos en cualquier posición, ¿hay más de una manera en que puedes sostener una superficie plana sobre las puntas de tres dedos, estando éstos fijos? Parece claro que hay sólo una posición para la superficie plana.



<u>Propiedad 3.</u> <u>Tres puntos cualesquiera que no estén en una misma recta, están en un solo plano.</u>

¿Ves cómo esta propiedad sugiere que si las patas de una silla no son exactamente de la misma longitud, podrás apoyar la silla en tres patas, pero no en cuatro?

En la figura anterior hay tres puntos, A, B y C, en un plano. Se ha dibujado la recta que pasa por A y B y la recta que pasa por B y C. Las rectas punteadas se trazan de manera que contengan dos puntos del plano de A, B y C. Cada recta punteada contiene un punto de la recta que pasa por A y B, y un punto de la recta que pasa por B y C. Las rectas punteadas están contenidas en el plano. ¿Qué propiedad lo establece así?

Los conjuntos de puntos representados por las rectas punteadas están contenidos en el plano. Puede ahora describirse el plano que contiene a los puntos A, B, y C: es el conjunto de todos los puntos que están sobre rectas que contienen dos puntos de la figura que consiste en las rectas que pasan por A y B, y por B y C.

Problemas 4-2 para analizar en clase

1. Un plano contiene tres puntos sugeridos por las dos patas delanteras del escritorio del maestro y el sacapuntas. ¿Por cuáles objetos del aula pasa este plano? ¿Por cuáles objetos que están fuera del salón también pasa?

2. Coloca sobre tu pupitre una regla con el filo hacia arriba. Mantén el borde de una superficie, por ejemplo de un cartón, en movimiento y en contacto permanente con la parte superior del pupitre, pero al mismo tiempo mantén el contacto con el borde superior de la regla. Inclina luego la superficie, primero gradualmente y luego más verticalmente. ¿En cuántas posiciones inclinadas se puede colocar la "superficie"? Sobre tu pupitre, pero no colineal con la regla, pon un borrador, una tachuela, una bolilla o algún otro objeto pequeño que sugiera un punto. Coloca la superficie sobre este objeto y el borde superior de la regla. ¿De cuántas maneras se puede ahora poner la superficie de tal forma que tome posiciones inclinadas? ¿Cómo muestran estas dos situaciones lo enunciado por las propiedades 2 y 3?

Ejercicios 4-2

1. En cierta disposición de tres puntos diferentes en el espacio, se les puede encontrar en cada uno y en muchos planos a la vez. ¿Cómo están dispuestos los puntos?
2. En otra disposición, tres puntos distintos sólo se pueden encontrar a la vez en un sólo plano. ¿Cómo están dispuestos los puntos?
3. Los fotógrafos, topógrafos y artistas, en general usan trípodes para soportar sus equipos. ¿Por qué es mejor usar un trípode con este fin, que un soporte de cuatro patas? ¿Cómo se aplica aquí la propiedad 3?

4. ¿Cuántas rectas diferentes pueden contener:
   (a) Un punto dado?
   (b) Un par de puntos dados?
5. ¿Cuántos planos diferentes pueden contener:
   (a) Un punto dado?
   (b) Un par de puntos dados?
   (c) Un conjunto de tres puntos dados?
6. ¿Por qué se usa la palabra "plano" en los siguientes nombres: aeroplano, hidroplano? Busca en un diccionario las definiciones de plancheta y planografía.
7. ¿Cuántas rectas se pueden trazar por cuatro puntos, tomados de dos en dos, si los puntos:
   (a) Están en un mismo plano?
   (b) No están en un mismo plano?
8. PROBLEMA DIFICIL. Explica lo siguiente: si dos rectas distintas se intersecan, hay un único plano que las contiene.

4-3. Nombres y símbolos

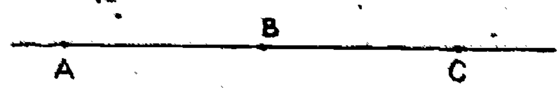
Es costumbre asignar una letra a un punto y decir "punto A" o "punto B", según qué letra se le haya asignado. Las notaciones como éstas son buenas, pero debemos asegurarnos de que su significado esté bien claro.

Una marquita redonda representa un punto. Indicaremos a qué punto nos referimos poniéndole una letra (habitualmente mayúscula) tan cerca como sea posible. En la figura que sigue, ¿cuál de los puntos está más cerca del margen de la izquierda? ¿Cuál está más cerca del margen de la derecha?

A. B. C. D.

Se puede representar una recta de dos maneras, así 

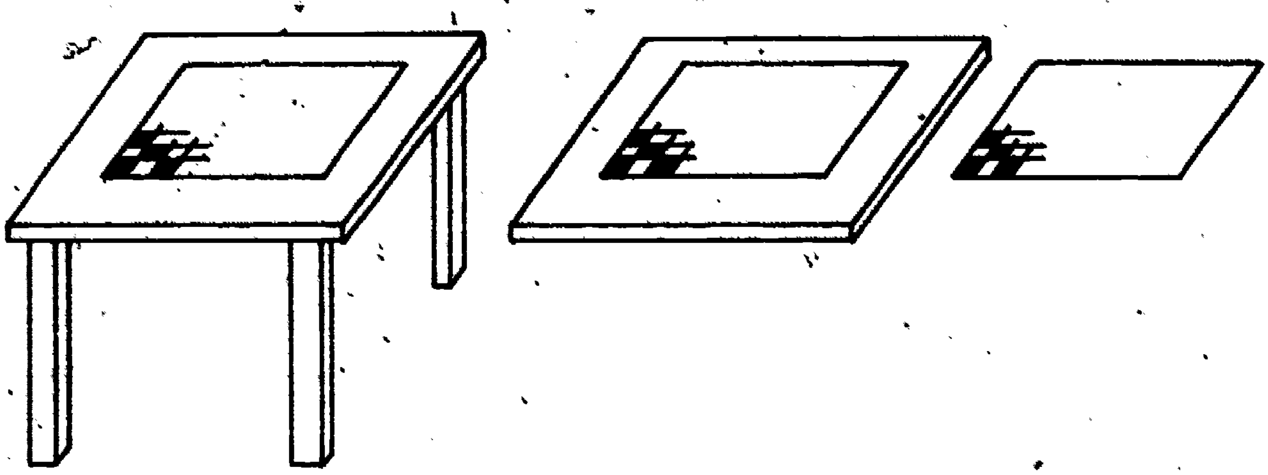
o simplemente así  . En la primera figura, ¿qué sugieren las flechas? ¿Se extiende una recta indefinidamente en dos direcciones? El dibujo, entonces, sugiere todos los puntos de la recta y no sólo los que se pueden marcar en una página.

Si deseamos llamar la atención sobre varios puntos de una recta, lo hacemos en esta forma: 

y la recta puede llamarse "recta AB". Un símbolo para la misma recta es $\overleftrightarrow{AB}$. Otros nombres para la recta de la figura son "recta AC" o "recta BC". Los símbolos correspondientes serían $\overleftrightarrow{AC}$ o $\overleftrightarrow{BC}$.

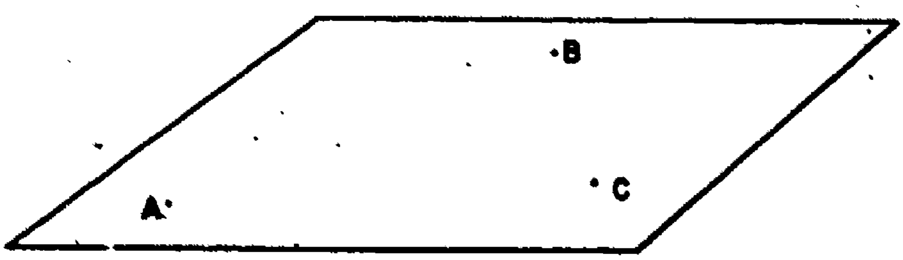
Observa que la palabra "representa" aparece frecuentemente en estas explicaciones. Un punto está "representado" simplemente por una marquita redonda, pues por pequeña que sea esta marca, tiene siempre dimensiones. Pero un punto en geometría, <u>no</u> tiene dimensiones. También las rectas trazadas con tiza son gruesas, ondulantes y frecuentemente irregulares. ¿Son así realmente las rectas geométricas? Recuerda que "recta" significa para nosotros "línea recta". El dibujo de una recta hecho con un lápiz bien afilado sobre un papel bien liso se parece más a nuestra idea, pero sus imperfecciones aparecerían si lo viéramos con lente de aumento. Entonces, con una marquita redonda sólo indicamos la situación de un punto. El dibujo de una recta solamente representa la recta; pero no es realmente la recta. No es una falta trazar una recta a pulso (sin regla), pero deberíamos poner un ciudado razonable al hacerlo.

Así como tenemos necesidad de representar puntos y rectas, también necesitamos "representar" un plano. La figura (a) es el dibujo de un tablero de damas colocado sobre el tablero de una mesa; la figura (b) es lo mismo sin las patas, y la figura (c) es el tablero de damas sólo.

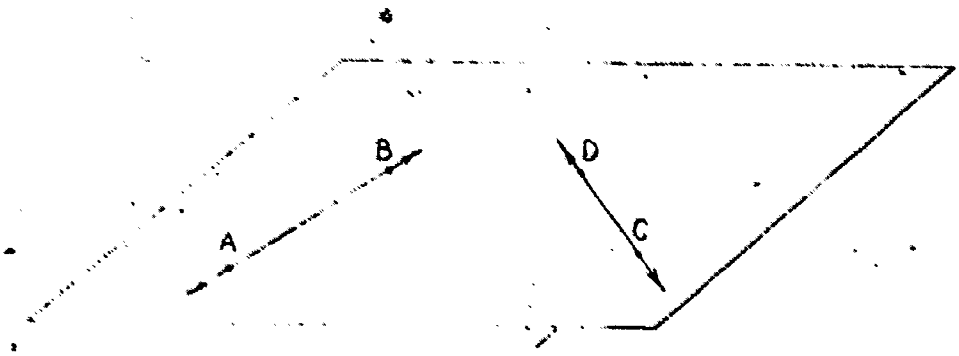


(a) (b) (c)

El tablero de una mesa sugiere una porción de un plano. En este caso el tablero de damas sugiere una porción más pequeña, y los cuadros del tablero, una porción aún más pequeña del plano. Si queremos hacer un dibujo sobre una hoja de papel, usamos una figura romboidal, como se ha visto arriba. Los puntos en el plano se indican en la misma forma como los puntos sobre la recta:

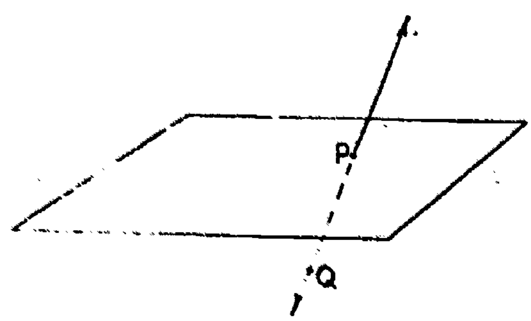


En esta figura, ¿te parece que los puntos A y C están más cerca de ti que el punto B? Si no te parece así, imagínate que el punto B es una ficha de tu contendiente, situada cerca del borde opuesto del tablero de damas. Entonces A y C serían fichas que te pertenecen.



En la figura que precede, A, B, C y D se consideran como puntos en el plano del tablero de damas. Por los puntos A y B se traza una recta, y otra por los puntos C y D. De acuerdo con la propiedad 2, ¿qué se puede decir sobre $\overleftrightarrow{AB}$? La propiedad 2 establece: "Si una recta contiene dos puntos diferentes de un plano, esa recta está en el plano". ¿Qué se puede decir sobre $\overleftrightarrow{DC}$?

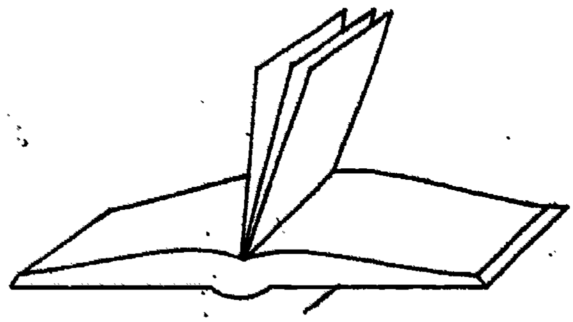
Es posible que una recta atraviese o "perfore" un plano. Una figura con tal situación podría aparecer así:



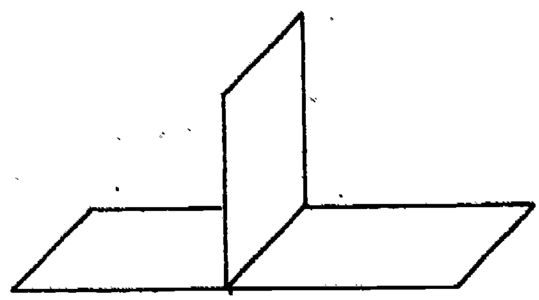
La porción punteada de $\overleftrightarrow{PQ}$ estaría oculta de nuestra vista si la parte del plano fuera la superficie superior de un objeto opaco.

Nuevamente decimos que el dibujo sólo "representa" la situación de que tratamos.

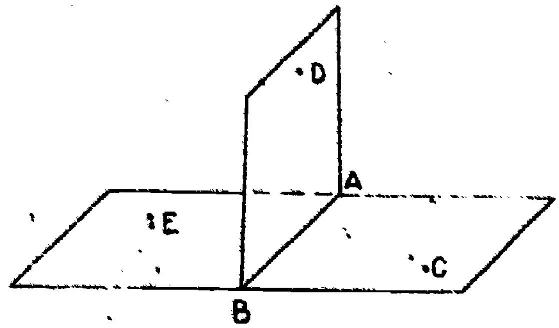
Este dibujo representa un libro abierto:



Si se quitaran todas las hojas del libro, salvo una del conjunto superior, el dibujo cambiaría así:



Esto sugiere ahora la intersección de dos planos, uno que contiene las tapas y otro que contiene la hoja que se dejó. Como hay más de un plano en la figura, es necesario marcarlos. Asignemos letras a algunos puntos de la figura.



¿Cómo podríamos utilizar la propiedad 3 para caracterizar los planos de la figura anterior? Recuerda que la propiedad 3 establece: "Tres puntos cualesquiera que no están en una misma recta, están en exactamente un plano". ¿Sugieren las letras ABD, la hoja vertical o la pasta del libro? Observa que los puntos A, B y D "no están todos sobre una misma recta". Muchas personas estarían de acuerdo en que esas letras sugieren la hoja vertical, la misma que sugiere un plano que puede designarse como "plano ABD". De manera análoga, la pasta del libro debería llamarse "plano ABC", pero parece que "plano ABE" podría ser otra manera de identificar esa pasta. Para mostrar que aparentemente se pueden dar dos nombres a un mismo plano, debería ser posible escribir, plano ABC = plano ABE, siempre que estuviéramos seguros de que el signo = significa lo que aquí decimos.

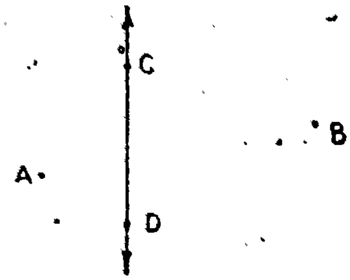
La noción de "conjunto" nos sería muy útil para explicar lo que se entiende por "igual" en este caso. Veamos lo que se puede afirmar sobre la situación descrita por la figura:

1. El plano ABC es un conjunto de puntos que se extiende más allá de la pasta del libro.
2. El plano ABE es un conjunto de puntos que se extiende más allá de la pasta del libro.
3. Los puntos A, B, C, E y otros que no han sido indicados están en el plano ABC y también en el plano ABE.

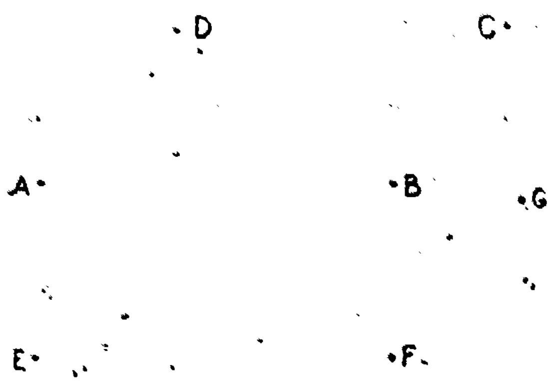
En otras palabras, todos los elementos del plano ABC, (un conjunto de puntos) y todos los elementos del plano ABE (un conjunto de puntos) parecen estar contenidos en ambos conjuntos (planos). Diremos: "Dos conjuntos son iguales si contienen los mismos elementos, y sólo en ese caso". Según esto, plano

ABC = plano ABC. En otras palabras, decimos que el conjunto M es igual al conjunto N si M y N son dos nombres para el mismo conjunto.

Ejercicios 4-3

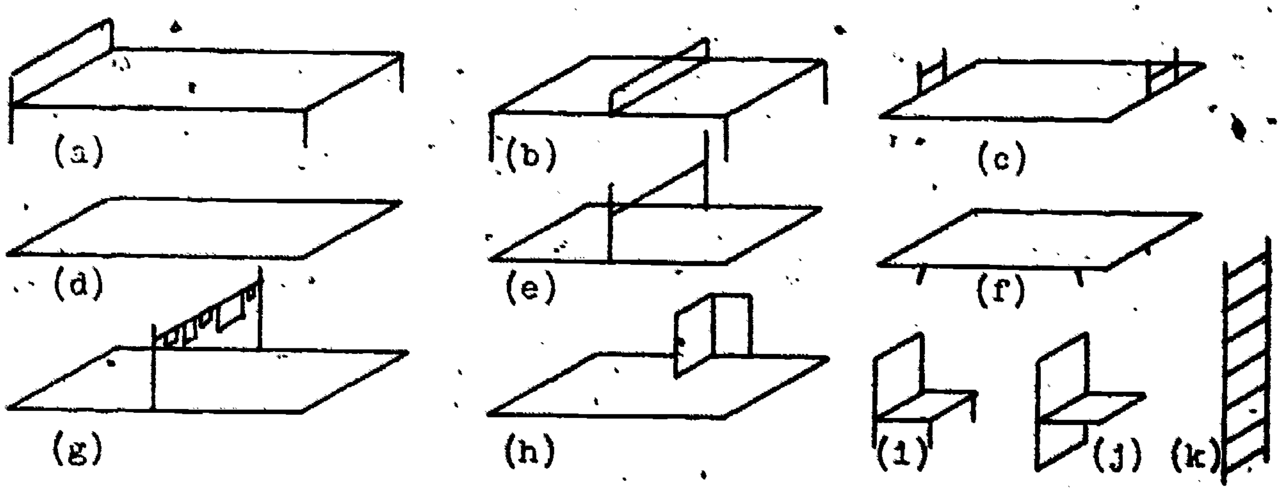


1. Tomando en cuenta la manera como se toma una página, ¿qué punto indicado en la figura anterior está a la izquierda de CD? ¿Cuál está a la derecha? ¿Cuál de los puntos indicados está más cerca del borde superior de la página? ¿Cuál está más cerca del borde inferior?



2. Calca los puntos de la figura precedente en una hoja de papel. De ahora en adelante nos referiremos a la figura que has copiado. Une A con B, luego B con C, C con D, y D con A mediante trozos de recta, en este orden. Ahora une A con E, B con F, y C con G. ¿Qué mueble podría representar este dibujo?

3. Calca la figura anterior. Une A con B, B con C, C con D, D con A, A con X, B con Y, D con V, y C con U. ¿Qué ha pasado con la mesa?



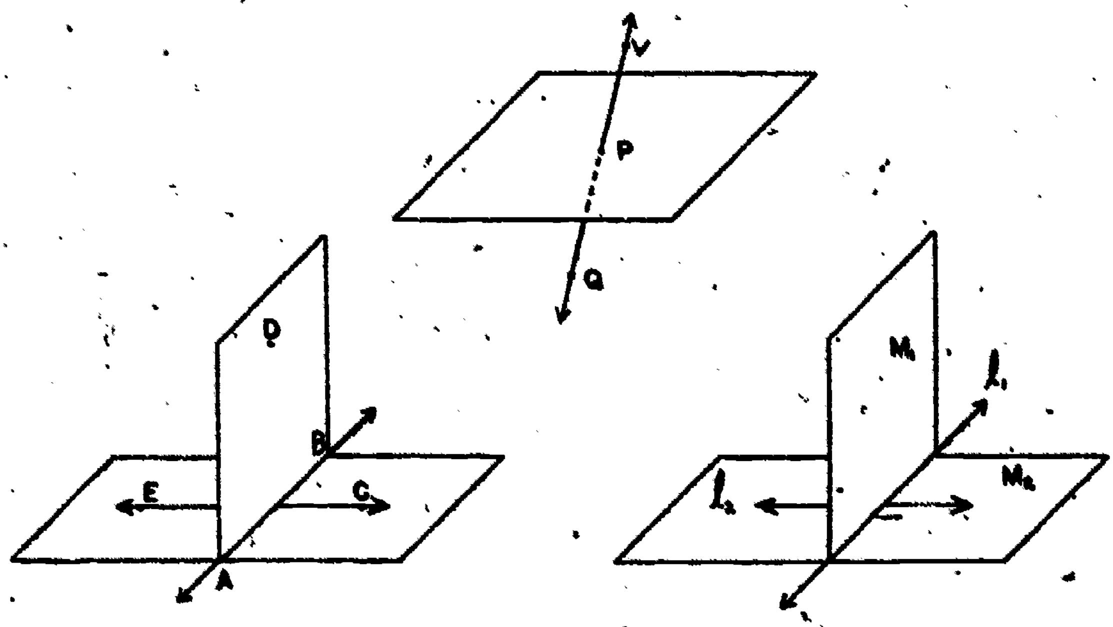
4. Cada uno de los dibujos anteriores representa uno de los objetos enumerados a continuación. Indica qué nombre corresponde a cada objeto.

Catre	Campo de fútbol	Cuerda para secar ropa
Mesa de ping pong	Valla para saltar	Escalera
Tapete	Mesa de café	Puerta abierta
Silla		Estante

5. Haz dibujos que representen los siguientes objetos:

Pupitre	Pirámide de base cuadrada
Cubo	Caja de cereales

6. En la figura que sigue, ¿es el punto V un punto de $\overleftrightarrow{PQ}$? ¿Es el punto Q un elemento del plano? ¿Lo es V? ¿Cuántos puntos de $\overleftrightarrow{PQ}$ son elementos del plano?



(a) (b)

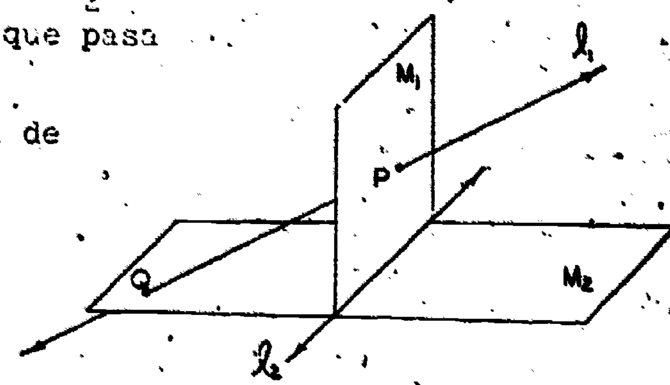
7. La figura (b) es una copia de la figura (a), salvo las letras. A tres jóvenes llamados "Tomás" que están en la misma clase se les puede llamar T_1, T_2 y T_3 para no confundirlos. En forma semejante, tres rectas diferentes pueden ser denotadas con ℓ_1, ℓ_2 y ℓ_3. Los números pequeños no son exponentes. Se llaman "subíndices". El plano ABD de la figura (a) corresponde a M_1 de la figura (b). $\overleftrightarrow{AB}$ de la figura (a) corresponde a ℓ_1 de la figura (b).

En la columna de la izquierda se indican partes de la figura (a). Hazlas corresponder con las partes de la figura (b) indicadas en la columna de la derecha:

Partes de la figura (a)	Partes de la figura (b)[1]
(A) $\overleftrightarrow{EC}$	(A') ℓ_1
(B) Plano ABC	(B') ℓ_2
(C) Plano ABD	(C') M_1
(D) Plano EBA	(D') M_2
(E) $\overleftrightarrow{AB}$	
(F) La intersección del plano ABC y el plano ABD	

[1] ¿Sugiere alguna ventaja el uso de los subíndices de la segunda columna?

8. En la figura de la derecha,
   (a) ¿Atraviesa ℓ_1 a M_1?
   (b) ¿Atraviesa ℓ_1 también a M_2?
   (c) ¿Es ℓ_1 la única recta que pasa por P y Q?
   (d) ¿Cuál es la intersección de M_1 y M_2?
   (e) ¿Está ℓ_1 en M_2?
   (f) ¿Encontrará ℓ_1 a ℓ_2?
   (g) ¿Están ℓ_1 y ℓ_2 en un mismo plano?



4-4. Intersección de conjuntos

Introduciremos ahora algunas ideas útiles e importantes sobre los conjuntos.

Sea A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
Sea B = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16}

Sea C el conjunto de los elementos que están en el conjunto A y también en el conjunto B. Podemos escribir C = {2, 4, 6, 8}. Llamamos a C la intersección de los conjuntos A y B.

Sea R el conjunto de alumnos pelirrojos.
Sea S el conjunto de alumnos que saben nadar.

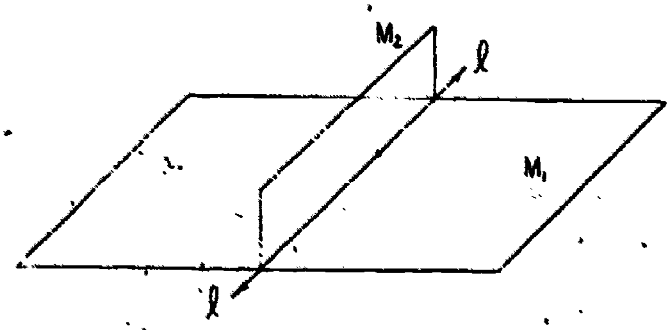
Podría ocurrir que un elemento del conjunto R (un alumno pelirrojo) esté en el conjunto S (es decir, sea un alumno que sepa nadar). En realidad, podría no haber tales elementos comunes, o podría haber varios. En todo caso, el conjunto de nadadores pelirrojos es la intersección de los conjuntos S y R.

Un conjunto que no contiene elementos se llama "conjunto vacío". Entonces, si no hay nadadores pelirrojos, la intersección de los conjuntos S y R es el conjunto vacío.

Sean H el conjunto de alumnos de tu clase y K el conjunto de niños que tengan menos de 2 años de edad. Entonces, la intersección de H y K es el conjunto vacío. ¡No hay alumnos en tu clase que sean menores de dos años!

Usamos el símbolo $\cap$ para expresar la relación de "intersección"; es decir, $E \cap F$ significa "la intersección de los conjuntos E y F". Entonces, refiriéndonos a los conjuntos antes mencionados, escribimos:

$A \cap B$ es $\{2, 4, 6, 8\}$,
$R \cap S$ es el conjunto de los nadadores pelirrojos y
$H \cap K$ es el conjunto vacío.



M_1 representa una mesa de ping pong. M_2 representa una red.

La figura de arriba sugiere dos planos M_1 y M_2. La línea ℓ parece estar en M_1 y también en M_2. Todo punto de M_1 que está también en M_2 parece pertenecer a la recta ℓ. Entonces, parece cierta la siguiente afirmación: $M_1 \cap M_2 = \ell$.

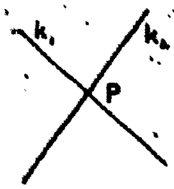
Algunos hablan de las intersecciones de manera un poco distinta de como lo hacemos aquí. Cuando nosotros decimos que la intersección de dos conjuntos es vacía, ellos dirían que los dos conjuntos no se intersecan. Cuando decimos nosotros que la intersección de dos conjuntos no es vacía, dirían ellos que los dos conjuntos se intersecan. Las ideas son las mismas, pero el lenguaje es ligeramente diferente.

Ejercicios 4-4

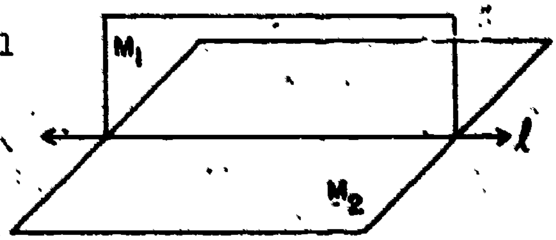
1. Escribe el conjunto cuyos elementos son:
   (a) Los números cardinales mayores que 17 y menores que 23.
   (b) Las ciudades de tu estado que tengan más de 100,000 habitantes.
   (c) Los miembros de la clase menores de 4 años.
2. Escribe tres elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:
   (a) Los números cardinales impares.
   (b) Los números cardinales divisibles por 5.

(b) El conjunto de puntos de la siguiente recta, algunos de los cuales están marcados en la figura:

3. Indica los elementos de las intersecciones de los siguientes pares de conjuntos:
   (a) Los números cardinales del 2 al 12 y los números cardinales del 9 al 20.
   (b) Los alumnos y alumnas de la clase y las niñas de cabello rubio.
   (c) El conjunto de los puntos de la recta k_1 y el conjunto de los puntos de la recta k_2.



   (d) El conjunto de los puntos del plano M_1 y el conjunto de los puntos del plano M_2.



4. Sea $S = \{4, 8, 10, 12, 15, 20, 23\}$
   $T = \{2, 7, 10, 13, 15, 21, 23\}$.
   Halla $S \cap T$.
5. Imagina que la tapa, fondo y caras laterales de una caja de tizas son conjuntos de puntos.
   (a) ¿Cuál es la intersección de dos caras que se encuentran?
   (b) ¿Cuál es la intersección de la tapa y el fondo?
6. Sea S el conjunto de los estados de Nueva Inglaterra (Maine, Nueva Hampshire, Vermont, Massachusetts, Rhode Island y Connecticut), T el conjunto de estados cuyos nombres comienzan con la palabra "Nueva" y V el conjunto de estados que colindan con Méjico.
   (a) Haz listas de los estados de los tres conjuntos, S, T y V, usando la notación { }.
   (b) ¿Cuál es $S \cap T$?
   (c) ¿Cuál es $S \cap V$?

(d) ¿Cuál es $V \cap T$?

*7. El conjunto de los números cardinales que son múltiplos de 3 es cerrado respecto de la adición.

(a) ¿Es cerrado respecto de la adición el conjunto de los números cardinales múltiplos de 5?

(b) ¿Es cerrada respecto de la adición la intersección de los conjuntos descritos en este ejercicio? ¿Por qué?

8. PROBLEMA DIFICIL. Explica por qué la "intersección" tiene la propiedad de clausura y es conmutativa y asociativa. En otras palabras, si X, Y y Z son conjuntos, explica por qué:

(a) $X \cap Y$ es un conjunto

(b) $X \cap Y = Y \cap X$

(c) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$

4-5. Intersecciones de rectas y planos

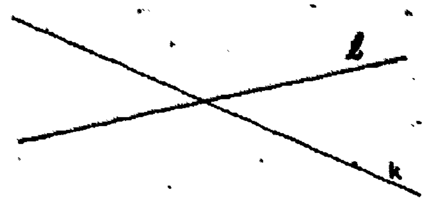
Dos rectas

Mira una caja de tizas e imagina que sus aristas son rectas. Algunas de esas rectas se intersecan y otras no. En la tapa de la caja hay algunas rectas (aristas) que se intersecan y otras que no. Si nos imaginamos las rectas que están en la tapa y en el fondo de la caja, vemos pares que se intersecan, pares que no se intersecan pero que tienen la misma dirección, y pares que no se intersecan y no tienen la misma direcçión. ¿Es esta situación la misma para las aristas de tu salón de clase? (Una arista es la línea de intersección de dos paredes, o de una pared y el techo o de una pared y el piso.)

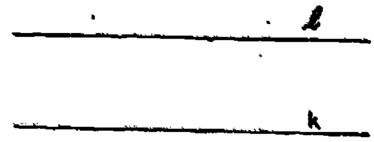
¿Puedes poner los brazos en una posición tal que representen rectas que se intersecan? ¿Puedes ponerlos de tal manera que las rectas que ellos representan no se intersequen pero tengan la misma dirección? ¿Puedes ponerlos de manera que las rectas que representan no se intersequen y que no tengan la misma dirección? ¿Hay otras posibilidades de poder colocar dos rectas en lo que respecta a intersecciones de pares de rectas?

Las posibles intersecciones de dos rectas diferentes pueden ser descritas en tres casos. Se han dibujado figuras para representar los dos primeros casos, pero no el tercero. Cuando leas el tercer caso, ¿puedes imaginarte la razón por la cual es difícil representarlo con una figura? Mira la figura del problema 8 de los Ejercicios 4-3. ¿Podría usársela para el tercer caso?

Caso 1. ℓ y k se intersecan, o $\ell \cap k$ no es el conjunto vacío. ℓ y k no pueden tener en común dos puntos distintos. ¿Por qué?

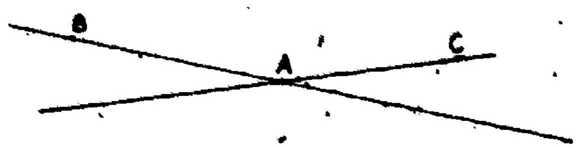


Caso 2. ℓ y k no se intersecan y están en un mismo plano. $\ell \cap k$ es el conjunto vacío, y ℓ y k están en el mismo plano. ℓ y k se llaman paralelas.



Caso 3. ℓ y k se cruzan sin encontrarse, es decir, no se intersecan y no están en un mismo plano. $\ell \cap k$ es el conjunto vacío, y ℓ y k no están en el mismo plano. Decimos que ℓ y k son rectas alabeadas o rectas que se cruzan.

En el PROBLEMA DIFICIL de la Sección 4-2 se te pidió que explicaras por qué dos rectas están en un mismo plano si se intersecan. En la figura se muestran dos rectas que se

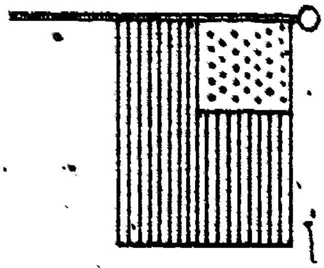


intersecan en el punto A. B es un punto sobre una de las rectas y C un punto sobre la otra. Por la propiedad 3, hay exactamente un plano que contiene los puntos A, B y C.

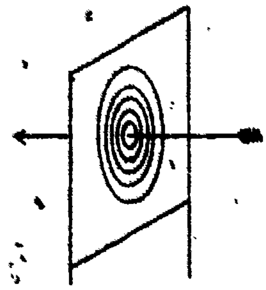
Por la propiedad 2, AB está en ese plano.

Por la propiedad 2, AC está en ese plano.

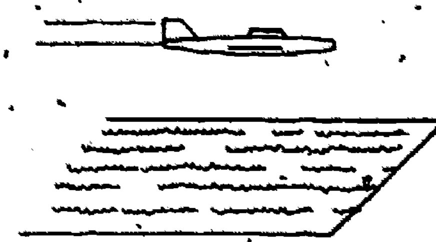
Hay exactamente un plano que contiene esas dos rectas.



(a)



(b)



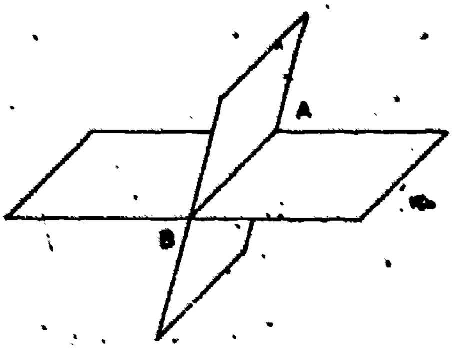
(c)

Una recta y un plano

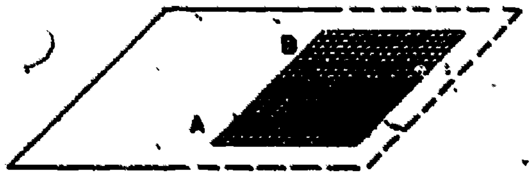
Hay una manera de colocar una recta y un plano de manera que su intersección contenga sólo un punto. ¿Está sugerida esa manera por una de las figuras precedentes? Hay otra manera de disponer una recta y un plano de manera que su intersección contenga muchos puntos. ¿Qué figura, entre las anteriores, sugiere esa manera? Hay aún otro modo de disponer una recta y un plano, de manera que su intersección no contenga ningún punto. Si escogiste bien las dos primeras figuras, no tendrás dificultad en encontrar, esta vez, la figura correcta. Si llamamos a cada una de las disposiciones anteriores un "caso", entonces estos tres "casos" pueden también ser sugeridos por las caras y aristas de una caja de tizas, una caja de zapatos o las paredes y aristas del salón.

Dos planos

Pensemos ahora en dos planos diferentes del espacio. Supónte que la intersección no es vacía. ¿Contendrá esa intersección más de un punto? Observa que los planos de las paredes frontal y lateral de un salón se intersecan en más de un punto. Si tomas dos hojas de papel, una en cada mano, parece como si estas hojas pudieran ser sostenidas de manera que tengan un solo punto en común. Pero si consideramos los planos de las hojas de papel y no las hojas mismas, vemos que si tienen un punto común, su intersección necesariamente contendrá otros puntos comunes. ¿Puedes sostener las hojas bien planas de manera que representen planos que se intersecan en sólo dos puntos? Manteniéndolas bien planas, ¿puedes colocarlas de manera que se intersequen en una curva como la del arco de un puente?



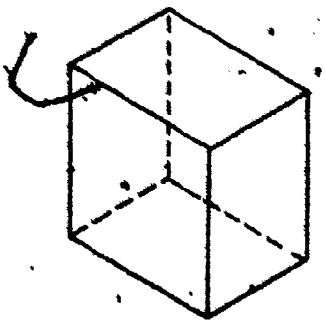
(d)



(e)

Sean A y B dos puntos, ambos en dos planos que se intersecan como en la figura (d). Por la propiedad 2, la recta $\overleftrightarrow{AB}$ debe estar en cada uno de esos planos. Entonces la intersección de los dos planos contiene una recta. Pero si, como en la figura (e), la intersección contiene un punto C que no está sobre la recta $\overleftrightarrow{AB}$, entonces los dos planos serán un mismo plano. Por la propiedad 3, habría exactamente un plano que contiene los puntos A, B y C. Establecemos ahora:

<u>Propiedad 4</u>. <u>Si la intersección de dos planos diferentes no es vacía, entonces esa intersección es una recta.</u>



Si la intersección de dos planos es el conjunto vacío, entonces los planos se llaman <u>paralelos</u>. Varios ejemplos de pares de planos paralelos se encuentran representados por ciertas paredes de un salón o por las divisiones de un estante. ¿Puedes imaginar otros?

Al discutir la intersección de dos planos diferentes, hemos considerado dos casos. Denotemos con M y N los dos planos.

Caso 1. $M \cap N$ no es vacío. $M \cap N$ es una recta.

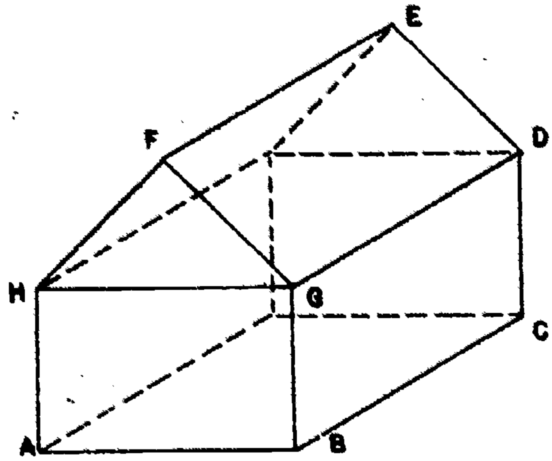
Caso 2. $M \cap N$ es vacío. M y N son paralelos.

¿Hay otros casos? ¿Por qué?

Ejercicios 4-5

1. Menciona los tres casos de intersección de una recta y un plano. Indica si la intersección contiene 0 puntos, 1 punto o más de 1 punto.
2. Describe dos pares de rectas que se cruzan sin encontrarse, sugeridas por las aristas de tu aula.
3. Marca en tu papel tres puntos A, B y C de manera que $\overleftrightarrow{AB}$ no sea $\overleftrightarrow{AC}$. Dibuja las líneas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$. ¿Cómo es $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{AC}$?
4. Dobla cuidadosamente una hoja de papel por la mitad. ¿Te sugiere el doblez una recta? Coloca el papel doblado sobre una mesa (o el pupitre), de manera que el doblez no toque la superficie de la mesa, quedando en forma de tienda. ¿Te sugieren tres planos el papel doblado y la mesa? ¿Hay algún punto que esté en los tres planos? ¿Cuál es la intersección de los tres planos? ¿Hay algún par de planos paralelos?
5. Coloca verticalmente el papel doblado sobre la mesa de manera que el doblez se apoye sobre la mesa en un solo punto. ¿Resultan patentes tres planos? ¿Hay algún punto que esté en los tres planos? ¿Cuál es la intersección de los tres planos?
6. Sostén el papel de manera que todo el doblez se apoye sobre la mesa. ¿Resultan patentes tres planos? ¿Está todo punto en los tres planos? ¿Cuál es la intersección de los tres planos?
7. En cada una de las situaciones de los ejercicios 4, 5 y 6, considera sólo la recta del doblez y el plano del tablero de la mesa. ¿Cuáles son las intersecciones de esa línea y ese plano? Deberías dar tres respuestas, una para cada problema.
8. Considera tres rectas diferentes en un plano. ¿Cuántos puntos habrá si cada punto debe estar por lo menos en dos de esas rectas? Dibuja cuatro figuras mostrando cómo tus respuestas podrían ser 0, 1, 2 ó 3. ¿Por qué no puede ser tu respuesta 4 puntos?

9. Considera este dibujo esquemático de una casa.

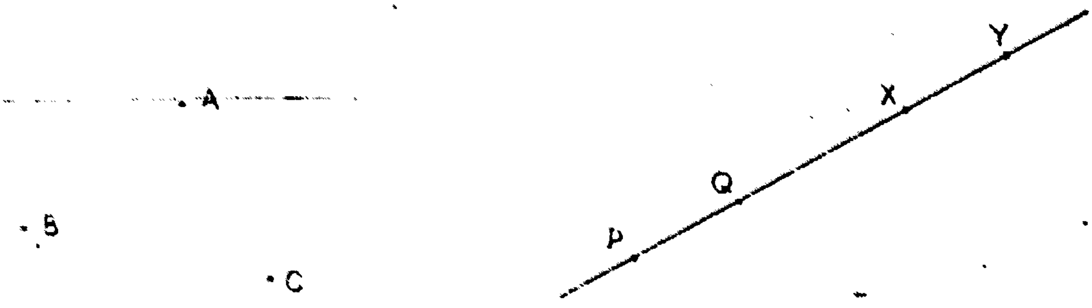


Hemos marcado ocho puntos sobre la figura. Imagina las rectas y planos que ella sugiere. Nombra las rectas por un par de puntos y los planos por tres puntos. Indica:

(a) Un par de planos paralelos.
(b) Un par de planos cuya intersección sea una recta.
(c) Tres planos que se intersequen en un punto.
(d) Tres planos que se intersequen en una recta.
(e) Una recta y un plano cuya intersección sea vacía.
(f) Un par de rectas paralelas.
(g) Un par de rectas que se crucen sin encontrarse.
(h) Tres rectas que se intersequen en un punto.
(i) Cuatro planos que tengan exactamente un punto común.

4-4. Segmentos

Considera los tres puntos A, B y C de la siguiente figura. ¿Decimos que uno de ellos está entre los otros dos? No, generalmente no lo decimos en este caso.



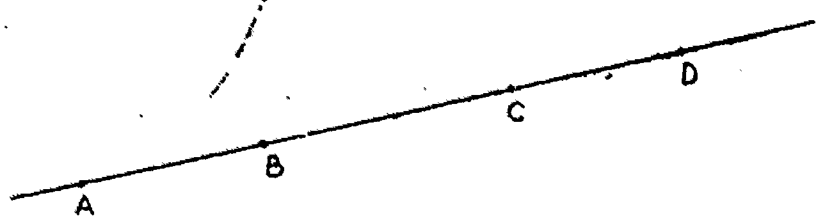
Utilizamos la palabra "entre" solamente cuando los puntos en cuestión están sobre una misma recta. Observa los puntos P, Q, X e Y. Estos puntos están representados sobre una recta. ¿Está X entre Q e Y? ¿Está Q entre P e Y? ¿Está P entre X e Y? Si has respondido sí, sí y no, en este orden, tu respuesta es correcta. El sentido común nos dice lo que significa que un punto está entre otros dos puntos de una recta. Sabemos que Q está entre P y X, y que hay muchos otros puntos entre P y X, pero no los hemos marcado.

Observarás que cuando decimos que un punto P está entre los puntos A y B, queremos expresar dos ideas: Primero, que hay una recta que contiene a los puntos A, B y P. Segundo, que sobre esa recta, P está entre A y B.

Veamos nuevamente la figura. ¿Hay algún punto entre P y Q? No hemos marcado ninguno, pero entendemos que hay muchos. De hecho, para dos puntos cualesquiera A y B en el espacio, entendemos que la situación es semejante a la de P y Q. Hay una recta que contiene los puntos A y B, y sobre esa recta hay puntos entre A y B.

Finalmente, estamos en condiciones de decir lo que entendemos por segmento. Imagina dos puntos diferentes, A y B. El conjunto de puntos que consiste en A, B y todos los puntos situados entre A y B se llama el <u>segmento</u> AB. A y B se llaman sus extremos. Designamos el segmento cuyos extremos son A y B por $\overline{AB}$. Otro nombre para el mismo segmento es $\overline{BA}$.

Todo segmento tiene exactamente dos extremos. Como se ha sugerido antes, todo segmento contiene puntos distintos de sus extremos. A veces un segmento se llama segmento de recta. No es una falta decirlo, pero es innecesario. Entendemos, de todas maneras, que un segmento es parte de una recta.



En la figura de arriba encontramos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CB}$ y $\overline{CD}$. ¿Hay otros segmentos? Sí, y son $\overline{CA}$, $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$. Recuerda que hemos aprendido algo sobre intersección de conjuntos. ¿Cuál es la intersección de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$?

No sólo podemos hablar de intersección de conjuntos, sino que encontraremos conveniente hablar de reunión de conjuntos. La palabra "reunión" sugiere reunir o combinar dos conjuntos en uno nuevo. La reunión de dos conjuntos consiste en aquellos elementos que pertenecen a uno por lo menos de los dos conjuntos. Por ejemplo, en la figura anterior, la reunión de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ consiste en todos los puntos de $\overline{AB}$ juntamente con todos los puntos de $\overline{BC}$; es decir, la reunión es el segmento $\overline{AC}$.

Utilizamos el signo $\cup$ para representar la relación de "reunión". Es decir, $X \cup Y$ significa "la reunión del conjunto X y el conjunto Y". Suponte que el conjunto X es el conjunto de los números $\{1, 2, 3, 4\}$ y el conjunto Y es el conjunto de los números $\{2, 4, 6, 8, 10\}$. ¿Tienes una idea de cómo es $X \cup Y$? Sí, es $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$. En la reunión de dos conjuntos no consideramos dos veces un elemento que pertenece a ambos conjuntos. Lo consideramos una sola vez.

Consideremos nuevamente el conjunto de todos los alumnos pelirrojos y el conjunto de todos los alumnos que saben nadar. Podemos pensar:

Sea R el conjunto de los alumnos pelirrojos.

Sea S el conjunto de los alumnos que saben nadar.

Entonces, $R \cup S$ es el conjunto de todos los alumnos que, o bien son pelirrojos (sepan o no nadar), o bien saben nadar (sean o no pelirrojos).

Ejercicios 4-6

1. Dibuja una recta horizontal. Marca cuatro puntos, P, Q, R y S, en ella en este orden, de izquierda a derecha. Indica dos segmentos:
   (a) Cuya intersección sea un segmento.
   (b) Cuya intersección sea un punto.
   (c) Cuya intersección sea vacía.
   (d) Cuya reunión no sea un segmento.
2. Dibuja una recta. Marca en ella tres puntos A, B y C, tales que B esté entre A y C.
   (a) ¿Cuál es $\overline{AB} \cap \overline{BC}$?
   (b) ¿Cuál es $\overline{AC} \cap \overline{BC}$?
   (c) ¿Cuál es $\overline{AB} \cup \overline{BC}$?
   (d) ¿Cuál es $\overline{AB} \cup \overline{AC}$?
3. Dibuja un segmento. Marca sus extremos X e Y. ¿Hay algún par de puntos de $\overline{XY}$ tales que Y esté entre ellos? ¿Hay algún par de puntos de $\overleftrightarrow{XY}$ tales que Y esté entre ellos?
4. Dibuja dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ para los cuales $\overline{AB} \cap \overline{CD}$ sea vacío, pero $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD}$ sea un punto.
5. Dibuja dos segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$ para los cuales $\overline{PQ} \cap \overline{RS}$ sea vacío, pero tales que $\overleftrightarrow{PQ}$ sea $\overleftrightarrow{RS}$.
6. Sean A y B dos puntos. ¿Es cierto que hay exactamente un segmento que los contiene? Dibuja una figura para explicar este problema y tu respuesta.
7. Dibuja una recta vertical ℓ. Marca dos puntos, A y B, a la derecha de ℓ. Marca C, un punto a la izquierda de ℓ. ¿Es $\overline{AB} \cap \ell$ vacío? ¿Es $\overline{AC} \cap \ell$ vacío?

8. PROBLEMA DIFICIL. En algunos libros anticuados de geometría, los autores no hacían ninguna distinción entre una recta y un segmento. Los llamaban una "línea recta". Si "línea recta" tiene cualquiera de esos dos significados, explica por qué no podemos decir que "por dos puntos cualesquiera pasa exactamente una línea recta".

9. PROBLEMA DIFICIL. Explica por qué "reunión" tiene la propiedad de clausura y es conmutativa y asociativa. En otras palabras, si X, Y y Z son conjuntos, explica por qué:
   (a) $X \cup Y$ es un conjunto
   (b) $X \cup Y = Y \cup X$
   (c) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$

*10. Demuestra que para todo conjunto X, tenemos:

$$X \cup X = X$$

4-7. Separación

En esta sección consideraremos una muy importante idea: la de separación. Veremos esa idea aplicada en tres casos diferentes.

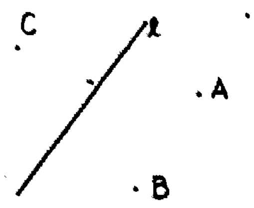
Sea M el plano de la pizarra. Este plano separa el espacio en dos conjuntos: (1) el conjunto de puntos del espacio del mismo lado de la pizarra en que estás tú, y (2) el conjunto de puntos del espacio del lado de la pizarra opuesto a donde te encuentras. Estos dos conjuntos se llaman semiespacios. El plano M no está en ninguno de los dos semiespacios.

Sean A y B dos puntos cualesquiera del espacio, no situados sobre el plano M de la pizarra. Entonces, A y B están de un mismo lado del plano M si la intersección de $\overline{AB}$ y M es vacía, esto es, si $\overline{AB} \cap M$ es vacío. En la misma forma, A y B están en lados opuestos del plano M si la intersección de $\overline{AB}$ y M no es vacía; en otras palabras, hay un punto de M entre A y B.

Todo plano M separa al espacio en dos semiespacios.

Si A y B están en un mismo semiespacio, $\overline{AB} \cap M$ es vacío. Si A y B están en diferentes semiespacios, $\overline{AB} \cap M$ no es vacío. Llamamos a M la frontera de cada uno de los semiespacios.

Ahora, considera sólo el plano M de la pizarra. ¿Te imaginas cómo este plano M puede ser separado en dos semiplanos? ¿Cuál sería la frontera de los dos semiplanos? Mira la figura adjunta que consiste en una recta, ℓ,

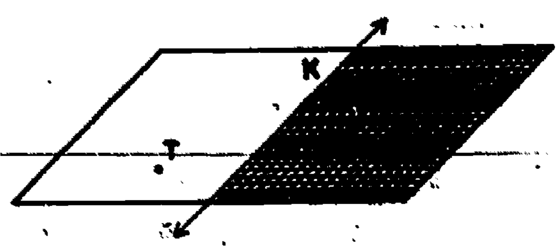


y tres puntos, A, B y C. ¿Es $\overline{AB} \cap \ell$ vacío? ¿Es $\overline{BC} \cap \ell$ vacío? ¿Cómo es $\overline{AC} \cap \ell$? Podemos decir que:

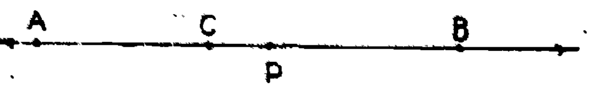
<u>Toda recta ℓ del plano M separa a éste en dos semiplanos.</u>

Llamamos <u>lados</u> de ℓ a los dos semiplanos en que ℓ separa a M. Indicamos estos lados de ℓ designándolos como el lado A de ℓ o el lado C de ℓ. Observa que en la figura anterior, lado B de ℓ = lado A de ℓ. La recta ℓ no está en ninguno de los dos semiplanos.

En la figura que sigue, el lado S de la recta k está sombreado, mientras el lado T de la misma recta no lo está.



Considera ahora una recta ℓ. ¿Cómo definirías una semirrecta? ¿Puedes establecer para los segmentos algo semejante a lo que hicimos al definir semiplanos y semiespacios? ¿Cómo sería la frontera? ¿Es la frontera un conjunto de puntos?



Si el punto P separa la recta de la figura en dos semirrectas, ¿están A y B en la misma semirrecta? ¿Están A y C en la misma semirrecta? ¿Está P entre B y C?

Nuestro tercer caso estaría ahora claro. ¿Puedes enunciarlo?

Es importante notar que estos tres casos son semejantes. Se refieren a la misma idea en situaciones diferentes. Entonces:

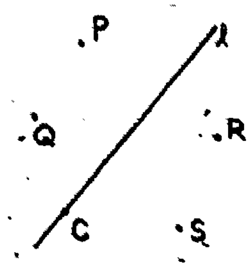
1. Todo plano separa al espacio en dos semiespacios.
2. Toda recta de un plano separa al plano en dos semiplanos.
3. Todo punto de una recta separa a la recta en dos semirrectas.

Hay otra definición útil. Un rayo es una semirrecta juntamente con su extremo. Un rayo tiene un extremo. Un rayo sin su extremo es una semirrecta. Acostumbramos a dibujar un rayo así, ⟶. Si A es el extremo del rayo y B es otro punto del mismo, denotamos el rayo con $\overrightarrow{AB}$. Observa que $\overrightarrow{BA}$ no es $\overrightarrow{AB}$. Usamos el término rayo en el mismo sentido con que se usa en la expresión "rayo de luz".

En el lenguaje diario, a veces no distinguimos entre rectas, rayos y segmentos. En geometría los distinguiremos entre sí. Una "línea de mira" realmente se refiere a un rayo. No dices que alguien está en tu línea de mira si está colocado detrás de ti. La línea penal del campo derecho, en béisbol, se refiere en realidad a un segmento y a un rayo. El segmento se extiende desde el "home plate" hasta el cerco del campo, pasando por la primera base. Termina en el cerco. El rayo parte del suelo y sube por el cerco.

Ejercicios 4-7

1. En la figura de la derecha, ¿es el lado R de ℓ el mismo que su lado S? ¿Es el mismo que su lado Q? ¿Son vacías las intersecciones de ℓ y $\overline{PQ}$, y de ℓ y $\overline{RS}$? ¿Son las intersecciones de ℓ y $\overline{QS}$, y de ℓ y $\overline{PR}$, vacías? Considerando los lados de ℓ en la figura, ¿te satisfacen las dos respuestas anteriores?



2. Dibuja una recta que contenga los puntos A y B. ¿Qué conjunto es $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$? ¿Cuál es el conjunto de los puntos que no están en $\overrightarrow{AB}$?
3. Dibuja una recta horizontal. Marca cuatro puntos A, B, C y D en ella, en este orden y de izquierda a derecha. Menciona dos rayos (usando estos puntos para su descripción):
   (a) Cuya reunión sea la recta.
   (b) Cuya reunión no sea la recta, pero contenga los puntos A, B, C y D.
   (c) Cuya reunión no contenga el punto A.
   (d) Cuya intersección sea un punto.
   (e) Cuya intersección sea vacía.
4. ¿Separa un segmento a un plano en dos semiplanos? ¿Separa una recta al espacio en dos semiespacios?
5. Dibuja dos rectas horizontales, k y ℓ, en tu papel. Esas rectas son paralelas. Marca el punto P sobre ℓ. ¿Está todo punto de ℓ en el lado P de k? ¿Es esta pregunta la misma que "¿contiene el lado P de k a la recta ℓ?"
6. La idea de un plano separando el espacio se relaciona con la idea de la superficie de una caja que separa el interior del exterior. Si P es un punto en el interior y Q uno en el exterior de una caja, ¿interseca $\overline{PQ}$ a la superficie?

*7. Explica cómo la reunión de dos semiplanos podría ser un plano.

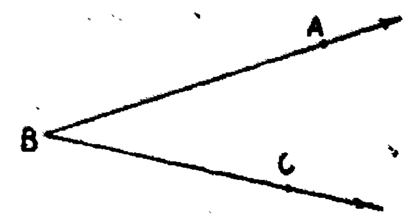
*8. Si A y B son puntos de un mismo lado del plano M (en el espacio), ¿debe ser $\overline{AB} \cap M$ vacío? ¿Puede ser $\overline{AB} \cap M$ vacío?

4-8. Angulos y triángulos

Angulos

Algunas de las más importantes ideas de la geometría se refieren a ángulos y a triángulos. Un ángulo es el conjunto de puntos que consiste en dos rayos no colineales y con un extremo común. Digamos esto de otra manera. Sean $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ dos rayos tales que A, B y C no estén todos sobre una misma recta. Entonces, el conjunto de puntos que consta de todos los puntos de $\overrightarrow{BA}$ juntamente con todos los puntos de $\overrightarrow{BC}$ se llama el ángulo ABC. Un ángulo es la reunión de dos rayos. El punto B se llama el vértice del ángulo, los rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ se llaman lados (o, a veces, rayos) del ángulo. Un ángulo tiene exactamente un vértice y exactamente dos lados.

