DOCUMENT RESUME

ED 133 181 SE 021 738

AUTHOR Bauersfeld, H., Ed.; And Others
TITLE Universitat Bielefeld, Institut fur Didaktik d Mathematik, Schriftenreihe des IDM, 2/1974. (University of Bielefeld, Institute for the Te of Mathematics, Series of Publications of the 2/1974.)
INSTITUTION Bielefeld Univ. (West Germany).
PUB DATE 74
NOTE 232p.; For related documents, see SE 021 735-7 available in hard copy due to marginal legibil original document; In German
AVAILABLE FROM Institut fur Didaktik der Mathematik, Universi Bielefeld, Heidsieker Heide 94, D-4800 Bielefe West Germany (no price quoted)

EDRS PRICE MF-$0.83 Plus Postage. HC Not Available from E
DESCRIPTORS *Curriculum; *Elementary School Mathematics; Elementary Secondary Education; *Instruction; International Education; *Mathematics Educatio School Organization; *Secondary School Mathema

ABSTRACT

This document contains papers prepared for two meetings involving the French educational research in mathemat institute (IREM) and the German institute (IDM) at the Univers Bielefeld. The 14 papers concern: (1) the organization of the systems in the Federal Republic of Germany and in France; (2) mathematics curricula in German secondary schools; (3) a repor research work; (4) the development of mathematics teaching tea observations of instruction and analysis of teaching mathemati possible criteria for criticism of the instructional process; number system in elementary instruction; (8) improving methods calculating with the natural numbers; (9) three examples suppo criticism of mathematics instruction; (10) variables, function graphs for 7- to 8-year-old students; (11) coordinating mathem and French at some levels in French secondary schools; (12) so considerations on relating the structure of mathematics and instruction; (13) concrete examples that show how to challenge pedagogical weaknesses of conscientious teachers; and (14) tea for continuity and variety in the school. (MS)

Herausgegeben von: H. Bauersfeld
M. Otte
H.G. Steiner

Redaktion: Gert Schubring

Gesamtherstellung: Robert Bechauf, Bielefeld

EINLEITUNG

Einordnung in die Aufbauarbeit des IDM

Die gemeinsame Tagung von Mitarbeitern der IREM Paris, Bordeaux und Lyon und des IDM Bielefeld hatte zwei Ziele: Sie sollte einmal den internen Reflexionsprozess über Forschungs- und Innovationsstrategien des IDM durch Einbeziehen der Erfahrungen vergleichbarer ausländischer Institute fördern und vorwärtstreiben und sollte zum zweiten einen Beitrag zur Entwicklung notwendiger längerfristiger Kooperationsbeziehungen zwischen dem IDM und ausländischen Parallelinstituten leisten, Schwerpunkte einer solchen Kooperation klären und der Erarbeitung einer gemeinsamen konzeptionellen Erfahrungsbasis dienen.

Den Mitarbeitern des IDM, die diese Tagung vorbereitet haben, schien zur Förderung dieser Ziele ein Erfahrungsaustausch mit französischen Parallelinstituten aus einer Reihe von Gründen besonders fruchtbar zu sein:
Zunächst einmal ist in der BRD bisher wenig über die Erfahrungen, die in Frankreich mit der Reform des Mathematikunterrichts gemacht wurden, bekannt. Die französischen Diskussionen über institutionelle und inhaltliche Voraussetzungen der Reform sind kaum rezipiert.
Die französischen Parallelinstitute sind im Zusammenhang mit einer Reform des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe I entstanden und waren an der Durchführung der Reform sehr stark beteiligt, insbesondere im Bereich der Lehrerweiterbildung.
An der Schaffung der inhaltlichen und sozialen Voraussetzungen für eine Reform des Mathematikunterrichts hatten Gruppen und Organisationen der Mathematiklehrer einen entscheidenden Anteil. Viele, die derartige Lehreraktivitäten mit initiierten und zu ihrer Entfaltung beitrugen, sind

EINLEITUNG

Einordnung in die Aufbauarbeit des IDM

Die gemeinsame Tagung von Mitarbeitern der IREM Paris, Bordeaux und Lyon und des IDM Bielefeld hatte zwei Ziele: Sie sollte einmal den internen Reflexionsprozess über Forschungs- und Innovationsstrategien des IDM durch Einbeziehen der Erfahrungen vergleichbarer ausländischer Institute fördern und vorwärtstreiben und sollte zum zweiten einen Beitrag zur Entwicklung notwendiger längerfristiger Kooperationsbeziehungen zwischen dem IDM und ausländischen Parallelinstituten leisten, Schwerpunkte einer solchen Kooperation klären und der Erarbeitung einer gemeinsamen konzeptionellen Erfahrungsbasis dienen.

Den Mitarbeitern des IDM, die diese Tagung vorbereitet haben, schien zur Förderung dieser Ziele ein Erfahrungsaustausch mit französischen Parallelinstituten aus einer Reihe von Gründen besonders fruchtbar zu sein:
Zunächst einmal ist in der BRD bisher wenig über die Erfahrungen, die in Frankreich mit der Reform des Mathematikunterrichts gemacht wurden, bekannt. Die französischen Diskussionen über institutionelle und inhaltliche Voraussetzungen der Reform sind kaum rezipiert.
Die französischen Parallelinstitute sind im Zusammenhang mit einer Reform des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe I entstanden und waren an der Durchführung der Reform sehr stark beteiligt, insbesondere im Bereich der Lehrerweiterbildung.
An der Schaffung der inhaltlichen und sozialen Voraussetzungen für eine Reform des Mathematikunterrichts hatten Gruppen und Organisationen der Mathematiklehrer einen entscheidenden Anteil. Viele, die derartige Lehreraktivitäten mit initiierten und zu ihrer Entfaltung beitrugen, sind

später entscheidend am Aufbau der IREM beteiligt gewesen. Die Tatsache, daß die meisten Mitarbeiter der IREM die Hälfte ihrer Zeit in der Unterrichtspraxis tätig sind, bildet eine zusätzliche Garantie für die Orientierung der Institutsarbeit auf die Probleme und Bedürfnisse der Mathematiklehrer.
Andererseits haben das starke Praxisengagement der IREM, ihr beschränkter finanzieller Spielraum und die Schwierigkeiten, die Mathematikdidaktik als Wissenschaft in den französischen Hochschulen zu etablieren, dazu geführt, daß ein großes Defizit an Forschung über Probleme des Mathematikunterrichts beklagt und daß insbesondere die interdisziplinäre Arbeit auf diesem Gebiet als ungenügend entwickelt betrachtet wird. Eine Neuorientierung der Arbeit in diesem Sinne wird angestrebt und eine Reihe wertvoller Beiträge, die bisher in der BRD kaum bekannt sind, liegen dazu auch schon vor. Ähnlich wie das IDM scheinen daher die IREM vor dem Problem zu stehen, neue produktive Lösungen im Spannungsverhältnis zwischen Theorieentwicklung und Praxisorientierung suchen zu müssen, in einem bildungspolitischen Klima, das in Frankreich wie in der BRD breit angelegten Unterrichtsreformen nicht gerade förderlich ist. Auf die entsprechenden Grundprobleme sollten die Beiträge und Diskussionen bezogen werden, um so die Unterschiedlichkeit der institutionellen Ausgangsvoraussetzungen, der Arbeitsbedingungen und Erfahrungen für einen gemeinsamen Lernprozess fruchtbar zu machen.

Aus dieser Orientierung und einigen Überlegungen zu aktuellen Schlüsselproblemen der Curriculumreform ergab sich der Arbeitstitel der Tagung:

"Unterrichtsreform - Unterrichtsbeobachtung - Lehrerweiterbildung".

Er drückte die gemeinsame Überzeugung der beteiligten Mitarbeiter des IDM aus, daß in den Bereichen Lehrerbildung und -weiterbildung bzw. Unterrichtsbeobachtung und -beurteilung gegenwärtig entscheidende Defizite für eine wissenschaftlich begründete und praktisch effektive Unterrichtsreform zu finden sind. Diese Überzeugung wurde durch eine Reihe von Interviews mit Fachleitern und Lehrern der verschiedenen Schulstufen aus der Bundesrepublik, die von Mitarbeitern des IDM zur Vorbereitung der Tagung durchgeführt worden waren, erhärtet.

Dem Charakter der Tagung und der Komplexität der damit aufgeworfenen Probleme entsprechend konnte es nicht um Detailorientierungen und erschöpfende Behandlung einzelner Problemkomplexe gehen. Ziel war vielmehr die Identifizierung zentraler Probleme und die Diskussion von möglichen Strategien zu ihrer schrittweisen Bearbeitung. Inwieweit dieses Ziel erreicht worden ist, mag der Leser anhand des anschließenden Resümees der Diskussionsergebnisse und der in diesem Heft publizierten Tagungsbeiträge beurteilen.

Das Verhältnis mathematikdidaktischer Forschungsinstitute zur Bildungspolitik und -administration.

Im Verlauf der Tagung zeigte sich sehr schnell ein gemeinsames Problembewußtsein in der Frage nach der Abhängigkeit der Forschungs- und Reformarbeit unserer Institute von bildungspolitischen und administrativen Entscheidungen. Durch diese Entscheidungen werden die realen Bedingungen gesetzt, die den Spielraum für erfolgreiche Innovationen bestimmen. Die Möglichkeiten, solche Entscheidungen zu beeinflussen, durch Politikberatung und eine gründliche und gezielte Öffentlichkeitsarbeit etwa, wurden als sehr beschränkt eingeschätzt. Es stellte sich daher angesichts dieser Sachlage als wenig sinnvoll heraus, der Institutsarbeit Aufgaben aufzubürden, die zur Vernachlässigung des spezifischen Tätigkeitsfeldes führen und die Institute entweder zu besonderen - vermutlich sehr schwachen -

bildungspolitischen pressure groups machen oder durch Bindung an einflußstarke Gruppen den Verlust der notwendigen Autonomie und eines breiten Kooperationsfeldes bewirken. Eine realistische Alternative scheint es zu sein, sich in den Instituten kontinuierlich zu bemühen, den Handlungspielraum, den Bildungspolitik und Administration für Forschungs- und Reformarbeit auf dem Gebiet des Mathematikunterrichts eröffnen, angemessen einzuschätzen und entsprechend zu nutzen; umgekehrt aber zu politischen und administrativen Entscheidungsprozessen nur insoweit Stellung zu nehmen als das Tätigkeitsfeld, das die Institute ihrem Auftrag entsprechend wissenschaftlich betreuen, unmittelbar betroffen ist. Diese Alternative stellt ohne Zweifel hohe Anforderungen an die Qualifizierung der Mitarbeiter und ihre interdisziplinäre Kooperation.

Die bei politischen und administrativen Instanzen weit verbreitete Erwartung, unmittelbar über praktisch einsetzbare und wissenschaftlich legitimierte Produkte, insbesondere Unterrichtsmaterial zu verfügen, die dem inhaltlichen Entwicklungsstand der Mathematikdidaktik, den internationalen Erfahrungen von den Schwierigkeiten praxiswirksamer Curriculumentwicklung und den Aufbauproblemen zentraler Bildungsforschungsinstitute zu wenig Rechnung trägt, kann nur im Rahmen einer solchen flexiblen Strategie korrigiert werden.

Realistische Reformstrategien - Kooperation mit Lehrern

Die französischen Tagungsteilnehmer berichteten, daß bei Einleitung der Unterrichtsreform in ihrem Land viele ihrer bedeutendsten Auswirkungen noch gar nicht im Blick gewesen wären, daß sozusagen die wesentlichen Konsequenzen als unbeabsichtigte und unvorhergesehene Nebenfolgen erschienen sind. Es bestände dabei der begründete Verdacht, daß die Reform erst gar nicht in Gang gekommen wäre, hätte man schon zu Beginn sämtliche ihrer Konsequenzen gekannt. In

Übereinstimmung mit der oben formulierten realistischen Beurteilung der Wirkungsmöglichkeiten zentraler Forschungsinstitute wurde konstatiert, daß Auslöser der Reform zum geringsten Teil durch Forschungsarbeit begründete und abgesicherte Einsichten waren. Umgekehrt, die Reform hat gerade die Dringlichkeit von Forschung etwa auf dem Gebiet der Unterrichtsbeobachtung oder zu Grundfragen der Didaktik deutlich gemacht. Entscheidende auslösende Faktoren waren vielmehr: die wirtschaftlich günstige Situation, ein weit verbreitetes Bewußtsein vorhandener Mißstände und die durch die Aktivitäten von Lehrergruppen und -organisationen geförderte Erkenntnis der Behebbarkeit dieser Mißstände. Aus den Folgeproblemen, die sich nach Einleitung der Reform ergaben, resultierte aber schließlich die Entwicklung eines einigermaßen kohärenten Ensembles von Aktivitäten und institutionellen Regelungen in den Bereichen der Konstruktion von Unterrichtsmaterial, der Lehreraus- und -weiterbildung und der innovationstheoretischen Fortsetzung zur Realisierung der Reform.

Die Durchführung einer Reform auf ungesicherter Basis setzte bei den Beteiligten ein großes Maß an Vertrauen und eine langfristig angesetzte Durchsetzungsstrategie voraus. Ob in der gegenwärtigen Situation alternative Strategien möglich wären - es wurde auf den kanadischen Versuch, die Reform mit der Veränderung der Unterrichtsmethoden und der Lehreraus- und -weiterbildung einzuleiten, verwiesen - blieb unausdiskutiert.

Weiter wurde das Problem der Verallgemeinerbarkeit von erfolgreichen pädagogischen Kleinexperimenten auf ganze Regionen oder Länder angesprochen. Bei pädagogischen Experimenten könnte man im allgemeinen mit einer großen Begeisterung der beteiligten Lehrer rechnen, da sie auf freiwilliger Basis durchgeführt die Aktivität der Lehrer steigern würden. Da bisher aber nur die Ergebnisse solcher Experimente, insbesondere in Form von Materialien, nicht aber ihre Arbeits-

und Organisationsformen publiziert und verallgemeinert wurden, sind Rückschlüsse vom Experiment auf Innovationen unter normalen Feldbedingungen nur sehr bedingt möglich. Es wurde hier ein Schwerpunkt für weitere Forschungsarbeit gesehen; genaue Erforschung der Faktoren, die bei erfolgreichen Experimenten den Ausschlag geben, systematische Variation des Wirkungsbereichs solcher Experimente, Beschreibung der organisatorischen und personellen Voraussetzungen für ihre Verallgemeinerung.
In diesem Zusammenhang stellt sich natürlich die Frage nach der Rolle des Lehrers im Rahmen der Unterrichtsreform. Aus Frankreich wurde berichtet, daß nach dortigen Erfahrungen eine schwerpunktmäßig materialorientierte Reformstrategie schon aus dem Grund scheitern muß, weil nicht einmal als selbstverständlich vorausgesetzt werden kann, daß die Lehrer das Material lesen, geschweige denn aus einer eventuellen passiven Aufnahme desselben angemessene Orientierungen für ihren eigenen Unterricht gewinnen. In Frankreich glaubt man, daß für die Aktivierung der Lehrer im Sinne der Unterrichtsreform der unmittelbare Kontakt mit ihnen und die gemeinsame Arbeit an konkreten Unterrichtsproblemen der effektivste Weg sei. Es sei aber viel Geduld und Anpassungsfähigkeit notwendig, um das Vertrauen der Lehrer zu gewinnen. Insbesondere müßten sie das Gefühl haben, daß Innovationen für die Bewältigung ihrer eigenen Probleme hilfreich sind, sonst scheitern entsprechende Versuche an ihrer Passivität. Als besonders schwierige Barrieren, die bei der Entwicklung der Kooperation mit Lehrern zu überwinden sind, wurde ihre Skepsis gegenüber pädagogischer Forschung und deren praktischem Ertrag und die Angst der Lehrer vor Disziplinschwierigkeiten bei der Umstellung der Methoden genannt. Es wurden drei Bedingungen erfolgreicher Arbeit mit Lehrern herausgestellt:

1. das Verständnis der sozialen Beziehungen, in denen der Lehrer arbeitet, Verständnis der für seine berufliche Tätigkeit relevanten Institutionen, verbunden mit dem Versuch, dieses soziale Umfeld in einem für die Veränderung des Unterrichtsverhaltens günstigen Sinne zu beeinflussen;

2. die Förderung der Kooperationsbeziehungen der Lehrer untereinander, insbesondere auch durch die gemeinsame kritische Einschätzung des Wertes und der Einsatzmöglichkeiten von vorgegebenem Arbeitsmaterial;
3. Anstrengungen um das Bewußtsein vom Wert und der Bedeutung der eigenen Tätigkeit bei den Lehrern zu stärken und ihnen das Vertrauen in die positive Veränderbarkeit des eigenen Verhaltens zu geben.

Angesichts der beschränkten finanziellen und personellen Ressourcen unserer Institute und der hohen Anforderungen, die die erfolgreiche Kooperation mit Lehrern stellt, wird die Frage nach der Verallgemeinerbarkeit von pädagogischen Experimenten, die in anderem Zusammenhang oben schon angesprochen wurde, umso dringlicher. Eine der wesentlichen Voraussetzungen dafür ist die Entwicklung der konzeptionellen Grundlagen einer Fachdidaktik, die die Objektivierung und Verallgemeinerung der vielfältigen Erfahrungen der Praktiker ermöglichen würde. Über unterrichtspraktische wissenschaftliche und administrative bzw. organisatorische Erfahrungen zu reflektieren und sie zu einer wesentlichen Grundlage der fachdidaktischen Arbeit zu machen, setzt einen konzeptionellen Rahmen voraus, innerhalb dessen es möglich wird, die Prozesse (im Unterricht, in der Lehrerbildung, in der Entwicklung des Mathematikunterrichts insgesamt u.ä.) und die Gegenstände, die Inhalt (oder Ziel, oder Problem u.ä.) dieser Prozesse sind, als zwei Seiten einer Münze zu betrachten. Bisher stehen beide Aspekte ziemlich beziehungslos nebeneinander.
Da das System der Lehrerbildung der wichtigste organisatorische Rahmen für die Durchsetzung der genannten Verallgemeinerungen ist, erscheint es sinnvoll, die Forschungsarbeit in diesem Bereich zu konzentrieren.

Fachwissenschaft und Unterricht

Die Diskussion um die Funktion mathematischer Gegenstände im Unterricht nahm als Problem sowohl der wissenschaftlichen Grundlagen der Fachdidaktik der Ausarbeitung konkreter Unterrichtseinheiten als auch der Konkretisierung ganzer Unterrichtsmodelle einen breiten Raum ein. Da die Beiträge zu diesem Punkt im vorliegenden Heft vollständig abgedruckt sind und die Schwerpunkte und Problembereiche der Diskussion wenigstens in ihren allgemeinen Zügen adäquat widerspiegeln, wird auf ein Diskussionsresümee zu diesem Punkt verzichtet.

Michael Otte

INHALT

Zusammenfassung des Vortrages

DIE ORGANISATION DES SCHULSYSTEMS IN DER BRD UND FRANKREICH

von Gert Schubring

Die Bildungssysteme von Frankreich und der BRD sehen sich beide seit ungefähr Ende der fünfziger Jahre verstärkt mit zwei Reformforderungen konfrontiert:

1) Der Forderung nach Chancengleichheit im Bildungswesen,
2) der Forderung nach der Reform der Allgemeinbildung, besonders in den gymnasialen Zweigen der Oberschulen bzw. der Verbindung von Allgemeinbildung und Berufsbildung, einer stärkeren Herstellung von Berufsbezogenheit und Lebensnähe der Schule.

In beiden Ländern hatten die Reformen zur ersten Forderung vor allem organisatorische Veränderungen in der Sekundarstufe I in Richtung auf mehr Einheitlichkeit, Integrierung zur Folge. Auch die mehr inhaltliche zweite Forderung bewirkte organisatorische Veränderungen in der Sekundarstufe II.

Bei allen Unterschieden zwischen den einzelnen Bundesländern, bei denen in der BRD die Kulturhoheit liegt, läßt sich feststellen, daß trotz sehr vieler Reformpläne bisher keine grundsätzliche Änderung des in der Sekundarstufe I dreigliedrigen Schulsystems (Hauptschule, Realschule, Gymnasium) stattgefunden hat. Nur in einzelnen Bundesländern sind vereinzelte Gesamtschulen, praktisch als vierte Schulform, als Versuchsschulen hinzugekommen. Auch die Orientierungsstufe, bestehend aus der 1. und 2. Klasse der Sekundarstufe I, hat sich nicht allgemein durchgesetzt und ist im allgemeinen an die jeweilige Schulform gebunden.

Die in den Gesamtschulen meist praktizierten Differenzierungsverfahren "setting" bzw. "streaming" enthalten nach den bisherigen Erfahrungen die Gefahr, daß die Schüler erneut nach sozialen Schichten aufgeteilt werden.

Erhebliche Umwälzungen finden gegenwärtig in der Oberstufe der Gymnasien statt: Die Jahrgangsklassen werden durch ein aufeinander bezogenes Kurs-System ersetzt. Diese organisatorischen Veränderungen sind mit starken curricularen Reformbemühungen verbunden und führen zu intensiverer Kooperation der Lehrer untereinander. Daneben gibt es Pläne und auch schon vereinzelte Schulversuche zur Verbindung der allgemeinen und der beruflichen Bildungsgänge in der Sekundarstufe II.

Die Ausbildung der Lehrer in der BRD erfolgt an, allerdings gegenwärtig noch nach Niveau unterschiedenen, wissenschaftlichen Hochschulen, und zwar getrennt nach Schulformen. Es ist geplant, die Ausbildung der Lehrer nicht mehr nach Schulformen, sondern nach Schulstufen zu organisieren und alle Lehrer an Gesamthochschulen auszubilden. Ohne Veränderung der schulischen Praxis wird eine solche Ausbildungsreform allerdings nicht wirksam werden können.

In Frankreich wurde seit 1959 das dreigliedrige Schulsystem der Sekundarstufe I abgelöst durch die Einrichtung der CES: collèges d'enseignement sécondaire, die als additive Gesamtschulen zu verstehen sind. Die Erfahrungen mit diesen Gesamtschulen haben ergeben, daß die dort - bis zum Sommer 1974 praktizierte - strikte Differenzierung in drei verschiedene Niveaustränge die soziale Teilung der Gesellschaft wieder reproduziert und nicht zu mehr Chancengleichheit geführt hat. Gegenwärtig werden Formen flexibler Differenzierung mit Niveaugruppen erprobt.

Am französischen Oberschulsystem haben dagegen keine wesentlichen Veränderungen stattgefunden. In Frankreich ist die Lehrerbildung äußerst zersplittert, sie erfolgt nach Schulformen getrennt. Nur ein kleiner Teil der Lehrer wird an

Hochschulen ausgebildet. Eine durchgreifende Reform ist gegenwärtig nicht abzusehen.

Während in Frankreich Bildungsurlaub für Lehrer bereits gesetzlich verankert ist und es zumindest im Bereich der Mathematik mithilfe der I.R.E.M. ein weitverzweigtes Weiterbildungssystem für Lehrer gibt, gibt es in der BRD noch keine rechtliche Grundlage für Bildungsurlaub von Lehrern, sind auch die bisher geschaffenen institutionellen Möglichkeiten für Weiterbildung noch sehr wenig entwickelt.

MATHEMATIKUNTERRICHT IN DER SEKUNDARSTUFE II - PLAN UND WIRKLICHKEIT

von R. Stowasser

1. *Diskussion und Organisation der Reform der Sekundarstufe II*

Spätestens Ende der sechziger Jahre war den Lehrern klar geworden, daß sich das Gymnasium in einer offenen Motivationskrise befand. Lernunlustige Schüler - bestenfalls fremdmotiviert durch die Zielvorstellung, das Abitur zu bestehen, das ihnen im Rahmen des in der BRD herrschenden Berechtigungswesens den Aufstieg nach oben weist - hatten ihre Eltern ratlos gemacht und ihre Lehrer verunsichert. Lernunlust, weil Sinn und Wert der Schule für das Leben ernsthaft in Frage gestellt sind. Das hat man im weiteren Umkreis des raschen gesellschaftlichen Wandels, der soziale Normen und Tabus aufbricht und natürlich auch beim schwächsten Glied, den überkommenen Bildungsvorstellungen,nicht halt macht, unsentimental zu registrieren.

Schon seit 1945, vorzeitig, weil die Motivationskrise noch nicht artikuliert war, hat man ihr zu begegnen gesucht durch die Forderung nach mehr demokratischem Lernen in der Schule. Aber das hat sich in der Praxis bald verkürzt auf Lernen über Demokratie - statt sie in der Schule zu praktizieren. Von den vergeblichen Versuchen mit der sog. Schülermitverwaltung (SMV) kann dabei abgesehen werden.

Neuerdings will man die Lernunlust durch das Mittel der Differenzierung heilen. Man bietet Oberstufenschülern - freilich schon in der Verordnung beschränkte - Wahlmöglichkeiten außerhalb eines Pflichtbereichs an, damit sie Interessenschwerpunkte bilden können. Von der Idee der allgemeinen Hochschulreife, der Bescheinigung universeller Studierfähigkeit[1], die noch im sog.

1) Praktisch freilich drastisch eingeschränkt durch die zu geringe Kapazität der Hochschulen (numerus clausus).

Tutzinger Maturitätskatalog (1) inhaltlich fixiert war, hat man *einen* zögernden Schritt hin zu einem mehr profilspezifischen Hochschulzugang getan. Damit wird wenigstens der Weg zur Verzahnung von allgemeinbildenden und berufsbezogenen Bildungsgängen nicht versperrt.

Den organisatorischen Rahmen für die Oberstufenreform, deren auffallendstes äußeres Merkmal in der Auflösung des herkömmlichen Klassenunterrichts zugunsten von jahrgangsunabhängigen Halbjahreskursen (2-3stündigen Grund- und 5-6stündigen Leistungskursen) besteht, hat die KMK-Vereinbarung vom 7.7.72 (2) geschaffen.
Sie reguliert

1. die Anteile von Pflicht- und Wahlunterricht
2. die Leistungsmessung (nach einem für Lehrer gerade noch erlernbaren Punktsystem)
3. den Abschluß (= Abitur)

Die KMK-Vereinbarung fühlt sich den leitenden Zielsetzungen verpflichtet, die vor allem der Schulausschuß der Westdeutschen Rektorenkonferenz (3) und die Bildungskommission des Deutschen Bildungsrates (4) formuliert haben.

Die übergeordneten politischen Richtziele - Mündigkeit, demokratisches Handeln, individuelle Leistungsentfaltung, soziale Integration und Gerechtigkeit, Chancengleichheit - hat die Bund-Länder-Kommission expliziert und begründet (5).

Im einführenden Bericht zur KMK-Vereinbarung (2) werden die wesentlichen Punkte der Reformdiskussion seit 196o erwähnt. Schon die "Saarbrückener Rahmenvereinbarung" (KMK-Konferenz 196o) beabsichtigte durch eine "Verminderung der Pflichtfächer und die Konzentration der Bildungsstoffe ... eine Vertiefung des Unterrichts (zu) ermöglichen und die Erziehung des Schülers zu Selbständigkeit und Verantwortung (zu) fördern"[1].

---

1) Für NRW war das ein Rechenexempel der Modulararithmetik. Man machte aus drei Fächern - Geschichte, Erdkunde, Philosophie - einfach <u>ein</u> Fach: Sozialkunde. Drei Lehrer unterrichteten, gaben drei Noten, die zu <u>einer</u> Note durch arithmetische Mittelbildung mit Rundung zusammenzufassen waren. So hatte man dem Geiste der Saarbrückener Rahmenvereinbarung Genüge getan (?).

Die "Stuttgarter Empfehlungen" (KMK-Konferenz 1961) ergänzten und begründeten die Verminderung der Fächer: Der Oberstufenschüler soll, "propädeutisch in wissenschaftliche Arbeitsweisen eingeführt werden", damit er lerne, "mit Gegenständen und Problemen der Erfahrung, des Erkennens und des Wertens seinem Alter entsprechend sachgerecht umzugehen". Diese besondere Arbeitsweise hatte Methodenbewußtsein und Verfügbarkeit von Arbeitstechniken im Sinn.

Erwähnt wird der Vorschlag der Bildungskommission (1969) zur organisatorischen und curricularen Zusammenfassung von allgemeinbildenden und berufsbezogenen Schulwesen in der Sekundarstufe II, vor allem im Hinblick auf Kanalisierung der Abiturientenflut ("Wer heute nämlich Abitur macht, dem bleibt wenig anderes und nichts Besseres zu tun übrig als zu studieren"). Aber die Kultusminister weichen noch aus mit der Floskel "Studienbezogene Bildungsgänge sind mit stärkerem Praxisbezug auszustatten und die berufsorientierten Bildungsgänge mehr als bisher theoretisch zu fundieren und auf breitere Qualifikation hin anzulegen" (2), und sie verschieben die Entscheidung vielleicht ad calendas craecas (?) begründend mit "erheblichen Schwierigkeiten im Bereich des Curriculums, der Organisation und der Entscheidungsstrukturen".

Das Abitur (bald heißt es Abitur II) als allgemeine Hochschulreife - in der Einschätzung der Gesellschaft ein "Rassenmerkmal" - bleibt doch einstweilen dem gymnasialen Bildungsgang vorbehalten.

In den drei "Aufgabenfeldern", dem sprachlich-literarisch-künstlerischen, dem mathematisch-naturwissenschaftlichen, dem gesellschaftswissenschaftlichen soll doch wenigstens ein "Mindestmaß allgemeinverbindlicher Orientierungen und Einsichten" erreicht werden (2). D.h. speziellere Fachausbildung kann eben bei uns noch lange nicht den Anspruch auf Bildung erheben.

Dem mathematisch-naturwissenschaftlichen Aufgabenfeld ist dabei die wie folgt beschriebene Rolle zugewiesen. Es soll "Verständnis für den Vorgang der Abstraktion, die Fähigkeit zu logischem

Schließen, Sicherheit in einfachen Kalkülen, Einsicht in die Mathematisierung von Sachverhalten, in die Besonderheiten naturwissenschaftlicher Methoden, in die Entwicklung von Modellvorstellungen und deren Anwendung auf die belebte und unbelebte Natur und die Funktion naturwissenschaftlicher Theorien" vermitteln.

In Erfüllung dieser Aufgaben stehen dem Mathematikunterricht in den Jahrgangsstufen 12 und 13 im Durchschnitt

mindestens 1 1/2
höchstens ca. 6 1/2 Stunden pro Woche

zur Verfügung.

2. Lehrpläne seit 1968 - Reform der Inhalte

2.1 Rahmenrichtlinien der KMK (1968)

Was Gegenstand des Mathematikunterrichts in der Schule ist, wird bei uns kraft der Kulturhoheit der Länder durch Länderrichtlinien festgelegt, die sich ihrerseits im Freiraum bundeseinheitlicher Rahmenrichtlinien bewegen können.

Die KMK hat am 3.10.1968 solche Rahmenrichtlinien (mit Modernisierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen) verabschiedet (6).

Ein Vorspann von zwei Seiten Umfang behandelt:

I Gründe für die Modernisierung des MU
II Zielsetzungen der Modernisierung
III Mittel und Wege zur Modernisierung
IV Die Ausbildung und Fortbildung der Lehrer.

Zu I: Wir geben den Vorspann verkürzt wieder.

Als Gründe für die Modernisierung werden genannt: Anpassung an die Wissenschaftsentwicklung wegen der Bedeutung moderner mathematischer Betrachtungsweisen - und damit ist bourbakische

Strukturmathematik auf dem verflachten Schulniveau gemeint - für Wirtschaft und Leistungsgesellschaft und zum Begreifen der Bedingungen unseres modernen Lebens; auch um den Lehrermangel in mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächern zu beseitigen und für das wirtschaftliche Wachstum hinreichend viele Mathematiker, Naturwissenschaftler, Techniker zu gewinnen. Als Hinderungsgrund dafür wird die Kluft zwischen Schul- und Hochschulmathematik genannt.

(Die Argumentation allein vom Gesichtspunkt der Wirtschaft her, die schon in den Schriften der OECD zur Modernisierung der Schulmathematik zu finden ist, bedarf keiner ideologie-kritischen Durchleuchtung. Der Mensch wird kaum noch im Spannungsfeld zwischen individueller Entfaltung und Zurichtung auf gesellschaftliche Bedürfnisse gesehen).

Zu II: Neue Betrachtungs- und Denkformen, Schreib- und Sprechweisen werden genannt und danach gleich unvermittelt die Qualifikation "mathematische Wege selbständig zu beschreiten". Die "Zusammenschau der verschiedenen Teilgebiete unter übergreifenden Gesichtspunkten" wird als Ziel genannt, als Mittel dazu die Grundbegriffe Menge, Abbildung und Struktur (Gruppe, Ring,Körper, Vektorraum). Sie werden als das Wesentliche der Mathematik begriffen, als ihre Ordnungsprinzipien, die die Mathematik für den Schüler durchsichtiger machen können. An die "axiomatisierende Methode" soll die Schule - keinesfalls unvermittelt - heranführen. Wesentlich dafür erscheint die Abstraktion aus gleichstrukturierten Modellen.

Die Anwendungen - mit Nachdruck solche aus modernen Anwendungssituationen - werden nicht vergessen:"Die Einsicht in mathematische Strukturen und die Beherrschung der zugehörigen Kalküle müssen praktische Anwendungen einschließen. Damit wird das Lösen konkreter Probleme erleichtert."

Wir unterschlagen die noch weniger ergiebigen Anmerkungen zu den Punkten II und III und gehen über zu den eigentlichen Richtlinien, die zwar die in der Mathematikdidaktik im Sinne von Wittenberg verstandene, hier aber anders verwendete Vokabel, Themenkreise benutzt, sonst sich aber von den älteren Richtlinien nicht unterscheidet, die sich auf Stoffgebietswahlen ohne zugegebene Auswahlkriterien und Stoffkataloge beschränken, in denen die Lerninhalte stichwortartig nach der Art der Kapitelüberschriften von Lehrbüchern aufgelistet sind.

Einem Bundesrahmenplan kann man Abstinenz von curricularem Geist im Sinne Robinsohnscher Curriculumstheorie zugute halten und auch noch seine Dürftigkeit und Zusammenhanglosigkeit der Aussage im ganzen, denn ihm folgen die Richtlinien der einzelnen Länder auf dem Fuße, die ausfüllen könnten, was er offen läßt. Der derzeitige Stand der Curriculumsarbeit im Fach Mathematik läßt freilich auch von Seiten der Bundesländer kein wissenschaftlich begründetes und empirisch abgesichertes Mathematikcurriculum erwarten; ein noch dazu schulnahes, nach dem die Lehrer wirklich unterrichten könnten, ist außer Sicht. (Robinsohn hat gelegentlich ironisch angemerkt, daß er noch 40 Jahre für die Curriculumsforschung brauche).

Aber zurück zu den "Kapitelüberschriften" des Bundesrahmenplans vom Ende 1968!

Fünf Themenkreise sind für die gymnasiale Oberstufe vorgesehen:

1. Analysis
2. Vektorraum, affiner und metrischer Raum
3. Geometrische Abbildungen
4. Strukturen
5. Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, moderne mathematische Techniken.

Zu 5. sind gar keine Stichworte angegeben. Analysis hätte auch von einer Lehrplankommission von 195o, der noch kein bourbakistischer Wind in die Ohren blies, so wie hier beschrieben werden können. Als Beispiel einer solchen "Beschreibung" wird der Themenkreis 2 gewählt. Den Rahmen für den Unterrichtsinhalt stecken folgende Begriffe ab:

Vektorraum, Punktraum
(Lineare Unabhängigkeit, Basis, Koordinaten, Modelle von Vektorräumen)

Lineare Gebilde in Ebene und Raum
Skalarprodukt
Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes in Vektordarstellung.

Man könnte vielleicht das gute alte einschlägige Hochschulbüchlein von Bieberbach mit seinen Schülern auszugsweise durchnehmen?

Der Themenkreis 3 ist äußerst vage beschrieben durch: Kongruenz-, Ähnlichkeits-, affine, projektive Abbildung (Matrizen), Kegelschnitte (und ihre Verwandtschaft), Beispiel einer nichtlinearen oder nicht-elemententreuen Abbildung. Man weiß nicht einmal, ob man vorwiegend synthetisch oder analytisch verfahren soll.

Der Themenkreis 4 (Strukturen) endlich läßt die dürftigste Erfüllung zu. Ringe, Körper, Boolescher Verband, eine endliche oder nichteuklidische Geometrie sollen behandelt werden. Als Beispiele dazu wird auf die Erweiterung eines Zahlenbereichs hingewiesen, dann aufgezählt: ganze, rationale, komplexe, modulare Zahlen; Mengen-, Ereignisalgebra als Modelle.

Gottlob, die Schüler des *sprachlichen* Gymnasiums brauchen sich nur mit den Themenkreisen 1 und 2 zu befassen.

Sie staunen? Die KMK-Vereinbarung von 1972 hat die Typen der Gymnasien abgeschafft. 1968 haben die Kultusminister daran offenbar noch gar nicht gedacht.(?) Die Bundesrahmenrichtlinien für die Sekundarstufe II von 1968 sind schon wieder außer Kraft?

Sie haben daher auch die neu 1972 von den Bundesländern erstellten (vorläufigen) Richtlinien, Empfehlungen, Handreichungen oder Vorbereitungserlasse nicht durch ihren Rahmen einengen können. So ist eine farbige Palette von lehrplanartigen Produkten auf den Markt gekommen.

Die Zeit reicht nicht zur vergleichenden Analyse dieser Produkte. Wählen wir als Beispiel die vorläufigen Richtlinien unseres nördlichsten Bundeslandes aus (7) - aus Bequemlichkeit des Referenten, der sie zum Zwecke einer Analyse für das Zentralblatt der Mathematik (8) schon vor einem Jahr zu verdauen hatte, und weil sie den Vor(- oder Nach)teil der Kürze besitzen, was sich bei den angeblich wortkargen Norddeutschen fast von selber versteht.

2.2 *Vorläufige Richtlinien für den Mathematikunterricht in der Studienstufe des Landes Schleswig-Holstein (vom Kultusministerium herausgegeben im Juli 1972)* 1)

Das herausgegriffene Land hat auf die KMK-Vereinbarung vom 7.7.72 prompt reagiert.

Die Aufgabe, die Motivationskrise und Dysfunktionalität der gymnasialen Oberstufe im Hinblick auf die Hochschulstudien durch Differenzierung (Wahl individueller Schwerpunkte) mit der Absicht, Interesse zu wecken, Leistungssteigerung durch Intensivierung im Schwerpunktbereich zu erreichen, bessere Möglichkeiten zur Vorbereitung wissenschaftlichen Arbeitens zu schaffen - wie hat man diese Aufgabe im Fach Mathematik gelöst?

1. Durch Klasseneinteilung der Schüler

Die Schüler werden in Leistungsgruppen eingeteilt. Gruppe A (Mathematik als Leistungsfach): vier L-Kurse müssen mindestens belegt werden, darunter verbindlich die L-Kurse Analysis und Analytische Geometrie. Für die Gruppe B genügen vier G-Kurse, Analysis I muß dabei sein und entweder Analytische Geometrie oder Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Statistik (Mathematik als Reifeprüfungsfach). Der Rest der Schüler sammelt sich in Gruppe C: zwei G-Kurse genügen, Analysis I darf nicht fehlen. (Ohne Analysis kommt jedenfalls keiner durch. Hilft Auswandern?). Darüber hinaus gelten noch wenige Auswahlregeln: An der Geometrie darf man sich nicht sattmachen - höchstens zwei Wahlthemen aus diesem Bereich - und auch nicht zu viel Computermathematik treiben.

---
1) In 2.2 wird vielfach ohne Vermerk aus meiner Analyse (7) zitiert.

2. Erweiterung des Stoffes

"Die traditionellen Stoffe werden durch neuere Lernziele und Inhalte erweitert".

Die Lerninhalte der einzelnen Kurse werden ähnlich wie im Falle des Themenkreises Vektorraum aus den KMK-Richtlinien (1968) präsentiert, meist ausführlicher, insbesondere bei nichttraditionellen Stoffen, Inhaltsverzeichnissen von Lehrbüchern vergleichbar.

Als ein Beispiel für die Art der Lernzielformulierungen zitieren wir den gesamten Lernzielteil zum L-Kurs Boolesche Algebra.

Lernziele: Der Kursteilnehmer soll Einsicht gewinnen in den axiomatischen Aufbau der Booleschen Algebra. Er soll lernen, einfache Sätze aus den Axiomen herzuleiten und Boolesche Terme umzuformen. Er soll erkennen, daß Mengenalgebra, Teileralgebra, Aussagenalgebra und Schaltalgebra Modelle der Booleschen Algebra sind. Auch auf die Notwendigkeit einer Formalisierung der Sprache soll eingegangen werden.

Analysis - für alle Schüler verbindlich - wird im Vorsemester durch einen Grundkurs "Einführung in die Analysis" vorbereitet (Zahlenfolgen, Grenzwerte, Intervallschachtelungen, Funktionen, Stetigkeit, Begriff der Tangente, Ableitung, Differenzierbarkeit). Unter neuem Namen - "Grundlage der Analysis" wird derselbe Kurs verkauft, falls er durch einen systematischen Aufbau des Zahlensystems ergänzt wird. Der Leistungskurs Analysis bringt die seit langem in deutschen Schulen übliche Differential- und Integralrechnung, orientiert an den vorbourbakistischen Hochschulbüchern. Interessant ist die Technik, aus diesem Leistungskurs die beiden Grundkurse Analysis I und II zu gewinnen. Man halbiert einfach und streicht ein Stichwort: Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

Was bringen die anderen Kurse?

1. Traditionelle und moderne "*Analytische Geometrie*" findet man

unter drei Überschriften: A. Analytische Geometrie, B. Abbildungsgeometrie, C. Lineare Algebra mit Anwendungen.

A stellt die Begriffe Vektorraum, Affiner Raum, Euklidischer Raum in den Mittelpunkt; von Basen, Koordinaten bezüglich einer Basis, vom skalaren Produkt zur Metrisierung ist die Rede. Dann speziell im R^3: Darstellungen von Geraden und Ebenen, Inzidenzfragen, Abstände; Gleichungen für Kugel und Kreis (auch Tangenten); vom Kegel her noch die Gleichungen der Kegelschnitte. Im Grundkurs fehlen Kugel, Kreis, Kegelschnitte.

B ist dem Studium der von Abbildungsgruppen (Abbildungen des R^2 in sich) gewidmet. Die Abbildungen - Kongruenz-, Ähnlichkeits-, affine, projektive Abbildungen - werden durch Matrizen dargestellt und klassifiziert. Als Lernziel ist u.a. formuliert: Dem Kursteilnehmer "muß bewußt gemacht werden, daß durch die Anwendung der analytischen Methode die aus dem Schulunterricht bekannten einfachen Abbildungen klassifiziert und auf natürliche Weise erweitert werden können." Die üblichen Invarianten werden deutlich herausgestellt. Die Kegelschnitte erscheinen mit ihren affinen Eigenschaften und im Zusammenhang projektiver Abbildungen. Auch Sätze aus der projektiven Geometrie sollen - unter Verwendung homogener Koordinaten - bewiesen werden (Satz von Desargues, von Pascal u.a.). Bezeichnend für diesen Kurs ist der Literaturverweis auf das gute alte Buch von Kommerell: Vorlesungen über analytische Geometrie der Ebene (1941). Andere Hochschulbücher sind nicht genannt. Der Kurs lebt von Felix Kleins Ideen zur Ordnung der Geometrie.

C bringt den Matrizenkalkül motiviert durch die Beschäftigung mit Systemen linearer Gleichungen, dann ein Stück aus dem Gebiet der linearen Optimierung (bis zur Simplexmethode von Dantzig und zum Dualitätssatz), schließlich einen Abschnitt Matrixspiele (Grundbegriffe, determiniertes und nichtdeterminiertes Spiel, Äquivalenz des nichtdeterminierten Spiels mit Optimierungsproblemen). Analytische Geometrie bleibt in diesem Kurs am Rande (geometrische Lösung von Optimierungsproblemen mit 2 Variablen, Veranschaulichung von solchen mit 3 Variablen). Mit diesem Kurs sind gewiß neuere Lernziele und Lerninhalte gesetzt

2. Durchaus interessant ist auch der Kurs "*Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*". Im Grundkurs soll der Teilnehmer "elementare Begriffe und Verfahren der beschreibenden Statistik, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie und das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten sowie die wichtigsten Verteilungsfunktionen mit ihren charakteristischen Größen verstehen und anwenden lernen". Im Leistungskurs soll der Teilnehmer zusätzlich "an Verfahren zum Testen einer Hypothese oder auch an einfache Grundlagen der Theorie und Anwendung der Markoffschen Ketten herangeführt werden". Im Verzeichnis der Lerninhalte sind u.a. explizit genannt: Darstellung des Ereignisraums als Modell einer Booleschen Algebra, Kolmogoroffsches Axiomensystem, Ungleichung von Tschebyscheff, Bernoullisches Gesetz der großen Zahlen, im Zusammenhang der Markoffketten die Begriffe der linearen Algebra.

3. Computermathematik findet sich in den Kursen "*Boolesche Algebra*", "*Informatik*", *Numerische Mathematik*", die sich natürlicherweise zum Teil überlappen.
Die Lernziele für die Boolesche Algebra haben wir oben schon wiedergegeben. Aus dem Lerninhaltsverzeichnis entnehmen wir noch: Die Theorie soll vom Axiomensystem von Huntington ausgehen; nach Herleitung der wichtigsten Gesetze sind dann binäre Funktionen durch Boolesche Terme darzustellen und Normalformen zu behandeln; der Bezug zur Praxis ist besonders durch das Modell der Schaltalgebra gegeben (im Leistungskurs sollen redundante Schaltungen und ihre Minimierung nach Karnaugh oder Quine-McCluskey, Zuordner- und sequentielle Schaltungen behandelt werden).
Der Informatikkurs enthält größere Teile aus dem Kurs "Boolesche Algebra" orientiert am Lernziel "Einblick in den inneren Aufbau von Rechenautomaten" zu gewinnen. Danach soll der Schüler eine einfache maschinenorientierte Sprache kennenlernen, schließlich auch Grundkenntnisse einer problemorientierten Sprache erwerben. Im nächsten Unterrichtsabschnitt geht es um die Zurichtung mathematischer Probleme (größter gemeinsamer Teiler, Invertierung

von Matrizen, Annäherung von Nullstellen) zur Bearbeitung mit Rechenanlagen. "Dazu gehören die Algorithmisierung und die Darstellung des Algorithmus in einem Flußdiagramm wie auch die Übersetzung in die gewählte... höhere Sprache". Im letzten Abschnitt soll eine Einführung in die Informationstheorie gegeben werden im Zusammenhang mit Codierungen. "Ziel sollte es sein, anschaulich den Begriff der Entropie... zu erarbeiten". Die wesentlichen Lerninhalte dieses Leistungskurses füllen nahezu zwei Schreibmaschinenseiten. Dem Kursleiter wird aufgegeben, sinnvoll auszuwählen. Im Grundkurs wird im wesentlichen auf die Übersetzung eines mathematischen Problems in eine problemorientierte Sprache und auf die Einführung in die Informationstheorie verzichtet.
Auch der Leistungskurs "Numerische Mathematik" setzt für die Schule neue Akzente. Als globale Lernziele sind formuliert: Der Kursteilnehmer soll an geeigneten Beispielen "einsehen, daß... exakte Lösungsverfahren von der Seite der praktischen Durchführbarkeit her beurteilt werden müssen. Er wird sich mit Algorithmen und Näherungsverfahren auseinanderzusetzen haben, die vom Rechenaufwand her eine effektive Behandlung vieler Probleme erlauben". Die praktische Mathematik "zwingt ihn dazu, sich mit Problemen wie Konvergenzuntersuchungen von Näherungsverfahren, Restabschätzungen bei Abbruch von Grenzprozessen und anderen zu beschäftigen". Im Verzeichnis der Lerninhalte sind zum jeweiligen Problem jeweils mehrere Verfahren genannt. Behandelt werden sollen: Kreisberechnung (mit Rechtecken, Trapezen, regulären Vielecken), Gleichungen mit einer Variablen (Intervallschachtelung, regula falsi, Newtonverfahren), lineare Gleichungssysteme (Determinanten, Gauss-Algorithmus, Matrizeniteration), numerische Integration (Trapez-, Simpsonregel, Verfahren von Cotes und Romberg), Differentialgleichungen 1.Ordnung (Euler-Cauchy-, Runge-Kutta-Verfahren) und Potenzreihenentwicklungen. Des Rechenaufwands wegen "soll dieser Kurs nur mit Computern oder zumindest mit Handrechenmaschinen durchgeführt werden".

4. Den Grundkurs "Komplexe Zahlen und konforme Abbildungen",

zu dem keine Lernziele formuliert sind, kann man bequem nach Knopp, Elemente der Funktionentheorie (1949) S.6-71 und S.1o8-111 unterrichten (mit einigen Auslassungen!).

5. Lernziel und Lerninhaltsangaben zu den 5 Wahlthemen aus der Geometrie fehlen (vorerst).

Kritisches

Schleswig-Holsteins Richtlinien sind in vielerlei Hinsicht sehr vorläufig.

1. Sie leisten keine sichtbare Vorarbeit für die beschlossene organisatorische und curriculare Neugestaltung der gesamten Sekundarstufe II. Jeglicher Hinweis darauf fehlt, obwohl die Probleme vor der Tür stehen.

2. Selbst in dem eingeschränkten Bereich der Sekundarstufe II (gymnasiale Oberstufe) haben sich die Richtlinien wesentlichen curricularen Fragen nicht gestellt. Sie sind der Form nach Richtlinien älteren Musters, denen auch noch der früher übliche Vorspann mit sehr allgemein gehaltenen Richtzielen fehlt. Nun - wenn keine solchen Richtziele angegeben werden, dann braucht auch der sinnvollen Forderung der Curriculumtheorie nicht entsprochen zu werden, nämlich die Richtziele zu legitimieren, zielbezogene Methoden, Inhalte und Medien anzugeben, Kriterien zu nennen, anhand deren Feststellungen möglich werden in bezug auf das Erreichen der gesetzen Ziele.
Abstinenz von curricularem Geist verhindert zumindest die Produktion curricularer Modelle, die Kritiker als Handstrickarbeiten inkompetenter Lerngruppen taxieren könnten. (Unter der Herrschaft des Bloomschen Taxonomiebegriffs beispielsweise wurden bizarre Gebilde als Unterrichtssequenzen vorgelegt.)

3. Ältere Richtlinien (z.B. die nordrhein-westfälischen von 1963) enthalten zahlreiche methodische Empfehlungen lernpsychologische und methodologische Bemerkungen, Hinweise zu Unterrichtsformen und Arbeitsweisen. Fächerübergreifende Fragen wurden angeschnitten, vor allem solche der Koordination von Lerninhalten

benachbarter Fächer. In Schleswig-Holsteins neuen Richtlinien für die Studienstufe sind solche z.T. praktische Unterrichtshilfen nicht zu finden. Wir halten das für einen Mangel.

4. Globale fachspezifische Ziel- und Lerninhaltsangaben, die nach dem Willen der Richtlinienkommission sehr verschiedene Lernsequenzen bei gleichem Stoffkatalog je nach Auswahl und Akzentuierung zulassen, sind für eingehende fachdidaktische Analysen nicht sehr ergiebig. Wir unterlassen solche Analysen und begnügen uns mit einigen Bemerkungen:

a) "Die traditionellen Stoffe werden durch neuere Lernziele und Lerninhalte erweitert". Das ist der erklärte Hauptzweck der neuen Richtlinien. Sie unterscheiden sich von älteren Richtlinien durch Aufnahme neuer Stoffgebiete aus dem Bereich der Computermathematik. Andere Stoffgebiete (Numerische Mathematik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Komplexe Zahlen mit Anwendungen) waren früher am Rande angesiedelt, für selten durchgeführte Arbeitsgemeinschaften reserviert. Stoffkataloge dazu fehlten in der Regel. In den neuen Richtlinien sind diese Themenkreise katalogisiert, modernisiert und ein Stück vom Rande zur Mitte hin gerückt. Analytische Geometrie und Analysis bleiben freilich weiterhin dominant. Sichtbar wird aber auch der Trend, die alte analytische Geometrie umzugestalten. Den Weg hin zur linearen Algebra mit Anwendungen vornehmlich außerhalb der Geometrie hat die Hochschule längst vorgeschrieben. Unberührt von Neuerungen bleibt die Analysis. Stärker betont als in älteren Richtlinien wird der axiomatisch-deduktive Charakter der Mathematik (Modelle und Strukturen, Axiomensysteme für Vektorräume, Boolesche Algebren, Wahrscheinlichkeitstheorie, formale Deduktionen aus solchen Axiomensystemen). Mehr als bisher rückt anwendungsrelevante Mathematik in den Blickpunkt.
Das Bestreben, den Mathematikunterricht von der Seite der fachwissenschaftlichen Inhalte her zu modernisieren, findet in den neuen Richtlinien sichtbaren Ausdruck. Den Orientierungsrahmen hierfür liefert die Wissenschaft in ihrer derzei-

tigen Gestalt. Ein solcher Rahmen ist aber für die innere Reform des Mathematikunterrichts zu eng.

b) Die gewählte Form der Kursbeschreibungen läßt die Auseinandersetzung mit der gegenwärtigen didaktischen Literatur z.T. kaum noch erkennen. Das gilt insbesondere für die Analysiskurse. (Man vergleiche hierzu die projektierten niedersächsischen Analysiskurse. In diesem Zusammenhang sei noch erwähnt, daß z.B. elementare funktionalanalytische Gesichtspunkte zur Verklammerung von Analysis, numerischer Mathematik und linearer Algebra keine Beachtung finden.

c) Wir haben oben am Beispiel eines Kurses zur Booleschen Algebra den gesamten Lernzielteil wiedergegeben. Die Lernzielbeschreibungen der anderen Kurse sind von der gleichen Art: Vorwörter von Lehrbüchern - umformuliert mit Hilfe der sprachlichen Schemata: Der Kursteilnehmer soll... können, kennenlernen, wissen,... .
Die Curriculumtheorie fordert Kataloge von legitimierten, hierarchisierten und operationalisierten Lernzielen. Das ist Zukunftsmusik. Aber durchaus lehrreich ist der Vergleich der schleswig-holsteinschen "Vorwörter" mit den (vielleicht zu sehr detaillierten) Lernzielkatalogen in den Hessischen Rahmenrichtlinien (12).

5. Der Funktionszusammenhang von Lernzielen und -inhalten des Fachs und solchen des gesamten mathematisch-naturwissenschaftlichen Aufgabenfeldes ist gar nicht angesprochen. Angaben zur Vernetzung des mathematischen Kursangebotes fehlen. Ob das Kursangebot die "Vielfalt der individuellen Bedürfnisse und der gesellschaftlichen Erfordernisse in gleicher Weise" berücksichtigt (4a), ob es "individuell wählbare produktive Schwerpunkte" ermöglicht und "allgemeine verbindliche Orientierungen und Einsichten" schafft (3), steht darin. Aber ist das Kursangebot überhaupt flexibel genug auf die Gruppen zugeschnitten? *Müssen* Grundkurse aus Leistungskursen durch Streichung einiger Inhalte entstehen? Soviel wird freilich deutlich. Das Kursangebot *kann* einer gezielten Studienvorbereitung dienen, bringt mehr anwendungsrelevante Mathematik und

zeigt damit Ansätze zu einer besseren Einfügung der Schüler in den Wirtschaftsprozess.

6. Viele Fragen bleiben nach der Lektüre der neuen Richtlinien offen.
In Stichworten erwähnen wir:

a) Verrechnung der Einzelzensuren bei Abschlüssen
b) Kursfrequenzen (auch im Hinblick auf unterschiedliche Arbeitsformen)
c) Abstimmung der Mittelstufendifferenzierung auf das Kurssystem, Eingangsvoraussetzungen, Mindestvoraussetzungen für die Abschlüsse, curricularer Zusammenhang von Schule und Hochschule
d) Minimale Schülerzahl für ein effektives Kurssystem (Kooperation mit anderen Schulen, Stufenschule)
e) Integrationsmöglichkeiten für nichtgymnasiale Schüler (Durchlässigkeit).

Die neuen Richtlinien äußern sich dazu nicht. Soviel ist aber gewiß: Sie werden einen Rattenschwanz von ergänzenden Ministerialerlassen hinter sich herziehen.

7. Die annoncierte spätere Fassung der "Vorläufigen Richtlinien..." soll Erfahrungen und Anregungen der Kollegen berücksichtigen. Die gewünschte Mitarbeit der Lehrerschaft an der Richtlinienrevision setzt aber Einsicht in den Gesamtzusammenhang curricularer Fragen und ausreichende Aufklärung über Begründungs- und Entscheidungsprozesse voraus. Dazu hätten die neuen Richtlinien einen entscheidenden Beitrag liefern sollen.

Zusammenfassung

Durch Schleswig-Holsteins "Vorläufige Richtlinien für den Mathematikunterricht in der Studienstufe" wird das Kurssystem ohne genügende Hilfen für die Planungsarbeit in den einzelnen Schulen verordnet. Sie liefern vage Kursbeschreibungen in der Art älterer Lehrpläne, gewähren keinen Einblick in den Zusammenhang curricularer Fragen. Die fachspezifischen Lerninhalte werden modernisiert. Anwendungsrelevante Mathematik wird betont.

Das reicht als Grundlage für eine innere Erneurung des Mathematikunterrichts in der gymnasialen Oberstufe nicht aus.

2.3 Anmerkung zur Lehrplanentwicklung in anderen Bundesländern

Andere Bundesländer haben anders reagiert. Lieber mit "Empfehlungen" wie z.B. NRW, das eine 159 Seiten umfassende Beschreibung eines möglichen Kursangebotes liefert, verfaßt von 6 Gymnasiallehrern (9). Sie enthalten nach Meinung der Verfasser "wenigstens für die Kursfolge, die den obligatorischen Kern des Lehrgangs bildet, eine Beschreibungsart..., die das Anspruchsniveau des Unterrichts hinreichend kennzeichnet", nämlich "Angabe der Eintrittsvoraussetzungen, kurze Beschreibung der Zielsetzung, ausführliche Beschreibung des Unterrichtsplanes mit Wochenterminierung und Vorschlag zur Einordnung schriftlicher Arbeiten, methodische Erläuterungen synchron zum Unterrichtsplan, Literaturhinweise für Schüler und Lehrer". Sie bedauern, daß sie auf Beschreibung durch operationalisierte Lernziele verzichten mußten (Kataloge so langweilig wie Telefonbücher, die Lehrer doch nicht lesen, so wenig wie die Präambeln der Richtlinien) und auf Beifügung von Standardklassenarbeiten zur Normierung des Anspruchsniveaus.

Niedersachsens "Handreichungen" (1o) hingegen sind unter dem starken Eindruck der Bloomschen Taxonomie gefertigt. Die Verfasser schlüsseln z.B. einen Analysiskurs bis zu kognitiven Lernzielen 4.Ordnung auf. In Hinsicht auf affektive Lernziele verzichten sie freilich von der 2.Ordnung an, weil "sich deutlich ein Mangel an Erfahrung bei allen Mitgliedern der Gruppe ab(zeichnet)". Die versuchte Beschreibung des Analysiskurses hat viele Mängel. "Die Verquickung von stofflichen und lernpsychologischen Gesichtspunkten erschwert die Lesbarkeit erheblich. Mathematisch Zusammengehöriges muß oft an den verschiedensten Stellen aufgesucht werden. Auch führt das Bestreben, die Lernzielformulierungen stets dem Bloomschen Raster anzupassen, häufig zu merkwürdigen Wendungen oder sogar, dem Schema zuliebe, zu regelrechter Sprachverhunzung" (11).

Aber lassen Sie uns das Kapitel "Länderlehrpläne" abschließen mit dem Hinweis, daß die Kritik der Schleswig-holsteinischen Richtlinien, wenn auch nicht in Einzelheiten, so doch in ihren wesentlichen Stücken auch die Lehrplanarbeit der anderen Länder trifft.

3. *Anmerkungen zur Situation der Lehrer und Lehrplanmacher*

Reformen werden nicht durch bedruckte Papiere gemacht. Da sie zudem in immer kürzeren Abständen aufeinanderfolgen und die vielfach genannte administrative Verstörung der Lehrerschaft, verursacht durch behördliche Erlaßflut, wächst, haben die Reformpläne wenig Begeisterung erweckt. Man führt sie durch, weil das zu den Amtspflichten gehört, murrt freilich über die vielen Konferenzen an sonst freien Nachmittagen, die doch nur lästige Organisationsfragen betreffen. Die Diskussion der Inhalte hat an unseren Gymnasien vielfach aufgehört. Sie findet in halboffiziellen oder privaten Zirkeln statt, in denen handgestrickt wird.

Von Unterstützung solcher Reformvorhaben durch großzügige Maßnahmen der Lehrerweiterbildung ist nichts zu spüren. Das derzeitige Weiterbildungsmodell in NRW, dem größten Bundesland, ist eine Aktion der "Wanderprediger" in den Schulbezirken. Sie erfaßt in Vorträgen mit Diskussion fachdidaktischen Inhalts etwa ein Fünftel der Gymnasiallehrer an 2-3 Nachmittagen im Jahr Ein paar Ausgewählte haben das Glück auch einmal zu einer einwöchigen Fortbildungstagung in die Landesstelle MNU (Recklinghausen) eingeladen zu werden.

Die Mathematiklehrer lesen wenig Fachdidaktisches, lieber schon ein richtiges Mathematikbuch - ein wissenschaftliches. Das hat gute Gründe. Die Herausgeber der fachdidaktischen Zeitschriften klagen über die geringe Anzahl von Arbeiten, die wirklich unterrichtspraktisch verwertbare Gegenstände interessant behandeln. Auf neue unterrichtswissenschaftliche Arbeiten, die curriculare Fragen behandeln, reagieren die Lehrer schon wegen der Sprachbarrieren allergisch. Curriculumprodukte aus dem Ausland sind ihnen nicht zugänglich, auch weil die finanziellen Mittel für die Lehrerbüchereien völlig unzureichend sind.

Lehrer lernen auch wenig voneinander, weil sie ihre Probleme verdrängen, statt zu erörtern. Sie isolieren sich aus Angst vor Kritik, die ihre ganze Person in Frage zu stellen scheint, und sind kaum bereit zu kooperieren. Eine "Verzahnung der Inhalte des mathematisch-naturwissenschaftlichen Aufgabenfeldes" bleibt so frommer Wunsch.

Bald nach Ausrufung des Bildungsnotstandes überfüllte Gymnasien, z.T. erhebliche Kürzungen des Mathematikunterrichts aus Lehrermangel, Furcht vor sozialem Abstieg - das alles schafft gewiß keine günstigen Bedingungen für eine grundlegende Reform des MU (keinesfalls nur der fachwissenschaftlichen Inhalte, die uns die Lehrplanmacher aufgezählt haben).

Erinnern wir uns, daß die *Motivationskrise* durch Reformmaßnahmen beseitigt werden sollte, und betrachten wir das bisherige Produkt: Nur fachwissenschaftlich orientierte Kursbeschreibungen durch Inhaltsverzeichnisse mit evtl. fachdidaktischem Kommentar oder aufgeschlüsselt nach möglichst operationalisierten fachlichen Lernzielen.

Gibt das wenn auch nur eine vorläufige Antwort auf die Herausforderung?

Die Lehrplanmacher verdienen keine Schelte. Sie haben unter großem Zeitdruck diese Notpläne gemacht "mit Fachkompetenz und intellektueller Redlichkeit" (v.d.Lieth) ohne hinreichende Entlastung von ihren sonstigen Amtspflichten, aber auch im Stich gelassen von allen, die kraft ihres Amtes berufen sind, Lehrplanentscheidungen durch Forschung vorzubereiten und zu begründen.

LITERATUR

(1) H. SCHEUERL (Hrsg.): Probleme der Hochschulreife. Tutzinger Gespräch (1-3). 1962

(2) Vereinbarung zur Neugestaltung der gymnasialen Oberstufe in der Sekundarstufe II. (Neuwied; Luchterhand 1972)

(3) H. SCHEUERL, Kriterien der Hochschulreife, in: Zeitschrift für Pädagogik 1969/H.1

(4) a) Deutscher Bildungsrat, Empfehlungen der Bildungskommission: Zur Neugestaltung der Abschlüsse im Sekundarschulwesen. (Stuttgart: Klett)

b) Dto.: Strukturplan für das Bildungswesen (Stuttgart: Klett)

(5) Zwischenbericht der Bund-Länder-Kommission für Bildungsplanung an die Regierungschefs des Bundes und der Länder über den Bildungsgesamtplan und ein Bildungsbudget (vom 18.10.71)

(6) Empfehlungen und Richtlinien zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen. Beschluß der Kultusministerkonferenz vom 3.10.1968.