En la figura que sigue se ha dibujado un ángulo. Recordarás de la Sección 4-3 que realmente queremos decir "se ha dibujado una representación de un ángulo". Se han marcado 3 puntos del ángulo de manera que se les pueda leer como "ángulo ABC" y escribir como "$\angle$ ABC". La letra del vértice se escribe siempre en el centro. Por consiguiente, $\angle$ ABC es $\angle$ CBA. Observa que al nombrar el ángulo no se tiene en cuenta el orden en que se escribe A y C, pero B siempre se coloca al centro. ¿Es $\angle$ ABC el mismo que $\angle$ BAC (que no ha sido dibujado)?

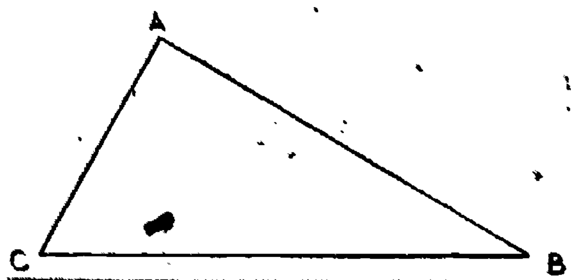


En la figura parece como si el ángulo ABC separara al plano que lo contiene. Y es cierto. Las dos partes en que el ángulo separa al plano aparecen como diferentes. Se ven así:

Llamamos interior del ángulo a la parte sombreada de la figura de la derecha, y exterior a la parte sombreada de la izquierda. Podemos definir el interior de $\angle$ ABC como la intersección del lado A de la recta $\overleftrightarrow{BC}$ con el lado C de la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Es la intersección de dos semiplanos y no incluye al ángulo. El exterior es el conjunto de todos los puntos del plano que no están ni en el ángulo ni en el interior.

Triángulos

Sean A, B y C tres puntos no situados sobre una misma recta. El triángulo ABC, escrito como $\triangle$ABC, es la reunión de $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$. Recordarás que la reunión de dos conjuntos consiste en todos los elementos de uno de ellos, juntamente con todos los elementos del otro. Podemos definir el $\triangle$ABC de otra manera. El triángulo ABC es el conjunto que consta de los puntos A, B, C y de todos los puntos de $\overline{AB}$ entre A y B, todos los puntos de $\overline{AC}$ entre A y C, y todos los puntos de $\overline{BC}$ entre B y C. Los puntos A, B y C son los vértices de $\triangle$ABC. Decimos "vértices" cuando nos referimos a más de un vértice. El triángulo ABC se representa en la siguiente figura:



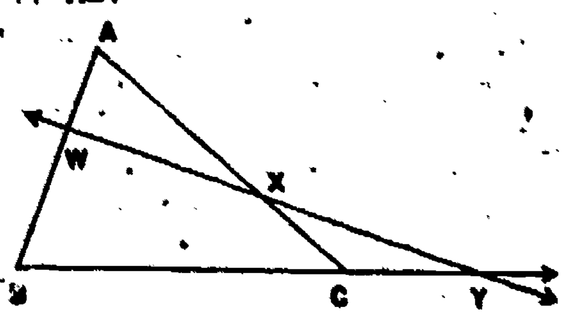
Angulos de un triángulo

Decimos que $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ son los lados del triángulo, y que $\angle$ ABC, $\angle$ ACB y $\angle$ BAC son los ángulos del triángulo. Estos son los ángulos determinados por el triángulo. ¿Están los lados de un triángulo contenidos en el triángulo? ¿Están los ángulos de un triángulo contenidos en el triángulo? Puede extrañarte el que llamemos a $\angle$ ABC un ángulo de $\triangle$ABC, cuando $\angle$ ABC no está contenido en $\triangle$ABC. (Lee nuevamente los párrafos sobre los ángulos.) Sin embargo, hablamos de los ex alumnos de una escuela, aun cuando no están realmente en la escuela.

Observa que un triángulo ~~es~~ un conjunto de puntos de un mismo plano. Todo punto del triángulo ABC está en el plano ABC. Refiriéndonos a la figura de la página anterior, ¿separa el $\triangle ABC$ al plano en el que está? Sí, ciertamente así parece. Y es verdad. El $\triangle ABC$ tiene un interior y un exterior. El interior es la intersección de los interiores de los tres ángulos del triángulo. El exterior es el conjunto de todos los puntos del plano ABC que no están en $\triangle ABC$ o en el interior del $\triangle ABC$.

Ejercicios 4-8

1. Marca tres puntos, A, B y C, que no estén sobre una misma recta. Dibuja $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.
   (a) Sombrea el lado C de $\overleftrightarrow{AB}$. Sombrea el lado A de $\overleftrightarrow{BC}$. ¿Qué conjunto está ahora doblemente sombreado?
   (b) Sombrea el lado B de $\overleftrightarrow{AC}$. ¿Qué conjunto está ahora triplemente sombreado?
2. Marca tres puntos X, Y y Z que no estén sobre una misma recta.
   (a) Dibuja $\angle XYZ$ y $\angle XZY$. ¿Son ángulos diferentes? ¿Por qué?
   (b) Dibuja $\angle YXZ$. ¿Es este ángulo diferente de los otros que has dibujado?
   (c) Un ángulo es un conjunto de puntos que pertenecen a un solo plano. ¿Por qué es esto cierto?
3. Dibuja un triángulo ABC.
   (a) En ese triángulo, ¿qué es $\overline{AB} \cap \overline{AC}$?
   (b) ¿Contiene el triángulo algún rayo o semirrecta?
   (c) En el dibujo, extiende $\overline{AB}$ en ambas direcciones para obtener $\overleftrightarrow{AB}$. ¿Cuál es $\overline{AB} \cap \overleftrightarrow{AB}$?
   (d) ¿Cuál es $\overleftrightarrow{AB} \cap \triangle ABC$?
4. Refiriéndonos a la figura de la derecha:



   (a) ¿Cómo es $\overrightarrow{YW} \cap \triangle ABC$?
   (b) Enumera los cuatro triángulos de la figura.
   (c) ¿Cuáles de los puntos marcados, si los hay, están en el interior de alguno de los triángulos?

(d) ¿Cuáles de los puntos marcados, si los hay, están en el exterior de alguno de los triángulos?

(e) Indica un punto del mismo lado de $\overleftrightarrow{XY}$ como C y otro en el lado opuesto.

5. Dibuja una figura como la del ejercicio 4.

(a) Marca un punto P que no esté en el interior de ninguno de los triángulos.

(b) Marca un punto Q dentro de dos de los triángulos.

(c) Si es posible, marca un punto R en el interior del $\triangle ABC$, pero que no esté en el interior de ninguno de los otros triángulos.

6. Si es posible, haz diagramas en los que la intersección de una recta y un triángulo sea:

(a) El conjunto vacío.

(b) Un conjunto de dos elementos.

(c) Un conjunto de un elemento.

(d) Un conjunto de exactamente tres elementos.

7. Si es posible, haz diagramas en los que la intersección de dos triángulos sea:

(a) El conjunto vacío.

(b) Exactamente dos puntos.

(c) Exactamente cuatro puntos.

(d) Exactamente cinco puntos.

8. En la figura, ¿cuáles son los siguientes conjuntos?:

(a) $\angle ABC \cap \overleftrightarrow{AC}$

(b) $\triangle ABC \cap \overleftrightarrow{AB}$

(c) $\ell_1 \cap \angle ACB$

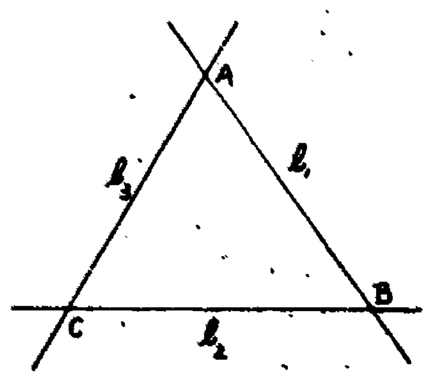
(d) $\overline{AB} \cap$ [illegible]

(e) $\angle BCA \cap \angle ACB$

(f) $\overline{BC} \cap \angle ABC$

(g) $\overrightarrow{BC} \cap \angle ACB$

(h) $\angle ABC \cap \triangle ABC$



*9. Si en un plano, dos triángulos tienen un lado común, ¿se deben intersecar sus interiores? Si tres triángulos tienen, cada uno de ellos, un lado común con los otros, ¿deben intersecarse los interiores de algún par de estos triángulos?

*10. Dibuja $\angle ABC$. Marca puntos X e Y en el interior y P y Q en el exterior.

(a) ¿Debe estar todo punto de $\overline{XY}$ en el interior?

(b) ¿Está todo punto de $\overline{PQ}$ en el exterior?

(c) ¿Puedes encontrar puntos R y S en el exterior, tales que $\overline{RS} \cap \angle ABC$ no sea vacío?

(d) ¿Puede ser vacío $\overline{XP} \cap \angle ABC$?

4-9. Correspondencias uno a uno o biunívocas

En el Capítulo 3 hemos usado la idea de "correspondencia uno a uno" (o "correspondencia biunívoca") cuando tratábamos de los números naturales. Esta idea es también útil en geometría. Por correspondencia uno a uno entendíamos la coordinación de dos conjuntos de manera que cada elemento del primero correspondiera exactamente a uno del segundo conjunto.

En el Capítulo 3 vimos un ejemplo referente al hombre primitivo, cuando llevaba la cuenta de sus ovejas haciendo corresponder a cada oveja de su rebaño una piedra. Como recordarás, el pastor hacía cada mañana un montón de piedras, compuesto de una piedra por cada oveja que dejara el redil y saliera a pastar. A la tarde, el pastor transfería las piedras a un nuevo montón, una por una, a medida que las ovejas entraban al redil. Si hubiera transferido todas las piedras, el pastor sabría que todas las ovejas estarían a salvo en el redil. Esto es cierto, porque para cada piedra habría una oveja y a cada oveja se le habría hecho corresponder una piedra.

Tomemos otro ejemplo. Supongamos que hayas vendido diecisiete boletos para una representación escolar. Sea T el conjunto de boletos que has vendido. Sea C el conjunto de personas que han ingresado en el teatro con esos boletos. ¿Hay una correspondencia biunívoca entre T y C? ¿Cómo lo sabes?

Considera el conjunto de los números naturales menores que once. Forma dos conjuntos con estos números. Sea A el conjunto que contiene los números impares: $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ y B el que contiene los números pares: $\{2, 4, 6, 8, 10\}$. ¿Hay una correspondencia biunívoca entre los conjuntos A y B? La respuesta es, naturalmente, sí, pues todo número impar puede ser puesto en correspondencia con un número par. Demostrémoslo usando el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{array}$$

¿Es ésta la única manera de hacer corresponder estos dos conjuntos? Forma una correspondencia diferente.

El juego de las sillas musicales es divertido porque se basa en no haber una correspondencia uno a uno. ¿Por qué es así? ¿Hay en algún momento del juego una correspondencia uno a uno?

Dado el conjunto A: {a, b, c, d, e, f, g}, y el conjunto B: {I, II, III, IV, V}. ¿Hay una correspondencia biunívoca entre estos dos conjuntos? Demuestra tu respuesta utilizando un esquema análogo al ya usado para los conjuntos de números pares e impares.

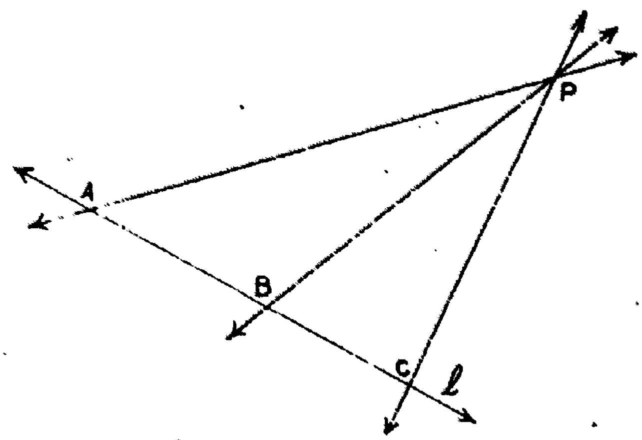
Ejercicios 4-9a

1. ¿Hay una correspondencia biunívoca entre los alumnos y los asientos de tu salón? ¿Por qué?
2. ¿Hay una correspondencia biunívoca entre los estados de los Estados Unidos de Norteamérica y las ciudades estadounidenses con más de 1,000,000 de habitantes? ¿Por qué?
3. ¿Has oído alguna vez la expresión: "Contemos las narices". ¿Alude a alguna situación en que haya una correspondencia uno a uno? Si es así, ¿cuál es ésa?
4. Muestra que hay una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números cardinales pares y el conjunto de los números cardinales impares.
5. Si el conjunto R está en correspondencia uno a uno con el conjunto S y el conjunto S lo está con el conjunto T, ¿está el conjunto R en correspondencia uno a uno con el conjunto T? ¿Por qué?
6. PROBLEMA DIFICIL. Establece una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números cardinales pares y el conjunto de todos los números cardinales.

Ahora veremos cómo podemos utilizar la idea de correspondencia biunívoca en geometría.

<u>Ejercicios [illegible] para analizar en clase</u>

Dibuja una figura, como la que se muestra, a medida que respondes a las preguntas, siguiendo las indicaciones.



1. Dibuja una recta y llámala ℓ.
2. Toma un punto que no esté sobre ℓ y llámalo P.
3. Marca un punto A sobre la recta ℓ.
4. Traza la recta $\overleftrightarrow{PA}$.
   (a) ¿Es $\overleftrightarrow{PA} \cap \ell$ igual al conjunto vacío?
   (b) ¿Tiene el conjunto intersección de $\overleftrightarrow{PA}$ y ℓ un solo elemento? ¿Por qué?
5. Marca otros dos puntos, B y C, sobre ℓ. Traza $\overleftrightarrow{PB}$ y $\overleftrightarrow{PC}$.
   (a) ¿Puedes trazar, por cada uno de estos dos nuevos puntos marcados sobre ℓ, rectas que también pasen por P?
   (b) Sean todas las rectas que intersecan a ℓ y pasan por P los elementos de un conjunto llamado K. ¿Cuántos elementos de K se han dibujado hasta ahora?
   (c) ¿Contiene cada uno de los elementos indicados de K un punto de ℓ?
   (d) ¿Puedes hacer corresponder exactamente cada uno de los elementos indicados de K con un punto indicado de ℓ?
   (e) ¿Piensas que si se trazaran más elementos de K y se marcaran más puntos de ℓ, cada elemento de K podría hacerse corresponder exactamente a un elemento de ℓ?

6. ... puntos ... sobre ... Traza elementos de K que ... corresp... ... puntos. ¿Es cierto que para cada elemento (... o no) de K, hay un elemento correspondiente de ℓ ... para cada elemento de ... hay un elemento correspondiente de K?
7. Dibuja un elemento de K.
(a) ¿Interseca a ℓ?
(b) ¿En cuántos puntos interseca a ℓ?
8. Copia y completa las siguientes proposiciones de manera que resulten ciertas:
A un(a) ________ por P que interseca a ℓ corresponde un(a) ________ sobre ℓ, y a un(a) ________ sobre ℓ corresponde un(a) ________ por P que interseca a ℓ. En otras palabras, ... correspondencia uno a uno entre el conjunto K de ... y el conjunto ℓ de puntos.

... estudiado sobre los números y luego sobre geometría ... combinado en una materia conocida con el nombre de "geometría analítica". Se han hecho grandes avances en la ... tecnología como consecuencia de esta combinación. ... cómo se realiza esta asociación de los números ... geometría nos referiremos aún a las ideas de "recta en el ... numérica", "recta numérica" y "correspondencia uno a uno (biunívoca)".

Ejercicios 4-9b

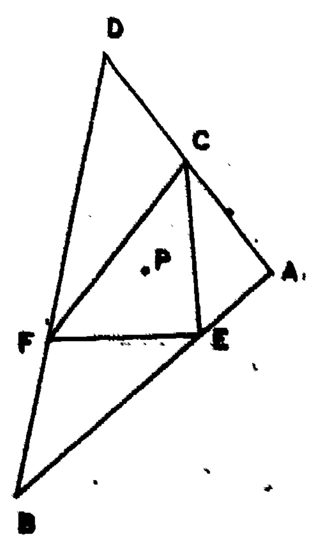
1. Describe una correspondencia biunívoca entre los puntos A, B, C que determinan un triángulo, y los lados de un triángulo. ¿Puedes hacerlo de más de una manera?
2. Dibuja un triángulo con vértices A, B y C. Marca un punto P en el interior del $\triangle ABC$. Sea H el conjunto de todos los rayos de extremo P. Entendemos que los elementos de H están en el plano del $\triangle ABC$. Traza varios rayos de H. ¿Puedes observar alguna correspondencia biunívoca entre H y el $\triangle ABC$? ¿Hay para cada punto de $\triangle ABC$ exactamente un rayo de H que lo contiene? ¿Hay para cada rayo de H exactamente un punto del $\triangle ABC$ que está sobre él?

3. Dibuja un ángulo XYZ con el vértice en Y. Dibuja el segmento $\overline{XZ}$. Imagínate a K como un conjunto de rayos en el plano XYZ con un extremo común, en Y. K es el conjunto de los rayos que no contienen puntos del exterior de $\angle XYZ$. $\overrightarrow{YX}$ y $\overrightarrow{YZ}$ son dos de los muchos elementos de K. Traza otros elementos de K. ¿Se intersecarán con $\overline{XZ}$? ¿Habrá para cada elemento de K un punto correspondiente de $\overline{XZ}$? Marca un punto D en $\overrightarrow{YX}$ y un punto E en $\overrightarrow{YZ}$. Traza $\overline{DE}$. ¿Hay una correspondencia biunívoca análoga entre el conjunto de puntos de $\overline{XZ}$ y el conjunto de puntos de $\overline{DE}$?

*4. Describe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de puntos de la superficie de una bola y el conjunto de los rayos con un extremo común en el interior de la bola.

*5. Describe una correspondencia biunívoca entre un conjunto H de todas las rectas de un plano que pasan por un punto y el conjunto K de todos los planos que pasan por una línea en el espacio. (Piensa en una puerta giratoria y en el piso debajo de la puerta.)

*6. Sea S el conjunto de todos los rayos contenidos en el plano ABD, con extremos en P.



(a) ¿Hay una correspondencia biunívoca entre S y $\triangle ABD$? (V. la figura adjunta.)

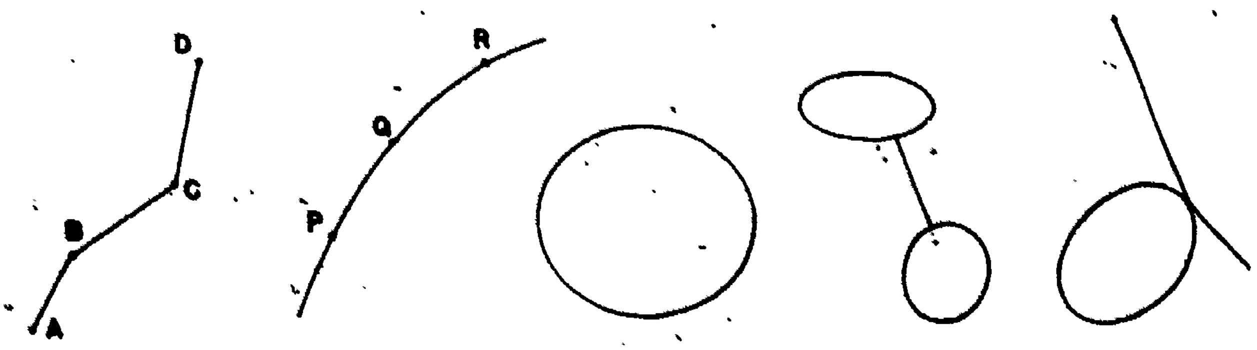
(b) ¿Hay una correspondencia biunívoca entre S y $\triangle FCE$?

(c) ¿Hay una correspondencia biunívoca entre $\triangle ABD$ y $\triangle FCE$? ¿Por qué?

4-10: Curvas simples cerradas

En los diarios y revistas ves frecuentemente dibujos parecidos a las figuras (a) y (b). Estos dibujos representan lo que se llaman líneas curvas. Consideraremos a las curvas como tipos especiales de conjuntos de puntos. A veces se imaginan las curvas como trayectorias que dan vueltas en el espacio. En esta sección, sin embargo, limitamos nuestra atención a las curvas que están contenidas en un plano. Puedes representártelas como figuras que se dibujan en la pizarra o en una hoja de papel.

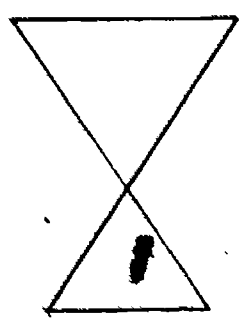
Una línea curva o, simplemente, curva es un conjunto de puntos que se puede representar mediante un trazo hecho con lápiz sin levantarlo del papel. En este sentido los segmentos y los triángulos son líneas curvas, que ya hemos estudiado. Las curvas pueden tener trazos rectos o no tenerlos. En el lenguaje diario usamos el término "curva" en este mismo sentido. Cuando el pitcher, en el béisbol, lanza una curva, la pelota parece ir recta por un momento y luego "quiebra" o "curva".



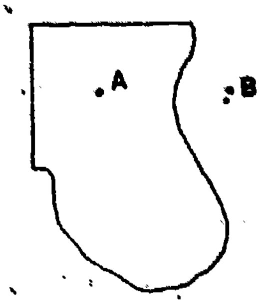
(a) (b) (c) (d) (e)

Un tipo importante de curva es la línea quebrada. Es la reunión de varios segmentos; es decir, consiste en todos los puntos de varios segmentos. La figura (a) representa una línea quebrada. Los puntos A, B, C y D se indican como puntos de la curva. También decimos que la curva contiene o pasa por esos puntos. Todas las figuras subsiguientes, desde (b) hasta (i), también representan curvas. En la figura (b), los puntos P, Q y R se indican sobre la curva. Por supuesto, pensamos que la curva contiene muchos puntos distintos de P, Q y R.

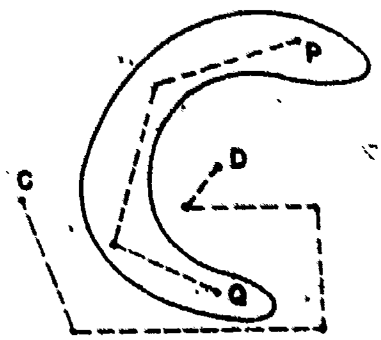
Una curva se llama <u>curva simple cerrada</u> si se la puede representar por una figura trazada de tal manera que su dibujo comienza y termina en el mismo punto. Fuera de este punto, ningún otro se traza dos veces. Las figuras (c), (g), (h) e (i) representan curvas simples cerradas. Las otras figuras de esta sección no representan curvas de esa clase. La figura (j) representa dos curvas simples cerradas. La frontera de un estado como el de Iowa o el de Utah en un mapa corriente representa una curva simple cerrada. Un cerco que encierra un sembrado de maíz sugiere una curva simple cerrada.



(f)



(g)

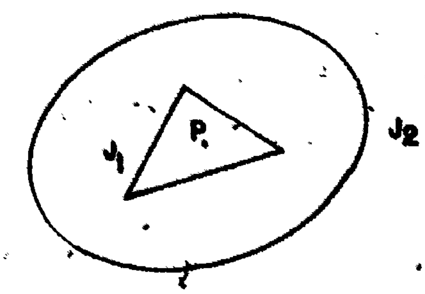


(h)

Los ejemplos que hemos mencionado, incluyendo el de un triángulo, sugieren una propiedad muy importante de las curvas simples cerradas. Toda curva simple cerrada tiene, en el plano, un interior y un exterior. Además, toda curva que contenga un punto del interior y otro del exterior debe intersecar a la curva simple cerrada. Como ejemplo, consideremos una curva cualquiera que contiene los puntos A y B de la figura (g), y trazada en el plano. También dos puntos cualesquiera en el interior (o dos puntos cualesquiera en el exterior) pueden ser unidos por una línea quebrada que no interseque a la curva simple cerrada, como se muestra en la figura (h). Una curva simple cerrada es la frontera de su interior y también de su exterior.

Llamamos <u>región</u> al interior de una curva simple cerrada. Hay otros tipos de conjuntos en el plano que son también regiones. En la figura (j), la porción del plano comprendida entre las dos curvas simples cerradas se llama una región. En general, una región (como conjunto de puntos) no incluye su frontera.

(i)



(j)

Considera la figura (j). La curva simple cerrada (representada por) J_1 está en el interior de la curva simple cerrada J_2. Podemos obtener una correspondencia biunívoca natural entre J_1 y J_2, como sigue. Considera un punto, tal como P, en el interior de J_1. Considera el conjunto de rayos cuyo extremo es P. Cada rayo interseca a cada una de las curvas cerradas J_1 y J_2 en un solo punto. Además, todo punto de J_1 y todo punto de J_2 están, cada uno de ellos, en un único rayo. Un punto de J_1 corresponde a un punto de J_2 si los dos puntos están sobre un mismo rayo de extremo P. Observa que este procedimiento, usando rayos, no determinaría una correspondencia biunívoca si una de las curvas simples cerradas tuviera la forma indicada en la figura (i).

Ejercicios 4-10

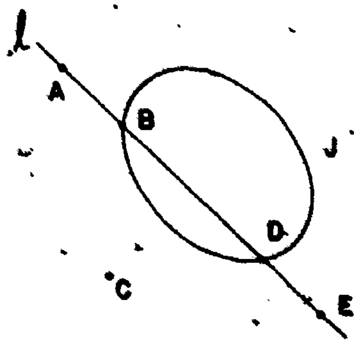
1. Dibuja una figura que represente dos curvas simples cerradas cuya intersección sea exactamente un conjunto de dos puntos. ¿Cuántas curvas simples cerradas están representadas en tu figura?
2. En la figura (j), describe la región comprendida entre las curvas, utilizando los términos intersección, interior y exterior.
3. Dibuja dos triángulos cuya intersección sea un lado de cada uno de ellos. ¿Es la reunión de los otros lados de ambos triángulos una curva simple cerrada? ¿Cuántas curvas simples

cerradas están representadas en tu figura?

4. En un mapa de los Estados Unidos de Norteamérica, ¿representa la reunión de las fronteras de Colorado y Arizona una curva simple cerrada?

5. Imagina que X e Y son chinches que se pueden trasladar a puntos cualesquiera del plano. Indica tres conjuntos de puntos simples, diferentes, en el plano, cada uno de los cuales proporcione una frontera que separe X de Y.

6. La recta ℓ y la curva simple cerrada J están colocadas como se ve en la figura.



(a) ¿Cómo es $J \cap \ell$?

(b) Dibuja una figura y sombrea la intersección del interior de J y el lado C de ℓ.

(c) Describe, usando rayos, el conjunto de puntos de ℓ que no están en el interior de J.

*7. Dibuja dos curvas simples cerradas, una en el interior de otra, de manera que para ningún punto P, los rayos desde P originen una correspondencia biunívoca entre las dos curvas. Observa la figura (i).

*8. Dibuja dos curvas simples cerradas cuyos interiores se intersequen en tres regiones diferentes.

9. PROBLEMA DIFICIL. Explica por qué la intersección de una curva simple cerrada y una recta no puede contener tres puntos si la curva atraviesa la recta en los puntos de intersección.

Capítulo 5

FACTORIZACION Y NUMEROS PRIMOS

5-1. Números primos

En los capítulos precedentes hemos estudiado algunas de las propiedades de los números naturales. Vamos a explicar ahora de qué manera se pueden expresar éstos como productos de otros números naturales. Por ejemplo,

$$6 = 2 \times 3 = 1 \times 2 \times 3 = 1 \times 3 \times 2 = 1 \times 6 = 6 \times 1$$
$$5 = 1 \times 5 = 5 \times 1 = 5 \times 1 \times 1$$
$$12 = 2 \times 2 \times 3 = 4 \times 3 = 1 \times 2 \times 6 = 1 \times 3 \times 4$$

¿Habrá otras maneras de expresar estos números como productos de números naturales? Expresa de varias maneras los siguientes números como productos de números naturales: 15, 18 y 30.

En los productos enumerados anteriormente cuyo valor es seis, vemos que 1, 2, 3 y 6 son divisores exactos de 6. Esto es, si 6 se divide por cualquiera de estos cuatro números, el resto es cero. Igualmente 1 y 5 son los únicos números naturales que son divisores exactos de 5; mientras 1, 2, 3, 4, 6 y 12 son todos divisores exactos de 12. Dos maneras más de decir lo mismo serían:

1. El número 6 es divisible por 1, 2, 3 y 6.
2. El número 6 es un múltiplo de 1, 2, 3 y 6.

Se dice, pues: 5 es divisible por 1 y 5, ó 5 es un múltiplo de 1 y 5; también, 12 es divisible por 1, 2, 3, 4, 6 y 12, ó 12 es un múltiplo de cada uno de los números 1, 2, 3, 4, 6 y 12.

Por otra parte, 12 no es divisible por 5, puesto que si 12 se divide por 5, da por residuo 2. Por una razón semejante, 6 no es divisible por 4.

Desde el punto de vista de esta sección, el número 1 está en una situación particular ya que cada número natural es múltiplo de 1; esto es, todo número natural es divisible por 1. No es cierto que todo número natural sea divisible por 2 (3 no lo es); no todo número natural es divisible por 23 (24 no lo es), ni por 1,976 (5 no lo es).

Todo número natural es múltiplo de 1, como hemos visto.

¿Cuáles son los múltiplos de 2 que son mayores que 2? Veamos una manera de contestar sistemáticamente a esta pregunta. Primero escribe, por ejemplo, los números del 1 al 30, inclusive. El primer múltiplo de 2 mayor que 2 es 4; tacha el 4 y los segundos números de los pares consecutivos. Para recordar, escribe un 2 debajo de cada número que has tachado. La lista entonces se verá de la siguiente manera:

1	2	3	$\cancel{4}_2$	5	$\cancel{6}_2$	7	$\cancel{8}_2$	9	$\cancel{10}_2$	11	$\cancel{12}_2$
13	$\cancel{14}_2$	15	$\cancel{16}_2$	17	$\cancel{18}_2$	19	$\cancel{20}_2$	21	$\cancel{22}_2$	23	$\cancel{24}_2$
25	$\cancel{26}_2$	27	$\cancel{28}_2$	29	$\cancel{30}_2$						

No taches el 2 ni escribas otro 2 debajo de él porque es el número cuyos múltiplos estamos considerando. Los números de la lista que no se han tachado son 1, 2 y los números menores de 31 que no son múltiplos de 2.

El segundo paso sería repasar la misma tabla y tachar los múltiplos de 3 que son mayores que 3. Entonces la tabla resultaría así:

1	2	3	$\cancel{4}_2$	5	$\cancel{6}_{2,3}$	7	$\cancel{8}_2$	$\cancel{9}_3$	$\cancel{10}_2$	11	$\cancel{12}_{2,3}$
13	$\cancel{14}_2$	$\cancel{15}_3$	$\cancel{16}_2$	17	$\cancel{18}_{2,3}$	19	$\cancel{20}_2$	$\cancel{21}_3$	$\cancel{22}_2$	23	$\cancel{24}_{2,3}$
25	$\cancel{26}_2$	$\cancel{27}_3$	$\cancel{28}_2$	29	$\cancel{30}_{2,3}$,						

donde se han tachado los terceros números de las ternas consecutivas, empezando con el 6. No se ha tachado el 3 porque es el número cuyos múltiplos estamos buscando. (Algunos de los múltiplos de 3 se habían tachado ya, pues también eran múltiplos de 2.) Con excepción de los números 1, 2 y 3, ninguno de los números no tachados es múltiplo de 2 ni de 3.

Como ejercicio de clase, escribe los números del 1 al 100, inclusive. Primero tacha todos los múltiplos de 2 y 3, excepto 2 y 3, como hemos hecho más arriba. El número 4 y todos los múltiplos de 4 se han tachado antes, puesto que cualquier múltiplo de 4 es también un múltiplo de 2. El próximo número que no se ha tachado es el 5. Como en los casos anteriores, tacha los quintos números después del 5 (esto es empezando con el 10), y escribe un 5 debajo de cada número tachado. Finalmente tacha los múltiplos de 7 y 11, que son mayores que 7 y 11, respectivamente, marcándolos como en los pasos anteriores. ¿Tachaste alguno de los números no tachados antes cuando consideraste los múltiplos de 11? ¿Tacharías alguno de los números no tachados si consideraras los múltiplos de 12? ¿De 13?

Por la manera como se construyó la tabla, cada número tachado es múltiplo de un número menor diferente de 1. Estos números se llaman <u>números compuestos</u>.

<u>Definición</u>. Un número compuesto es un número natural divisible por otro número natural menor y diferente de 1.

La tabla que has construido, tachando los números, se llama la "Criba de Eratóstenes" para los primeros 100 números. Se llama "criba" porque en ella se han cribado todos los números compuestos menores que 100. Nota que cuando tachaste los múltiplos de 2 y 3, menores que 31, quedó intacto el número compuesto 25. Sin embargo, eliminaste el número 25 en el tercer paso, al tachar los múltiplos de 5. Igualmente, el número 49 no se eliminó en la Criba de Eratóstenes hasta que tachaste los múltiplos de 7.

A excepción del número 1, los números de la Criba de Eratóstenes que no se han tachado se llaman <u>números primos</u>.

<u>Definición</u>. Un número primo es un número natural, distinto del 1, que es divisible solamente por sí mismo y por 1.

La Criba de Eratóstenes es un buen instrumento para encontrar una lista de todos los números primos menores que un número dado, ya que elimina los números compuestos. Los números compuestos se han cribado. Los números primos permanecen sin tachar. ¿Por qué son primos los números que permanecen sin tachar?

El número 1 <u>no</u> está incluido en el conjunto de primos, en parte porque solamente es divisible por sí mismo. Más adelante encontraremos una razón mucho más importante para esto.

Ejercicios 5-1

1. (a) Enumera los números primos menores que 100.
   (b) Ahora enumera los números primos que hay entre 100 y 130, pero mayores que 100.
2. (a) ¿Cuántos números primos hay menores que 50?
   (b) ¿Cuántos números primos hay menores que 100?
   (c) ¿Cuántos números primos hay menores que 130?

Resuelve los problemas 3, 4 y 5, primero sin usar la Criba de Eratóstenes, y después usándola para comprobar los resultados.

3. Enumera todos los múltiplos de 5 menores que 61.
4. Enumera el conjunto de múltiplos de 7 menores que 50.
5. Enumera el conjunto de números menores de 100 que son múltiplos de 3 y de 5.
6. En la siguiente tabla, los números de la fila superior representan valores de a y los de la primera columna de la izquierda representan valores de b. En el caso de que a sea divisible por b, escribe los valores de $\frac{a}{b}$ en la fila y columna que corresponde a esos números. Si a no es divisible por b, escribe "no" en la fila y columna correspondientes.

	a=12	14	17	18	20	25	27
b=1							
b=2							
b=3							
b=4							
b=5							
b=6							
b=7							

7. Expresa cada uno de los siguientes números naturales como un producto de dos números naturales menores, o indica que es imposible hacerlo:

(a) 12	(d) 7	(g) 35	(j) 42	(m) 82
(b) 36	(e) 8	(h) 5	(k) 6	(n) 95
(c) 31	(f) 11	(i) 39	(l) 41	

8. (a) ¿Por qué números es divisible 24?
   (b) ¿De qué números es múltiplo el número 24?
   (c) ¿Son los dos conjuntos de números que se han encontrado en a y b los mismos? ¿Por qué sí o por qué no?
9. Escribe 12 de todas las maneras posibles como un producto de números naturales mayores que 1.
10. Enumera los pares de números primos menores que 100 cuya diferencia es 2. ¿Cuántos pares hay? Dos números que forman uno de tales pares se llaman <u>primos gemelos</u>.
11. Expresa todo número par comprendido entre 4 y 22 como una suma de dos números primos. (Recuerda que se llama número par a todo número divisible por 2.) La mayoría de los matemáticos creen que todo número par mayor que 2 es la suma de dos números primos, pero nadie ha podido demostrarlo.
12. ¿Hay tres números que puedan llamarse primos triples?
13. (a) Traza los números del 1 al 50 en la recta numérica.
    (b) Empezando con el 1, subraya un numeral sí y otro no.
    (c) Encierra en un círculo los numerales correspondientes a los números primos.
    (d) ¿Tuviste que encerrar en un círculo algunos de los numerales que no estaban subrayados? Si es así, escribe todos estos numerales.
14. ¿Cuál es la intersección del conjunto de los números primos y el de los números impares menores que 30?

5-2. <u>Factores</u>

La palabra "factor" se usa frecuentemente en matemáticas. Aunque el término pueda parecer nuevo, la idea no lo es. Sabemos que $5 \times 2 = 10$. En vez de llamar a uno de los números el multiplicando y al otro el multiplicador, les damos a ambos el mismo nombre: <u>factor</u>. Así, 5 y 2 son factores de 10; 6 y 7 son factores de 42, ya que $6 \times 7 = 42$. También, $42 = 2 \times 3 \times 7$; así 2, 3 y 7 son factores de 42.

<u>Ejemplo 1.</u> Escribe 12 como producto de factores.

$$12 = 1 \times 12$$
$$\text{ó } 12 = 2 \times 6$$
$$\text{ó } 12 = 3 \times 4$$
$$\text{ó } 12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$$

Cuando decimos "los factores" queremos decir "todos los factores" de un número. Por ejemplo, el número 6 tiene cuatro factores: 1, 2, 3 y 6. El número uno es factor de todo número, y todo número es factor de sí mismo.

<u>Ejemplo 2.</u> Halla el conjunto de los factores de 20. El conjunto de los factores de 20 es {1, 2, 4, 5, 10, 20}.

La idea de los factores está asociada a la multiplicación. En términos matemáticos, definimos factor de la siguiente manera:

<u>Definición.</u> Si a, b y c son números cardinales, y si $ac = b$, entonces el número a se llama factor de b. (En estas condiciones, c también es un factor de b.)

Usando los términos de la Sección 5-1 decimos que 3 es factor de 12 porque 12 es divisible por 3. En los símbolos de la definición, vemos que, si b es divisible por a, el número a es factor de b.

El número 1 no tiene más factor que él mismo. Todo número primo tiene exactamente dos factores, él mismo y 1. ¿Cuántos factores tiene un número compuesto?

Considera el número 24. Se puede escribir así, 4×6. Ambos, 4 y 6, son números compuestos ya que se pueden escribir como productos de números naturales menores: $4 = 2 \times 2$ y $6 = 2 \times 3$. Así, $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$. Sin embargo, 2 y 3 son números primos ya que no pueden expresarse como productos de números menores. No podemos seguir más aplicando este procedimiento y, por tanto, decimos que $2 \times 2 \times 2 \times 3$ es una factorización completa de 24.

<u>Definición.</u> Si un número natural está expresado como producto de números primos, esta expresión se llama una <u>factorización completa</u> del número dado.

Ejemplo 1. [illegible] completa de 20.

[illegible] factorización completa de 20 [illegible] que [illegible] primo, pero [illegible] $2^2 \times$ [illegible] son factorizaciones [illegible]. La factorización más [illegible] y completa de [illegible].

Ejemplo 2. [illegible] factorización completa de 72.

[illegible]

Método II

[illegible] las divisiones repetidas

2	72
2	36
2	18
3	9
	3

[illegible],

$72 = 2^3 \times 3^2$

Se [illegible] que en ambos ejemplos, los [illegible] los últimos productos son números primos. [illegible] los factores de 20 y 72 (tales como [illegible] completa final. Es conveniente, [illegible] siempre que sea posible.

[illegible] también una factorización completa de 20, pero [illegible] $2 \times$ [illegible], salvo el orden de los factores. [illegible] la factorización de 72, $2^2 \times 3^2 \times 2$ es la misma [illegible], salvo el orden de los factores. En efecto, [illegible] de los números naturales es la de [illegible] escribir una factorización completa de todo número natural, salvo el orden en que aparecen los factores primos. A esta propiedad se le da un nombre especial:

La propiedad de la factorización única de los números naturales:

Todo número natural mayor que 1 puede ser descompuesto en factores primos [illegible], salvo el orden de estos factores.

[illegible] palabra "único", empleada en este sentido, no [illegible] decir que hay solamente una factorización completa, [illegible] el orden de los factores. Se podría decir que el edificio "Empire State" es único porque no hay otro edificio idéntico a él.

[illegible] razón para excluir el 1 del conjunto de los números primos. Si hubiéramos considerado el 1 como número primo, [illegible] podido expresarse como un producto de números primos [illegible] maneras diferentes: [illegible] Entonces el producto no sería único [illegible] orden de los factores.

Ejercicios -2

1. [illegible] factores de cada uno de los siguientes números:
   (a) [illegible] (c) [illegible] (e) 27 (g) 11
   (b) [illegible] (d) [illegible] (f) 24
2. [illegible] los números siguientes de tantas maneras como sea posible, [illegible] factores cada vez. Debido a la propiedad conmutativa, [illegible] no es distinto [illegible].
   (a) [illegible] (c) [illegible] (e) [illegible] (g) 72
   (b) [illegible] (d) 100 (f) [illegible] (h) 81
3. [illegible] factorización completa de:
   (a) [illegible] (c) [illegible] (e) [illegible] (g) 15
   (b) [illegible] (d) 50 (f) [illegible]
4. [illegible] definición de factor, ¿es cero factor de [illegible]? ¿Es [illegible] factor de cero? Explica tus respuestas.
5. (a) ¿Cuáles son los factores de 20 que no aparecen en una factorización completa de 20?
   (b) ¿Cuáles son los factores de 72 que no aparecen en una factorización completa de 72?
6. Halla una factorización completa de:
   (a) [illegible] (d) 500 (g) 311 (j) 323
   (b) [illegible] (e) [illegible] (h) 1,000
   (c) [illegible] (f) [illegible] (i) 301

Definición. Si un número cardinal es divisible por dos, se llama número par. Si un número cardinal no es divisible por dos, se llama número impar.

7. Determina si [illegible] siguientes números son pares o impares:

(a) [illegible] (f) 3 × 2 × [illegible]

(b) [illegible] (g) 12[illegible] − 57[illegible]

(c) [illegible] (h) 3 × 3 × 7

(d) [illegible] (i) 3 · (4 + 7)

(e) [illegible] (j) [illegible] · (9 + 13)

8. Clasifica [illegible] par [illegible] impar cada uno de los números siguientes:

(a) 11_{tres} (c) 33_{cinco}

(b) [illegible] (d) 101_{dos}

9. [illegible] del problema 8, ¿dirías que la divisibilidad es una propiedad de un numeral o una propiedad de un número? Explica tu respuesta.

*10. Copia [illegible] para el número natural N y [illegible] N = 30.

N	[illegible]	Número de factores	Suma de factores
[illegible]	[illegible]	1	1
[illegible]	[illegible]	2	3
[illegible]	[illegible]	2	4
[illegible]	[illegible]	3	7
[illegible]	[illegible]	2	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	12
[illegible]	[illegible]	2	8
[illegible]	[illegible]	4	15

(a) [illegible] números representados por N, en esta tabla, tienen [illegible] factores?

(b) [illegible] N tienen exactamente tres factores?

(c) [illegible] N = p[illegible] (donde p es un número primo), ¿cuántos factores tienen N?

(d) [illegible] p[illegible] (donde p y [illegible] son numeros primos diferentes), [illegible] factores tiene N? ¿Cuál es la suma de sus factores?

(e) Si $N = 2^k$ (donde k es un número natural), ¿cuántos factores tiene N?
(f) Si $N = 3^k$ (donde k es un número natural), ¿cuántos factores tiene N?
(g) Si $N = p^k$ (donde p es un número primo y k es un número natural), ¿cuántos factores tiene N?
(h) ¿Qué números tienen $2N$ por suma de sus factores? Estos números se llaman números perfectos. No se sabe cuántos números perfectos hay, ni si hay números perfectos impares.

[illegible]-3. Divisibilidad

Para encontrar los factores de un número, podemos siempre ensayar con varios números hasta acertar, pero es mucho más fácil poder apreciar a simple vista si el número tiene cierto factor dado. Según lo estudiado en el Capítulo 2, o por la Criba de Eratóstenes, nos damos cuenta de que un número escrito en el sistema decimal es par si el último dígito es par. Por lo menos esto es cierto, dentro de los límites de la criba que hemos construido. Así:

Un número natural escrito en el sistema decimal es par, si su último dígito es uno de los números 0, 2, 4, 6 y 8. Es impar si su último dígito no es uno de estos números.

Tratemos de ver por qué esto es así. Para ello, recuerda cómo encontramos los múltiplos de 2 cuando empezamos a construir la Criba de Eratóstenes. Empezamos con ese número y le añadimos 2 repetidas veces. En el modelo que utilizamos, los últimos dígitos se repetían así: 2,4,6,8,0,2,4,6,8,0,... . Esto, que se extendería a lo largo de toda la tabla, muestra que los números pares son aquellos cuyo último dígito es uno de los cinco números siguientes: 2, 4, 6, 8 ó 0.

En el problema 4 de esta sección se te pedirá que empieces con el 5 y añadas 5 repetidas veces, para mostrar lo siguiente:

Un número natural expresado en el sistema decimal es divisible por 5 si su último dígito es 0 o 5. De lo contrario no es divisible por 5.

¿Es similar el criterio para la divisibilidad por 3? ¿Podemos establecerlo con sólo mirar el último dígito? Los diez primeros múltiplos de 3 son 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24 y 27.

Todos los dígitos últimos posibles, o sea 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, aparecen en esa lista de los primeros diez múltiplos de 3. Por otra parte, los números que siguen no son divisibles por 3, aunque aquí también aparecen todos los posibles dígitos últimos:

4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28 y 31.

No podemos saber, pues, si un número es divisible por 3 con sólo mirar al último dígito.

Pero sumemos los dígitos de los múltiplos de 3. Para el 12 tenemos 1 + 2 = 3; para el 15 tenemos 1 + 5 = 6; para el 18 tenemos 1 + 8 = 9. Podemos entonces formar la tabla siguiente:

Múltiplo de 3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39
Suma de dígitos	0	3	6	9	3	6	9	3	6	9	3	6	9	12

Múltiplo de 3	42	45	48	51	54	57	60	63	66	69	72
Suma de dígitos	6	9	12	6	9	12	6	9	12	15	9

¿Puedes enunciar una propiedad que parezca cierta acerca de la suma de los dígitos para todos los múltiplos de 3? Verás que en cada caso la suma de los dígitos es divisible por 3. Además, si añades los dígitos de cualquier número que no sea divisible por 3 (considera el 25 en el que la suma de los dígitos es 7), la suma de los dígitos no es divisible por 3. ¿Te das cuenta de por qué esto se aplica a todos los números? Mira el problema 3 de esta sección.

Además puedes notar en la tabla que la tercera, sexta, novena, etc., sumas de dígitos, son divisibles por 9, y que el tercero, sexto, noveno, etc., múltiplos de 3 son divisibles por 9. Por lo tanto, tenemos la siguiente prueba para la divisibilidad por 9.

<u>Un número es divisible por 9 si la suma de sus dígitos es divisible por 9. De lo contrario el número no es divisible por 9.</u>

Son algo más complicadas las pruebas de la divisibilidad por 11 y 13 y se estudiarán en un libro suplementario sobre divisibilidad.

Apliquemos lo que hemos aprendido acerca de la divisibilidad a unos cuantos ejemplos:

Ejemplo 1. Determina una factorización completa de 232. Puesto que el número dado tiene 2 como su último dígito, es par y tiene 2 como factor. Entonces $232 = 2 \times 116$. A su vez 116 tiene 2 como factor y obtenemos $232 = 2^2 \times 58$. También 58 es par, luego: $232 = 2^3 \times 29$. Finalmente, 29 es un número primo según se ve en nuestra tabla de la Criba de Eratóstenes, o por comprobación con los factores primos menores que 29: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 y 23. Posiblemente te des cuenta de por qué sólo es necesario probar 2, 3 y 5.

Una manera de tabular la factorización completa es la siguiente:

232	116	58	29
2	2	2	29

donde 2 es el primer factor, y 116 el primer cociente; luego 2 es un segundo factor de 116, y 58 el segundo cociente, etc. Tenemos, entonces, una factorización completa en la segunda línea.

Ejemplo 2. Determina una factorización completa de 573. En este caso el último dígito es impar y, por lo tanto, 2 no es un factor. Pero la suma de los dígitos es 15, la cual es divisible por 3. Por lo tanto 3 es un factor de 573 y, dividiendo, tenemos $573 = 3 \times 191$. Según nuestras pruebas, 2, 3 y 5 no son factores de 191. Ensayando, encontramos que 7, 11 y 13 no son factores y, por consiguiente, 191 es un número primo. ¿Por qué no es necesario probar algunos factores primos mayores que 13? Resulta, pues, que $573 = 3 \times 191$ es la factorización completa.

Ejemplo 3. Determina una factorización completa de 539. Nuestras pruebas muestran que ninguno de los números 2, 3 ó 5 es factor. Si probamos con el número 7, vemos que $539 = 7 \times 77 = 7^2 \times 11$, que es una factorización completa.

Es importante notar que las pruebas para la divisibilidad que se han dado en esta sección, valen sólo cuando el número está escrito en el sistema decimal. Por ejemplo, el número 21 en el sistema decimal se escribe 30_{siete} en el sistema de base siete. Esté número 30_{siete} no es par, a pesar de que su último dígito es cero. Sin embargo, sabemos que 30_{siete} quiere decir (3 × siete) + 0, y, puesto que el último dígito es cero, sabemos que el número es divisible por siete. Si un número está escrito en base siete, es muy fácil darse cuenta de si es divisible por siete o no; basta fijarse en si el último dígito es cero.

La propiedad de que un número sea factor de otro no depende de la manera como esté escrito el número; por ejemplo, siete es siempre un factor de veintiuno, no importa cómo esté escrito. Pero las pruebas de divisibilidad que hemos dado aquí sí dependen del sistema de numeración en que el número está escrito.

Ejercicios 5-3

1. Busca el menor factor primo de cada uno de los siguientes números:

   (a) 11[illegible] (c) 321 (e) 539
   (b) 13[illegible] (d) 484 (f) 121

2. Busca una factorización completa de cada uno de los siguientes números:

   (a) 3[illegible] (d) 98 (g) 378 (j) 729
   (b) [illegible] (e) 180 (h) 432 (k) 1,098
   (c) [illegible]1 (f) 258 (i) 576 (l) 2,324

3. Observa la lista de múltiplos de 3. Yendo del 9 al 12, el dígito de las unidades disminuye de 9 a 2, y el dígito de las decenas aumenta de 0 a 1; por lo tanto, la suma de los dígitos disminuye en 7 - 1 unidades, o sea una disminución neta de 6 unidades. De modo parecido, yendo del 18 al 21, el primer dígito aumenta en 1 y el segundo disminuye en 7 unidades. ¿Es esto cierto siempre que el dígito de las decenas aumenta en 1 unidad? ¿Qué ocurre cuando se pasa del 99 al 102, del 999 al 1,002, etc.? ¿Puedes concluir, según esto, que la suma de los dígitos de un múltiplo de 3 siempre da otro múltiplo de 3?

4. Demuestra que la prueba dada de la divisibilidad por 5 siempre resulta bien.

5. Enumera los múltiplos de 9 y mira si puedes mostrar la prueba de la divisibilidad por 9.
6. ¿Puedes dar una prueba de divisibilidad por 6 en el sistema decimal?
7. ¿Puedes dar una prueba de divisibilidad por 15 en el sistema decimal?
8. ¿Cuáles de los números siguientes son divisibles por 2?
(a) $1,111_{diez}$ (b) 1111_{siete} (c) 1111_{seis} (d) 111_{tres}
9. Supone que un número esté escrito en el sistema de base siete. ¿Es divisible por diez si su último dígito es cero? ¿Es divisible por tres si la suma de sus dígitos es divisible por tres?
*10. Contesta las preguntas anteriores para un sistema de numeración en base doce.
*11. Halla una prueba de divisibilidad por 6 en un sistema de numeración en base siete.
*12. Da una prueba de divisibilidad por 4 en el sistema decimal.

5-4. Máximo común divisor

Considera los números 10 y 12. Observa que ambos son números pares. Desde luego, son divisibles por 2, o podemos decir que 10 y 12 son múltiplos de 2. Por el hecho de que 2 es un factor de 10 y también un factor de 12, decimos que 2 es un "factor común" o un "divisor común" de 10 y 12.

Todos los números cardinales son múltiplos de 1. Así, 1 es un factor común de los elementos de cualquier conjunto de números cardinales. Por lo tanto, cuando buscamos factores comunes, nos referimos generalmente a números distintos de 1.

¿Qué otro factor, además de 1, es común a 12 y 15? ¿Es 2 un factor común? 2 no es un factor de 15, porque 15 es un número impar. Por consiguiente, es imposible que 2 sea un factor común de 12 y 15. Sin embargo, 12 y 15 son ambos múltiplos de 3. Luego, 3 es un factor común de 12 y 15.

¿Tienen algún factor común los números 12 y 30? Escribiendo el conjunto de factores de 12 y el de factores de 30, como se indica a la derecha,

El conjunto de factores de 12 es
$\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

El conjunto de factores de 30 es
$\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

se ve que hay varios factores comunes. Los números 1, 2, 3 y 6 son los factores comunes de 12 y 30.

¿Tienen algún factor común los números 10 y 21? Escribiendo el conjunto de factores de 10 y el de factores de 21, como se indica a la derecha,

El conjunto de factores de 10 es
$\{1, 2, 5, 10\}$

El conjunto de factores de 21 es
$\{1, 3, 7, 21\}$

vemos que 10 y 21 no tienen más factores en común que el 1.

Vemos así que en todo conjunto de números cardinales los números tienen el factor común 1. En algunos hay otro factor común además del 1, y en otros hay varios factores comunes.

Es útil, por varias razones, reconocer los factores comunes. Ya has usado la idea de factor común al reducir fracciones. Por ejemplo, al reducir $\frac{10}{12}$ a $\frac{5}{6}$ usas el factor común 2 de 10 y 12.

En $\frac{12}{30}$ se observa que 2 es un factor común de 12 y 30. El resultado de cancelarlo es $\frac{6}{15}$. Sin embargo, vemos que en $\frac{6}{15}$ hay todavía el factor común 3, de 6 y 15. Luego $\frac{6}{15}$ se puede reducir a $\frac{2}{5}$.

¿Se puede reducir $\frac{12}{30}$ a $\frac{2}{5}$ usando un solo número en vez de usar primero 2 y después 3? Quizá te hayas preguntado por qué reducen $\frac{12}{30}$ usando 2 y 3, cuando sería mucho más rápido usar 6.

¿Es 6 un factor común de 12 y 30? Refiriéndonos a la lista anterior de estos factores, vemos que 12 y 30 tienen los factores comunes 1, 2, 3 y 6. ¿En qué se diferencia el 6 de los otros factores comunes? Es el mayor de los factores o divisores comunes de 12 y 30. Tal factor se llama el "mayor factor común" o, más frecuentemente, el "máximo común divisor" de esos números.

Definición. El <u>máximo común divisor</u> de dos números cardinales es el mayor número cardinal que es factor de cada uno de ellos.

Generalmente, el máximo común divisor es más útil en matemáticas que otros factores comunes. Por lo tanto, nos interesa mucho.

Probemos otro ejemplo. Supongamos que queremos encontrar el máximo común divisor de 12 y 18. Podríamos escribir el conjunto de factores de cada uno de ellos:

El conjunto de factores de 12 es {1, 2, 3, 4, 6, 12}.

El conjunto de factores de 18 es {1, 2, 3, 6, 9, 18}.

El conjunto de factores comunes de 12 y 18 es {1, 2, 3, 6}. El elemento mayor del conjunto es 6. Por consiguiente, 6 es el máximo común divisor de 12 y 18.

De igual modo, supongamos que queremos hallar el máximo común divisor de 24 y 60. Escribiendo los factores de cada uno, tenemos:

El conjunto de factores de 24 es {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}.

El conjunto de factores de 60 es {1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60}.

El conjunto de factores comunes es {1, 2, 3, 4, 6, 12}. El mayor de estos factores es el 12. Por tanto, 12 es el máximo común divisor de 24 y 60.

<u>Ejercicios 5-4</u>

1. Escribe el conjunto de todos los factores de cada uno de los números siguientes. Enuméralos cuidadosamente porque tendrás que usar estos conjuntos para resolver el problema que sigue.

   (a) 6 (c) 12 (e) 16

   (b) 8 (d) 15 (f) 21

2. Usando las respuestas al problema anterior, escribe el conjunto de factores comunes en cada uno de los casos siguientes:

   (a) 6, 8 (c) 12, 15 (e) 12, 15, 21

   (b) 6, 12 (d) 6, 8, 12 (f) 8, 12, 16

3. Escribe el conjunto de todos los factores de cada uno de los números siguientes:

(a) 19 (c) 36 (e) 45

(b) 28 (d) 40 (f) 72

4. Usando las respuestas a los problemas anteriores 1 y 3, escribe el conjunto de factores comunes de cada uno de los números siguientes:

(a) 19, 28 (c) 28, 40 (e) 40, 72

(b) [illegible] (d) 36, 45 (f) 19, 36, 45

5. Usando las respuestas a los problemas 2 y 4, de más arriba, escribe el máximo común divisor en cada uno de los siguientes casos:

(a) [illegible] (c) 28, 40 (e) 40, 72

(b) [illegible] (d) 36, 45 (f) 8, 12, 16, 36

6. Halla el máximo común divisor en cada uno de los casos siguientes:

(a) [illegible] (e) 32, 48 (i) 15, 30, 45

(b) [illegible] (f) 15, 30, 36 (j) 20, 50, 100

(c) [illegible] (g) 12, 24, 48

(d) [illegible] (h) 40, 48, 72

7. (a) ¿Cuál es el máximo común divisor de 6 y 6?

(b) ¿Cuál es el máximo común divisor de 29 y 29?

(c) ¿Cuál es el máximo común divisor de a y a, donde a es cualquier número natural?

8. (a) ¿Cuál es el máximo común divisor de 1 y 6?

(b) ¿Cuál es el máximo común divisor de 1 y 29?

(c) ¿Cuál es el máximo común divisor de 1 y a, donde a representa cualquier número cardinal?

9. Supon que a y b representan dos números cardinales distintos, donde $a < b$.

(a) ¿Tendrán a y b siempre un factor común? Si es así, ¿cuál es ese factor?

(b) Si c representa un factor común de a y b, ¿puede ser $c = a$? Si es así, da un ejemplo.

(c) ¿Puede ser $c = b$? Si es así, da un ejemplo.

10. Supon que 1 es el máximo común divisor de tres números.

(a) ¿Debe ser alguno de estos tres números un número primo? Si no es así, escribe un conjunto de tres números compuestos cuyo máximo común divisor sea 1.