(7) Vorläufige Richtlinien für den Mathematikunterricht in der Studienstufe (Juli 1972, Kultusminister des Landes Schleswig-Holstein)

(8) R. STOWASSER, Analyse von (7), in: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 4/73

(9) Empfehlungen für den Kursunterricht im Fach Mathematik, in: Schulreform NW, Sekundarstufe II, Arbeitsmaterialien und Berichte, Heft 12 : Curriculum Gymnasiale Oberstufe, Mathematik (Nordrheinwestfälisches Kultusministerium 1972)

(10) Handreichungen für Lernziele, Kurse und Projekte im Sekundarbereich II für das mathematische und naturwissenschaftliche Aufgabenfeld (C) (Dez.1972, niedersächsisches Kultusministerium)

(11) R. STOWASSER u. K. BREINLINGER, Analyse von (10), in: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 4/73

(12) Hessische Rahmenrichtlinien für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I (1972) *oder* H. POSTEL, Probleme der Entwicklung von Richtlinien und Lehrplänen, in: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 4/1972/H.3

BERICHT ÜBER DIE FORSCHUNGSARBEITEN

von G. Brousseau, IREM Bordeaux

I - *Tätigkeitsbereich:* Mittel der Beobachtung

Das IREM de Bordeaux ist nach dem Grundschema aufgebaut, das auf dem Kolloquium von Amiens im Februar 1968 in einem Referat über die "Rahmenbedingungen eines Experiments im Mathematikunterricht" (1) dargestellt worden ist. Der Anbau der verschiedenen, erforderlichen Einrichtungen wurde 1974 abgeschlossen (2), (3), (4).

Das System umfaßt:

- ein Beobachtungszentrum, d.h. eine Gruppe von Personen, deren Aufgabe es ist, die Arbeiten zu koordinieren und die verschiedenen, notwendigen Hilfsmittel, mit denen die Experimente und Beobachtungen (5) durchgeführt werden können, einsatzbereit zu halten.
- Dieses Zentrum verfügt über ein besonderes Gebäude, in dem Beobachtungen und die direkte Erfassung der Daten (5) durch Computerterminals erfolgen können.
- Das Gebäude befindet sich auf dem Gelände einer Volksschule mit Sonderstatus (6), wo die Forscher ihre Versuchspläne in Kontakt mit den Lehrern und Schülern entwickeln können. Bei der Schule handelt es sich nicht um eine "Experimental-", "Pilot-", "Modell-" oder "Probeschule", auch nicht um eine "Anwendungsschule". Die Schule ist so gewöhnlich wie möglich sowohl im Hinblick auf die angewendeten Methoden als auch das Leben der Kinder.
- Eine Reihe von Experimentierfeldern, von Experimentierschulen, angeschlossenen Schulen, Klassen ... stehen nach besonderem Abkommen mit der Verwaltung für die Durchführung der Experimente gemäß diesen Versuchsplänen zur Verfügung; hier zeigt es sich, ob didaktische Thesen durch die Praxis erhärtet oder hinfällig werden, und hier werden auch die Unterla-

lagen für die praktische Anwendung erarbeitet.

- Ein System direkter Beziehungen, Mathematische Clubs (7) usw .... sollen die Verständigung mit den Lehrern der jeweiligen Regionen erleichtern und sie zu einer freiwilligen Mitarbeit bei den Forschungen und Reformversuchen anregen.

II - *Beobachtungsmethoden*

Jeder Bereich dieses Systems verfolgt seine eigenen methodologischen Studien und Forschungen, wie z.B.:

- Beobachtungsmethoden (8)
- Spezielles Lehrmaterial (5)
- Beschreibung der Struktur der Gesamtheit der didaktischen Daten
- Erfassung der (zu handhabenden) Daten (Thema des dritten Elektroniklehrgangs) (8a)
- Angepaßtes System zur Datenspeicherung Runsad (9a)
- Ausdrucksweisen bei der Erstellung von Unterprotokollen (Vauquelin - Rouanet - Brousseau)
- Behandlung des Unterrichtsstoffes (10)
- Die Soziologie der Beobachtung im Schulmilieu (Peres)
- Analyse der Schülersprache (11)
- Analyse der Kommunikation (2 Diplome in Schulpsychologie) (12)
- Motivationsanalyse (13)

um nur einige der abgeschlossenen Originalarbeiten über Themen aufzuführen, für die es an vorbildlichen Verfahren mangelte.

- Was die didaktischen Arbeiten für die Schüler (14) betrifft, die wir erstellen, so werde ich sie in dieselbe Kategorie einstufen (sie enthalten nur abgeschlossene Teile aus unserem Forschungsprogramm).

Natürlich werden diese methodologischen Studien im Hinblick auf Arbeiten im Bereich der Mathematikdidaktik durchgeführt, die vor allem die nachstehenden Gegenstände betreffen: Lehren des numerischen Rechnens in N, Lehren der Struktur von P (E), Lehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Statistik, der

Topologie auf dem elementaren Niveau.

Die genaue klinische Beobachtung der Reaktionen einer Klasse auf die grundlegenden Probleme der Mathematik bleibt die wichtigste Methode. Sie ist sowohl für die Relevanz der Forschungen als auch für die Ausbildung der Wissenschaftler von zentraler Bedeutung.

III - *Analyse der Didaktik der Mathematik*

Die Grundlagen der didaktischen Analyse, die Begriffe Situation, Motivation, Antwort, Spiel, Strategie des Schülers, Unterrichtsprozeß, Strategie des Lehrers, formale Didaktik ... sind gleichzeitig der Gegenstand theoretischer (z.B. im Rahmen der Spieltheorie "Mathematikdidaktik", nicht veröffentlicht), (17), (17a), (18), numerisches Rechnen (19) usw ... sowie praktischer Studien der Semiologie (15), ja sogar der Psychoanalyse (16).

Unsere Beschäftigung mit der Didaktik der Mathematik verläuft im wesentlichen auf den beiden folgenden Bahnen:

1 - Untersuchung der pädagogischen Situationen von Schülerstrategien sowie ihre natürliche Entwicklung bis hin zum Gebrauch und zur Aneignung mathematischer Theorien (15) (Prozeß der Mathematisierung)

2 - Untersuchung der Strategien des Lehrers, seiner Wahrnehmung der didaktischen Situationen und ihrer Konsequenzen (20) (im Januar 1974 in Orléans gehaltener Vortrag wird beim INRDP[1] veröffentlicht)

IV - *Prozeß der Mathematisierung*

Bei der Untersuchung der Mathematisierungsprozesse haben wir drei Typen von Beziehungen des Kindes zur Umgebung und daher drei Modelle didaktischer Situationen und drei Entwicklungstypen dieser Situationen unterschieden:

---

1) Institut National de Recherche et de Documentation Pédagogiques.

die Dialektik der Handlung
die Dialektik der Formulierung
die Dialektik der formalen Bewährung

und wir haben versucht, diese Arten der Dialektik an möglichst vielfältigen mathematischen Gegenständen und auf den unterschiedlichsten Niveaus in Gang zu setzen und zu untersuchen (21), (22) ... (19).

Dies hat uns z.B. dazu geführt, die Phänomene der Kommunikation bei der "Verbreitung" des Wissens innerhalb von Schülergruppen und die Beziehungen dieser Phänomene zum Unterricht zu untersuchen.

Wir konnten auch die informationellen Merkmale einer Sprache oder einer Struktur untersuchen.

Mlle. J. Pargue untersuchte die Rolle der Sprache beim Lösen von Problemen, indem sie die Standpunkte von Bruner, Vigotsky und Brousseau (23) miteinander verglich.

V - *Informationelle Merkmale, die mathematischen Formalisierungen*

Wenn die Häufigkeit des Gebrauchs jedes elementaren Begriffes oder jedes Symbols in einer gegebenen didaktischen Situation bekannt ist, handelt es sich darum - wie in der Informationstheorie - für jede vorgeschlagene Kodierung oder Struktur informationelle Parameter und schließlich einen durchschnittlichen Manipulationsaufwand (Zeit, Anstrengung bei der Formulierung, ... Unsicherheit) zu ermitteln, z.B. könnten die Eigenschaften als Repräsentanten einer meßbaren Einsparung erscheinen.

Die Verwendung einer Struktur erlaubt es, die Ungewißheit des Gegenstandes zu reduzieren oder die Zuverlässigkeit seiner Algorithmen zu verbessern - Studie (20). Die Einsparung an Manipulationsaufwand oder an Ungewißheit, oder der Gewinn an durch Definitionen, Eigenschaften, Sätze erhaltener Zuverlässigkeit wird durch eine Zunahme der Komplizierung des Kodierungsaufwandes im Unterricht aufgewogen. Die These würde lauten, daß natürliche Vorgänge der Erfindung von Komplizierungen oder Vereinfachungen von Strukturen, Kodeänderungen usw. dann ins Spiel kommen, wenn die informationellen Merkmale einen bestimmten Bereich verlassen.

VI - *Lehrerstrategien*

Wir versuchen ferner, Studien hinsichtlich der Lehrerstrategien - globale oder spezifische - durchzuführen und auf dieser Grundlage die vom Lehrer konzipierten und verwendeten Unterrichtsmodelle zu untersuchen. Beispielsweise gehen die Lehrer beim Unterrichten des numerischen Rechnens nach den folgenden Regeln vor:

R_1 Die aufeinander folgenden Repertoires der Schüler (die Tabellen im Augenblick t) bilden zusammen eine wachsende durch Inklusion geordnete Reihe von Mengen.

R_2 Der Lehrer lehrt nur das, was in der Form behalten werden soll, wie es gebraucht wird.

R_3 Um zu lernen, wie man einen komplexen Algorithmus zustande bringt, muß zunächst das Ausführen der Unteralgorithmen erlernt werden.

R_4 Die Zuverlässigkeit von Algorithmen im Unterricht (Prozentsatz der Erfolge) darf 80% nicht unterschreiten.

R_5 Die Ungewißheit über die Gegenstände muß zwischen zwei Schwellen bleiben.

$U \geq S_M$ wenn nicht, ist der Gegenstand völlig dem Zufall unterworfen;

$U \leq S_M$ wenn nicht, ist der Informationsertrag zu gering ... usw.

Wir sind bestrebt zu beweisen, daß alle diese Regeln nicht unantastbar und auch nicht unumstößlich sind, obwohl sie in ihrer Gesamtheit ein System bilden, von dem sich der Lehrer im allgemeinen nicht loslösen kann.

VII - *Abhängigkeit und didaktische Wechselwirkungen*

Eines der Probleme, mit denen wir uns augenblicklich in diesem Bereich auseinandersetzen, betrifft die Gründe, die den Lehrer dazu bewegen, die Schüler eine bestimmte Tätigkeit vor einer anderen durchführen zu lassen.

Eine Erhebung hat es ermöglicht, die Arten der berücksichtigten didaktischen Abhängigkeiten zu erfassen, und aufgrund des Fortschreitens eines Experiments des INRDP stellten wir Matrizen für die Vorhersage von Abhängigkeiten auf. Wir sind dabei, diese Matrizen mit der Matrix Korrelation, die die Erfolgsprozentsätze in den Klassen untereinander haben, zu vergleichen. (Bei dieser Analyse gerät man übrigens in Konflikt mit dem theoretischen Problem, den sogenannten "gebundenen Verteilungen").

43

Literaturverzeichnis

(1) Rolle des IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques)

(2) Was ist ein IREM

(3) Statuten des IREM

(4) Entstehungsgeschichte des Projekts

(5) Einrichtungen des Beobachtungszentrums des IREM Bordeaux

(6) Modalitäten für die Zusammenarbeit zwischen der Schulgruppe Jules Michelet in Talence und dem IREM Bordeaux

(6a) Forderung nach Einrichtung einer Elementar-, und Vorschule als Pilotschule

(7) Tätigkeitsbericht des Club Mathématique

(8) Die Beobachtung an der Schule Jules Michelet

(8a) Studie zur Datenerfassung in den pädagogischen Spielen und Einrichtung eines Apparats für das Spiel "Türme von Hanoi" Dissertation des dritten Elektronikzyklus, C. Bourcy

(9) Beobachtungen und Forschungen im Bereich des Mathematikunterrichts, G. Brousseau

(9a) Programm Runsad

(1o) Beispiel zum Grundschulunterricht

(11) Eine Untersuchung über die Analyse der Redeweise

(12) Einfluß von verschiedenen didaktischen Voraussetzungen auf die Entdeckung einer Strategie durch 9- bis 11-jährige Kinder, A.M. und G. Lamarque
Diplom in Schulpsychologie 1973, Bordeaux

(12a) Studie über den Einfluß der Kommunikation auf den Erwerb von Kenntnissen in Schülergruppen des ersten Jahres des 'cours moyen', M. Restes, Diplom in Schulpsychologie 1974, Bordeaux

(13) Untersuchung über die Indices von Schülermotivation während einer Mathematikstunde

(14) Vorbereitungskursus. Unterrichtsstunden und Übungen

(14a) Ausbildung der Mathematiklehrer für den Elementarschulunterricht (Band I)

(15) Der Prozeß der Mathematisierung, G. Brousseau 197o

(16) Mathematik und Affektivität, G. Dumas 1973

(17) Die Erziehungsmaschine (??) für den 'course á 7', MEC 7,. Bulletin IREM (Heft 11)

17a) Daten für die Aufstellung eines Unterrichtsmodells und für eine Analyse der Tätigkeit im 'course á vingt', J. Maysonnave 1974 (Heft 14)

(18) Kann man die Berechnung von Produkten aus natürlichen Zahlen verbessern, (Heft 13), G. Brousseau 1973

(18a) Notizen über das Lehren der Operationen bei den natürlichen Zahlen, (Heft 13), G. Brousseau 1973

(19) P(E) 'cours moyen 2' , (Heft 14), N. und G. Brousseau 1974

(2o) In Orléans gehaltener Vortrag; wird 1974 veröffentlicht

(21) Wer wird zwanzig sagen

(22) Durch zwei Zahlen erzeugte Menge

(23) J. Parque - Studie über die verbale Kommunikation bei der Lösung von Problemen in der Gruppe - Mémoire de Maîtrise, Clermont-Ferrand

ZUR ENTWICKLUNG DES MATHEMATIKDIDAKTIKER-TEAMS E. GALION

von Jean Carrier und René Gauthier

Alles hat ein Jahr vor dem Mai 1968 begonnen ...
1966/1967 wurde - recht diskret - ein erster Bericht der ministeriellen Kommission zur Reform des Mathematikunterrichts veröffentlicht. Ein Projekt dieses Programms, für die 6. und 5. Klasse, sollte breit experimentell erprobt werden, vor seiner endgültigen Anwendung im Unterricht. Das Institut Pédagogique National (das spätere INRDP) sollte diese Erprobungsphase vom Oktober 1967 an organisieren.
Zahlreiche Lehrer erwarteten eine Reform, sie forderten sie aus eigenem Antrieb, wie es die Arbeiten, die Tagungen, die Veröffentlichungen der Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public bezeugen.
In der Region von Lyon waren wir ungefähr 40 Leute, die von den verschiedensten Ansichten ausgingen und von den verschiedensten Orten kommend sich bei Versammlungen der APMEP getroffen hatten, bereit an dieser Erprobungsphase teilzunehmen, unsere Zeit und unsere Energie einer uns dringlich erscheinenden Unternehmung zu widmen.
Die Reform des Lehrplans erschien uns als eine wichtige Angelegenheit, aber wir dachten, daß sie begleitet sein müßte von einer gründlichen Veränderung der Arten der Kommunikation, der Haltung der Lehrer vor der Klasse, der Schüler-Lehrer-Beziehungen, in einem Wort: der "Pädagogik".
Die Experimentierphase, die von dem IPN organisiert wurde und ganz offiziell von der ministeriellen Kommission empfohlen worden war, bot uns die Gelegenheit zu einem solchen Versuch.
Der Frühling unterstützte unsere Pläne; eine Art von kommunikativem Enthusiasmus besorgte den Rest.
Das sogenannte Lyoner Team bildete sich spontan im Juni 1967.
Um das folgende Schuljahr vorzubereiten, sah man dann

Universitätsassistenten und Fachlehrer sich den Problemen des Unterrichts in der 6. Klasse widmen, gemeinsam mit den (nicht fachspezifisch ausgebildeten) Lehrern dieser Schulstufe und Aushilfslehrern.

Ein Teamgeist bildete sich.

Von Galion war zu diesem Zeitpunkt keine Rede, noch weniger von einer Publikation. Aber es schien uns wesentlich, ein Problem von solchem Umfang in einem Team, einem großen und offenen Team anzugehen. Sehr schnell bildeten sich die folgenden Ideen heraus:

1. Idee:
   Soweit nur möglich den schulmeisterlichen Umgang mit den jungen Schülern beseitigen, ebenso wie das traditionelle Schulbuch, den Träger eines erstarrten und lebenslosen Dogmas.
2. Idee:
   Die Schüler in Gruppen arbeiten lassen, in aktiver Weise, wobei jede Gruppe nach ihrem Rhythmus die fundamentalen Begriffe entdeckt, die in den für die Schüler verfertigten Arbeitsmaterialien enthalten sind.
3. Idee:
   Periodisch (alle vier Jahre) diese Arbeitsmaterialien überarbeiten, sie anpassen und im Lichte der gemachten Erfahrungen neu bearbeiten.
4. Idee:
   Regelmäßig das Team sich treffen lassen zur Auswertung der Beobachtungen und zur Fortsetzung der gemeinsamen Arbeit.

Wir waren überzeugt, und sind es heute noch, daß die Haltung des Lehrers vor der Klasse sich ändern muß. Der Lehrer muß von seinem Podest heruntersteigen, er muß aufhören, derjenige zu sein, der zu einem anonymen Wesen - der Klasse - spricht, er muß sich mit den einzelnen Arbeitsgruppen beschäftigen, sie beraten, sie anleiten, ihnen helfen zu verstehen.

Der Schüler muß aufhören, sich zu langweilen, er darf sich nicht mehr darauf beschränken, zuzuhören, um das in dem folgenden Kurs wiederzugeben, was er vorher beim Zuhören verstanden hat.

Er muß suchend lernen, er muß zusammen mit anderen suchen, er muß aktiv sein.
Wir haben das nicht erfunden. Andere haben das alles schon vor uns gesagt. Aber wie viele praktizieren es?
Die Experimentierphase bot uns die Möglichkeit, unsere Ideen in die Tat umzusetzen in ungefähr 40 Klassen der Region von Lyon ab dem Schuljahrsbeginn 1967, mit einem neuen Lehrplan, mit der Möglichkeit des Erfahrungsaustausches mit anderen Teams in verschiedenen Regionen.
Im Mai und Juni 1967 redigierten wir die ersten Arbeitsmaterialien für das kommende Schuljahr (Relationen - Mengen - Zahlsystem). Zu diesem Zeitpunkt mußte noch alles gemacht werden. Uns stand kein französisches Buch zur Verfügung, auf das wir uns hätten stützen können, keine präzise Erfahrung.
Die "Mengenlehre" in der 6. Klasse!!
Die ersten Texte, teilweise während der Sommerferien diskutiert, wurden gedruckt von dem Centre Régional de Documentation Pédagogique (CRDP), in den Schulen verbreitet und durch unsere Bemühungen innerhalb der Klassen verteilt.
Während dieses ganzen Schuljahres, und auch der folgenden, lief die Arbeit der Gruppe folgendermaßen ab:
Erste Redaktion durch eine Gruppe von einigen Kollegen, Diskussion, neuerliche Redaktion, neue Untersuchung, dann Fertigstellung, Druck, Verteilung und Erprobung. Einige "Arbeitsblätter" wurden bis zu vier-oder fünfmal überarbeitet.
Wir verfügten über kein Geld, keinen Kredit, über keinerlei materielle Hilfe, mit Ausnahme derjenigen des CRDP Lyon, das die endgültige Reproduktion der Schülermaterialien absicherte.
Die Arbeit in den Klassen nahm eine völlig andere Form an.
Das Verhalten der einen und der anderen veränderte sich in grundsätzlicher Weise, unsere Schüler kamen mit einer Freude zum Mathematik-"Kursus", die sie nicht mehr gehabt hatten.
Die Eltern, zuerst erstaunt, kamen um sich zu informieren zu Veranstaltungen, die wir organisiert hatten, um unsere Ziele zu erklären.
Kann diese neue Arbeitsform auf andere Klassen, andere Schüler übertragen werden? Wie kann der isolierte Lehrer

daraus Gewinn ziehen, der nicht die Möglichkeit hat, bei einem Team mitzuarbeiten? Kann man in dieser Weise eine solche handwerkliche Arbeit fortsetzen oder ist sie aus Mangel an Geld zum Scheitern verurteilt?

Im März und April 1968 stellte sich außerdem die Frage einer eventuellen Publizierung der Materialien über einen Verlag. Aber ein Buch mit Arbeitsblättern für die 6. Klasse zu publizieren setzt die Bereitschaft voraus, bis zur 3. Klasse weiterzumachen. Wir waren uns vollständig dessen bewußt, daß wir uns in ein System mit sehr einschränkenden Bedingungen hineinbegeben müßten. Es würde vielleicht Autorenrechte geben, Profit, Geld: würde ein Team aus guten Freunden das überstehen? Die einzige mit unseren Absichten verträgliche Lösung war die Gründung einer nicht auf Gewinn ausgerichteten Assoziation, geleitet nach den Grundsätzen des Gesetzes vom Juli 1901. Ihre Satzung wurde im Juni 1968 bei der Präfektur des Departements Rhône niedergelegt. Keines seiner Mitglieder darf individuell irgendein Autorenrecht beanspruchen. Die Assoziation muß alle ihre Einnahmen ausgeben für Maßnahmen, die "geeignet sind, den Mathematikunterricht und die pädagogische Forschung zu entwickeln".

Außerdem hofften wir damals, uns eine neue Schreibmaschine kaufen zu können, eine Abzugsmaschine, und einige Packen Papier. ...

Das Manuskript für Galion, 6. Klasse war im Juni 1968 fertig. Galion 6 erschien im Oktober des gleichen Jahres.

Sich in die Herausgabe von Schülermaterialien zu stürzen, bedeutet rauhe Erfahrungen zu machen. Wir mußten nunmehr produzieren: Jedes Jahr mußte ein neues Buch mit Arbeitsblättern dem vorhergehenden folgen. Es ist kein Zweifel, daß darunter die pädagogische Erprobung zu leiden drohte. Außerdem übte die Verbreitung auch Zwänge auf die Form aus. Die Tatsache der beschränkten Zeit hat zur Konsequenz, daß mehr Gewicht auf die Redaktionsarbeit gelegt wird, zum Schaden der praktischen Erprobung.

Es gab auch schwere Enttäuschungen: Das Herausgeberteam wollte ein Instrument für praktische Arbeit, klar und billig, also

konsumierbar. Der Schüler sollte mit den Arbeitsblättern arbeiten, sie ausschneiden, auf ihnen herumkritzeln. Aber der Autor wurde nicht befragt über den Verkaufspreis und seine sukzessiven Steigerungen.
Die Benutzer forderten das "Handbuch für den Lehrer", Lösungshefte, was wir nicht wollten! Wir mußten es dann doch produzieren, aber vermischt mit Kommentaren, mit Vorschlägen für Tests, mit pädagogischen Nachrichten. Dieses "Journal de Bord" sollte an die Lehrer verkauft werden: Immer noch zu teuer! Schließlich fanden wir die Lösung des Problems. Mit Hilfe unserer Autorenrechte gaben wir sie auf unsere eigenen Kosten heraus und gaben sie unseren Kollegen Benutzern.
Parallel zur praktischen Erprobung begann das Team Galion auch zu leben. Stürmische Sitzungen, wo man Stunden verbrachte in der Diskussion etwa über eine mathematische Frage, wechselten ab mit entspannteren Versammlungen in den Kellern des Beaujolais, mit Seminaren voll guter Laune. Diese gute Laune, die Freundschaft, das Fehlen des Konflikts um Geld, die totale Trennung von Profit, all' das hat das Team gerettet.
Zu Beginn waren wir 33. Heute sind wir etwas weniger zahlreich. Diejenigen, die uns verlassen haben - immer auf Zehenspitzen, ohne irgendeinen tiefen Mißklang - haben das getan: Sei es, weil es ihnen widerstrebte, soviel von ihrer Zeit für diese undankbare Forschungs- und Redaktionsarbeit aufzuwenden, sei es, weil sie sich schlecht angepaßt hatten an dieses Leben des Teams und sie in ihrem Individualismus eine Ruhe fanden, die sie nicht infrage stellen wollten.
Daneben sind einige neue hinzugekommen; sie hatten häufig Schwierigkeiten, sich in eine Gruppe zu integrieren, die bereits ihre Riten hatte, ihre Gewohnheiten, ihre heiligen Kühe. Man kann nur schwer abstrahieren von mehreren Jahren der Arbeit, der Schwierigkeiten, der Probleme. Man muß außerdem zugeben, daß in der gegenwärtigen Phase der Arbeit, die in der zweiten Herausgabe der bisherigen Kollektion besteht, das Team nicht die Notwendigkeit seiner Vergrößerung sieht.

Während unserer Herausgebertätigkeit sind wir dazu gekommen, eine Reihe von Ideen zu respektieren, die wir nicht schriftlich festgehalten haben, die uns aber wesentlich zu sein scheinen:

- Kein Mitglied beansprucht Autorenrechte, unabhängig von seiner Arbeit in dem Team. Alles wird in Übereinstimmung mit unserer Satzung ausgegeben.
- Wir müssen die Bücher mit den Arbeitsblättern, die an die Benutzer verkauft werden, periodisch überarbeiten.
- Wir versuchen soviel als möglich an allen Aktionen teilzunehmen, die den Mathematikunterricht zu erneuern beabsichtigen (APMEP, IREM, CRAP, pädagogische Forschung usw.).
- Wir versuchen unsere Herausgeber zu überzeugen von einer neuen Form der Beziehungen mit dem Autor von Schülermaterialien; der Autor muß mitbestimmen können über die Form, die Zusammenstellung, den Preis, die Verbreitung, die Werbung. Über den Herausgeber hinaus wendet sich der Autor an das Kind und an den Lehrer. Jede materielle Frage ist von Bedeutung.

Hier einige Ausführungen zu den Ausgaben der Assoziation. Wir mußten ein Sekretariat organisieren, mit zwei Teilzeitsekretärinnen, zum Tippen der Manuskripte und der "livres de bord", sowie deren Versendung, das Führen der Adressen der Korrespondenten (ungefähr 10.000 in Frankreich und im Ausland). Wir besitzen ein mit Arbeitsräumen ausgestattetes Büro. Außerdem gibt es dort eine Bibliothek, Videorecorder, Rechenmaschinen, einen Minicomputer, Photokopierer, Offset-Druckanlage, Photolabor, Trickfilmstudio usw. Wir treffen uns dort zu Plenarsitzungen jeden Freitag nachmittag. Arbeitsgruppen kommen nach Wunsch zu Redaktionssitzungen während der Woche dort zusammen. Seit 1972 verteilen wir jedes Jahr ungefähr 100 Stipendien über 1000 fr. an Schüler der Region Lyon. Diese Stipendien werden an bedürftige Schüler verteilt, die sonst den Schulbesuch abbrechen müßten.
Seit 1969 organisieren wir jedes Jahr, im Sommer, ein

internationales Seminar von 8 - 10 Tagen Dauer über verschiedene Probleme:

1970 - Die Mathematische Sprache (Royaumont, Frankreich)
1971 - Konkretisierung in der Mathematik (Fryksas, Schweden)
1972 - Anwendung der Mathematik (Valloue, Frankreich)
1973 - Die Mathematik in der Grundschule (Dubrovnik, Jugosl.)
1974 - Statistik und Wahrscheinlichkeit (Aix-les-Bains, Frankr.)

Reise- und Aufenthaltskosten der Mitglieder des Teams, von deren Familienangehörigen, der eingeladenen französischen und ausländischen Teilnehmer werden von der Assoziation getragen.
1971/72 haben wir Versammlungen von Benutzern von Galion 6 in einem Dutzend französischer Städte organisiert, um deren Ratschläge für eine neue Herausgabe einzuholen.
Wir konnten einigen Schulen Rechenmaschinen, Schülermaterialien und anderes Material anbieten. Wir wollen in den kommenden Jahren die Stipendienbeträge erhöhen und "Mathematische Clubs" finanzieren.

Gegenwärtig beenden wir die zweite Ausgabe unserer Sammlung. In der Tat sind wir überzeugt, daß ein Material für die Schule sich innerhalb von fünf Jahren überholt. Wir sind uns vollkommen bewußt, daß wir eine bestimmte Verantwortung gegenüber den Lehrern und Schülern haben - 500.000 benutzen Galion im 1. Zyklus der Sekundarstufe -, daher unsere Hilfsbereitschaft. Einige unserer Bücher mit Arbeitsblättern, insbesondere das für die 4. Klasse, bedürfen einer gründlichen Überarbeitung. Allerdings darf der relativ große und unerwartete Erfolg dieser ersten Jahre uns nicht die brennenden Fragen übersehen lassen, die uns häufig beunruhigen.
Zahlreiche Kollegen haben nicht verstanden, daß Galion kein traditionelles Schulbuch ist. Unser Material aus Arbeitsblättern darf keine Bibel sein. Das Dogma des schulmeisterlichen Herangehens oder des Schulbuchs haben einige ersetzt durch das Dogma des Arbeitsblattes. Man hat sich daran gesetzt, "Arbeitsblätter zu machen", nur Arbeitsblätter, das ganze Jahr hindurch. Aber das Kind muß entdecken, muß Initiativen erproben können,

muß lernen, Ausarbeitungen zu machen. Die Benutzung der Arbeitsblätter muß anpassungsfähig erfolgen, und der Lehrer darf nicht zögern, sie wegzulassen, sie zu modifizieren, einige Seiten zu überspringen! Auf jeden Fall ist es notwendig, die Arbeit mit Arbeitsblättern abzuwechseln, mit anderen Aktivitäten, mit anderen Arten von Problemen, mit Unterrichtsstunden, die der Synthese und der gemeinsamen Reflexion gewidmet sind.

Daher haben wir daran gedacht, eine fortlaufende und regelmäßige Korrespondenz mit den Benutzern zu führen über pädagogische Fragen; bisher ist diese Korrespondenz relativ eingeschränkt; wir erhalten sehr viele Briefe, aber meist handelt es sich um Anfragen nach Probeexemplaren, nach Lösungen, um Proteste gegen den zu hohen Verkaufspreis, aber selten um nur pädagogische Anmerkungen. Schade! Wir fürchten, daß wir in diesem Bereich gescheitert sind. Zweifellos ist eines der Gründe, daß unsere "Bücher für den Lehrer" zu traditionell sind. Zu einem gegebenen Arbeitsblatt müßten sie einen Diskussionsteil enthalten, mit den pädagogischen Problemen, die am Beginn seiner Ausarbeitung standen ebenso, wie die Resultate seiner praktischen Erprobung. Man müßte die Lehrermaterialien zur gleichen Zeit schreiben wie diejenigen für die Schüler.

Für die Zukunft zu planen bedeutet für uns, mehr als nur die Alternative, Schulbuch bzw. Arbeitsblätter zu sehen. Zur Motivierung der Schüler halten wir es für wichtig, ihnen vor der Einführung einer bestimmten Theorie eine Reihe von Materialien mit interdisziplinärem Inhalt bereitzustellen, deren Bearbeitung in die betreffende Theorie einführt. Diese Materialien können auch die Form von Tonbändern oder Filmen haben.

Eine andere Richtung zukünftiger Arbeit wird für uns die Erprobung einer ganzen Reihe von Ideen im Schulunterricht sein, die wir bisher aus Zeitmangel leider nicht hatten verfolgen können.

So denken wir etwa daran, daß der Algebra-Unterricht im ersten Sekundarschulzyklus sehr wenig ausgewertet worden ist seit dem Beginn der Reform.

Bei einer dritten Richtung unserer Arbeit geht es darum, die Handlungsmöglichkeiten auszuwerten, die ein Lehrer im Umgang mit einem pädagogischen "Ganzen" wie unserer Sammlung hat. Wir halten es für wichtig, dem Lehrer die Gründe verständlich zu machen, die zur Auswahl einer unter verschiedenen, pädagogisch möglichen Vorgehensweisen in dem Unterrichtsmaterial geführt haben.