(f) ¿Pueden tener dos de los números un máximo común divisor mayor que 1? Si es así, da un ejemplo.

11. Sea A el conjunto de todos los factores de 18. Sea B el conjunto de todos los factores de 42.
   (a) Escribe el conjunto de los elementos de A.
   (b) Escribe el conjunto de los elementos de B.
   (c) ¿Cuál es el conjunto intersección de los conjuntos A y B?
   (d) ¿Cuáles son los factores comunes de 18 y 42?
   (e) ¿Qué relación hay entre las respuestas (c) y (d)?

12. Si C es el conjunto de los factores de 30 y D es el conjunto de los factores de [illegible]1, ¿cuál es el conjunto intersección de los conjuntos C y D?

13. Si E es el conjunto de los factores de 39 y G el conjunto de los factores de [illegible]2, ¿cuál es el conjunto intersección de E y G?

14. Al hallar el máximo común divisor de un conjunto de números, es molesto, a veces, escribir todos los factores. Trata de encontrar una manera más rápida para obtener el máximo común divisor. Supónte que vas a encontrar el mayor factor común de 36 y 45.
   (a) Escribe factorizaciones completas de 36 y 45. (Es decir, enumera todos los factores primos de 36 y de 45.)

   Por ejemplo, $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$
   $45 = ? \cdot ? \cdot ? \quad = ? \cdot ?$
   (b) ¿Cuál es el máximo común divisor de 36 y 45?
   (c) Compara las listas de factores primos de 36 y 45 y encuentra el máximo común divisor de 36 y 45. ¿Puedes buscar una manera más rápida de obtener el máximo común divisor?

15. (a) Escribe una factorización completa de 18 y de 90.
   (b) ¿Cuál es el máximo común divisor de 18 y 90?

16. Factoriza completamente cada número en los conjuntos siguientes y halla el máximo común divisor para cada conjunto:

(a) {24, [illegible]} •(f) {42, 105, 147}

•(b) {3[illegible], [illegible]} •(g) {1[illegible]5, 234}

(c) {72, [illegible]} •(h) {406, 1,173}

(d) {2[illegible], [illegible], 12[illegible]} •(i) {[illegible],040, 2,184}

(e) {24, [illegible]0, 84}

*17. (a) ¿Cuál es el máximo común divisor de 0 y 6?

(b) ¿Cuál es el menor factor común de 0 y 6?

(c) ¿Cuál es el menor factor común para dos números cardinales cualesquiera?

*18. Has aprendido las operaciones con números cardinales: suma, resta, multiplicación y división. En esta sección hemos estudiado la manera de hallar el máximo común divisor, cuya abreviatura es m.c.d. Usemos en este problema el símbolo "Δ" para indicar la operación de hallar el m.c.d. Para números cardinales cualesquiera, a, b y c, sea

$a \Delta b$ = m.c.d. de a y b

o $a \Delta c$ = m.c.d. de a y c

Por ejemplo,

$$12 \Delta 18 = 6$$

$$9 \Delta 15 = 3$$

(a) ¿Es cerrado el conjunto de los números cardinales respecto de la operación Δ?

(b) ¿Es conmutativa la operación Δ? Es decir, ¿es $a \Delta b = b \Delta a$?

(c) ¿Es asociativa la operación Δ? Es decir, ¿es $a \Delta (b \Delta c) = (a \Delta b) \Delta c$?

5-6. Residuos en la división

Otra manera de hallar el máximo común divisor es usar una relación entre las distintas etapas del procedimiento de división. Para comprender este método revisemos el procedimiento de la división.

La pregunta "¿Cuál es el resultado de dividir 16 por 5?" se puede transformar en "¿Cuántos cincos contiene el número 16?". Podemos hallar la respuesta utilizando las restas repetidas, como se muestra a la derecha. Contando el número de veces que se ha restado 5, obtenemos como resultado 3 con un residuo de 1. ¿Es $16 = (5 \times 3) + 1$?

$$\begin{array}{r} 16 \\ -\underline{5} \\ 11 \\ -\underline{5} \\ 6 \\ -\underline{5} \\ 1 \end{array}$$

La manera corriente de hallar la solución de este problema de división se expone en seguida:

$$\begin{array}{r} 3 \\ 5 \overline{)16} \\ \underline{15} \\ 1 \end{array} \quad \text{Residuo } 1$$

Para comprobar la solución usamos la idea siguiente:

$$16 = (5 \times 3) + 1$$

En el problema anterior de división, el número 16 se llama <u>dividendo</u>, 5 es el <u>divisor</u>, 3 es el <u>cociente</u> y 1 es el <u>residuo</u> o <u>resto</u>.

Probemos otro ejemplo. Dividamos 253 por 25.

$$\begin{array}{r} 10 \\ 25 \overline{)253} \\ \underline{25} \\ 3 \end{array} \quad \text{Residuo } 3$$

¿Es $253 = (25 \times 10) + 3$?

En general, para cualquier problema de división:

dividendo = (divisor × cociente) + residuo

Usando símbolos matemáticos a, b, q y R, donde

"a" representa el dividendo,

"b" representa el divisor,

"q" representa el cociente,

"R" representa el residuo,

esta relación de la división se puede expresar como sigue:

$$a = (b \cdot q) + R$$

Considera el ejemplo siguiente de división:

$$\begin{array}{r} 24 \\ 25 \overline{)623} \\ \underline{50} \\ 123 \\ \underline{100} \\ 23 \end{array} \quad \text{Residuo } 23$$

Podemos expresar esta división en la forma siguiente:

$$[illegible] = ([illegible] \times [illegible]) + [illegible]$$

que es de la forma general:

dividendo = (divisor × cociente) + residuo

ó

$$a = (b \cdot q) - R$$

Ejercicios 5-5

1. Copia y completa la tabla siguiente. Hazlo cuidadosamente porque usarás la tabla para contestar a la pregunta 2.

	DIVIDENDO =	(DIVISOR ·	COCIENTE) +	RESIDUO
EJEMPLO	9	4	2	1
(a)	[illegible]	[illegible]	?	0
(b)	[illegible]	3	?	?
(c)	29	[illegible]	3	2
(d)	3[illegible]	5	?	?
(e)	3[illegible]	9	?	?
(f)	[illegible]	13	?	?
(g)	[illegible]	?	5	9
(h)	[illegible]	11	?	0
(i)	[illegible]	[illegible]	3	17
(j)	81	?	?	0

2. Usa la tabla del problema 1 para contestar a las preguntas a, b, y c.
   (a) Compara el divisor y el cociente en cada ejemplo. ¿Tiene siempre uno de éstos mayor valor que el otro?
   (b) Compara el cociente y el dividendo. ¿Cuál tiene mayor valor, si el dividendo y el divisor son ambos números naturales?
   (c) Compara el divisor y el residuo. ¿Cuál tiene siempre mayor valor en cada caso?
   (d) ¿Puede ser cero el dividendo? Si es así, da un ejemplo.

(e) ¿Puede ser cero el dividendo? Si es así, da un ejemplo.
(f) ¿Puede ser cero el cociente? Si es así, da un ejemplo.
(g) ¿Puede ser cero el residuo? Si es así, da un ejemplo.

5. Usando la tabla del problema 4, contesta a las siguientes preguntas:
   (a) ¿Puede cualquier número cardinal aparecer como dividendo? Si no, da un ejemplo.
   (b) ¿Puede cualquier número cardinal aparecer como divisor? Si no, da un ejemplo.
   (c) ¿Puede cualquier número cardinal aparecer como cociente? Si no, da un ejemplo.
   (d) ¿Es el residuo siempre un número cardinal? Explica por qué.

6. Copia y completa la tabla siguiente para la relación
$$a = (b \cdot q) + R$$

	a	b	q	R
(a)	[illegible]	?	?	?
(b)	?	10	9	8
(c)	50	12	?	?
(d)	100	?	?	0
(e)	283	17	?	?
(f)	130	?	25	5

7. Usando la tabla anterior, contesta a las siguientes preguntas:
   (a) ¿Puede R ser mayor que b? Si es así, da un ejemplo.
   (b) ¿Puede q ser mayor que b? Si es así, da un ejemplo.
   (c) ¿Puede R ser mayor que el cociente q? Si es así, da un ejemplo.
   (d) ¿Puede cualquier número cardinal ser un valor posible de b? Explica por qué.
   (e) ¿Puede cualquier número natural ser un valor posible de b? Explica por qué.
   (f) ¿Puede cualquier número cardinal ser un valor posible de a? Explica por qué.

8. Usando la relación fundamental de la división, $a = (b \cdot q) + R$, donde $R < b$, contesta a lo siguiente:

(a) [illegible] el conjunto de todos los resta [illegible] positivos.

(b) [illegible], describe el conjunto de todos los residuos positivos.

(c) Si todos los residuos positivos en un problema de división [illegible] números cardinales menores que 21, ¿cuánto vale b?

(d) [illegible] cuál de los siguientes números es el número de [illegible] residuos positivos?

[illegible] (R - 1).

7. [illegible] la manera de hallar el mayor factor común de dos números. Mediante la relación fundamental [illegible] obtenemos otro método para hacer lo mismo.

Ejemplo [illegible] máximo común divisor de 12 y 8.

(1) Primero, divide el mayor número por el menor: [illegible] residuo [illegible].

(2) [illegible], divide el divisor, [illegible], por el residuo, [illegible]: [illegible] residuo 0.

(3) [illegible] divisor usado que da un residuo [illegible] máximo común divisor de 8 y 12 es [illegible].

Ejemplo [illegible] máximo común divisor de [illegible].

(1) Primero, divide el mayor número, [illegible], por el menor [illegible].

[illegible] residuo 21

(2) [illegible], divide el divisor, [illegible], por el residuo 21.

1 residuo 14

21

14

(3) A continuación, sigue dividiendo el último divisor por el último residuo, hasta que el residuo sea 0.

1 residuo 7   2 residuo 0

14   7) 14

... divisor común es el máximo común divisor."
... es el máximo común divisor de ... y ... .
... que resulta de dividir 14 por 7 el residuo
... . El número ... es el último divisor usado.
Utilizando el método anterior, halla el mayor factor común
para cada uno de los pares de números siguientes:

(a) ... y ...
(b) ... y ...
(c) ... y ...
•(d) 124 y 55...
•(e) 33... y 312
•(f) 1,20... y 1,3...

... Repaso

1. Haz los cálculos indicados. Comprueba todos los resultados que siguen a la pregunta (a), usando la operación inversa.

(a) ... + ... + 20... + 48
(b) ... - ...
(c) ... x ...
(d) ... : ...
(e) ...,... - ...
(f) 308 x 47
(g) 3,...12 ÷ 4
(h) 2,344 x ...01
(i) ...5 - 3...
(j) 5,301 ÷ ...

2. Efectúa las operaciones siguientes. Haz los cálculos y da las respuestas en numerales de base siete.

(a) 21_{siete} + $3..._{siete}$
(b) $..._{siete}$ + $41..._{siete}$
(c) $41..._{siete}$ - 352_{siete}
(d) $30..._{siete}$ - 155_{siete}

3. Enumera el conjunto de todos los factores comunes para cada uno de los siguientes pares de números:

(a) 18, 48
(b) 21, 33
(c) 24, 60
(d) 39, 78

4. Haz una lista, usando numerales en base siete, del conjunto de todos los factores comunes para cada uno de los siguientes pares de números:

(a) 30_{siete}, 50_{siete}
(b) 42_{siete}, 60_{siete}
(c) $6..._{siete}$, $..1_{siete}$
•(d) 100_{siete}, 100_{diez}

5. Haz los cálculos indicados. Comprueba todos los resultados que siguen a la pregunta (a), usando la operación inversa.

(a) [illegible] + [illegible] + [illegible] + 1,[illegible]

(b) [illegible] - [illegible] compruébalo

(c) [illegible] - [illegible] compruébalo

(d) [illegible] × [illegible] compruébalo

(e) [illegible] ÷ [illegible] compruébalo

*(f) [illegible] ÷ [illegible] compruébalo

**(g) [illegible] ÷ [illegible] compruébalo

6. Halla el máximo común divisor de los números dados en cada uno de los ejercicios siguientes:

(a) [illegible], [illegible] (c) 48, 8[illegible]

(b) [illegible], [illegible] (d) 2[illegible], 92

7. Halla el máximo común divisor de los elementos de cada uno de los conjuntos siguientes. Escribe tus respuestas en notación de base siete.

(a) $[illegible]_{siete}$, $[illegible]_{siete}$

(b) $[illegible]_{siete}$, $[illegible]_{siete}$

(c) $[illegible]_{siete}$, $[illegible]_{siete}$

8. Efectúa los cálculos siguientes. Escribe las respuestas después de reducir los términos de las fracciones.

(a) [illegible] + [illegible] (d) $\frac{1[illegible]}{1[illegible]} - \frac{7}{1[illegible]}$

(b) [illegible] × [illegible] (e) $\frac{10}{21} - \frac{5}{21}$

(c) [illegible] ÷ [illegible] (f) $\frac{7}{9} - \frac{4}{9}$

9. Considera tres líneas en un plano.

(a) Si ninguna de estas rectas es paralela a otra, ¿cuántos puntos de intersección tienen las tres rectas? Dibuja una figura para ilustrar tu respuesta.

(b) ¿Cuántos puntos de intersección tienen las tres rectas si dos son paralelas?

(c) ¿Cuántos puntos de intersección tienen tres rectas si todas ellas son paralelas?

10. Imagina que estás en una habitación cuyas paredes, suelo y techo son todos rectangulares.

(a) ¿Cuántos ejemplos puedes encontrar de tres planos representados por puntos, cuál [illegible] que se [illegible] puntos?

(b) ¿Cuántos ejemplos puedes encontrar de que dos de tales planos se intersequen a lo largo de una recta?

11. ¿Cuáles de los siguientes números son divisibles por 2?

(a) [illegible]
(b) [illegible]
(c) [illegible]
(d) 101_{siete}
(e) 101_{ocho}
(f) 101_{diez}

12. ¿Cuáles de los siguientes números son múltiplos de 3?

(a) [illegible]
(b) [illegible]
(c) [illegible]
(d) $1?_{siete}$
(e) 17_{ocho}
(f) $1?_{nueve}$

13. Distribuye [illegible] los siguientes números en una de estas columnas:

Números compuestos | Números primos

(a) [illegible]
(b) [illegible]
(c) [illegible]
(d) [illegible]
(e) [illegible]
(f) 10_{dos}
(g) [illegible]
(h) $?_{nueve}$

14. (a) [illegible] dos tales que la intersección de sus [illegible] en el interior de un triángulo.

(b) [illegible] dos [illegible] cuya reunión sea una recta.

15. Escribe [illegible] números representados a continuación:

(a) [illegible]
(b) [illegible]
(c) $10,_{}0?$
(d) $12?,0?$

16. (a) Escribe el conjunto de todos los posibles residuos de las divisiones en que el divisor es 5.

(b) ¿Cuál es el divisor si el mayor residuo posible en un problema de división es 15?

(c) Escribe el conjunto de todos los factores posibles de 5?. Explica por qué hay solamente dos elementos en este conjunto.

17. Escribe los números representados por las siguientes

palabras, usa numerales:

(a) [illegible]

(b) [illegible] mil.

(c) Veintiún mil veinticuatro.

(d) $\frac{1}{2}$ millones.

*18. (a) ¿Es cerrado el conjunto de los números primos respecto de la [illegible]?

(b) ¿Es cerrado el conjunto de los números primos respecto de la operación de multiplicar?

*19. [illegible], son cuatro números diferentes [illegible] múltiplos de [illegible]. El máximo común divisor [illegible]. Reemplaza, en forma apropiada, [illegible] por uno de los símbolos <, = ó >.

(a) [illegible]

(b) [illegible]

(c) [illegible]

(d) Escribe un número para cada una de esas 4 letras a fin de ilustrar las relaciones empleadas.

*20. [illegible] de la pregunta 19 no son necesariamente [illegible]. Usando los símbolos <, = ó >, [illegible] posiciones indicadas con interrogación:

(a) [illegible]

(b) [illegible]

(c) [illegible] ? b

(d) a ? [illegible]

*21. (a) Los factores de 7 son 1 y [illegible]. ¿Qué propiedad de los [illegible] nos permite escribir 1 × 7 = 7 × 1?

(b) [illegible] completa de 12 es: 12 = 2 × 2 × 3, [illegible]. ¿Cuáles son las dos propiedades de los [illegible] que nos permiten escribir 2 × 2 × 3 = [illegible] × 3 × 2 = 3 × 2 × 2?

(c) Dado un número natural, ¿de cuántas maneras se lo puede descomponer en sus factores primos, si no se tiene en cuenta el orden de los mismos?

*22. Los numerales del 1 al [illegible]0 se han escrito en sendos pedazos de papel y luego mezclados dentro de un sombrero. Se saca del sombrero un trozo de papel y se devuelve al mismo, ¿qué probabilidad hay de que el numeral que se ha sacado representa número divisible por cada uno de los representados por los siguientes numerales?

(a) 10 (b) - (c) 2 (d) 1

*23. Refiriéndonos a la operación de extracción de papeles del problema anterior, ¿cuál es el menor número de trozos de papel que debes extraer del sombrero para estar seguro de tener un numeral divisible por cada uno de los siguientes?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 5

*24. ¿Hay correspondencia biunívoca entre los elementos de los siguientes conjuntos? Si es así, establece la correspondencia.

(a) El conjunto de los números naturales del 1 al 11 y el conjunto de los números cardinales del 0 al 10.

(b) El conjunto de los números impares entre 50 y 80 y el conjunto de los números pares entre 17 y 47.

(c) El conjunto de todos los múltiplos de 3 que son menores que 44 y el conjunto de todos los múltiplos de compreadidos entre 100 y 200.

5-7. Mínimo común múltiplo

Has aprendido ya mucho acerca de los múltiplos de los números:

que todos los números cardinales son múltiplos de 1;

que los números pares {0, 2, 4, 6, ...} son los múltiplos de 2;

que {0, 3, 6, 9, ...} son los múltiplos de 3.

En forma semejante podemos enumerar los múltiplos de cualquier número natural.

El número 2 es un número par, y el número 3 es un número impar. Generalmente no creemos que tales números tengan mucho en común. No obstante, si consideramos el conjunto de múltiplos de 2 y el de múltiplos de 3, vemos que tienen algo en común: algunos de los múltiplos de 2 son también múltiplos de 3. Por ejemplo, 6 es un múltiplo de 2 y de 3. Hay muchos de estos números que son divisibles por 2 y por 3. El conjunto de estos números se escribe como sigue:

$$\{6, 12, 18, 24, 30, \ldots\}$$

Definición. Los números que son múltiplos de más de un número se llaman múltiplos comunes de estos números. "Común" quiere decir que pertenece a más de uno. Así 6 y 12 son múltiplos comunes de 2 y 3.

Veamos otro ejemplo. Enumeremos los múltiplos comunes de 3 y 4. Primero enumeramos los múltiplos de cada uno:

Conjunto de múltiplos de 3: $\{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, \ldots\}$

Conjunto de múltiplos de 4: $\{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, \ldots\}$

Los números que estos conjuntos tienen en común son los múltiplos comunes de 3 y 4. El conjunto de los múltiplos comunes se escribe como sigue:

$$\{0, 12, 24, 36, 48, \ldots\}.$$

y es la intersección de los dos conjuntos anteriores.

Los múltiplos comunes son muy útiles en la aritmética. Por ejemplo, sumemos $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. Escribimos $\frac{1}{2}$ como $\frac{3}{6}$ y $\frac{1}{3}$ como $\frac{2}{6}$. Entonces $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3 + 2}{6} = \frac{5}{6}$. Aquí estamos usando un múltiplo común de 2 y 3. Al resolver tales problemas puede que hayas llamado al 6 un "denominador común". Es un múltiplo común de los denominadores de las fracciones dadas.

Puesto que 6, 12, 18, etc., son múltiplos de 2 y 3, podemos usar cualquiera de estos números al sumar $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. Observa que el número 6 que usamos es el menor posible de ellos. Es también el menor de los múltiplos comunes de 2 y 3. El número 6 se llama el "mínimo común múltiplo" de 2 y 3.

7 Definición. El mínimo común múltiplo de un conjunto de números naturales es el menor número natural que es múltiplo de cada elemento de ese conjunto.

Nota que 0 es un múltiplo común para cualquier conjunto de números cardinales. Sin embargo, el 0 no se puede usar como denominador común al sumar o restar fracciones. ¿Puedes escribir $\frac{1}{2}$ usando un denominador cero? Precisamente porque no podemos hacer esto, nos interesa solamente el mínimo común múltiplo diferent[illegible]

Supon[illegible] encontrar el mínimo común múltiplo de 12 y [illegible]. [illegible], escribimos los conjuntos de múltiplos de cada cual:

Conjunto de múltiplos de 12: {0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, ...}

Conjunto de múltiplos de 18: {0, 18, 36, 54, 72, ...}

El conjunto de múltiplos comunes de 12 y 18 es {0, 36, 72, [illegible], ...}. El menor número natural en este conjunto es 36. [illegible] el mínimo común múltiplo de 12 y 18.

¿Cuál es el mínimo común múltiplo de 2, 3 y 4?

Conjunto de múltiplos de 2: {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...}

Conjunto de múltiplos de 3: {0, 3, 6, 9, 12, 15, ...}

Conjunto de múltiplos de 4: {0, 4, 8, 12, 20, ...}

El conjunto de múltiplos comunes de 2, 3 y 4 es: {0, 12, [illegible], [illegible], ...}. ¿Cuál es el menor número natural en este conjunto? [illegible] definición, el mínimo común múltiplo de 2, 3 y 4 es [illegible].

Ejercicios [illegible]-7

1. Escribe el conjunto de todos los múltiplos, menores que 100, de cada uno de los siguientes números:
   (a) [illegible] (c) 9
   (b) [illegible] (d) 12
2. Usando las respuestas del problema 1, escribe el conjunto de todos los múltiplos comunes, menores que 100, de los números de cada uno de los siguientes pares:
   (a) [illegible] y [illegible] (d) 8 y 9
   (b) [illegible] y 9 (e) 8 y 12
   (c) [illegible] y 12 (f) 9 y 12
3. Usando tus respuestas del problema 2, escribe el mínimo común múltiplo de los números contenidos en cada uno de los siguientes conjuntos:

(a) [illegible] | (d) [illegible] y 9
(b) [illegible] | (e) [illegible] y 12
(c) [illegible] | (f) [illegible] y 12

[illegible]. Halla el mínimo [illegible] múltiplo de los números contenidos en cada uno de los conjuntos siguientes:

(a) [illegible] | (e) {2, [illegible]}
(b) [illegible] | (f) {4, [illegible]}
(c) [illegible], 5, [illegible] | (g) {2, [illegible], 7}
(d) [illegible] | (h) {[illegible], 5, 12}

[illegible]. Halla el mínimo común múltiplo de los elementos de cada uno de los conjuntos siguientes:

(a) [illegible] | (g) {[illegible], 13}
(b) [illegible] | (h) {[illegible], 11}
(c) [illegible] | (i) {5, 13}
(d) [illegible] | (j) {11, 13}
(e) [illegible] | (k) {2, 3, [illegible]}
(f) [illegible] | (l) {23, 29}

[illegible]. Refiriéndote al problema 5, contesta a las preguntas siguientes:

(a) ¿A qué conjunto pertenecen los números 2, 3, 5, 7, 11, [illegible], [illegible] y [illegible]: al conjunto de los números compuestos o al de los números primos?

(b) Guiándote por las respuestas del problema 5, ¿cuál sería un camino fácil para encontrar el mínimo común múltiplo en estos casos?

7. Halla el mínimo común múltiplo para cada uno de los conjuntos siguientes:

(a) {4, [illegible]} | (f) {10, 12}
(b) {[illegible], 8} | (g) {12, 15}
(c) {[illegible], 10} | (h) {4, 6, 10}
(d) {[illegible], 9} | (i) {10, 15, 30}
(e) {8, 10} | (j) {4, 6, 8}

8. En el problema 7, ¿a qué conjunto de números, los compuestos o los primos, pertenece cada uno de los números, 4, 6, 8, ... de las preguntas (a) hasta (j)?

9. Compara las preguntas y tus respuestas en los problemas 7 y 8,

y luego, responde a lo siguiente:

(a) Si c y d son números naturales compuestos, ¿puede c · d ser el mínimo común múltiplo? Da un ejemplo para explicar tu respuesta.

(b) Si c y d son números naturales compuestos, ¿debe c · d ser el menor múltiplo común? Da un ejemplo para tu respuesta.

10. (a) ¿Cuál es el mínimo común múltiplo de [illegible] y [illegible]?
   (b) ¿Cuál es el mínimo común múltiplo de 29 y 29?
   (c) ¿Cuál es el mínimo común múltiplo de a y a, donde a es cualquier número natural?

11. (a) ¿Cuál es el mínimo común múltiplo de 1 y [illegible]?
   (b) ¿Cuál es el mínimo común múltiplo de 1 y 29?
   (c) ¿Cuál es el mínimo común múltiplo de 1 y a, donde a representa cualquier número natural?

12. (a) Si a y b son números primos diferentes, ¿puede a · b representar el mínimo común múltiplo de a y b?
   (b) Si a y b son números primos diferentes, ¿cómo podemos representar el mínimo común múltiplo de a y b?
   (c) Si a, b y c son números primos diferentes, ¿cuál es el mínimo común múltiplo de a, b y c?

13. Estudiando los ejemplos siguientes, trata de descubrir una manera rápida de determinar el mínimo común múltiplo:

Ejemplo A. Encontrar el mínimo común múltiplo de 4, 6 y 8:

(1) Primero escribe una factorización completa para cada número:

$4 = 2^2$ $\qquad$ $6 = 2 \cdot 3$ $\qquad$ $8 = 2^3$

(2) El menor múltiplo común es $2^3 \cdot 3$, o sea 24.

(3) Nota que $2^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^3 = 192$ es un múltiplo común de 4, 6 y 8, pero no es el menor.

Ejemplo B. Encontrar el menor múltiplo común de 12 y 18:

(1) Escribe una factorización completa para cada número:

$12 = 2^2 \cdot 3$ $\qquad$ $18 = 2 \cdot 3^2$

(2) El menor múltiplo común de 12 y 18 es $2^2 \cdot 3^2$, o sea 36.

(3) ¿Es $(2^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3^2)$ un múltiplo común de 12 y 18?

(c) [illegible] $\{2^{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3^{2}\}$, el mínimo común múltiplo de 12 y [illegible]

Halla ahora el mínimo común múltiplo de los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:

(a) {12, [illegible]}
(b) {14, [illegible]}
(c) {9, [illegible]}
(d) {1[illegible], [illegible]}
(e) {1[illegible], [illegible]}
(f) {[illegible], [illegible], [illegible]}
(g) {[illegible], [illegible], [illegible]}
(h) {8, 9, 10}
(i) {12, 20, 22}
(j) {9, 1[illegible], 20}
*(k) {2[illegible]0, 200}
*(l) {324, 144, 180}
*(m) {30[illegible], 1,173}

*14. (a) ¿Hay un máximo múltiplo común de 3 y 5? Si es así, escribe un ejemplo.

(b) ¿Hay un máximo múltiplo común de 4 y 6? Si es así, escribe un ejemplo.

(c) ¿Hay un máximo múltiplo común de los elementos de todo conjunto de números naturales?

*15. (a) ¿Podemos considerar a 0 como un múltiplo de cero? (¿Es [illegible])

(b) ¿Podemos considerar a 0 como un múltiplo de 6? (¿Es [illegible] × [illegible] = 0?)

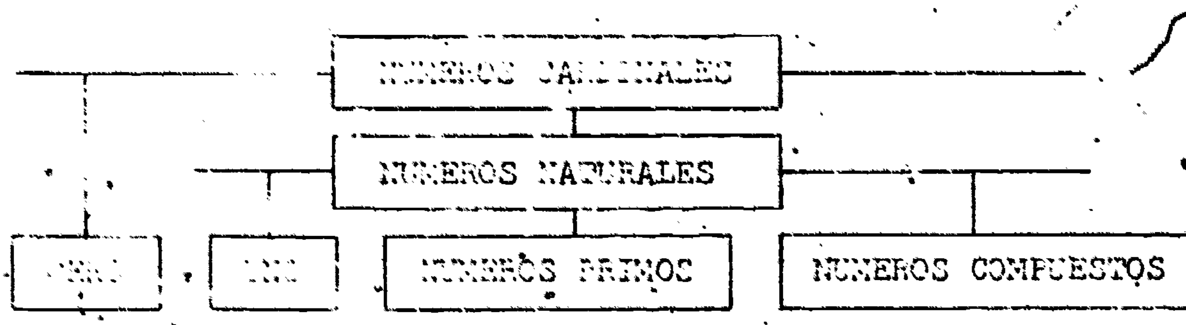
(c) ¿Podemos considerar a 0 como un múltiplo de a, si a es cualquier número cardinal?

(d) Suponte que se hubiera definido el mínimo común múltiplo como "el menor número cardinal" en vez de "el menor número natural". ¿Cuál sería el mínimo común múltiplo de los elementos de cualquier conjunto de números naturales?

(e) Usando la definición correcta para mínimo común múltiplo, ¿hay un mínimo común múltiplo para cualquier número natural y 0?

5-8. Resumen

En la mayor parte de este capítulo has estudiado los números cardinales. También has estudiado algunos subconjuntos importantes [illegible] muestran en el diagrama siguiente:



Nótese que el cero es un elemento del conjunto de los números cardinales, pero no lo es del conjunto de los números naturales. El UNO, los NUMEROS PRIMOS y los NUMEROS COMPUESTOS son elementos del conjunto de los NUMEROS NATURALES y también lo son del conjunto de los NUMEROS CARDINALES. Todo miembro del conjunto de los números naturales, es un elemento del conjunto de los números cardinales.

Has aprendido que un número PRIMO es todo número natural distinto de 1, divisible solamente por sí mismo y por 1. El número 1 no es un número primo. Preferimos no incluirlo como número primo, porque cualquier número podría expresarse como producto de números primos de varias maneras distintas si lo incluímos.

Un número COMPUESTO es un número natural distinto de 1, y no primo. Los números compuestos tienen más de dos factores.

El término "factor" se está usando en vez de las palabras multiplicando y multiplicador. El número a, es un FACTOR de b si b es divisible por a. El conjunto de factores de un número contiene todos los números naturales que son factores del mismo. Una FACTORIZACION COMPLETA de un número es la expresión de ese número como producto de números primos. Para un número primo, esta factorización se reduce al número primo mismo. Para un número compuesto hay dos o más factores. La PROPIEDAD DE FACTORIZACION UNICA de los números naturales se refiere al hecho de que cada número compuesto se puede expresar como producto de primos solamente de una manera, salvo el orden de los factores.

Un FACTOR COMUN de los elementos de un conjunto de números cardinales es un número que es factor de cada elemento de ese conjunto. El MAXIMO COMUN DIVISOR de un conjunto de números cardinales es el mayor número natural que es factor de cada elemento de ese conjunto. *Un factor común no puede ser mayor que el menor elemento del conjunto.

El número cardinal b, es un MULTIPLO del número cardinal a, si $a \cdot c = b$, donde c es también un número cardinal. Un MULTIPLO COMUN de un conjunto de números es un múltiplo de cada elemento de ese conjunto. El MINIMO COMUN MULTIPLO es el menor número natural que es múltiplo de cada elemento del conjunto dado. El mínimo común múltiplo no puede ser menor que el mayor número del conjunto dado.

Ejercicios 5-8

1. Halla el máximo común divisor de los números de cada uno de los conjuntos siguientes:

(a) {2, 3}	(g) {23, 43}
(b) {[illegible], 8}	(h) {66, 78}
(c) {7, 14}	(i) {39, 51}
(d) {15, 25}	*(j) {74, 146}
(e) {12, 3[illegible]}	*(k) {45, 72, 252}
(f) {15, 21}	**(l) {44, 92, 124}

2. Halla el mínimo común múltiplo de los números de cada uno de los conjuntos de las preguntas (a) hasta (l) del problema 1.

3. (a) Halla el producto de los elementos de cada conjunto del problema 1.
   (b) Halla el producto del máximo común divisor por el mínimo común múltiplo para cada conjunto del problema 1. (Utiliza tus respuestas a los problemas 1 y 2.)
   (c) ¿Qué relación hay entre tus respuestas a las preguntas (a) y (b)?

4. (a) Escribe el conjunto de todos los números compuestos menores que 31.
   (b) Escribe el conjunto de todos los números primos menores

5. Sean a y b dos números naturales. Suponte que el máximo común divisor de a y b es 1.

   (a) ¿Cuál es el mínimo común múltiplo de a y b? Da un ejemplo para explicar tu respuesta.

   (b) ¿Sería cierta tu respuesta para (a) si hubieras empezado con tres números naturales a, b y c? (Recuerda que el máximo común divisor es 1.) Da un ejemplo para explicar tu respuesta.

6. (a) ¿Puede ser par un número primo? Da un ejemplo para explicar tu respuesta.

   (b) ¿Puede ser impar un número primo? Da un ejemplo para explicar tu respuesta.

   (c) ¿Cuántos números primos terminan con el dígito 5?

   (d) A excepción de dos números primos, todos los demás primos terminan con uno de cuatro dígitos posibles. Escribe los dos primos que son la excepción.

   (e) Escribe los otros cuatro dígitos que se hallan en el lugar de las unidades para todos los números primos distintos de las excepciones que encontraste en la pregunta (d).

7. Suponte que el máximo común divisor de dos números es el mismo que su mínimo común múltiplo. ¿Qué se puede afirmar acerca de esos números? Da ejemplos al explicar tu respuesta.

8. (a) ¿Cuál es el <u>mínimo</u> factor común de 2,867 y 6,431?

   (b) ¿Cuál es el <u>máximo</u> múltiplo común de 2,867 y 6,431?

9. 112 bulbos de tulipán han de ser plantados en un jardín. Describe todas las disposiciones posibles de los bulbos si se han de plantar en filas rectas con un mismo número de bulbos por fila.

10. Dos campanas están colocadas de manera que suenen a intervalos distintos. Suponte que al principio las dos campanas suenan al mismo tiempo.

    (a) Una campana suena cada tres minutos y la otra cada cinco minutos. Si ambas campanas suenan juntas a las 12 del día, ¿cuándo volverán a sonar juntas?

(b) Una campana suena cada seis minutos y la otra cada quince minutos. Si ambas suenan juntas a las 12 del día, ¿cuándo volverán a sonar juntas?

(c) Halla el mínimo común múltiplo de 3 y 5, y de 6 y 15. Compara estas respuestas con las de las preguntas (a) y (b).

11. (a) ¿Puede el máximo común divisor de algunos números cardinales coincidir con el mínimo común múltiplo de los mismos? Si es así, da un ejemplo.

(b) ¿Puede el máximo común divisor de algunos números cardinales ser en algún caso mayor que el mínimo común múltiplo de los mismos? Si es así, da un ejemplo.

(c) ¿Puede el mínimo común múltiplo de algunos números cardinales ser en algún caso menor que el máximo común divisor de los mismos números? Si es así, da un ejemplo.

12. (a) ¿Es posible que haya exactamente cuatro números compuestos entre dos números primos consecutivos? Si es así, da un ejemplo.

(b) ¿Es posible que haya exactamente cinco números compuestos consecutivos entre dos números primos consecutivos? Si es así, da un ejemplo.

13. Se dan los números 135, 222, 783 y 1,065. <u>Sin efectuar la división</u>, contesta a las preguntas siguientes. Luego, dividiendo, comprueba tus respuestas.

(a) ¿Cuáles son divisibles por 3?
(b) ¿Cuáles son divisibles por 6?
(c) ¿Cuáles son divisibles por 9?
(d) ¿Cuáles son divisibles por 5?
(e) ¿Cuáles son divisibles por 15?
(f) ¿Cuáles son divisibles por 4?

14. ¿Por qué es importante conocer los números primos y sus propiedades?

15. PROBLEMA DIFICIL. Se han de plantar diez bulbos de tulipán de manera que estén alineados de cuatro en cuatro, formando exactamente cinco filas. Dibuja un diagrama de esta

disposición.

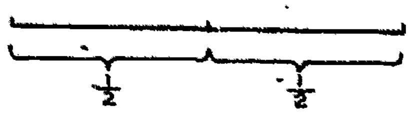
1[illegible]. PROBLEMA DIFICIL. ¿Crees que puede haber un número primo que sea el mayor de todos? ¿Puedes hallarlo o puedes dar razón de por qué crees que no lo hay?

Capítulo [illegible]

EL SISTEMA DE LOS NÚMEROS RACIONALES

[illegible]-1. Historia de las fracciones

No siempre el hombre ha conocido las fracciones. Las introdujo cuando comenzó a medir y contar. Si dividía un trozo de cuerda en dos partes de igual longitud, entonces la longitud de cada parte le resultaba $\frac{1}{2}$ de la longitud del trozo original.



Si necesitaba 4 tazas de agua para llenar un recipiente,

decía que cada taza contenía $\frac{1}{4}$ del agua del recipiente.

Los egipcios conocían las fracciones. Al principio usaban sólo fracciones <u>unitarias</u> y las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$. Llamamos fracciones unitarias a las que llevan 1 en el numerador, tales como [illegible], etc. Los egipcios empleaban la notación

para $\frac{1}{5}$, es decir, el numeral de 5 con una marca especial encima. Cuando tenían que usar otras fracciones, las expresaban en términos de fracciones unitarias:

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$\frac{15}{24} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$$

El papiro Rhind (1700 a. de J.C.), copiado por el escriba Ahmes de un documento más antiguo—ahora perdido—tiene un conjunto de tablas para mostrar cómo se expresan las fracciones en términos de las fracciones unitarias.

Los babilonios utilizaban habitualmente fracciones con denominadores 60, 60^2 (3,600), 60^3 (216,000), etc., porque la base de su sistema de numeración era 60. Como hemos tomado nuestras unidades de tiempo de los babilonios, también dividimos la hora en sesentavos, llamados minutos, y el minuto en sesentavos, llamados segundos.

Los niños romanos aprendían, en primer lugar, las fracciones con denominador doce. No tenían símbolos para las fracciones, pero daban nombres a fracciones tales como $\frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \ldots$. ¿Usamos actualmente alguna medida que utilice la idea de dozavos?

Con el tiempo, se fueron adoptando otras notaciones. Nuestra actual notación con la raya de fracción " — " se generalizó en el siglo XVI.

6-2. Números racionales

En el resto de este capítulo veremos las fracciones desde otro punto de vista. Ya conoces mucho acerca de las fracciones, pero ¿estás seguro de que sabes por qué funcionan tus métodos?

Las razones son muy importantes. Algunas veces preguntas ¿por qué? cuando tus padres te ordenan algo, pues, al conocer el por qué, entiendes mejor sus órdenes. Posiblemente te resultará más fácil recordar cómo se trabaja con las fracciones cuando sepas por qué funcionan las reglas de su cálculo.

Has aprendido que un número puede tener varios nombres. Por ejemplo, 6, VI, $2 \cdot 3$ y $3 \cdot 2$ son diversos nombres o numerales para un mismo número. También son otros nombres de este mismo número las fracciones $\frac{6}{1}, \frac{12}{2}, \frac{18}{3}$ y $\frac{24}{4}$. Toda fracción es un nombre para cierto número. Las fracciones $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \frac{5}{15}$ y $\frac{6}{18}$ representan un número. Las fracciones $\frac{3}{2}, \frac{6}{4}, \frac{9}{6}, \frac{12}{8}, \frac{15}{10}$ y $\frac{18}{12}$ representan otro número. Tales números se llaman números racionales. Las fracciones $\frac{7}{1}, \frac{8}{2}$ y $\frac{3}{4}$ son numerales para otros números racionales. ¿Qué otros nombres hay para estos números?

¿Cómo compruebas la división:

$$12 \div 3 = 4?$$

Multiplicas 3 por 4 para ver si obtienes 12. Si divides 12 por 3 hallas una respuesta a la pregunta:

¿Por qué número hay que multiplicar 3 para obtener 12?

$$3 \cdot ? = 12$$

Para representar el número que buscas, es mejor usar la letra "x" que el signo "?". Escribes, entonces:

$$3 \cdot x = 12$$

Si reemplazas x por 4, la proposición numérica,

$$3 \cdot x = 12$$

es verdadera. Los matemáticos acostumbran escribir $\frac{12}{3}$ en vez de $12 : 3$. Escriben, pues, $\frac{12}{3} = 4$.

Con este nuevo símbolo para la división escribimos:

$$\frac{12}{3} = 4 \quad \text{porque} \quad 3 \cdot 4 = 12$$

$$\frac{6}{2} = 3 \quad \text{porque} \quad 2 \cdot 3 = 6$$

$$\frac{10}{2} = 5 \quad \text{porque} \quad 2 \cdot 5 = 10$$

$$\frac{63}{9} = 7 \quad \text{porque} \quad 9 \cdot 7 = 63$$

Debido a que $\frac{12}{3} = 4$, podemos reemplazar 4 por $\frac{12}{3}$ en $3 \cdot 4 = 12$, y escribir

$$3 \cdot \frac{12}{3} = 12$$

En forma análoga,

$$2 \cdot \frac{6}{2} = 6$$

$$2 \cdot \frac{10}{2} = 10$$

$$9 \cdot \frac{63}{9} = 63$$

¿Por cuál número debería reemplazarse la x para hacer verdadera la proposición numérica

$$3 \cdot x = 12?$$

Por $x = 4$. Pero si te fijas en el párrafo anterior verás que hemos escrito

$$3 \cdot \frac{12}{3} = 12$$

Tanto 4 como $\frac{12}{3}$ son sustitutos correctos para x. Los numerales 4 y $\frac{12}{3}$ representan el mismo número. En la misma forma:

si $x = \frac{6}{2}$, entonces $2 \cdot x = 6$, y

si $x = \frac{7}{3}$, entonces $3 \cdot x = 7$.

Problemas 6-2 para analizar en clase

1. (a) Si $x = \frac{10}{2}$, ¿qué número es $2 \cdot x$?
   (b) Si $x = \frac{63}{9}$, ¿qué número es $9 \cdot x$?
   (c) Si $x = \frac{5}{2}$, ¿qué número es $2 \cdot x$?
   (d) Si $x = \frac{5}{3}$, ¿qué número es $3 \cdot x$?
   (e) Si $x = \frac{4}{9}$, ¿qué número es $9 \cdot x$?

2. En lo que sigue, da el nombre de una fracción para el número representado por cada x:

(a) $2 \cdot x = 10$	(f) $6 \cdot x = 5$
(b) $9 \cdot x = 63$	(g) $4 \cdot x = 13$
(c) $2 \cdot x = 5$	(h) $7 \cdot x = 1$
(d) $3 \cdot x = 5$	(i) $4 \cdot x = 2$
(e) $9 \cdot x = 4$	(j) $1 \cdot x = 13$

3. Si a y b son números naturales, designa por una fracción el número representado por x en $b \cdot x = a$.

En general, si a y b son números cardinales y b es diferente de cero, $\frac{a}{b}$ es el número x para el cual $b \cdot x = a$. Debido a que es más simple, un símbolo tal como $b \cdot x$ se escribe frecuentemente bx, y $8 \cdot x$ se escribe $8x$. Pero el símbolo de la multiplicación debe ser escrito en casos como $8 \cdot 6$. ¿Por qué? Sabes que la división es la inversa de la multiplicación. Esto se emplea ahora para cambiar la pregunta

$$\frac{a}{b} = ?$$

en la pregunta $$b \cdot ? = a.$$

Un símbolo "$\frac{a}{b}$", donde a y b son números, siendo b diferente de cero, se llama fracción. Si a y b son números cardinales, siendo b diferente de cero, el número representado por la fracción $\frac{a}{b}$ se llama número racional; cualquier número que se puede escribir en esta forma se llama número racional. Por ejemplo, 0.5 representa un número racional, puesto que se le puede escribir como $\frac{1}{2}$. Una fracción es un nombre para un número racional así como un numeral es un nombre para un número. Son nombres diferentes para un mismo número los siguientes:

$$3,\ \mathrm{III},\ \frac{6}{2},\ \frac{9}{3}\ \text{y}\ \frac{63}{21}.$$

Los nombres

$$\frac{6}{2},\ \frac{9}{3}\ \text{y}\ \frac{63}{21}$$

son fracciones.

A veces $\frac{a}{b}$ es un número cardinal. Ocurre así cuando b es factor de a, y sólo en tal caso.

Otras veces $\frac{a}{b}$ no es un número cardinal. ¿Hay un número cardinal x tal que $3x = 4$? ¿Es $\frac{4}{3}$ un número cardinal?

Dos fracciones que representan un mismo número se llaman fracciones equivalentes, pero no será necesario usar con frecuencia este término.

Ejercicios 6-2

1. Da un ejemplo de cada una de las siguientes clases de números:
   (a) Número natural.
   (b) Número cardinal.
   (c) Un número cardinal que no sea natural.
   (d) Un número racional que no sea cardinal.
2. ¿Cuáles de las expresiones siguientes representan números racionales?
   (a) $\frac{3}{4}$ (e) .1
   (b) $\frac{5}{3}$ (f) $\frac{16}{4}$
   (c) $\frac{1}{10}$ (g) 0.2
   (d) 4 (h) 0.13

3. Copia y completa los siguientes enunciados:

(a) Si $x = \frac{6}{3}$, entonces $3x =$ ___.

(b) Si $x = \frac{9}{3}$, entonces ___ $x = 9$.

(c) Si $x = \frac{5}{2}$, entonces $2x =$ ___.

(d) Si $x = \frac{10}{4}$, entonces ___ $x = 10$.

(e) Si $x = \frac{7}{1}$, entonces ___ $x = 7$.

(f) Si $x = \frac{18}{6}$, entonces ___ $x =$ ___.

(g) Si $x = \frac{4}{3}$, entonces ___ $x =$ ___.

4. En el problema 3, ¿en qué casos es cardinal el número x? Dondequiera que x sea un número cardinal, escríbelo con un solo dígito.

5. Copia y completa los siguientes enunciados:

(a) Si $x = \frac{1}{5}$, entonces ___ $x =$ ___.

(b) Si $x = \frac{4}{4}$, entonces ___ $x =$ ___.

(c) Si $x = \frac{11}{3}$, entonces ___ $x =$ ___.

(d) Si $x = \frac{63}{9}$, entonces ___ $x =$ ___.

(e) Si $x = \frac{0}{5}$, entonces ___ $x =$ ___.

(f) Si $x = \frac{123}{11}$, entonces ___ $x =$ ___.

6. En el problema 5, ¿en qué casos es el número x un número cardinal? Si x es un número cardinal, escríbelo con un solo dígito.

7. Sin dividir ni factorizar, indica cuáles de los enunciados siguientes son verdaderos. Por ejemplo, para mostrar que $\frac{168}{21} = 8$, multiplica 8 por 21 a fin de ver si obtienes 168.

(a) $\frac{169}{13} = 13$

(b) $\frac{262}{17} = 16$

(c) $\frac{744}{124} = 6$

(d) $\frac{143}{11} = 13$

(e) $\frac{15251}{151} = 101$

*8. Para cada uno de los siguientes problemas, escribe un enunciado numérico que lo describa en lenguaje matemático. Usa x para el número desconocido y di, en cada caso, lo que representa.

Ejemplo. El padre de Sam cortará un tronco de doce pies de largo en 6 piezas de longitudes iguales. ¿De qué largo será cada pieza?

Respuesta. Si x es la longitud de cada pieza en pies, entonces $6 \cdot x = 12$.

(a) Si se reparten 12 galletas en partes iguales entre 3 niños, ¿cuántas galletas recibe cada niño?

(b) El automóvil del señor Pérez consumió 10 galones de gasolina durante un viaje de 160 millas. ¿Cuántas millas recorrió por galón de gasolina consumido?

(c) Si se necesitan 20 sacos de cemento para construir un camino de 30 pies, ¿qué cantidad de cemento se necesitará por cada pie de ese camino?

(d) Treinta y dos alumnos se separaron en 4 grupos iguales. ¿Cuántos alumnos hubo en cada grupo?

(e) Un maestro tiene que distribuir 12 hojas de papel, en partes iguales, entre sus 24 alumnos. ¿Qué cantidad de papel recibirá cada alumno?

6-3. Propiedades de los números racionales

Has visto que el número cardinal 3 puede escribirse como $\frac{3}{1}$, lo que muestra que 3 es un número racional. De manera análoga puedes mostrar que todo número cardinal es racional.

Cuando estudiaste los números cardinales, aprendiste que tenían ciertas propiedades. El aprendizaje de los números racionales se hace más fácil si se sabe que tienen algunas de esas mismas propiedades.

Recuerdas que la suma de dos números cardinales es siempre un número cardinal y que el producto de dos números cardinales también es, siempre, un número cardinal. Es decir, si a y b son números cardinales, entonces hay un número cardinal c para el cual $a + b = c$, y un número cardinal d para el cual $a \cdot b = d$. El conjunto de los números cardinales tiene la propiedad de ser cerrado respecto de la adición y la multiplicación.

El conjunto de los números racionales tiene también la propiedad de ser cerrado respecto de la adición y la multiplicación. La suma de dos números racionales es un número racional. Sabes que $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$, $\frac{12}{4} + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ y $2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$. El producto de dos números racionales es un número racional. Ten presente que $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$, $\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7} = \frac{12}{21}$ y $\frac{5}{1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. En lenguaje preciso enunciamos:

1. El conjunto de los números racionales es <u>cerrado</u> respecto de las operaciones de adición y multiplicación.

Sabes ya que $3 + 4 = 4 + 3$ y $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$, pues para los números cardinales la adición y la multiplicación tienen la propiedad conmutativa. Estas operaciones también tienen la propiedad conmutativa para los números racionales. Sabes que $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}$, y que $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}$. En lenguaje preciso establecemos:

2. Las operaciones de adición y multiplicación para los números racionales tienen la <u>propiedad conmutativa</u>, esto es:

$$a + b = b + a \quad \text{y} \quad a \cdot b = b \cdot a$$

Recuerdas también que $5 + (3 + 4) = (5 + 3) + 4$, y que $5 \cdot (3 \cdot 4) = (5 \cdot 3) \cdot 4$ porque la adición y la multiplicación tienen la propiedad asociativa para los números cardinales. Para los números racionales también tienen estas operaciones la propiedad asociativa. Sabes que $\frac{5}{3} + (\frac{1}{3} + \frac{2}{3}) = (\frac{5}{3} + \frac{1}{3}) + \frac{2}{3}$ y que $\frac{3}{1} \cdot (\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}) = (\frac{3}{1} \cdot \frac{1}{3}) \cdot \frac{1}{3}$. En lenguaje preciso establecemos:

3. Las operaciones de adición y multiplicación para los números racionales tienen la propiedad asociativa, es decir:

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad \text{y} \quad a(bc) = (ab)c$$

¿Qué significa $5 \cdot (2 + 3)$? Por la propiedad distributiva sabes que se obtiene el mismo resultado si se calcula $5 \cdot 5 = 25$ ó $5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 10 + 15 = 25$. Para los números cardinales la multiplicación es distributiva respecto de la adición. La propiedad distributiva vale también para los números racionales. Has usado esta propiedad para los números racionales al multiplicar $4\frac{1}{5}$ por 5. En nuestros símbolos, $5 \cdot (4\frac{1}{5}) = 5 \cdot (4 + \frac{1}{5}) = 5 \cdot 4 + 5 \cdot \frac{1}{5} = 20 + 1 = 21$. En lenguaje preciso enunciamos:

4. La multiplicación es distributiva respecto de la adición para los números racionales; es decir:

$$a(b + c) = ab + ac$$

Entre los números cardinales había dos especiales: 1 y 0, que también son números racionales.

5. Entre los números racionales hay números especiales 0 y 1. 0 es la identidad para la adición y 1 es la identidad para la multiplicación.

Cuando decimos que 0 es la identidad para la adición queremos significar, por ejemplo, que $0 + 3 = 3 + 0 = 3$; es decir que, si se suma cero a cualquier número, éste no cambia. En símbolos esto se puede expresar así:

$$0 + a = a + 0 = a$$

no importando qué número sea a. Análogamente, cuando decimos que 1 es la identidad para la multiplicación queremos expresar, por ejemplo, que $1 \cdot 5 = 5 \cdot 1 = 5$; es decir que, si se multiplica un número cualquiera por 1, dicho número no cambia. Mediante símbolos se puede expresar esto de la siguiente manera:

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$$

Puedes decir que 1 es un número racional escribiéndolo como la fracción $\frac{1}{1}$. Para ver que 0 es un número racional te bastaría recordar que 0 dividido por cualquier número natural es 0. Si $x = \frac{0}{1}$, $1 \cdot x = 0$ y x debe ser igual a cero. Cuando definimos el número racional $\frac{a}{b}$ dijimos que b no podía ser cero. Puedes buscar la razón de esto viendo lo que pasa con $\frac{5}{0}$.

Si $x = \frac{5}{0}$, entonces $0 \cdot x = 5$. No hay ningún número x para el cual $0 \cdot x = 5$. En consecuencia, $\frac{5}{0}$ no es ningún número.

Estas cinco propiedades de los números racionales te mostrarán las razones de algunas de las reglas que establezcas para las fracciones. Usemos esas propiedades para mostrar que $\frac{3}{2} = \frac{15}{10}$. Si $x = \frac{3}{2}$, entonces $2x = 3$. Como $2x$ y 3 son nombres del mismo número,

$$5 \cdot (2x) = 5 \cdot 3$$

Por la propiedad asociativa,

$$(5 \cdot 2)x = 5 \cdot 3$$
$$10x = 15$$
$$x = \frac{15}{10}$$

Pero x es un nombre para $\frac{3}{2}$; por tanto,

$$\frac{3}{2} = \frac{15}{10}$$

Si escribes la última ecuacion como

$$\frac{3}{2} = \frac{5 \cdot 3}{5 \cdot 2}$$

ves que habrías llegado a la misma fracción si hubieras multiplicado el numerador y el denominador de $\frac{3}{2}$ por 5. Generalizando, obtenemos

<u>Propiedad 1.</u> <u>Si el numerador y el denominador de una fracción son multiplicados por un mismo número natural, el número representado no cambia. Si se dividen numerador y denominador por un mismo número natural,</u>

<u>el número representado no cambia.</u>

Has visto que $\frac{3}{2}$ y $\frac{15}{10}$ son fracciones para el mismo número. Otros nombres para este número son: $\frac{6}{4}$, $\frac{9}{6}$ y $\frac{18}{12}$. ¿Por cuáles números debes multiplicar el numerador y el denominador de $\frac{3}{2}$ para obtener esas fracciones? Como en la expresión $\frac{3}{2}$ el numerador y el denominador no tienen más factor común que 1, ésta se llama <u>la forma más simple</u> o <u>forma irreducible de la fracción</u>.

Para encontrar la forma más simple de $\frac{72}{45}$ hallamos el máximo común divisor de 72 y 45, que es 9. Luego:

$$\frac{72}{45} = \frac{9 \cdot 8}{9 \cdot 5} = \frac{8}{5}$$

Si prefieres hacer el cálculo en más etapas puedes seguir este procedimiento:

$$\frac{72}{45} = \frac{3 \cdot 24}{3 \cdot 15} = \frac{24}{15} = \frac{3 \cdot 8}{3 \cdot 5} = \frac{8}{5}$$

<u>Para escribir una fracción</u> $\frac{a}{b}$ <u>en su forma irreducible, hallamos el máximo común divisor</u> k <u>de</u> a <u>y</u> b, <u>donde</u> a = kc <u>y</u> b = kd; <u>luego, por la propiedad 1,</u>

$$\frac{a}{b} = \frac{kc}{kd} = \frac{c}{d}$$

<u>Ejercicios 6-3</u>

1. ¿Cuáles de los siguientes numerales representan números racionales?

(a) 7

(b) $\frac{[illegible]}{2}$

(c) $\frac{2}{[illegible]}$

(d) $3 + \frac{1}{2}$

(e) $4\frac{1}{3}$

(f) $4 - 2$

(g) $1 \div 5$

(h) 2.15

(i) $\frac{0}{7}$

(j) 5.0

(k) $\frac{5}{0}$

(l) 0.0

6-4. Recíprocos

Sabes que

$2 \cdot \frac{1}{2} = 1,\quad 3 \cdot \frac{1}{3} = 1,\quad \frac{1}{4} \cdot 4 = 1,\quad \frac{1}{5} \cdot 5 = 1$ y $31 \cdot \frac{1}{31} = 1.$

Volvamos a nuestra definición de número racional y veamos cómo estos productos se relacionan con ella.

a y b son números cardinales, $b \neq 0$	Sea $a = 1$	1 y 31 son números cardinales, $31 \neq 0$
$bx = a$	Sea $b = 31$	$31x = 1$
$x = \frac{a}{b}$		$x = \frac{1}{31}$

Sabemos que $\frac{1}{31}$ es el número racional por el que podemos multiplicar 31 para obtener 1.

¿Por qué número podemos reemplazar x en

$$24x = 1$$

para obtener un enunciado verdadero? La respuesta es $\frac{1}{24}$.

Consideremos ahora la ecuación

$$bx = 1$$

Entonces $$x = \frac{1}{b}$$ (b es un número natural.)

y $$b \cdot \frac{1}{b} = 1$$

El número $\frac{1}{b}$ se llama recíproco de b. También b es llamado el recíproco de $\frac{1}{b}$. <u>Si el producto de dos números es 1, los números se llaman recíprocos uno de otro.</u>

Algunos pares de números, recíprocos uno de otro, son:

$$\frac{1}{7} \text{ y } 7,\quad 21 \text{ y } \frac{1}{21},\quad \text{y } \frac{1}{62} \text{ y } 62.$$

¿Cuál es el recíproco de 1?

Hemos visto que los números naturales y otros como $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{29}$ tienen recíprocos. ¿Tiene $\frac{3}{4}$ un recíproco? ¿Hay un número por el cual $\frac{3}{4}$ puede ser multiplicado para obtener 1? La aritmética puede darnos la respuesta.

Sabemos que $\frac{3}{4} \cdot 4 = 3$ y que $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$; entonces usando la propiedad asociativa, tenemos que

$$\frac{3}{4} \cdot \left(4 \cdot \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{3}{4} \cdot 4\right) \cdot \frac{1}{3}$$

$$= (3) \cdot \frac{1}{3} = 1$$

Vemos que si se multiplica $\frac{3}{4}$ por $4 \cdot \frac{1}{3}$ el producto es 1. Pero $4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$. Luego, el recíproco de $\frac{3}{4}$ es $\frac{4}{3}$.

¿Cuál es el producto de $\frac{7}{8} \cdot \frac{8}{7}$? ¿Por qué? Podemos ver por qué el producto es 1, recordando que $\frac{8}{7} = 8 \cdot \frac{1}{7}$,

$$\frac{7}{8} \cdot \frac{8}{7} = \frac{7}{8} \cdot \left(8 \cdot \frac{1}{7}\right) = \left(\frac{7}{8} \cdot 8\right) \cdot \frac{1}{7} = 7 \cdot \frac{1}{7} = 1$$

La experiencia que has adquirido multiplicando números representados por fracciones te permitirá decir probablemente sin indicar los diversos pasos del cálculo, que $\frac{8}{7} \cdot \frac{7}{8} = 1$. Las diversas etapas del cálculo muestran por qué esta proposición es verdadera, utilizando las propiedades de los números racionales que conocemos.

Los ejemplos nos llevan a la conclusión de que $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$, siempre que ni a ni b sean cero.

Propiedad 2. El recíproco del número racional $\frac{a}{b}$ es el número racional $\frac{b}{a}$, si $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

Ejercicios 6-4

1. Halla los productos:

(a) $(9)(\frac{1}{9})$

(b) $(\frac{1}{26})(26)$

(c) $(\frac{1}{11})(11)$

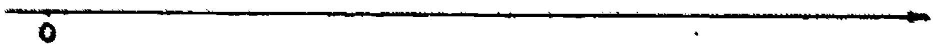
(d) $(45)(\frac{1}{45})$

(e) $(\frac{3}{5})(5)(\frac{1}{3})$

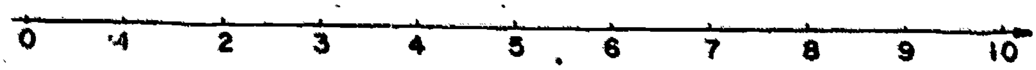
(f) $92(\frac{1}{51})$

6-5. Uso de la recta numérica

Recordemos cómo se construyó en el Capítulo 3 la recta numérica. Comenzamos con una recta y seleccionamos un punto que llamamos "0".



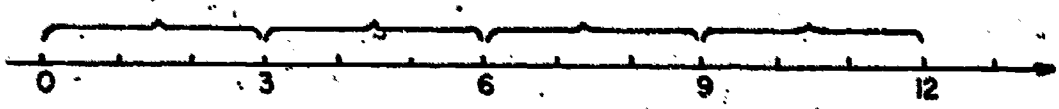
Después de adoptar una unidad de longitud, marcamos la recta con trazos separados entre sí por una distancia igual a esta unidad, partiendo desde 0 hacia la derecha. Después de haberlo hecho repetidas veces, marcamos los extremos de los segmentos con los números 1, 2, 3, ..., y obtuvimos una figura como la siguiente:



El número natural en cada punto indica cuántos segmentos de longitud unitaria se han medido entre 0 y ese punto.

Para sumar 3 y 2 sobre la recta numérica, partimos del 0 y recorremos una distancia de 3 unidades iguales. A partir de este punto, medimos luego hacia la derecha 2 unidades más, iguales a las anteriores. La reunión de estos dos segmentos es aquel cuyo extremo izquierdo está en 0 y su extremo derecho está en 5; la longitud de este segmento es la suma de las longitudes de los otros dos segmentos. Tenemos, entonces, una figura sobre la recta que muestra la suma $3 + 2 = 5$. ¿Puedes indicar cómo se resta sobre la recta numérica?

Para multiplicar 3 por 4 sobre la recta numérica, podemos partir de 0 y recorrer cuatro segmentos de longitud 3 como se muestra en la figura siguiente:



Esto da también un procedimiento para dividir. Si dividimos el segmento cuyos extremos son 0 y 12 en cuatro partes iguales, cada parte tendrá longitud 3. Por consiguiente, la misma figura puede representar tanto

$$12 = 4 \times 3 \quad \text{como} \quad \frac{12}{4} = 3.$$

Si pensamos en 12 como si designara doce pies, la recta muestra que hay cuatro yardas en doce pies y que, por tanto,

$$\frac{12}{3} = 4 \text{, doce tercios es igual a cuatro.}$$

En otras palabras: "doce pies son cuatro yardas", lo que también se puede escribir "doce tercios de yarda es igual a cuatro yardas", pues un pie es un tercio de yarda.

La misma recta numérica puede usarse para representar el número de yardas que hay, digamos, en 13 pies. En este caso se puede tomar el segmento cuatro veces, dejando un segmento adicional de un pie. Entonces, como un pie es un tercio de una yarda, tenemos

$$13 \cdot \frac{1}{3} = \frac{13}{3} = 4 + \frac{1}{3}$$

lo que se puede leer así: "trece pies son cuatro yardas y un tercio de yarda". Esta misma igualdad puede también ser escrita en la forma

$$13 = 4 \cdot 3 + 1$$

que se puede leer: "13 pies son cuatro yardas más un pie".

Consideremos otro ejemplo. Tratemos de representar sobre la recta numérica el número de pies que hay en 43 pulgadas. Habría que dibujar la recta numérica que muestre la ecuación

$$43 = 3 \cdot 12 + 7$$

que se puede leer: "43 pulgadas son tres pies y 7 pulgadas". Usando fracciones, podría también haberse escrito

$$\frac{43}{12} = 43 \cdot \frac{1}{12} = 3 + \frac{7}{12}$$

expresando el hecho de que 43 dozavos de pie son 3 pies más 7 dozavos de pie.

Mientras la recta numérica ayuda a mostrar estas relaciones al principio, resulta poco conveniente si se trata de operar con números grandes. Consideremos la fracción $\frac{85}{23}$ sin construir la recta numérica. Si dividimos 85 por 23, obtenemos el cociente 3 y el residuo 16, es decir,

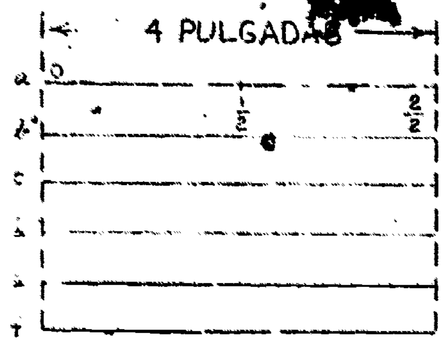
$$85 = 23 \cdot 3 + 16$$

Otra manera de escribirlo es:

$$\frac{85}{23} = 3 + \frac{16}{23} = 3\frac{16}{23}$$

Ejercicios 6-5

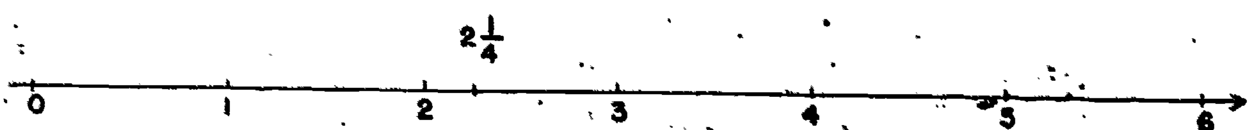
1. Dibuja en una hoja de papel una figura semejante a la que se muestra a continuación. Traza cada segmento de 4 pulgadas de longitud y deja $\frac{1}{2}$ pulgada de distancia entre líneas.



Divide cada uno de los segmentos en el siguiente número de partes:

(a) 2 partes (como se indica en la figura)
(b) 4 partes
(c) 3 partes
(d) 1 partes
(e) 6 partes
(f) 5 partes

2. En una hoja de papel dibuja una recta numérica como ésta:



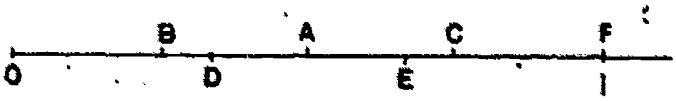
Con tanta exactitud como te sea posible, localiza en tu recta numérica cada uno de los puntos siguientes (el caso (a) se muestra en la figura):

(a) $2\frac{1}{4}$
(b) $4\frac{2}{3}$
(c) $\frac{10}{2}$
(d) $\frac{15}{3}$
(e) $\frac{14}{3}$
(f) $\frac{19}{8}$

(g) Si $\frac{a}{b} = \frac{6}{3}$, localiza $\frac{a}{b}$ en la recta numérica.

(h) Si $12 \cdot x = 4$, localiza x en la recta numérica.

3. (a) Considera los puntos marcados con las letras A, B, C, D, E y F sobre la recta numérica:



Da 3 diferentes nombres de fracciones para cada uno de los puntos A, B, C, D, E y F, como por ejemplo:

A: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, __; etc.

(b) ¿Es el número racional colocado en el punto B menor o mayor que el número colocado en A? Explica tu respuesta.

(c) ¿Es el número racional colocado en el punto C menor o mayor que el número colocado en A? Explica tu respuesta.

4. Interpreta sobre la recta numérica lo siguiente:

(a) $\frac{20}{5} = 4$ (b) $\frac{20}{4} = 5$ (c) $\frac{23}{5} = 4\frac{3}{5}$

5. Expresa cada una de las siguientes fracciones como un número cardinal sumado a un número racional menor que 1:

(a) $\frac{57}{39}$ (b) $\frac{137}{23}$

6. Muestra sobre la recta numérica la igualdad: $\frac{2}{8} = \frac{3}{12}$.

7. Utilizando el método del ejemplo 3, responde a las preguntas de los problemas 1 y 2 de esta sección.

8. Muestra cómo se efectúa la sustracción, sobre la recta numérica, en cada uno de los siguientes casos:

(a) 5 - 2 (b) 9 - 5

*9. En el ejemplo 3 hemos encontrado un criterio para saber cuándo dos fracciones representan un mismo número, al escribir cada una como su equivalente con igual denominador que la otra. ¿Podríamos, escribiéndolas como sus fracciones equivalentes con iguales numeradores, haber hallado también un criterio para saber si representan un mismo número? Recuerda que hemos llamado "equivalentes" a dos fracciones que representan al mismo número.

Ejercicios 6-6

1. Calcula mentalmente los siguientes productos. Da las respuestas en su forma irreducible.

(a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$

(b) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$

(c) $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}$

(d) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}$

(e) $\frac{1}{10} \cdot \frac{3}{10}$

(f) $\frac{4}{100} \cdot \frac{3}{10}$

(g) $\frac{1}{9} \cdot 9$

(h) $\frac{2}{3} \cdot 3$

(i) $2 \cdot \frac{2}{9}$

(j) $4 \cdot \frac{1}{3}$

(k) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$

(l) $\frac{3}{2} \cdot 4$

(m) $8 \cdot \frac{3}{4}$

(n) $(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}) \cdot \frac{1}{3}$

(o) $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}$

(p) $10 \cdot \frac{1}{100}$

(q) $\frac{1}{100} \cdot \frac{4}{100}$

(r) $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{100}$

(s) $\frac{1}{10} \cdot 100$

(t) $\frac{5}{2} \cdot 8$

(u) $\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5}$

(v) $\frac{6}{5} \cdot \frac{5}{6}$

(w) $\frac{21}{2} \cdot \frac{1}{2}$

(x) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

2. Calcula los productos siguientes y ponlos en su forma irreducible.

(a) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{15}$

(b) $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{15}$

(c) $\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2}$

(d) $\frac{1}{5} \cdot 10$

(e) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8}$

(f) $\frac{5}{6} \cdot 24$

(g) $36 \cdot \frac{1}{12}$

(h) $\frac{4}{7} \cdot \frac{1}{12}$

(i) $72 \cdot \frac{5}{9}$

(j) $\frac{8}{9} \cdot 1$

(k) $\frac{4}{5} \cdot \frac{17}{17}$

(l) $\frac{9}{16} \cdot \frac{7}{10}$

(m) $\frac{13}{15} \cdot \frac{10}{39}$

(n) $\frac{33}{100} \cdot \frac{90}{99}$

(o) $\frac{17}{3} \cdot \frac{3}{51}$

3. El cálculo de productos semejantes a los del problema 2 se facilita a menudo factorizando. Por ejemplo, en la pregunta (e)

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 8} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot (2 \cdot 4)} = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 4} = 1 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$$

Usa este método para las preguntas (h), (m), (n) y (o) del problema 2.

4. Expresá cada uno de los siguientes productos como una fracción irreducible. Antes de multiplicar expresa cada factor como una sola fracción. Por ejemplo, $\frac{3}{4} \cdot (2\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{8}$.

(a) $8 \cdot (2\frac{2}{3})$

(b) $(3\frac{1}{3}) \cdot (2\frac{2}{3})$

(c) $12 \cdot (5\frac{5}{6})$

(d) $(2\frac{1}{5}) \cdot (3\frac{1}{3})$

(e) $(5\frac{1}{4}) \cdot (\frac{2}{7})$

(f) $(1\frac{1}{7}) \cdot (1\frac{1}{8})$

5. Halla el número r para el cual es cierta la siguiente afirmación:

$$\frac{3}{4} \cdot (\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{8}) = (r \cdot \frac{1}{3}) \cdot \frac{7}{8}$$

6. El rótulo de una lata de pintura dice que contiene $\frac{3}{4}$ de pinta. Si utilizas $\frac{2}{3}$ de la pintura, ¿cuántas pintas has gastado?

*7. Si un recipiente para refresco de frutas destinado a 6 personas contiene

$\frac{1}{2}$ taza de jugo de naranja

$\frac{1}{4}$ de taza de jugo de limón

$\frac{1}{2}$ taza de jugo de toronja

1 taza de jugo de piña

$1\frac{1}{2}$ tazas de agua

$\frac{1}{2}$ taza de jarabe

(a) ¿Qué cantidad de cada uno de los ingredientes utilizarías para hacer refresco para 4 personas?

(b) ¿Qué cantidad de cada uno de los ingredientes utilizarías para servir a 8 personas?

*8. Si en un mapa en el cual cada pulgada representa 10 millas la distancia de tu casa a la escuela mide $1\frac{5}{8}$ pulgadas, ¿a cuántas millas de la escuela vives?

6-7. <u>División de números racionales</u>

En este capítulo has aprendido que puedes escribir $5 \div 3$ en la forma $\frac{5}{3}$. Si a y b son dos números cualesquiera, siendo b diferente de cero, puedes escribir $\frac{a}{b}$ en lugar de $a \div b$. Si a y b son números racionales, por ejemplo $\frac{3}{2}$ y $\frac{1}{2}$, puedes escribir

$$\frac{3}{2} \div \frac{1}{2} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}$$

Observa que la raya entre $\frac{3}{2}$ y $\frac{1}{2}$ es más larga que las otras dos rayas, entre 3 y 2 o entre 1 y 2.

Cuando estudiaste las operaciones inversas, aprendiste que la multiplicación y la división eran operaciones inversas. Esto significa que

$$\frac{8}{2} = 4 \text{ si } 2 \cdot 4 = 8$$

y solamente en ese caso. Esta misma relación vale entre la multiplicación y la división si a, b y x son números racionales, siendo b diferente de cero. Es decir,

$$\frac{a}{b} = x \text{ si } bx = a$$

y sólo en este caso. Por ejemplo,

$$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = x \text{ si } \frac{1}{2}x = \frac{3}{2}$$

y sólo en este caso. Entonces $x = 3$ hace ambos enunciados verdaderos. Otros nombres para x son $\frac{3}{1}$ y $\frac{6}{2}$.

Como otro ejemplo, considera

$$x = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{7}}$$

¿Cómo encuentras x? <u>Puedes</u> encontrarla sin usar las reglas de la división.

$$x = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{7}} \text{ si } \frac{5}{7}x = \frac{3}{2}$$

y sólo en tal caso. En la igualdad de la derecha, $\frac{5}{7}x$ y $\frac{3}{2}$ son dos nombres de un mismo número. Multiplica ahora este número por $\frac{7}{5}$, el recíproco de $\frac{5}{7}$, y utiliza la propiedad asociativa para obtener

$$\left(\frac{7}{5} \cdot \frac{5}{7}\right) \cdot x = \frac{7}{5} \cdot \frac{3}{2}$$

$$1 \cdot x = \frac{7}{5} \cdot \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{7}{5} \cdot \frac{3}{2}$$

Pero al comienzo del ejemplo tenías

$$x = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{7}}$$

Entonces

$$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{7}} = \frac{7}{5} \cdot \frac{3}{2}$$

Usando solamente reglas establecidas anteriormente, hemos mostrado en el ejemplo la razón del enunciado siguiente:

Para encontrar el cociente de dos números racionales escritos como fracciones, se calcula el producto del numerador por el recíproco del denominador. En símbolos:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Ni siquiera es necesario recordar este enunciado para la división de números racionales si se divide de la siguiente manera:

$$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{7}} = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{7}{5}}{\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{5}} = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{7}{5}}{1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{5}$$

Tienes que considerar sólo el denominador y hallar el número por el cual tienes que multiplicarlo para obtener el número 1; luego multiplica el numerador y el denominador por ese número. Otro ejemplo:

$$\frac{\frac{4}{3}}{5} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{5}}{5 \cdot \frac{1}{5}} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{5}}{1} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{15}$$

En un capítulo anterior aprendiste que los números cardinales no forman un conjunto cerrado respecto de la división. En esta sección hemos mostrado un método para encontrar el cociente de dos números racionales cualesquiera, a y b, siendo b diferente de cero. ¿Es cerrado respecto de la división el conjunto de los números racionales, con excepción del cero?

Ejercicios 6-7

1. Expresa cada una de las divisiones siguientes como cociente de dos números cardinales:

(a) $\frac{1}{2} \div \frac{1}{2}$

(b) $\frac{1}{3} \div \frac{3}{1}$

(c) $\frac{4}{1} \div \frac{1}{4}$

(d) $12 \div \frac{1}{6}$

(e) $\frac{1}{10} \div 10$

(f) $\frac{5}{9} \div \frac{5}{9}$

(g) $\frac{5}{9} \div \frac{9}{5}$

(h) $\frac{1}{100} \div 10$

(i) $\frac{5}{8} \div \frac{5}{4}$

(j) $\frac{11}{24} \div \frac{11}{2}$

(k) $\frac{1}{3} \div \frac{1}{2}$

(l) $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$

2. Escribe cada uno de los siguientes cocientes en su forma irreducible. Factoriza los números cuando ello te resulte ventajoso.

(a) $\dfrac{\frac{1}{100}}{\frac{1}{10}}$

(b) $\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}$

(c) $\dfrac{\frac{1}{9}}{8}$

(d) $\dfrac{\frac{9}{16}}{\frac{1}{4}}$

(e) $\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}}$

(f) $\dfrac{\frac{9}{8}}{\frac{1}{2}}$

(g) $\dfrac{\frac{12}{17}}{6}$

(h) $\dfrac{\frac{12}{15}}{\frac{24}{30}}$

(i) $\dfrac{16}{\frac{1}{4}}$

3. Halla los siguientes cocientes. Expresa cada respuesta como un número cardinal, o como un número cardinal más un número menor que 1.

(a) $\frac{1}{4} \div \frac{1}{8}$ (d) $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$ (g) $5 \div \frac{2}{3}$

(b) $15 \div \frac{1}{5}$ (e) $\frac{2}{3} \div \frac{1}{4}$ (h) $7 \div 4$

(c) $\frac{2}{3} \div \frac{1}{12}$ (f) $\frac{3}{4} \div \frac{1}{3}$ (i) $3 \div \frac{1}{2}$

4. Halla los siguientes cocientes en su forma irreducible. Comienza por poner cada fracción en su forma irreducible antes de dividir.

(a) $\dfrac{\frac{1}{9}}{\frac{3}{8}}$ (d) $\frac{2}{3} \div \frac{6}{8}$ (g) $\frac{6}{10} \div \frac{8}{12}$

(b) $\frac{3}{11} \div \frac{5}{5}$ (e) $\frac{4}{6} \div \frac{12}{16}$ (h) $\frac{120}{60} \div \frac{7}{14}$

(c) $\frac{4}{4} \div \frac{5}{5}$ (f) $\frac{11}{22} \div \frac{9}{12}$ (i) $\frac{10}{100} \div \frac{3}{4}$

*5. ¿Crees que la división es conmutativa? Para ver si estás en lo cierto, halla los cocientes que siguen:

(a) $\frac{2}{3} \div \frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2} \div \frac{2}{3}$

*6. ¿Crees que la división es asociativa? A fin de cerciorarte de que tienes razón, calcula estos cocientes:

(a) $\frac{3}{2} \div (\frac{9}{4} \div \frac{7}{6})$ (b) $(\frac{3}{2} \div \frac{9}{4}) \div \frac{7}{6}$

*7. (a) ¿Cuántas veces es $\frac{12}{10}$ mayor que $\frac{12}{100}$?

(b) ¿Cuántas veces es $\frac{4}{7}$ mayor que $\frac{7}{4}$?

6-8. Adición y sustracción de números racionales

Hemos examinado los elementos del conjunto de los números racionales. Sabemos que hay varios nombres para el mismo número racional. Hemos utilizado las operaciones de multiplicación y división. Sólo faltan dos operaciones por considerar: la adición y su operación inversa, la sustracción. Veamos primero la adición.

Estamos familiarizados con la idea de que $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$; y de que $\frac{4}{3} = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$. Continuando con otros números naturales, encontremos una sola fracción para

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{3}$$

Valiéndonos de lo que ya conoces, escribamos esto como

$$\frac{2}{3} = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

y

$$\frac{4}{3} = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

Entonces,

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = 6 \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{3}$$

o también,

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} + \frac{4}{3} &= \left(2 \cdot \frac{1}{3}\right) + \left(4 \cdot \frac{1}{3}\right) \\ &= (2 + 4)\frac{1}{3} = 6 \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{6}{3} \end{aligned}$$

donde hemos usado la propiedad distributiva para obtener la segunda línea.

¿Qué resultado se obtiene al sumar $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{b}$, donde a, b y c son números cardinales y b es diferente de 0? $\frac{a}{b} + \frac{c}{b}$ puede escribirse así: $a \cdot \frac{1}{b} + c \cdot \frac{1}{b}$. Por la propiedad distributiva esto es igual a

$$(a + c) \cdot \frac{1}{b} = \frac{a + c}{b}$$

Si a, b y c son números cardinales y b es diferente de 0, entonces $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$, lo que en palabras puede expresarse así: La suma de dos números cuyas fracciones tienen el mismo denominador es la suma de los numeradores dividida por el denominador común.

Veamos un ejemplo más difícil de adición:

$$\frac{3}{4} + \frac{7}{10}$$

El mínimo común múltiplo de los denominadores 4 y 10 es 20. Escribimos cada una de las fracciones con denominador 20. Recuerda que

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}, \quad y \quad \frac{7}{10} = \frac{7 \cdot 2}{10 \cdot 2} = \frac{14}{20}$$

Luego

$$\frac{3}{4} + \frac{7}{10} = \frac{15}{20} + \frac{14}{20} = \frac{15 + 14}{20} = \frac{29}{20}$$

También

$$\frac{3}{10} + \frac{7}{15} = \frac{3 \cdot 3}{10 \cdot 3} + \frac{7 \cdot 2}{15 \cdot 2} = \frac{9}{30} + \frac{14}{30} = \frac{23}{30}$$

La suma de dos números racionales cualesquiera $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ puede calcularse en forma semejante. Un múltiplo común de b y d es bd, como se verá a continuación:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} = \frac{ad}{bd} \quad y \quad \frac{c}{d} = \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{bc}{bd}$$

Aplicando lo que sabemos de la suma de números racionales cuyas fracciones tienen el mismo denominador, tenemos

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Entonces podemos decir que

si a, b, c y d son números cardinales, siendo b y d diferentes de cero, entonces

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

En el siguiente conjunto de ejercicios verás otra vez que las propiedades conmutativa y asociativa de la adición, así como la propiedad distributiva, se aplican también al sistema de los números racionales.

Ejercicios 6-8a

1. Halla cada una de las siguientes sumas:

   (a) $\frac{2}{3} + \frac{4}{3}$ (d) $4 + \frac{3}{8}$ (g) $\frac{7}{8} + \frac{3}{16}$

   (b) $\frac{4}{3} + \frac{2}{3}$ (e) $\frac{2}{5} + \frac{3}{10}$ (h) $\frac{3}{16} + \frac{7}{8}$

   (c) $\frac{3}{8} + 4$ (f) $\frac{3}{10} + \frac{2}{5}$

2. ¿Se nota que la adición para los números racionales es conmutativa?

3. Halla cada una de las siguientes sumas:

   (a) $(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}) + \frac{4}{3}$ (e) $(\frac{1}{5} + \frac{5}{2}) + \frac{2}{3}$

   (b) $\frac{1}{3} + (\frac{2}{3} + \frac{4}{3})$ (f) $\frac{1}{5} + (\frac{5}{2} + \frac{2}{3})$

   (c) $(\frac{1}{4} + \frac{5}{4}) + \frac{3}{8}$ (g) $(\frac{12}{15} + \frac{6}{3}) + \frac{4}{6}$

   (d) $\frac{1}{4} + (\frac{5}{4} + \frac{3}{8})$ (h) $\frac{12}{15} + (\frac{6}{3} + \frac{4}{6})$

4. ¿Se nota que la adición para los números racionales es asociativa?

*5. (a) ¿Es cierto que $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$ para todos los números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$?

   (b) ¿Qué propiedad de la adición se manifiesta en la pregunta (a)?

*6. (a) ¿Es cierto que $(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + (\frac{c}{d} + \frac{e}{f})$ para todos los números racionales $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ y $\frac{e}{f}$?

   (b) ¿Qué propiedad de la adición se manifiesta en la pregunta (a)?

7. (a) Una vendedora vende tres piezas de cinta de $\frac{7}{8}$ de yarda, $\frac{1}{2}$ yarda y $\frac{1}{4}$ de yarda, respectivamente. ¿Qué cantidad de cinta vendió en total?

   (b) Si la primera y tercera piezas se vendieron a razón de 25 centavos la yarda, y la segunda a 20 centavos la yarda, ¿por cuánto se vendió la cinta entera?

8. En una receta se indican los siguientes ingredientes: $\frac{1}{3}$ lb. de mantequilla, $\frac{1}{2}$ lb. de azúcar, $\frac{1}{8}$ lb. de cocoa y $\frac{1}{6}$ lb. de maní. ¿Cuánto pesan todos esos ingredientes juntos?

Teniendo presentes las propiedades conmutativa y asociativa de la adición, podemos encontrar la suma de $2\frac{1}{4}$ y $3\frac{5}{8}$ muy fácilmente.

$$\begin{aligned} 2\tfrac{1}{4} + 3\tfrac{5}{8} &= (2 + \tfrac{1}{4}) + (3 + \tfrac{5}{8}) \\ &= (2 + 3) + (\tfrac{1}{4} + \tfrac{5}{8}) \\ &= (2 + 3) + (\tfrac{2}{8} + \tfrac{5}{8}) \\ &= 5 + \tfrac{7}{8} \\ &= 5\tfrac{7}{8} \end{aligned}$$

por las propiedades conmutativa y asociativa

¿Te parece esto conocido? Probablemente dispondrías tu trabajo en forma un poco diferente, pero ¿no has trabajado en forma análoga? Probablemente has escrito tu problema verticalmente en vez de hacerlo horizontalmente.

Podrías efectuar tus cálculos también de esta manera.

$$\begin{aligned} 2\tfrac{1}{4} + 3\tfrac{5}{8} &= \tfrac{9}{4} + \tfrac{29}{8} \\ &= \tfrac{18}{8} + \tfrac{29}{8} \\ &= \tfrac{47}{8} \\ &= 5\tfrac{7}{8} \end{aligned}$$

Ejercicios 6-8b

1. Halla cada una de las siguientes sumas:

(a) $\begin{array}{r} 1\frac{1}{3} \\ + 2\frac{2}{3} \\ \hline \end{array}$ (b) $\begin{array}{r} 33\frac{1}{3} \\ + 66\frac{2}{3} \\ \hline \end{array}$ (c) $\begin{array}{r} 16\frac{1}{2} \\ + 37\frac{1}{3} \\ \hline \end{array}$ (d) $\begin{array}{r} 30 \\ + 7\frac{4}{5} \\ \hline \end{array}$

2. Halla cada una de las siguientes sumas en dos formas diferentes:

(a) $4\frac{1}{8} + 3\frac{4}{8}$ (b) $8\frac{5}{16} + 1\frac{13}{16}$ (c) $2\frac{12}{32} + 14\frac{23}{32}$

3. Efectúa las operaciones siguientes:

(a) $\frac{1}{32} + \frac{1}{32}$

(b) $1\frac{1}{16} + \frac{10}{16}$

(c) $1\frac{2}{7} + \frac{1}{14}$

(d) $\frac{73}{64} + \frac{20}{32}$

(e) $\frac{10}{21} + 5\frac{2}{3}$

(f) $\frac{2}{10} + \frac{3}{100} + \frac{1}{1000}$

(g) $(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5})$

(h) $\frac{1}{3}(\frac{1}{2} + \frac{1}{5})$

(i) $(\frac{3}{8} + \frac{6}{9})\frac{2}{5}$

(j) $(\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8}) + (\frac{2}{5} \cdot \frac{6}{9})$

(k) $3\frac{1}{2} + 4\frac{2}{3} + 7\frac{5}{6}$

(l) $\frac{19}{20} + 1\frac{2}{5} + 4\frac{7}{10}$

4. (a) Compara tus resultados de 3(g) y 3(h).
(b) Compara tus resultados de 3(i) y 3(j).

5. Halla los números:

(a) $\frac{0}{3} + \frac{7}{8}$ (b) $(3 + 5) \div (\frac{1}{3} + \frac{1}{5})$ (c) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$

6. En cada uno de los siguientes ejemplos, trata primero de efectuar mentalmente las operaciones. Luego verifica, efectuando tus cálculos con papel y lápiz.

(a) $1 \div (\frac{1}{3} \div \frac{1}{5})$ (b) $(1 \div \frac{1}{3}) \div \frac{1}{5}$

7. Basándote en los resultados obtenidos en 6(a) y 6(b), ¿dirías que la división es asociativa?

8. En el cuadrado mágico que sigue, suma los números de cada columna. Luego, sumando horizontalmente, encuentra la suma de los números de cada fila. Ahora suma los números de cada diagonal (de la esquina superior izquierda a la esquina inferior derecha, etc.).

$11\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$	$8\frac{3}{4}$
5	$7\frac{1}{2}$	10
$6\frac{1}{4}$	$12\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$

9. Un hombre gasta $\frac{1}{5}$ de su salario en alquiler de casa, $\frac{1}{3}$ en alimentos, $\frac{1}{6}$ en ropa y $\frac{1}{4}$ en servidumbre y obsequios. El resto lo economiza. De cada dólar que gana, ¿cuánto economiza?

Como la sustracción está tan estrechamente ligada a la adición, no necesitamos rehacer todo el camino que ya hemos seguido. Como en la adición, si las fracciones tienen el mismo denominador, simplemente sustraemos los numeradores y colocamos esta diferencia sobre el denominador común. Por ejemplo,

$$\frac{12}{7} - \frac{9}{7} = \frac{12 - 9}{7} = \frac{3}{7}$$

Como la sustracción es la operación inversa de la adición,

$$\frac{12}{7} - \frac{9}{7} = \frac{3}{7}$$

significa lo mismo que

$$\frac{9}{7} + \frac{3}{7} = \frac{12}{7}.$$

En símbolos, esta relación de dos números racionales puede escribirse

$\frac{c}{b} - \frac{a}{b} = \frac{c - a}{b}$ donde b es diferente de cero y c es mayor o igual que a.

Recuerda que los números racionales de este capítulo no son cerrados respecto de la sustracción.

Si dos fracciones tienen diferentes denominadores, podemos reescribir cada una de ellas con un mismo denominador. Usemos este ejemplo: $\frac{4}{5} - \frac{5}{7}$.

$$\begin{aligned} \frac{4}{5} - \frac{5}{7} &= \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{7}{7}\right) - \left(\frac{5}{7} \cdot \frac{5}{5}\right) \\ &= \frac{28}{35} - \frac{25}{35} \\ &= \frac{28 - 25}{35} \\ &= \frac{3}{35} \end{aligned}$$

Verifica tu respuesta, sumando

$$\frac{3}{35} + \frac{5}{7} = \frac{4}{5}$$

Como en el caso de la adición de números racionales, este mismo procedimiento puede ser aplicado al caso general $\frac{c}{d} - \frac{a}{b}$.

$$\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = (\frac{c}{d} \cdot \frac{b}{b}) - (\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{d})$$

$$= \frac{cb}{bd} - \frac{ad}{bd}$$

$$= \frac{cb - ad}{bd}$$

Entonces $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{cb - ad}{bd}$ si (cb) es mayor o igual que (ad) y b y d son diferentes de cero.

Ejercicios de clase 6-8

1. (a) $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}$ (f) $\frac{11}{12} - \frac{2}{3}$ (k) $\frac{17}{18} - \frac{1}{9}$
   (b) $\frac{5}{6} - \frac{4}{6}$ (g) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ (l) $\frac{1}{100} - \frac{9}{1000}$
   (c) $\frac{9}{8} - \frac{2}{8}$ (h) $\frac{3}{5} - \frac{2}{7}$ (m) $(\frac{7}{12} - \frac{4}{12}) - \frac{2}{12}$
   (d) $\frac{3}{4} - \frac{3}{16}$ (i) $\frac{23}{100} - \frac{1}{10}$ (n) $(\frac{3}{8} + \frac{2}{8}) - \frac{3}{8}$
   (e) $\frac{15}{16} - \frac{5}{8}$ (j) $\frac{5}{8} - \frac{16}{32}$ (o) $(\frac{2}{9} + \frac{5}{9}) - \frac{3}{9}$
2. Expresa de otras maneras estos números racionales:
   (a) $\frac{9}{8}$ (b) $2\frac{3}{4}$ (c) $\frac{8}{5}$ (d) $5\frac{2}{3}$

Sabemos ahora cómo restar dos números racionales cualesquiera cuando su resultado es un número racional. Observa este problema:

$$5\frac{2}{3} - 2\frac{1}{2}$$

donde $5\frac{2}{3}$ y $2\frac{1}{2}$ pueden escribirse como fracciones.

$$5\frac{2}{3} - 2\frac{1}{2} = \frac{17}{3} - \frac{5}{2}$$

$$= \left(\frac{17}{3} \cdot \frac{2}{2}\right) - \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{3}\right)$$

$$= \frac{34}{6} - \frac{15}{6}$$

$$= \frac{19}{6}$$

$$= 3\frac{1}{6}$$

¿Lo verificamos mediante la suma?

Probablemente has aprendido una manera ligeramente distinta de restar, y preferirías resolver este mismo problema así:

$$\begin{array}{rcr} 5\frac{2}{3} & = & 5\frac{4}{6} \\ -\ 2\frac{1}{2} & = & -\ 2\frac{3}{6} \\ \hline & & 3\frac{1}{6} \end{array}$$

Efectuando la prueba, para ver si la respuesta es correcta, encontramos que

$$2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{6} = 2 + \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{6}$$

$$= (2 + 3) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)$$ Por la propiedad asociativa de la adición.

$$= 5 + \frac{2}{3}$$

$$= 5\frac{2}{3}$$

En el problema de sustracción que sigue nos resultará conveniente reescribir los números racionales en forma de fracciones. Hemos escrito el número racional $8\frac{1}{3}$ como $\frac{25}{3}$. Escribámoslo aún de otra manera. Utilizando la ley asociativa, puedes escribir $8\frac{1}{3} = 8 + \frac{1}{3} = (7 + 1) + \frac{1}{3} = 7 + (1 + \frac{1}{3}) = 7 + \frac{4}{3}$. ¿Puedes poner por escrito el razonamiento, como se acaba de hacer, para escribir $7\frac{1}{4}$ como $6 + \frac{5}{4}$? ¿Para escribir $12\frac{3}{8}$ como $11 + \frac{11}{8}$? ¿Para escribir $13\frac{2}{3}$ como $12 + \frac{5}{3}$?

En el siguiente problema:

$$8\frac{1}{3} - 2\frac{5}{6}$$

encontramos conveniente escribir $8\frac{1}{3}$ como $7\frac{4}{3}$, puesto que $\frac{5}{6}$ es mayor que $\frac{1}{3}$. Como consecuencia, $\frac{5}{6}$ no es mayor que $\frac{4}{3}$.

$$\begin{aligned}
8\frac{1}{3} - 2\frac{5}{6} &= (8 + \frac{1}{3}) - (2 + \frac{5}{6}) \\
&= (7 + \frac{4}{3}) - (2 + \frac{5}{6}) \\
&= (7 + \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 2}) - (2 + \frac{5}{6}) \\
&= (7 + \frac{8}{6}) - (2 + \frac{5}{6}) \\
&= (7 - 2) + (\frac{8}{6} - \frac{5}{6}) \\
&= 5 + \frac{3}{6} \\
&= 5\frac{3}{6} \\
&= 5\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Podrías haber escrito esto así:

$$\begin{array}{rcccl}
8\frac{1}{3} & = & 7\frac{4}{3} & = & 7\frac{8}{6} \\
- 2\frac{5}{6} & = & 2\frac{5}{6} & = & 2\frac{5}{6} \\
\hline
 & & & & 5\frac{3}{6} = 5\frac{1}{2}
\end{array}$$

Ejercicios 6-8c

1. Expresando las respuestas en su forma irreducible, efectúa las sustracciones siguientes:

   (a) $\frac{15}{64} - \frac{7}{64}$

   (b) $\frac{24}{16} - \frac{9}{16}$

   (c) $\frac{8}{9} - \frac{2}{3}$

   (d) $3\frac{4}{5} - \frac{1}{3}$

   (e) $5\frac{9}{16} - 2\frac{5}{8}$

   (f) $\frac{14}{6} - \frac{11}{9}$

   (g) $(4\frac{1}{2} - 1\frac{1}{4}) - 2$

   (h) $16\frac{2}{3} - \frac{7}{3}$

   (i) $\frac{90}{100} - \frac{109}{1000}$

   (j) $(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6}) - (\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6})$

   (k) $\frac{2}{3}(\frac{5}{6} - \frac{1}{6})$

   (l) Compara tus resultados de (j) y (k).

   (m) Como consecuencia de tus cálculos de (j), (k) y (l), ¿piensas que la multiplicación es distributiva con respecto a la sustracción?

2. Juan vive a una distancia igual a $\frac{5}{16}$ de milla de la escuela. Irma vive a $\frac{3}{7}$ de milla de la escuela.
   (a) ¿Quién vive más lejos de la escuela?
   (b) Demuestra que tu cálculo es correcto.

*3. Víctor, Mario y Roberto construyeron una casa club. Víctor vive a $\frac{2}{3}$ de milla del club, Mario a $\frac{5}{8}$ de milla y Roberto a $\frac{7}{9}$ de milla del club. En el diagrama que sigue, A representa la casa del joven que vive más cerca del club, B la del siguiente y C la del que vive más lejos. ¿Cuál de los jóvenes vive en A? ¿En C? ¿En B? ¿Cuánto más lejos del club está B que A? ¿Cuánto más lejos está C que A?

4. El largo de un terreno es $30\frac{1}{2}$ varas. Su ancho es $15\frac{3}{4}$ varas. Encuentra la diferencia entre el largo y el ancho del terreno.

5. Julio corre las 100 yardas planas en $11\frac{1}{5}$ segundos. Braulio las vence en $10\frac{4}{5}$ segundos. ¿Cuántos segundos más ha necesitado Julio que Braulio para correr las 100 yardas?

6. María está haciendo un delantal que requiere $1\frac{5}{8}$ yardas de tela, y tiene una pieza de $4\frac{3}{4}$ yardas. ¿Qué cantidad de tela dejará de utilizar?

7. Jaime sale de su casa a las 5:15 p.m. Tarda $\frac{1}{4}$ de hora en recoger unos papeles, $1\frac{1}{4}$ horas para entregarlos y $\frac{1}{4}$ de hora para regresar a su casa. Cena y llega al cine a las 7:45 p.m. ¿Cuánto demoró en cenar e ir al cine?

8. El señor Pérez ha cambiado el precio de las patatas de $4\frac{1}{2}$ cts. por libra a 14 cts. las 3 libras.
   (a) ¿Subió o bajó el precio?
   (b) ¿De cuánto fue el aumento o disminución por libra?

9. (a) ¿Es la diferencia entre $17\frac{1}{4}$ y $6\frac{3}{4}$ mayor o menor que 11?
   (b) ¿Cómo puedes averiguarlo sin efectuar los cálculos?

10. ¿Cambia el número representado por una fracción si sustraes un mismo número del numerador y el denominador? Da un ejemplo.

*11. Llena los lugares vacíos en el cuadrado mágico que se da a continuación, de manera que las sumas de los números de cada fila sean iguales. Luego halla las sumas de los números de cada columna y de ambas diagonales.

$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$
$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{6}$

6-9. Razones expresadas mediante números racionales

Usando los números, probablemente te has dado cuenta de que puedes comparar dos números por sustracción o por división. De los dos números, 6 y 2, podemos decir que el primero tiene 4 unidades más que el segundo, o que el primer número es tres veces mayor que el segundo. Podemos también decir que la razón o relación del primero al segundo es de 3 a 1, o que es 3. Comparando 9 y 2 decimos, a veces, que la razón de esos números es de 9 a 2 ó $\frac{9}{2}$. Nueve es cuatro y media veces mayor que el número 2.

Definición. La razón o relación de un número c a un número d, $d \neq 0$, es $\frac{c}{d}$.

Si c y d son números naturales, la razón $\frac{c}{d}$ es un número racional.

En un aula de 36 alumnos hay 16 niñas. La razón del número de niñas de la clase al número total de alumnos es $\frac{16}{36}$ ó $\frac{4}{9}$.

Entonces, $\frac{4}{9}$ de los alumnos del aula son niñas: $36 \cdot (\frac{4}{9}) = 16$. La razón del número de alumnos de la clase al número de niñas de la misma es $\frac{36}{16}$ ó $\frac{9}{4}$. El número total de alumnos de la clase es dos y un cuarto veces mayor que el de niñas. Nota que $\frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4}$.

Si un automóvil recorre 258 millas en 6 horas, la razón del número de millas recorridas al número de horas de viaje es $\frac{258}{6}$ ó $\frac{43}{1}$ ó 43. Esta razón, 43, se llama habitualmente velocidad del automóvil y con frecuencia se expresa en millas por hora. En los ejemplos de movimientos, como el del automóvil, podías haber usado la fórmula

$$d = rt$$

donde d representa el número de unidades recorridas, r la velocidad, y t el tiempo de recorrido. Si d = 258 y t = 6, entonces

$$6r = 258$$
$$r = 43$$

r es la razón de 258 a 6, o el número racional $\frac{258}{6}$. Otros nombres para $\frac{258}{6}$ son $\frac{43}{1}$ y 43.

Las razones son muy útiles en varias aplicaciones de las matemáticas. En el resto de nuestro estudio, durante este año y el próximo, veremos otros ejemplos de razones. Algunas de las aplicaciones de las razones se ilustran en los ejercicios.

Ejercicios 6-9

1. Expresa las siguientes razones como números racionales en su forma irreducible:
   (a) De 3 pies a 10 pies.
   (b) De una calificación de 75 a una calificación de 90.
   (c) De 56 libras a 12 libras.
   (d) De $\frac{9}{2}$ a $\frac{7}{2}$.
   (e) De $\frac{5}{4}$ pulgadas a 2 pulgadas.
   (f) De 90 centavos a 75 centavos.
   (g) De 15,000 personas a 25,400 personas.
   (h) De 90 grados a 55 grados.
2. Un avión vuela 2,600 millas en 5 horas.
   (a) ¿Cuál es su velocidad por hora?
   (b) ¿Cuál es la razón del número de millas recorridas al número de horas de vuelo?
3. La razón de 5 pulgadas a una yarda puede expresarse como $\frac{5}{1}$, o, si convertimos las yardas en pulgadas, la relación es $\frac{5}{36}$. Al utilizar las razones debemos estar bien seguros de las unidades que usamos. ¿Qué ventaja podría significar la representación de la razón de 5 pulgadas a una yarda como $\frac{5}{36}$?
4. La escala en un mapa es de 1 pulgada por 20 millas.
   (a) Expresa esta escala como una razón.
   (b) ¿Cuántas millas representa un segmento de longitud $4\frac{1}{4}$ pulgadas medido sobre el mapa?

5. Centerville es un pueblo cuyos límites forman un rectángulo de 3 millas de largo y 2 de ancho. Usando una escala de 1 pulgada para $\frac{1}{8}$ de milla, ¿qué longitud y qué ancho tendrá el plano del pueblo?

6. Un mapa de los Estados Unidos está dibujado a una escala tal que 10 pulgadas corresponden a 3,000 millas.
   (a) Expresa esta escala como una razón.
   (b) ¿Cuántas millas corresponderán a un pie medido sobre el mapa?
   (c) La distancia de Wáshington a Chicago es, aproximadamente, de 750 millas. ¿Cuál será, en el mapa, la distancia entre esas ciudades?

7. En un dibujo a escala de la planta de un edificio escolar, una pulgada representa 6 pies.
   (a) Expresa esta escala como una razón.
   (b) En el plano a escala, ¿cuántos pies se representan por un segmento de 20 pulgadas de longitud?
   (c) En el dibujo de (b), ¿cuál es la razón de la longitud del segmento al número de pies que dicho segmento representa?

8.

X	1	2	3	4	5	6
3X	3	6	9	12	15	18

Encuentra la razón de cada número de la segunda fila de la tabla a su correspondiente número de la primera fila.

9.

2	4	5	8	10		
5	10	$12\frac{1}{2}$	20		30	40

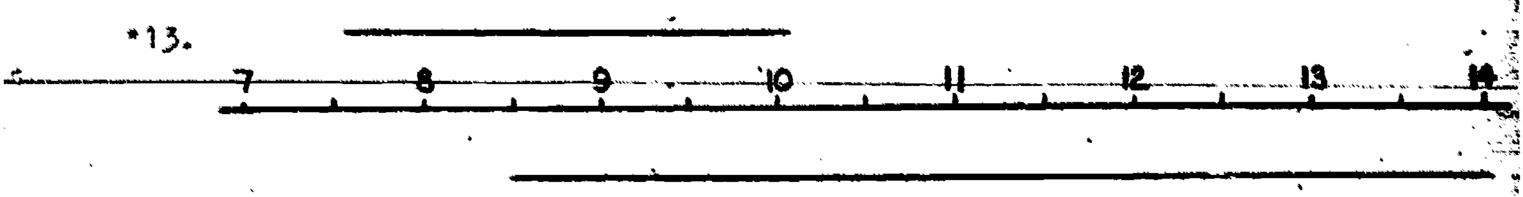
Supón que la razón de cada par de números correspondientes (números en la misma columna vertical) de la tabla es la misma. ¿Cuáles son los números que faltan?

10. En un termómetro, cada pulgada de mercurio representa 40 grados de temperatura.
    (a) ¿Cuántas pulgadas de mercurio representarán una temperatura de 60 grados, suponiendo que la escala de temperatura empieza en cero?
    (b) ¿Y en el caso de una temperatura de 67 grados?

11. Un cuarto de galón de jugo de naranja en conserva se vende por 54 centavos, y un galón del mismo jugo, por \$1.98. Halla la relación del precio de venta en centavos al número de pintas, en ambos casos. (Un galón contiene 8 pintas.)

12. El costo de una bicicleta el 1° de enero de 1961 es $\frac{11}{10}$ del costo de la misma bicicleta el 1° de enero de 1959.
    (a) ¿Cuál es la razón del costo en esta última fecha al costo en el 1° de enero de 1961?
    (b) Si el precio de la bicicleta era \$66 el 1° de enero de 1961, ¿cuánto costaba dos años antes?

*13.



La longitud del segmento que está encima de la escala es 2 pulgadas. Encuentra, sin medir, la longitud del segmento que está debajo.

*14. Un hombre mide 5 pies 7 pulgadas; y su hijo, 6 pies 2 pulgadas.

(a) ¿Cuál es la razón de la estatura del padre a la del hijo?

(b) ¿Cuántas veces mayor es la estatura del padre que la estatura del hijo?

(c) ¿Cuántas veces menor es la estatura del hijo que la estatura del padre?

6-10. Notación decimal

En tu experiencia diaria probablemente has usado la notación decimal para los números racionales. Por ejemplo, decimos un cuarto para referirnos a 25 centavos o una cuarta parte de un dólar. Frecuentemente escribimos 0.25 como un nombre para $\frac{25}{100}$. Como $\frac{25}{100}$ es un nombre de un cuarto, vemos que 0.25, $\frac{25}{100}$ y $\frac{1}{4}$ son diferentes nombres para el mismo número racional. Como razones, los nombres de números en este ejemplo, expresan la razón del número de centavos de un cuarto al número de centavos de un dólar.

$\frac{3}{10}$, 0.3, $\frac{30}{100}$ y 0.30 son nombres para el número racional n, para el cual $10n = 3$ es una proposición verdadera. Notarás que la notación decimal para $\frac{3}{10}$ es 0.3. En los símbolos escritos, o nombres para números entre 0 y 1, se usa un cero en el primer lugar a la izquierda del punto decimal de manera que este punto no pase inadvertido. También el 0 en el lugar de las unidades indica que no hay unidades en el número o que el número está entre 0 y 1.

La notación decimal para $\frac{3}{1000}$ es 0.003.

El numeral 1.87 se lee uno y ochenta y siete centésimos. En términos monetarios diríamos \$1.87. La forma decimal, 1.87, es un nombre para $1 + \frac{87}{100}$, el que, a su vez, es un nombre para el número racional $\frac{187}{100}$.

Algunos nombres "decimales" que usamos frecuentemente para números racionales son:

$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0.25$ $\quad\frac{1}{2} = \frac{50}{100} = 0.50$ ó $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0.5$

$\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0.75$ $\quad\frac{3}{10} = 0.3$ $\quad\frac{1}{8} = \frac{125}{1000} = 0.125$

Supón que queremos escribir $\frac{7}{8}$ en notación decimal. Sabemos que $\frac{7}{8} = 7 \div 8$, entonces dividamos:

$$8 \overline{)\,7.000\,}\quad 0.875$$

Vemos que se puede escribir $\frac{7}{8}$ como 0.875. Podemos comprobar este resultado verificando si $\frac{7}{8} = 0.875$ (ó $\frac{875}{1000}$) es una proposición verdadera. Vemos que

$$\frac{875}{1000} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{5}{5} \cdot \frac{5}{5} \cdot \frac{5}{5} \cdot \frac{7}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{7}{8}$$

Observemos que los nombres decimales como nombres de algunos números racionales se pueden obtener por división.

<u>Ejemplo.</u>

$$4 \overline{)\,3.00\,}\quad 0.75 \qquad\qquad \frac{3}{4} = 0.75$$

$$\begin{array}{r} 0.3125 \\ 16 \overline{)\,5.0000} \\ 4\ 8 \\ \hline 20 \\ 16 \\ \hline 40 \\ 32 \\ \hline 80 \\ 80 \\ \hline \end{array} \qquad\qquad \frac{5}{16} = 0.3125$$

0.3125 se lee tres mil ciento veinticinco diezmilésimas

$$0.3125 = 0(1) + 3(\tfrac{1}{10}) + 1(\tfrac{1}{100}) + 2(\tfrac{1}{1000}) + 5(\tfrac{1}{10000})$$

En la adición de números racionales nos valemos de la propiedad distributiva.

<u>Ejemplo.</u>

$$\frac{32}{100} + \frac{55}{100} = 32(\tfrac{1}{100}) + 55(\tfrac{1}{100})$$
$$= (\tfrac{1}{100})(32 + 55) = (\tfrac{1}{100})(87) = \frac{87}{100}$$

Si deseamos usar notación decimal, podemos reemplazar $\frac{1}{100}$ por 0.01, $\frac{32}{100}$ por 0.32, y $\frac{55}{100}$ por 0.55,

$$0.32 + 0.55 = 32(0.01) + 55(0.01)$$
$$= (0.01)(32 + 55) = (0.01)(87) = 0.87$$

Si no estás seguro del último producto, $(0.01)(87)$, puedes recordar que

$$(0.01)(87) = (\frac{1}{100})(87) = \frac{87}{100}, \text{ o sea } 0.87$$

Este y otros ejemplos pueden convencerte de que la notación decimal facilita el trabajo. Si escribimos este ejercicio de adición en una columna, sólo necesitamos poner

$$\begin{array}{r} 0.32 \\ +\ \underline{0.55} \\ 0.87 \end{array}$$

Usando la propiedad distributiva en la notación decimal, sumamos décimas a las décimas y centésimas a las centésimas.

Consideremos otro ejemplo:

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{1}{4}(3 + 2) = \frac{1}{4}(5) = \frac{5}{4}$$

o, en notación decimal,

$$0.75 + 0.50 = 0.01(75 + 50) = 0.01(125) = 1.25$$

En columnas tendríamos:

$$\begin{array}{r} 0.75 \\ +\ \underline{0.50} \\ 1.25 \end{array}$$

En este ejemplo hemos usado

$$\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0.75, \qquad \frac{1}{2} = \frac{50}{100} = 0.50,$$

$$0.75 = (0.01)75, \qquad 0.50 = (0.01)50,$$

y $\quad (0.01)125 = 1.25.$

Para ver por qué $(0.01)125 = 1.25$, reemplaza 0.01 por $\frac{1}{100}$ y obtendrás:

$$(0.01)125 = (\frac{1}{100})125 = \frac{125}{100} = 1 + \frac{25}{100} = 1.25$$

Ejercicios 6-10

1. Expresa los siguientes números racionales en notación decimal:

(a) $\frac{1}{2}$	(e) $\frac{34}{100}$	(i) $\frac{5}{8}$
(b) $\frac{1}{4}$	(f) $\frac{5}{4}$	(j) $\frac{1}{16}$
(c) $\frac{3}{5}$	(g) $\frac{11}{4}$	(k) $\frac{15}{16}$
(d) $\frac{7}{10}$	(h) $\frac{8}{5}$	(l) $\frac{60}{16}$

En las tres últimas preguntas, emplea cuatro cifras decimales.

2. Escribe los siguientes decimales como números racionales en su forma irreducible:

(a) 0.75	(e) 0.36	(i) 0.825
(b) 1.75	(f) 2.36	(j) 0.875
(c) 0.6	(g) 0.140	(k) 1.506
(d) 5.5	(h) 0.012	(l) 2.008

3. Escribe los decimales del problema 2 en palabras.
4. Suma: $10.57, $4.17, $5.92, $21.72, $3.06 y $5.09.
5. Suma los números racionales en forma de fracción, luego cambia todos a la notación decimal y súmalos: $\frac{5}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{2}$ y $\frac{5}{8}$.
6. Suma los números: 1.4, 3.75, 10.06, 3.7, 0.096 y 9.99.
7. Se han medido las longitudes de varias piezas de madera, con una aproximación de 0.1 de pie. Las longitudes son:

   6.3, 8.2, 9.7, 1.6, 2.8 y 3.9.

   (a) Halla la suma de esas longitudes.
   (b) Halla la diferencia de longitud entre la pieza más corta y la más larga.
8. Halla los productos, cambiando los decimales a fracciones si eso te facilita el trabajo.

(a) 4(0.01)	(d) 240(0.01)	(g) (0.1)(0.01)
(b) 25(0.1)	(e) 1,492(0.01)	*(h) (2.3)(1.2)
(c) 356(0.001)	(f) 673(0.1)	

*9. Escribe en notación decimal, correcta con la aproximación de 0.001:

(a) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{1}{11}$ (g) $\frac{41}{3}$

(b) $\frac{5}{6}$ (e) $\frac{1}{9}$ (h) $\frac{55}{7}$

(c) $\frac{4}{9}$ (f) $2\frac{3}{8}$ (i) $\frac{1000}{6}$

*(j) $\frac{2134}{21}$

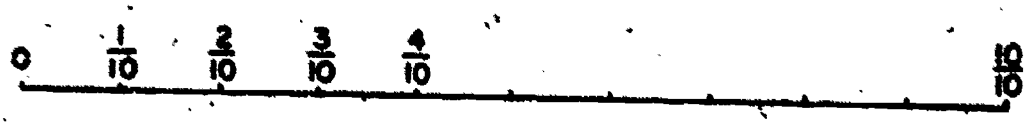
*10. Utiliza la propiedad distributiva para mostrar por qué la suma de 3.25 y 6.71 es 9.96.

6-11. Ordenación

Hemos estudiado métodos para saber si dos fracciones representan el mismo número. Frecuentemente es importante saber cuál de entre dos fracciones desiguales representa el número mayor. Si en una tienda puedes comprar tres manzanas por diez centavos, y en otra sólo dos manzanas por el mismo precio, es fácil ver que las manzanas son más baratas en la primera tienda, pues puedes comprar más manzanas con la misma moneda. Esto también se puede ver observando que en la primera tienda recibes $\frac{3}{10}$ de manzana por un centavo, y en la segunda sólo recibes $\frac{2}{10}$ de manzana por un centavo. Sabemos que $\frac{3}{10}$ es mayor que $\frac{2}{10}$, lo que se puede escribir así:

$$\frac{3}{10} > \frac{2}{10}$$

Sobre la recta numérica



$\frac{3}{10}$ está a la derecha de $\frac{2}{10}$.

El problema sería más difícil si en la primera tienda pudieras comprar 3 manzanas por cinco centavos, y en la segunda 8 manzanas por 13 centavos. Entonces tendríamos que responder a esta pregunta:

$$¿\text{Es } \frac{3}{5} > \frac{8}{13}?$$

Se necesitaría un dibujo bien hecho para contestar la pregunta a base de la recta numérica. Para hallar la respuesta hay, por lo menos, dos métodos mejores.

<u>Método 1.</u> Convertimos ambas fracciones a la forma decimal y comparamos los resultados. Entonces tenemos que $\frac{3}{5} = 0.60$ y $\frac{8}{13} = 0.61...$ como se puede ver en la siguiente división:

$$\begin{array}{r} 0.61 \\ 13\,\overline{)\,8.00} \\ \underline{7\,8} \\ 20 \\ \underline{13} \\ 7 \end{array}$$

Sólo es necesario efectuar la división con dos cifras decimales para ver que los valores decimales de las dos fracciones son diferentes.

<u>Método 2.</u> Utilizamos el método del ejemplo 3 de la Sección 6-5; esto es, buscamos dos fracciones con denominadores iguales que representen los números dados. Como los denominadores son 5 y 13, el menor denominador que podemos usar para ambas fracciones será el mínimo común múltiplo de 5 y 13, que es 65. Entonces

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 13}{5 \cdot 13} = \frac{39}{65} \quad \text{y} \quad \frac{8}{13} = \frac{8 \cdot 5}{13 \cdot 5} = \frac{40}{65}$$

Como $\frac{40}{65} > \frac{39}{65}$, comprobamos que $\frac{8}{13} > \frac{3}{5}$.