Das sind unsere Pläne für die Zukunft. Angesichts der Größe dieser Aufgaben wird das Team einen zweiten Anlauf nehmen müssen. Galion wird überleben können, in dieser - unserem Anliegen feindlicher, da vom Geld motivierten - Gesellschaft, unter der Bedingung, daß es ständig bestrebt ist, sich zu erneuern, neu zu beleben, seinen Einfallsreichtum zu erhalten.

Und unter der Bedingung, daß andere Autorenteams, in Mathematik, in Französisch, in Geschichte ..., in ähnlicher Weise arbeiten.

Die Herausgabe von Unterrichtsmaterial ist in der gegenwärtigen Form in großen Teilen zum Untergang verurteilt. Werden unsere Herausgeber das verstehen? Werden sie ihre Gewohnheiten und Forderungen ändern? Sind sich unsere Kollegen der dringenden Notwendigkeit wirklich bewußt, ihre Art der der Arbeit zu verändern?

Diese Fragen stellen wir uns seit acht Jahren. Wir stellen sie uns auch noch heute, trotz des gemachten Weges. Aber keine Arbeit ist jemals beendet.

UNTERRICHTSBEOBACHTUNG UND LEHRERENTSCHEIDUNG IM MATHEMATIKUNTERRICHT

von Th. Mies und D. Vogel

I

Die folgenden Überlegungen zur Problematik der Begründung von Lehrerentscheidungen können nicht als durch umfangreiche praktische Erfahrungen abgestützte Einsichten gelten; sie haben vielmehr den Charakter von Vorüberlegungen, die der Entwicklung einer möglichst optimalen Wechselbeziehung von Unterrichtsreform, Lehrer-Ausbildung bzw. -Weiterbildung und Unterrichtsbeobachtung dienen sollen. Zu diesem Zwecke ist es nützlich, wesentliche Einsichten, die durch die Auswertung bisheriger Erfahrungen mit der Curriculumarbeit gewonnen wurden, zur Vermeidung eigener Fehler und zur Orientierung auf mögliche Schwerpunkte in Forschung und Entwicklung einzusetzen.

Es kann als eine gesicherte Erfahrung der bisherigen Curriculumarbeit angesehen werden, daß zwischen den Absichten neu entwickelter Curricula und ihrer Realisierung in der Unterrichtspraxis eine tiefe Kluft existiert. Zudem gibt es zahlreiche Curriculumentwicklungen, die sich im Schulalltag überhaupt nicht niederschlagen. Weil der mit Bildungsproblemen befaßte Wissenschaftler gesellschaftliche Rahmenbedingungen und den institutionellen Aspekt des Bildungswesens praktisch kaum beeinflussen kann, konzentriert sich sein Interesse auf die Beziehung zwischen der Wissenschaft und der pädagogischen Praxis bzw. ihren Repräsentanten; in dieser Beziehung nimmt er unmittelbar die durch die gesellschaftlichen Rahmenbedingungen und den institutionellen Aspekt des Bildungswesens gesetzten Widerstände gegen die Einführung neuer Curricula wahr und ist zugleich in der Lage, im Rahmen etablierter Institutionen, über Berufs- bzw. Fachorganisationen etc., durch Veränderungen im Selbstverständnis und im Praxisbezug der eigenen wissenschaftlichen Arbeit organisatorisch und inhaltlich wirksame Veränderungen einzuleiten. Dabei müssen ausschließlich materialorientierte Konzepte der Curriculumentwicklung aufgegeben werden, die davon ausgehen, daß es ausreicht, zentral möglichst viel Sachverstand bei der Entwicklung von Curricula zu akkumulieren und diesen Sachverstand in Materialien umzusetzen, die möglichst gut gegen eigenständige Interventionen und Adaptionen des Lehrers abgesichert sind. Für die bildungspolitische Diskussion in der Bundesrepublik markiert spätestens die Empfehlung des Bildungsrates zur Förderung praxisnaher Curriculumentwicklung[1)] den Abschied von der Konzeption der "teacher-proof" Curricula.

Die Aufmerksamkeit wird immer mehr auf die Tatsache gelenkt, daß der Lehrer in der Realisierung von Unterricht über einen breiten Entscheidungspielraum verfügt und daß dieser Entscheidungspielraum weder aufgehoben werden kann noch aufgehoben werden sollte. Die Kooperation zwischen dem an der Curriculumentwicklung beteiligten Wissenschaftler und dem Lehrer wird zum entscheidenden Problem; denn nur dann, wenn der Lehrer die Intentionen der Unterrichtsreform versteht und sie sich zu eigen macht, kann sie sich in der Unterrichtspraxis adäquat und situationsbezogen niederschlagen. Es gibt aber eine Reihe von Hinweisen, daß Lehrer beim gegenwärtigen Entwicklungsstand des Bildungswesens, dem herrschenden Selbstverständnis der pädagogischen Wissenschaft und der Organisation des Verhältnisses zwischen Wissenschaft und pädagogischer Praxis nicht in der Lage sind, das Potential wissen-

---

1) Position (6) des Literaturverzeichnisses am Ende dieser Arbeit.

schaftlicher Erkenntnisse bei ihren pädagogischen Entscheidungen auszuschöpfen. Trotz des offenbaren Defizits an Forschungen über den Entscheidungsprozeß in der Vorbereitung und Durchführung des Unterrichts kann jetzt schon festgestellt werden, daß an dieser Gelenkstelle zwischen Wissenschaft und pädagogischer Praxis entscheidende Mängel zu verzeichnen sind. Diese Mängel zeigen sich schon im Wechselverhältnis von Unterrichtsplanung und Unterrichtsrealisation des gleichen Lehrers: Nach einer amerikanischen Untersuchung von Hawthorne (1968) über die Beziehungen zwischen Unterrichtsplanung und Unterrichtsrealisation wurden in bestimmten Fällen nur 15 % der geplanten Entscheidungen auch tatsächlich realisiert, das Maximum lag bei 50 %; bis über 80 % der tatsächlichen Entscheidungen im Unterricht waren in der Planung nicht vorgesehen.[1)]
Nun wird man sicher argumentieren können, daß es keineswegs sinnvoll ist, den Unterricht durch eine zu detaillierte Planung unflexibel zu machen gegenüber unvorhersehbaren Entwicklungen in der Unterrichtssituation. Andererseits kann aber wohl auch nicht übersehen werden, daß so große Differenzen zwischen Planung und Realisation und ein solcher Mangel an Rationalität von unterrichtsrelevanten Entscheidungen wohl kaum der Verbesserung des Unterrichts und einer stärkeren Einbeziehung wissenschaftlicher Erkenntnisse in den Unterricht dienen können.

Scheint die Vermutung gerechtfertigt, daß es eine Fülle von teilweise noch gänzlich unerforschten Widerständen gegen neue erziehungswissenschaftliche Einsichten und neue Curricula im Planungs- und Entscheidungsverhalten des Lehrers selbst gibt, so existiert auf der anderen Seite gleichfalls eine Reihe von begründeten Hinweisen, daß die Wissenschaft bei den gegenwärtigen Formen der Festsetzung von Forschungsprioritäten, der Vermittlung von Forschungsergebnissen

---

1) Vgl. hierzu (12), S.94-98.

und der Aus- und Weiterbildung der Lehrer diesen weitgehend überhaupt nicht erreicht bzw. geeignet ist, bei ihm die traditionellen Widerstände gegen die Aufnahme und Umsetzung von Forschungsergebnissen eher zu verstärken. In der oben erwähnten Empfehlung des Bildungsrats heißt es dazu: "Die Praxis wurde insgesamt durch prestigestarke Wissenschaften eingeschüchtert, die mit ihren theoretischen Erkenntnissen und technischen Neuerungen nicht selten die Verarbeitungskraft der betroffenen Personen und die Veränderungsmöglichkeiten der betroffenen Institutionen überschätzen." ((6)S. A 7)
Dieses Problem existiert offenbar im internationalen Maßstab. In einer Untersuchung der National Foundation for Educational Research, die sich mit den Einstellungen englischer Lehrer zur erziehungswissenschaftlichen Forschung beschäftigt, wurde festgestellt, daß zwar einerseits der großen Mehrheit der Lehrer die Notwendigkeit und Bedeutung von Forschung für ihre eigene Praxis bewußt ist, andererseits aber große Vorbehalte gegenüber der gegenwärtigen Arbeitsweise dieser Forschung existieren. "The teacher's reservations were mainly about research procedure and the dissemination of findings." ((5)S. 64) Diese Kritik steigerte sich in den freien Meinungsäußerungen, welche die Lehrer dem in der Erhebung verwendeten Fragebogen beifügen konnten, bis zu der Äußerung eines Lehrers, der meinte: "To read all this stuff I have to be a fulltime researcher, not a teacher at all." oder bis zu der Forderung von Lehrern, die gesamte erziehungswissenschaftliche Forschung zu stoppen, bis die gegenwärtig erarbeiteten Ergebnisse ausreichend den Praktikern vermittelt worden seien ((5)S. 37).
Forschungsperspektiven und Praxisperspektiven stehen unvermittelt nebeneinander und dies bestärkt die Aversion der Lehrer gegen eine Forschung, die ebenso autoritativ auftritt wie unfähig ist, bei der Übersetzung ihrer Ergebnisse in die Praxis effektive Hilfestellung zu leisten. Dies äußert sich auf vielfältige Weise: in der Sprache, in

der Wahl der Publikationsorgane, in der ungenügenden Explikation der Ausgangsvoraussetzungen usw. Die Existenz dieses Unbehagens der Lehrer an der Forschung äußert sich darin, daß nur eine Minderheit erziehungswissenschaftliche Zeitschriften für die eigene Praxis auswertet und bedeutende Autoren der Erziehungswissenschaft kennt.[1)]
Bei der Behebung dieser Kommunikationslücke zwischen der Wissenschaft und der Praxis räumen die Lehrer offenbar der eigenen Ausbildung eine Schlüsselrolle ein. In der oben erwähnten englischen Untersuchung billigten die befragten Lehrer, unabhängig von der Schulstufe und unabhängig von ihrer Funktion und der Schulorganisation unter sechs möglichen Forschungsprioritäten: Lehrmethoden, Curriculum, Klassen- bzw. Kursbildung, Schülerbeurteilung und Prüfung, psychologische und soziologische Forschung, Lehrer und ihre Ausbildung, eindeutig und einmütig dem letzten Komplex den absoluten Vorrang zu. In der erwähnten französischen Untersuchung (2) wurde festgestellt, daß es gerade die aktiven und an der pädagogischen Forschung interessierten Lehrer sind, die ihre pädagogische Ausbildung nicht befriedigt. Diese Befunde sind nicht nur ein Hinweis auf Mängel in der gegenwärtigen Ausbildungspraxis, sondern zugleich auch eine Bestätigung dafür, daß in der gegenwärtigen Situation die pädagogische Forschung sich nicht nur in ihren Inhalten und Methoden verändern, sondern vor allem ihr Verhältnis zur Praxis und zu den Praktikern von Grund auf neu überdenken muß ((5)S.59 und 63).

Für eine Fachdidaktik, die an der Nahtstelle zwischen Fachwissenschaft und Erziehungswissenschaft beheimatet ist, kann es nicht genügen, sich auf die Fachwissenschaft und deren mehr oder weniger leidlichen Umsetzung im Unterricht zu beschränken. Wie die Diskussion um den Ansatz zur Curriculumreform, der von der Struktur der Fachwissenschaft aus-

1) Vgl. (5),S.35-45 und S.112-129; sowie (2),S.15/16.

gehen will, gezeigt hat, können didaktische Entscheidungen aus der Fachwissenschaft allein nicht begründet werden. Sie bedürfen vielmehr der Reflexion auf die kognitive und emotionale Entwicklung des Kindes, die reale Unterrichtssituation und die Verwendungszusammenhänge der angeeigneten wissenschaftlichen Erkenntnisse. Für die Fachdidaktik stellt sich dieses Problem umso mehr, als sie vor der Aufgabe steht, das zusammenhanglose Nebeneinander von Fachwissenschaft und erziehungswissenschaftlichen bzw. sozialwissenschaftlichen Erkenntnissen aufzuheben. Dieser Mangel an Vermittlungen zwischen Fachwissenschaft und Erziehungswissenschaft ist nämlich auch ein Faktor, der zur Ineffizienz der Forschung für die Unterrichtspraxis beiträgt. Für die Fachdidaktik gilt die folgende Prämisse aus den Empfehlungen des Bildungsrates: "Eine weitere Bedingung für Innovationsprozesse ist daher, daß Wissenschaft zum Schulwesen so in Beziehung gesetzt wird, daß sie nicht Innovation gleichsam nur exportiert, sondern zuvor erst die Probleme der Schulpraxis wahrnehmen und formulieren kann." ((6) S. A 66)

Ein Schritt in diese Richtung wäre es, die Kriterien der Unterrichtsbeobachtung und -beurteilung, die in der Entscheidungspraxis von Lehrern, Ausbildungsleitern und Aufsichtsbeamten üblich sind, möglichst exakt zu erfassen und sie in Beziehung zu setzen zu entsprechenden Verfahren der Unterrichtsbeobachtung, wie sie in den Erziehungswissenschaften entwickelt wurden. Eine solche Bestandsaufnahme könnte einer realistischeren Beurteilung der Möglichkeiten praxiswirksamer Forschung und der Ermittlung von Forschungsdefiziten dienen. Sie ist umso dringender, als die erziehungswissenschaftlichen Beobachtungsverfahren aus der Erkenntnis heraus entwickelt worden sind, daß die pädagogische Forschung nicht unmittelbar auf psychologische Lerntheorien zurückgreifen kann, daß sie zunächst eigenständige, empirische Verfahren entwickeln muß, um der komplexen

Realität 'Unterricht' gerecht zu werden und Ausgangsmaterial für theoretische Konzepte zu entwickeln. Die folgenden Ausführungen stützen sich auf Lehrerinterviews, Auswertung von Materialien von Ausbildungsseminaren und auf eine selektive Auswertung der Literatur zur Unterrichtsbeobachtung.

II

Was die Gestaltung des Kerns seiner beruflichen Tätigkeit, den Unterricht, betrifft, ist der Lehrer trotz administrativer Vorschriften und geregelter Kooperationsformen mit seinen Kollegen zugleich relativ autonom und relativ isoliert. Auf Korrektur von außen kann er nur in Ausnahmefällen rechnen, - wenn Schüler rebellisch werden, weil sie sich überfordert oder ungerecht behandelt fühlen - wenn Eltern vorstellig werden, weil sie die Versetzung ihres Kindes bedroht sehen - wenn Kollegen sich beschweren, weil sie der Lärm stört - wenn Vorgesetzte intervenieren, weil der Lehrplan nicht eingehalten wird. Die Aufzählung macht deutlich, daß die Korrektur von außen meist die Gestalt negativer Sanktionen annimmt und vom Lehrer als Ausdruck eines Mangels an eigener Kompetenz empfunden wird.

Kooperation, wechselseitige Information, kollegiale Hilfe und Unterstützung sind im Bereich der Unterrichtsgestaltung noch immer eine Seltenheit. Welchen Stellenwert hat diese Isoliertheit des Lehrers für das Problem der Verwissenschaftlichung seiner beruflichen Tätigkeit? Was nimmt er bei der gegenwärtigen Praxis zur Grundlage seiner Entscheidungen? Eine Systematisierung der Kriterien, welche die Fachdidaktik zur Einschätzung von Mathematikunterricht erarbeitet hat, die Auswertung von Kriterienkatalogen zur Beurteilung von Lehrproben sowie die informelle Lehrergespräche, wie sie im IDM zur Orientierung der Forschungsarbeit in diesem Feld durchgeführt wurden, sollen hier als Anhaltspunkte dienen.

Fachdidaktische Beurteilungs- und Entscheidungskriterien lassen sich unter unserer Fragestellung in die folgenden drei großen Kriteriengruppen systematisieren:[1)]

Sachliche Kriterien. Ihre Anwendung erfordert hohe fachliche Kompetenz und liefert mehr als eine schematische Einteilung in falsch - richtig.

Hierher gehören Kriterien, nach denen z.B. entschieden werden kann,
- Kann dies oder jenes schon als Beweis gelten, oder ist die Argumentation noch lückenhaft (bezüglich eines vorgegebenen Kenntnisstandes) ?
- Ist die angebotene Lösung elegant, klar, verständlich ?
- Entspricht eine Darstellung in Sprache und Form modernen Standards und Gepflogenheiten?
- Ist eine Formulierung fehlerhaft oder nur mißverständlich?
- Welche Vorschläge sind brauchbar, welche führen ab ? usw.

Kriterien der Elementarität.

Hier bieten sich zur Unterscheidung Begriffspaare an wie:
konkret - abstrakt; allgemein - speziell;
theoretisch (rein) - praktisch (angewandt);
motiviert - unmotiviert; interessant - uninteressant;
leicht zugänglich - schwer zugänglich.

Methodische Kriterien.

Sie sollen entscheiden helfen bei Fragen wie
- Welche Stoffauswahl, -anordnung, -verteilung ist zu treffen, soweit von den Richtlinien nicht festgeschrieben?
- Welche Unterrichtsform ist dem Gegenstand angemessen, welche verspricht den größten Erfolg gemessen am gesteckten Ziel?
- Wie ist das Interesse der Schüler zu gewinnen, wie wachzuhalten?
- Welche Beispiele sind besonders illustrativ?
- Was dient der Klarheit, Suggestivität und Knappheit der eigenen Ausführungen?

Es leuchtet ein, daß die drei Kriteriengruppen nicht scharf voneinander abgegrenzt werden können, da es im Unterricht ja

---

1) Eine detailliertere und relativ geschlossene Systematik für die Zwecke der Unterrichtsplanung gibt Wittmann in (30), S. 123 ff.

gerade um ihren inneren Zusammenhang, die optimale Abstimmung ihres Wechselverhältnisses geht. Da die theoretische Durchdringung dieses inneren Zusammenhanges durch die Fachdidaktik erst in Ansätzen geleistet ist, stehen die Kriterienkomplexe einstweilen mehr oder weniger unvermittelt nebeneinander. Welche Konsequenzen dies für ihre Handhabung in der Praxis der Unterrichtsbeurteilung hat, soll am Beispiel eines Kriterienkatalogs zur Beurteilung von Lehrproben erörtert werden.

Dem Kriterienkatalog entsprechend erfolgt die Beurteilung der Stunde nach drei Hauptgesichtspunkten: (1) Planung des Unterrichts, (2) Durchführung, (3) Arbeit mit der Klasse als Gruppe.

Jedem der drei Punkte ist eine Reihe von Unterpunkten zugeordnet, so daß sich insgesamt das folgende Schema ergibt:

1. Planung des Unterrichts
   a) wissenschaftliche Fundierung
   b) didaktische Aufbereitung
   c) Stundenaufbau
   d) Gesamtplanung
   e) Ökonomie
2. Durchführung des Unterrichts
   a) Angemessenheit der Darstellung (in bezug auf den Schüler und den Stoff)
   b) Unterrichtsform (z.B. Lehrervortrag, fragend-entwickelndes Verfahren, freies Unterrichtsgespräch, arbeitsteiliges Verfahren, Gruppenunterricht)
   c) Maßnahmen zur Aktivierung des Lernprozesses
   d) Flexibilität
3. Arbeit mit der Klasse als Gruppe
   a) Verhalten gegenüber der Gruppe
   b) Beobachtung gruppendynamischer Prozesse
   c) Verhalten gegenüber einzelnen Schülern
   d) Fähigkeit zur Anleitung, Ermutigung usw.
   e) Beurteilung von Schülerleistungen
   f) pädagogische Maßnahmen

Entsprechend der stärkeren Praxisnähe dieses Kriterienkataloges erscheint in den ersten beiden Punkten der Unterricht als Ganzheit, jeweils bezogen auf die verschiedenen Phasen der Planungs- und Entscheidungstätigkeit des Lehrers. Das Auseinanderfallen der beiden Kriteriengruppen wiederholt sich nun aber im Verhältnis der Unterpunkte der einzelnen Phasen zueinander. Der Eindruck eines Mangels an Zusammenhang wird noch dadurch verstärkt, daß diejenigen Aspekte des Lehrerverhaltens, die sich auf die soziale Dimension des Unterrichtsgeschehens beziehen, aus dem zweiten Komplex herausgelöst und zu einem eigenen Komplex verselbständigt werden. Ein Blick zurück auf den fachdidaktischen Systematisierungsversuch zeigt, daß dort diese Aspekte überhaupt nicht expressis verbis erscheinen.[1] Da aber die praktische Erfahrung über ihre Relevanz für die Qualität von Unterricht hinreichend belehrt, wird ihre Berücksichtigung bei der Lehrprobenbeurteilung als notwendig angesehen. Da andererseits ihre Beziehung zur inhaltlichen und didaktischen Dimension von Unterricht wissenschaftlich kaum reflektiert ist, wird der Eklektizismus und damit die Schwierigkeit der praktischen Handhabung solcher Kataloge nur verstärkt.

Der Mangel an innerer Systematik der vorgeführten Kataloge macht die Überprüfung ihrer Vollständigkeit unmöglich. Gleichzeitig sind einige der Kategorien so dehnbar, daß sich in ihnen nahezu alles unterbringen läßt. In der Beurteilungspraxis führt dies häufig entweder dazu, daß solche Kataloge zur Rationalisierung von Urteilen benutzt werden, die tatsächlich ganz anders begründet sind, oder zur Opposition gegen jeden Versuch einer auch nur relativen Objektivierung von Urteilen, indem man auf 'Gesamteindrücke' und auf die Einmaligkeit jeder Unterrichtsstunde, die grundsätzlich nur intuitiv nach weiter nicht rationalisierbaren Erfahrungen vom Praktiker erfaßt werden könne, rekurriert. Es leuchtet ein, daß eine solche Einstellung mit dem Konzept einer Verwissenschaftlichung der Lehrertätigkeit nicht harmoniert. Man sollte sich jedoch nicht nur bewußt sein, daß diese Opposition unter den Praktikern verhältnismäßig weit verbreitet ist, sondern daß die aufgezeigten Mängel fach-

1) Diese Feststellung gilt übrigens auch für die oben erwähnte Wittmannsche Systematik.

didaktische Kriterienkataloge ihrer Kritik an jedem Versuch der Objektivierung von Entscheidungs- und Beurteilungskriterien reichlich Argumente liefern. Diese Kritik findet eine zusätzliche Stütze in folgender Einsicht, die aus den Erfahrungen mit der Evaluation von Lehrerverhalten gewonnen wurde:

> "Da werden Lehrer und Studenten eingeschätzt durch sogenannte 'erfahrene' oder 'kritische' Kollegen, durch Mentoren, Schulleiter, Aufsichtsbeamte, Schüler oder Beobachter, die aus irgendeinem Grunde befähigt erscheinen, eine Meinung abzugeben. Diese Einschätzungen sind nicht nur unzuverlässig, sie entbehren aller objektiven Maßstäbe, denn guter Unterricht in den Augen eines Schulleiters mag etwas ganz anderes sein als aus der Sicht eines Schülers. Zahlreiche Untersuchungsergebnisse zeigen, daß Lehrer, Schüler oder Mentoren dazu tendieren, die Leistungsfähigkeit eines Lehrers unterschiedlich zu beurteilen." ((14), Teil 2, Sp. 1505)

Die Lösung dieser Schwierigkeit kann nur in der Verständigung über die leitenden Erkenntnisinteressen der Unterrichtsforschung liegen, die nur durch enge Kooperation zwischen Praxis und Forschung und vor allem auch der Praktiker untereinander vorangetrieben werden kann. In dieser Perspektive erscheinen die subjektivistische Unterrichtsphilosophie vieler Lehrer, ihre Isolierung in ihrer beruflichen Tätigkeit und die praktische Ineffizienz fachdidaktischer Konzepte von Unterricht als zusammengehörig. Die Bedingungen pädagogischer Arbeit, die nach wie vor durch Ressourcenknappheit und Überlastung des Lehrpersonals gekennzeichnet sind, tragen ein übriges dazu bei, daß insgesamt die Rationalisierung des Entscheidungsverhaltens des Lehrers trotz umfangreicher und vermehrter Anstrengungen in der erziehungswissenschaftlichen Forschung und in der Curriculumreform kaum vorangekommen ist.

Angesichts der offenbaren Mängel der in der Praxis verbreiteten Verfahren der Unterrichtsbeobachtung und -beurteilung und ihrer Bedeutung als Rahmenbedingungen einer Unterrichtsreform erscheint es sinnvoll, die in der Erziehungswissenschaft entwickelten Beobachtungsverfahren auf ihren wissenschaftlichen Wert und ihre Bedeutung für die pädagogische Praxis zu prüfen. Die Entwicklung dieser Verfahren ist mit negativen Erfahrungen verbunden, die die Unterrichtsforschung bei dem Versuch machen mußte, bestimmte Faktoren des Unterrichtsgeschehens (wie Lehrerpersönlichkeit, Lehrmethoden u.a.) zu isolieren und in ihrer Bedeutung für den Unterrichtserfolg einzuschätzen ((30),S.176). Der Streit zwischen den Anhängern der Methode des entdeckenden Lernens und des angeleiteten Lernens, der in der Diskussion um die Reform des Mathematikunterrichts insbesondere in den USA einen breiten Raum einnahm, ist hierfür ein prägnantes Beispiel. Eine Reihe empirischer Studien wurden dieser Frage gewidmet ((27),S.58), ohne daß tragfähige Resultate erreicht worden wären. Die erneute Diskussion des Ausgangsproblems führte zu der Einsicht, daß nicht nur die Variablen (hier: die zu vergleichenden Lehrmethoden) nicht präzise genug definiert waren und mehrere logisch unabhängige Parameter enthielten, sondern daß Unterrichtsmethoden generell nicht unabhängig von solchen Variablen wie Unterrichtsfach und -inhalt, kognitiven Voraussetzungen der Kinder, verfügbaren Ressourcen an Zeit und Lehreraufmerksamkeit, Unterrichtsmedien und -materialien usf. bestimmt und erforscht werden können. Die dieser Diskussion zugrundeliegenden kognitionspsychologischen Konzepte von solchen Autoren wie Piaget, Bruner, Gagné oder Ausubel erwiesen sich offenbar nicht als unmittelbar auf den Unterricht übertragbar. Die Unterrichtsrealität erwies sich als komplexer; eine Reihe von Variablen, von denen diese Autoren wegen ihrer spezifischen Erkenntnisinteressen abstrahieren konnten, konnte bei der Übertragung ihrer

Überlegungen auf den Unterrichtsprozeß nicht mehr vernachlässigt werden. Dabei gibt es Grund zu der Vermutung, daß es nicht so sehr die Anzahl der hinzutretenden Variablen als vielmehr ihr Ineinanderwirken, ihre wechselseitige Abhängigkeit ist, die die Angelegenheit kompliziert. Die Hinwendung zur Beobachtung des tatsächlichen Unterrichtsgeschehens und die Ausarbeitung von Verfahren, die in einem eindeutigen und objektivierbaren Sinn verwandt werden können und zugleich aussagekräftig sind, ist daher ein Ausdruck für das wachsende Bewußtsein, daß psychologische Lerntheorien und Unterrichtstheorien nicht aufeinander reduziert werden können und daß die zweite Art von Theorie komplexer sein müßte. Es resultierte daraus auch eine verstärkte Skepsis gegenüber einer zu kurzschlüssigen Orientierung der Forschung auf unmittelbar praxiswirksame Resultate, wie sie sich in der Arbeiten über den 'guten' Lehrer oder die 'beste' Lehrmethode niedergeschlagen hat.

Es entwickelten sich zahlreiche Verfahren der Unterrichtsbeobachtung mit allen Vorzügen und Nachteilen, die sich aus der geschilderten Situation ergaben. Um einen groben Begriff von diesen Verfahren zu geben, stellen wir hier eines der bekanntesten und am meisten verwendeten kurz vor: die Flanderssche 'Interaktionsanalyse'. Es kann, gerade was die weiter unten entwickelten Mängel betrifft, als durchaus repräsentativ gelten.

Das Verfahren, das im folgenden kurz beschrieben werden soll[1], wurde unter der Leitung von Flanders zwischen 1955 und 1960 entwickelt (siehe (9)) und hat seitdem zahlreiche Modifikationen erfahren (vgl. (10), bes.S.239ff), die jedoch hier unberücksichtigt bleiben können. In möglichst kurzen Abständen und so regelmäßig wie möglich (etwa alle 3 Sekunden) entscheidet ein in der Klasse sitzender Beobachter, welche der folgenden 10 sich gegenseitig ausschließenden Kategorien den gerade vollendeten Kommunikationsakt am besten trifft, während er zugleich den Fortgang der Kommunikation verfolgt:

---

1) Vgl. auch die Kurzfassung in (19), Anhang 1, S.202-208.

DIE KATEGORIEN DER FLANDERSSCHEN INTERAKTIONSANALYSE [1)]

Lehrer	reaktiv	1. <u>Billigt Gefühle der Schüler</u>. Akzeptiert und klärt eine Haltung oder die Gefühlsäußerung eines Schülers in sachlicher Weise. Die Gefühle können positiv oder negativ sein. Die Vorhersage und das In-Erinnerung-rufen von Gefühlen sind eingeschlossen.
		2. <u>Lobt oder ermutigt</u>. Lobt oder fördert Tätigkeit oder Verhalten der Schüler. Hierher gehören: Scherze mit entspannender Wirkung, die jedoch nicht auf Kosten einer anderen Person gehen; Kopfnicken oder Äußerungen wie "hm?", "weiter".
		3. <u>Akzeptiert oder verwendet Gedanken der Schüler</u>. Klärt, baut aus oder entwickelt von Schülern geäußerte Gedanken. Eingeschlossen sind durch den Lehrer vorgenommene Ergänzungen oder Erweiterungen; sobald jedoch der Lehrer mehr seine eigenen Gedanken ins Spiel bringt, gehe man zur Kategorie 5 über.
		4. <u>Stellt Fragen</u>. Stellt eine Frage zum Inhalt oder zum Vorgehen aufgrund eigener Überlegungen in der Absicht, daß ein Schüler darauf antwortet.
	initiativ	5. <u>Doziert</u>. Teilt Fakten oder Meinungen zum Inhalt oder zum Vorgehen mit; äußert <u>seine eigenen</u> Gedanken, gibt <u>seine eigene</u> Erklärung oder zitiert eine Autorität, soweit sie nicht ein Schüler ist.
		6. <u>Gibt Anweisungen</u>. Anweisungen, Befehle oder Vorschriften, von denen erwartet wird, daß die Schüler sie befolgen.
		7. <u>Kritisiert als Autorität oder rechtfertigt sich als solche</u>. Feststellungen, die mit der Absicht geäußert werden, die Verhaltensmuster der Schüler vom nicht-akzeptablen in akzeptable zu verändern; jemanden anschnauzen; feststellen, warum der Lehrer so handelt wie er handelt; äußerste Zurückhaltung.
Schüler	reaktiv	8. <u>Schüleräußerungen - in Reaktion</u>. Äußerungen der Schüler in Reaktion auf den Lehrer. Der Lehrer bahnt den Kontakt an oder erbittet Schüleräußerungen oder strukturiert die Situation. Die Freiheit, eigene Gedanken zu äußern, ist begrenzt
	initiativ	9. <u>Schüleräußerungen - aus eigenem Antrieb</u>. Äußerungen der Schüler, die sie von sich aus machen. Äußern eigener Gedanken; anschneiden eines neuen Gebiets; Freiheit, eine Auffassung zu entwickeln oder einen Gedankengang, beispielsweise das Stellen tiefsinniger Fragen; über die bestehende Struktur hinausgehen.
Schweigen		1o. <u>Schweigen oder Verwirrung</u>. Pausen, Augenblicke der Ruhe und Abschnitte des Durcheinanders, während derer die Vorgänge vom Beobachter nicht verstanden werden können.

1) Vgl. (1o), S.34; zur ursprünglichen Fassung siehe (9), S.2o.