Ambos métodos muestran que, si dividimos la recta numérica en 65 divisiones iguales, el punto que representa $\frac{8}{13} = \frac{40}{65} = 0.615...$ está a la derecha del punto que representa $\frac{3}{5} = \frac{39}{65} = 0.6000$.

Una fracción cuyo numerador es mayor que el denominador se llama, frecuentemente, una <u>fracción impropia</u>. El número representado por tal fracción debe ser mayor que 1. Para ver por qué esto es así, considera la fracción $\frac{13}{11}$, que es mayor que $\frac{11}{11}$, la que, a su vez, es igual a 1. Entonces $\frac{13}{11}$ es mayor que 1. En forma semejante, $\frac{3568}{3452}$ es mayor que 1 puesto que es mayor que $\frac{3452}{3452}$, que es igual a 1.

Ejercicios 6-11

1. Para cada uno de los siguientes pares de fracciones, indica cuál de ellas representa el número mayor:

   (a) $\frac{7}{12}$ y $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{4}{5}$ y $\frac{13}{16}$ (c) $\frac{13}{15}$ y $\frac{13}{7}$

2. ¿Qué es más barato, cinco naranjas por once centavos o cuatro naranjas por nueve centavos?

3. El jugo de piña de la marca A viene en latas de 15 onzas, mientras que el de la marca B viene en latas de 8 onzas. Si la marca A se vende a 23 centavos la lata y la marca B a 12 centavos la lata, ¿cuál es la más barata?

4. Si el numerador de una fracción es mayor que el doble de su denominador, muestra que el número representado por la fracción es mayor que 2.

*5. Si dos fracciones tienen iguales denominadores y si el numerador de la primera es mayor que el numerador de la segunda, entonces el número representado por la primera fracción es mayor que el representado por la segunda. Supón que dos fracciones tienen iguales los numeradores; ¿cómo puedes decir, comparando los denominadores, qué fracción representa al número mayor? (Ensaya con algunos pares de fracciones primero, para ver cómo resulta.)

Capítulo 7

MEDICION

7-1. Contar y medir

En la vida diaria y en el trabajo, muchas preguntas comienzan con "¿Cuánto?" o con "¿A qué velocidad?" Preguntamos, "¿Cuántas personas fueron al juego de pelota?" o "¿Cuánta carne debo comprar?" o "¿A qué velocidad viaja un avión a retropropulsión?" Las respuestas que esperamos para esas preguntas son semejantes en el sentido de que todas contienen números. Pero las respuestas para algunas de ellas se encuentran contando, y para otras, midiendo.

Cuando preguntamos: "¿Cuántas personas fueron al juego de pelota?", encontramos la respuesta contando; cada persona es un objeto separado, íntegro. No hay fracciones de persona en un juego de pelota. Las personas no son todas iguales, ni del mismo tamaño, pero cada una es una persona. Cuando las contamos utilizamos sólo los números naturales, y nuestra respuesta es un número natural. Hay 78 ó 79 personas: no es posible que haya $78\frac{1}{2}$ ó $79\frac{1}{4}$ personas.

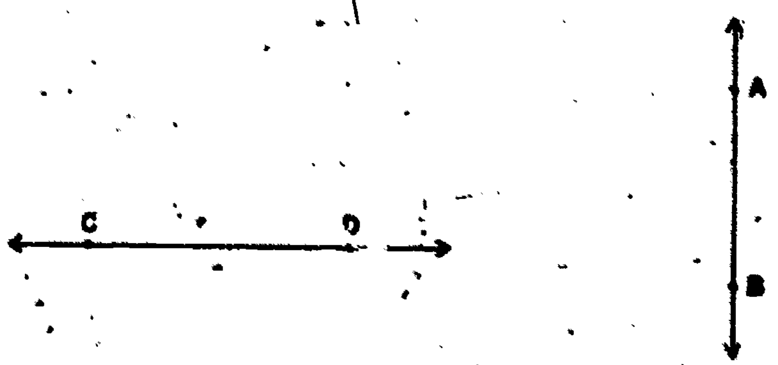
Cuando preguntamos: "¿Qué longitud tiene esta cuerda?", no podemos encontrar la respuesta contando, porque la cuerda es un objeto continuo; no está hecho de partes separadas que podamos contar. Tenemos que encontrar su longitud midiéndola. Luego, la respuesta es cierto número de unidades. Podemos decir que tiene 45 pulgadas, o $3\frac{3}{4}$ pies, o $1\frac{1}{4}$ yardas de longitud. Para responder a la pregunta, usamos un número racional que frecuentemente no es un número natural. Para responder a la pregunta: "¿A qué velocidad puede viajar un avión a retropropulsión?" debemos usar dos unidades. Utilizando una unidad de distancia y otra de tiempo, podemos decir: "Puede viajar a 1,200 millas por hora".

En el presente capítulo vamos a estudiar maneras de medir cosas que son continuas. Cuando preguntamos: "¿Cuántos?", pensamos en un conjunto de objetos y deseamos tener una medida de cuántos son. A veces se le llama distreto a un conjunto de esta clase. Cuando preguntamos: "¿Cuánto?", "¿Qué longitud?", "¿A qué velocidad?", etc., tratamos de describir algo concebido como de una sola pieza, sin divisiones. Cuando pensamos en algo así, lo llamamos un conjunto continuo. Los conjuntos de personas, casas, animales, bolitas o clavijas, son conjuntos discretos; acerca de ellos queremos conocer "¿cuántos son?" A una cuerda, un alambre, una carretera o un mástil se los concibe como continuos, pues son como segmentos de rectas. Podemos contar un número de segmentos de recta, pero no el número de todos los puntos de un segmento. Se pueden concebir las telas, una pizarra, un campo de fútbol y un pastizal como regiones encerradas por curvas simples cerradas y, por consiguiente, son continuos; podemos contar campos de fútbol, pero no se acostumbra contar un campo de fútbol.

Propiedades de las cantidades continuas

Las cantidades continuas que deseamos medir pueden tener diferentes naturalezas. Algunas cantidades o conjuntos continuos se conciben como segmentos de recta; otros como encerrados por curvas simples, y otros aún, como volúmenes o capacidades. Por ejemplo, se puede imaginar tu estatura, o la correa de tu perro, como segmentos de recta, y el suelo de tu gimnasio como una región encerrada por una curva simple cerrada.

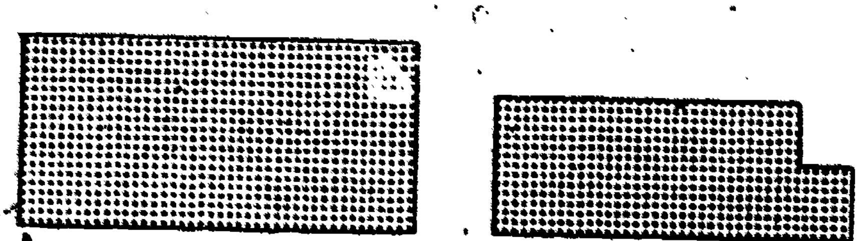
Los tamaños de los segmentos de recta y de las curvas simples cerradas se pueden comparar sin medirlos realmente. Para ver cuál de entre dos niños es más alto, basta ponerlos dándose de espaldas y comparar la parte superior de ambas cabezas. Un método semejante puede usarse para saber cuál de los segmentos $\overline{AB}$ o $\overline{CD}$, de la figura siguiente, es más largo. El uso del símbolo $\overline{AB}$ se enseñó en el Capítulo 4: es una manera rápida de escribir "el segmento AB".



Para comparar tales segmentos, coloca el borde de una hoja de papel a lo largo de $\overline{CD}$ y marca los puntos C y D sobre esa hoja de manera que coincidan con los puntos correspondientes de la figura. Coloca luego el borde de la hoja de papel a lo largo de $\overline{AB}$ con el punto C sobre A. ¿Dónde cae el punto D? Si D está entre A y B, $\overline{AB}$ es más largo que $\overline{CD}$. Si D coincide con B, los segmentos son de la misma longitud. Decimos que segmentos de la misma longitud son congruentes. Si B está entre C y D, $\overline{CD}$ es más largo que $\overline{AB}$.

Consideremos el conjunto de todos los puntos que están en una curva simple cerrada o que se hallan contenidos en el interior de dicha curva simple cerrada. Un conjunto tal se llama región cerrada.

Observa las regiones cerradas dibujadas a continuación y cálcalas en un papel transparente.



A B

Para comparar el tamaño de la región cerrada A con el de la región cerrada B, recorta la copia de la figura B y colócala sobre la región cerrada A. La figura B separa a la figura A en dos partes: la parte cubierta por B y la parte no cubierta por B. Decimos que el área de A es mayor que el área de B.

Cuando usamos métodos como éste para comparar los tamaños de segmentos o de regiones cerradas, suponemos las siguientes propiedades de las cantidades geométricas continuas:

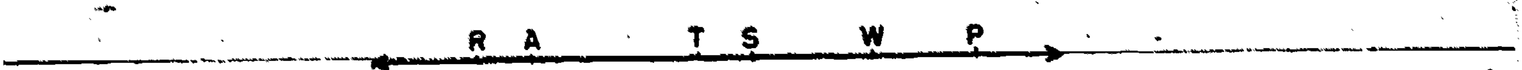
Propiedad del movimiento. Se puede mover una figura geométrica sin que ésta cambie de tamaño ni de forma.

Propiedad de comparación. Se puede comparar dos figuras (o conjuntos) geométricas continuas, DE LA MISMA

ESPECIE, para determinar si son del mismo tamaño, o, si no lo son, determinar cuál es más grande.

Ejercicios 7-1

1. Indica cuáles de las siguientes preguntas podrías responder contando y cuáles midiendo:
   (a) ¿Cuántas personas hay en esta clase?
   (b) ¿A qué distancia está la luna?
   (c) ¿De qué magnitud era el gentío que fue a la jira?
   (d) ¿Qué temperatura hace hoy?
   (e) ¿Qué edad tienes?
   (f) ¿Cuánta agua hay en la piscina?
2. En lo que sigue indica qué cantidades son continuas y cuáles son objetos discretos:
   (a) Tu estatura.
   (b) Tu peso.
   (c) El tamaño de tu familia.
   (d) La longitud de esta página.
   (e) Los números impares entre 0 y 10.
   (f) La cantidad de aire de esta habitación.
3. Utiliza una tira de papel o una cuerda de la misma longitud del segmento $\overline{RT}$ situado sobre la siguiente recta:



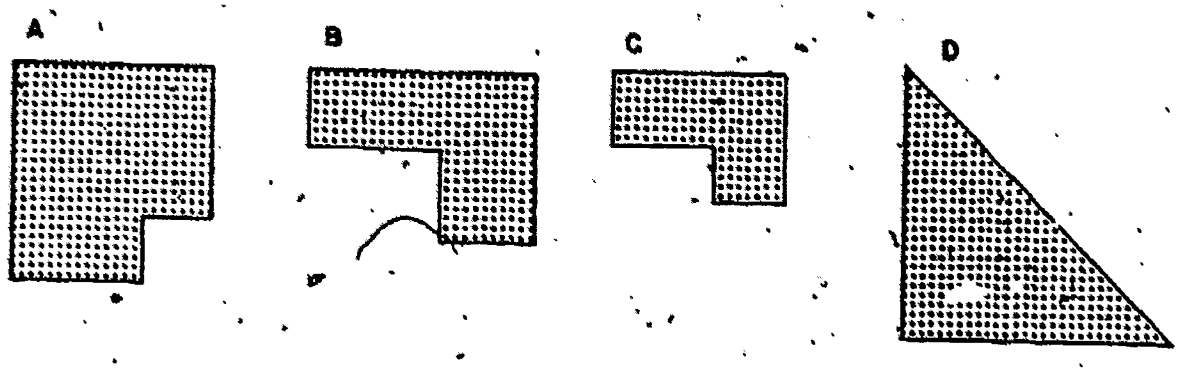
Utiliza $\overline{RT}$ para comparar los siguientes segmentos de recta. Indica si los segmentos mencionados son congruentes o, si no lo son, cuál de los dos es más largo.

(a) $\overline{RT}$ y $\overline{SP}$ (c) $\overline{RT}$ y $\overline{AS}$ (e) $\overline{RT}$ y $\overline{TP}$

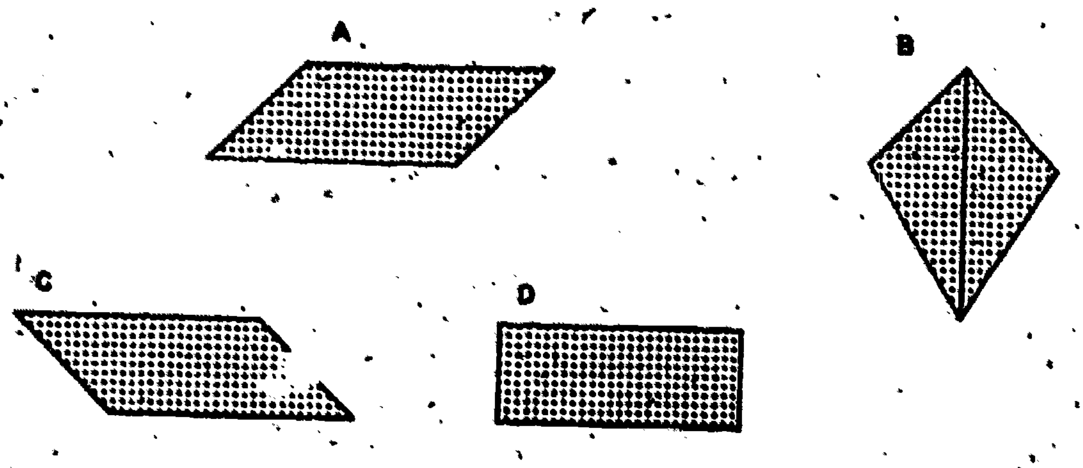
(b) $\overline{RT}$ y $\overline{TW}$ (d) $\overline{RT}$ y $\overline{AT}$

4. De entre las regiones cerradas que se dan a continuación selecciona la que te parezca más pequeña. Escribe proposiciones para comparar el tamaño de la región cerrada más pequeña con el tamaño de cada una de las otras figuras. Usa uno de los símbolos >, = ó <, y la forma que se indica:

   La región cerrada de la figura _?_ < la región cerrada de la figura _?_.



5. (a) ¿Cuál de las siguientes regiones cerradas crees que es la mayor? Enuméralas en el orden que pienses sea el de tamaños decrecientes.

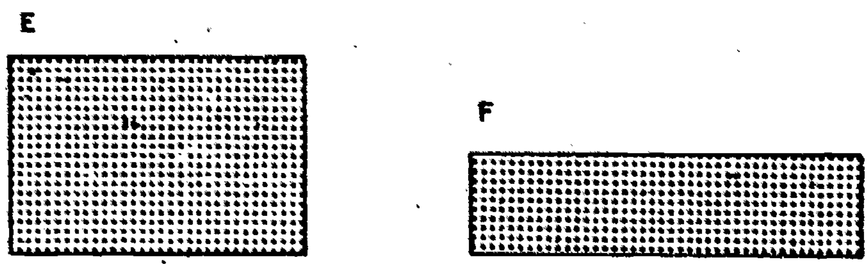


   (b) Haz tres copias de la figura A, y úsalas para comparar la región cerrada A con las otras regiones cerradas. (Recorta las copias de la figura si es necesario.)

(c) ¿Fue correcta la lista que hiciste para el problema 5(a)?

6. (a) Usando el borde de una hoja de papel, marca las longitudes de los cuatro segmentos de recta que forman la curva cerrada de la figura E siguiente. Luego utiliza la misma hoja de papel para comparar la longitud de la curva cerrada de la figura E con la de la figura F. ¿Cuál de las curvas es más larga?

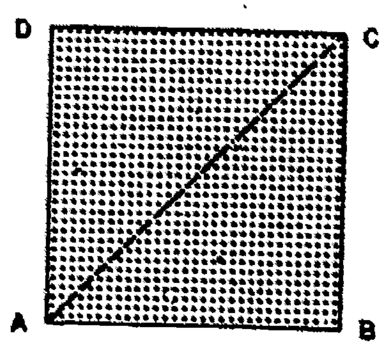
(b) Utiliza una copia de la figura E para comparar los tamaños de las regiones cerradas E y F. ¿Cuál de las dos tiene la mayor área?



7. Dibuja un cuadrado y marca los vértices con ABCD. Recorta tu región cerrada cuadrada y córtala luego a lo largo de $\overline{AC}$. Toma las dos partes resultantes de este corte y ponlas juntas de manera que no formen un cuadrado, y traza el contorno de la figura así formada.

(a) ¿Cómo se compara el área de la nueva región cerrada con el área de la región cerrada del cuadrado ABCD?

(b) ¿Qué comparación puedes hacer entre las longitudes de las dos curvas cerradas?



En los problemas de 4 a 7 hemos supuesto dos propiedades más de las figuras (o conjuntos) geométricas continuas.

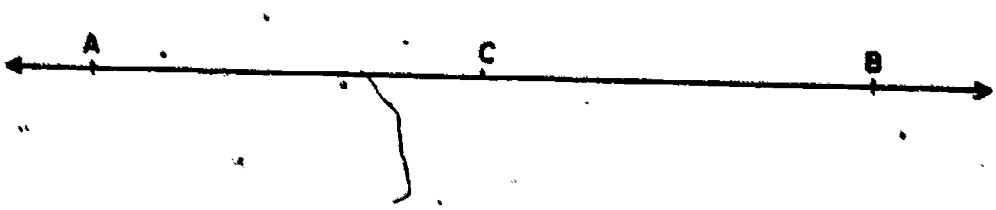
Propiedad de coincidencia. Si dos figuras (o conjuntos) geométricas continuas están formadas por partes de tal modo que cada parte de una puede hacerse coincidir con una parte del mismo tamaño de la otra, entonces las dos figuras (o conjuntos) continuas tienen el mismo tamaño.

Propiedad de subdivisión. Se puede subdividir una figura (o conjunto) geométrica continua.

7-2. Subdivisión y medición

La propiedad de la subdivisión de una cantidad continua es la base para el procedimiento que llamamos medición. Daremos algunos ejemplos para hacer más comprensible la idea.

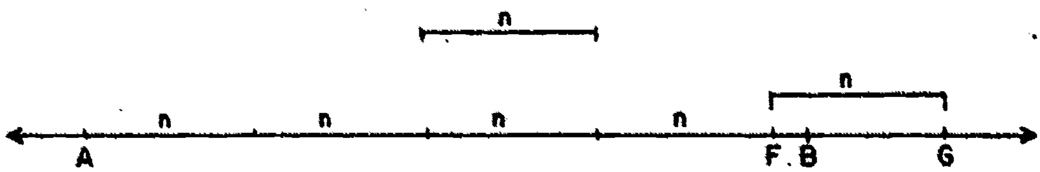
Cada una de las tres figuras siguientes es un dibujo de una recta que contiene el mismo segmento, $\overline{AB}$. El punto C subdivide al segmento $\overline{AB}$ en dos segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$. ¿Cómo se comparan los tamaños de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$? ¿Son congruentes?



En el siguiente esquema, los dos puntos D y E han subdividido $\overline{AB}$ de manera que la longitud de $\overline{AD}$ es $\frac{1}{3}$ de la longitud de $\overline{AB}$, y la longitud del segmento $\overline{EB}$ es también $\frac{1}{3}$ de la longitud de $\overline{AB}$.

¿Cómo se puede comparar la longitud de $\overline{AE}$ con la de $\overline{AB}$? ¿Con la de $\overline{DB}$? ¿Con la de $\overline{DE}$?

Se puede subdividir $\overline{AB}$ de otras maneras para comparar la longitud de un segmento con la de otro. Supón que escogemos un segmento de longitud cualquiera que llamaremos "n", menor que la longitud de $\overline{AB}$.

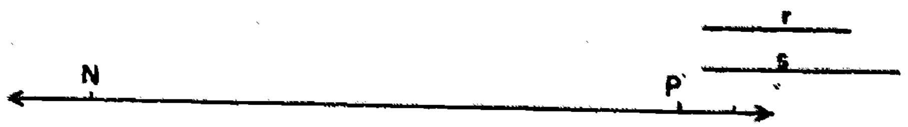


Utiliza una tira de papel o un compás y marca segmentos de longitud n sobre $\overline{AB}$ (comienza con el punto A). En la figura anterior, se ha tomado cuatro veces un segmento de longitud n, de manera que $\overline{AF}$ es de la misma longitud que 4n. El símbolo "4n" significa "tan largo como cuatro veces n".

El punto F está entre A y B. Si se marca un quinto segmento de longitud n, el segmento $\overline{AG}$ tiene por longitud 5n, y B está entre A y G. Entonces, $\overline{AB}$ es más largo que 4n, pero más corto que 5n. Como se puede ver en la figura, $\overline{BG}$ es más largo que $\overline{FB}$, y entonces decimos que $\overline{AB}$ es aproximadamente igual a 4n. Hay un símbolo para la frase "aproximadamente igual a". Es un signo de igual ondulado, así: " $\approx$ ". Podríamos usar este símbolo y escribir que la longitud de $\overline{AB} \approx 4n$.

En el ejemplo anterior hemos comparado la longitud de $\overline{AB}$ con la longitud, que hemos llamado n, de otro segmento. Hemos hecho la comparación subdividiendo $\overline{AB}$ en partes congruentes, cada una de las cuales tiene longitud n. Hemos encontrado que la longitud de $\overline{AB}$ = 4n. Este procedimiento se llama de <u>medida</u> o <u>medición</u> y el segmento de longitud n es una <u>unidad de medición</u>. El número 4 es la <u>medida</u> de $\overline{AB}$ cuando se mide este segmento con la unidad n. ($\overline{AF}$ tiene también por medida 4.)

Toma dos unidades de medición, una congruente con el segmento r y la otra congruente con el segmento s. Mide $\overline{NP}$ con la unidad r. ¿Cuántas unidades r de longitud tiene $\overline{NP}$?



Mide $\overline{NP}$ con la unidad s. ¿Cuántas unidades s de longitud tiene $\overline{NP}$?

Podrás observar que si mides un segmento con unidades de diferente tamaño, la medida obtenida no te da el tamaño del segmento. Debes conocer además el tamaño de la unidad de medición que has usado. La medida de $\overline{NP}$ no es la misma cuando se usa la unidad r, que cuando se usa la unidad s.

La longitud de un segmento comprende tanto la medida como la unidad de medición. En el ejemplo en que empleamos n como unidad de medición, la longitud de $\overline{AB}$ = 4n. El símbolo AB (sin barra en la parte superior) significa la longitud del segmento $\overline{AB}$. La longitud se puede dar mediante el enunciado AB = 4n.

Observa cómo se usan estas palabras.

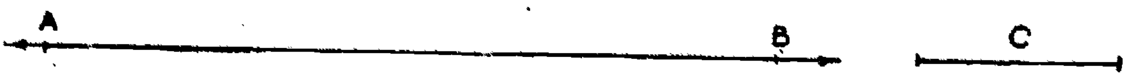
4 es la medida.

n es la unidad de medición.

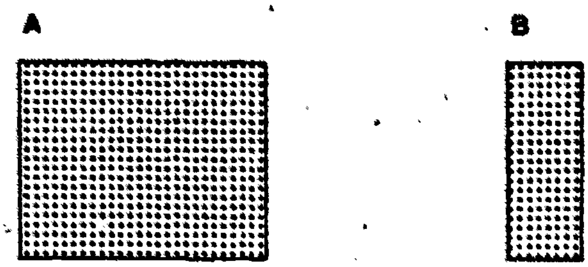
4n es la longitud.

<u>Ejercicios 7-2</u>

1. Copia en un papel el segmento $\overline{AB}$ y el segmento marcado con "c" de la siguiente figura (o usa un compás) a fin de comparar la longitud de $\overline{AB}$ con la longitud del segmento c.

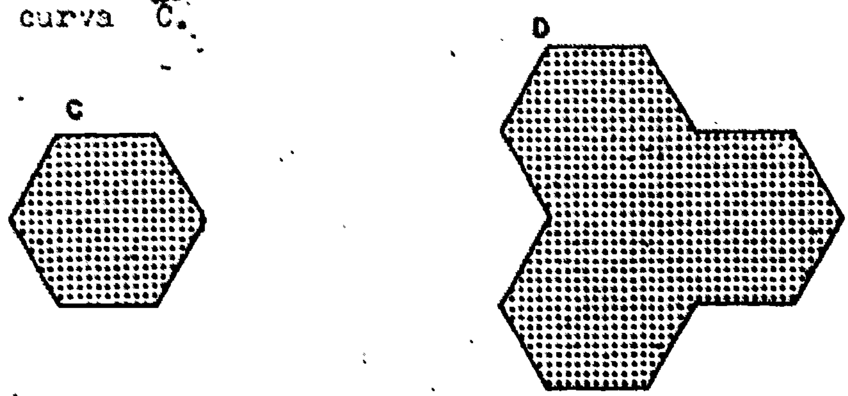


2. (a) Utiliza la región cerrada B como unidad para comparar las áreas de las dos regiones cerradas. Copia las figuras A y B. Recorta o calca la figura B y subdivide la región cerrada A en partes del mismo tamaño que B.



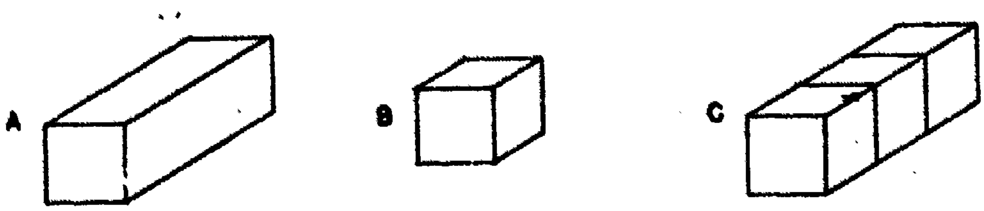
(b) El tamaño de la región cerrada A es aproximadamente _____ veces mayor que el tamaño de B.

3. (a) Compara la longitud de la curva D con la longitud de la curva C.

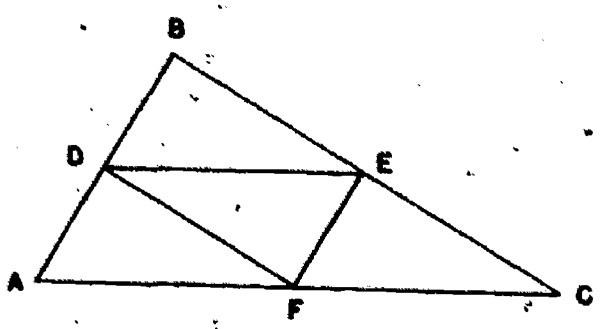


(b) Compara el tamaño de la región cerrada D con el tamaño de la región cerrada C.

4. Mira la caja A de la figura. Podríamos pensar en el sólido A como subdividido en partes del tamaño de la caja B, como se vén en C. El sólido A es aproximadamente _____ veces mayor que el sólido B.



5. (a) ¿Qué unidad de medición usaste en el problema 1?
   (b) ¿Cuál fue la medida de $\overline{AB}$?
6. (a) ¿Qué unidad de medición usaste en el problema 2?
   (b) ¿Cuál fue la medida de la región cerrada A?
7. (a) En el problema 3(a), supón que utilizas un segmento de la curva C como unidad de medición, y llama "t" a la medida de ese segmento. ¿Cuál es la longitud de la curva C?
   (b) Usando la misma unidad de medición "t", ¿cuál es la longitud de la curva D?
   (c) ¿Cómo se compara la longitud de la curva D con la longitud de la curva C?
   (d) En el problema 3(b), ¿qué unidad de medición has usado? ¿De qué tamaño es la región cerrada D?
8. En el problema 4, ¿qué se usó como unidad para medir el volumen de la caja A? ¿De qué tamaño es el sólido A?
9. Dibuja un triángulo ABC. En cada lado del triángulo coloca un punto que divida el lado en dos segmentos congruentes. Designa esos puntos con D, E y F, como se muestra en la figura. Dibuja los segmentos $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ y $\overline{DF}$.



   (a) Usa una tira de papel para determinar qué segmentos son congruentes. (Encontrarás tres conjuntos de tres segmentos cada uno.)
   (b) Hay 11 curvas simples cerradas en esta figura. Algunas son triángulos y otras son cuadriláteros. Enumera todas las curvas simples cerradas.

(c) Calca el triángulo EFC, y compara el área de la región cerrada EFC con las áreas de las otras regiones triangulares cerradas.

(d) ¿Qué conjuntos de regiones cerradas son del mismo tamaño? (Un conjunto tendría cuatro elementos y dos conjuntos tendrían tres elementos cada uno.)

7-3. Subdivisión de las unidades de medición

Has visto que los tamaños de las cantidades continuas pueden encontrarse midiendo. Para hacerlo debes usar una unidad de medición que tenga estas dos características:

1. Debe ser de la misma naturaleza del objeto que se va a medir: un segmento de recta para medir un segmento de recta, una región cerrada para medir una región cerrada, etc.
2. Debe ser posible mover la unidad de medición o copiarla con bastante exactitud, a fin de que sirva para subdividir el objeto a medir.

Frecuentemente se tom cualquier cosa que está a la mano para utilizarla como unidad de medición. Cosas que siempre tienes cerca son tus manos, dedos, brazos y pies. Estas partes del cuerpo se usan con frecuencia como unidades para medir segmentos de recta.

Ejercicios de clase 7-3

1. Usa la longitud de la sección media de tu dedo meñique como unidad para medir:
   (a) La longitud de tu pupitre.
   (b) La longitud de esta página.
2. Usa la longitud de tu pie para medir la longitud del aula.
3. Compara tus respuestas a los problemas 1 y 2 con las respuestas de tus condiscípulos. ¿Cómo explicarías las diferencias que podrían aparecer?

4. ¿Qué objeto podría resultar conveniente para medir el volumen sugerido por una gaveta de escritorio?
5. ¿Puedes imaginarte algún objeto movible que se pueda usar como unidad de medición para la superficie de tu pupitre? ¿Puedes utilizar una hoja de tu cuaderno? Coloca varias hojas borde contra borde y cuenta cuántas pueden cubrir el tablero de tu escritorio. ¿Cuál es la medida de la superficie? ¿Qué tamaño tiene la superficie?
6. ¿Habéis usado, tú y todos tus condiscípulos, hojas del mismo tamaño como unidades? Si no es así, ¿qué se puede decir de la medida?

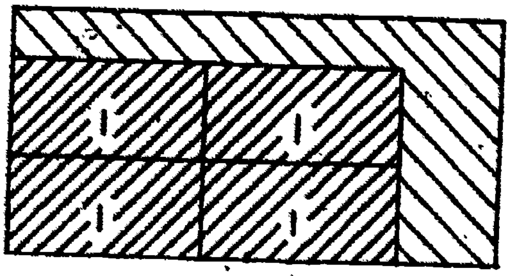
Subdivisión de las unidades de medición

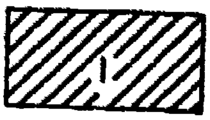
Probablemente las hojas de cuaderno no cubren exactamente el tablero de tu pupitre. En tales casos acostumbramos cubrir la parte que ha quedado libre con partes de unidades. Veamos cómo se hace.

Sabes que un rectángulo es una curva simple cerrada, compuesta por cuatro segmentos de recta que se intersecan dos a dos formando cuatro "esquinas cuadradas". Los cuatro bordes de una página en este libro forman un rectángulo. Indica algunos rectángulos en tu salón de clase. Para cada uno de ellos señala las cuatro esquinas cuadradas y el interior del rectángulo.

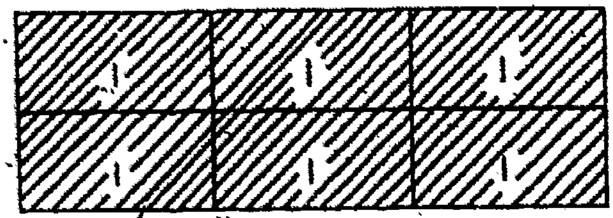
Supón que queremos medir la región rectangular cerrada grande en la figura siguiente, utilizando como unidad la región rectangular cerrada pequeña.

Las unidades se pueden colocar una al lado de la otra sobre la región rectangular cerrada grande, como se muestra, a fin de cubrirla tanto como sea posible.





Puede ocurrir que la región rectangular cerrada quede cubierta "exactamente" (es decir, prácticamente) por alguna disposición adecuada de las unidades, como se ve en la figura.



La medida de la región rectangular cerrada se obtiene simplemente contando el número de unidades. Si llamamos "A" al número de unidades en esta región, podemos escribir $A \approx 6$ para expresar que "el tamaño de esta región rectangular cerrada es de aproximadamente 6 unidades". Observa que se ha usado el símbolo " $\approx$ " de "aproximadamente igual", pues no es posible colocar las unidades con tanta precisión que podamos decir que la medida es <u>exactamente</u> 6.

El tamaño de una región cerrada se llama área de esa región. Decimos que el área del rectángulo de arriba es de 6 unidades. Por esto entendemos que el tamaño de la región rectangular cerrada es de 6 unidades. Estrictamente hablando, un rectángulo no tiene área, pues es una curva simple cerrada. Lo más probable es que nos encontremos con que podemos cubrir sólo una parte de la región rectangular cerrada. Una parte de esta región excederá los bordes de las unidades de medición, pero en ella no se pueden colocar más unidades enteras. En la figura que sigue, la parte sombreada (/////) no puede quedar cubierta por unidades enteras.

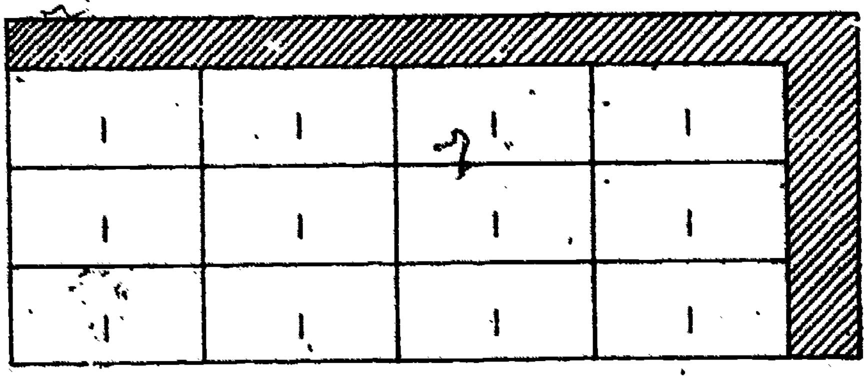


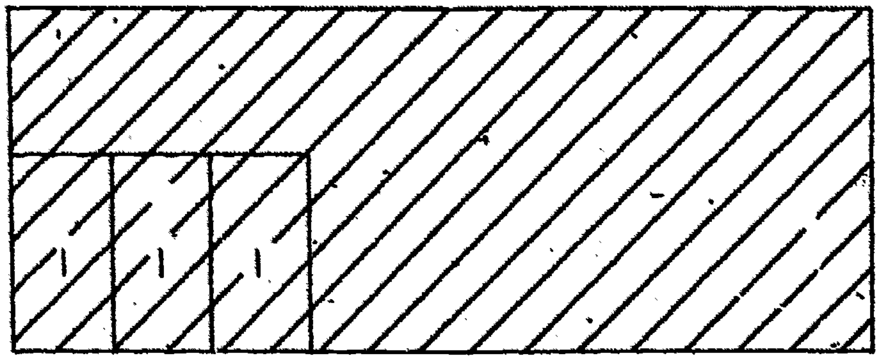
Figura 7-1

Podemos resolver esta situación cortando algunas de nuestras unidades en piezas más pequeñas. Podemos utilizar éstas para cubrir la parte rayada, teniendo cuidado de no cortar más de una unidad a la vez. Utilizaremos todas las piezas de una unidad antes de comenzar a cortar otra. (¿Por qué debemos utilizar todas las piezas de una unidad antes de cortar otra?)

Toma varias unidades rectangulares del tamaño usado antes, cortando una tras otra, hasta cubrir la parte sombreada de la figura 7-1. ¿Cuántas de esas unidades has usado? ¿Tienes alguna parte de una unidad que no se haya usado? Si es así, ¿te parece que la parte sobrante es mayor o menor que la mitad de una unidad?

Si trabajaste con suficiente cuidado, probablemente utilizaste tres unidades completas y cortaste algo de otra más. Si la parte sobrante de esta última es mayor que una mitad de unidad, puedes escribir el área del rectángulo como de aproximadamente 15 unidades, pues parece tener 15, aunque no más de $15\frac{1}{2}$. Si la pieza sobrante es menor que media unidad, debes haber usado más de media unidad, de manera que el área es de aproximadamente 16 unidades. No es tanto como 16 unidades, pero es más de $15\frac{1}{2}$ unidades. ¿Cuál de estas dos respuestas obtuviste?

En la medición que acabamos de hacer, hemos supuesto que el resultado no depende de cómo se colocan las unidades rectangulares en la figura más grande. Por ejemplo, es improbable que todos tus condiscípulos hayan cortado en la misma forma las piezas que colocaron en el borde. Sin embargo, hemos supuesto que cualquiera de ellos haya obtenido la misma respuesta. La hipótesis de que el área obtenida no depende de la manera como se colocan las unidades sobre la figura se puede comprobar así: mide de nuevo la región rectangular cerrada con las mismas unidades, pero ponlas de manera que sus bordes más largos estén verticales, como se ve en la página 258, en vez de horizontales.

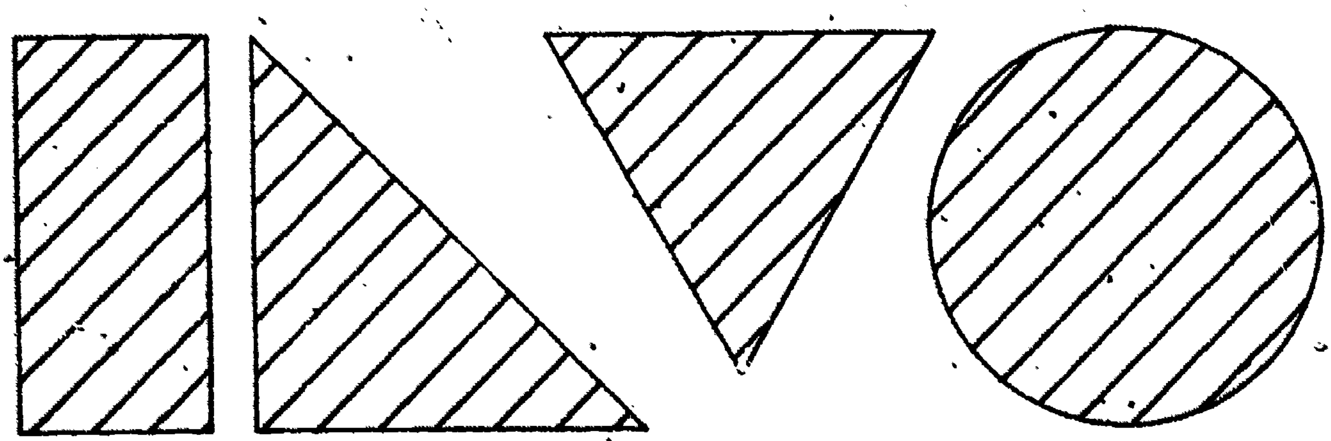


¿Encuentras que el área del rectángulo es la misma que antes? ¿Debería ser así? Es muy importante la hipótesis de que se puede medir una cantidad continua cubriéndola con unidades de la manera como resulte más conveniente. Si encontramos áreas diferentes para nuestro rectángulo, entonces un mismo rectángulo parecería tener dos tamaños. Para estar de acuerdo con nuestra hipótesis de que se puede comparar cantidades continuas de la misma clase, aceptamos el hecho de que el rectángulo completo debe tener mayor área que cualquiera de sus partes.

Para medir esta región rectangular cerrada, hemos usado como unidad de medición una región rectangular cerrada más pequeña. Podríamos haber escogido, en igual forma, alguna otra figura como unidad de área.

Ejercicios 7-3

1. Copia las figuras que siguen para utilizarlas como unidades de área, y recorta varias copias de cada figura.



(a) Mide el área de una hoja de tu cuaderno, utilizando cada una de estas figuras como unidad de medición.

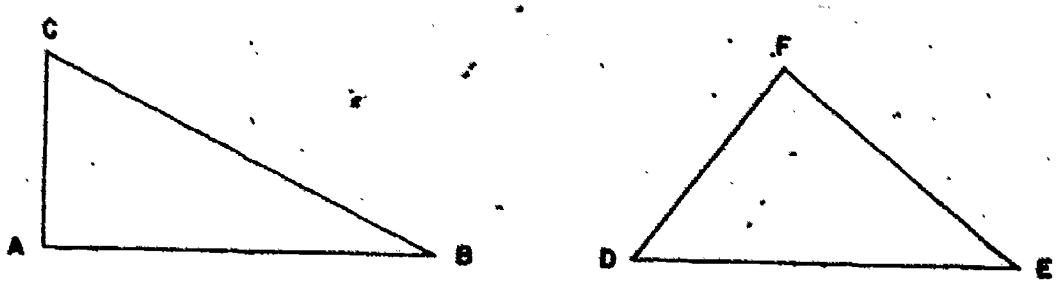
(b) ¿Ha sido difícil utilizar algunas de las figuras como unidad de medición? Si es así, ¿cuál es la razón?

(c) ¿Fue la medida el mismo número para cualesquiera dos de las figuras?

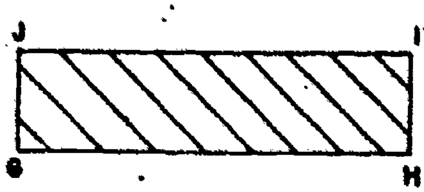
2. Si fueras niño escucha, probablemente medirías las distancias en "pasos". ¿De qué longitud es tu aula medida con tus "pasos"?

3. ¿Podrías medir el espacio ocupado por una caja al determinar cuántas bolas de cierto tamaño caben en ella? ¿Puedes imaginar un objeto de otra forma que se preste mejor para medir ese espacio?

4. PROBLEMA DIFICIL. Mira los triángulos que se muestran a continuación. El ángulo CAB es recto, $\overline{AB}$ tiene la misma longitud que $\overline{DE}$, y los triángulos tienen alturas iguales.

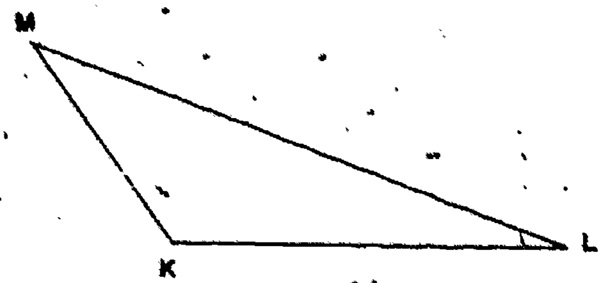


(a) Copia los triángulos y recorta las regiones triangulares cerradas. Corta cada región cerrada en dos piezas que puedan ser ensambladas para formar una región rectangular cerrada como la que sigue, en la que $\overline{GH}$ tiene la misma longitud que $\overline{AE}$.



(b) Recorta una de las regiones triangulares cerradas en piezas que se puedan ensamblar para formar la otra región triangular cerrada.

(c) Si encuentras este problema demasiado fácil, inténtalo cuando el segundo triángulo tiene la forma siguiente:



7-4. Unidades normalizadas de longitud

En la Sección 7-3 usaste unidades de medición de varias clases. Algunas de ellas te resultaron diferentes a las de tus condiscípulos, a pesar de que fueron hechas de la misma manera. Otras unidades que usaste eran las mismas para todos en la clase. Cuando muchos adoptan y usan cierta unidad, ésta se llama <u>unidad normalizada</u>. Tan fácilmente puedes comprar una regla con las unidades del mismo tamaño que las de tus condiscípulos que te parecería raro oír que se necesitó mucho tiempo y esfuerzo para llegar a la conclusión de que haciendo iguales esas unidades se simplifican mucho las cosas. Los pueblos primitivos casi no necesitaban una unidad que fuera igual para todos. Si un hombre primitivo quisiera un arco perteneciente a un amigo suyo, lo tomaría prestado hasta encontrar una pieza de madera igual. El hombre primitivo podía cambiar todos los artículos que poseía sin preocuparse mucho de su tamaño. Cuando se desarrolló la civilización y el hombre empezó a tener objetos de valor, el tamaño de éstos se hizo importante. Si una persona tiene un diamante y otra quiere cambiárselo por oro, la primera persona quiere cerciorarse de que el oro es puro y su peso es razonable. La historia cuenta que el rey Herón de Siracusa solicitó los servicios del matemático griego Arquímedes para que encontrara un método que le permitiera descubrir si el joyero que le había hecho su nueva corona de oro lo había engañado. Al comienzo, Arquímedes encontró difícil el problema, pero al final descubrió una manera de resolverlo. La idea se le ocurrió mientras se bañaba, y lo entusiasmó tanto que salió corriendo por las calles, sin atinar a vestirse, gritando "Eureka", que significa "lo encontré". El joyero perdió la cabeza debido a que un matemático encontró una nueva manera de medir.

Esta sección trata de las medidas de longitud (o medidas lineales, es decir "que tienen la naturaleza de una línea"). Todas las medidas de segmentos de recta son medidas de longitud. Las unidades de longitud más pequeñas del sistema inglés, que se usa en los Estados Unidos, fueron sugeridas, originalmente, por alguna parte del cuerpo. La yarda es, a grosso modo, la distancia que hay de la punta de la nariz al extremo de los dedos cuando el brazo está extendido a la altura de los hombros. Por supuesto, si te pica la nariz y la mueves un poco, cambia el tamaño de tu "yarda", pero para una estimación aproximada de cuánto tienes de tela o de cuerda, es un buen sistema de medida. Los caballos se miden aún por "palmos menores" (en inglés, "hand"), que es una medida del ancho de la palma de la mano, ahora equivalente a 4 pulgadas. Cuando los niños juegan a las bolitas, usan aún otra medida antigua. Al extender el pulgar y el meñique tanto como les es posible, tienen una unidad que se llama una cuarta o un palmo. Cuando Noé construyó el arca, se supone que la hizo de 300 codos de largo, 50 codos de ancho y 30 codos de alto. El codo era la distancia que hay del codo al extremo de los dedos, y ha variado entre 15 y 20 pulgadas en las diferentes épocas de la historia. Los marineros usan la medida llamada braza. Originalmente tendían una cuerda entre los extremos de los dedos de ambas manos con los brazos extendidos, de manera que las manos estuvieran separadas al máximo, y hacían nudos en los puntos por los que asían la cuerda. Ahora una braza es de 6 pies. Los romanos medían distancias grandes como los niños escuchas, contando el número de pasos necesarios para cubrir la distancia. El paso de los romanos, sin embargo, era un doble paso. La expresión latina para "mil pasos" era "mille passus", de donde viene la palabra "milla".

Ya has descubierto que la medida de los cuerpos varía mucho de un pueblo a otro. Este hecho ha dado lugar a varias situaciones ambiguas en el curso de la historia. En los tiempos primitivos una tribu adoptaba un sistema de unidades que usaban todos sus miembros. Esto funcionaba bien hasta que alguien de la tribu quería comerciar con gente de otras tribus que tenían otro sistema de unidades de medición. Entonces venían los pleitos sobre la unidad de medición a emplear. Cuando las medidas llegaron a ser más importantes, cada país estableció un sistema de unidades para todas las personas que vivían en él. Dichos sistemas de unidades se fueron estableciendo de varias maneras, pero muchos de ellos aún se basaban en las antiguas medidas tomadas de diversas partes del cuerpo.

El rey Eduardo I tenía una barra de hierro como la yarda oficial de Inglaterra, pero luego la guardó de manera que sólo él y sus amigos cercanos podían usarla. Se cuenta que uno de los reyes de Inglaterra ordenó que un oficial fuera a determinada iglesia cierto domingo, eligiera a los primeros dieciséis hombres que salieran de la iglesia y los alineara de manera que la punta del pie de cada uno tocara justamente el talón del que estaba delante. La longitud de la punta del pie del primer hombre al talón del último, medida con una cuerda, se dividió en 16 partes iguales que dieron origen al "pie" oficial en la Inglaterra de la época. En muchos países se hizo lo mismo, de manera que el pueblo del país (o, en algunos casos, de una ciudad) usaba la misma medida. Cierta aldea francesa tenía colgada en la plaza del mercado una barra que era la unidad de longitud del lugar.

Todo anduvo bien hasta que alguien quiso comerciar con la gente de otro país. Los desacuerdos eran tan frecuentes que, finalmente, un grupo de científicos franceses convocó una conferencia de representantes de varios países para establecer un conjunto internacional de unidades de medición. Ese grupo desarrolló el <u>sistema métrico</u>, que descartó las unidades antiguas y basó todas las nuevas unidades sobre la distancia del Polo

Norte al ecuador. El <u>metro</u> es la unidad básica de longitud del sistema métrico; se la definió como la diez millonésima parte de la distancia del Polo Norte al ecuador. Reci ıtemente, un congreso internacional de científicos definió el metro en relación con las ondas de luz. Este sistema se utiliza en todos los círculos científicos del mundo y en todos los países con excepción de los de habla inglesa.

La Oficina Nacional de Normalización (National Bureau of Standards), en Wáshington, tiene una copia muy precisa del metro. Se trata de una barra de platino e iridio, aleación que cambia muy poco de longitud en diferentes condiciones atmosféricas. El Congreso promulgó una ley fijando qué parte de esta barra es la yarda oficial en los Estados Unidos. Esta barra es <u>la unidad normalizada de longitud</u>, con la que se comparan todas las unidades normalizadas de longitud en este país. Se considera tan importante la seguridad de esta barra, que se la conserva bien guardada. Si un industrial desea fabricar instrumentos de medida, sus productos deben ser copia precisa de las unidades normalizados oficialmente.

<u>Ejercicios 7-4a</u>

1. ¿Es un pan de molde una unidad normalizada? Si lo es, ¿hay más de un "molde" normalizado? Si es así, ¿cuál es la unidad en el sistema normalizado?
2. ¿Se fabrican en tamaños normalizados los envases para conservas? Si existen, ¿cuáles son esos tamaños?
3. Haz una lista de por lo menos cinco artículos que se vendan comúnmente en alguna clase de unidades normalizadas. Escribe la unidad normalizada en cada caso.

Has usado diferentes clases de unidades para medir segmentos de recta y regiones cerradas, tanto del plano como del espacio. Entre otras, has usado la longitud de la sección media de tu dedo, la longitud de tu pie, una hoja del cuaderno y la palma de tu mano. Del trabajo que has realizado con esas unidades, podrás concluir lo siguiente:

1. Alguien estableció el tamaño de una unidad de medición.

2. Cuando muchas personas adoptaron la misma unidad, ésta se transformó en una unidad normalizada.

La pulgada se desarrolló a partir de la longitud de una sección de un dedo de la mano; y el pie, a partir de la longitud del pie de algunas personas. Encontrarás que tu "pulgada" difiere de la de tus condiscípulos, lo que también ocurre con tu "pie". La unidad que llamamos pulgada podría ser más corta o más larga sin dejar de ser una "unidad" de medición. Por convenio, quien usa el sistema inglés de medidas, emplea una unidad de longitud, la de tu regla, como un "pie", que se denota así: ' , y un dozavo de esta longitud como la unidad, una "pulgada", que se abrevia así: pulg., plg., y se denota " .

Ejercicios 7-4b

1. Con un pedazo de cartulina o de cartón grueso que tenga un borde recto construye una regla de 6 pulgadas, marcando intervalos de $\frac{1}{2}$ pulgada.
2. Construye dos reglas más de 6 pulgadas cada una, una de ellas marcada a intervalos de $\frac{1}{4}$ de pulgada, y la otra a intervalos de $\frac{1}{8}$ de pulgada.

Utiliza el símbolo $\approx$ para tus respuestas a los problemas 3 a 7.

3. Mide cada uno de estos segmentos de recta con la aproximación de media pulgada, utilizando la regla que has construido en el problema 1.
   (a)
   (b)
   (c)
   (d)
   (e)
4. Mide cada uno de los segmentos de arriba con la aproximación de $\frac{1}{4}$ de pulgada, utilizando tu regla marcada en cuartos de pulgada.
5. Mide cada uno de los segmentos de arriba con la aproximación de $\frac{1}{8}$ de pulgada, utilizando tu regla marcada en octavos de pulgada.

6. Mide cada uno de los segmentos anteriores, utilizando la sección media del tercer dedo de tu mano.
7. ¿Qué unidad de medida te ha dado los resultados más satisfactorios? ¿Por qué?

La regla y la recta numérica

En los capítulos precedentes has trabajado con la recta numérica. La medición de segmentos puede considerarse como la misma operación que la de comparación del segmento que debe medirse con una recta numérica. La regla que usas es, en realidad, parte de una recta numérica cuya unidad es la pulgada. La parte de la recta numérica que se ve en tu regla va desde el cero hasta el 12. Una vara de una yarda es una parte más larga de una recta numérica, que va de 0 a 36. Cuando trabajaste la primera vez con la recta numérica, marcaste en ella los números naturales solamente. Cuando estudiaste los números racionales, los incluiste en la recta numérica. Las reglas que usan los niños pequeños están marcadas, frecuentemente, sólo en pulgadas y medias pulgadas, como en la primera regla de cartón que construiste. Cuando el niño crece, puede entender las reglas con divisiones más pequeñas. La mayor parte de las reglas que usas tienen cada pulgada dividida en 16 partes iguales. Cuando mides un segmento de recta, comparas la longitud del segmento con la recta numérica marcada sobre la regla.

Ejercicios de clase 7-4a

Detengámonos para considerar minuciosamente la construcción de la regla que probablemente tienes.

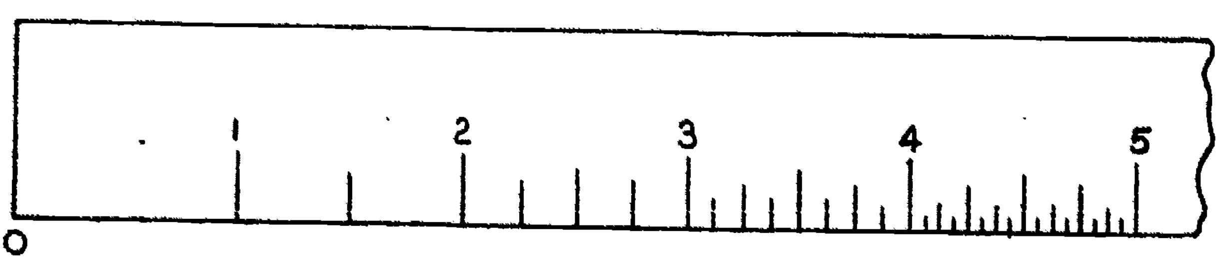


Figura 7-4

Esta regla está dividida en 12 unidades iguales que todo el mundo reconoce como pulgadas. Una parte de la regla se muestra en la figura 7-4. El espacio en cada uno de los extremos de la figura tiene una pulgada de longitud.

1. ¿Por qué es necesario dividir las unidades?
2. ¿Cómo está dividida la pulgada entre 1 y 2?
3. ¿Cómo están divididas las otras pulgadas?
4. Si se necesitan divisiones más pequeñas que las marcadas, ¿cómo se obtienen?
5. ¿Cuántas divisiones hay en la tercera pulgada? ¿Y en la cuarta? ¿Y en la quinta?
6. Mirando la regla, ¿cómo podrías decir qué divisiones fueron hechas primero?
7. ¿Te ayudan en alguna forma esas rayas más largas?
8. ¿Cuántas divisiones se pueden colocar entre dos de las divisiones más pequeñas de tu regla?

Si tienes dificultad al usar una regla, estudia detenidamente las preguntas anteriores y a medida que respondes examina, o bien la figura, o bien tu propia regla.

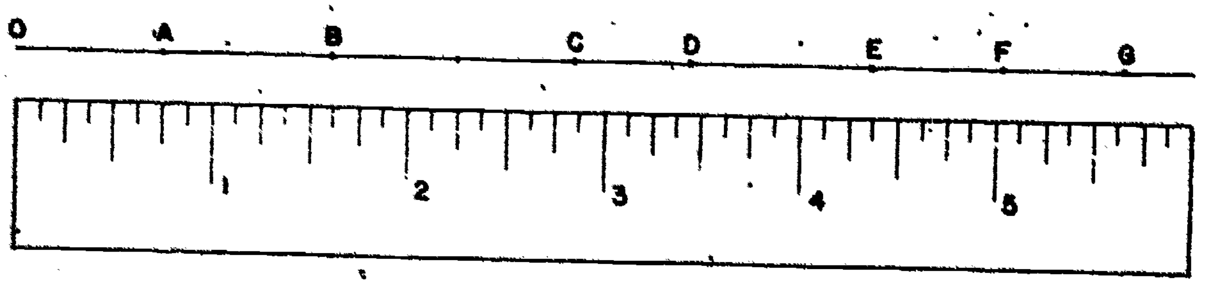
Una regla, como cualquier otro instrumento, no te es útil si no la puedes emplear. Una regla tiene dos posibilidades de utilización: (1) Para trazar la representación de una línea recta. (2) Para medir distancias referidas a una unidad normalizada, como la pulgada.

Una manera de medir distancias con una regla es colocar su punto cero en uno de los extremos del segmento que se trata de medir, colocar luego la recta cuidadosamente a lo largo del segmento, y leer el número en el punto de la regla que coincide con el otro extremo del segmento. A menos que tu regla tenga un pequeño espacio a la izquierda del punto cero, no es ésta la mejor manera de usarla porque muchas reglas se despuntan y pierden así parte de la primera pulgada. Se mide mejor haciendo coincidir el extremo izquierdo del segmento que se trata de medir con alguna de las marcas de la regla, midiendo luego la distancia al extremo derecho del segmento y sustrayéndole la distancia que haya a la izquierda de la primera marca que usaste. ¿Qué marca de la regla es conveniente para hacerla corresponder con el extremo izquierdo del segmento?

Ejercicios 7-4c

1. Si se continuara marcando los sextos de pulgada en la figura 7-4, ¿cuántas divisiones tendría?

2.



¿Qué punto de la regla está debajo de cada uno de los puntos marcados, de A hasta G, sobre el segmento de recta?

3. ¿Qué longitud tiene:
   (a) $\overline{AB}$? (b) $\overline{AC}$? (c) $\overline{CD}$? (d) $\overline{DF}$? (e) $\overline{FG}$?