Protokolliert werden lediglich die Nummern der Kategorien in der Reihenfolge ihres Auftretens. Die Auswertung der Zahlenfolge erfolgt nach der Stunde und richtet sich nach dem Zweck der Beobachtung. Häufig wird man bestimmte Abschnitte derselben Stunde miteinander oder auch mit entsprechenden Abschnitten anderer Stunden vergleichen wollen. Dazu sind die Zahlenfolgen selbst nicht gut geeignet. Man verfährt daher unter Verzicht auf Information nach Flanders meist so, daß man die Zahlenfolge in Ziffernpaare auflöst, sich also sozusagen nur noch für die "Mikrostruktur" des Unterrichts interessiert, und ihre Häufigkeit mittels einer (1o,1o) - Matrix wiedergibt. Hat man etwa die Ziffernfolgen

$$6,\ 0,\ 7,\ 6,\ 6,\ 0,\ 2,\ 4,\ 4,\ 8,\ 8,\ 2,\ 4,\ 8,\ 9,\ 9, \ldots$$

so sind der Reihe nach die Zahlenpaare

$$(6,0),(0,7),(7,6),(6,6),(6,0),(0,2),(2,4),(4,4),$$
$$(4,8),(8,8),(8,2),(2,4),(4,8),(8,9),(9,9),\ldots$$

zu bilden. Man erhält dementsprechend als Häufigkeitsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & . & . & . & . & . & 1 & 0 & . & . \\ 1 & 0 & . & 2 & 0 & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & 1 & 0 & . & . & 2 & 0 & . \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 2 & 0 & . & . & . & . & 1 & 0 & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & 1 & 0 & . & . \\ 0 & . & 1 & 0 & . & . & . & . & 1 & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & 1 & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

Die durch die Matrix repräsentierten Interaktionsmuster können etwa wie folgt schrittweise aufgedeckt werden ((1o), S.98):

1) Bestimme die Gesamtsumme der Vermerke, um die Codierungs-Zeit abzuschätze
2) Errechne den Anteil der Lehrer-Äußerungen, der Schüler-Äußerungen und des Schweigens bzw. der Verwirrung und verwende diese Information in Verbindung mit...
3) ... dem Verhältnis von reaktivem und initiativem Lehrer-Verhalten im Vergleich mit initiativem Schüler-Verhalten.

4) Ermittle, wie der Lehrer auf Schweigen der Schüler reagiert.

5) Berechne die Anteile der Vermerke, die in den Spalten sowie in den Zeilen 4 und 5 ("content cross cells") bzw. in der Diagonalen ("steady state cells") stehen, um die Schnelligkeit des Wechsels, die Tendenz zu Gesprächen ohne Unterbrechung und das Gewicht der Inhalte abzuschätzen.

Das genaue Studium der Matrix erlaubt eine Reihe weiterer, stärker detaillierter Feststellungen über verschiedene Aspekte des Unterrichtsstiles. Es fällt auf den ersten Blick auf, daß gerade die Absicht, Unterricht möglichst hautnah in seiner aktuellen Komplexität und objektivierbar zu beschreiben, zu einer Vernachlässigung einer ganzen Reihe von Faktoren führt, von denen man begründet vermuten kann, daß sie entscheidend zum Unterrichtserfolg beitragen. Der empiristische Charakter der Beobachtungsverfahren ist vielfach moniert worden: Die Reaktion auf simplifizierende Theorien hat zu tastenden Orientierungsversuchen geführt, bei denen sich aber Schwierigkeiten in der Rechtfertigung der Auswahlkriterien ergeben. Diese Schwierigkeiten machen sich sofort bemerkbar, wenn es darum geht, aus der Fülle des gewinnbaren Datenmaterials das wichtige auszuwählen und zu interpretieren. Dies führt u.a. dazu, daß die Parameter, die den verschiedenen Beobachtungsverfahren zugrunde liegen, nur schwer aufeinander bezogen werden können, was große Probleme bei der Zusammenfassung der jeweils erarbeiteten Ergebnisse verursacht. Auch bei der Verwendung desselben Beobachtungsverfahrens in verschiedenen Untersuchungen ist keineswegs gesichert, daß sie untereinander reliabel sind, weil die Definition der bei der Beobachtung verwendeten Termini nur in einem sehr eingeschränkten und relativen Sinne als operationalisiert angesehen werden kann.

Allgemein wird in der Literatur zur Unterrichtsforschung die Vernachlässigung der kognitiven Aspekte des Unterrichtsgeschehens zugunsten der affektiven beklagt. Eine Erklärung dafür ist, daß der latente Empirismus der Beobachtungsverfahren dazu tendiert, all das am Unterrichtsgeschehen zu eliminieren, was nur verstanden werden kann im Rahmen übergreifender Zusammenhänge, praktischer oder theoretischer Art.

Dieser Vernachlässigung der kognitiven Variablen entspricht es, daß bisher in den Beobachtungsverfahren die organisatorische und inhaltliche Bedeutung der fachlichen oder fähigkeitsspezifischen Struktur des Unterrichts nur selten bedacht wurde. Flanders hat ausdrücklich die Möglichkeit einer Unterrichtstheorie behauptet, die sich mit "den Wirkungen des Lehrerverhaltens auf die Motivation und die Einstellungsbildung" beschäftigt, unabhängig von dem jeweils unterrichteten Gegenstand ((3), S.235).

In der Konsequenz kann das nur heißen: Unterrichtsbeobachtung, wie sie Flanders und andere entwickelt haben, ist fachdidaktisch irrelevant; umgekehrt aber müßte die Fachdidaktik auf eine Reihe von Theorien verzichten, die sie immer als Aspekte ihres Geganstandes betrachtet hat, wie z.B. das Problem der Motivation oder die Frage nach dem Beitrag des Faches zur Erreichung allgemeiner Lernziele.

Es ist in diesem Zusammenhang interessant, daß eine neuere Arbeit, die sich mit dem Unterrichtsverhalten von angehenden Lehrern beschäftigt und das Flanderssche Verfahren verwendet, jedoch die Ergebnisse mit den jeweils unterrichteten Fächern in Korrelation bringt, zu folgendem Resultat gelangt:"Subject being taught exerted massive influence on frequency of occurrence of all the Flanders categories except praise and criticism. The colossal influence of the subject on the nature of classroom interaction is certainly the most striking and important finding in the multivariate analysis of variance." ((30), S. 127)

Die Tendenz der Forschung geht in die Richtung, den Bereich der Faktoren, welche die Unterrichtsbeobachtung auf Grund ihrer spezifischen Beschränkungen nicht erfassen kann, separat mit eigenständigen Methoden zu erfassen und mögliche Korrelationen mit den Beobachtungsdaten systematisch zu studieren. Man erhält sich dadurch den Vorteil der Unterrichtsbeobachtung, daß sie nämlich den Unterricht als eigenständigen Prozeß,der sich nicht auf die isolierten beteiligten Elemente zurückführen läßt, mit relativ exakten und überprüfbaren Methoden erfaßt, und kann dennoch übergreifende Bedingungen des Stoffaufbaus, des Schulsystems etc. erschließen.

Auf dieser Grundlage gewinnt dann aber auch die Entwicklung fachdidaktisch orientierter Beobachtungsverfahren an Interesse.

IV

Wright/Proctor (32) verfolgten mit der Entwicklung eines speziell für den Mathematikunterricht bestimmten Beobachtungsinstrumentes die Absicht, die Möglichkeit des Vergleichs von Unterricht zu verbessern. Sie dachten sich ihr Instrument als Ergänzung zu vorhandenen Verfahren der Kontrolle von Unterrichtserfolg, wie Bleistift-und-Papier-Tests, Verfolgung des Berufserfolges usf. mit all ihren in der Literatur hinreichend breit erörterten Schwächen. Es ist das unseres Wissens bisher einzige Instrument, das eigens für die Beobachtung von Mathematikunterricht konstruiert wurde [2] und dessen Wert als Instrument für die fachdidaktische Forschung in überzeugender Weise unter Beweis gestellt werden konnte.

Wright und Proctor führten ihre Untersuchung an insgesamt 12 Senior High School und Freshman College Mathematikklassen - also an einer, auch nach damaligen Begriffen, verhältnismäßig kleinen Stichprobe. Sie konnten die Reliabilität ihres Beobachtungsinstrumentes auch nicht in der üblichen Schärfe erhärten.[1] Und dennoch halten wir ihre Untersuchung nach Anlage und Ergebnis für bemerkens- und nachahmungswert.

Als unabhängige Variable wählten Wright und Proctor mathematische Strenge (rigor) und Beteiligung der Schüler (participation), als abhängige Variablen mathematischer Inhalt (mathematical content), psychologischer Prozeß (psychological process) und soziologische Haltung (sociological attitude), d.h. sie untersuchten, mit welchen Mustern (patterns) im Bereich der In-

---

1) Dies verwundert nicht, wenn man sich die Differenziertheit des Kategoriensystems etwa im Vergleich zu der des Flandersschen ansieht.

2) Vgl. die Anthologie (34), die 99 (!) Instrumente erfaßt.

halte, der Einstellungen/Haltungen und Prozesse verschiedene Grade von Strenge und Beteiligung verbunden sind. Die Gesamtanlage der Studie entnimmt man am besten der folgenden Skizze[1]:

D E S I G N
((32), S. 10)

UNABHÄNGIGE VARIABLE

1. mathematische Strenge
2. Betätigung der Schüler

ABHÄNGIGE VARIABLE

1. mathematischer Inhalt
2. psychologischer Prozeß
3. soziologische Haltung

UNTERSUCHUNGS-GEGENSTÄNDE

klassifiziert nach

Lehrer
Schüler
Unterrichts-gegenstand

INVERVENIERENDE VARIABLE

Beobachter

KONTROLLIERTE VARIABLE

1. Besonderheiten des Lehrers
2. Besonderheiten der Schülergruppe
3. Besonderheiten des Gegenstandes

UNKONTROLLIERTE VARIABLE

1. Tageszeit
2. Schüler
3. Aufbau der Stunde
4. Umfang des Stoffgebietes

Die 12 in die Untersuchung einbezogenen Klassen werden jeweils nach dem Grad der Strenge und der Beteiligung kategorisiert. Es werden 3 Stufen der Strenge und 3 Stufen der Beteiligung unterschieden und zu jeweils 2 Stufen zusammengefaßt:

high rigor: (R)	(1) Der gesamte Kurs wird aus zu Beginn gesetzten Axiomen entwickelt.
low rigor: (r)	(2) Einzelne Teile des Kurses werden logisch entwickelt, ohne daß sich diese ihrerseits auf Axiome gründen. (3) Regeln werden als solche hingenommen und innerhalb isolierter Gebiete angewendet.
high particip-ation (P) :	(1) Die Schüler sind häufig in die Überlegungen zum Unterrichts-Gegenstand einbezogen, sind beteiligt an seiner Entwicklung und Anwendung.

1) Vgl. (32), S. 10.

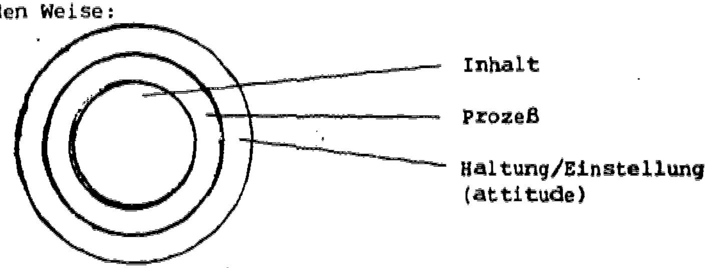
low participation (p) :
(2) Die Schüler werden bei der Anwendung häufig hinzugezogen.
(3) Die Schüler sind an keinem Aspekt der Diskussion häufig beteiligt.

Man erhält auf diese Weise ein (2,2)-Klassifikationsschema

$$\begin{pmatrix} RP & Rp \\ rP & rp \end{pmatrix},$$

da jede der beiden unabhängigen Variablen, entsprechend ihrer Definition, genau zweier Werte fähig ist.

Die abhängigen Variablen sind nun durch das Wright/Proctor-Beobachtungsinstrument definiert.

> Die mit "Inhalt", "Prozeß" und "Haltung" überschriebenen drei Bereiche muß man sich als einander überlappend vorstellen, etwa in der folgenden Weise:
>
> 
>
>
> Jeder Beobachtungs-Bereich ist seinerseits wie folgt untergliedert:

Mathematischer I n h a l t	Psychologischer P r o z e ß
strukturelle / technische — Grundlagen	analysierend / synthetisierend — schlußfolgern
deduktive / induktive — Zusammenhänge	spezialisierend / generalisierend — klassifizieren
mathematische / andere — Anwendungen	relevante (aber nicht notwendige) Information

Soziologische H a l t u n g

Neugierde
Selbständigkeit
Rezeptive Haltung

Wir können hier das Beobachtungs-Instrument nicht im einzelnen darstellen, sondern verweisen dazu auf den Anhang von (32), der als Trainings-Buch für Beobachter gedacht ist. Sehen wir uns stellvertretend den Komplex "mathematischer Inhalt" an:

KLASSIFIKATION DES VERBALEN VERHALTENS

IM BEREICH DER INHALTE (CONTENT)

(vgl. (32), appendix B, S. 8)

G r u n d l a g e n: Der Teil des mathematischen Wissens, der den Schülern verfügbar ist: "altes" Wissen, wie z.B. das zuletzt durchgenommene Kapitel, auch wenn seine Behandlung sehr lange her ist.

1. Struktur

1.1 Grundbegriffe, Axiome.

1.2 Stücke von Theorie, die offensichtlich bekannt sind, z.B. Definitionen, Bezeichnungsweisen, Sätzen.

1.3 Logische Prinzipien, z.B. Konsistenz, Äquivalenz, Beweis.

1.4 Problemlösungsstrategien, z.B. Vergegenwärtigen der gegebenen Fakten, Variation der Bedingungen, Überprüfen von Vermutungen, Finden analoger Probleme, usw..

2. Techniken

2.1 Beschreibung und Verwendung von technischen Hilfsmitteln und mechanischen Regeln ohne wesentliche mathematische Bedeutung.

2.2 Lesen mathematischer Texte, z.B. Aufgaben, Lösungen.

Z u s a m m e n h ä n g e: Die Entwicklung und Konstatierung "neuer" Zusammenhänge.

3. Deduktiv

3.1 Logischer Beweis von neuen Behauptungen.

4. Induktiv

4.1 Verwendung spezieller Probleme.

4.2 Verwendung von Graphen, Diagrammen usw., um einen Zusammenhang zu verdeutlichen.

4.3 Intuitiver Zugang zu Zusammenhängen, z.B.: "Was könnte zutreffen?"

5. Behauptung

5.1 Behauptung neuer Zusammenhänge.

5.2 Definitionen, Notationen, Terminologie, mathematische Konventionen, z.B. Wahl der Darstellungsmittel.

A n w e n d u n g e n: Die Benutzung und Entdeckung eines mathematischen Systems in speziellen Problemzusammenhängen und in der Geschichte.

6. Mathematisch

6.1 Lösung mathematischer Probleme.

7. Anderes

7.1 Knappe Darstellung eines Problems eines anderen Bereichs, bevor die wesentlichen Bezüge abstrahiert werden.

7.2 Behandlung von Problemen vermittelt von Begriffen eines anderen Gegenstandsbereichs.

7.3 Bezüge zur mathematischen Geschichte.

7.4 Bezug zu neuen Gegenständen oder einer abweichenden Behandlung in späteren Kursen.

7.5 Humor - falls er in Verbindung mit den mathematischen Tätigkeiten steht.

Negatives Verhalten wird notiert, wenn offensichtlich falsche Behauptungen mathematischen Gehalts gemacht werden. Ist der Beobachter seiner Sache nicht sicher, wird das Verhalten als positiv klassifiziert.

Der Einsatz des Beboachtungs-Instruments ist ähnlich wie bei Flanders geregelt: Der Beobachter sitzt in der Klasse und kategorisiert das Unterrichtsgeschehen, bzw. genauer: die verbalen Interaktionen, die er beobachtet, in regelmäßigen Abständen. Während jedoch die Interaktionsanalyse nach Flanders in der Regel etwa alle 3 Sekunden erfolgt, beträgt bei Wright/Proctor ein Beobachtungsabschnitt 15 Sekunden, wobei die jeweils folgenden 15 Sekunden zur Klassifizierung verwendet werden. Während dieser Zeit wird nicht beobachtet, d.h. man macht 2 Eintragungen pro Minute (gegenüber ca. 2o nach Flanders). Jeder Vermerk besteht aus einem Zahlen-Tripel; denn es wird nach den 3 Dimensionen Inhalt, Prozeß und Haltung klassifiziert.

Um eine Vorstellung von der Art der Hypothesen zu vermitteln, die mit Hilfe dieses Beobachtungs-Instruments überprüft werden können, werden im folgenden zu jeder der drei Dimensionen einige Hypothesen aufgelistet, die in der genannten Untersuchung (32) von Wright/Proctor geprüft wurden.

HYPOTHESEN ZUM ZUSAMMENHANG EINIGER KATEGORIEN MIT DEN UNABHÄNGIGEN VARIABLEN (BEISPIELE) ((32, S. 15/16)

a) aus dem Bereich der I n h a l t e (content)

(1) Struktur korreliert positiv mit Strenge und Teilnahme

76

(2) Technik korreliert negativ mit Strenge und Teilnahme

(3) Deduktiv korreliert positiv mit Strenge

(4) Induktiv korreliert positiv mit Teilnahme

b) aus dem Bereich der P r o z e s s e (process)

(5) Analysieren korreliert positiv mit Strenge und Teilnahme

(6) Synthetisieren korreliert negativ mit Teilnahme

(7) Spezialisieren korreliert positiv mit Teilnahme und
negativ mit Strenge

(8) Verallgemeinern korreliert negativ mit Teilnahme

c) aus dem Bereich der H a l t u n g e n (attitude)

(9) Neugierde korreliert positiv mit Strenge

(1o) Selbständigkeit korreliert posotiv mit Teilnahme

(11) Rezeptive Haltung korreliert negativ mit Teilnahme

Die Prüfung der genannten Hypothesen führte zum folgenden Ergebnis:

ERGEBNISSE DER HYPOTHESEN-PRÜFUNG IN KURZFASSUNG ((32), S. 31/40)

(1) bestätigt. Signifikant mit zwei Ausnahmen: rp, RP

(2) bestätigt, mit einer Ausnahme, wo Rp < RP

(3) bestätigt, mit gewissen Einschränkungen

(4) widerlegt. Stattdessen konnte bestätigt werden:
Induktiv korreliert positiv mit Strenge und
negativ mit Teilnahme

(5) bestätigt, mit gewissen Einschränkungen

(6) widerlegt

(7) bestätigt, in 4 von 6 Fällen

(8) widerlegt, mit einer Ausnahme

(9) bestätigt, z.T. hoch signifikant

(1o) bestätigt, mit einer Ausnahme

(11) bestätigt, mit einer Ausnahme

Es ist bemerkenswert, daß nach Feststellung von Wright/Proctor Strenge und Teilnahme durchaus miteinander vereinbar zu sein scheinen, was sich insbesondere darin zeige, daß es etwa genauso viele rP- wie RP-Klassen in der untersuchten Stichprobe gäbe.

Mit wachsender Strenge nähme die Tendenz zur Beteiligung sogar zu[1]!

Für die Verfeinerung ihres Instruments sehen die beiden Forscher zwei Arten von Untersuchungen als besonders vordringlich an:"... comparision of results of observation with this instrument with other relevant measures and broader tests of observer reliability." ((32), S. 142) Diese Untersuchungen sind unseres Wissens bis heute nicht geführt. Dies ist kein Zufall; die Handhabung des Instruments ist nämlich alles andere als einfach und verlangt eine intensive Schulung der Beobachter. Es ist fraglich, ob es zur Zeit überhaupt möglich ist, die Kriterien ohne Verlust an Substanz so präzise zu fassen, daß sich eine Einübung in ihre Anwendung weitgehend erübrigt.

Während die Flandersche Interaktionsanalyse auf jeden Unterricht anwendbar ist und keine spezifischen Fachkenntnisse beim Beobachter voraussetzt, ist das Beobachtungsinstrument von Wright/Proctor fachspezifisch und nur durch einen Beobachter mit fundierten Fachkenntnissen handhabbar. Dieser "Mangel" liegt im Ansatz begründet und ist eher ein Hinweis auf die Leistungsfähigkeit dieses Instruments in fachdidaktischer Hinsicht. Beiden Beobachtungsmethoden ist gemeinsam, daß sie die ungeteilte Aufmerksamkeit des Beobachters fordern. Dies hat zur Konsequenz, daß sie der Lehrer nicht auf seinen eigenen Unterricht anwenden kann.

Wright und Proctor entwickelten ihr Beobachtungs-Instrument ausschließlich für Forschungszwecke. Dabei gingen sie von den beiden Hauptinteressen der damaligen Reform des Mathematikunterrichts aus: Erhöhung der mathematischen Strenge und stärkere Einbeziehung der Schüler. Inzwischen haben sich die Akzente verschoben. Doch was entscheidender ist, für die Hand des Lehrers ist dieses Instrument weder gedacht noch geeignet. Es ist

1) Die Beteiligung in den RP-Klassen ist im Vergleich zu der in den rP-Klassen wesentlich höher.

auch nicht recht vorstellbar, wie die Entwicklung eines für seine Hand gedachten Beobachtungs-Instruments ohne intensive Beteiligung der Lehrer an den Entwicklungsarbeiten vorangetrieben werden kann. Die neuerdings an vielen Orten gegebene Möglichkeit, Unterricht oder Stücke von Unterricht auf Video-Kassetten aufzuzeichnen, schafft dafür eine wichtige technische Voraussetzung.

V

Wir waren von der Kommunikationslücke zwischen Wissenschaftler und Lehrer, vom Mangel an wissenschaftlicher Fundierung der alltäglichen Lehrerentscheidungen ausgegangen. Unser sehr abgekürzter Überblick hat gezeigt, wie inkompatibel gegenwärtig die in der Praxis und die in der Erziehungswissenschaft gebräuchlichen Beobachtungsverfahren sind.

Es hat sich eine Richtung angedeutet, in welche die Wissenschaft ihre Verfahren entwickeln müßte, wenn sie unterrichtsrelevant werden sollen. Nur scheint es leider, daß sie in Verfolgung dieser Richtung eher noch komplizierter und für den Lehrer noch unpraktikabler werden.

Die Praxisferne wird noch dadurch erhöht, daß die Beobachtungsverfahren eine strikte Trennung zwischen Beobachter und Praktiker etablieren, entsprechend der Maxime der empirischen Forschung, den Einfluß des Beobachters auf das Beobachtete(*) möglichst zu neutralisieren.

Zu diesem Dilemma abschließend noch ein paar Bemerkungen: Die Kommunikationslücke kann nicht dadurch geschlossen werden, daß die Unterrichtsforschung auf das für das Begreifen ihres Gegenstandes notwendige Niveau an Komplexität und quantitativer Präzision verzichtet. Es läßt sich vielmehr umgekehrt vermuten, daß die Forschung, je präziser sie den Gegenstand Unterricht erfaßt, um so eher in der Lage ist, gemeinsam mit der Praxis das für den jeweiligen Zweck mögliche und sinnvolle Maß an Ver-

...ung und Verkürzung der theoretischen Perspektive zu ...stimmen. Die Forschung wird dazu umso eher im Stande sein, je angemessener ihr theoretisches Verständnis der Perspektive ist, in der sich dem Lehrer die Unterrichtsprobleme stellen und in der er sie lösen muß. Hier existieren u.E. noch große Lücken.

Neben einer Art Grundlagenforschung auf dem Gebiet der Unterrichtstheorie sollte eine zweite Art von Forschung treten, die sich unmittelbar darauf richtet, praktische Veränderungen zu initiieren, zu begleiten und zu beraten. Sie würde von der Grundlagenforschung profitieren und wäre zugleich ihr Korrektiv bei der Festsetzung ihrer Prioritäten und in Hinblick auf die Verallgemeinerungsfähigkeit ihrer Resultate. Sie stünde jedoch notwendig unter anderen Gesetzen: Sie kann keinen Schritt vorwärts tun ohne daß diejenigen, die ihre eigene Praxis verändern wollen, seinen Sinn einsehen; das gilt insbesondere für den Einsatz von empirischen Verfahren: die Trennung von Beobachter und Beobachteten ist allerhöchstens vorübergehend sinnvoll. Ziel dieser Forschung sind daher auch keine möglichst zuverlässigen und aussagekräftigen Daten, sondern die angezielten Veränderungen selbst und die Erfahrungen, die in der Organisation der Kooperation zwischen Praxis und Forschung gemacht werden. Diese Erfahrungen sind in jedem Fall nur eingeschränkt verallgemeinerbar.

Daß die breite Entwicklung einer solchen Forschung institutionelle und organisatorische Aspekte hat, ist evident, kann aber hier nicht weiter behandelt werden.

Literaturverzeichnis

(1) Amidon, E.J./Hough, J.B. (ed.): Interaction analysis: Theory, research, and application. Reading, Mass. (Addison-Wesley) 1967.

(2) Association d'étude pour l'expansion de la recherche scientifique (ed.): Les enseignants du second degré. Leur situation dans l'établissement scholaire. Quatre enquêtes préparatoires aux travaux du colloque d'Amiens, 1968. Paris (Dunod) 1969.

(3) Bellack, A.A./Kliebard, H.M./Hyman, R.T./Smith, F.L., Jr.: The language of the classroom. New York (Columbia University Press) 1966.

(4) Brown, B.B.: The experimental mind in education. New York 1968.

(5) Cane, B./Schroeder, C.: The teacher and research. Windsor (National Foundation for Educational Research Publ. C.) 197o.

(6) Deutscher Bildungsrat (Hrsg.): Zur Förderung praxisnaher Curriculum-Entwicklung. (= Empfehlungen der Bildungskommission). Bonn (Bundesdruckerei) 1974.

(7) Edelstein, W.: Pragmatische Lehrplanrevision durch die Lehrer. In: R. Burst u.a. (Hrsg.): Weinheimer Gesamtschul-Curricula. Heidelberg (Quelle & Meyer) 1971, 9-25.

(8) Evans, T.P.: A category system for teacher behaviors. In: American Biology Teacher 31 (1969), 221-225.

(9) Flanders, N.A.: Teacher influence, pupil attitudes, and achievement. Final report. (Cooperative Research Project No. 397, U.S. Office of Education.) Washington, D.C. (U.S. Government Printing Office) 1965.

(1o) Flanders, N.A.: Analyzing teaching behavior. Reading, Mass. (Addison-Wesley) 197o.

(11) Flechsig, K.H. u.a.: Ein erfahrungswissenschaftlich - entscheidungstheoretischer Ansatz einer Theorie der Curriculumentwicklung. In: D. Hoffmann/H. Tütken (Hrsg.): Realistische Erziehungswissenschaft. Hannover (Schroedel) 1972, 89-138.

(12) Flechsig, K.H./Haller, H.D.: Entscheidungsprozesse in der Curriculum-Entwicklung. (= Gutachten und Studien der Bildungskommission, Bd. 24). Stuttgart (Klett) 1973.

(13) Haller, H.D.: Die Anwendung erfahrungswissenschaftlicher Prinzipien und Methoden auf Prozesse der Entscheidung über Lernziele. In: Paedagogica Europea 6 (197o/71), 148-156.

(14) Handbuch der Unterrichtsforschung. Hrsg. v. K.Ingenkamp in Zusammenarbeit mit E.Parey. Deutsche Bearbeitung des Handbook of research on teaching. Ed. by N. L. Gage. Chicago, Ill. (Rand McNally & Co.) 1965. Teil 1-3. Weinheim (Beltz 197o/71).

(15) Hough, J.B./Duncan, J.K.: Teaching: Description and analysis. Reading, Mass. (Addison-Wesley) 197o.

(16) Huber, L.: Curriculumentwicklung und Lehrerfortbildung in der BRD. In: Neue Sammlung 11 (1971), S. 1o9-145.

(17) Hunter, E.: Some reasons for modifying existing category systems. In: Classroom Interaction Newsletter 6 (Spring 197o), 17-23.

(18) Kliebard, H.M.: Dimensions of meaning in classroom discourse. In: Journal of Teacher Education 17 (1966), 233-244.

(19) Koskenniemi, M.: Elemente der Unterrichtstheorie. München (Ehrenwirth) 1971.

(2o) McGraw, B./Wardrop, J.L./Bunda, M.A.: Classroom observation schemes: Where are the errors? In: American Educational Research Journal 9 (1972), 13-27.

(21) Nuthall, G.A./Lawrence, P.J.: Thinking in the classroom. Wellington (New Zealand Council for Educational Research) 1965.

(22) Parakh, J.S.: A study of teacher-pupil interaction in high school biology classes: Part II. Description and analysis. In: Journal of Research in Science Teaching 5 (1967/68), 183-192.

(23) Rosenshine, B.: Evaluation of classroom instruction. In: Review of Educational Research 4o (197o), 279-3oo.

(24) Rosenshine, B.: Interpretative study of teaching behaviors related to student achievement. Final report, U.S. Office of Education Project No. 9-B-010. Philadelphia (Temple University) 197o. ED o51 116.

(25) Rosenshine, B.: Teaching behaviors and student achievement. Windsor, Berkshire, England (National Foundation for Educational Research in England and Wales) 1971.

(26) Santini, B.: Das Curriculum im Urteil der Lehrer. Eine empirische Untersuchung. Weinheim (Beltz) 1971.

(27) Shulman, L.S.: Psychology and mathematics education. In: Mathematics education. The Sixty-ninth Yearbook of the National Society for the Study of Education. Part 1. Ed. by E.G. Begle. Chicago, Ill. (University of Chicago Press) 197o.

(28) Smith, B.O./Meux, M.O.: A study of the logic of teaching. Urbana, Ill. (University of Illinois Press) 197o.

(29) Soar, R.S.: An integrative approach to classroom learning. Final Report Public Health Service Grant No. 5-R11 MH 01096 and National Institute of Mental Health Grant No. 7-R11 MH 02045. Philadelphia (Temple University) 1966. ED 033 749.

(3o) Westbury , I./Bellack, A.(ed.): Research into classroom processes. New York (Teachers College Press) 1971.

(31) Wittmann, E.: Grundfragen des Mathematikunterrichts. Braunschweig (Vieweg) 1974.

(32) Wright, M.E./Proctor, V.H.: Systematic observations of verbal interaction as a method of comparing mathematics lessons. (U.S.Office of Educ. Coop. Res. Project No. 816) St. Louis, Mo. (Washington University) 1961. ED 003 827.

(33) Zahorik, J.A.: Teacher verbal feedback and content development. In: Journal of Educational Research 63 (197o), 419-423.

(34) Simon, A./Boyer, E.G.: Mirrors for behavior III. An anthology of observation instruments. Wyncote, Pennsylvania (Communication Materials Center) 1974.

Thesenartige Zusammenfassung des Vortrages

ELEMENTE VON UNTERRICHT IM SYSTEM UND MÖGLICHE KRITERIEN DER BEURTEILUNG DES UNTERRICHTSPROZESSES

von Hans Bussmann

1. These: Elemente von Unterricht im System darzustellen, erscheint dem Referenten beim gegenwärtigen Stand der Unterrichtsforschung als ein notwendiges, aber noch längst nicht abschließbares Bemühen. Wie KOSKENNIEMI in seinem Buch "Elemente einer Unterrichtstheorie" dargelegt hat, besteht zur Zeit noch nicht einmal Einmütigkeit darüber, welche Elemente als *konstitutiv* für den Unterricht angesehen werden können, und welcher Art die Beziehungen zwischen den Elementen sind. Auch die Wechselwirkung der Beziehungen selbst ist noch nicht genügend erforscht und empirisch abgesichert.

2. These: Der Referent greift diejenigen Elemente von Unterricht, welche KOSKENNIEMI als konstitutiv für den Unterricht ansieht, auf und stellt ihr Zusammenwirken im System anhand eines regelungstechnischen Modells dar. In seiner Abstraktheit umfaßt dieses Modell viele Einzelfälle des Beziehungsgefüges der Elemente eines Unterrichtsvorganges. Es ist daher geeignet, dem Lehrer den Gegenseitigkeitsbezug der Elemente im Unterricht zu verdeutlichen. Diese Verdeutlichung führt ihn von der Frage weg:

   "Was soll mein Unterricht bewirken?",

   und führt ihn zu der Frage hin:

   "Wie wirkt mein Unterricht?"

   Der Lehrer sieht sich aufgrund der regelungstechnischen Darstellung in seiner Rolle als ein mit vielen anderen Elementen verhaftetes Element.