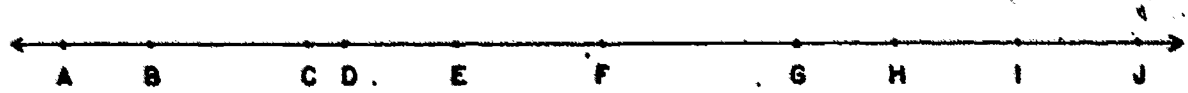
4. (a) Dibuja un segmento de 5 pulgadas de longitud y divídelo en partes de $\frac{5}{8}$ de pulgada cada una.
   (b) Divide 5 por $\frac{5}{8}$.
   (c) ¿Hay alguna relación entre las preguntas (a) y (b) de este problema?

5. (a) Dibuja un segmento de recta en tu papel. Luego marca en él los segmentos cuyas longitudes se indican a continuación, poniendo el extremo izquierdo de un segmento coincidente con el extremo derecho del que le precede:

$$2\frac{1}{2}'',\ 1\frac{1}{4}'',\ \frac{5}{8}''\ \text{y}\ \frac{5}{16}''.$$

   (b) ¿Cuál es la longitud total de estos segmentos? Lee la respuesta en tu regla.
   (c) Comprueba tu respuesta sumando las longitudes.

6. Mide con tu regla los segmentos indicados en la siguiente recta:



(a) $\overline{AB}$ (e) $\overline{EF}$
(b) $\overline{BE}$ (f) $\overline{EJ}$
(c) $\overline{AJ}$ (g) $\overline{GH}$
(d) $\overline{CG}$ (h) $\overline{IJ}$

7. (a) En la recta del problema 6 mide, si aún no lo has hecho, cada uno de los siguientes segmentos: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{HI}$ e $\overline{IJ}$.
(b) Suma todas estas medidas y compara con la respuesta en (c) para ver si coinciden.

8. Escribe las fracciones $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$ y $\frac{1}{16}$ como fracciones comunes en base dos.

*9. ¿Hay alguna relación entre la división de una regla y la base dos?

Hay muchas unidades normalizadas de longitud, tales como la pulgada (" , plg. ó pulg.), el pie ('), la yarda (yd.) y la milla (mi.). Así como hay muchos nombres para un mismo número racional, tales como $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$ y $\frac{10}{15}$, hay también varios nombres para una misma longitud, tales como 2 pies, 24 pulgadas y $\frac{2}{3}$ de yarda. Es importante aprender a cambiar el nombre de una medida de una forma a otra. Para cambiar tales nombres, es necesario conocer las relaciones entre las unidades.

Es también necesario considerar el significado del símbolo " = ". Hasta ahora este símbolo se ha usado para indicar diferentes nombres de una misma longitud. Cuando se trabaja con medidas, se usa este sentido del signo igual. Teniendo esto en cuenta, escribimos 2 pies = 24 pulgadas.

¿Qué se quiere decir con "2 pulgadas + 3 pulgadas"? Sabemos cómo sumar números, pero "sumar longitudes" es algo diferente. Supón que tenemos dos segmentos de recta de longitudes 2 pulgadas y 3 pulgadas, respectivamente. Sus medidas, en pulgadas, son 2 y 3. Marca esos dos segmentos sobre una recta, de manera que tengan un solo punto en común. Obtenemos un segmento cuya medida, en pulgadas, es 5 y cuya longitud es 5 pulgadas. Realmente, la suma se efectúa con los números 2 y 3. Esto es lo que queremos decir con

$$2 \text{ pulgadas} + 3 \text{ pulgadas} = 5 \text{ pulgadas}.$$

Tal como se ha usado aquí, el símbolo $+$ tiene un significado algo diferente del que tiene cuando escribimos $2 + 3 = 5$.

De manera semejante damos sentido a 5 pulgadas - 3 pulgadas = 2 pulgadas. La operación se efectúa, realmente, con los números.

Sabemos que 2×3 significa $3 + 3$. En la misma forma, por 2(3 pulgadas) entendemos 3 pulgadas + 3 pulgadas.

Como ejemplo veamos algunos problemas que impliquen cambiar pulgadas a pies y pies a pulgadas. En primer lugar, resolvamos el problema de convertir 60 pulgadas a pies. Sabemos que 12 pulgadas = 1 pie. Esto significa que 1 pulgada = $\frac{1}{12}$ de pie, es decir, 1 pulgada y $\frac{1}{12}$ de pie son nombres diferentes de una misma longitud. Podemos escribir el problema como un enunciado numérico: 60 pulg. = __?__ pies. Del significado de la medida, 60 pulgadas es 60 veces 1 pulg. Sabiendo esto, se puede reescribir el enunciado numérico como $60 \cdot 1$ pulg. = __?__ pies.

Como 1 pulg. y $\frac{1}{12}$ pies son diferentes nombres para la misma longitud, podemos reemplazar 1 pulg. por $\frac{1}{12}$ pies. Entonces $60 \cdot \frac{1}{12}$ pies = __?__ pies.

Ahora se puede efectuar la operación indicada en el lado izquierdo del enunciado numérico y vemos que 60 pulg. = 60(1 pulg.) = $60(\frac{1}{12}$ pies) = $\frac{60}{12}$ pies = 5 pies.

Los mismos conceptos se usan cuando se cambian 50 pies a pulgadas. La idea básica es la misma, de manera que 50 pies = $50 \cdot$ (1 pie) = 50(12 pulg.) = 600 pulg.

El sentido común ayuda a verificar si las respuestas son razonables. Si las unidades que se usan para medir fueran pequeñas, se necesitaría tomar mayor cantidad de ellas para indicar una medida dada que si las unidades fueran grandes. Verifica siempre tus respuestas para ver si son razonables.

La mayor parte de las relaciones básicas que se necesitan para convertir (o cambiar el nombre de) unidades te son familiares. Se dan en las tablas que aparecen al final del Capítulo 8. La tabla de las medidas lineales comunes se da también aquí:

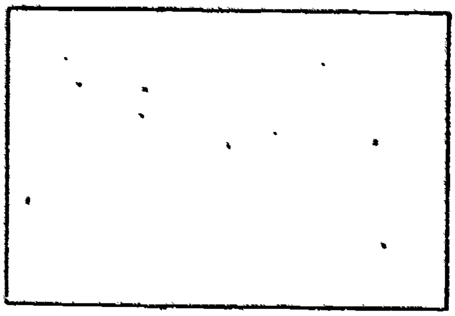
12 pulg. = 1 pie
36 pulg. = 1 yd.
3 pies = 1 yd.
5,280 pies = 1 mi.

Ejercicios 7-4d

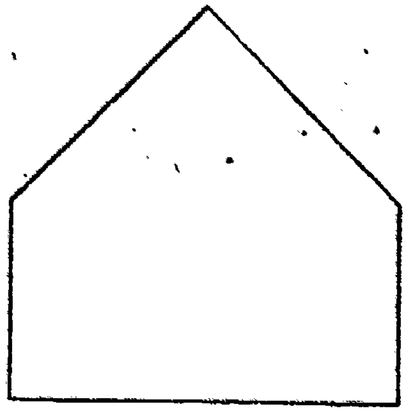
Cuando se trate de mediciones, usa el símbolo ≈.

1. Da diez pasos de la manera como acostumbras caminar. Mide la distancia entre la primera y la última marca de la punta del zapato y divídela por diez para encontrar la longitud de tu paso. Expresa esta longitud tanto en pulgadas como en pies.
2. Utiliza una regla marcada en 16 avos de pulgada para medir los siguientes segmentos:
   (a) ______________________
   (b) ______________________________
   (c) ____________________
   (d) ___________________________________
   (e) ______________________________
3. Halla la longitud total de cada una de las siguientes curvas simples cerradas, midiendo cada segmento y sumando luego las medidas. Utiliza una regla marcada en 16 avos de pulgada.

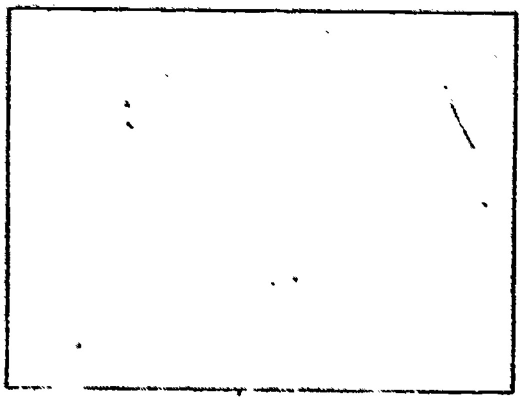
(a)



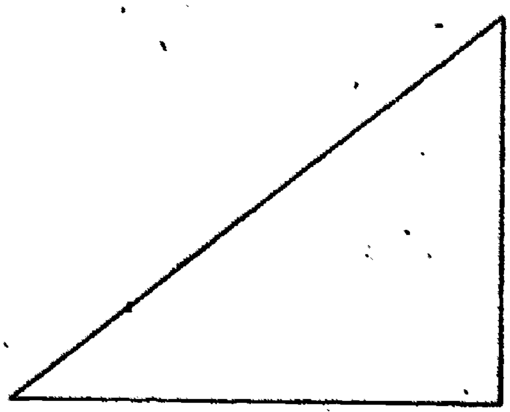
(b)



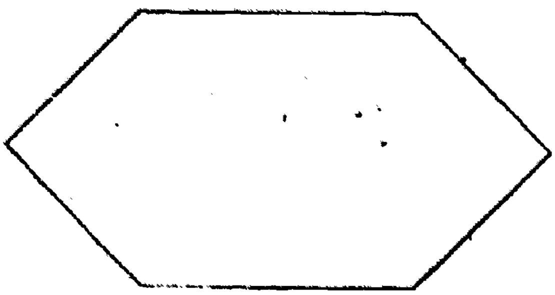
(c)



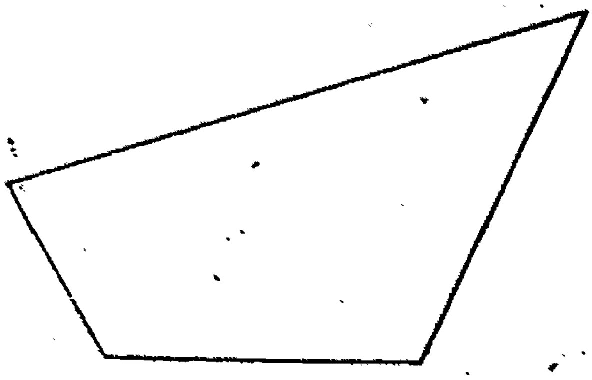
(d)



(e)



(f)

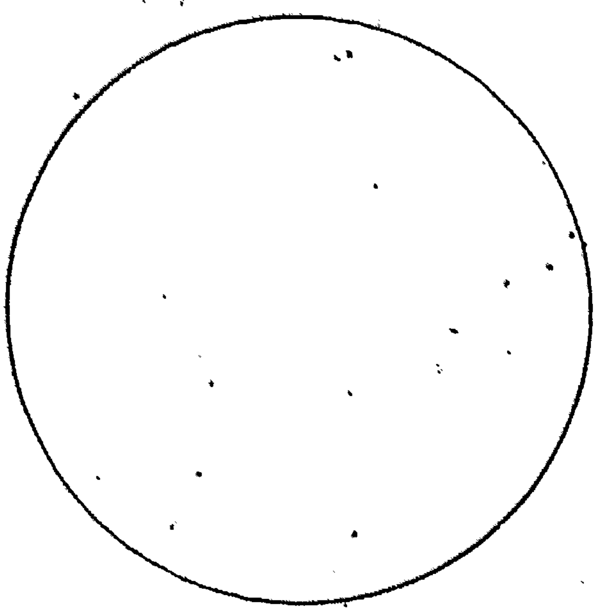


4. (a) En el problema 3 has usado una regla. ¿Puedes medir la longitud de cada una de las siguientes curvas de la misma manera?

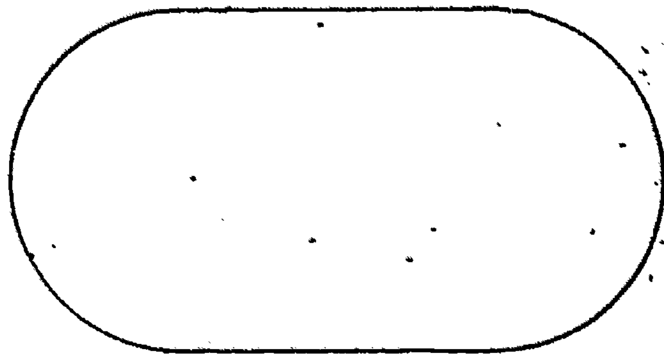
(b) ¿Puedes imaginar un método para medir las longitudes con una cuerda?

(c) Mide la longitud de cada una de las curvas cerradas siguientes:

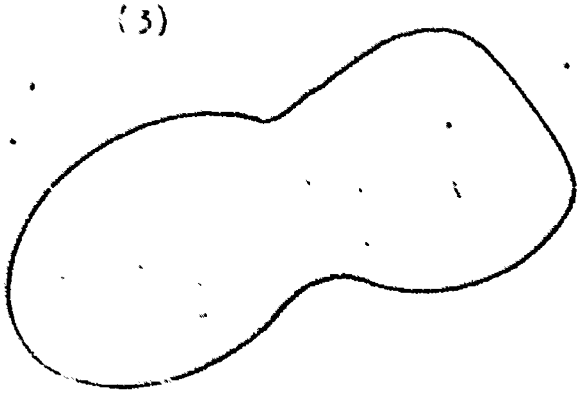
(1)



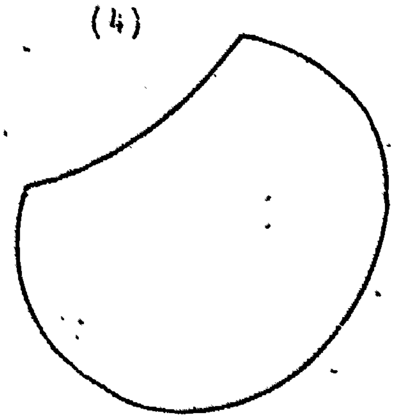
(2)



(3)



(4)



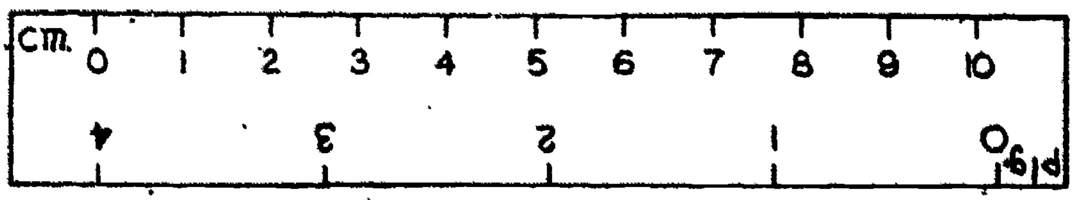
5. (a) Utiliza 18 pulgadas como longitud de un codo y halla las dimensiones del arca de Noé. Podrás encontrar las dimensiones en codos en la página 261.

(b) Da las dimensiones del arca en pies y en yardas.

*6. Busca un almanaque en el que se indiquen las dimensiones de los barcos modernos y compáralas con las que hemos dado para el arca de Noé.

Otra clase de reglas

En la primera parte de esta sección has visto que el <u>metro</u> es la unidad de longitud básica en el <u>sistema métrico</u>. Sin embargo, frecuentemente conviene usar otra unidad para medir longitudes menores de un metro. Esta unidad es el <u>centímetro</u>. El centímetro es $\frac{1}{100}$ de un metro. Quizá has comprado alguna vez una regla con un borde marcado en pulgadas y el otro en centímetros. Si no lo has hecho, la siguiente figura te ayudará a imaginar una unidad de un centímetro de longitud.



1 centímetro = $\frac{1}{100}$ de un metro

Una longitud 100 veces mayor que el tamaño de un centímetro es un metro.

Ejercicios de clase 7-4b

1. Usa un trozo de cartulina o de cartón con un borde recto para construir una regla de 10 centímetros.
2. Mide cada uno de los siguientes segmentos con la aproximación de un centímetro.

(a) ______________________________

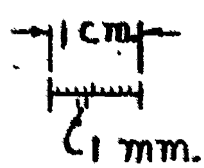
(b) ______________________________

(c) ______________________________

(d) ______________________________

3. Halla la longitud total, en centímetros, de las curvas simples cerradas del problema 4, Ejercicios 7-4d.

En varios trabajos de laboratorio se necesita con frecuencia utilizar una unidad de medida más pequeña que el centímetro. Con este objeto los científicos utilizan una unidad de medida de $\frac{1}{10}$ de centímetro, llamada un milímetro. Observa que $\frac{1}{10} \times \frac{1}{100}$ de un metro es $\frac{1}{1000}$ de un metro. El prefijo "mil" significa un milésimo. La figura que sigue te ayudará a apreciar cómo es una unidad de un milímetro. Se la obtiene dividiendo el centímetro en 10 partes iguales, cada una de las cuales se llama un milímetro.



1 milímetro = $\frac{1}{10}$ de centímetro = $\frac{1}{1000}$ de metro. Una longitud 1,000 veces mayor que la de un milímetro es un metro.

Ejercicios de clase 7-4c

Utiliza una regla corriente marcada en milímetros para tomar las medidas indicadas en estos ejercicios.

1. Mide (en milímetros) cada uno de los segmentos de recta del problema 2 de los Ejercicios de clase 7-4b.
2. Halla la longitud total en milímetros de las curvas simples cerradas del problema 3, Ejercicios 7-4d.
3. (a) Dibuja un segmento de recta de una pulgada de longitud.
   (b) Mide este segmento con una regla graduada en centímetros. ¿Cuántos centímetros hay, aproximadamente, en una pulgada?
   (c) Mide la longitud de una pulgada en milímetros. ¿Cuántos milímetros hay, aproximadamente, en una pulgada?

7-5. Precisión de las mediciones y máximo error posible

Al tratar los problemas 3 a 6, Ejercicios 7-4b encontraste diferentes medidas para el mismo segmento cuando empleaste reglas con divisiones de diferentes tamaños. Construiste reglas marcadas en pulgadas, medias pulgadas, cuartos de pulgada, octavos de pulgada y en centímetros. Si mides un segmento con una regla marcada en 16 avos de pulgada, tu medida será más próxima a la longitud real del segmento que si usas cualquiera de las reglas que hiciste. Puedes comprar reglas marcadas en 32 avos y aún en 64 avos de pulgada. Como estas últimas deben ser fabricadas con mucho esmero, son caras y no se usan corrientemente. Si usaras una de estas reglas para medir el mismo segmento, podrías apreciar que las medidas anteriores no son exactamente iguales a la nueva. Cuando usas una regla que está marcada sólo en pulgadas, deberás dar la respuesta con la aproximación de una pulgada. Si tu regla está marcada en medias pulgadas, puedes medir con la aproximación de $\frac{1}{2}$ pulgada. ¿Con qué precisión puedes medir con una regla marcada en octavos? ¿Y con una regla marcada en 16 avos?

Ejercicios 7-5a para analizar en clase

Refiérete a los Ejercicios 7-4b, página 264.

1. Utiliza tu regla graduada en medias pulgadas para medir el segmento (b), problema 3.
2. Utiliza tu regla graduada en cuartos de pulgada para medir el mismo segmento.
3. Utiliza tu regla graduada en octavos de pulgada para medir ese segmento.
4. Mide el segmento (b) utilizando 16 avos de pulgada.
5. Al medir con reglas de graduaciones diferentes, ¿obtuviste siempre el mismo resultado?
6. Repite los problemas 1 a 5 para el segmento (c).

Tu respuesta al problema 1 debe de haber sido $3\frac{1}{2}$". Esto significa que el extremo derecho del segmento de recta está más próximo a la marca de $3\frac{1}{2}$ pulgadas que a la de 3" o a la de 4". En el problema 2, probablemente no estabas seguro de si debías responder $3\frac{1}{4}$" ó $3\frac{1}{2}$", pues el extremo del segmento parecía estar en el punto medio entre la marca $3\frac{1}{4}$" y la marca $3\frac{1}{2}$".

7. Llena los espacios vacíos siguientes: En el problema 3 el extremo derecho del segmento está más próximo a __?__ que a __?__ ó a __?__. La medición se ha efectuado con una aproximación de __?__ pulgada.

Aun cuando mediste el mismo segmento en los problemas 1 a 4, obtuviste resultados diferentes. Esas diferencias se deben a que utilizaste diferentes subdivisiones de una pulgada al efectuar las medidas. Se dice que la medición del problema 1 es precisa con la aproximación de $\frac{1}{2}$ pulgada; la del problema 2 es precisa con la aproximación de $\frac{1}{4}$ de pulgada. En el problema 3 la precisión es de $\frac{1}{8}$ de pulgada; mientras que en el problema 4 es de $\frac{1}{16}$ de pulgada. La precisión depende del tamaño de la menor subdivisión que se use en el instrumento de medida.

Decimos que

$$\left.\begin{array}{l}\text{una medición con la}\\ \text{aproximación de}\\ \frac{1}{2}\text{ pulgada}\end{array}\right\}\ \text{es más precisa que}\ \left\{\begin{array}{l}\text{una medición con la}\\ \text{aproximación de } 1\\ \text{pulgada}\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{una medición con la}\\ \text{aproximación de}\\ \frac{1}{4}\text{ de pulgada}\end{array}\right\}\ \text{es más precisa que}\ \left\{\begin{array}{l}\text{una medición con la}\\ \text{aproximación de } \frac{1}{2}\\ \text{pulgada}\end{array}\right.$$

y así sucesivamente.

Cualquiera puede cometer un error al leer las marcas de una regla, o puede colocarla sin suficiente cuidado a lo largo del segmento que trata de medir; pero la precisión de una medida no se refiere a esta clase de faltas.

Escribamos los tamaños de las subdivisiones en el orden en que las hemos usado:

$$\frac{1}{1}\text{ pulg.},\ \frac{1}{2}\text{ pulg.},\ \frac{1}{4}\text{ pulg.},\ \frac{1}{8}\text{ pulg.},\ \frac{1}{16}\text{ pulg.},\ \ldots$$

y observemos los denominadores de las fracciones:

1, 2, 4, 8, 16, ...

Observa que

los denominadores crecen en esta dirección ⟶

la precisión de la medición aumenta en esta dirección ⟶

La idea de precisión de una medición se relaciona con la idea del crecimiento de los denominadores.

Una regla marcada en $\frac{1}{4}$" permite mayor precisión que otra marcada en $\frac{1}{2}$".

Una regla marcada en $\frac{1}{8}$" permite mayor precisión que una marcada en $\frac{1}{4}$".

Supón que quieres medir el grosor de un cabello. ¿Usarías una regla marcada en pulgadas? ¿En $\frac{1}{8}$"? ¿En $\frac{1}{16}$"? Probablemente dirás que esos instrumentos de medida son demasiado "groseros" y que necesitas alguno más "fino". Digamos mejor que se necesita un instrumento más preciso. ¿Sabes qué es un "instrumento de precisión"? El término se aplica a una amplia variedad de herramientas e instrumentos que se fabrican con tanto cuidado que con ellos se pueden tomar medidas "finas". Este cuidado es muy especial si el instrumento se va a utilizar para hacer mediciones muy precisas o si se necesitan medidas muy precisas para que funcione bien una máquina, que en este caso también se llama de precisión. Un reloj es buen ejemplo de las máquinas de precisión. También lo es el automóvil, pues no podría funcionar si uno de sus cilindros fuera $\frac{1}{16}$ de pulgada más grande que el pistón o tan estrecho que éste no pudiera entrar en él. Los mecánicos con frecuencia necesitan medir con la aproximación de milésimas o diez milésimas de pulgada. Esta medida es tan pequeña que no se puede distinguir a simple vista, pero hay instrumentos con los cuales sí se puede efectuar estas medidas. Uno de tales instrumentos es el tornillo micrométrico o micrómetro dibujado en la figura 7-5-a. Quizás alguien de la clase puede traer uno y mostrar cómo funciona.

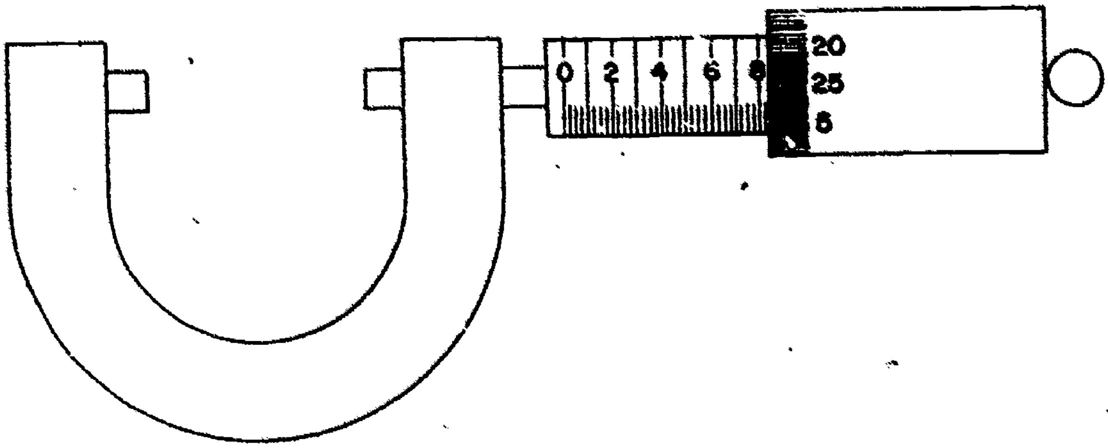


Figura 7-5-a

Supón que hemos utilizado un procedimiento para subdividir una pulgada según el criterio de los científicos y en forma relacionada directamente con nuestro sistema decimal. El procedimiento sería como sigue:

1. Comienza con una unidad de una pulgada $\frac{1}{1}$"

2. Divídela en 10 partes iguales. Entonces cada parte será de $\frac{1}{10} \times (1") =$ $\frac{1}{10}$"

3. Divide la nueva unidad de $\frac{1}{10}$" en 10 partes iguales. Cada nueva parte será de $\frac{1}{10} \times (\frac{1}{10}") =$ $\frac{1}{100}$"

4. Divide la nueva unidad de $\frac{1}{100}$" en 10 partes iguales. Cada nueva parte será de $\frac{1}{10} \times (\frac{1}{100}") =$ $\frac{1}{1000}$"

5. Divide la nueva unidad de $\frac{1}{1000}$" en 10 partes iguales. Cada nueva parte será de $\frac{1}{10} \times (\frac{1}{1000}") =$ $\frac{1}{10000}$"

Este procedimiento es el que realmente siguen los mecánicos para construir las escalas sobre un micrómetro como el de la figura 7-5-a. Supón que tenemos una regla subdividida según este procedimiento. Si usamos solamente las marcas de $\frac{1}{10}$", medimos con la aproximación de $\frac{1}{10}$". Si usamos sólo las marcas de $\frac{1}{100}$", medimos con la aproximación de $\frac{1}{100}$". Supón que disponemos los denominadores de nuestras fracciones en orden creciente. Tenemos

1, 10, 100, 1,000, 10,000, ...

Observa que

los denominadores crecen en esta dirección ⟶

la precisión de las mediciones crece en esta dirección ⟶

Aquí también la idea de precisión de las mediciones se relaciona con la idea de crecimiento de los denominadores.

Cuando se utilizan partes fraccionarias de una unidad, se obtiene mayor precisión en la medición si se emplean subdivisiones cuya fracción tiene mayor denominador.

Una regla graduada en $\frac{1}{100}$" permite mayor precisión que una graduada en $\frac{1}{10}$".

Una regla graduada en $\frac{1}{1000}$" mide con mayor precisión que una graduada en $\frac{1}{100}$", etc.

De las discusiones anteriores resultaría que a medida que avanzamos hacia las unidades de medida más pequeñas sobre la regla, obtenemos mayor precisión en las mediciones. Las medidas tomadas con una regla graduada en octavos de pulgada son más precisas que las que se toman con otra graduada en cuartos de pulgada. Por la misma razón, se dice que las mediciones son más precisas si la regla está graduada

en pulgadas	en vez de	pies,
en pies	en vez de	yardas,
en yardas	en vez de	varas largas[1] (abreviado vl.),
en varas largas	en vez de	millas.

Por la misma razón las medidas serán más precisas si la regla se gradúa

en milímetros	en vez de	centímetros,
en centímetros	en vez de	metros.

[1] En inglés: rod, abreviado rd.

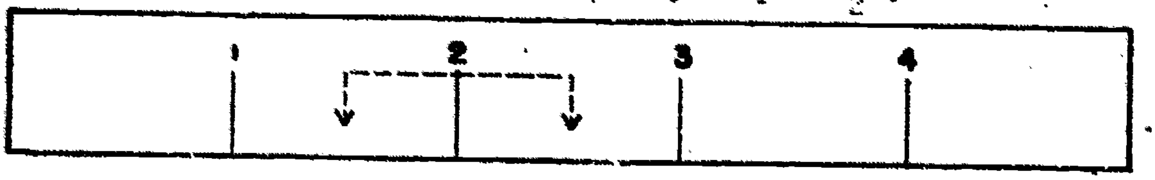
¿Cómo se puede escribir la notación de una medición de manera que alguien que la mire sepa su grado de precisión? Una manera muy simple es seguir esta norma: No cambiar las fracciones a su forma irreducible. Si mides con una regla marcada en 16 avos de pulgada y usas todas sus divisiones, debes expresar la respuesta en 16 avos de pulgada. Por ejemplo, si la medida de una longitud es $2\frac{1}{2}$ pulgadas, debes escribirla como $2\frac{8}{16}$ pulg. Naturalmente, si mides con la aproximación de $\frac{1}{8}$ solamente, la respuesta debería expresarse como $2\frac{4}{8}$ pulg. Este método se debe usar aun cuando la medida resulte un número cardinal; se escribirá 2 pulgadas como $2\frac{0}{16}$ pulg. o como $2\frac{0}{8}$, según las unidades que se usen. Este modo de expresión indica la precisión de la medida. Por consiguiente, $2\frac{8}{16}$ indica precisión con la aproximación de $\frac{1}{16}$ pulg.

Ejercicios 7-5b para analizar en clase

1. Si usas una regla marcada en octavos de pulgada para medir un segmento,
   (a) Mides con una aproximación de __?__ pulgadas.
   (b) ¿Puedes dar la respuesta en la forma $3\frac{7}{8}$"?
   (c) ¿Puedes dar la respuesta en la forma $3\frac{14}{16}$"?
   (d) ¿De qué grado de precisión es una medición efectuada con una regla graduada en octavos de pulgada?
2. ¿Qué significa, en cuanto a precisión, una medición de $3\frac{14}{16}$"?
3. Si utilizas una regla marcada en 16 avos de pulgada para medir un segmento,
   (a) Mides con una aproximación de __?__ pulg.
   (b) Si tu respuesta se da como $2\frac{10}{16}$", ¿debes escribir ese número como $2\frac{5}{8}$"? ¿Por qué?
   (c) ¿Qué grado de precisión tiene la medición realizada?

4. ¿Qué regla da una medición más precisa, una graduada en octavos de pulgada u otra graduada en 16 avos de pulgada?

Ahora que tenemos las nociones de precisión de una medición, podemos considerar otra idea que nos ayudará a entenderla de manera más completa. Supón que utilizas una regla marcada en pulgadas y das la medición de un segmento como 2 pulgadas. Esto significa que el extremo derecho del segmento está entre $1\frac{1}{2}$" y $2\frac{1}{2}$". ¿Cuál es la mayor diferencia posible entre la longitud real del segmento y tu respuesta? ¿Puede esa respuesta ser mayor que $\frac{1}{2}$"? El siguiente diagrama muestra que aunque el extremo derecho del segmento esté en A o en B, la diferencia entre estos puntos y la raya marcada con 2 no es mayor que $\frac{1}{2}$".



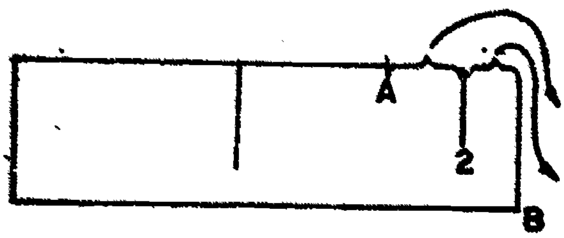


Figura 7-5-b

<u>Ejercicios 7-5c para analizar en clase</u>

1. Si tu regla está marcada en medias pulgadas, la mayor diferencia posible entre la longitud verdadera y la medida es ___?___ pulg.
2. Si tu regla está marcada en octavos de pulgada, la mayor diferencia posible es ___?___ pulg.

La mayor diferencia posible entre la longitud real de un segmento y la medida efectuada se llama <u>máximo error posible</u>. Si escribes una medida como $2\frac{3}{8}$", la longitud real está entre $2\frac{5}{16}$" y $2\frac{7}{16}$". El máximo error posible es $(\frac{1}{2} \times \frac{1}{8})$ pulg. ó $\frac{1}{16}$ pulg.

3. (a) Dibuja la figura de una regla, semejante a la de la figura 7-5-b, sólo marcada en $\frac{1}{2}$ pulg.

   (b) Muestra en esa figura un segmento cuya medida se podría escribir como $2\frac{1}{2}"$.

   (c) Indica el máximo error posible al efectuar tal medida.

4. Usando una regla graduada en $\frac{1}{4}$ pulg., el máximo error posible es __?__ pulg.

5. Cuando se usa una regla graduada en $\frac{1}{16}$ pulg., el máximo error posible es __?__ pulg.

6. Supón que se han escrito correctamente las siguientes medidas (es decir, que aún en los casos posibles, no se han simplificado las fracciones). Llena los espacios vacíos como se indica en el ejemplo.

	Medida	Precisión de la medición	Maximo error posible
(a)	$3\frac{2}{4}"$	aproximación $\frac{1}{4}"$	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}" = \frac{1}{8}"$
(b)	$1\frac{15}{16}"$		
(c)	$4\frac{3}{8}"$		
(d)	$2\frac{6}{8}"$		
(e)	$3\frac{10}{16}"$		
(f)	$7\frac{4}{8}"$		
(g)	$2\frac{3}{32}"$	aproximación $\frac{1}{32}"$	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{32} = \frac{1}{64}"$

En el problema 6(a), el máximo error posible es $\frac{1}{8}"$. Esto no quiere decir que te has equivocado (ni que no te has equivocado), sino que la medida real está entre $(3\frac{2}{4} - \frac{1}{8})$ pulg. y $(3\frac{2}{4} + \frac{1}{8})$ pulg. La medida real está entre $3\frac{3}{8}"$ y $3\frac{5}{8}"$.

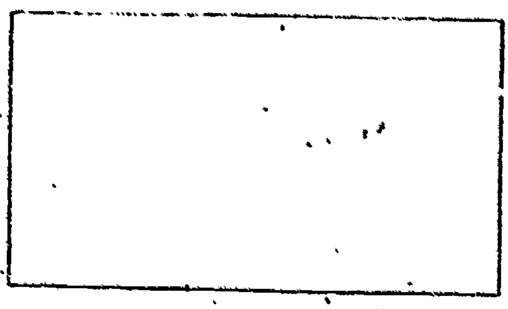
7. Establece entre qué dos longitudes está comprendida la medida real de cada una de las medidas dadas en el problema 6. La respuesta para la pregunta (a) se escribiría: La medida real está entre $(3\frac{2}{4} - \frac{1}{8})$" ó $3\frac{3}{8}$" y $(3\frac{2}{4} + \frac{1}{8})$" ó $3\frac{5}{8}$".

La medida para la pregunta (g) se escribiría: La longitud real está entre $(2\frac{3}{32} - \frac{1}{64})$" y $(2\frac{3}{32} + \frac{1}{64})$", es decir, la longitud real está entre $2\frac{5}{64}$" y $2\frac{7}{64}$".

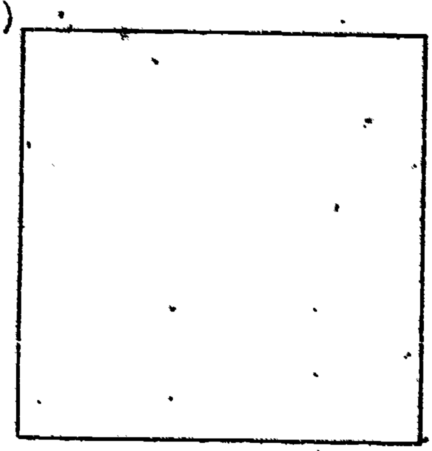
Ejercicios 7-5a

1. ¿Qué parte fraccionaria de la menor división, usada en el instrumento de medida, es el máximo error posible?
2. Dibuja un segmento de 2 pulgadas de longitud y divídelo de manera que se lo pueda usar para medir con una precisión de $\frac{1}{8}$ pulg.
3. Dibuja un segmento de 2 pulgadas de longitud y divídelo de manera que sirva para medir con un máximo error posible de $\frac{1}{8}$ pulg.
4. Mide el largo y el ancho de cada una de estas figuras con (1) aproximación de $\frac{1}{2}$ pulg.; (2) aproximación de $\frac{1}{8}$ pulg.; y (3) aproximación de $\frac{1}{16}$ pulg. En cada caso da el máximo error posible.

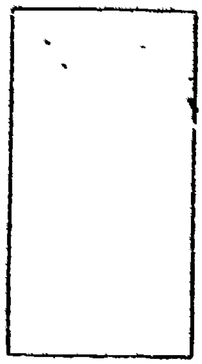
(a)



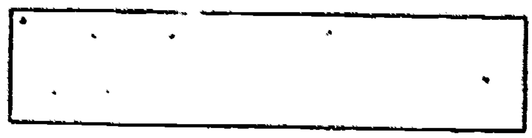
(b)



(c)



(d)



5. Un rectángulo tiene 4 pulgadas de largo y 3 pulgadas de ancho. Cada una de las medidas está dada con una aproximación de $\frac{1}{2}$".
   (a) Dibuja un rectángulo, utilizando los segmentos más largos posibles que tengan las medidas dadas.
   (b) Dentro del rectángulo de la pregunta (a), dibuja un rectángulo cuyos lados sean los segmentos más cortos posibles que tengan las medidas dadas.
6. Un cuadrado tiene lados de $3\frac{1}{2}$ pulg. con un máximo error posible de $\frac{1}{8}$ pulg.
   (a) Dibuja el cuadrado más grande posible cuyos lados tengan estas medidas.
   (b) Dentro del primer cuadrado, dibuja el cuadrado mínimo que tenga estas medidas.

Los ingenieros y mecánicos usan con frecuencia otra manera de indicar el máximo error posible. Para esto necesitamos un nuevo símbolo, un signo más sobre un signo menos, que se ve así " $\pm$ " y que se lee "más o menos" o, simplemente "más menos". Por ejemplo, si la regla está marcada en 16 avos de pulgada y usas todas sus divisiones, un segmento de 2 pulgadas de longitud se escribiría como "$2 \pm \frac{1}{32}$ pulg.". Esto quiere decir que el segmento no puede ser mayor que $2\frac{1}{32}$ pulg. ni menor que $1\frac{31}{32}$ pulg. para poder conservar el nombre "2 pulgadas". Vuelve a la figura 7-5-b para aclarar el sentido de esta notación. Observa que en esta notación aparecen tanto la medida 2" como el máximo error posible, $\frac{1}{32}$". Puesto que el máximo error posible es la mitad de la longitud de la división que se usa en la regla con que se efectúa la medición, entonces esta longitud es el doble del máximo error posible. Para nuestro ejemplo, la longitud de la unidad de medición que se utiliza es $2(\frac{1}{32}") = \frac{1}{16}"$. La medida es precisa con la aproximación de $\frac{1}{16}$ de pulgada.

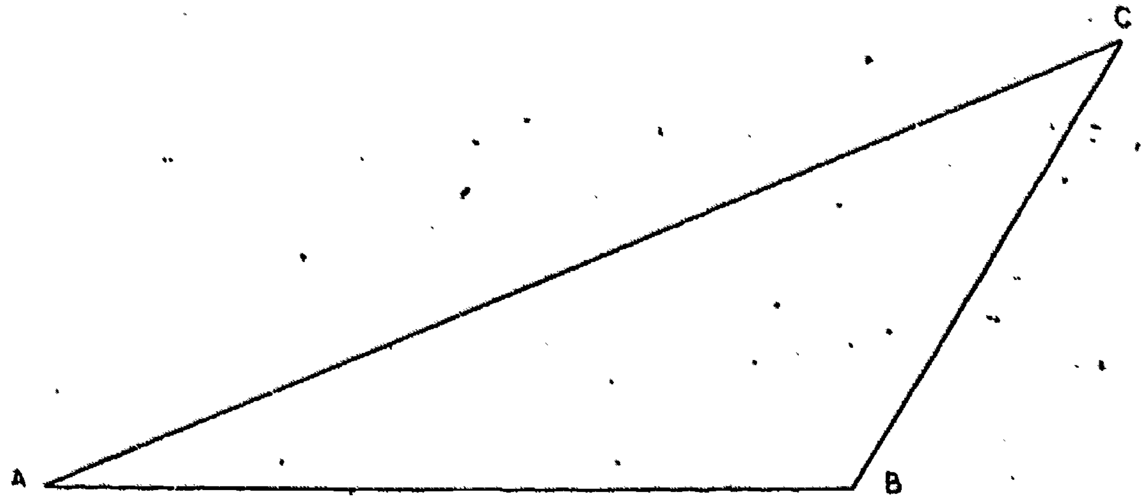
Ejercicios 7-5b

1. Dibuja una recta y marca en ella una escala con divisiones de $\frac{1}{4}$ de pulgada. Marca con C el punto cero, coloca un punto

entre $1\frac{2}{4}$ pulg. y $1\frac{3}{4}$ pulg., pero más cerca de este último, y llámalo punto D. ¿Cuál es la longitud de $\overline{CD}$ con la aproximación de $\frac{1}{4}$ de pulgada?

2. Expresa la longitud de $\overline{CD}$, utilizando la notación del máximo error posible.
3. Escribe la longitud de $\overline{CD}$, utilizando ~~la~~ notación que indica la precisión de la medida para mostrar el tamaño de las divisiones sobre la recta que has dibujado.
4. ¿Entre qué dos puntos de la escala debe estar D si la medida, con la aproximación de $\frac{1}{4}$ pulg., debe ser $1\frac{3}{4}$ pulg.? ¿A qué distancia de $1\frac{3}{4}$" está cada uno de esos puntos?
5. (a) La medida de un segmento ha resultado ser $1\frac{2}{8}$". Este segmento debe de haber sido medido con la aproximación de __?__ de pulgada.
   (b) El extremo del segmento debe estar entre __?__ y __?__.
   (c) El máximo error posible en la medición de este segmento es __?__.
   (d) Expresa esta misma medida utilizando otra clase de notación.
6. (a) La medida de un segmento ha resultado ser $(2\frac{1}{4} \pm \frac{1}{16})$ lg. Este segmento debe de haber sido medido con la aproximación de __?__ de pulgada.
   (b) El extremo del segmento debe estar entre __?__ y __?__.
   (c) El máximo error posible en la medición de este segmento es __?__.
   (d) Expresa la medida en (a) de otra manera.
7. Mide el largo de tu cuaderno y expresa la medida, utilizando la idea de máximo error posible para indicar el tamaño de las divisiones de tu regla.
8. Mide el largo de tu cuaderno y expresa la medida utilizando la idea de precisión de la medida para indicar el tamaño de las divisiones de tu regla.

9. Mide las longitudes de cada uno de los lados del triángulo y escribe tu respuesta de dos maneras distintas.



10.

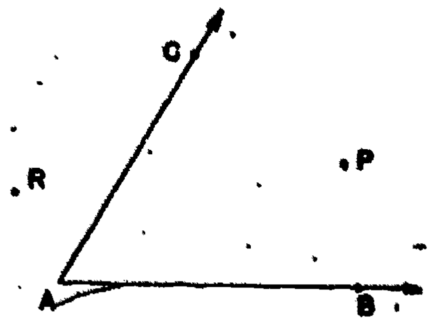
Mide la longitud de cada uno de los lados del cuadrilátero y escribe tu respuesta de dos maneras distintas.

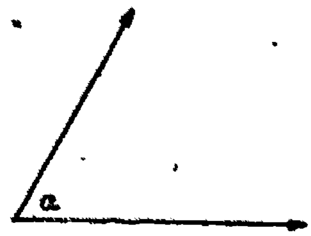
____

7-6. Medición de ángulos

Has estudiado métodos para medir segmentos de recta, regiones planas cerradas y sólidos. Veamos ahora cómo se miden los ángulos.

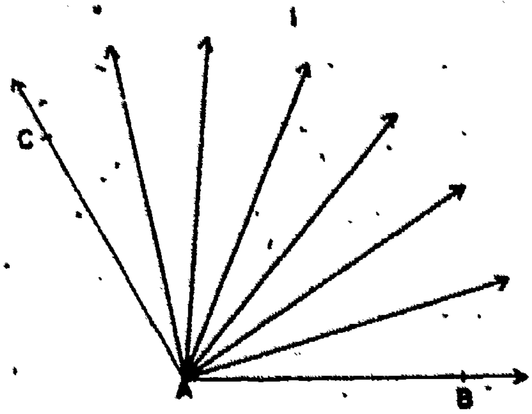
Recuerda que un ángulo es un conjunto que consiste en los puntos de dos rayos que tienen su extremo en común. En el dibujo del ángulo, los rayos son $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Estos rayos son los lados del ángulo BAC y el punto A es su vértice. Observa que el ángulo se llama "ángulo BAC" o "ángulo CAB", con el vértice siempre mencionado en segundo lugar. ¿Por qué debe ser A la letra del medio? Podemos llamarlo "ángulo A" si este nombre se refiere a un solo ángulo. También designamos los ángulos escribiendo una letra minúscula o un numeral en el interior del ángulo, junto al vértice.





Un ángulo determina tres conjuntos de puntos en el plano: el conjunto de puntos del interior del ángulo, el conjunto de puntos del exterior del ángulo y el conjunto de puntos del ángulo mismo. Un punto P está en el interior del ángulo BAC si está del mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ que el punto C, y del mismo lado de la recta $\overleftrightarrow{AC}$ que el punto B. (Observa el ángulo BAC de más arriba.) Todo punto del plano que no es un punto del ángulo y no está en el interior, está en el exterior del ángulo. ¿Está el punto R en el interior o en el exterior del ángulo BAC? ¿Y el punto P?

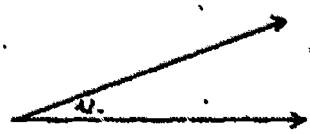
Como sabes, para medir cualquier cosa necesitas utilizar una unidad de la misma naturaleza que la cosa que se trata de medir. Para medir ángulos, se utiliza un ángulo como unidad de medición. Entonces, se puede medir un ángulo dibujando rayos que subdividan su interior de manera que los ángulos formados sean exactamente iguales a la unidad de ángulo (o ángulo unidad). En la figura que sigue, el interior del ángulo BAC está subdividido de manera que aparecen ángulos exactamente iguales a la unidad de ángulo que se muestra. Resulta que la "amplitud" (o tamaño) del $\angle$ BAC es 7 veces mayor que la amplitud del ángulo unidad.

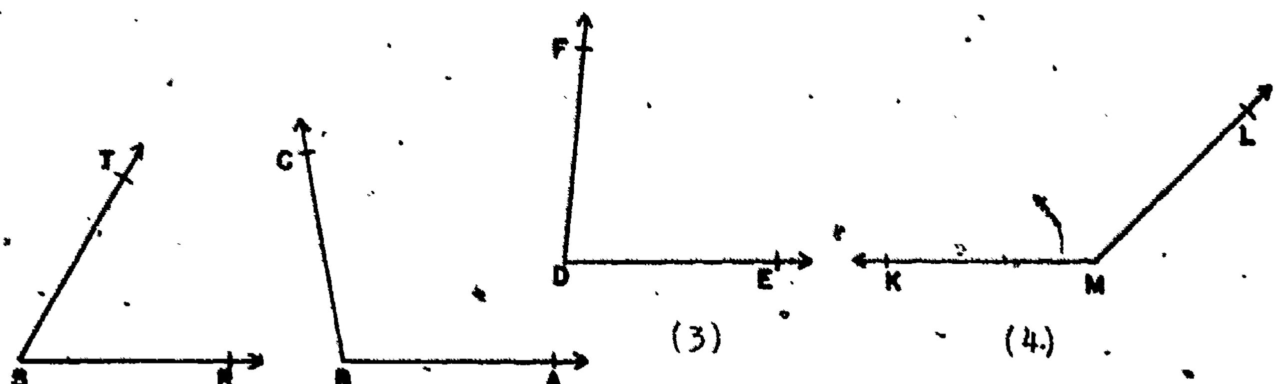


ANGULO UNIDAD

<u>Ejercicios 7-6a</u>

Calca en papel transparente los ángulos que siguen, inclusive el ángulo unidad u. Recorta la región angular determinada por el ángulo unidad y úsala para subdividir el interior de cada uno de los ángulos (1) a (4).





(1) (2) (3) (4)

Compara cada ángulo con el ángulo unidad, estableciendo tu comparación así: Amplitud del ángulo RST = _____ u.

Unidad normalizada para la medición de ángulos

Así como hay unidades normalizadas para medir un segmento de recta (pulgada, pie, yarda, milímetro, centímetro, metro), también hay unidades normalizadas para medir ángulos. La que vamos a utilizar está determinada por un conjunto de ciento ochenta y un rayos trazados desde un mismo punto. Estos rayos determinan 180 ángulos congruentes los cuales, conjuntamente con sus interiores, forman un semiplano y la recta que determina este semiplano. Los rayos están numerados en orden creciente de 0 a 180, formando una escala. A cada rayo corresponde un número, es decir, hay un número para cada rayo y un rayo para cada número de 0 a 180. En la figura que sigue no se muestran todos los 181 rayos, pero sí los rayos correspondientes a 0 y a las decenas siguientes. Se adopta uno cualquiera de estos 180 ángulos congruentes como unidad normalizada. La medida de este ángulo se llama un grado. La medida de este ángulo unidad, en grados, es 1.

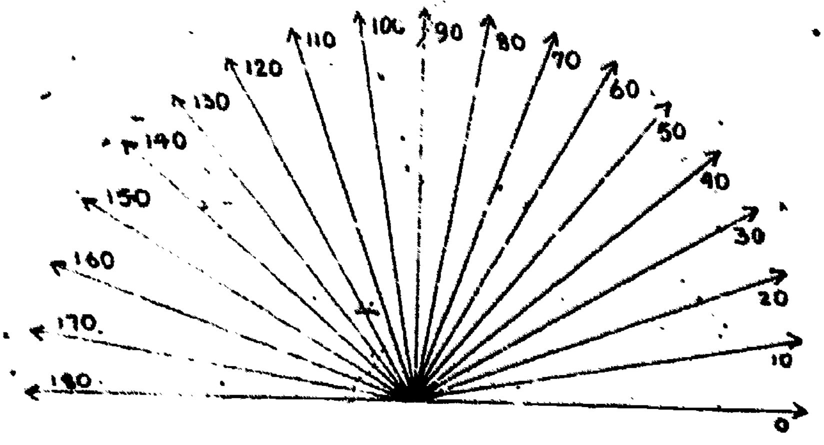


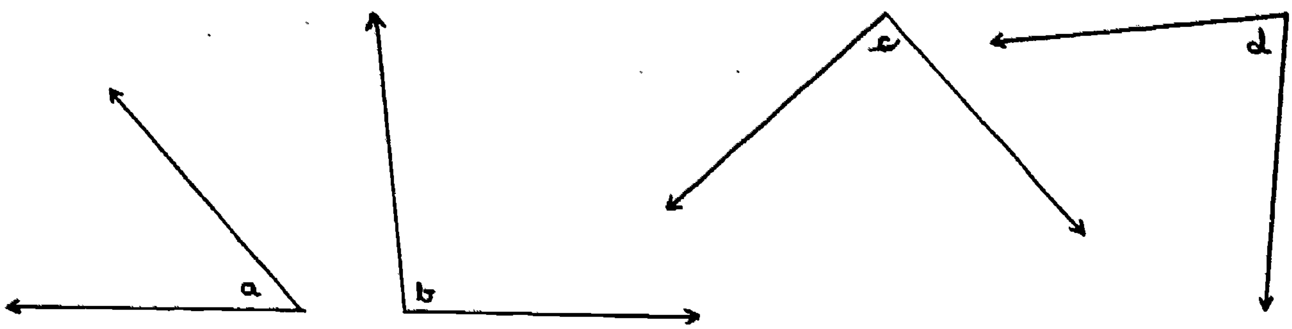
Figura 7-?

Puedes usar una escala como ésta para medir un ángulo. Coloca el ángulo sobre la escala con uno de sus lados coincidente con el rayo marcado cero y el otro lado sobre un rayo que corresponda a un número menor que 180. El vértice del ángulo debe colocarse en la intersección de los rayos. Entonces, el número que corresponde a aquel rayo es la medida del ángulo, en grados. La amplitud o tamaño del ángulo es ese número de grados.

El símbolo para "grado" es " ° ". La notación de treinta y cinco grados se escribe "35°".

Ejercicios 7-6b

Calca los ángulos siguientes. Luego mide cada uno de ellos, colocándolo sobre la escala de la figura 7-6-a.

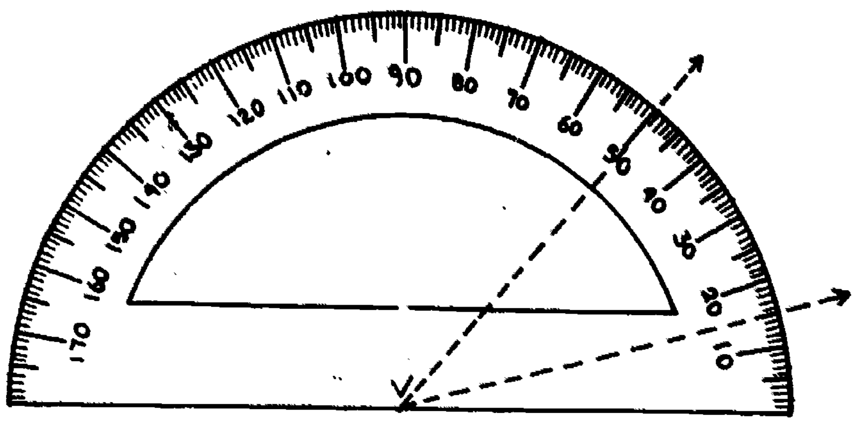


(1) (2) (3) (4)

El limbo graduado

El método que empleaste en los ejercicios anteriores es inconveniente; por eso se usa más bien un instrumento llamado limbo graduado (transportador graduado o, simplemente, transportador). En este caso, se puede colocar la escala sobre el ángulo en vez del ángulo sobre la escala.

Mira este dibujo de un limbo graduado, imaginando que los rayos parten del punto V. Algunos segmentos de esos rayos han sido marcados en la parte curva del instrumento. En la figura se muestran dos rayos en líneas de puntos para dar una idea de cómo son. Esos rayos corresponden a números de 0 a 180, de los cuales sólo se han marcado los múltiplos de 10. Para medir un ángulo con el limbo graduado, coloca el instrumento sobre el



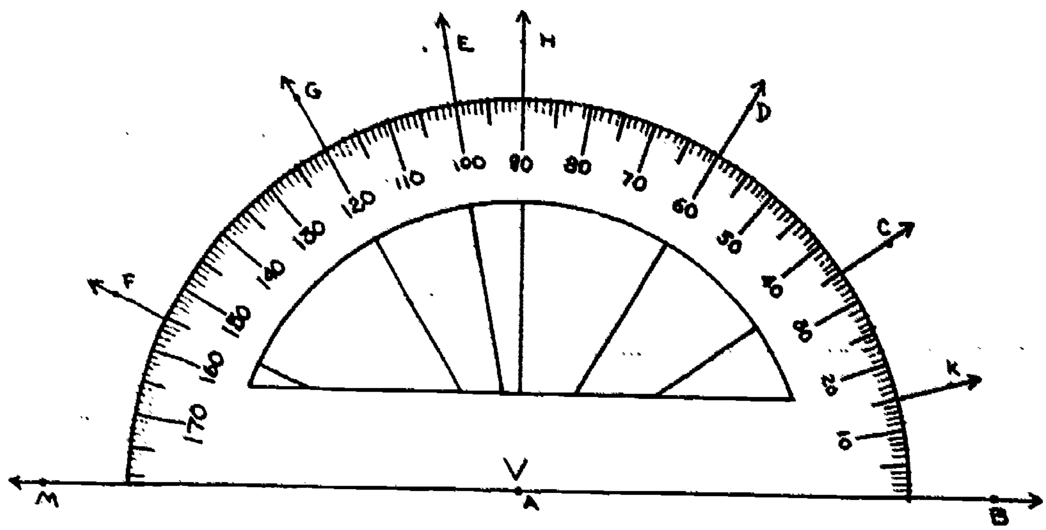
ángulo de manera que el punto V esté sobre el vértice y que el rayo que corresponde a cero en el limbo graduado coincida con uno de los lados del ángulo. Luego observa el rayo del instrumento que coincide con el otro lado del ángulo. El número que corresponde a este último rayo es la medida, en grados, del ángulo.

Encontrarás que tu limbo graduado tiene dos escalas (en la figura se muestra sólo una de ellas). Una escala parte de cero, a la derecha, y aumenta hasta 180 hacia la izquierda. La otra parte de cero, a la izquierda, y aumenta hasta 180 hacia la derecha. Cuando leas la medida de un ángulo, cerciórate de que lees en la misma escala cuyo cero está sobre uno de los lados del ángulo.

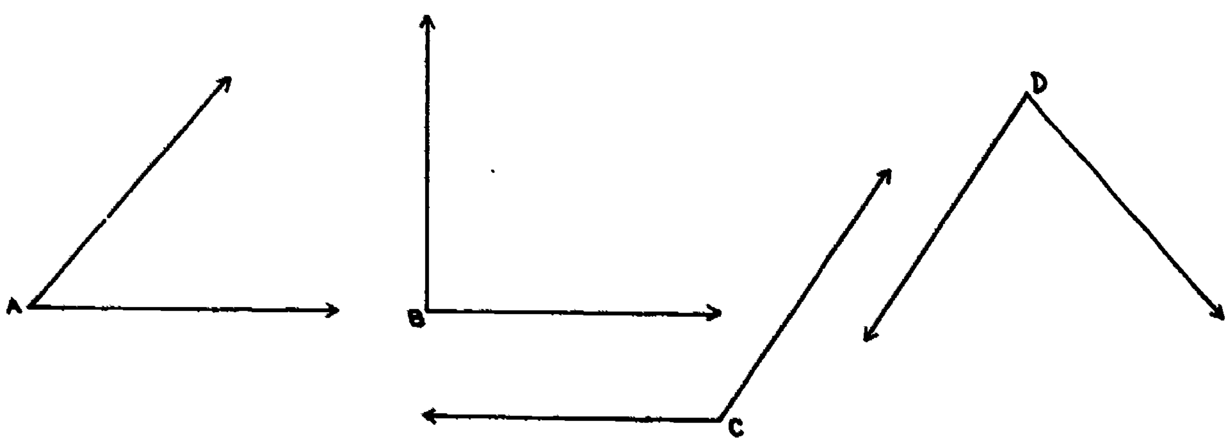
Ejercicios 7-6c

1. En la figura de la página 292 se muestra un limbo graduado puesto sobre una figura con varios rayos trazados desde el punto A. Encuentra la medida, en grados, de cada uno de los ángulos siguientes:

(a) $\angle$ BAK	(d) $\angle$ BAH	(g) $\angle$ GAM	(j) $\angle$ CAG
(b) $\angle$ BAC	(e) $\angle$ BAE	(h) $\angle$ MAC	(k) $\angle$ KAF
(c) $\angle$ BAD	(f) $\angle$ MAF	(i) $\angle$ DAE	(l) $\angle$ HAF



2. Utiliza un limbo graduado para medir los ángulos que aparecen más abajo. Si las porciones de rayos dibujadas no son bastante largas como para permitir la intersección de los lados de los ángulos con el borde graduado del instrumento, coloca el borde de una hoja de papel a lo largo de los lados del ángulo.



3. Dibuja un rayo $\overrightarrow{AB}$ de extremo A. Coloca tu limbo graduado con el punto V sobre A y el rayo del instrumento que corresponde a 0 sobre $\overrightarrow{AB}$. Luego marca el punto indicado con 35 en la escala y llámalo C. Quita el instrumento y

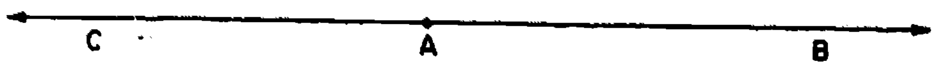
traza el rayo $\overrightarrow{AC}$. Tendrás entonces un ángulo BAC. ¿Cuánto mide?

4. Aplica el método descrito en el problema 3 para dibujar ángulos de las amplitudes siguientes:

(a) 20° (c) 61° (e) 130°

(b) [illegible] (d) 90° (f) 179°

5. En la figura que sigue, los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son opuestos entre sí, es decir, están sobre una misma recta, tienen un mismo extremo y su intersección es el extremo A.

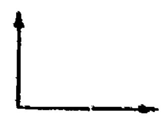


(a) Si se coloca el limbo graduado de manera que V esté sobre A y el rayo cero de una escala esté sobre $\overrightarrow{AB}$, ¿qué número corresponde en el instrumento al rayo que está sobre $\overrightarrow{AC}$?

(b) ¿Es CAB un ángulo? ¿Por qué?

Conjuntos de ángulos

Según sus medidas, los ángulos se clasifican en conjuntos. Un ángulo de 90 grados se llama "ángulo recto".



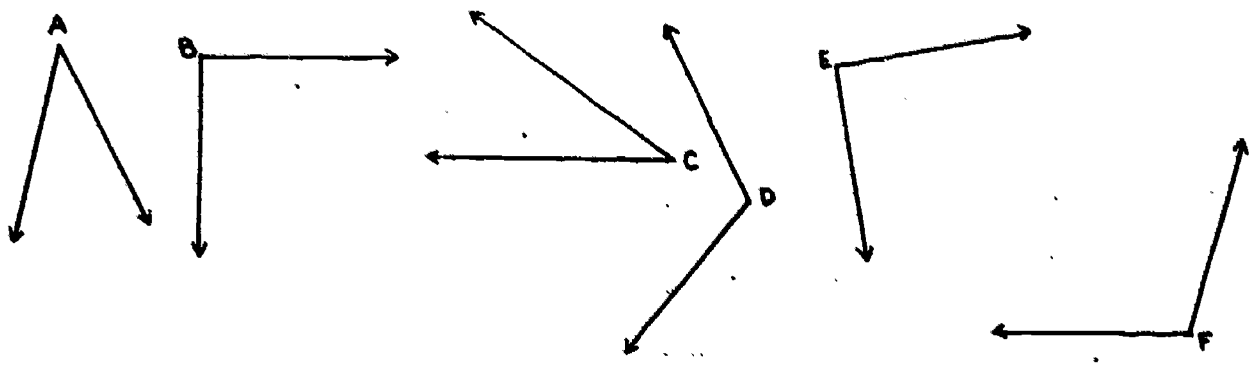
Un ángulo con amplitud menor de 90 grados se llama ángulo agudo.

Un ángulo que mida más de 90 y menos de 180 grados se llama ángulo obtuso.

Ejercicios 7-6d

1. Sin recurrir a ninguna medición, di cuáles de los ángulos de la página 294 son:

(a) Angulos rectos (b) Angulos agudos (c) Angulos obtusos

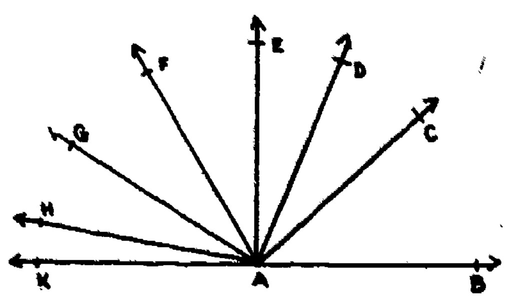


2. ¿Tienes duda sobre algunos de los ángulos del problema 1? Si es así, verifica tu respuesta, utilizando un limbo graduado.

3. (a) La medida en grados, de un ángulo agudo es mayor que ___?___ y menor que ___?___.

   (b) La medida, en grados, de un ángulo obtuso es mayor que ___?___ y menor que ___?___.

4. (a) En la figura de la derecha, nombra todos los ángulos obtusos que tienen el rayo $\overrightarrow{AB}$ por lado; luego todos los ángulos agudos y por último todos los ángulos rectos con lado $\overrightarrow{AE}$.

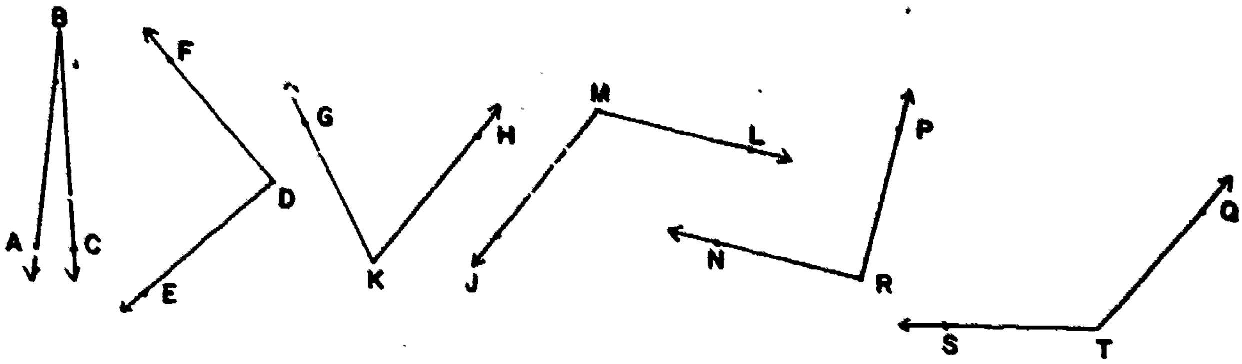


   (b) Nombra todos los ángulos agudos, luego los obtusos y por último los rectos, que tienen a $\overrightarrow{AE}$ por lado.

   (c) Nombra todos los ángulos rectos, luego los obtusos y finalmente los agudos, que tienen por lado $\overrightarrow{AK}$.

5. (a) Sin efectuar la medición, indica cuáles de los siguientes ángulos son agudos, rectos u obtusos.

(b) Sin efectuar la medición, estima el número de grados de amplitud en cada ángulo. (Una buena manera de hacer esto es comparar mentalmente el ángulo con un ángulo recto.)

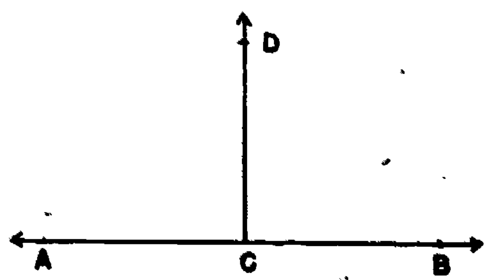


(c) Mide cada uno de los ángulos del problema 5(b). ¿Con qué grado de aproximación diste las respuestas?

6. Halla seis representaciones materiales para nuestra idea de ángulo—dos agudos, dos rectos y dos obtusos.

Rectas perpendiculares

En la figura adjunta se ha trazado el rayo $\overrightarrow{CD}$ desde el punto C de la recta $\overleftrightarrow{AB}$, de manera que los ángulos BCD y DCA tengan la misma medida. Decimos que el rayo $\overrightarrow{CD}$ es perpendicular a la recta AB.

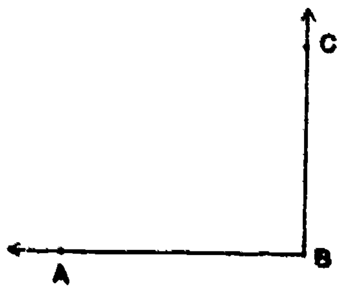


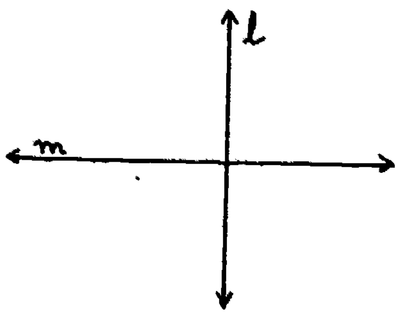
Si se colocara un limbo graduado con su punto V sobre C y su rayo cero sobre $\overrightarrow{CB}$, el rayo del instrumento que cae sobre $\overrightarrow{CA}$ corresponderá al número __?__. Por consiguiente, la amplitud del ángulo BCD, y también la del ángulo DCA, es __?__ grados, y ambos son ángulos __?__. Podemos, pues, decir también que un rayo es perpendicular a una recta si el rayo y la recta se intersecan de manera que por lo menos uno de los ángulos que se formen sea recto.

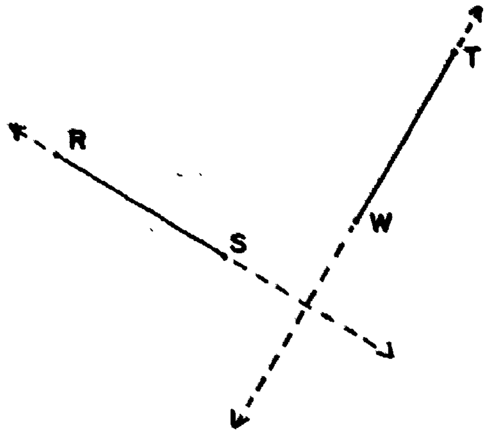
Si dos rayos forman un ángulo recto, decimos que esos rayos son perpendiculares. ¿Qué rayos en las figuras del problema 5, Ejercicios 7-6d, te parecen perpendiculares?

Dos rectas que se intersecan son perpendiculares si uno de los ángulos determinados por las rectas es recto. Dos segmentos de recta son perpendiculares si las rectas que los contienen son perpendiculares.

El símbolo para "perpendicular" es "$\perp$".

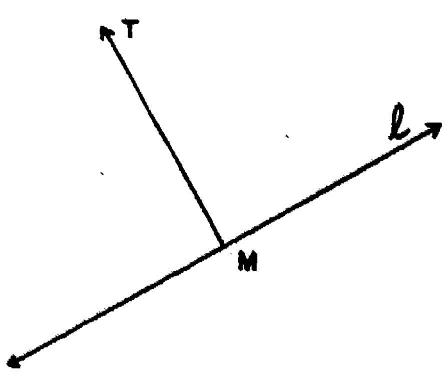


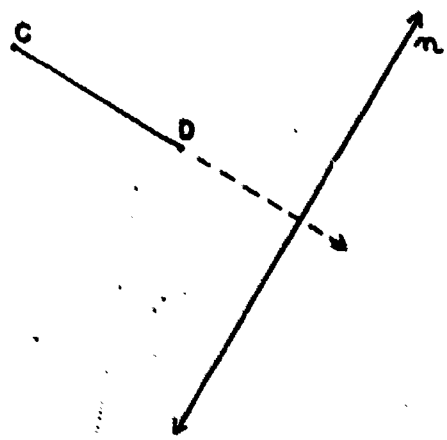




$\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$. Recta $l \perp$ recta m. Segmento $\overline{RS} \perp$ segmento $\overline{TW}$.

Podemos también decir que una recta es perpendicular a un rayo, o que un segmento de recta es perpendicular a un rayo o a una recta.

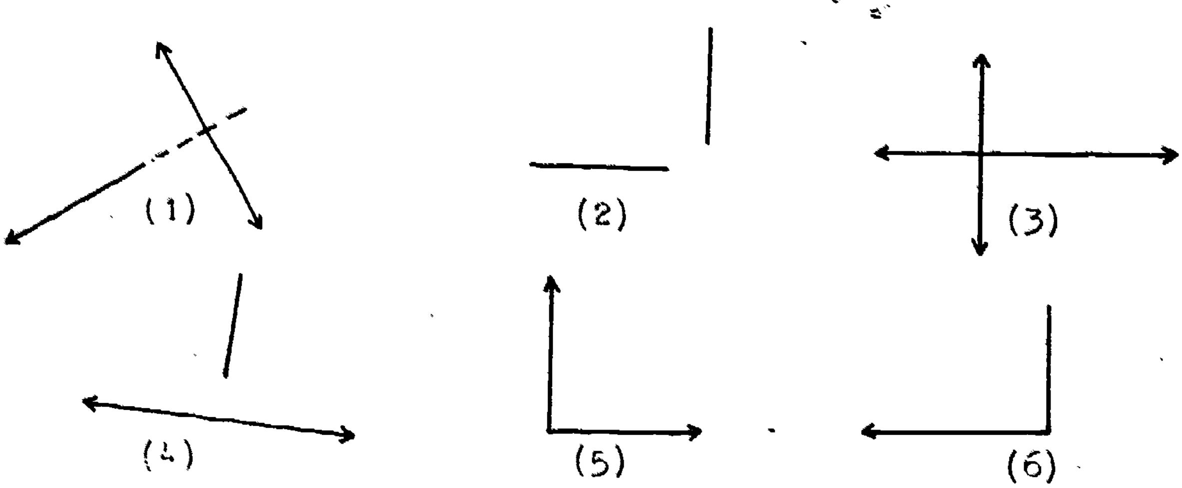




Recta $l \perp$ rayo $\overrightarrow{MT}$. Segmento $\overline{CD} \perp$ línea n.

Ejercicios 7-6e

1. ¿Cuál de los dibujos siguientes representa
   (a) Rectas perpendiculares?
   (b) Rayos perpendiculares?
   (c) Segmentos de recta perpendiculares?
   (d) Una recta perpendicular a un rayo?
   (e) Un rayo perpendicular a un segmento de recta?
   (f) Un segmento de recta perpendicular a una recta?



2. Indica cinco representaciones materiales de pares de rayos, de rectas o de segmentos de recta, perpendiculares.
3. Indica cinco representaciones materiales de pares de rayos, de rectas o de segmentos de recta que no sean perpendiculares. Si se intersecan, indica si los rayos forman ángulos agudos u obtusos.

7-7. Resumen

1. Los tamaños de las colecciones de objetos separados pueden ser determinados contando, pero los tamaños de las cantidades continuas se obtienen midiendo.
2. La medición es aproximada, no exacta. Cada vez que sea posible, se debe indicar la precisión o el máximo error posible de la medición.

3. El símbolo ≈ significa "es aproximadamente igual a".
4. Las mediciones de las cantidades geométricas continuas, longitud, ángulo, área y volumen, pueden ser imaginadas como procesos de "cubrimiento" con unidades de tamaño dado.
5. Cuando se miden las cantidades geométricas continuas, la unidad a usar debe ser de la misma naturaleza que la cantidad medida, es decir, un <u>segmento</u> unidad para medir <u>segmentos</u>, un <u>ángulo</u> unidad para medir <u>ángulos</u>.
6. El tamaño de las unidades de medición es completamente arbitrario, pero en la práctica es esencial tener unidades normalizadas, aceptadas por grupos grandes de personas.
7. Una regla puede servir como escala numérica para medir segmentos, y un limbo graduado puede prestarse como escala numérica para medir ángulos.

Capítulo 8

AREAS, VOLUMENES, PESOS Y TIEMPO

8-1. El rectángulo

Consideraremos aquí la más familiar de las curvas simples cerradas: el rectángulo. Convengamos en que un rectángulo es una figura de cuatro lados (en un plano) que tiene un ángulo recto en cada una de sus cuatro esquinas. ¿Tiene la pasta de tu libro la forma de un rectángulo? Halla cinco ejemplos de rectángulos en tu salón de clase. Según esta definición, ¿es el cuadrado un rectángulo?

En las Secciones 3 y 4 del Capítulo 7 has obtenido longitudes de curvas cerradas midiendo los segmentos que forman esas curvas. Has medido también regiones cerradas determinadas por tales curvas. ¿Qué instrumento has usado para medir las longitudes de los lados? ¿Por qué necesitas una nueva especie de unidad para medir una región cerrada?

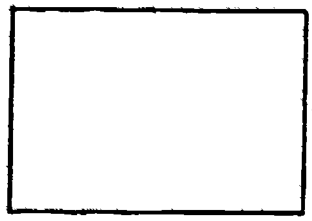
La longitud total de una curva cerrada se llama su perímetro. Para un rectángulo, ésta es la distancia total que recorrería una hormiga que partiera de una esquina del rectángulo y caminara a lo largo de los lados hasta que llegara nuevamente al punto de partida.

Ejercicios 8-1a

1. Mide los cuatro bordes de la portada de este libro. Toma otros dos rectángulos más y mide los cuatro lados de cada uno de ellos.
2. Halla los perímetros de los tres rectángulos del problema 1.
3. En todo rectángulo hay dos pares de lados opuestos, es decir, lados que no se encuentran en un vértice. Para cada rectángulo del problema 1, escribe las longitudes de los pares de lados opuestos. Considerando estas longitudes, completa el siguiente enunciado:

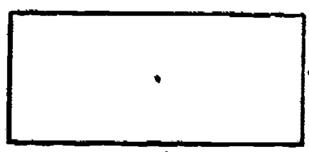
   Las longitudes de dos lados opuestos de un rectángulo son ________.

4. Suponte que dos lados de un rectángulo tienen 6 y 4 pulgadas, respectivamente, como se muestra en la siguiente figura:



Utiliza el resultado del problema 3 para determinar las longitudes de los otros dos lados. Halla el perímetro de ese rectángulo.

5. Si ℓ y w representan los números de unidades de longitud de dos lados de un rectángulo, ¿cuáles son los números de

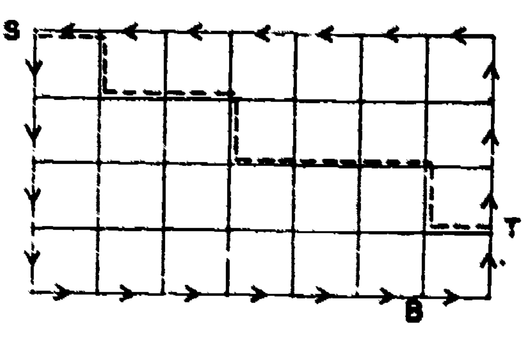


unidades de longitud de los otros lados? Redacta una proposición numérica que establezca cómo determinar las unidades del perímetro si conoces ℓ y w.

Las longitudes de dos lados que se intersecan, de un rectángulo, se llaman frecuentemente el largo y el ancho del rectángulo. Con mucha frecuencia, en la discusión de las curvas cerradas, la distancia total, medida a lo largo de ellas, se llama longitud de la curva en lugar de perímetro. Usaremos ese término en este sentido.

6. Un campo deportivo escolar es rectangular y tiene 400 pies de largo y 200 pies de ancho. ¿Cuál es la longitud total de la cerca que rodea el campo de juego? Expresa la respuesta en pies y en yardas.

7. Si la construcción de la cerca cuesta $5 por yarda, ¿cuánto costó la cerca del problema 6?
8. Un carpintero va a colocar una moldura para colgar retratos, a lo largo de las paredes de una habitación. Si la habitación tiene 15 pies de largo y 10 pies de ancho, ¿qué cantidad de moldura necesita? Expresa la respuesta en pulgadas, en pies y en yardas.
9. El carpintero del problema 8 va a poner también un zócalo alrededor de la habitación, pero observa que ésta tiene 4 puertas de 3 pies de ancho cada una. Puesto que no pondrá zócalo en las puertas, ¿cuántos pies de zócalo necesita? (Para tu cálculo, ¿necesitas conocer la ubicación exacta de las puertas?)
10. Un niño tiene 24 pies de cerca de alambre con que hacer un corral rectangular para su conejo mimado. Se propone utilizar toda la cerca. ¿Puede hacer un corral de 12 pies de largo por 12 pies de ancho? ¿Por qué sí o por qué no? ¿Podría hacer un corral de 8 pies de largo y 3 pies de ancho? ¿Uno de 8 pies de largo por 4 pies de ancho? Sugiere cinco diferentes medidas que podrías dar al largo y al ancho del corral. (Utiliza sólo números cardinales como largos y anchos.)
11. Una niña está decorando su casa para una fiesta. Tiene 5 mesas iguales, cada una de 28 pulgadas de ancho y 42 pulgadas de largo, y desea poner una cinta de papel crepé alrededor de todas ellas. ¿Cuántas yardas de papel crepé necesita?
12. Un desfile del 4 de Julio debe seguir una ruta rectangular, como se indica con las flechas, partiendo del punto S. Los cuadrados representan manzanas de casas.



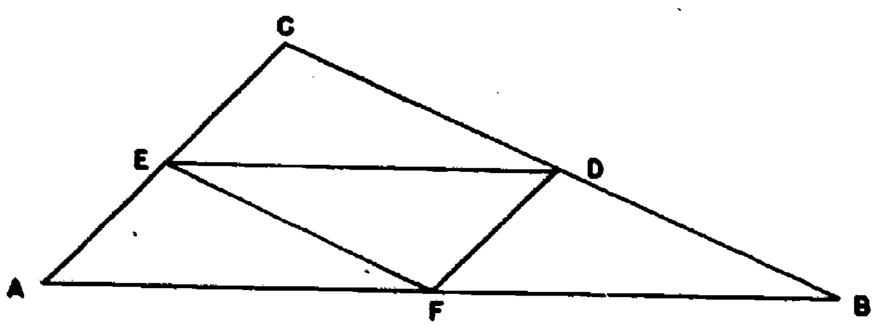
En esta ciudad cada manzana tiene $\frac{1}{8}$ de milla de lado. ¿Cuál es la longitud total de la ruta del desfile? Expresa la respuesta de dos maneras por lo menos.

13. Si los decorados a lo largo de la ruta del desfile, en el problema 12, cuestan unos \$250 por milla, ¿cuál fue, aproximadamente, el costo del decorado?

14. En el desfile del problema 12 dos personas se cansaron y escaparon, regresando al punto de partida por la ruta marcada con línea de trazos. La primera persona escapó en el punto B y la segunda en el punto T. ¿Qué distancias ahorraron estas personas?

*15. Un granjero ha encontrado que necesita 240 pies de cerca para rodear su granja que tiene forma rectangular. Observa que uno de los lados tiene 40 pies de longitud. ¿Qué longitudes tienen los otros lados? Sea x el número de pies de ancho. Redacta una proposición numérica que describa este problema.

*16. Has trabajado con una figura como la que sigue, en la que D, E y F son los puntos medios de los lados del triángulo. Sea a el número de unidades de longitud del

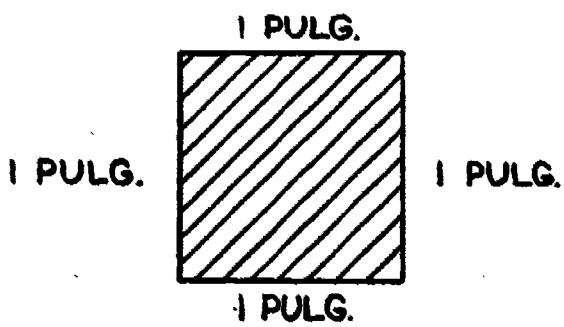


segmento $\overline{AF}$. Copia la figura y marca con una letra a todos los segmentos que tengan la misma longitud que $\overline{AF}$. Análogamente, sea b el número de unidades de longitud de $\overline{AE}$ y c el número de unidades de longitud de $\overline{BD}$. Marca los otros segmentos de medidas b y c. Cuando trabajaste con esta figura en ejercicios anteriores, encontraste las 11 curvas simples cerradas que están contenidas en la figura. Enumera cada una de las once curvas, y para cada una de ellas redacta una proposición numérica que dé el número de unidades de su perímetro (su longitud total).

<u>Areas de los rectángulos</u>

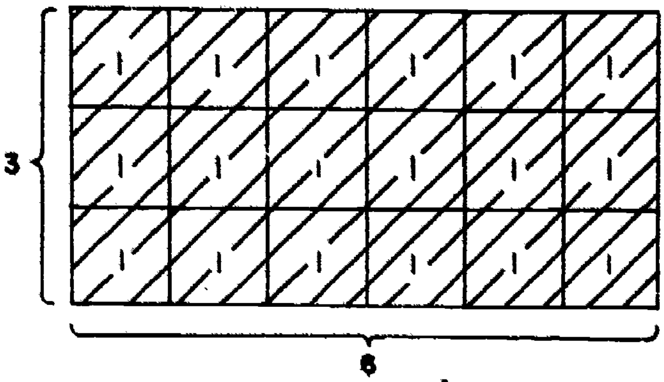
Fijemos ahora la atención sobre la región cerrada determinada por el rectángulo. Has aprendido antes que para medirla se escoge la región cerrada determinada por alguna curva simple cerrada como unidad de área y luego se ve cuántas de esas unidades se necesitan para cubrir la región cerrada que se trata de medir. Este es un procedimiento laborioso e impreciso. ¿Por qué no tenemos algún instrumento tan simple como la regla, que podamos poner sobre la figura, para medirla y leer directamente la respuesta?

En tu anterior trabajo con las áreas has tratado de emplear como unidad de área las regiones cerradas determinadas por diferentes clases de curvas simples cerradas. Vamos a escoger ahora una unidad de área definida. Usualmente se escoge una región cuadrada cerrada. A base de nuestra experiencia del problema 1, Ejercicios 8-3, ¿te parece una buena elección? ¿Por qué sí o por qué no? Además tenemos que decidir el tamaño del cuadrado a utilizar. Tomemos como unidad de área la región cerrada determinada por un cuadrado cuyo lado es una unidad de longitud. Como hemos usado varias unidades de longitud, obtenemos otras tantas unidades de área. Si la longitud se mide en pulgadas, tenemos como unidad de área la región cerrada determinada por el cuadrado siguiente:



El área de esta región cerrada se llama una <u>pulgada cuadrada</u> y se representa por el símbolo "plg. cd.". Describe y nombra otras tres unidades de área relacionadas con diferentes unidades de longitud.

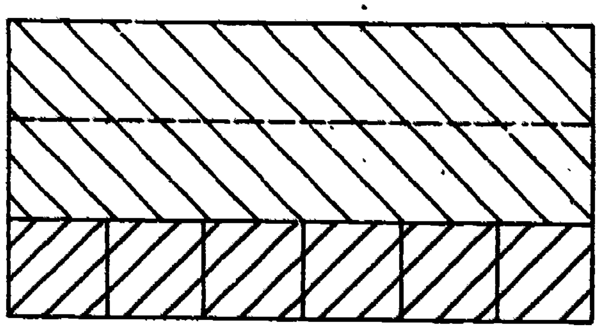
Si un rectángulo tiene unidades de largo y 3 de ancho, es claro que la región rectangular cerrada puede ser cubierta exactamente por unidades cuadradas de área, como se muestra a continuación:



La medida de esta área es, entonces, por definición, el número de tales regiones cuadradas cerradas. ¿Cuántas hay? ¿Es fácil obtener su número contándolas? Si es así, ¿cómo?

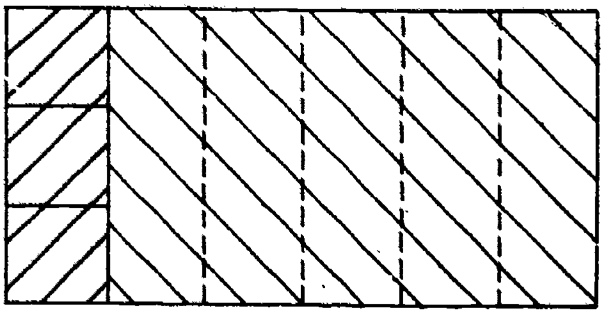
Si cuentas observando que cada fila tiene seis cuadrados y que hay tres filas, obtienes el <u>número</u> A de unidades cuadradas del área, escribiendo:

$$A = 3 \times 6$$



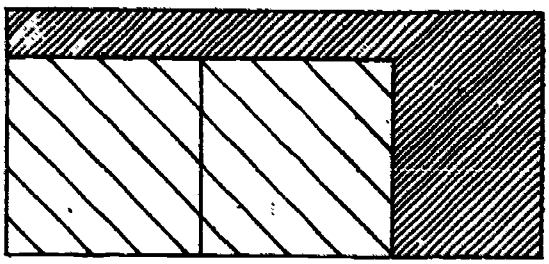
Si cuentas diciendo que hay tres cuadrados en cada columna y que hay seis columnas, obtienes:

$$A = 6 \times 3$$

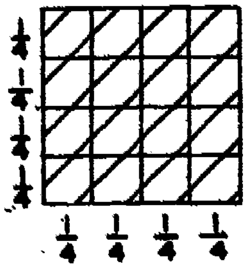


¿Son iguales las respuestas? Sí es así, ¿qué propiedad de los números naturales queda ejemplificada? ¿Qué ventaja significa, en este estudio, el uso de una unidad de área cuadrada y con lados de una unidad de longitud? ¿Qué sucedería si, para determinar la unidad de área, se utilizara un cuadrado cuyo lado tuviese $1\frac{1}{2}$ unidades de longitud?

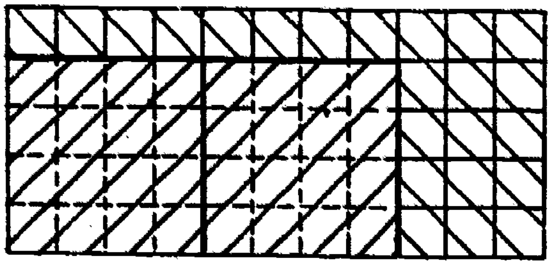
En la práctica ocurre más frecuentemente que los lados tienen por medidas números racionales no cardinales. Suponte por ejemplo que el largo es $2\frac{3}{4}$ pulgadas y el ancho $1\frac{1}{4}$ pulgadas. Podemos superponer fácilmente 2 unidades de 1 pulgada cuadrada cada una, pero queda un borde sin cubrir, como se indica en la zona sombreada de la figura que sigue:



Para cubrir convenientemente este borde, tomemos una unidad de una pulgada cuadrada (o varias, si es necesario) y cortémosla en cuadraditos pequeños, como se muestra a continuación:



Se ha escogido esta división particular porque las medidas dadas para el rectángulo están en cuartos de pulgada. ¿Cuántas regiones cuadradas pequeñas hay en una pulgada cuadrada? ¿Qué parte de una pulgada cuadrada es cada región cuadrada cerrada pequeña? Los cuadrados pequeños pueden usarse convenientemente para cubrir el borde que había quedado libre en el rectángulo, como se ve en la figura siguiente:



De hecho, si contamos también las dos pulgadas cuadradas originales, como se ve en líneas de trazos, la región rectangular completa que se trata de medir queda cubierta por pequeños cuadrados de $\frac{1}{4}$ pulgada de lado.

Ya hemos estudiado algo sobre el área de una región cerrada. Recuerda que una región cerrada consiste en una curva simple cerrada y su interior. Sería conveniente, en lo posible, hablar del área del interior de una curva simple cerrada. Si el examen de este punto se llevara a cabo más minuciosamente (lo que puede hacerse después, cuando hayas adquirido experiencia matemática), obtendríamos que

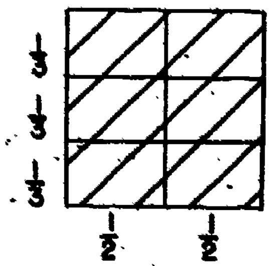
área del interior de una curva simple cerrada
= área de la correspondiente región cerrada.

<u>Ejercicios de clase 8-1a</u>

1. En la figura anterior, en que se ve un rectángulo de $2\frac{3}{4}$ pulgadas × $1\frac{1}{4}$ pulgadas: El número de cuadrados pequeños en cada fila es ___?___; el número de filas es ___?___; el número total de cuadrados pequeños es ___?___; el área de cada cuadrado pequeño unidad es ___?___ pulgadas cuadradas. El área del rectángulo es, entonces, ___?___ pulgadas cuadradas.

En el problema anterior, ¿era necesario dibujar la figura para encontrar cuántos cuadrados había en cada fila? ¿Y para encontrar el número de filas? Si no era necesario, ¿cómo se podían determinar esos números?

2. El largo y el ancho de un rectángulo son $5\frac{1}{2}$ pulgadas y $4\frac{1}{2}$ pulgadas, respectivamente. Para cubrir este rectángulo, ¿qué tamano de unidad cuadrada es más conveniente? ¿Cuántos cuadrados hay en cada fila? ¿Cuántas filas hay? ¿Cuál es el número de pulgadas cuadradas de su área? Dibuja una figura en que se muestren los cuadrados pequeños. ¿Se necesitaba dibujar la figura para encontrar el área?
3. Utilizando el mismo método de antes, determina el área de un rectángulo de $5\frac{1}{2}$ pulgadas de largo y $4\frac{2}{3}$ pulgadas de ancho. (En este caso puede convenirte más recortar la pulgada cuadrada en regiones cerradas rectangulares que en regiones cuadradas. Puedes hacer dos divisiones verticales y tres horizontales.)



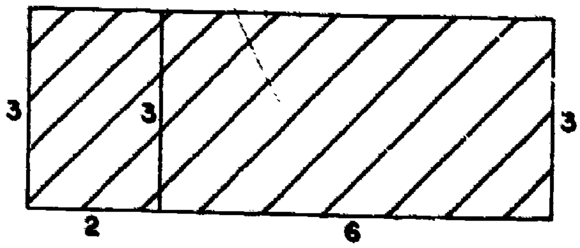
¿Por qué podrían ocurrírsete estas divisiones? ¿Qué parte de la pulgada cuadrada es cada región rectangular pequeña?

Ejercicios 8-1b

1. A base de la experiencia que adquiriste al resolver los problemas anteriores, sugiere verbalmente un método por el cual puedas determinar el número de unidades cuadradas en el área de un rectángulo, si conoces el número de unidades de su largo y de su ancho.
2. Si l y w representan, respectivamente, los números de unidades lineales del largo y el ancho de un rectángulo, y A es el número de unidades cuadradas de su área, enuncia una

proposición numérica que describe la manera cómo se determina A cuando se conocen ℓ y w. Observa que esto es justamente la traducción en lenguaje matemático del método establecido en el problema 1.

3. ¿Cuántas pulgadas cuadradas hay en un pie cuadrado? ¿Cuántos pies cuadrados hay en una yarda cuadrada? Dibuja figuras con que ilustrar tus respuestas. Hazlas de tamaño natural, en papel o en la pizarra. (Puedes pegar también varias hojas de periódicos.)
4. Dibuja un cuadrado de 3 pulgadas de lado y un rectángulo cuya área sea 3 pulgadas cuadradas. ¿Cuál es más grande? ¿Qué área tiene el cuadrado?
5. Dibuja dos rectángulos diferentes, cada uno de ellos con un área de 1 pulgada cuadrada. Haz uno de los rectángulos de 2 pulgadas de largo y el otro de 4 pulgadas de largo. (Esto ilustra cómo puede verse un área de 1 pulgada cuadrada en varias formas diferentes.)
6. La alfombra de una sala mide 9 pies por 12 pies.
   (a) Calcula su área.
   (b) Expresa el resultado en yardas cuadradas.
7. El campo de béisbol es un cuadrado de 90 pies de lado. Calcula su área en pies cuadrados y en yardas cuadradas.
8. El campo de sóftbol es un cuadrado de 60 pies de lado. ¿Es esta área mayor o menor que la mitad del área de un campo de béisbol? (V. el problema 7.)
9. Determina cuántas yardas cuadradas hay en una milla cuadrada.
10. Dos rectángulos están uno al lado del otro como se muestra en la figura, de manera que forman un rectángulo mayor, con los números de unidades de longitud de los lados que se indican. Halla las áreas de ambos rectángulos pequeños y del rectángulo grande en unidades de área. ¿Es el área mayor la suma de las áreas menores? Escribe una proposición numérica determinada por esta relación entre las áreas. ¿Qué propiedad de los números racionales se ilustra con esta proposición numérica?



11. Un rectángulo tiene 3 unidades de largo y 2 de ancho. Si otro rectángulo es el doble de largo pero tiene el mismo ancho, ¿qué relación hay entre las áreas de los dos rectángulos? Dibuja una figura para ilustrar tu respuesta. Haz lo mismo si el nuevo rectángulo tiene la misma longitud que el original, pero un ancho doble.
12. ¿Depende el razonamiento del problema anterior de las medidas particulares 3 y 2? Si no es así, redacta una proposición que describa el efecto que sobre el área de <u>cualquier</u> rectángulo tiene el duplicar o bien el largo o bien el ancho.
13. Si un rectángulo tiene 3 unidades de largo y 2 de ancho, ¿cómo modifica su área, el duplicar <u>ambos</u>, su largo y su ancho? Dibuja una figura que ilustre tu conclusión. Si el razonamiento no depende de ese rectángulo particular, redacta una proposición que establezca el efecto de la duplicación del largo y el ancho de un rectángulo sobre el área de éste.
14. En los rectángulos del problema 13, compara los dos perímetros. Redacta una proposición que establezca el efecto que sobre el perímetro de un rectángulo tiene el duplicar tanto su largo como su ancho.
15. Un rectángulo tiene 313 pulgadas de longitud y 211 pulgadas de ancho. Su área, según el problema 2, es 313×211 pulgadas cuadradas. (No hagas la multiplicación.) Si un rectángulo es el doble de largo y el doble de ancho, su área es 626×422 pulgadas cuadradas. Sin multiplicar, muestra que

$$626 \cdot 422 = 2^2 \cdot 313 \cdot 211$$

¿Qué propiedad, o propiedades, de los números racionales has utilizado? ¿Qué dice la proposición sobre las áreas de los dos rectángulos? ¿Está de acuerdo con la conclusión a que llegaste al resolver el problema 15?

*16. Razonando en forma análoga como al resolver el problema 14, determina el efecto que sobre el área de un rectángulo tiene el triplicar tanto su largo como su ancho. Dibuja una figura con que ilustrar la conclusión. ¿Qué efecto se produce sobre el área de un rectángulo cuando se duplica el largo y se triplica el ancho?

*Precisión y error

En el estudio anterior supusimos que se conocen las medidas exactas de los largos y anchos de los rectángulos. Sabemos, sin embargo, que en realidad no se pueden efectuar medidas exactas. Si hemos medido un rectángulo y obtenido las medidas aproximadas $2\frac{1}{2}$ pulgadas y $3\frac{1}{4}$ pulgadas, debemos usar el símbolo de "aproximadamente igual" y escribir $\ell \approx 3\frac{1}{4}$, $w \approx 2\frac{1}{2}$ y, por consiguiente:

$$A = \ell w$$

$$A \approx (3\tfrac{1}{4})(2\tfrac{1}{2})$$

$$A \approx (\tfrac{13}{4})(\tfrac{5}{2})$$

$$A \approx \frac{65}{8}$$

$$A \approx 8\tfrac{1}{8}$$

Como A es el número de pulgadas cuadradas, encontramos que el área aproximada es de $8\frac{1}{8}$ pulgadas cuadradas.

Una proposición que se refiere a cantidades medidas debería indicar que éstas son sólo aproximadas.

Ejercicios 8-1c

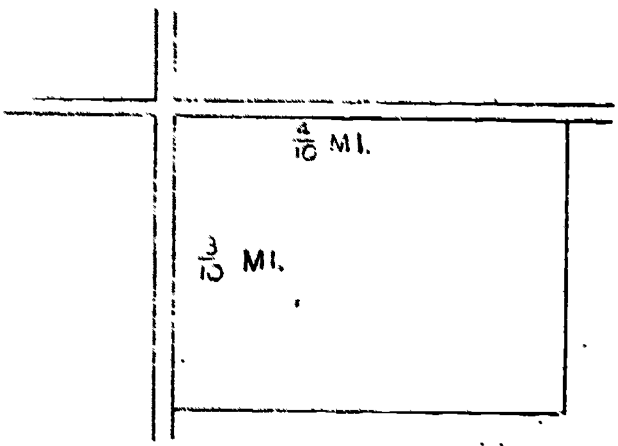
Usa el signo $\approx$ para referirte a números que representan medidas.

1. Mide el largo y el ancho del tablero de tu pupitre con la aproximación de media pulgada.
   (a) Calcula el número de pulgadas cuadradas en su área.
   (b) ¿Qué perímetro tiene?
2. Una parte de la pizarra tiene, aproximadamente, 5 pies de largo por $3\frac{1}{2}$ de ancho.
   (a) Calcula su área. Expresa la respuesta de tres maneras

distintas.

(b) Calcula el perímetro y exprésalo en tres formas diferentes.

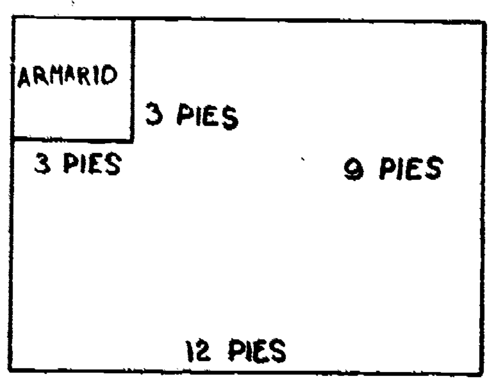
3. Un campo rectangular está situado en la intersección de dos caminos perpendiculares. Utilizando el contador de millas de un automóvil se obtuvieron las siguientes medidas aproximadas: $\frac{3}{10}$ de milla de largo y $\frac{4}{10}$ de milla de ancho. Calcula el área del campo y expresa el resultado por lo menos en dos unidades diferentes.



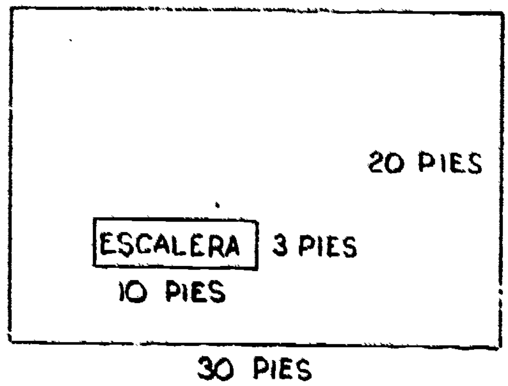
4. Se va a sembrar grama en un prado que mide 84 pies por 50 pies, y las instrucciones de la caja de semillas dicen que una libra basta para 300 pies cuadrados. ¿Cuántas libras de semilla se necesitan?

5. El piso de un cuarto de baño está pavimentado con losetas que son regiones cerradas de una pulgada cuadrada. El piso contiene 3,240 de dichas losetas. ¿Cuál es el área del piso en yardas cuadradas?

6. El piso del dormitorio de un niño tiene forma rectangular, de 12 pies de largo por 9 pies de ancho. En una de sus esquinas hay un armario de 3 pies de largo por 3 pies de ancho, como se ve en el plano de la derecha. ¿Qué área tiene el piso (fuera del armario)?



7. El piso de un desván de forma rectangular mide 30 pies por 20 pies. Hay una abertura en el piso, como se ve en la figura, por donde llega la escalera. Halla el área real del piso del desván. Expresa el resultado en dos formas distintas. ¿Tiene importancia, para calcular el área del piso, conocer dónde está colocada la abertura de la escalera?



*8. Durante algunos años, un granjero ha cultivado un jardín rectangular. Sabe que la longitud de la cerca de alambre es de 500 pies y ha observado que necesita cada año un saco de 100 libras de fertilizante para abonarlo. Una primavera decide agrandar su jardín de manera que sea el doble de largo y el doble de ancho. Como la cerca antigua está deteriorada, decide quitarla. Luego va a una tienda y compra 1,000 pies de cerca de alambre y dos sacos de fertilizante de 100 libras cada uno. ¿Es razonable esta compra? ¿Por qué sí o por qué no?

Ejercicios de clase 8-1b

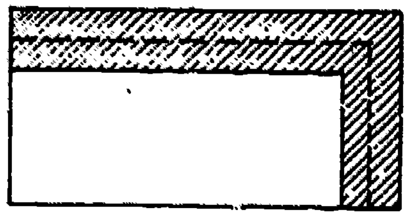
1. Se ha encontrado que las medidas de un rectángulo R son $3\frac{1}{4}$ pulgadas de largo por $2\frac{3}{4}$ pulgadas de ancho, de manera que $\ell \approx 3\frac{1}{4}$ y $w \approx 2\frac{3}{4}$. Dibuja un rectángulo con esas dimensiones y calcula el área de su interior utilizando el resultado del problema 2 de los Ejercicios 8-1b. Esta área se llamará <u>área calculada</u>.

2. (a) Si en el problema 1 se entiende que $\ell \approx 3\frac{1}{4}$, significa que se ha medido el largo con la aproximación de un cuarto de pulgada, entonces todo lo que sabemos es que el número de pulgadas del largo real está comprendido entre __?__ y __?__.

   (b) En forma análoga, el número de pulgadas del ancho real está entre __?__ y __?__.

   (c) En la figura que has hecho para el anterior problema, Indica los largos máximo y mínimo que has encontrado en (a).

(d) Haz lo mismo para el ancho. Luego dibuja los rectángulos máximo y mínimo que podrían describirse correctamente mediante $\ell = 3\frac{1}{4}$, $w = 2\frac{3}{4}$, donde ℓ y w representan números de pulgadas. El área comprendida entre estos dos rectángulos representa la incertidumbre en el área correcta, y se la ha sombreado en el diagrama. El área verdadera está comprendida entre las áreas de los rectángulos máximo y mínimo.



3. (a) El área del rectángulo mínimo del problema 2 es __?__ plg. cd.

(b) El área del rectángulo máximo del problema 2 es __?__ plg. cd.

(c) La diferencia entre el área calculada para R y la respuesta a la pregunta (a) es __?__ plg. cd.

(d) La diferencia entre el área calculada para R y la respuesta a la pregunta (b) es __?__ plg. cd.

Las respuestas a estas preguntas se pueden reunir en una tabla:

Rectángulo mínimo	Rectángulo medido	Rectángulo máximo	
$3\frac{1}{8}$ plg.	$3\frac{1}{4}$ plg.	$3\frac{3}{8}$ plg.	Largo
$2\frac{5}{8}$ plg.	$2\frac{3}{4}$ plg.	$2\frac{7}{8}$ plg.	Ancho
$\frac{525}{64}$ plg. cd.	$\frac{572}{64}$ plg. cd.	$\frac{621}{64}$ plg. cd.	Area

También,

diferencia en la pregunta (c) = área calculada - área mínima posible,

$$\frac{47}{64}\text{ plg. cd.} = \left(\frac{572}{64} - \frac{525}{64}\right)\text{ plg. cd.}$$

y

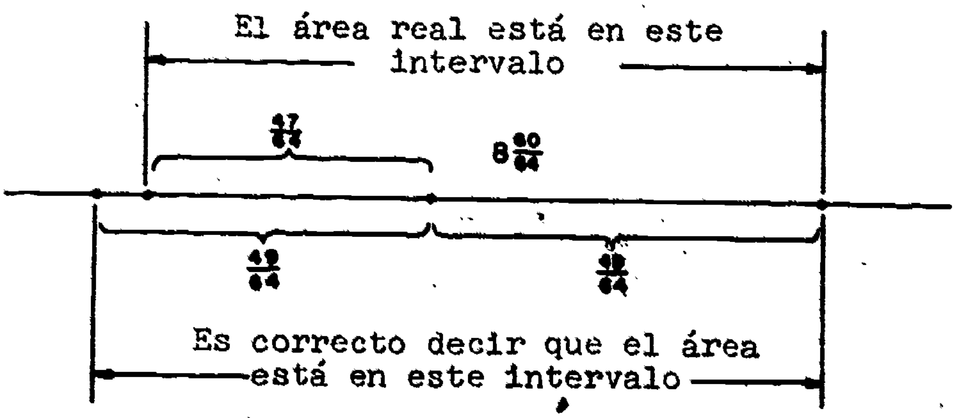
diferencia en la pregunta (d) = área máxima posible - área calculada,

$$\frac{49}{64}\text{ plg. cd.} = \left(\frac{621}{64} - \frac{572}{64}\right)\text{ plg. cd.}$$

Entonces, el área verdadera de nuestro rectángulo R está entre

$$\left(8\frac{60}{64} - \frac{47}{64}\right)\text{ plg. cd.} \quad y \quad \left(8\frac{60}{64} + \frac{49}{64}\right)\text{ plg. cd.}$$

El área calculada para el rectángulo R, como se encontró en el problema 1, es $8\frac{60}{64}$ ó $2\frac{3}{4} \times 3\frac{1}{4}$. El área calculada de R puede ser más grande en $\frac{47}{64}$ plg. cd., o más pequeña en $\frac{49}{64}$ plg. cd. El <u>máximo</u> <u>error</u> <u>posible</u> para el área calculada de R es $\frac{49}{64}$ plg. cd. Por consiguiente, sería correcto decir que el área verdadera está entre $\left(8\frac{60}{64} - \frac{49}{64}\right)$ plg. cd. y $\left(8\frac{60}{64} + \frac{49}{64}\right)$ plg. cd. Observa que los números entre paréntesis están de un lado y otro, y a igual distancia de $8\frac{60}{64}$. Se ilustra esta idea sobre una recta numérica.



Podemos ahora indicar la precisión del área calculada $(3\frac{1}{4} \times 2\frac{3}{4})$ plg. cd., escribiendo

$$\text{Area verdadera} = \left(8\frac{60}{64} \pm \frac{49}{64}\right)\text{ plg. cd.}$$

Esto significa que el área verdadera no se diferenciará de $8\frac{60}{64}$ plg. cd. en más de $\frac{47}{64}$ plg. cd.

En el problema 1, la respuesta que se obtuvo por multiplicación daba un área expresada en dieciseisavos de pulgada cuadrada. Esto sugeriría que la respuesta es correcta con la aproximación de un dieciseisavo de pulgada cuadrada. ¿Es esto cierto según los resultados obtenidos en este problema?

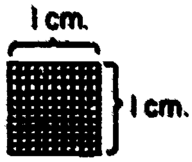
Los últimos tres problemas han ilustrado un detalle importante. Cuando un área se obtiene multiplicando la medida aproximada del largo por la medida aproximada del ancho, el error posible del área es mucho mayor de lo que sugeriría la forma de la respuesta. Entonces, cuando escribamos área $\approx 8\frac{15}{16}$ plg. cd., no queremos decir que la precisión de esta medida es $\frac{1}{16}$ plg. cd.

Ejercicios 8-1d

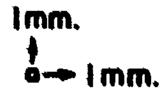
Calcula el área de cada uno de los rectángulos cuyas dimensiones se dan en seguida; luego determina la precisión de tu respuesta e indícala mediante la notación del máximo error posible.

1. $3\frac{1}{2}$ pulg. por $4\frac{1}{2}$ pulg.
2. $1\frac{3}{4}$ pulg. por $2\frac{1}{4}$ pulg.
3. $2\frac{3}{8}$ pulg. por $3\frac{4}{8}$ pulg.

En el anterior conjunto de ejercicios has usado el pie, la pulgada, etc., para encontrar perímetros y áreas de regiones cerradas. Hagamos ahora mediciones utilizando algunas de las unidades métricas. Como recuerdas, las unidades métricas para longitudes son el metro, el centímetro = $\frac{1}{100}$ (metros) y el milímetro = $\frac{1}{1000}$ (metros). Las unidades métricas correspondientes para medidas de áreas son regiones cerradas cuadradas cuyos lados miden 1 metro, 1 centímetro y 1 milímetro, respectivamente. La figura que aparece a la izquierda de la página siguiente representa una región cuadrada cerrada de un centímetro de lado; la de la derecha representa una región cuadrada cerrada de un milímetro de lado.



Area = 1 centímetro cuadrado



Area = 1 milímetro cuadrado

Ejercicios 8-1e

1. ¿Cuántos milímetros cuadrados hay en un centímetro cuadrado?
2. ¿Cuántos centímetros cuadrados hay en un metro cuadrado?
3. ¿Cuántos milímetros cuadrados hay en un metro cuadrado?
4. Dibuja un cuadrado de 3 centímetros de lado. Dibuja también un rectángulo cuya área sea 3 centímetros cuadrados. ¿Cuál es más grande?
5. Una alfombra mide 2 metros por 3 metros. Calcula su perímetro y su área.
6. El piso del dormitorio de un niño es de forma rectangular y mide 4 metros de largo por 3 metros de ancho. Hay un armario de 1 metro de largo y 1 metro de ancho en una de sus esquinas. ¿Cuál es el área del piso (fuera del armario)?

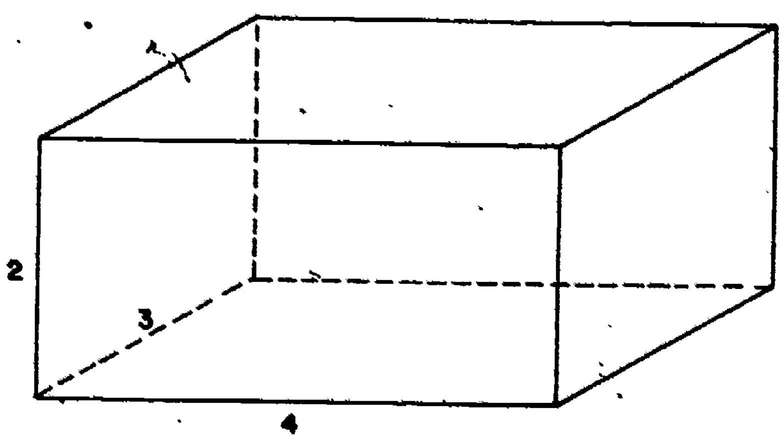
8-2. El prisma rectangular

Nos referiremos a una figura que tiene la forma de una caja de tizas como un prisma rectangular. Es una de las figuras más familiares, y encontrarás muchos ejemplos de ella. Tu salón de clase es, seguramente, un ejemplo. Enumera tantos otros ejemplos de prisma rectangular como puedas. Volveremos a estudiar los prismas y otras figuras en el resto del curso. Cuando caminas por el piso del salón de clase te mueves en el interior del prisma rectangular del salón, si éste tiene esa forma. Examinemos ese prisma. Observa que el prisma tiene cierto número fijo de lados planos que se llaman sus caras. ¿Cuántas caras tiene un prisma rectangular? ¿Qué clase de figura es cada una de las caras? Observa que cada una de las caras está en un plano distinto. Nota que para cada cara del prisma existe sólo otra cara que no la interseca. Esas dos caras se llaman caras opuestas. Las caras opuestas están en planos paralelos. ¿Cuántos pares de caras opuestas hay? Señala los pares de caras opuestas de tu salón de clase. ¿Qué puedes decir de la configuración de dos caras opuestas? ¿Cómo lo sabes?

Has aprendido en el Capítulo 4 que dos planos que se encuentran deben intersecarse en una recta, de manera que dos caras de un prisma que no son opuestas deben intersecarse en puntos que están sobre una recta. Realmente se intersecan en los puntos de un segmento de recta que, como recordarás, se llama arista. ¿Cuántas aristas hay en un prisma rectangular? Señálalas en tu salón de clase. Algunas de esas aristas tienen la misma longitud. (¿Qué conjuntos de aristas son iguales? ¿Por qué?) ¿Cuántas longitudes diferentes puede haber entre las aristas? Hay sobre el prisma ciertos puntos en que se intersecan tres caras o, lo que es lo mismo, en que se intersecan tres aristas. Esos puntos se llaman vértices del prisma. Cada uno de esos puntos es un vértice. ¿Cuántos vértices hay? Señala los vértices de tu salón de clase.

Como probablemente has observado, las aristas paralelas tienen la misma longitud, por ejemplo, las que van del fondo a la parte superior, o las que van de un extremo al extremo opuesto. Pueden existir pues, a lo más, tres longitudes diferentes.

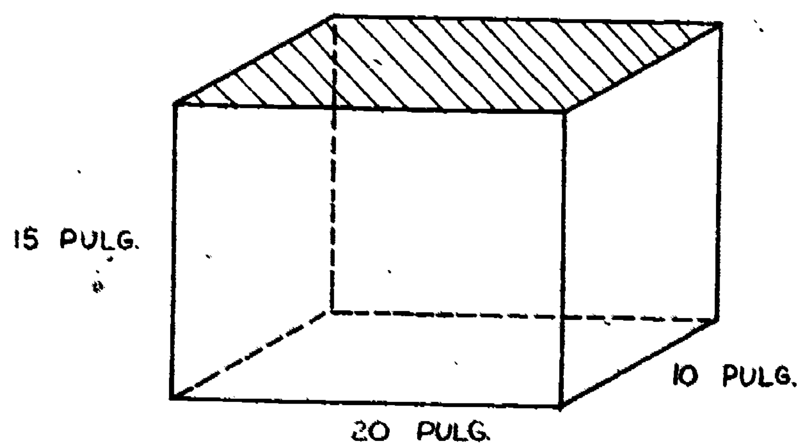
En la figura que sigue se han marcado los números de unidades de las longitudes de tres aristas. ¿Cuántas unidades de longitud hay en cada una de las otras nueve aristas?



Las longitudes de las aristas en tres direcciones posibles se llaman frecuentemente largo (o longitud), ancho (o anchura), y alto (o altura) del prisma. ¿Qué se te ocurre acerca de los pares de caras opuestas? Como todas las caras son regiones rectangulares cerradas, es fácil determinar todas sus áreas. La suma de las áreas de todas las caras se llama el área total del prisma rectangular.