3. These: Zwar umfaßt das regelungstechnische Modell viele Einzelfälle der Unterrichtselemente im System, es leistet jedoch nicht eine Überbrückung dessen, was schon immer als eine Kluft zwischen Erziehung als *Wissenschaft* und Erziehung als *Wirklichkeit* beschrieben wurde. Aber es macht diese Kluft besonders deutlich und zwingt zur sogenannten didaktischen Reduktion.

4. These: Es ist nicht Ziel des Vortrages, die Entscheidungslogik für die didaktische Reduktion zu erörtern. Vielmehr wird die didaktische Reduktion rein pragmatisch vorgenommen, und es wird Unterricht als Ort institutionalisierten Lehrens und Lernens definiert. Damit eröffnet sich die Möglichkeit, dem Lehrer für bestimmte Unterrichtsziele konkrete Entscheidungshilfen zu liefern und ihm auch gleichzeitig Desiderate der forschenden Didaktik hinsichtlich notwendiger Entscheidungshilfen anzugeben.

5. These: In dem Bewußtsein der hohen Komplexität unterrichtlichen Geschehens - dargestellt am regelungstechnischen Modell - und in der Benutzung von als reduziert deklarierter Entscheidungshilfen soll verdeutlicht werden, daß eine exakte Planung des Unterrichts den Lehrer in die Lage versetzt, Unterricht geschickter als ohne Planung abzuhalten. Die Unterrichtslektion als Kunstform nicht anstelle von Wissenschaft, sondern auf der Basis von Wissenschaft.

DAS ZAHLSYSTEM IM ELEMENTARUNTERRICHT

von Michèle Artigue, IREM Paris

Vom theoretischen Standpunkt aus gesehen, stellt das Zahlsystem kein Problem dar:

"Zu einer beliebigen ganzen Zahl a läßt sich jede ganze Zahl n eindeutig in der Form

$$n = (\pm)\alpha_p a^p + \ldots + \alpha_1 a + \alpha_0 \qquad ^{1)}$$

mit $\quad 0 \leq \alpha_i < |a|, \; \alpha_i$ ganz,

für $\quad i \in \{0, 1, \ldots, p\}$ schreiben.

Dabei wird $\alpha_p \ldots \alpha_0$ *Schreibweise* der ganzen Zahl n zur Basis a genannt."

Wenn es jedoch darum geht, Kindern das Schreiben der Zahlen, das Zählen und Rechnen zu lehren, dann liegen die Dinge nicht mehr so einfach.

Bei dem, worüber ich hier kurz berichten möchte, handelt es sich um ein Experiment, welches wir in diesem Jahr an der Beobachtungsschule von Melun sowohl mit den Schülern der CE 2 [2] als auch mit ihren Lehrern während der mathematischen Weiterbildungsveranstaltungen zu diesem Thema durchgeführt haben. Wir haben versucht, das Verhalten der Schüler zu studieren, die verschiedenen Entwicklungsstufen ihres Verstehens und die Schwierigkeiten, auf die sie stießen, zu analysieren.

1. *Behandlung des Zahlsystems mit den Lehrern*

Wir haben beschlossen, in den ersten mathematischen Weiter-

1) Vorzeichen benötigt man nur bei positiver Basis a!

2) classe élémentaire 2

bildungsveranstaltungen das Zahlsystem zu behandeln. Die Lehrer sind von unserer Idee "sehr beeindruckt". Das Zahlsystem ist ein Gebiet, in dem sie sich gut auskennen: Man füllt kleine, mittlere und große Beutel. Will man etwas "Konkretes" machen, so schichtet man Eier in Eierschachteln, dann die Eierschachteln in entsprechende Kartons (das Schwierigste war es, die Kartons aufzutreiben), die Kartons in Kisten ... Indem man zahlreiche Zeichnungen anfertigt, chiffriert und dechiffriert man, man füllt Tabellen aus, man erlernt die Addition bezüglich fünf oder sechs verschiedener Basen, und komme, was da wolle, daran ist nichts Geheimnisvolles.

Um die Sache interessanter zu machen, schlagen wir ihnen vor, zur Basis (-2) zu rechnen. Sie sind verdutzt: Wie soll man Päckchen aus (-2) Elementen machen? Wir machen uns sicherlich über sie lustig! Zur Basis 2, einverstanden, das können sie, aber man soll ihnen doch nicht mit der Basis (-2) kommen! Da sie offenbar die Basis 2 vorziehen, fordern wir sie auf, hundert in dieser Basis zu schreiben, und sie zeichnen auf ihr Blatt kleine Kreuze, kreisen die Paare ein, dann die Paare der Paare ... Wie wäre es mit tausend? Einer der Lehrer erinnert sich ungenau, im Sekundarunterricht anhand aufeinander folgender Divisionen vorgegangen zu sein, aber er weiß überhaupt nicht mehr warum.

Also fragen wir sie, wieviele Kreuze sie in ihren verschiedenen Gruppierungen haben. Sie zählen: 2, 4, 8, 16 und der Groschen fällt: Es sind 2, $2 \cdot 2$, $2 \cdot 2 \cdot 2$, $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. Wir führen die Exponentenschreibweise ein und wiederholen die Aufgabe mit der Basis 3. Es ist für sie eine Offenbarung, die uns verblüfft: "Jetzt können wir ja jede beliebige Zahl zu jeder beliebigen Basis schreiben, das mühsame Zeichnen ist nicht mehr nötig, es genügt, die Tabelle der Potenzen aufzustellen!"

Freiwillig gehen sie zur Basis (-2) zurück und stellen die Tabelle auf:

$256 = (-2)^8$, $-128 = (-2)^7$, $64 = (-2)^6$, $-32 = (-2)^5$, $16 = (-2)^4$, $8 = (-2)^3$, $4 = (-2)^2$, $-2 = (-2)^1$, $1 = (-2)^0$

Vier zu schreiben, ist kein Problem, das ist 100 wie zur Basis zwei.

Bei siebenundzwanzig fangen alle an zu schreiben:

$$1 \cdot 16 + 1 \cdot 4 + 1,$$

dann bedienen sie sich aufeinanderfolgender Näherungen:

$$1 \cdot 64 + 1 \cdot (-32),$$

$$1 \cdot 64 - 1 \cdot (-32) + 1 \cdot (-8),$$

um schließlich

$$1 \cdot 64 + 1 \cdot (-32) + 1 \cdot (-8) + 1 \cdot 4 + 1 \cdot (-2) + 1$$

zu erhalten, woraus sie unmittelbar die Schreibweise von siebenundzwanzig ableiten: 1101111.

Nachdem sie gemerkt haben, daß es gut war, die Schreibweise von drei zu kennen, um diejenige von siebenundzwanzig zu finden, sagen sie sich, daß es interessant wäre, die ersten zwanzig Zahlen zur Basis (-2) aufzuschreiben, und sie tun dies auch. Sie entdecken Gesetze, so z.B., daß man,

wenn $1 < a \leq 5$, mit $(-2)^2$ anfangen muß, um a darstellen zu können,

wenn $5 < a \leq 21$, mit $(-2)^4$ anfangen muß, um a darstellen zu können.

Sie versuchen, dreiundachtzig zu schreiben und dieses Gesetz zu verallgemeinern:

$64 < 83 < 256$, aber $64 + 16 + 4 + 1 = 85$, das ist mehr als 83, es genügt also bei $(-2)^6 = 64$ zu beginnen:

$$83 - 64 = 19$$
$$19 = 16 + 3$$
$$= 16 + 4 - (-2) + 1.$$

Dreiundachtzig wird also wie folgt geschrieben:

1010111.

Weiterhin erkennen sie, daß die Ordnung der Zahlen aus ihrer Schreibweise nicht ersichtlich ist:

> 27 < 83, nun schreibt man jedoch für 27 : 1101111
> und für 83 : 1010111;

außerdem stellen sie fest, daß alle natürlichen Zahlen mit einer ungeraden Anzahl von Ziffern geschrieben werden, und sie erklären warum.

Sogar operative Techniken bezüglich dieser Basis werden sie erfinden. In den folgenden Stunden, in denen die verschiedenen Verfahrensweisen für die vier Grundrechenarten behandelt werden, gehen sie äußerst geschickt mit allen auftretenden Problemen um. Sie sind sich über das Wesen des Zahlsystems klar geworden, auf sichere und fruchtbare Weise.

2. *Behandlung des Zahlsystems mit den Schülern der CE_2*

Zunächst zogen wir folgenden Schluß: Erst nachdem die Lehrer die Bedeutung der Potenzen der Basis entdeckt hatten, war es ihnen möglich geworden, das Stadium der Manipulation, in dem sie vorher verblieben waren, schnell zu verlassen und deutliche Fortschritte zu erzielen. Warum sollten wir nicht ebenso mit den Schülern der CE_2 vorgehen, denen wir in diesem Jahr vor allem Techniken der Subtraktion und Multiplikation beibringen wollten? Vielleicht würden wir dadurch Schwierigkeiten vermeiden können, die sonst z.B. bei der Multiplikation mit zehn und bei Potenzen von zehn auftraten.

Außerdem wollten wir eigentlich gern wissen, welche Entdeckungen die Kinder machen würden, die ja nicht die gleichen Kenntnisse wie die Lehrer zu folgenden Problemen besaßen:

- Verwendung von Tabellen, in denen die Potenzen der Basis zum Chiffrieren und Dechiffrieren der Zahlen angegeben sind.
- Entdecken des Gesetzes der Folge bei der Schreibweise bezüg-

lich Basen verschieden von zehn.

- Vergleichen von Zahlen, die in anderen als der Basis zehn geschrieben sind.

- In der Lage sein. Angaben über die Schreibweise einer Zahl zu begründen und abzuleiten.

- Übung mit "Näherungen" auf der Basis zehn und anderen Basen, dies in Verbindung mit Zahlsystem und Addition.

Warum befassen wir uns so intensiv mit den anderen Basen? Weil wir das Verhalten der Kinder untersuchen wollten. Mit der Basis zehn hatten sie einige Erfahrungen gesammelt, die sie oft nicht erklären konnten, und wenn wir sie anregten, sich dazu zu äußern, verstanden sie uns nicht, fingen an, an ihrem Wissen zu zweifeln und stellten global alles wieder in Frage.

Außerdem waren diese Übungen zur Basis zehn für sie uninteressant. Bezüglich anderer Basen waren sie so anziehend wie Rätsel (wir stellten sie oft in dieser Form dar). Dabei konnten wir Folgendes besser beobachten: Art und Weise, in der sie folgerten, ob sie überhaupt Schlüsse zogen, relative Bedeutung der Manipulationen und des Schriftlichen und ob sie Ergebnisse früherer Übungen benutzten oder nicht.

Dies soll nun nicht bedeuten, man müßte sich diese Probleme hinsichtlich des Zahlsystems in der CE 2 stellen - dieser Gedanke liegt uns fern! Wir sind gegen die systematische, übermäßige und mechanische Verwendung von anderen Basen als zehn, gegen das Lehren von Rechentechniken auf mehreren Basen, was gegenwärtig in vielen Schulen praktiziert wird.

Wenn wir es getan haben, dann lediglich deshalb, um das Verhalten der Kinder und die Ursachen für ihre Schwierigkeiten auf diesem Gebiet besser zu verstehen.

2.1 In der ersten Unterrichtsstunde haben wir versucht, die Kenntnisse der Kinder auf dem Gebiet des Zahlsystems zu er-

mitteln. Zu diesem Zweck sollten sie eine sehr einfache Übung durchführen:
Wir haben die Schüler in Gruppen, bestehend aus je zwei Kindern eingeteilt und einem Kind aus jeder Gruppe einen Beutel mit 16 Würfeln gegeben. Dann forderten wir die Besitzer der Beutel auf, ihrem Kameraden schriftlich mitzuteilen, wieviele Würfel in dem Beutel sind; dabei sollten folgende Bedingungen beachtet werden:

man darf nur die Ziffern 0,1 und 2 verwenden,
man darf keine Summen verwenden.

Sehr schnell sagte eines der Kinder: "Auf welcher Basis sind wir?" Bald ist das Problem eingeordnet: "Die Anzahl der Würfel muß zur Basis 3 geschrieben werden", sagen alle gleichzeitig. Alle gruppieren ihre Würfel ohne Schwierigkeiten und übermitteln die Botschaft 121 ihren Kameraden. Sie verwendeten im Vorjahr eine Farbe für jede Gruppierung und kehren spontan zu dieser Praxis zurück: in 121 ist die linke 1 rot, die 2 blau und die rechte 1 grau. (Im folgenden bezeichne ich die Farben mit R,B,G). Die anderen erhalten die Botschaft, sehen die farbig geschriebenen Zahlen und begreifen, daß es sich um eine Schreibweise zu einer Basis handelt. Die eine Hälfte fragt, um welche Basis es sich wohl handele; die andere Hälfte erklärt, es handele sich um die Basis drei, weil in der Botschaft keine drei vorkäme (wie schön ist die Mechanisierung)! Durch Manipulieren entdecken sie rasch die Anzahl der Würfel. Niemand interessierte sich dafür, ob man auch eine andere Basis statt der Basis drei benutzen könne.

Die darauf folgenden Übungen im Chiffrieren und Dechiffrieren bewältigen die Schüler mühelos, und am Ende dieser ersten Stunde können wir sagen, daß alle Kinder durch Manipulieren oder Verwenden von Zeichnungen, Zahlen chiffrieren und dechiffrieren können. Wir glauben, rasch fortschreiten zu können.

2.2 Im Verlauf der nächsten Unterrichtsstunde, während wir zur Basis 10 arbeiten, stoßen wir auf die ersten Schwierigkeiten.

Jedes Kind nimmt einen Haufen Würfel und schreibt die Anzahl der Würfel, die es besitzt, zur Basis zehn, indem es farbige Karten verwendet. Wenn es z.B. 35 Würfel hat, dann schreibt es

3 auf eine blaue Karte, 5 auf eine graue Karte.

Nun fordern wir sie auf, die beiden Würfelhaufen auf jedem Tisch zusammen in einen Beutel zu tun, diesen zu schließen und die Anzahl der Würfel in dem Beutel wieder unter Verwendung der farbigen Karten aufzuschreiben.

Wenn z.B. ein Kind $\underset{B}{\boxed{2}}\ \underset{G}{\boxed{8}}$ und das an[illegible] $\underset{B}{\boxed{}}\ \underset{G}{\boxed{7}}$ hat,

so schreiben sie $\underset{B}{\boxed{3}}\ \underset{G}{\boxed{15}}$.

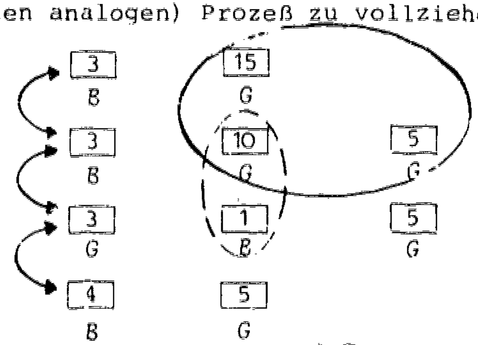
Nur ein Kind führt die Addition auf traditionelle Weise in der Form

$$\begin{array}{r} 28 \\ +\,17 \\ \hline 45 \end{array}$$

durch und gibt uns dann als Resultat: $\underset{B}{\boxed{4}}\ \underset{G}{\boxed{5}}$.

Wir fordern die anderen Kinder auf, eine neue Botschaft zu schreiben, die aus nur einer einzigen Ziffer pro farbiger Karte besteht. Fast alle wissen keinen Rat. Durch die anschauliche Unterstützung mithilfe der Würfel hat für sie die Schreibweise $\underset{B}{\boxed{3}}\ \underset{G}{\boxed{15}}$ viel von ihrer Bedeutung verloren.

Wir fordern in der Tat von ihnen, gedanklich den folgenden (oder einen analogen) Prozeß zu vollziehen,



92

der ihnen, anscheinend, gar nicht so leicht fällt.

Um das Problem zu lösen, müssen viele das, was beide von ihnen vorher hatten, vollständig neu aufzeichnen und dann die Gruppierungen mit Farbstift einkreisen. Einige sind sogar gezwungen, ihre Beutel zu öffnen und effektiv Gruppierungen zu bilden.

Die Übung hat sie vor zu viele Schwierigkeiten gestellt, als daß sie ein wenig Abstand hätten gewinnen und irgendeine Beziehung zu ihren Additionsmethoden hätten sehen können.

2.3 Dann beginnen die Kinder von neuem mit derselben Übung. Jedes wählt sich zunächst eine Zahl aus. Viele können lange Zeit nicht auf das Zeichnen verzichten. Der Farben der Karten wegen - zweifellos spüren sie die Beziehung zur Addition noch nicht sehr gut - amüsieren sich die Kinder sehr bei diesen Spielen, forschen nach der Schwierigkeit und erfinden neue Farben für Gruppierungen höherer Ordnung. In dem Bestreben, ihre Methoden wirtschaftlich einzusetzen, vergessen sie allmählich die Karten, behalten Zahlen zurück, vergessen dann die Farben, kurzum, sie führen wieder ihre gewohnten Additionen durch. Wir unterbrechen an diesem Punkt.

2.4 Um den Kindern zu ermöglichen, das Stadium der Manipulation zu verlassen, (dies ist ja unsere Absicht) versuchen wir dann, ihnen das Vorhandensein der Potenzen der Basis klar zu machen.

Zu diesem Zweck machen wir jeden Vormittag [illegible]ig Minuten lang Übungen folgender Art:

- Wieviele Würfel befinden sich in einer blau[illegible] Gruppierung zur Basis fünf?
- Wieviele Würfel befinden sich in einer roten Gruppierung zur Basis fünf?

Wir lassen diese Ergebnisse auf der Tafel stehen und fragen dann zum Beispiel:

- Wie schreibt man 5,6 zur Basis fünf?
- Wie schreibt man 25, 26, 27?

Um das Ergebnis zu finden, manipulieren die Kinder, ausgenommen zwei oder drei, immer noch (d.h. sie machen Zeichnungen). Wenn sie eine andere Frage beantworten sollen, benutzen sie nicht die Zeichnung, die sie schon haben, auch dann nicht, wenn lediglich ein oder zwei Kreuze hinzugefügt werden müßten, sondern sie fangen immer wieder ganz von vorn an.

Wenn die Äquivalenz

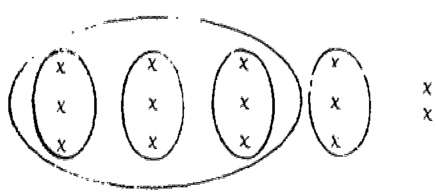
> "Dies sind fünf Würfel in einer blauen Gruppierung zur Basis fünf."
> "Fünf schreibt man 10 zur Basis fünf."

ihnen klar ist, so trifft das nicht auch für die folgende zu:

> "Dies sind fünfundzwanzig Würfel in einer roten Gruppierung zur Basis fünf."
> "Fünfundzwanzig schreibt man 100 zur Basis fünf",

auch dann nicht, wenn mehrere Übungen dieser Art gemacht worden sind, was mit dem folgenden Phänomen zu vergleichen ist:

Wenn wir die Kinder fragen, wieviele Gegenstände die Schreibweise 112 zur Basis drei darstellt, so zeichnen alle



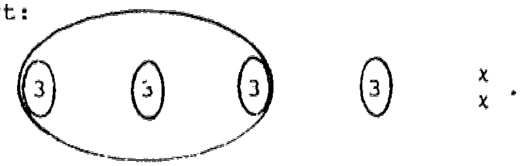
und berechnen dann $3 + 3 + 3 = 9$ $9 + 3 = 12$ $12 + 2 = 14$.

Fordern wir sie unmittelbar danach auf, uns zu sagen, wieviele Gegenstände einer entsprechenden Menge, die Schreibweise 122 zur selben Basis darstellt, dann fangen sie wieder von vorn an, geben genau dieselbe Darstellung und rechnen auf

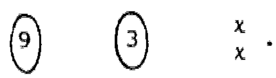
94

die gleiche Weise.

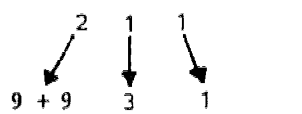
Nur zwei Kinder brachten es schließlich fertig, mit nur einer Darstellung auszukommen; solange sie lesbar blieb, korrigierten sie diese je nach Bedarf. Mehrere kamen zu Darstellungen folgender Art:



Aber trotz unserer Vorschläge (ziemlich wenige, wie man zugeben muß, weil es sich hierbei in der Hauptsache um Beobachtungsarbeit handelte) wurde niemals "vergessen", daß die Gruppierung der Ordnung 1 in der Gruppierung der Ordnung 2 enthalten ist und ebenfalls nicht eine [illegible]bweise der Art:



Abgesehen von den oben genannten Ausnahmen, kann niemand spontan die folgende Dechiffrierung (die doch unser Ziel war) verwenden



18 + 3 + 1 = 22

Dies, was die Dechiffrierung betrifft.
Bei der Kodierung sind die Schwierigkeiten noch größer, denn will man z.B. zwölf zur Basis drei schreiben, so muß man:

1) 12 durch Potenzen von drei einrahmen: 9<12<27,
2) 12 in der Form 9 + 3 schreiben,
3) von der Schreibweise 9 + 3 zur Schreibweise 110 bezüglich der Basis drei übergehen.

Für Kinder ist dies schwierig und weit unzuverlässiger als das Manipulieren. Es erstaunt also nicht, daß sie diese Methode nicht verwenden.

2.5 Wir haben auch festgestellt, daß die Kinder, wenn sie durch Manipulieren die Schreibweise von 24 zur Basis drei z.B. gefunden hatten, nicht in der Lage waren, sofort die Schreibweise von 25 anzugeben, während ihnen zur Basis zehn Übungen dieser Art überhaupt keine Schwierigkeiten bereiteten.

Deshalb baten wir sie, für den Unterricht eine große Tabelle anzufertigen, die die Zahlen von null bis zwanzig, aufgeschrieben zu den Basen zehn, zwei, drei und vier enthalten sollte.

Die Kinder sind damit voll und ganz einverstanden, denn sie hätten nun, sagen sie uns, "eine ganz schöne Menge an Ergebnissen vor Augen" und das würde ihnen das lästige Manipulieren ersparen. Fast alle Kinder haben diese Tabelle angefertigt, ohne sich über die Langweiligkeit klar zu werden oder zumindest ohne fest daran zu glauben, daß ihnen die kleinen Zeichnungen erspart werden könnten.

Als dagegen die Tabelle fertig ist, machen sie zahlreiche, mehr oder weniger gut formulierte Bemerkungen und wollen sie zum Lösen kleiner, von uns gestellter Probleme oder von ihnen erfundener benutzen:

- Man deckt eine Zeile der Tabelle ab, können sie uns sagen, was in dieser Zeile steht?
- Man deckt zwei Zeilen der Tabelle ab, können sie antworten, ohne Zeichnungen anzufertigen?
- Es soll eine Zahl unter zwanzig gefunden werden, die mit vier Nullen zur Basis zwei geschreiben wird.
- Welche Zahlen haben gleichzeitig zur Basis zwei und zur Basis drei sowie zur Basis zwei und zur Basis vier eine Null am Ende? Was bemerken sie?

Wir könnten noch lange so weitermachen.
Zum Schluß möchte ich über zwei Übungen berichten, die das

Verhalten der Kinder mit Illustrieren:

"In der CE 1 sind sechsundzwanzig Schüler; gestern nachmittag hat die Lehrerin Bonbons verteilt, und heute morgen hat sie die Anzahl der verteilten Bonbons zur Basis vier an die Tafel geschrieben:

[illegible]

Hat jeder ein Bonbon bekommen?"

- Über die Hälfte der Kinder dechiffriert 202 mithilfe von Zeichnungen.
- Zwei oder drei chiffrieren dagegen 26 zur Basis vier und vergleichen mit 202.
- Ein Viertel der Klasse etwa macht sich daran, die Spalten in der Tabelle zur Basis vier so weit fortzusetzen, bis sie zu 202 gelangen. Mehrere wählen den falschen Weg.
- Zwei schreiben: "202 das macht 16 + 16 + 2, es sind genug Bonbons vorhanden".

"Jean Paul hat die Anzahl seiner Murmeln in sein Heft geschrieben: 121 vorgestern. Gestern hat er vier Murmeln gewonnen und schreibt 202. Aber er hat vergessen, welche Basis er zum Aufschreiben der Anzahl seiner Murmeln verwendet hat. Könnt ihr ihm sagen, welche es ist?"

Die Kinder sind ein wenig verwirrt, denn sie können nicht rechnen. Nach einiger Zeit sehen sie auf ihrer Tabelle nach, welches die Zahlen sind, die zur Basis drei und vier 121 geschrieben werden. Sie überspringen vier Zeilen und auf der Basis drei stoßen sie genau auf 202. Sie sagen dann: "Er hat die Basis drei benutzt". Aber das klingt ziemlich unsicher, als ob sie das Gefühl hätten, die Aufgabe nicht gelöst zu haben.

Ein kleines Mädchen macht sich daran, mühsam zu beweisen, daß es nicht die Basis vier, auch nicht die Basis fünf sein kann, sie geht bis zur Basis neun. Zwei Kinder, immer noch dieselben, schreiben:

" 121 + 4 = 125

und nur zur Basis drei hat 5 eine 2 am Ende".
Aber als sie dies an der Tabelle erklären, erheben ihre Mitschüler Einspruch und sagen, man dürfe 125 nicht zur Basis drei schreiben. Wir haben jedoch während des gesamten Experiments nach Möglichkeiten gesucht, solche Tabus bei ihnen nicht aufkommen zu lassen.
Eine kleine Anmerkung, bevor ich auf diese Frage zurückkomme. Wir haben den Eindruck, daß die Kinder nunmehr das Gesetz der Folge bei der Schreibweise gut erfaßt haben. Einige Tage später wollen wir ihnen die folgende Übung vorlegen:

"Ein verrückter Kolonialwarenhändler schreibt seine Gewinne zur Basis vier auf. Gestern Abend schrieb er

1 2 0 3 1 0 2 1 .

Heute hat er kein gutes Geschäft gemacht - er hat nur 7 Francs eingenommen -, was wird er in sein Heft eintragen? Was hätte er eingetragen, wenn er zwei Francs eingenommen hätte?"

Es fällt den Kindern leicht, die zweite Frage zu beantworten, aber was die erste betrifft, so sind sie ratlos, bis einer von ihnen auf die Idee kommt, 7 zur Basis vier zu schreiben. Dann führen alle mit gleicher Begeisterung die Addition durch, und das Problem ist gelöst.

2.6 In den folgenden Stunden, in denen mit Geld gearbeitet wird, insbesondere während der Vorübungen zur Subtraktion, bestehen wir auf der Tatsache, daß die Zahlen zu einer gegebenen Basis mehrere äquivalente Schreibweisen haben können, und daß dadurch das System sehr flexibel wird, solange man noch nicht gewandt genug ist, mehrere verschiedene Basen zu benutzen. Zum Beispiel stellt die folgende Schreibweise zur Basis drei

$$\begin{array}{rccc} & 1 & 2 & 2 \\ + & 2 & 1 & 2 \\ \hline & 3 & 3 & 4 \end{array}$$ genau diese Manipulation dar.

1111 wird die definitive Schreibweise sein, wenn erst einmal alle Gruppierungen durchgeführt worden sind. Warum soll man die Kinder zwingen, wie dies oft im Unterricht getan wird, von Anfang an, diese Zwischenstufe zu überspringen, und warum soll man nicht die Tatsache berücksichtigen, daß wir, welche Basis auch immer benutzt wird, trotzdem bezüglich der Basis zehn denken?

Die vollkommen reduzierte Schreibweise bietet doppelten Vorteil:

- Wenn erst einmal die Basis angezeigt ist, dann ist die Schreibweise nicht vieldeutig; das Verwenden von Klammern oder Tabellen ist nicht notwendig.
- Die Ordnung der Zahlen läßt sich unmittelbar erkennen.

(Allerdings, wenn dies auch effektiv für uns zutrifft, so hat das Experiment doch gezeigt, daß dies bei den Kindern bezüglich Basen verschieden von zehn nicht unbedingt auch der Fall ist: In der Cl 2 mußten die Kinder am Ende der Spiele ihre zur Basis vier geschriebenen Gewinne vergleichen.

Ein Team hatte	1	2	2	Steine,
ein anderes	2	1	1	Steine eingenommen.

Gut die Hälfte der Klasse war der Ansicht, daß erste Team habe gewonnen, denn

$$1 + 2 + 2 \;>\; 2 + 1 + 1.$$

Obwohl sie theoretisch Zahlen, die bezüglich anderer Basen als zehn geschrieben sind, vergleichen können, haben in der Cl 2 fast alle Schüler, außer zwei oder drei, als sich ihnen die Gelegenheit bot, ihre Gewinne wieder in Einer umgewandelt, um so den Vergleich durchzuführen.)

3. Schlußfolgerung

Die Bilanz dieser zweimonatigen Arbeit (zwei Stunden pro Woche, manchmal mehr) auf diesem Gebiet, erscheint uns wenig positiv.

Wir haben den Eindruck, daß die Kinder durch die Erfahrung und nur durch die Erfahrung, Dinge wie die Schreibweise von Zahlen, die Addition und Rechentechniken gelernt haben. Die Zuverlässigkeit dieser Techniken beruht für sie noch in hohem Maße auf dem Vertrauen, das ihnen die Lehrerin entgegenbringt und der Zuversicht, die sie auf die Schüler überträgt. Sie haben das Zählen gelernt durch Manipulieren, durch Herstellen von Gruppierungen und schließlich durch Aufschreiben der Ergebnisse dieser Manipulation. Diese handwerklichen Fähigkeiten sind wiederum mit der speziellen Situation verknüpft und können nicht verallgemeinert werden.

Durch häufiges "Benutzen" der Basis zehn, haben sie dafür eine bestimmte Anzahl von "Tricks" entdeckt, die sie sich nicht sehr gut erklären können und die sie also auch nicht verallgemeinern können. Keine Technik ergibt sich aus einer echten Schlußfolgerung. Wenn man diese Rechentechniken durch verschiedene Übungen in Frage stellt, mit dem offensichtlich löblichen Ziel, deren Mechanismen abzubauen, dann stiftet man Verwirrung. Auf diesem Niveau (welches dasjenige unserer CI 2 war, aber nicht dasjenige aller CI 2 sein muß, näheres dazu später) bauen die Kinder nicht nur die Mechanismen nicht ab, sondern sie verlieren auch jegliches Vertrauen in ihre Verfahrensweisen und wissen nicht mehr, woran sie sich halten sollen.

Wenn sie z.B. 237 schreiben, können sie wie folgt denken:

	2 Beutel rot, 3 Beutel blau, 7 grau
oder	2 Hunderter, 3 Zehner, 7 Einer, was auf dasselbe herauskommt
oder	200 + 30 + 7,

niemals denken sie in der Tat an die folgende Äquivalenz

2 Hunderter, 3 Zehner und 7 Einer

$200 + 30 + 7 \qquad 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 7$

denn, und hier stößt man meiner Ansicht nach auf die Hauptursache der Schwierigkeiten: Um so denken zu können, müßten die Kinder sicher im Umgang mit den Werkzeugen sein, die sie gerade erst kennenlernen: Addition, Multiplikation und ihre Eigenschaften. Sie bewegen sich in einem circulus vitiosus: Um den Umgang mit dem einen gut erlernen zu können, müßte man mit dem anderen vertraut sein, und umgekehrt.

Dies erklärt auch zum Teil den beobachteten Unterschied zwischen ihrem Verhalten und dem der Lehrer: letztere beherrschten diese Werkzeuge, die es ihnen ermöglichten, rasch das Stadium der Manipulation, in dem sie, wie ihre Schüler, verblieben waren, zu überwinden.

Ich hoffe, daß diese Überlegungen auch zum Verständnis dafür beitragen, wie groß der Zeitaufwand ist, den die Lehrer für diese Tätigkeiten einplanen müssen, wenn sie wollen, daß die Kinder die Verfahrensweisen, z.B. für die Subtraktion und die Multiplikation selbst "entdecken".

Zum Schluß ein Erlebnis, das uns Zuversicht geben sollte: Zwei Monate, nachdem wir die Behandlung des Zahlsystems abgeschlossen hatten, forderten wir die Schüler auf, sich selbst Multiplikationsaufgaben zu stellen und so viele wie möglich in einer halben Stunde schriftlich auszurechnen. Auf den Arbeitsbögen, die sie uns abgaben, wimmelte es von Multiplikationen mit zehn und Potenzen von zehn, während wir doch diese Frage, die uns im Vorjahr ernsthafte Probleme gestellt hatte, noch gar nicht angeschnitten hatten. Alle waren richtig. Was wir bezüglich des Zahlsystems gemacht hatten, war letzten Endes vielleicht doch nicht völlig nutzlos.

KANN MAN DIE METHODEN ZUR BERECHNUNG VON PRODUKTEN NATÜRLICHER ZAHLEN VERBESSERN?

von G. Brousseau, IREM Bordeaux

In diesem Ausschuß [1] beschäftigen wir uns damit, anhand von Beobachtungen oder Experimenten im Bereich der Erziehung die verschiedenen Zustände, die mathematischen Objekten zugeschrieben werden können, sowie ihre Beziehungen zu den Unterrichtszielen zu erkennen.

Ich bin der Meinung, daß es vielleicht nützlich ist, an dieser Stelle über die sehr einfachen Resultate eines Experiments zu berichten, das ich am I.R.E.M. Bordeaux im Rahmen einer Untersuchung über die Voraussetzungen für das Lehren von Algorithmen und des mathematischen Schließens durchgeführt habe.

Aus Zeitgründen werde ich mich bewußt auf die summarische Untersuchung eines einzigen Phänomens beschränken. Wenn dies auch unserem gemeinsamen Streben nach getreuer Darstellung der Tätigkeit des Kindes nicht Genüge tut, so hoffe ich doch, daß die Art und Weise, in der die Mathematik in dieser Studie wirksam wird, dadurch nicht verändert wird.

1 - *Das Experiment*

1.1 - *Rahmen des Experiments*

Es ging darum, einen pädagogischen Weg zu finden, der es den Kindern erlaubte, sich schrittweise eine Methode zur Berechnung des Produkts aus zwei natürlichen Zahlen zu erarbeiten, ohne daß man ihnen irgendeine Technik vermittelt oder irgendwelche formalen Rechenübungen von ihnen verlangt

1) Internationaler Kongreß der Erziehungswissenschaften, Paris 3. - 7. Sept. 1973, Ausschuß "Mathematik und Erziehungswissenschaften".

hätte. Wir waren der Auffassung, daß wir bei Anwendung dieser Methode später anhand der Entwicklung der durch die Kinder entdeckten und verwendeten Algorithmen einige der Gesetze der natürlichen Mathematisierungsprozesse untersuchen könnten, deren Vorhandensein wir vermuten. Bevor wir diese Methode konzipierten, haben wir alle Algorithmen, die auftreten könnten, geprüft und versucht, sie zu charakterisieren, um im Hinblick auf die beobachteten Verhaltensweisen das Auftreten wichtiger Parameter vorherzusagen: Fehlerzahl, Schnelligkeit der Durchführung, Schnelligkeit des Unterrichtsvorgangs... usw.

Im Verlauf dieser Analyse hat es sich als möglich erwiesen, mit Hilfe des folgenden Experiments die Angemessenheit bestimmter Modelle des Schülerverhaltens zu überprüfen.

1.2 - *Anlage des Experiments*

Wir bereiteten eine Aufgabensammlung vor, die eine bestimmte Anzahl von Multiplikationen enthielt und legten sie 600 Kindern (150 davon waren auf der Stufe der CM 2, also 9 bis 11 Jahre alt) vor. Wir kontrollierten eine bestimmte Anzahl von Variablen: Unterrichts- und Ermüdungseffekt, I Q, Qualität der Lehrer, soziale Herkunft der Schüler ... und untersuchten dabei andere Variablen, wie z.B.: Umfang der Operation, Vorhandensein von Überträgen, relative Häufigkeit von Elementarprodukten, Schulniveau, ... usw.

Alle Kinder rechneten mit der Methode nach italienischer Art (siehe Bild 1), die man sie gelehrt hatte.

Wir unterrichteten dann einige von ihnen in der Methode "per gelosia" (siehe Bild 1) (eine Stunde Unterricht). Die Kontrollen zeigten einen sehr deutlichen (sehr bezeichnenden) Fortschritt hinsichtlich der Resultate (viel weniger Fehler), ohne daß nennenswerte Unterschiede in der Durchführungszeit aufgetreten wären.

1.3 - *Realisierung*

Es ist nicht erforderlich, hier im einzelnen die diffizilen, aber klassischen Vorsichtsmaßnahmen zu beschreiben, die wir für die Durchführung dieses Experiments getroffen haben. Das Ziel der beiden folgenden Abschnitte dieser Studie ist es, den beobachteten Fortschritt zu erklären und ihn vorherzusagen.

2 - *Darstellung: Vereinfachte Beschreibung des Verhaltens eines Schülers, der das Produkt aus zwei Zahlen berechnet.*

2.1 - *Beschreibung des beobachteten Verhaltens*

2.1.1 - *Tätigkeit:* Wir beobachten - ganz grob - lediglich die Verhaltensweisen

- die das folgende Ziel der Ausbildung konkretisieren:

"das Kind ist in der Lage, das Produkt aus zwei beliebigen natürlichen Zahlen zu finden."

- die sich durch eine Folge von wahrnehmbaren (z.B. Schreiben eines Teilergebnisses) oder ganz unmittelbar nachweisbaren (Lesen bestimmter Zahlen, ...) Tätigkeiten manifestieren

- und bei denen bestimmte, als bekannt vorausgesetzte, Formeln (einer Additions- oder einer Multiplikationstabelle zum Beispiel) angesprochen werden.

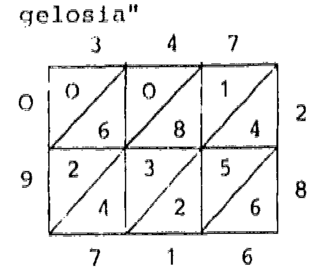
Wir werden hier zum Beispiel nicht die Tätigkeit einer Versuchsperson beschreiben, die über alle Formeln nur mit Hilfe eines äußeren Gedächtnisses verfügt, und die das Produkt in einer Tabelle oder mit Hilfe einer Tabelle (der Logarithmen etwa) sucht.

2.1.2 - *Erste Analyse dieser Tätigkeit:* Unter den angenommenen Voraussetzungen ist die Gliederung dieser Folge von Tätigkeiten beobachtbar - sie kann durch ein Flußdiagramm, d.h. durch ein Schema des Rechenprogramms dargestellt werden -. Hier z.B. (Bild 1) die Berechnung des Produktes aus 347 · 28.

Durch die Methode "auf italienische Art"

```
   347
 ·  28
 -----
  2776
  694
 -----
  9716
```

Durch die Methode "per gelosia"



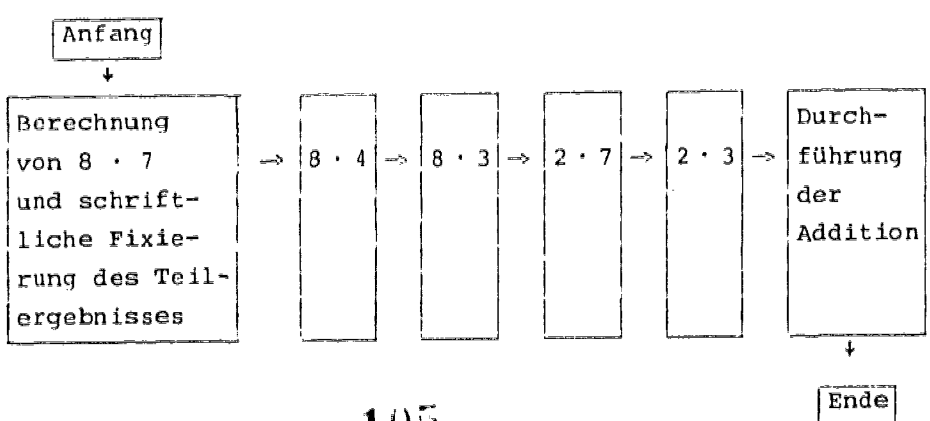
In beiden Fällen mußten schrittweise alle Teilprodukte errechnet werden:

{8 · 7; 8 · 4; 8 · 3; 2 · 7; 2 · 4; 2 · 3}

Während diese Reihenfolge für die erste Methode zutrifft, kann für die zweite eine beliebige Reihenfolge verwendet werden.

Schema 1 stellt ein Flußdiagramm dar, das beiden Methoden gerecht wird:

Schema 1



105

Durch Beobachtung der Versuchsperson kann festgestellt werden, ob jeder Schritt in dieser Reihenfolge durchgeführt worden ist.

Anmerkung: Allgemeiner ausgedrückt, man muß beim Berechnen des Produktes aus zwei natürlichen Zahlen a mit p Ziffern und b mit q Ziffern

$$a \cdot b = \sum_{i=0}^{i=p-1} a_i \, 10^i \cdot \sum_{j=0}^{j=q-1} b_j \, 10^j$$

$$= \sum_{k=0}^{k=(p-1)+(q-1)} \Big(\sum_{i+j=k} a_i \, b_j \, 10^{i+j} \Big)$$

$p \cdot q$ Teilprodukte ausrechnen, und das Flußdiagramm enthält $p \cdot q$ Berechnungen von Teilresultaten, bevor die Addition durchgeführt wird. Wir sagen, daß die Operation den Umfang $p \cdot q$ hat, z.B. hat die Operation des Bildes 1 den Umfang 6.

2.1.3 - *Differenziertere Analyse der Tätigkeit:* Wir können die Berechnung eines Teilproduktes auch in elementarere Tätigkeiten zerlegen. Die beiden Methoden gehören nicht mehr zu ein und demselben Flußdiagramm; man bemerkt jedoch, daß die Berechnung eines jeden Teilresultats einer identischen Sequenz von Handlungen oder Entscheidungen folgt. Eine solche, sich wiederholende Sequenz werden wir "Schleife" nennen. Die Schemata 2 und 3 stellen eine Schleife jeder Methode dar (die vollständigen Flußdiagramme des Bildes 1 z.B. würden 6 Schleifen enthalten). Der Umfang der Operation bestimmt die Anzahl der Schleifen. Natürlich werden hierbei Fähigkeiten angesprochen, deren Vorhandensein bei den Versuchspersonen zu überprüfen sein wird.

2.1.4 - *Prüfung dieses Verhaltensmodells:* Es ist schwieriger, unmittelbar nachzuweisen, daß diese detaillierten Flußdiagramme die wirkliche Tätigkeit des Kindes angemessen darstellen. Nichtsdestoweniger kann man das Vorhandensein bestimmter Teile des Programms unter Beweis stellen, indem man zeigt, daß bestimmte Parameter damit verbunden sind: Durchführungszeit, Fehlerwahrscheinlichkeit usw. ... Die im Diagramm vorgesehene Gliederung ist richtig, wenn man zeigen kann, daß sie es erlaubt; die gesamte Durchführungszeit und die Fehlerwahrscheinlichkeit in jeder Schleife zu berechnen.

Mit dem vorliegenden Beispiel wollen wir nicht eine Schleife analysieren. Wir werden uns lediglich mit der durch Schema I dargestellten Sequenz befassen. Wir werden nur auf die Tatsache zurückgreifen, daß die Schleife der Methode "nach italienischer Art" (Schema 2) viel komplexer ist als diejenige ›r Methode "per gelosia" (Schema 3), nachdem wir experimentell nachgewiesen haben, daß diese Komplexität einen beträchtlichen Unterschied in den Durchführungszeiten oder der Zuverlässigkeit zur Folge hat.

Der Einfachheit halber werden wir uns nur mit der Zuverlässigkeit befassen. Aber selbstverständlich muß die Überzeugung, das Flußdiagramm sei ein gutes Verhaltensmodell, durch voneinander unabhängige und ko vergierende Überprüfungen gesichert werden.

2.2 - *Beschreibung der vereinfachten Modelle der Versuchsperson*

2.2.1 - Jedes Flußdiagramm kommt in der Annahme zustande, daß die Versuchsperson fähig ist, eine bestimmte Reihe von Tätigkeiten (die in den Kästchen ausgewiesenen) auszuführen. Häufig assoziiert man willkürlich bestimmte Fähigkeiten der Versuchsperson mit diesen Tätigkeiten; z.B. "die Versuchsperson besitzt ein Gedächtnis, in dem sie die gesamten Formeln der "Tabelle" speichert".

Die Systeme, die die verschiedenen im Flußdiagramm angesprochenen Erinnerungsvermögen umfassen und mit der Fähigkeit ausgestattet sind, die Berechnungen durchzuführen, die es beschreibt, bilden vereinfachte Modelle der Versuchsperson [1].

2.2.2 - *Wert dieser Modelle:* Diese Modelle sind nur insoweit interessant, als sie es erlauben, das Verhalten des Schülers oder der Schüler in zufriedenstellender Weise zu simulieren. Sie stellen gleichwohl das System der Gegenstände und Regeln dar, mit dem man sich gerade auseinandersetzt und erleichtern aufgrund dieser Tatsache dem Wissenschaftler das Urteil über den Wert seiner Überlegungen.

2.2.3 - *Modell:* Im vorliegenden Fall werden wir uns mit einem groben Modell begnügen und unterstellen, daß die Versuchsperson nacheinander $p \cdot q$ mal eine selbe Aufgabe (Schleife) durchführt - ohne Fehler hinsichtlich der Reihenfolge oder der Natur dieser aufeinander folgenden Aufgaben.

- daß im Verlauf jeder Schleife k die Berechnung (wir sagen Aktualisierung) einer elementaren Formel zu Fehlern Anlaß gibt, die in einem bestimmten Abstand x_k auftreten

- daß x_k das zufällige Auftreten einer Fehlerwahrscheinlichkeit e_k ist: die Wahrscheinlichkeit, daß der Schüler bei der k-ten "Schleife" einem Irrtum unterliegt (entsprechend der Gaußschen Verteilung)

- daß die aufeinanderfolgenden Aufgaben (die Schleifen) unabhängig voneinander sind (der Fehler in der Folge k ist nicht von den Ergebnissen in den vorhergehenden Folgen abhängig)

- daß alle Wahrscheinlichkeiten gleich e sind, das wir "lokalen Fehler" nennen wollen

1) Human problem solving, Newell und Simon: 1971

2.2.4 – *Diskussion des Modells:* Jede Bedingung engt das Modell ein und kann nur dann akzeptiert werden, wenn die experimentell erzielten Ergebnisse es gestatten: die letzte Bedingung impliziert z.B., daß man die Unterschiede in den Fehlerfrequenzen zwischen den schwierigen Produkten wie $7 \cdot 8$ und den leichten Produkten wie $2 \cdot 2$ vernachlässigt. Unsere Beobachtungen zeigen, daß diese Unterschiede bedeutend, ja sogar wichtig sind. Man kann dennoch das Modell beibehalten; indem man unterstellt, daß man es auf Kinder anwendet, die mit solchen Operationen beschäftigt sind, bei denen dieser Faktor in angemessener Form berücksichtigt wird.

Die obige Bedingung vernachlässigt die Ermüdungseffekte. Wir dürfen sie nur begründet akzeptieren, wenn die Zuverlässigkeit des erhaltenen Modells für unsere Zwecke ausreichend groß ist.

2.2.5 – *Anpassung des Modells:* Um diese Zuverlässigkeit zu regulieren, können wir nach der Analyse der Ergebnisse in das Grundmodell bestimmte Parameter einführen, die wir für die Simulation der Beobachtungen variieren lassen können. Zum Beispiel: Jedem Produkt $i \cdot j$ der Tabelle ist eine Wahrscheinlichkeit e_{ij}, es fehlerhaft herzustellen, zugordnet, oder auch jeder Folge k der Schleife ist eine wachsende Funktion von k, $\Phi_k (e_{ij})$ zugeordnet, die e_{ij} modifiziert und die die Ermüdung darstellt; usw.

Wir können uns veranlaßt sehen, auf ein differenzierteres Modell zurückzugreifen und zwischen Schleifen mit Übertrag und Schleifen ohne solchen Algorithmus nach italienischer Art zu unterscheiden; wir können nach der Anzahl der in einem gegebenen Augenblick für die Arbeit eingesetzten Erinnerungen oder, in bezug auf den Unterricht, nach dem Umfang der permanenten Erinnerungen – d.h. nach der Anzahl der zu behaltenden Formeln – oder nach der Anzahl der durchzuführenden elementaren Operationen unterscheiden.

109

Es wurden Arbeiten über die Vorsichtsmaßnahmen, Auswahlverfahren und notwendigen Prüfungen angefertigt, auf die ich aber an dieser Stelle nicht näher eingehen will. Wir wollen gelten lassen, daß die Versuchsperson $p \cdot q$ Schleifen durchführt und daß bei jeder Schleife eine Fehlerwahrscheinlichkeit e vorhanden ist.

2.3. *Werte der Parameter*

2.3.1. Zur Erläuterung seien im folgenden einige Fehlerprozentsätze in den Schleifen aufgeführt, die in verschiedenen Fällen bei Operationen nach italienischer Art gemessen wurden.

Tabelle I

$m + \sigma/\sqrt{N}$ (N)	Ohne Übertrag	Mit Übertrag
Einzelne Produkte von Umfang 1 x 1	3,73 ± 0,56 (98)	
Umfang 2 x 1	1,20 ± 0,55 (17)	7,46 ± 1,08 (19)
Umfang 3 x 1	2,40 ± 1,32 (13)	11,47 ± 1,47 (17)

Es lagen die Versuchsergebnisse von 141 Kindern im Alter von 9 bis 11 Jahren zugrunde.

2.3.2. Die Anzahl der für Kinder dieses Alters zumutbaren Operationen liegt im allgemeinen ungefähr zwischen 8 und 16.

3. *Darstellung: Analyse des Modells*

Wir haben jetzt ein recht einfaches mathematisches Modell, um bestimmte bisher noch nicht behandelte Daten zu bearbeiten.

3.1. *Fehlerwahrscheinlichkeit in der gesamten Tätigkeitsfolge*

Bei jeder Schleife ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine gegebene Versuchsperson keinen Fehler macht $(1-e)$ (Zuverlässigkeit). Wenn die Operation $p \times q$ Schleifen umfaßt, ist die Wahrscheinlichkeit, daß man bei keiner einen Fehler macht

$$(1-e)^{p \times q} = 1 - e_g = F.$$

Dabei ist: e_g die "globale" Fehlerwahrscheinlichkeit, F die Zuverlässigkeit.

Anmerkung: In dem Fall, in dem die lokalen Wahrscheinlichkeiten nach verschiedenen Faktoren differenziert werden, lautet die Formel

$$1 - e_g = \prod_{k=1}^{k=p\times q} (1 - e_k)$$

e_k: Fehlerwahrscheinlichkeit bei der k-ten Schleife.

Man kann auch Fehler bei der Addition berücksichtigen:
Wahrscheinlichkeit e_+
Beispiel: $F = 1 - e_g = (1-e)^{p \times q} \times (1-e_+)$

3.2. *Überprüfung*

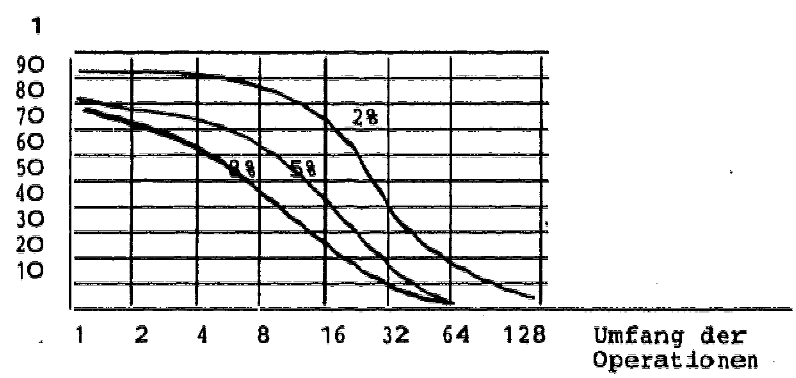
Die Überprüfung des Modells kann z.B. anhand eines anderen sehr klassischen "mathematischen Modells" (Test von χ^2) erfolgen, das es erlaubt, den Abstand zwischen dem durch unser Hypothesenspiel vorausgesagten Werten und dem beobachteten Wert zu ermitteln.

3.3. *Schlußfolgerungen*

Das Modell ist wenig präzise, aber zuverlässig und ziemlich zufriedenstellend (wir wollen das hier jedenfalls annehmen).

Bild 2 zeigt repräsentative Kurven von F als Funktion des Umfangs t der Operation für drei benachbarte Werte der Fehlerwahrscheinlichkeit e_g in einer Schleife.

Bild 2 Zuverlässigkeit

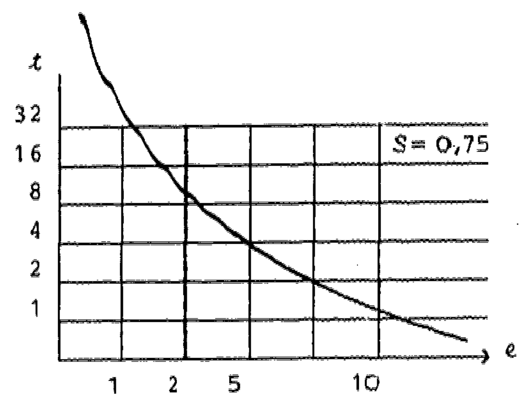


3.3.1. Man kann anhand der Darstellung nachweisen, daß die Zuverlässigkeit sehr schnell vernachlässigbar wird, wenn der Umfang der Operation wächst.

Angenommen, wir würden eine Erfolgsquote von 75 % pro Schüler (oder Institution) als untere Grenze für den Erfolg festlegen. Der Schüler will also bei drei von vier Operationen erfolgreich sein. Der maximale Umfang der Operationen, den er in Abhängigkeit von seiner Fehlerwahrscheinlichkeit in Angriff nehmen kann, ist durch Bild 3 gegeben.

Die Beziehung, die wir gerade verdeutlichen, spielt im Unterricht zweifellos eine bedeutende Rolle.

Bild 3

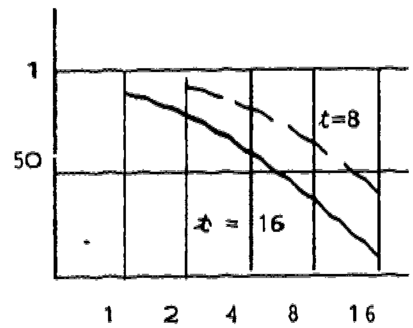


Bei Zuverlässigkeiten von 0,85 bis 0,99 bei "vernünftigen" Umfängen der Operationen (zwischen 8 und 16) ist die Ansprechbarkeit von F auf die Variationen der lokalen Zuverlässigkeit ziemlich groß.

Außerhalb der von uns angegebenen Intervalle werden die Fortschritte - ganz gleichgültig, welche Anstrengungen die Schüler unternehmen - nicht wahrnehmbar. (Bild 4)

Ein Schüler, der seine lokale Zuverlässigkeit von 92 % auf 96 % steigert, verbessert seine Erfolgsquote von 26 % auf 50 %: ein wenig bedeutsames Resultat. Wenn er sich dagegen von 96 % auf 98 % steigert, verbessert er seine Gesamterfolgsquote von 50 % auf 72 %. Der Fortschritt ist deutlicher erkennbar!

Bild 4



3.3.2. Unterstellen wir einmal, es gelänge uns, mit einem beliebigen Hilfsmittel die lokale Zuverlässigkeit schlagartig erheblich zu vergrößern. Wenn uns die Anzahl der an dem Versuch beteiligten Kinder bekannt ist, die eine gegebene lokale Zuverlässigkeit haben, dann können wir die Anzahl der Kinder vorhersagen, die aus der Zone der mittelmäßigen Ergebnisse (weniger als 3 richtige Resultate auf 4) in diejenige der annehmbaren Resultate aufsteigen werden (Erfolgsquote über 75 %). Siehe Beispiel in § 3.4.2.

3.3.3. In diesem Zusammenhang sei bemerkt, daß wir dann die relative Bedeutung der Faktoren des Modells untersuchen (Vergleich der $\frac{dF}{dx}$ beispielsweise) oder ihre Wirksamkeit auf die Gesamtheit der Schüler vergleichen können (Anwachsen der Erfolgsquote im Verhältnis zur Unterrichtszeit). Es geht weniger um die unmittelbare Optimierung der Aktion des Erziehers als darum aufzudecken, welche Art von Faktoren die Entwicklung des Systems des Schülers bestimmen, z.B. durch das unbewußte Streben nach Wirtschaftlichkeit oder nach optimaler Effizienz.

3.4. *Überprüfung der Interpretation - Pädagogische Anwendungen*

3.4.1. Auf Grund des Vergleiches unserer beiden Methoden (Schema 2 und 3), haben wir die Hypothese aufgestellt, daß die in einer Schleife des Algorithmus "per gelosia" aufgetretene Fehlerhäufigkeit in allen Fällen entweder gleich derjenigen des Algorithmus auf "italienische Art" ohne Übertrag sein, oder darunter liegen müßte.

3.4.2. Diese einleuchtende Hypothese hat es uns erlaubt, den Gewinn abzuschätzen, den man durch die Ersetzung eines Algorithmus durch einen anderen im Hinblick auf die Resultate erhoffen konnte.

Beispiel: Eine normale Klasse bestehend aus 25 Schülern, die in 6 Gruppen aufgeteilt ist, deren durchschnittliche lokale Zuverlässigkeiten $\overline{e}_{SR}$ (ohne Übertrag) und $\overline{e}_{AR}$ (mit Übertrag) ist in den Spalten 2 und 3 der Tabelle II mit der die Anzahl der Schüler pro Gruppe (1a Spalte 1) angegeben ist.

Tabelle II

			Umfang 8			Umfang 16		
N	e_{SR}	e_{AR}	F_A $(1-e_{SR})^2(1-e_{AR})^6$	F_N $(1-e_{SR})^8$	Erh. der Zuverläss.	F_A $(1-e_{SR})^4(1-e_{AR})^{12}$	F_N $(1-e_{AR})^{16}$	Erh. der Zuverläss.
5	0,3	2	0,87	0,97	10 %	0,75	0,94	19 %
7	0,5	4	0,76	0,96	20 %	0,57	0,92	35 %
6	1	7	0,62	0,92	30 %	0,39	0,85	46 %
3	2	9	0,53	0,85	32 %	0,27	0,72	45 %
1	4	11	0,45	0,72	27 %	0,17	0,52	35 %
3	8	15	0,36	0,52	16 %	0,10	0,27	17 %
25 Schüler	1,8 durchschnittlich	6,55						
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)

Bei den durchschnittlichen Schülern ist eine stärkere Erhöhung der Zuverlässigkeit feststellbar.

Wir unterstellen, daß die Operationen, die die Kinder durchführen müssen, 25 % Teilprodukte mit Übertrag und 75 % Teilprodukte ohne Übertrag umfassen. Bei jeder Gruppe von Kindern werden die globalen Zuverlässigkeitsraten, die für den Algorithmus "auf italienische Art" und für die Umfänge 8 und 16 (Spalten 4 und 7) errechnet worden sind, mit den entsprechenden Zuverlässigkeitsraten verglichen, die man für den Algorithmus "per gelosia" vorhersagen kann (Spalten 5 und 8). Der prozentuale Gewinn bei der Zuverlässigkeit: 100 ($F_{neu} - F_{alt}$) ist in Prozenten in die Spalten 6 und 9 für die Umfänge 8 bzw. 16 eingetragen.

Erste Schlußfolgerung: Es ist deutlich, daß bei den durchschnittlichen Schülern und bei den größeren Umfängen die Erhöhung der Zuverlässigkeit stärker ist.

Zweite Schlußfolgerung: Bei der akzeptablen Erfolgsschwelle von 70 % beim Umfang 8; die klassische Methode erlaubt 12 richtige Resultate bei 25 Schülern, das sind 48 % - die andere verspricht Erfolg bei 22 Schülern d.h. 88 %. Wir könnten sagen, daß der pädagogische Gewinn 40 % beträgt. Beim Umfang 16 würde der Gewinn 84 - 20 = 64 % betragen.

3.4.3. Diese Hypothese hat sich tatsächlich in etwa bestätigt, aber wir untersuchen und prüfen ein komplexeres Modell: die erhaltene Verbesserung hat die Erwartungen übertroffen, andere Faktoren haben eine Rolle gespielt.

3.4.4. Wir werden uns im Augenblick wohl davor hüten, aus diesen Überlegungen voreilige Schlüsse in bezug auf die Unterrichtsmethoden zu ziehen, es ist jedoch erwiesen, daß bei Schülern der CM oder der 6. Klasse, die beim Errechnen von Produkten keine befriedigenden Ergebnisse erzielen, die rasche Einführung in die Methode "per gelosia" zu vorzüglichen Ergebnissen führt.

4. *Vermutungen: Unterrichtsmodelle*

4.1. *Einige Definitionen*

4.1.1. *Repertoire - Flußdiagramm*

a) Bei der Berechnung eines beliebigen Produkts gemäß einem unserer Flußdiagramme greift man auf Bezugsformeln zurück, von denen angenommen wird, daß sie intern (z.B. auswendiggelerntes Produkt) oder extern (sofort konsultierte Tabelle) gespeichert sind.

Die Gesamtheit R der Bezugsformeln, über die ein Schüler zu einem gegebenen Zeitpunkt verfügt, stellt sein Repertoire dar. Die Folge O von Tätigkeiten, die er durchführen kann und die das Flußdiagramm modellhaft wiedergibt, verbunden mit diesem Repertoire, erlaubt es ihm, eine bestimmte Menge von Formeln F hervorzubringen.

b) Zum Beispiel: Wenn R die Menge der Produkte aus den natürlichen Zahlen in der Form

$$a \times b = c \text{ wo } a \leq 5, \ b \leq 10$$

(R ist "die Tabellen von 1 bis 5") und wenn O der Algorithmus auf italienischer Art ist, dann erlaubt $< R, O >$ dem Schüler, das Ergebnis 32 x 5 = 160 zu bekommen, nicht aber 49 x 8 = 392.

c) Sei $\delta_{a,b}$ die Zuverlässigkeit des Produktes $a \times b$, v_i die Durchführungsgeschwindigkeit bei einer elementaren Aufgabe, r die Zuverlässigkeit der Übertragsschleife.

In einem gegebenen Augenblick können die Möglichkeiten des Schülers abgeleitet werden von

- dem Paar $< R, O >$ das in gewisser Weise die Kompetenz der Versuchsperson charakterisiert

- einem *n-Tupel*

$$< \delta_{1,1}, \ldots \delta_{a,b}, \ldots \delta_{a\ max,\ b\ max}, r, \ v_1, . v_i, \ldots >$$

das die Art und Weise charakterisiert, in der die Versuchspersonen $< R, O >$ aktualisiert und somit erlaubt, seine Leistung zu erklären.

4.1.2. *Unterrichtsprozeß und Unterrichtsmodelle*

a) Während des Unterrichtes werden die Komponenten dieses *n-Tupels* modifiziert: Wir schlagen das folgende Vokabular vor: Die Folge der *n-Tupel*, die die aufeinander folgenden Zustände der Möglichkeiten der Versuchsperson beschreibt – wenn sie beschrieben werden kann – bildet einen "Unterrichtsprozeß".

Wenn ein System von Regeln und Hypothesen es erlaubt, diese Folge zu erzeugen, und zwar in der Weise eines deterministischen Automaten oder eines stochastischen Prozesses, dann stellt es ein Unterrichtsmodell dar.

Die Folge der didaktischen Tätigkeiten, die zu organisieren sind, um die aufeinanderfolgenden Zustände der Versuchsperson zu erhalten, ist ein Unterrichtsprogramm.

b) Beispiel: Betrachten wir nur einmal die Paare $< R,O >$ die aus einem Repertoire und einem Flußdiagramm aus dem Bereich des Rechnens zusammengesetzt sind. Die klassischen Methoden sehen nur solche Prozesse, wie $R_i \subset R_{i+1}$ vor: d.h. wo das Repertoire sich von einem Abschnitt zum anderen vergrößert, (mit pädagogischen Maßnahmen, um Verminderungen zu verhindern oder zu korrigieren); und bei denen O_i ist ein Unter-Flußdiagramm von O_{i+1}.

Beispiel: Im Unterricht über den Algorithmus auf italienische Art verfügen die 7 bis 8-jährigen Kinder in Frankreich über ein auf die Tabellen von 1,2,3 beschränktes Repertoire und ein vereinfachtes Flußdiagramm: Produkte ohne Übertrag; einstellige Multiplikatoren. Ihr Repertoire wird sich später um die folgenden Tabellen erweitern und ihr Flußdiagramm wird komplexer werden: Produkte aus größeren Zahlen; Überträge: Produkte aus Dezimalzahlen....