Ejercicios 8-2a

1. Halla el área total del prisma que acabamos de estudiar.
2. Un ama de casa posee un molde para pasteles que tiene la forma de un prisma rectangular (sin tapa). El molde tiene 10 pulgadas de largo, 8 pulgadas de ancho y 2 pulgadas de profundidad. Para hornear un pastel, ella forra el molde con papel encerado. ¿Cuántas pulgadas cuadradas de papel encerado necesita para forrar con exactitud el molde?
3. Una pared de un salón de clase tiene 30 pies por 10 pies. En esta pared hay una pizarra de 20 pies de largo y $3\frac{1}{2}$ pies de ancho. Se va a pintar la pared, salvo la parte ocupada por la pizarra. Calcula el área que se ha de pintar. Expresa la respuesta en pies cuadrados y en yardas cuadradas.
4. Una incubadora tiene la forma de un prisma rectangular de 20 pulgadas de largo, 10 pulgadas de ancho y 15 pulgadas de alto. La tapa es de vidrio (sombreada en la figura) mientras los lados y el fondo son de madera. ¿Qué área tiene la tapa?



¿Qué área tiene el exterior de la parte de madera de la caja? Expresa tus respuestas en pulgadas cuadradas y en pies cuadrados.

5. Un cuarto tiene [illegible] pies de largo, 12 pies de ancho y 9 pies de alto.

   (a) ¿Cuántas losetas de asfalto de 12 pulgadas por 12 pulgadas se necesitan para cubrir el piso?

   (b) ¿Cuántas losetas de 6 pulgadas por 6 pulgadas se necesitarían?

6. En el cuarto del problema 5 hay cinco ventanas en las paredes, cada una de ellas de 3 pies de ancho y 6 de alto. ¿Qué superficie tienen las paredes, sin contar las ventanas? (Para dar tu respuesta, ¿necesitas saber el sitio preciso de las ventanas?)

7. En el problema 6, ¿cuántos cuartos de galón de pintura se necesitan para pintar las paredes si una pinta cubre 66 pies cuadrados?

8. Un baúl tiene 3 pies de largo, 18 pulgadas de ancho y 2 pies de alto. Todas las aristas están reforzadas con platinas de bronce. ¿Qué cantidad de platina de bronce tiene? Expresa la respuesta en pulgadas, en pies y en yardas.

9. Un <u>cubo</u> es un prisma rectangular para el cual todas las aristas son congruentes y, en consecuencia, todas las caras son regiones cuadradas cerradas. ¿Cuántas pulgadas cuadradas de madera se necesitarán para hacer una caja cúbica cuyas aristas sean de 12 pulgadas? ¿Cuántos pies cuadrados se necesitarán?

*10. Sean l, w y h los números de unidades de longitud del largo, ancho y alto de un prisma rectangular. Redacta una proposición numérica que exprese cómo encontrar el número, S, de unidades cuadradas del área total.

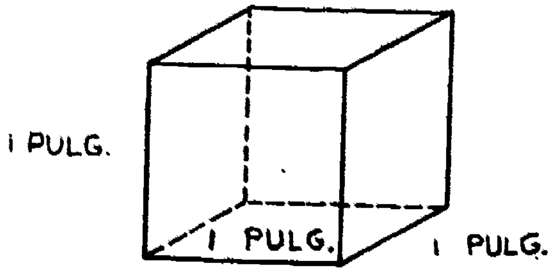
*11. Si l, w y h tienen el mismo significado que en el problema 10, formula una proposición numérica que exprese cómo se obtiene el número total, E, de unidades de longitud de todas las aristas.

*12. Un industrial fabrica cajas para herramientas (con tapa) que miden $2\frac{1}{2}$ pies de largo, 1 pie de ancho y 6 pulgadas de alto. Tiene 50 de esas cajas y quiere barnizar su superficie exterior, con excepción de los fondos. Si una pinta de barniz entre una región rectangular cerrada de 9 pies por 8 pies, ¿bastarán dos cuartos de galón de barniz para barnizar las cajas de herramientas?

Volumen

El término sólido rectangular se refiere al conjunto de puntos que consiste en un prisma rectangular y su interior. Queremos hallar el volumen de este sólido rectangular. Nos referiremos a este volumen como el volumen del prisma. En la Sección 7-3 has visto la medición de volúmenes tomando una unidad de volumen conveniente y viendo cuántas de estas unidades se necesitan para llenar el sólido. La medición de volúmenes por este procedimiento, aunque se ve muy bien el método de medición, presenta serias dificultades prácticas. Imagina que se trata de medir el volumen de tu salón de clase. Es evidente la conveniencia de encontrar un método para hallar el volumen de un prisma rectangular haciendo operaciones con su largo, ancho y alto, como lo hemos hecho para el cálculo del área de un rectángulo, en el que utilizábamos el largo y el ancho del mismo. En primer lugar, sin embargo, debemos ponernos de acuerdo sobre la unidad de volumen, que habitualmente se escoge como un sólido cúbico. Un cubo es un prisma rectangular cuyas aristas todas son congruentes. ¿Habrías hecho la misma elección, o habrías escogido algún otro? ¿Qué tamaño recomendarías para este cubo? ¿Por qué?

Habitualmente se escoge un sólido cúbico, cada una de cuyas aristas tiene la longitud de la unidad. En este caso, ¿qué podemos decir sobre el tamaño de las caras? La relación que hay entre las unidades de volumen, área y longitud es lo que nos facilita calcular los volúmenes. Si medimos las longitudes en pulgadas, entonces la unidad de volumen será un sólido cúbico, cada una de cuyas aristas mide 1 pulgada. El volumen de este sólido se llama pulgada cúbica.



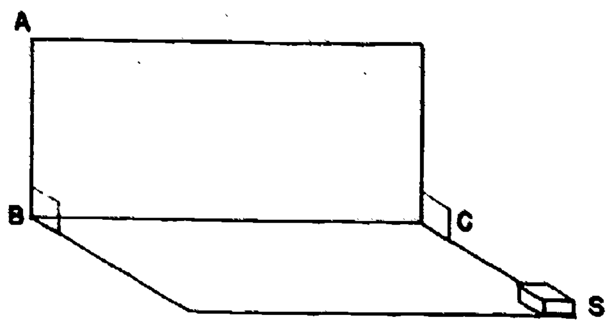
Como en el caso del rectángulo hablábamos del área de su interior, podemos ahora hablar del volumen del interior de un prisma rectangular. Este es el mismo volumen que el del correspondiente sólido rectangular.

Ejercicios de clase 8-2

1. Describe y nombra por lo menos tres unidades de volumen.
2. Toma algunos bloques cúbicos pequeños, de un mismo tamaño, e imagina que sus aristas tienen una unidad de longitud. Júntalos luego para formar un sólido rectangular de 4 unidades por 3 unidades por 2 unidades. ¿Cuántos bloques necesitas?
3. (a) Utiliza bloques cúbicos pequeños para construir un sólido de 3 unidades por 2 unidades por 2 unidades.
   (b) Construye un sólido rectangular cuyo largo sea el doble del largo del anterior, pero cuyo ancho y cuyo alto sean los mismos (6 por 2 por 2).
   (c) Construye un sólido rectangular cuyo ancho sea el doble del original, pero cuyas otras medidas sean las mismas (3 por 4 por 2).
   (d) Construye un sólido rectangular cuyo alto sea el doble del original, pero cuyas otras medidas sean las mismas (3 por 2 por 4).
   (e) Compara el número de bloques en (b), (c) y (d) con el número en (a).
4. Redacta un enunciado que describa el efecto que sobre el volumen de un prisma rectangular tiene el duplicar <u>una</u> de sus medidas.
5. (a) Construye un sólido rectangular de 6 unidades por 4 unidades por 2 unidades. Observa que en este caso tanto el largo como el ancho del prisma tienen una longitud que es el doble del largo y ancho del prisma del problema 3(a).
   (b) ¿Cuál es la razón del número de bloques del nuevo sólido al número de bloques del original (problema 3(a))?
   (c) ¿Obtendrías la misma razón si duplicaras otro par diferente de medidas?
6. Escribe un enunciado que dé cuenta del efecto que sobre el volumen de un prisma rectangular tiene el duplicar dos de sus

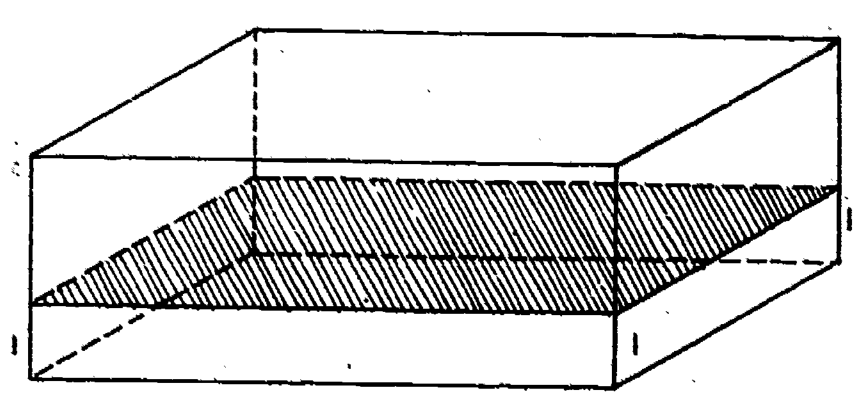
medidas.

7. (a) Duplica las dimensiones de cada arista del sólido del problema 5(a) y construye un sólido rectangular (6 unidades × 4 unidades × 4 unidades).
   (b) ¿Cuál es la razón del número de bloques de este sólido al número de bloques del sólido original?
8. Redacta un enunciado que dé cuenta del efecto que sobre el volumen de un prisma rectangular produce el duplicar todas las aristas.
9. PROBLEMA DIFICIL. Se han soldado dos placas metálicas formando ángulos rectos, como se muestra en esta figura:



Una hormiga que parte del punto A quiere llegar al terrón de azúcar colocado en S. ¿Qué camino debe seguir para recorrer la distancia más corta?

<u>Volumen de un prisma rectangular</u>



Puesto que sabemos cómo hallar el área de cualquier cara, imaginemos que ya hemos encontrado el área de la cara sobre la que descansa el sólido. Suponte que el área de esta cara del fondo (llamada frecuentemente la base) es de 12 unidades cuadradas. Si la base consiste en 12 regiones cuadradas cerradas unitarias, coloquemos un sólido cúbico unitario sobre cada una de esas regiones. Esos sólidos unitarios forman una capa de 1 unidad de espesor, sobre el fondo del sólido. Como hay 12 cubos en esa capa, el volumen de ésta es de 12 unidades cúbicas. Has visto ejemplos de estas capas en los problemas de la última sección. Como la superficie superior de la capa es idéntica a la del fondo, podemos colocar sobre ella una segunda capa de 12 cubos, y así sucesivamente. Si la altura del prisma fuera de 3 unidades, podría llenarse exactamente con 3 capas, y el número V de unidades de volumen se obtendría, entonces, así:

$$V = 3 \times 12 = 36$$

Por lo tanto, el volumen es de 36 unidades cúbicas.

Si la medida de la altura es un número racional no cardinal, tal como $2\frac{1}{3}$ unidades, entonces no podrá llenarse completamente con dos capas de cubos, pero tres capas serán demasiado. En efecto, si cortamos horizontalmente la tercera capa, sólo necesitamos usar el tercio próximo a la base, cuyo volumen es de $(\frac{1}{3})(12)$ unidades cúbicas, y el volumen del prisma es de $2(12) + (\frac{1}{3})(12)$ unidades cúbicas, o de $(2\frac{1}{3})(12)$ unidades cúbicas, o de 28 unidades cúbicas.

Hemos supuesto que la base estaba hecha exactamente con unidades enteras. ¿Qué harías si la base estuviera partida en fragmentos de unidad, como ocurriría si fuera de 8 unidades por $1\frac{1}{2}$ unidades? ¿Llegas a la misma conclusión sobre el volumen? ¿Por qué?

Ejercicios 8-2b

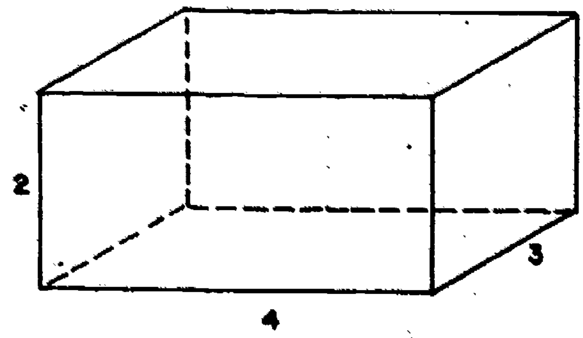
1. Halla el volumen del interior de un armario de $8\frac{1}{2}$ pies de alto, si el piso tiene 10 pies cuadrados.
2. La base de la caja de arena con que juega un niño es una región rectangular cerrada y su área es de 24 pies cuadrados. Si la caja tiene 10 pulgadas de profundidad, calcula su volumen.
3. Redacta un enunciado que explique cómo se halla el número de unidades cúbicas en un prisma rectangular si se conoce el número de unidades cuadradas de la base y el número de unidades de la

altura.

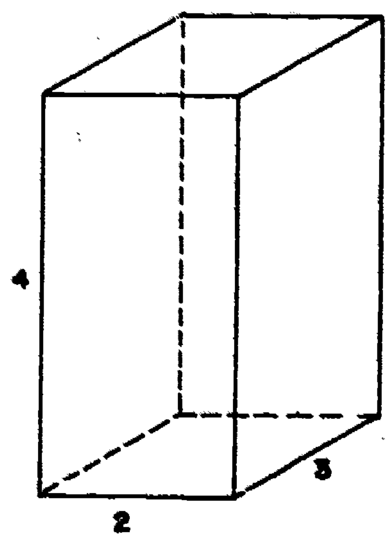
4. ¿De qué profundidad debería ser la caja de arena del problema 2 si contuviera [illegible] pies cúbicos?
5. Un hombre construye una caja de madera destinada a contener [illegible]0 pies cúbicos de arena. Para que quepa en cierto espacio, la caja debe tener 15 pies de largo. ¿Cuántos pies cuadrados de área debe haber en el extremo de la caja? Formula una proposición numérica que describa este problema. Expresa también la respuesta al problema en pulgadas cuadradas y en yardas cuadradas.
6. Los reglamentos sanitarios de cierto distrito escolar dicen que los salones escolares deben contener 50 pies cúbicos de aire por niño. Si un salón tiene un área de 160 pies cuadrados en el piso y su altura es de 10 pies, ¿pueden los directores de la escuela instalar legalmente 30 niños en el salón? ¿Cuál es el número mayor de niños que puede legalmente asignarse a ese salón?
7. Una caja rectangular tiene h unidades de alto y una base de B unidades cuadradas. Formula una proposición numérica que muestre cómo obtener el número V de unidades cúbicas de volumen de su interior si se conocen los números h y B. Observa que ésta es justamente una proposición matemática para el enunciado que has redactado en el problema 3.

Observa el desarrollo del último problema. ¿Necesitas conocer exactamente la forma de la base? ¿Qué debes saber para encontrar el volumen de un prisma rectangular? Cuando consideres otros prismas y los cilindros, usarás nuevamente este procedimiento de encontrar el volumen de un prisma a partir del área de la base y de la altura sin necesidad de conocer exactamente la forma de la base.

Si conocemos todas las aristas de un prisma rectangular, sabemos cómo calcular el área de la base, y entonces podemos obtener fácilmente el volumen.



En un prisma rectangular de 4 unidades por 3 unidades por 2 unidades, podríamos pensar probablemente que la base es la cara más grande. El área de esta cara es 4×3 unidades cuadradas, entonces el volumen, por el principio aplicado en el problema 4 anterior, sería $2 \times (4 \times 3)$ unidades cúbicas. Observa que el producto 4×3 dentro del paréntesis es el número de unidades cuadradas del área de la base. Si colocamos el prisma sobre una de sus caras laterales (o giramos la cabeza formando un ángulo recto), imaginamos que la base es otra cara.



Encontramos que el área de la base es 2×3 unidades cuadradas y el volumen del sólido es $4 \times (2 \times 3)$ unidades cúbicas. Colocando el prisma sobre su tercera cara, encontramos que el volumen es $3 \times (2 \times 4)$ unidades cúbicas. Como se trata del mismo sólido en posiciones diferentes, parece que debería ser

$$2 \times (4 \times 3) = 4 \times (2 \times 3) = 3 \times (2 \times 4)$$

¿Es esto cierto? Si no lo es, ¿en qué hemos errado? Si es cierto,

¿qué propiedad, o propiedades, de los números racionales se ilustra así?

Ejercicios 8-2c

1. El fondo de la gaveta de un escritorio queda cubierto exactamente por 2 hojas de papel de carta. (El papel de carta tiene $8\frac{1}{2}$ pulgadas $\times$ 11 pulgadas.) Si la gaveta tiene 4 pulgadas de profundidad, halla su volumen. Si el fondo y los lados de esa gaveta deben cubrirse exactamente con papel encerado, ¿cuántas pulgadas cuadradas de ese papel se necesitarán?
2. Una señora tiene algunas mantas para guardar. Calcula que, si las pliega, necesita 10 pies cúbicos de espacio. ¿Puede guardarlas en un baúl de 3 pies de largo, 18 pulgadas de ancho y 2 pies de alto? Si el baúl tuviera la misma longitud y altura, pero tuviera 20 pulgadas de ancho, ¿podría guardar las mantas?
3. Redacta una proposición que exprese la manera de obtener el número de unidades cúbicas de volumen del interior de un sólido rectangular cuando se conoce el número de unidades de su largo, ancho y alto.
4. Si ℓ, w y h representan las unidades de longitud del largo, ancho y alto de un prisma rectangular, formula una proposición numérica que indique la manera de calcular el número V de unidades cúbicas de volumen del interior del sólido.
5. ¿Cuántas pulgadas cúbicas hay en un pie cúbico? ¿Cuántos pies cúbicos hay en una yarda cúbica? Indica cómo llegas a estas conclusiones.
6. (a) Dado un cubo de 3 pulgadas (es decir, un cubo cuyas aristas miden, cada una. 3 pulgadas), ¿cuál es su volumen?
   (b) ¿Es este volumen mayor o menor que 3 pulgadas cúbicas? Ten cuidado de no confundir el volumen de un cubo de 3 pulgadas con un volumen cuya medida es 3 pulgadas cúbicas.
   (c) Si ℓ es el número de pulgadas de longitud de una arista de un cubo, ¿es siempre cierto que el volumen de un cubo de ℓ pulgadas es mayor que ℓ pulgadas cúbicas?

7. Si un prisma rectangular tiene 2 pulgadas de largo y 1 pulgada de ancho, ¿cuál debe ser su altura para que el sólido rectangular tenga 1 pulgada cúbica de volumen? Haz un modelo de papel para este prisma a fin de ilustrar otra forma posible de un volumen de 1 pulgada cúbica.

8. El volumen del interior de un prisma rectangular de 59 pulgadas de largo, 37 pulgadas de ancho y 23 pulgadas de alto, ¿está dado por $(23 \cdot 37 \cdot 59)$ pulgadas cúbicas? (No multipliques.) Escribe una expresión como la anterior para un prisma rectangular cuyas medidas sean exactamente el doble de las del primer prisma. Factoriza esta expresión; si se repite algún factor, escríbelo con un exponente. ¿Cuántas veces menor es el primer volumen que el segundo?

*9. Razonando como en el problema 8, indica cuál será el efecto sobre el volumen de un prisma rectangular si se triplican todas sus medidas. ¿Cuál será el efecto si dos se duplican y una se triplica?

Los volúmenes obtenidos aquí por multiplicación serían precisos si las medidas del largo, ancho y alto fueran exactas. Como estas medidas son siempre aproximadas, deberíamos utilizar el signo $\approx$ de "aproximadamente igual a" para escribir los enunciados que contengan medidas. En los problemas que siguen usa este signo cuando sea apropiado.

10. Un bloque de piedra cuya forma es la de un sólido rectangular tiene un volumen de $2\frac{1}{2}$ yardas cúbicas. Pesa alrededor de 600 libras por pie cúbico. ¿Cuál es su peso total?

11. Una casa de apartamentos tiene la forma de un prisma rectangular de 210 pies de largo, 30 pies de ancho y 30 pies de alto. ¿Cuántos pies cúbicos de espacio interior (sin considerar el espesor de las paredes) tiene el edificio? Expresa el volumen también en yardas cúbicas.

12. Un ventilador eléctrico mueve 3,375 pies cúbicos de aire por minuto. ¿Cuánto tiempo necesitará para cambiar el aire de una habitación de 27 pies por 25 pies por 10 pies?

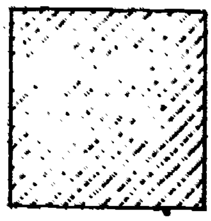
13. Imagina un edificio que tiene la forma de un cubo de $\frac{1}{16}$ milla de lado. (¿Cómo se compara $\frac{1}{16}$ milla con la longitud de un campo de fútbol?) Si la gente del edificio insiste en tener

[illegible] cúbicos de espacio por persona, ¿cuántas personas [illegible] edificio?

14. [illegible] construye una caja grande de arena, con una [illegible] pies de largo y 9 pies de ancho. Un carro de [illegible] cinco yardas cúbicas de arena, las descarga [illegible]. Si se nivela [illegible] la superficie de la arena, ¿cuál [illegible]? Da la respuesta tanto en pies como en pulgadas.

15. [illegible] un cofre perteneciente al tesoro de un pirata. El cofre estaba lleno de oro y tenía la forma de un prisma rectangular de [illegible] pies con [illegible] pulgadas de largo, 18 pulgadas de ancho y 1 pie de profundidad. Teniendo en cuenta los espacios vacíos que quedan entre las piezas de oro, podemos suponer que un pie cúbico de oro pesa [illegible]00 libras. ¿Podrían cinco hombres sacar el cofre de la excavación, si cada hombre pudiera levantar hasta 400 libras?

16. [illegible] barra de hierro que tenga una sección transversal cuadrada de 1 pulgada de lado. [illegible] tiene la forma indicada en la figura adjunta. Si se [illegible] un pie cúbico de hierro en esta forma, ¿de qué longitud resultaría la barra? Expresa la respuesta en pulgadas, en pies y en yardas.



1 PULG.

1 PULG.

*17. Si un edificio fuera un cubo de una milla, es decir un cubo cuya arista midiera una milla, ¿habría en él espacio suficiente para toda la población de los Estados Unidos (alrededor de [illegible],000,000 de habitantes)? ¿Habría espacio para la población de China (aproximadamente 400,000,000 de habitantes)? ¿Cabrían las poblaciones de los dos países a la vez? (Considera 10 yardas cúbicas por persona.)

*18. Al medirse el largo, el ancho y el alto de un prisma rectangular se encontraron $10\frac{1}{2}$ pulgadas, $[illegible]\frac{0}{2}$ pulgadas y $3\frac{1}{2}$ pulgadas, respectivamente. Calcula el volumen de su interior utilizando estas medidas.

*19. Si se sabe que las medidas del problema 18 tienen una precisión de $\frac{1}{2}$ pulgada (es decir, la aproximación de media pulgada) entonces:

(a) El largo verdadero está entre ___?___ pulg. y ___?___ pulg.

(b) El ancho verdadero está entre ___?___ pulg. y ___?___ pulg.

(c) El alto verdadero está entre ___?___ pulg. y ___?___ pulg.

*20. (a) El prisma rectangular más pequeño que podría tener las medidas del problema 18 sería de ___?___ pulg. por ___?___ pulg. por ___?___ pulg.

(b) El prisma rectangular más grande que podría tener las medidas del problema 18 sería de ___?___ pulg. por ___?___ pulg. por ___?___ pulg.

(c) El volumen del prisma más pequeño es ___?___.

(d) El volumen del prisma más grande es ___?___.

(e) La diferencia entre el volumen más pequeño posible y la respuesta del problema 18 es ___?___.

(f) La diferencia entre el volumen más grande posible y la respuesta del problema 18 es ___?___.

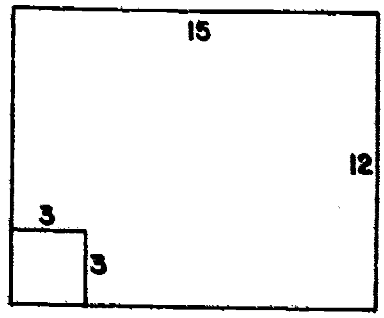
(g) El máximo error posible en la respuesta al problema 18 es, entonces, ___?___.

(h) Redacta la respuesta al problema 18 en la forma siguiente:

El volumen es $\underset{\text{respuesta al problema 18}}{\underline{\qquad\qquad}} \pm \underset{\text{máximo error posible}}{\underline{\qquad\qquad}}$ pulgadas cúbicas.

Los problemas 18, 19 y 20 muestran, como en el caso de las áreas, que el error posible en un volumen obtenido multiplicando medidas aproximadas es generalmente mucho mayor que el sugerido por la forma de la respuesta. Debemos recordar que cuando escribimos la respuesta al problema 18 como $183\frac{3}{4}$ pulgadas cúbicas, no queremos decir que esta cifra es correcta con la aproximación de un cuarto de pulgada cúbica. En realidad, el error puede ser de casi 28 pulgadas cúbicas.

Probablemente la figura más simple no plana es el prisma rectangular. Por supuesto, más tarde hallaremos volúmenes de otros sólidos determinados por figuras, tales como otros prismas, conos, cilindros, esferas, etc., pero sería perder mucho tiempo el tratar de estudiar por separado estas figuras. Frecuentemente, desde luego, podemos obtener los resultados sumando o restando volúmenes que ya conocemos. Por ejemplo, suponte que en un rincón de una habitación de 15 pies de largo, 12 pies de ancho y 8 pies de alto, se construye un armario. El armario llega hasta el techo y tiene una base de 3 pies por 3 pies, de manera que el plano del piso se ve como en la siguiente figura:

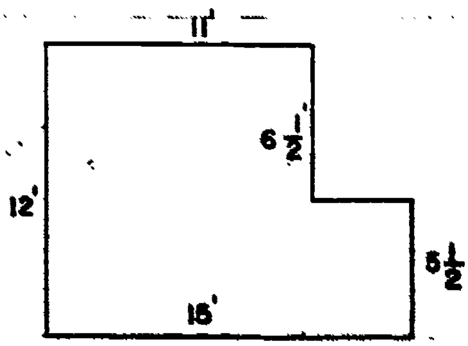


¿Cómo calculas el volumen del espacio restante de la habitación? ¿Cuál es ese volumen?

Suponte, sin embargo, que tenemos un sólido tosco, que no parezca formado de prismas rectangulares. Por ejemplo, supón que has tomado del borde del camino una piedra de forma muy irregular, y quieres conocer su volumen. Trata de inventar uno o más métodos para determinar este volumen.

Ejercicios 8-2d

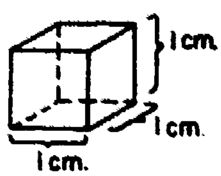
1. Mide el volumen de una piedra u otro objeto irregular por un método que hayas inventado.
2. El plano del piso de una habitación es así:



¿Cuántos pies cuadrados de tela para alfombra se necesitarían para cubrir el piso de pared a pared? ¿Cuál es el volumen del interior de la habitación, si ésta tiene 9 pies de alto?

3. Una despensa, cuyo piso es de 4 pies por 5 pies, tiene 9 pies de alto. Contiene una nevera de 2 pies por 3 pies por 7 pies. ¿Cuántos pies cúbicos de espacio quedan libres? Expresa también la respuesta en yardas cúbicas.

En los ejercicios precedentes has calculado áreas totales en yardas cuadradas, pies cuadrados y pulgadas cuadradas. Has calculado luego volúmenes expresados en yardas cúbicas, pies cúbicos y pulgadas cúbicas. Algunas de las unidades métricas para medir volúmenes son el metro cúbico ($m.^3$), el centímetro cúbico ($cm.^3$) y el milímetro cúbico ($mm.^3$). Las figuras siguientes representan el centímetro y el milímetro cúbicos.



1 centímetro cúbico

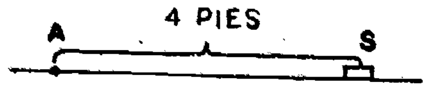
1 milímetro cúbico

<u>Ejercicios 8-2e</u>

1. ¿Cuántos milímetros cúbicos hay en 1 centímetro cúbico?
2. ¿Cuántos centímetros cúbicos hay en 1 metro cúbico?
3. ¿Cuántos milímetros cúbicos hay en 1 metro cúbico?
4. Dibuja un cubo que tenga todas las aristas de 3 cm. Dibuja también un prisma rectangular cuyo volumen sea 3 $cm.^3$. ¿Cuál tiene mayor volumen?
5. Un prisma tiene 2 metros, 3 metros y 1 metro por largo, ancho y alto, respectivamente. Halla su área total y su volumen.
6. Suponte que en un rincón de una habitación de 5 metros de largo, 4 metros de ancho y 3 metros de alto, se construye un armario. El armario llega hasta el techo y tiene una base de 1 metro por 1 metro. Halla:
   (a) El volumen de la habitación sin el armario.
   (b) El volumen del interior del armario.
   (c) La diferencia (a) - (b).
   (d) ¿Es (c) el volumen del espacio restante?

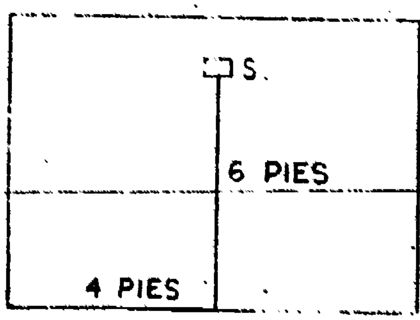
<u>Dimensión</u>

Imagina dos moscas, colocadas una junto a la otra, en un punto A de la intersección de una pared y el piso de una habitación. Una de ellas trata de dirigir a la otra hacia el terrón de azúcar que está en la misma intersección. ¿Qué instrucciones debe darle?



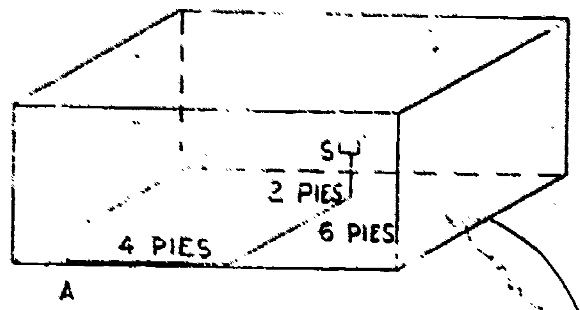
Probablemente, todo lo que necesita decirle es: "Recorre cuatro pies sobre la intersección en este sentido. ¡No puedes equivocarte!" La descripción completa del punto de la intersección en que está el azúcar, puede hacerse mediante <u>un</u> número y una dirección. Por eso la intersección se llama <u>unidimensional</u>. Por supuesto, la parte recorrida de la intersección puede ser un solo segmento o puede dar la vuelta por una o más esquinas, de manera que cualquier segmento o curva simple cerrada es <u>unidimensional</u>.

Si el terrón de azúcar está en el medio del piso, se presenta más de un problema a la mosca que dirige. Su amiga no llegará al azúcar si sigue la intersección. ¿Qué instrucciones puede darle? Una de las maneras más simples sería la siguiente:



"Recorre cuatro pies por la intersección. Luego vira a la izquierda hasta que estés colocada perpendicularmente a la intersección, y avanza de frente seis pies". En este caso el terrón de azúcar estaba en el interior del rectángulo y ha sido conveniente usar <u>dos</u> números y dos direcciones paralelas a las aristas de la habitación para describir su posición. Por esta razón, el conjunto interior de un rectángulo (o de cualquier otra curva simple cerrada) se llama <u>bidimensional</u>.

Si el terrón de azúcar no está sobre el piso, sino en otra parte de la habitación, por ejemplo suspendido del techo por un hilo, el problema de la dirección que debe seguir es aún más difícil.



Las directivas deberían ser, entonces, así: "Recorre cuatro pies por la intersección, luego camina seis pies por el piso, perpendicularmente a la intersección. Entonces estarás debajo del azúcar. Para alcanzarlo, vuela directamente hacia arriba dos pies". Esta vez se utilizaron <u>tres</u> números y tres direcciones paralelas a las aristas de la habitación para describir la manera de alcanzar el punto S. Por esto, el interior de la habitación (es decir, el interior de un sólido rectangular) se llama <u>tridimensional</u>.

De acuerdo con lo que acabas de estudiar, ¿qué dimensión le darías a un punto?

Hablando grosso modo, la dimensión del conjunto en el que está la mosca muestra el grado de libertad de movimientos que ella tiene. Si debe permanecer en el conjunto unidimensional determinado por la intersección de una pared y el piso, puede moverse sólo en un sentido u otro de esa intersección. Si puede ir a cualquier parte del conjunto bidimensional dentro del rectángulo, puede caminar por todo el piso. Si está confinada al conjunto tridimensional interior de la habitación, puede volar a cualquier parte de la habitación.

8-3. <u>Otras medidas</u>

En nuestro estudio del volumen hemos utilizado las unidades de volumen relacionadas con las medidas lineales, tales como pulgada cúbica, yarda cúbica o milla cúbica. En la práctica usamos frecuentemente otras unidades de volumen. Cuando vas a las tiendas, pides la leche, la crema o el vinagre en <u>cuartillos</u>[1] (abreviado, ct.) o <u>pintas</u> (pt.) en vez de pies cúbicos o pulgadas cúbicas. En la misma forma pides una <u>fanega</u>[2] (abreviado fa.) de melocotones. Naturalmente, hay relaciones definidas entre cada una de estas medidas y el pie cúbico o la pulgada cúbica. ¿Puedes encontrar, aproximadamente, estas relaciones? Toma un tarro de un cuartillo y un depósito rectangular. Echa cierto número de cuartillos de agua (o de arena) en el depósito y calcula el volumen en pulgadas cúbicas, midiendo el largo, ancho y profundidad del agua (o de la arena). Si es posible, usa un método análogo para determinar el volumen de una canasta de una fanega. Esta vez probablemente te convendría más tomar un depósito cuyo volumen conoces en pulgadas cúbicas o en pies cúbicos, y ver cuántos de estos depósitos caben en una fanega. ¡También tendrías que utilizar algo distinto del agua, pues las canastas de una fanega impermeables son raras!

Sería ventajoso eliminar gran parte de estas unidades de volumen innecesarias. (En realidad, ésta es una de las más grandes ventajas del sistema métrico, acerca del cual oirás hablar mucho a medida que avances en tus estudios.) Como estas medidas están en uso diario, debemos conocer sus relaciones, o por lo menos saber cómo determinarlas. Por desgracia, en nuestro sistema inglés aún usamos unidades diferentes (a veces con los mismos nombres) para medir líquidos y sólidos. El cuartillo cuya medida has determinado, es realmente el cuartillo líquido; pero hay un "cuartillo seco" (ct. sec.) que es más grande. Para facilitar las referencias, al final de este capítulo hay una tabla con información sobre las diversas unidades de longitud, área, volumen y peso, y sus relaciones.

<u>Ejercicios 8-3a</u>

1. La leche viene frecuentemente en "cajas" de un cuartillo, hechas de cartulina que miden 7 pulgadas por 3 pulgadas por $2\frac{3}{4}$ pulgadas.
   (a) ¿Cuántas pulgadas cúbicas tienen esas "cajas"?
   (b) ¿Equivalen a $\frac{1}{4}$ de galón?

[1] En inglés: quarts, abreviado qt.
[2] En inglés: bushel, abreviado bu.

(c) ¿Qué hacen con estas cajas a veces para hacerlas parecer más largas?

2. Cierta caja de un cuartillo, para leche, tenía las siguientes medidas, en pulgadas: $2\frac{3}{4}$ por $2\frac{3}{4}$ por $7\frac{1}{4}$. ¿Contenía esta caja más de un cuartillo o menos? ¿Cuánto más o cuánto menos?

3. Hay un viejo dicho: "Una pinta es una libra en todas las partes del mundo". Da una razón por la cual esto no es necesariamente cierto.

4. Las bayas se venden frecuentemente en cajas marcadas en pintas o en cuartillos. Una caja de un "cuartillo" medía $4\frac{3}{4}$ pulg. por $4\frac{3}{4}$ pulg. por $2\frac{7}{8}$ pulg.

   (a) ¿Cuántas pulgadas cúbicas contenía?

   (b) Si un "cuartillo seco" es $1\frac{1}{6}$ veces más grande que un cuartillo líquido, y un cuartillo líquido contiene $57\frac{3}{4}$ pulgadas cúbicas, ¿cuántas pulgadas cúbicas hay en un cuartillo seco?

   (c) ¿Contiene la caja de un "cuartillo" así medido, un cuartillo seco?

5. Una caja de una pinta, para bayas, mide $3\frac{3}{4}$ pulg. por $3\frac{3}{4}$ pulg. por $2\frac{1}{2}$ pulg.

   (a) ¿Cuántas pulgadas cúbicas contiene?

   (b) ¿Cuántas pulgadas cúbicas debería contener una pinta seca?

   (c) ¿Cuánto más grande o más pequeña es esta caja de lo que debería ser?

6. ¿Hay alguna razón para que un cuartillo "seco" sea más grande que un cuartillo líquido?

7. El precio de una fanega de manzanas es $3.25; se pueden vender también las manzanas a 9 centavos la libra. Si la fanega tiene 48 libras de manzanas, ¿cuánto ahorras comprando una fanega?

8. Una fanega de patatas pesa 60 libras. ¿Qué es más barato, una fanega que cuesta $3.50 ó 60 libras compradas a razón de 4 libras por 25 centavos?

9. Las cajas de medio galón, para leche, tienen una base de $3\frac{1}{2}$ pulg. por $3\frac{1}{2}$ pulg. ¿Qué altura debe tener cada caja? Si h representa el número de pulgadas de alto, formula una proposición numérica para este problema.

*10. Los números de pulgadas para las aristas de cierto prisma rectangular son todos números cardinales mayores que uno. Si el sólido rectangular tiene un volumen de un galón, ¿cuáles son las medidas del prisma?

En este capítulo hemos tratado solamente las medidas espaciales. Se han medido líneas, superficies, volúmenes y ángulos. Hay muchas cosas que se miden y que como la temperatura y el tiempo, no tienen conexión con el espacio. Todos estamos familiarizados con los pesos como cantidades medibles. Se miden el agua, el gas y la electricidad que usas en tu hogar. ¿Puedes enumerar otras cosas que se miden?

Es interesante notar que muchas medidas se efectúan mediante una escala marcada sobre una recta. ¿Te das cuenta de que cuando leemos un termómetro, estamos leyendo realmente sobre una recta numérica? Para efectuar tales lecturas, leemos las medidas marcadas en un segmento de recta. Dos de los flúidos mencionados antes se miden, realmente, como volúmenes. ¿Cuáles son? ¿Se lee alguna medida en una escala circular? La medición implica algo más que encontrar las longitudes de segmentos de recta. A continuación consideraremos dos de estas medidas: el tiempo y el peso. Como en todos los otros casos, las unidades utilizadas para medir estas cosas deben tener la misma naturaleza que la cosa medida. El tiempo se mide en unidades de tiempo, y el peso se mide en unidades de peso. Los conceptos científicos de peso y tiempo son complicados y los dejaremos para futuros estudios de las ciencias. Trataremos solamente acerca del uso de las unidades más comunes de peso y de tiempo.

Peso

Las unidades de peso se usan para describir en qué medida es pesado o liviano un volumen dado de alguna cosa. Puede parecerte gracioso imaginar tu cuerpo como un volumen, pero realmente ocupa una parte de espacio y tiene un peso. Una fanega de plumas no tiene el mismo peso que una fanega de papas, aun cuando ocupan la misma porción de espacio. Las unidades de peso en el sistema inglés de medidas son la onza, la libra y la tonelada. Debes [illegible] relaciones entre estas unidades.

[illegible] 11.

[illegible] (T.)

[illegible] desarrollaron el sistema métrico incluyeron unidades [illegible]. [illegible] científico, la masa es una medida [illegible] lo que llamamos peso, de manera que por el momento [illegible] que los [illegible] corresponden a un mismo concepto. Debes estar preparado [illegible] esta idea algún día, pues la diferencia entre los conceptos [illegible] y peso es muy importante en las ciencias físicas. Estudiarás estas diferencias si sigues un curso de física en la escuela secundaria. Solamente para convencerte de que hay diferencias, [illegible] de las más importantes. El peso de un objeto [illegible] cuerpo depende de la distancia a que esté colocado respecto del centro de la tierra. Tu peso sería menor en la cumbre de la montaña [illegible] en tu casa, y se reduciría aún mucho más si estuvieras en [illegible] espacial que se encontrara tan lejos de la tierra como, digamos, la luna. La masa de tu cuerpo, en cambio, sería la misma en todos esos sitios, pues la masa no depende del lugar en [illegible].

[illegible] las unidades métricas para la masa se usan más comúnmente [illegible] un cuerpo que las de peso, y nos limitaremos a ellas en nuestro estudio. En este caso el sistema métrico tiene una gran ventaja sobre el sistema inglés, pues las unidades de masa [illegible] con los volúmenes. La masa de un centímetro cúbico de agua [illegible] temperatura y presión especificadas, es la unidad: un gramo. Esto es especialmente conveniente, pues la unidad de masa puede obtenerse en cualquier momento, por cualquier persona que pueda medir con precisión un volumen dado de agua.

Se dice que un objeto cuya masa es 1,000 gramos tiene una masa de un kilogramo. Estas serán las únicas unidades métricas de masa que usaremos esta vez.

1,000 gramos (gm.) = 1 kilogramo (kg.)

Tiempo

La unidad fundamental de tiempo es la hora. Se obtienen dos unidades más pequeñas dividiendo la hora en 60 partes iguales llamadas minutos, y en 60^2 = 3,600 partes ~~iguales llamadas segundos.~~

Los períodos largos de tiempo se relacionan con los movimientos del sol y de la luna. Debes conocer las relaciones entre esas unidades: día, semana, mes y año.

60 seg.	=	1 min.
60 min.	=	1 h.
24 h.	=	1 día
7 días	=	1 semana
$4\frac{1}{3}$ sem.	≈	1 mes
30 días	≈	1 mes
52 sem.	≈	1 año
365 días	≈	1 año
12 meses	=	1 año

Deberías notar que las relaciones entre día y mes, semana y mes, semana y año, y día y año son sólo aproximadas. Esto se debe en parte a que la Tierra tarda algunas horas y minutos más de los 365 días para dar una vuelta completa alrededor del sol.

Ejercicios 8-3b

1. [illegible] se abre a las [illegible] a.m. y cierra a las 3:30 p.m.
   (a) ¿Cuántas horas y minutos hay en este tiempo?
   (b) ¿Cuántos minutos hay en el día escolar?
   (c) Si hay [illegible] períodos iguales de clase (incluyendo uno para almorzar), ¿cuántos minutos corresponden a cada clase?
   (d) Si hay [illegible] períodos iguales de clase, ¿cuánto dura cada período?
2. La escuela abre [illegible] días por año. ¿Cuántas horas funciona cada año? (V. el problema 1.)
3. ¿Cuántos días hay entre el 2[illegible] de abril y el 6 de mayo? No cuentes ninguno de estos dos días.
4. ¿Cuánto tiempo tienes al día para descansar si duermes 9 horas, pasas [illegible] horas y [illegible] minutos en la escuela, estudias en casa durante 2 horas, necesitas 1 hora y 15 minutos para comer y ayudas a tu mamá por 1 hora?
5. El agua pesa, aproximadamente, $62\frac{1}{2}$ lb. por pie cúbico. ¿Cuánto pesa el agua que alcanza a 16 pulgadas de altura en un acuario de 21 pulgadas de largo, y 18 pulgadas de ancho? (Sugerencia: Es más fácil resolver este problema

expresando las medidas en pies.)

6. Los envases de la marca A de jugo de tomate tienen rótulos que dicen que el peso del jugo contenido en ellos es 1 lb., 12 oz., mientras la marca B vende el jugo en envases que contienen 30 oz. ¿De qué marca se obtiene más jugo de tomate por envase?
7. En un campamento se suministran alimentos, en cada comida, a 70 personas.
   (a) Si se debe servir 6 oz. de jugo de tomate a cada persona, ¿cuántas onzas se necesitan?
   (b) ¿Cuántas libras se necesitan?
   (c) ¿Cuántas latas de jugo de la marca A se necesitarían? (V. el problema 6.)
   (d) ¿Cuántas latas de jugo de la marca B?
   (e) Si la marca A cuesta 42 centavos por lata y la B cuesta 44 centavos por lata, ¿cuál de las dos nos permitiría economizar al servir una comida en el campamento? ¿Cuánto economizaríamos?
8. Una tonelada de carbón ocupa, aproximadamente, 35 pies cúbicos.
   (a) ¿Cuántas toneladas puede contener un depósito de 5 pies por 8 pies por 7 pies?
   (b) ¿Cuántas libras son?
9. Un $cm.^3$ de agua pesa 1 gramo.
   (a) ¿Cuántos gramos pesa un metro cúbico de agua?
   (b) ¿Cuántos kilogramos son?
10. PROBLEMA DIFICIL. ¿Qué pesa más, un pie cúbico de agua o un pie cúbico de hielo? ¿Por qué?

<u>Cálculos con medidas</u>

Vuelve a las páginas 268 y 269 y lee los párrafos referentes al significado especial de los siguientes signos: = , + y - cuando se refieren a medidas. Ten presentes estas ideas cuando leas el texto y trates los problemas que siguen.

Es necesario, frecuentemente, sumar y restar medidas. Suponte que Juan viaja durante 2 horas un día y durante 3 horas otro día y que quieres saber el tiempo total del viaje. Otro problema podría ser: Hay 10 galones de leche en una tina. Si se quitan 3 galones, ¿cuánto queda de leche?

Hay situaciones especiales que requieren mayor análisis. Suponte que los viajes de Juan hayan sido así: una hora el primer día y 15 minutos el segundo día. ¿Será el tiempo total de su viaje (1 + 15) unidades de tiempo, es decir, 16 unidades de tiempo? ¡Naturalmente que no! Podemos ver que su tiempo total de viaje no ha sido ni 16 horas ni 16 minutos. Las medidas deben expresarse en las <u>mismas unidades</u> antes de intentar cualquier suma. Esto implica que antes de sumar debemos expresar una hora como 60 minutos, o bien 15 minutos como $\frac{1}{4}$ de hora.

¡Sería tonto tratar de "sumar" 6 pies más 4 galones! Di por qué.

Hasta ahora, cuando hemos dado diferentes nombres a una medida, la hemos expresado completamente en las mismas unidades, tal es el caso de la longitud que puede describirse por el nombre $3\frac{1}{2}$ pies o por el nombre 42 pulgadas. Esto, por supuesto, se puede hacer siempre, pero frecuentemente no conviene hacerlo. Por ejemplo, es mejor referirse a 2 pies 5 pulgadas que a $2\frac{5}{12}$ pies ó a 29 pulgadas, a pesar de que los últimos nombres son correctos para esa longitud. En la misma forma, la duración de un viaje en tren estaría mejor descrita como 2 horas 17 minutos que como 137 minutos o como $2\frac{17}{60}$ horas, que también serían nombres correctos. Así, pues, consideraremos aquí tales nombres compuestos, sabiendo que podemos evitarlos si queremos.

Supongamos ahora que Juan viaje durante 2 horas 40 minutos el primer día y durante 1 hora 30 minutos el segundo día. Esta vez no deseamos expresar la duración del viaje sólo en horas, o sólo en minutos. Por lo tanto, debemos tratar las dos unidades separadamente.

Tiempo total de viaje = (2 + 1) horas (40 + 30) minutos
= 3 horas 70 minutos

Como 70 minutos son más de una hora, podemos y debemos expresarlos como 1 hora 10 minutos, de manera que

tiempo total de viaje = (3 + 1) horas 10 minutos
= 4 horas 10 minutos.

En este caso se han efectuado dos sumas separadas y luego un cambio de unidades. Dejar 70 minutos en la respuesta hubiera sido como llevar el bolsillo lleno de monedas de a un centavo en vez de cambiar algunas por billetes de a dólar, por ejemplo. A un cambio como el que hemos visto, algunas personas llaman "simplificación de la respuesta" o "expresión de la respuesta en forma simple".

Ejercicios 8-3c

Suma y expresa el resultado en forma simple:

1. [illegible] hr. [illegible] min.
   [illegible] hr. [illegible] min.

2. [illegible] hr. [illegible] min. [illegible]0 seg.
   [illegible] hr. [illegible] min. 1[illegible] seg.

3. [illegible]
   [illegible]
   [illegible]

4. [illegible] yd. cd. [illegible] pies cd. 100 plg. cd.
   [illegible] yd. cd. [illegible] pies cd. [illegible]7 plg. cd.
   [illegible] yd. cd. 7 pies cd. 116 plg. cd.

5. [illegible] gal. [illegible] ct. [illegible] pt.
   [illegible] gal. [illegible] ct.
   [illegible] gal. 1 ct. 1 pt.

6. [illegible] yd. cb. 2[illegible] pies cb. [illegible]00 plg. cb.
   4 yd. cb. 19 pies cb. 767 plg. cb.
   2 yd. cb. 12 pies cb. 1,268 plg. cb.

La sustracción, como la adición, sólo puede efectuarse cuando las unidades son las mismas, o cuando se las transforme de manera que resulten las mismas. Sin embargo, encontramos a veces otra dificultad en la sustracción. Trata de efectuar, por ejemplo, la siguiente sustracción:

6 yd.	1'	4"
2 yd.	2'	9"

¿Cómo puedes restar 9 pulgadas de 4 pulgadas o 2 pies de 1 pie? Utilizaremos ahora otro principio importante que ya has empleado antes. Es el de convertir el último paso en una adición. Antes de restar, cambiamos la forma del minuendo sin cambiar su valor. El método se muestra en seguida:

6 yd. 1' 4" =	5 yd.	3'	16"
	2 yd.	2'	9"
	3 yd.	1'	7"

El cambio de forma se hace habitualmente tachando el número original y colocando el nuevo más arriba. Indica cómo se han obtenido cada uno de los nuevos números. Cuando se necesitan más unidades pequeñas, se convierte una de las grandes, de las que le siguen, en pequeñas.

Resta y expresa la respuesta en forma simple:

7. (a)

41	3' 1"
19	8"

(b) ¿En ambos casos has tenido que cambiar una unidad grande por su igual en unidades pequeñas? Explícalo.

8.	5 yd. 2' 10" 3 yd. 6"		11.	6 yd. 2' 3" 3 yd. 2' 8"
9.	6 hs. 10 min. 4 hs. 35 min.		12.	4 yd. cd. 2 pies cd. 40 plg. cd. 3 yd. cd. 8 pies cd. 105 plg. cd.
10.	6 gal. 1 ct. 3 gal. 3 ct. 1 pt.		13.	8 yd. cb. 6 pies cb. 88 plg. cb. 2 yd. cb. 5 pies cb. 99 plg. cb.

Algunas veces es necesario multiplicar cantidades medidas, por números. He aquí un ejemplo de ello. Se necesitan 2 pies y 8 pulgadas de cinta de tela para hacer un cinturón para los estudiantes de la patrulla de seguridad. Si la escuela Lincoln tiene 15 miembros en la patrulla de seguridad, ¿cuántas yardas de cinta de tela se necesitan? Podemos escribir 2 pies 8 pulgadas 15 veces y luego sumar, pero es mucho más rápido utilizar la multiplicación: se multiplica cada unidad separadamente y se transforma la respuesta en su forma simple o en la forma que se pide en el problema.

2' 8"
15

30' 120" = 40' = $13\frac{1}{3}$ yd. 40 pies es una forma simple, pero $13\frac{1}{3}$ yd. es la forma solicitada en el problema.

Multiplica las medidas por los números indicados y expresa la respuesta en forma simple:

14. 6 hs. 18 min.
    5

15. 5 yd. 2' 27"
    19

16. 2 gal. 3 ct.
    417

17. 5 hs. 18 min. 35 seg.
    15

18. 2 T. 1,689 lb.
    36

19. 8 pies cd. 127 plg. cd.
    82

Cuando se necesita dividir por un número una cantidad medida, es frecuentemente más fácil reducir todas las medidas a las de menor tamaño, antes de hacer la división. Después de dividir se simplifican las respuestas.

He aquí un ejemplo: dividir un segmento de recta de longitud 3 yardas 2 pies 8 pulgadas en 8 partes iguales.

3 yardas	= 108 pulgadas
2 pies	= 24 pulgadas
8 pulgadas	= 8 pulgadas
3 yardas 2 pies 8 pulgadas	= 140 pulgadas

$$8\,\overline{)\,140}\quad 17\tfrac{1}{2}$$

En consecuencia, la longitud de cada parte es $17\frac{1}{2}$ pulg. = 1 pie $5\frac{1}{2}$ pulg.

Divide cada medida por el número indicado y expresa la respuesta en forma simple:

20. 8) 6 hs. 16 min.

21. 10) 23 yd. 1 pie

22. 32) 3 T. 496 lb.

23. 11) 6 gal. 3 ct. 1 pt.

24. 17) 4 pies cd. 87 plg. cd.

25. 76) 2 pies cb. 952 plg. cb.

El cambio de todas las unidades a la más pequeña no es absolutamente esencial. Puedes resultarte interesante resolver el problema 21 sin hacer esos cambios.

Hay una relación muy interesante entre lo desarrollado en esta sección y el estudio de las diferentes bases de numeración. Por ejemplo, supongamos que escogemos la base doce para nuestros cálculos. Entonces la expresión 2 pies 7 pulgadas podría escribirse como 27_{doce} pulg. ó $\frac{27}{10}_{doce}$ pies. Observa que en la base doce el número de pulgadas cuadradas en un pie cuadrado sería 100_{doce}. El número de pulgadas cúbicas en un pie cúbico sería 1000_{doce}.

26. Da por lo menos un ejemplo de unidades de medida familiares que podrían expresarse muy fácilmente en las siguientes bases:

    (a) Base dos.
    (b) Base tres.
    (c) Base dieciséis.
    (d) Base sesenta.

27. PROBLEMA DIFICIL. Una manzana pesa $\frac{3}{4}$ oz. más $\frac{3}{4}$ de su peso. ¿Cuánto pesa?

8-4. Resumen

1. Las unidades utilizadas comúnmente para medir áreas y volúmenes se relacionan con las unidades de longitud.
2. Si ℓ y w son los números de unidades de longitud del largo y el ancho de un rectángulo, se puede encontrar el número de unidades de longitud de su perímetro mediante la proposición numérica: $p = 2(\ell + w)$.
3. El número A de unidades de área de un rectángulo es el producto de los números ℓ y w de las unidades de longitud de su largo y su ancho. Como proposición numérica, este enunciado se escribe:

$$A = \ell w$$

Recuerda que cuando encontramos el área de un rectángulo cuyos lados son 2 pulg. y 3 pulg., no multiplicamos 2 pulg. por 3 pulg. para obtener el área. Utilizamos la unidad de área, 1 plg. cd. y determinamos qué número de esas unidades se necesitan para cubrir la región rectangular cerrada. Este número se obtiene multiplicando las medidas, 2 y 3, de las longitudes de los lados. El área es, entonces, (2×3) pulgadas cuadradas. Ocurre algo análogo para los volúmenes.

4. El número V de unidades cúbicas de volumen de un sólido rectangular es el producto del número B de unidades cuadradas de área de la base y el número h de las unidades lineales de la altura. Como proposición numérica, este enunciado se escribe:

$$V = Bh$$

Como la base es un rectángulo, esta proposición numérica puede también escribirse:

$$V = \ell wh$$

5. Una misma medida puede tener varios nombres diferentes (por ejemplo, 108 pulgadas, 9 pies, 3 yardas, $\frac{3}{1760}$ millas); uno puede transformarse en otro utilizando las razones entre las unidades de medida.

6. Unidimensional: se necesitan un número y una dirección para fijar la posición de un objeto.

   Bidimensional: se necesitan dos números y dos direcciones para fijar la posición de un objeto.

   Tridimensional: se necesitan tres números y tres direcciones para fijar la posición de un objeto.

7. Muchas cantidades no geométricas también pueden medirse. Frecuentemente se hace la medición reduciéndola a la lectura de una escala recta o circular, tal como se ha hecho en este capítulo.

TABLAS PARA LA CONVERSION DE UNIDADES

<u>Unidades inglesas</u>	<u>Unidades métricas</u>

Medidas de longitud

12"	=	1'
3'	=	1 yd.
$16\frac{1}{2}$'	=	1 vl.
320 vl.	=	1 mi.
5,280'	=	1 mi.

10 milímetros (mm.)	=	1 centímetro (cm.)
100 cm.	=	1 metro (m.)
1,000 m.	=	1 kilómetro (km.)

Medidas de área

144 plg. cd.	=	1 pie cd.
9 pies cd.	=	1 yd. cd.
150 vl. cd.	=	1 acre
43,560 pies cd.	=	1 acre
640 acres	=	1 mi. cd.

100 $mm.^2$	=	1 $cm.^2$
10,000 $cm.^2$	=	1 $m.^2$
1,000,000 $m.^2$	=	1 $km.^2$

Medidas de volumen

1,728 plg. cb.	=	1 pie cb.
27 pies cb.	=	1 yd. cb.

1,000 $mm.^3$	=	1 $cm.^3$ = 1 cc.
1,000,000 $cm.^3$ (ó cc.)	=	1 $m.^3$

Medidas de peso

16 oz.	=	1 lb.
2,000 lb.	=	1 T.

1,000 gramos (g.)	=	1 kilogramo (kg.)
1,000 kg.	=	1 tonelada métrica (ton.)

Medidas de líquidos

16 oz. fl.	=	1 pt.
2 pt.	=	1 ct.
4 ct.	=	1 gal.

1,000 $cm.^3$ (ó cc.)	=	1 litro (l.)

Medidas de áridos

2 pt. sec.	=	1 ct. sec.
8 ct. sec.	=	1 peck (pk.)
4 pk.	=	1 fanega (fa.)

En el sistema métrico se usan las unidades de volumen.

Medidas varias

1 gal.	=	231 plg. cb.
1 pie cb.	≈	$7\frac{1}{2}$ gal.
1 fa.	≈	2,150 plg. cb.
1 ct. sec.	≈	$1\frac{1}{6}$ ct.

Equivalencias entre unidades métricas y unidades inglesas

1"	=	2.54 cm.
1 yd.	≈	0.9 m.
1 mi.	≈	1.6 km.
1 lb.	≈	0.45 kg.
1 ct.	≈	0.95 l.

1 cm.	≈	0.4"
1 m.	≈	1.1 yd.
1 km.	≈	0.62 mi.
1 m.	≈	39.37"
1 kg.	≈	2.2 lb.
1 l.	≈	1.05 ct.

INDICE ALFABETICO

Los números indican las páginas en el texto.