Die Mengen (F_i) der berechenbaren Formeln sind eingeschränkt und wachsen.
Wir werden zu zeigen versuchen, daß es auch andere Modelle gibt.

c) Wie bei den Verhaltensmodellen müssen zunächst die Faktoren und die Parameter herausgestellt werden, die in dem Unterrichtsmodell auftreten sollen:
Anzahl der Formeln des Repertoires, Anwendungshäufigkeit, annehmbare Zuverlässigkeitsschwelle des Schülers, Zuverlässigkeit des Flußdiagramms, Anzahl der gleichzeitig bei der Arbeit verwendeten Erinnerungen, Menge der durch $< R_i, O_i >$ erzeugten Formeln, Unsicherheit des Modells in einem gegebenen Anwendungsbereich, Zeit der Durchführung, Unterrichtszeit, Ermüdung der Versuchsperson ... usw.

Man kann dann entdecken, daß bestimmte Unterrichtsprozesse von einem bestimmten Standpunkt aus gesehen optimal sind und beispielsweise ihr spontanes Auftreten erklären oder die Voraussetzungen dafür finden. Die Zuverlässigkeit der Verhaltens- und Unterrichtsmodelle ist es, die für den Wert dieser Standpunkte ausschlaggebend ist, nicht nur ihre mathematische Qualität.

4.2. *Ziele der Forschung über den Unterricht in Algorithmen*

4.2.1. *Schwierigkeiten mit den klassischen Methoden*

Die Kritik, die man am klassischen Unterricht üben kann, bezieht sich vor allem auf
- die zu reichlich bemessene Unterrichtszeit (3 Jahre),
- den Mangel an Anziehungskraft und mathematischem Gewinn der Methode, die selbst auf Prozessen des Erinnerns und der Durchführung beruhen, die dem mathematischen Gehalt fremd sind. Die erworbenen Kenntnisse sind mechanischer Natur, eignen sich schlecht für die Analyse und sind wenig anpassungsfähig,
- die Schwierigkeit, jede einzelne der Unterrichtsetappen zu motivieren; einzige Motivation: Man muß rechnen können, man muß es also lernen. Die Methode verlangt *Hartnäckigkeit*, Willen zum Erfolg und ununterbrochene Aufmerksamkeit.
- Die Unterrichtsergebnisse sind nicht so gut wie es wünschenswert wäre: Viele Kinder haben Schwierigkeiten, den Sinn der Operation zu verstehen; andere wiederum werden in einer Ablehnung der Mathematik fixiert; die Zuverlässigkeit ist nicht sehr groß.

4.2.2. *Gründe*

Aufgrund verschiedener neuerer Arbeiten vermuten wir, daß alle diese Schwierigkeiten ein- und dieselbe Ursache haben könnten: Die Analyse, die zur Wahl des Unterrichtsmodells geführt hat. Diese Analyse schließt im wesentlichen wie folgt:

a) Die Berechnung eines Produktes aus natürlichen Zahlen ist ein komplexer Algorithmus. Das Kind kann nicht von selbst darauf kommen. Er muß vorzeitig erlernt werden, so daß das Kind ihn später mechanisch ohne Fehler beherrscht.

b) Um einen Mechanismus zu lehren, muß man das im Unterricht wiederholt verwendete Flußdiagramm lehren, und zwar in der Form, in der es letzten Endes gebraucht wird, und die Formeln des Repertoires müssen dem Gedächtnis eingeprägt werden (durch schrittweises Unterrichten). Der "Sinn" der Operation, d.h. die Einsicht in die Verwendungsmöglichkeiten der Rechenmethode kann vom Verständnis des Schülers unter diesen Voraussetzungen nicht erwartet werden und muß Gegenstand einer getrennten Unterweisung sein.

Man muß deutlich sehen, daß diese Schlußfolgerungen auf der Vorstellung beruhen, daß das Rechnen ein Mechanismus ist, daß man ein Mittel kennt, um derartige Automatismen zu unterrichten und daß man daher diese auf jenen Rechenmechanismus anwenden kann.
Das klassische Unterrichtsmodell akzeptieren die Mathematiklehrer übrigens in einem Maße, daß sie versucht haben, mathematische Theorien, ja sogar mathematisches Schließen in den Unterricht zu übertragen, indem sie sich bestimmter logischer Analogien bedienen (siehe unten), dies allerdings meist zum Besten der weniger guten Schüler.

Auf diese Weise, d.h. indem man die Theoreme und Axiome gewissermaßen als ein Repertoire behandelt, versucht man, den Schülern Verfahren und Methoden zur Lösung von Problemen zu erklären, die es erlauben würden, das Repertoire "anständig" zu benutzen. Offenbar kennt man keine Problemklassen, bei denen diese Lösungsmethoden mit Sicherheit zu dem erwarteten Ergebnis führen; sie müssen nacheinander ausprobiert werden. Diese Methoden bringen keine Algorithmen hervor (ausgenommen der Fall, wenn sie zufällig auf einem Theorem basieren, das der Schüler nicht kennt), aber man unterrichtet sie so, als ob sie es könnten. Die Heuristik ist eine Folgeerscheinung dieses Standpunktes und hat bis jetzt in der Didaktik nur zu begrenzten Erfolgen geführt. Man weiß recht gut, auf welche Schwierigkeiten die pädagogischen Methoden stoßen, die auf einer Mechanisierung beruhen, die von einer willkürlichen Zerlegung der Aufgaben ausgeht.

4.2.3. *Ausblick*

Umgekehrt kann man das mechanische Unterrichten des Multiplizierens infrage stellen. Wenn ein Kind selbständig ein Verfahren entwickelt, um die Genauigkeit einer Formel zu sichern, dann handelt es sich um eine Art Beweis. Wenn dieses Verfahren wiederverwendet wird, dann wird es gelernt und verbessert werden bis zu dem Augenblick, wo es als Algorithmus erkannt und beschrieben wird.

Obwohl die zu entdeckende Regel kompliziert ist, ist dieser Standpunkt nicht utopisch: das Kind erlernt viel früher ein weitaus komplexeres linguistisches System, das mechanisch funktioniert, ohne daß es erforderlich ist, ihm zusätzlichen Unterricht zu erteilen über:

- das Vokabular durch schrittweise Schulung
- die Grammatik als Flußdiagramm für die Hervorbringung von Sätzen
- den Sinn dieser Sätze (oder vielmehr die Liste der Gelegenheiten, sie auszusprechen, wie Zitate).

Dieser Einwand würde schon seit langem geäußerten pädagogischen Bedenken Rechnung tragen. Das Problem besteht darin, ihn mathematisch, psychologisch, linguistisch und didaktisch ausreichend zu begründen. Und genau darin bestehen die allgemeinen Ziele bestimmter, vom I.R.E.M. de Bordeaux betriebenen Forschungen. Wenn man sich auch hüten sollte, allzu rasch an die Vorteile einer zwar verlockenden, jedoch oberflächlichen [1] Modelländerung zu glauben; handelt es sich dennoch zunächst darum, sich ein angemessenes Vokabular zu schaffen, das es erlaubt, sich so weit als möglich den "Evidenzen" zu entziehen, die nur versteckte Folgen eines klassischen Systems sind.

1) Mme. Sinclair hat aufgezeigt, wie vorsichtig man in dieser Hinsicht sein muß.

4.3 *Vorschlag für eine andere Sprache*

Unsere Arbeiten gehen gleichzeitig in zwei Richtungen: Wir versuchen, konkret Prozesse zu realisieren, die vom kritisierten Schema abweichen, und wir versuchen, uns eine entsprechende Theorie zu verschaffen, die mit neuen Termini arbeitet.

4.3.1 - *Ein neuer Unterrichtsprozeß*

Seit drei Jahren befassen wir uns mit einem Prozeß, in dem das Kind selbst seinen Algorithmus herstellt. Das Kind soll das Problem der Produktberechnung erfassen, bevor es sich um dessen Lösung bemüht. Somit ist das Produkt nicht mehr "das, was man findet, wenn man eine Multiplikation durchführt". Beispielsweise weiß das Kind, daß "$a \cdot b$" die Kardinalzahl einer Menge a bezeichnet, die a Linien von b Gegenständen umfaßt. Um "$a \cdot b$" zu berechnen, kommt es darauf an, diese Menge in Stücke zu zerlegen, die es bereits zählen und zur Summe addieren kann. Es entwickelt ein größeres Geschick beim Zerlegen und bei der Auswahl der Stücke, was seinen Algorithmus schneller, sicherer, überzeugender, allgemeiner macht. Es weiß noch nicht, daß es eine einzige Berechnungsmethode gibt. Jede Betätigung ist ein Beweis der Formel, der auf Eigenschaften der mathematischen Theorie (Distributivität, Produkte von Partitionen ...) beruht; seien sie nun explizit bekannt oder nicht.

4.3.2 *Axiomensystem - Deduktionsregel*

Aufgrund unserer Experimente sind wir zu folgendem Vokabular gekommen.

Nehmen wir an, die Menge der Formeln ohne Variable der Form "$a \cdot b = c$", wo "a", "b" und "c" die dezimalen Ausdrücke der natürlichen Zahlen sind, stelle die atomaren Formeln einer mathematischen Ausdrucksweise [illegible] dar. Wir wollen diesen

Formeln ihre gewöhnliche Bedeutung in ($\mathbb{N}$, +, x) geben; manche sind richtig, manche sind falsch.

Die Gesamtheit der Regeln, die es erlaubt, jedem Paar der Schreibweise (a,b) eine Schreibweise c von $\mathfrak{L}$ zuzuordnen, so daß "$a \cdot b = c$" in $\mathbb{N}$ richtig ist, ist eine Regel, um die Berechnung des Produktes oder die Multiplikation durchzuführen. In dieser Regel wird auf eine Folge von Formeln von $\mathfrak{L}$ zurückgegriffen: zum Beispiel wird bei der Berechnung von 347 · 28 auf die Formel "8 · 7 = 56", auf die Formel 8 · 4 = 32 usw. zurückgegriffen.

Wir wollen die Folge dieser in der Berechnung auftretenden Formeln als die Vorläufer einer Deduktionsregel $\mathfrak{D}$ betrachten, aus der sich "$a \cdot b = c$" [1] ergibt. $\mathfrak{D}$ stützt sich auf das (hier metalinguistische) Verfahren der "Multiplikation", um einem n-Tupel aus Formeln von $\mathfrak{L}$ eine andere Formel von $\mathfrak{L}$ zuzuordnen. Natürlich liefert $\mathfrak{D}$ ein Entscheidungsverfahren für das gesamte $\mathfrak{L}$ und ist also auch ein Algorithmus. (Die Regel wäre auch auf falsche Formeln anwendbar. Sie würde dann zu anderen, im allgemeinen falschen Formeln in $\mathbb{N}$ führen.)

Die Gesamtheit der Formeln, auf die man nach einer bestimmten "Regel" $\mathfrak{D}$ zurückgreifen kann, wird einem Axiomensystem vergleichbar sein; man wird prüfen können, ob $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{D} \rangle$ wirklich richtige Formeln von $\mathfrak{L}$ hervorbringt und andere formal äquivalente Systeme untersuchen oder auch nicht.

4.3.3 *Vorteil dieser Formulierung*

Dieser Gesichtspunkt erschien uns unter anderem aufgrund der Tatsache gerechtfertigt, daß die Schüler der Elementarschule die Produkte wie eine spezielle Sprache handhaben. Bleibt die Fruchtbarkeit dieses Gesichtspunktes zu

---

1) Siehe Lentin und Gross. Notizen über die formalen Grammatiken, S. 30

beweisen, bei dem es Schwierigkeiten in der Analyse der Semantik der verwendeten Sprache gibt.

Diese Formulierung könnte es erlauben, unsere Auffassungen hinsichtlich der Art und Weise zu vereinheitlichen, in der eine mathematische Theorie in der Aktivität des Kindes wirksam wird:

- auf implizite Weise, um das Fällen von Entscheidungen zu ermöglichen
- als Sprache
- als System von Gültigkeitsnachweisen [5]

Sie würde es erlauben zu verstehen, wie rationell und wirksam es ist, wenn das Kind in den Situationen, mit denen es konfrontiert wird, über eine mathematische Theorie verfügt und sie würde es erlauben zu verstehen, wann und warum diese Rationalisierungsprozesse natürlicherweise in Mechanismen ihren Abschluß finden.

Wir glauben nun, daß diese Begriffe nützlich sein könnten, um die für die Organisation des Unterrichts wichtigen didaktischen Faktoren zu isolieren.

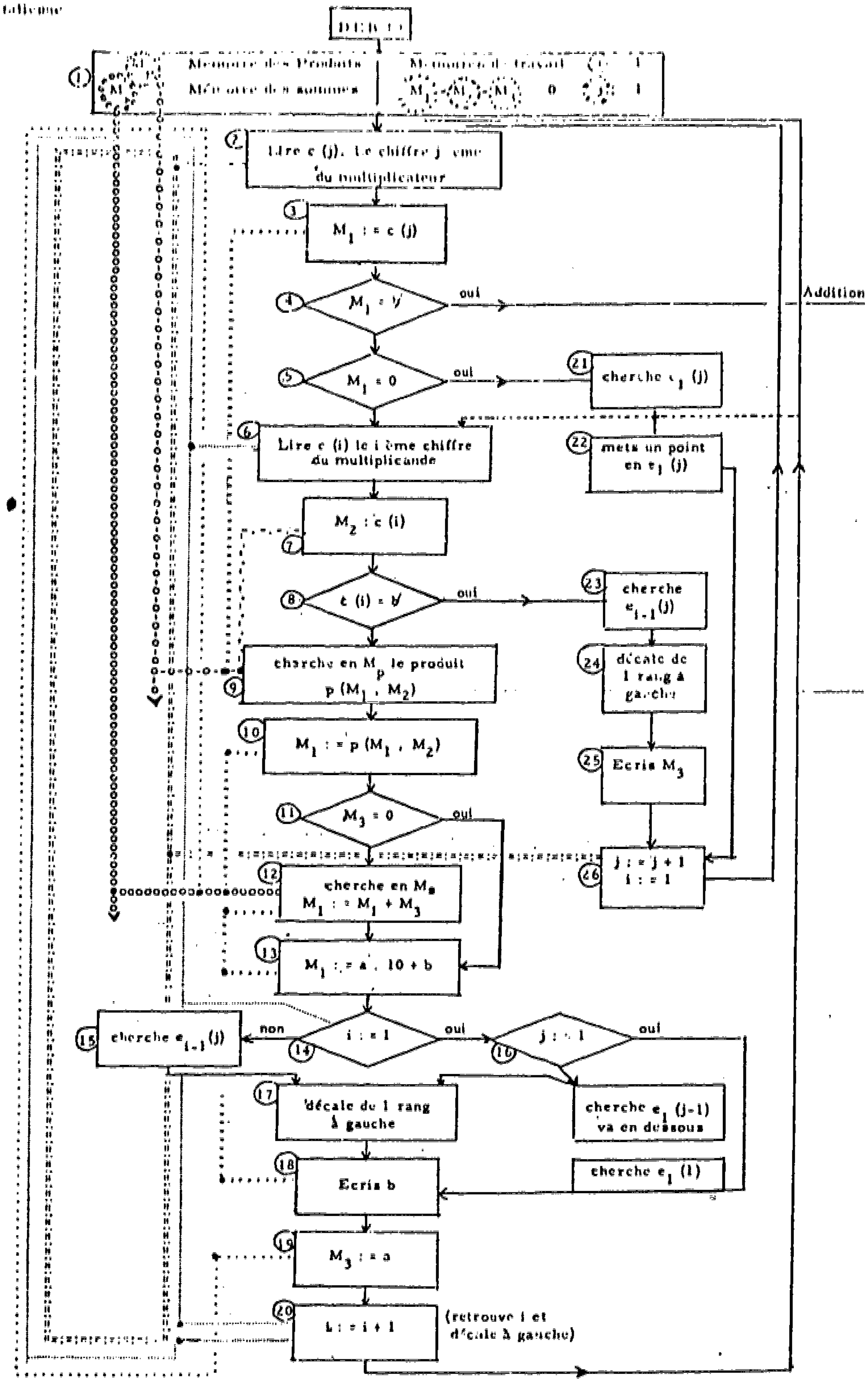
5 - *Schlußfolgerungen*

Die von uns angeführten obigen Beispiele haben, obwohl sie etwas naiv sein mögen, den Vorteil, daß sie die verschiedenen Arten deutlich machen, in denen die mathematischen Theorien bei der Analyse der didaktischen Phänomene verwendet werden können; dabei spielt es keine Rolle, ob es darum geht, die für die Situation, mit der der Schüler konfrontiert ist, charakteristischen Faktoren herauszuarbeiten, oder Verhaltensmodelle des Schülers oder Unterrichtsmodelle zu konstruieren oder Methoden zum Gültigkeitsnachweis dieser Modelle anzuwenden.

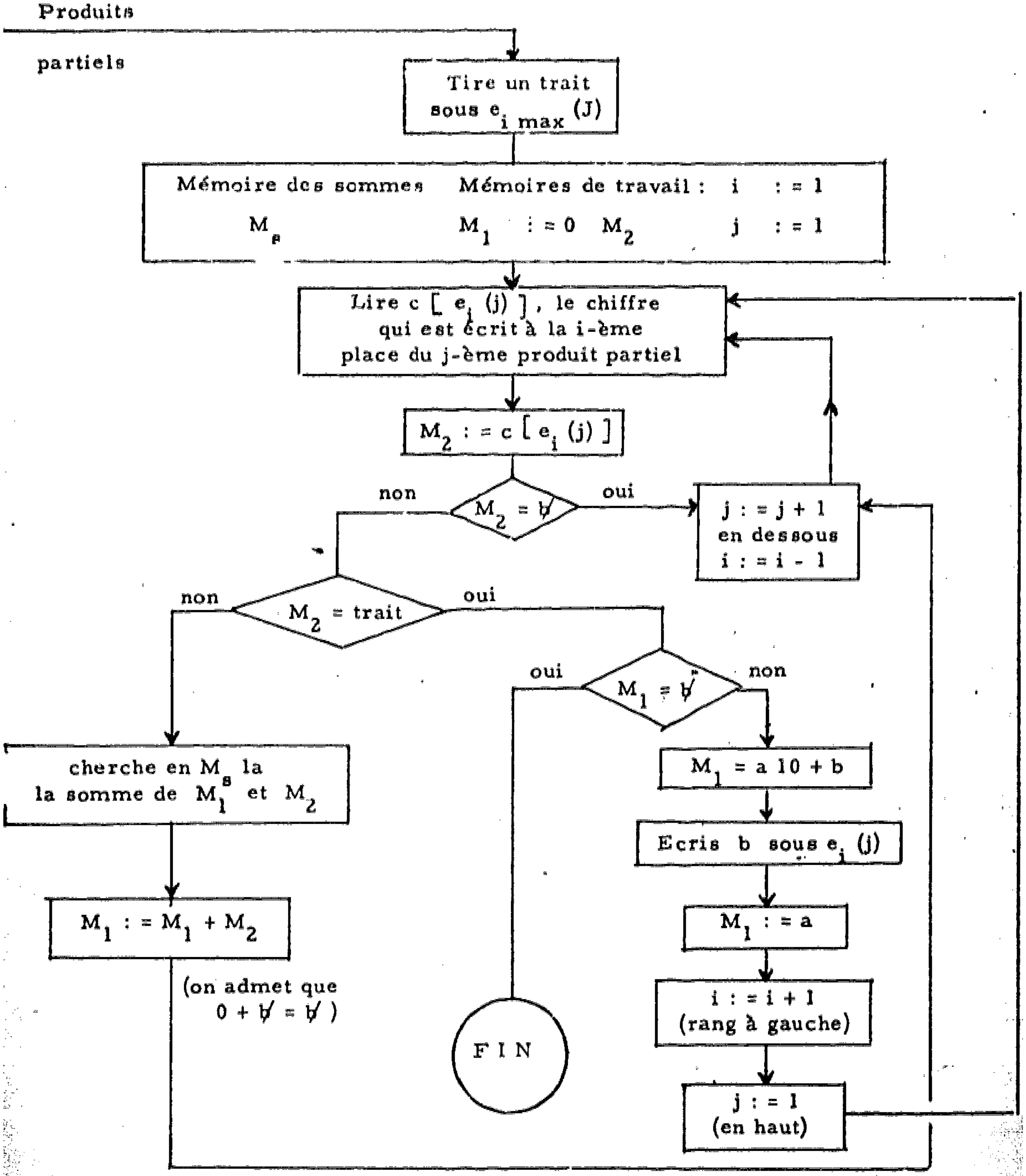
Im allgemeinen sind die Modelle nicht so einfach, auch nicht so sicher, die Schlußfolgerungen so klar und die Abweichungen so bedeutend. Man darf nicht glauben, es tue sich ein Königsweg auf, der es erlaubt, alle Probleme der Mathematikdidaktik mit mathematischen Begriffen zu lösen. Jede Beobachtung berührt alle Probleme gleichzeitig, und wir sind noch dabei, als Thesen konvergierende Strahlenbündel von Vermutungen zu akzeptieren, die der Psychologie, der Linguistik, der Soziologie, der Mathematik entnommen sind. Aus unserem Beispiel leitet sich indessen eine wissenschaftliche Methodologie der Forschung ab, die auch noch bei komplexeren Fällen wertvoll ist, und die allmählich dem Unterricht nützen kann, ohne ihn dabei zu versklaven.

BIBLIOGRAPHIE

(1) Kreisel-Krivine	Logique mathématique - Dunod (1970) Paris
(2) Lentin-Gross	Notions sur les grammaires formelles GAUTHIER VILLARS
(3) H. Sinclair de Zwart	Acquisition du langage et développement de la pensée - Dunod (1970) Paris
(4) G. Bramaud du Boucheron, R. Champagnol, P. Coirier, S. et M.F. Ehrlich	Le comportement verbal - Dunod
(5) G. Brousseau	Processus de mathématisation - In: la mathématique à l'école élémentaire - Publication A.P.M. Paris 1972.

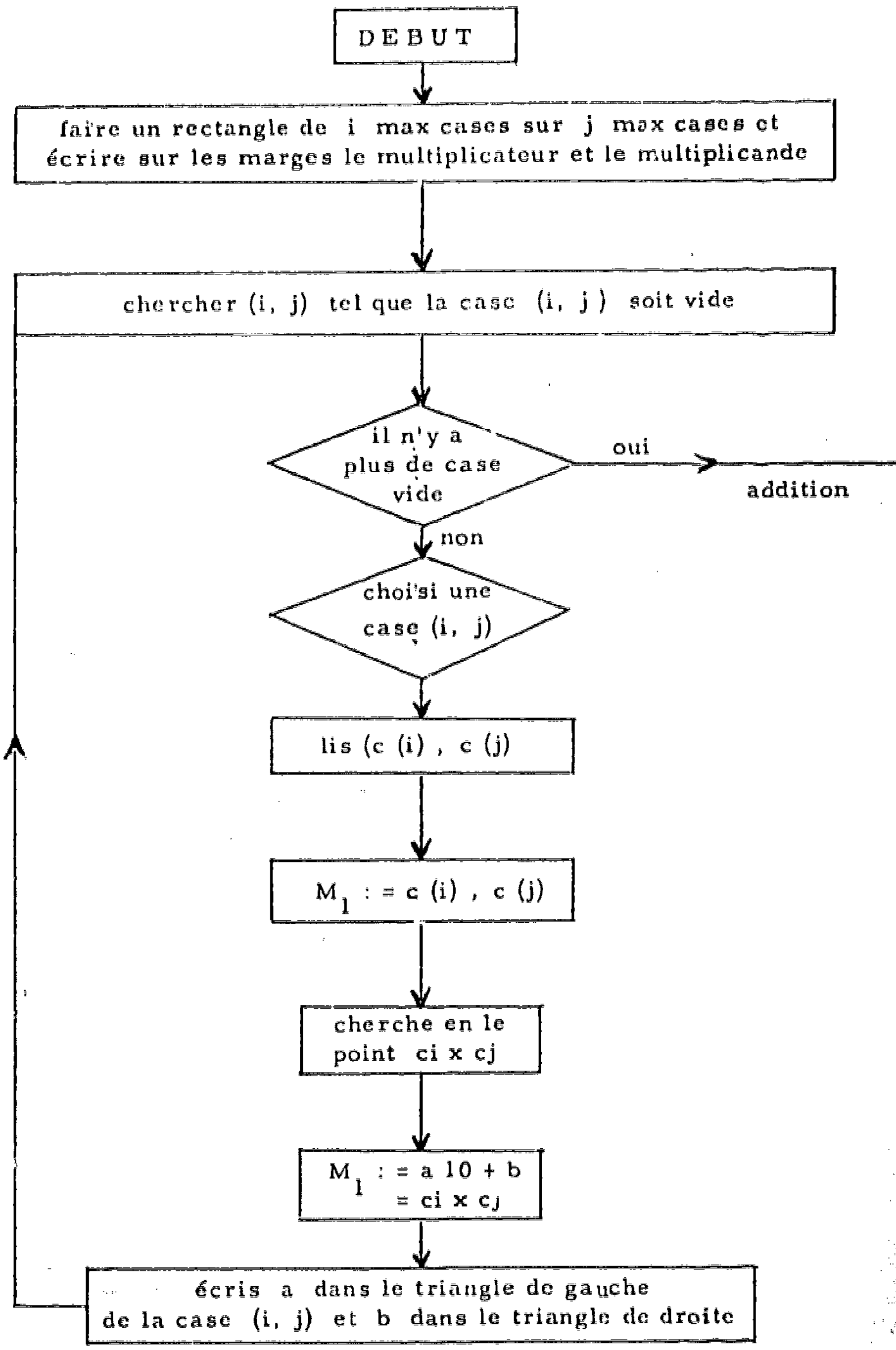


e_i (j) : place du i ème chiffre du j ème produit partiel


Produits
partiels
Tire un trait sous e i max (J)
Mémoire des sommes
M s
Mémoires de travail :
M 1 : = 0 M 2
i : = 1
j : = 1
Lire c [e i (j)], le chiffre qui est écrit à la i-ème place du j-ème produit partiel
M 2 : = c [e i (j)]
M 2 = b/
non
oui
j : = j + 1
en dessous
i : = i - 1
M 2 = trait
non
oui
M 1 = b/
oui
non
cherche en M s la
la somme de M 1 et M 2
M 1 : = M 1 + M 2
(on admet que
0 + b/ = b/)
FIN
M 1 = a 10 + b
Ecris b sous e i (j)
M 1 : = a
i : = i + 1
(rang à gauche)
j : = 1
(en haut)

LA MULTIPLICATION dans $\mathbb{N}$ Ordinogramme 3

Algorithme "per gélosia"



BEISPIEL EINER MATHEMTISCH SCHLECHT GESICHERTEN ÄNDERUNG, DIE ZU EINER UMGEHUNG DES PROBLEMS FÜHRT

BRÜCHE UND OPERATOREN

von F. Colmez, IREM Paris

In den offiziellen Lehrplan-Kommentaren wird eine Behandlung der Brüche mit Hilfe der Benutzung der Multiplikations- und Divisionsoperatoren $(\cdot a)$, $(:a)$ empfohlen. Die dahinterstehende Absicht ist die Einführung der linearen Abbildungen und deren Zusammensetzung. Diese Idee ist sehr verführerisch und stellt keine Schwierigkeiten dar, wenn man in $\mathbb{Q}_*$ oder auch $\mathbb{Q}_*^+$ arbeitet, aber hier handelt es sich eben um das Konstruieren der multiplikativen Gruppe $\mathbb{Q}_*^+$, und die Dinge liegen komplizierter.

a) Es kann eine zusammenhängende mathematische Theorie entwickelt werden (und zwar auf mehrere Arten), aber sie ist für die Schüler zu abstrakt; es scheint mir dagegen, daß die Lehrer mit ihr vertraut sein müssen, wenn sie die Schwierigkeiten der Schüler verstehen wollen, andernfalls werden sie sie nicht verstehen. Denn sie werden sie umgehen und sich in eine andere Theorie flüchten.

b) Wenn man in diese Theorie einsteigt, kann man also den Schülern Tätigkeiten vorschlagen, deren Schwierigkeiten man zu beurteilen in der Lage ist.

Abschnitte der Theorie

1) Operatorketten als Rechenprogramm
(Zusammensetzung der Ketten als Folge von Programmen)

2) Vergleich von Ketten durch die Ergebnisse
erste Äquivalenz: die Ketten definieren dieselbe Abbildung

3) Weiterführender Vergleich

zweite Äquivalenz: Einschränkungen und Erweiterungen der Abbildungen (oder wissenschaftlicher ausgedrückt: Keime von Funktionen).

Man erhält schließlich wieder $\mathbb{Q}_*^+$, allerdings als Menge von Keimen von Funktionen.

BEISPIEL EINES ALLGEMEINEN MATHEMATISCHEN BEGRIFFES, DESSEN EINFÜHRUNG NICHT AUF DER GRUNDLAGE DER BEISPIELE ERFOLGEN KANN, DIE FÜR GEWÖHNLICH IM UNTERRICHT ZUR VERFÜGUNG STEHEN

ASSOZIATIVITÄT VON OPERATIONEN

Die gewöhnlichen Operationen, mit denen es die Kinder zu tun haben, sind entweder von Beginn ihres Unterrichtes an assoziativ und kommutativ (Additon und Multiplikation), oder sie sind weder das eine noch das andere (Subtraktion und Division).

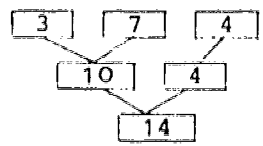
Letztere erscheinen tatsächlich eher als Gesetze der externen Komposition (die "Operationen"), und die Addition wie eine Menge von Abbildungen von $\mathbb{N}^p$ in $\mathbb{N}$ (p variabel), wobei die Summe zweier Zahlen ein wichtiger Sonderfall für das effektive Rechnen ist.

Es besteht also keine Gelegenheit dazu, das Problem der Assoziativität in einem entsprechenden Zusammenhang darzustellen, es sei denn, man tut dies in einer geeigneten didaktischen Sequenz.

In einer Klasse CE 2 (8-jährige) sind wir wie folgt vorgegangen:

Wir haben eine Reihe von Spielen auf dem Prinzip des Telefonspiels organisiert (ein Stück Papier zirkuliert unter den Mitgliedern einer Gruppe; jeder schreibt die Zeile ab, die sein Vorgänger geschrieben hat und fügt die gewünschte Veränderung hinzu, alle Gruppen gehen von demselben Ausdruck aus, und man vergleicht die erhaltenen Resultate).

Wir haben mit der Reduzierung von Summen begonnen, indem wir allmählich die Spielregeln präzisierten; insbesondere mußten wir zur Vereinfachung der Kontrollen ein Mittel erfinden, wodurch die durchgeführten Rechnungen angezeigt wurden. Die Kinder finden es normal, das gleiche Resultat zu erzielen.



Anschließend sind wir zu Kartenspielen (Vorbild: der "Kampf") übergegangen, (zunächst assoziatives Gesetz, dann nicht-assoziatives, aber stets kommutatives Gesetz). Erst lehnen die Kinder das nicht-assoziative Spiel ab ("das geht nicht"), dann begeistern sie sich dafür und setzen sich ein, um alle möglichen Ergebnisse zu finden.

Die Kinder sind danach bereit, eine analoge Arbeit mit der Subtraktion, der Division oder einer Mischung von Operationen durchzuführen.

Die runden Klammern werden eingeführt und eröffnen zwei Tätigkeitsrichtungen:

- Übertragen eines Ordinogramms in Klammern und umgekehrt
- Spiele auf Grund von Eintragungen: Substitution, Formulierung der Distributivität, Entwicklung oder Reduktion von arithmetischen oder algebraischen Ausdrücken.

BEISPIEL EINES BEGRIFFES, DESSEN KLASSISCHE DARSTELLUNG DER KINDLICHEN AKTIVITÄT SCHLECHT ANGEPASST IST

ORDNUNG

Klassisch ausgedrückt ist eine Ordnungsrelation eine auf einer Menge binäre, reflexive, transitive und antisymmetrische Relation. Die beiden Eigenschaften der Reflexivität und der Antisymmetrie stellen für die Schüler des ersten Zyklus der Sekundarstufe, denen man diese Eigenschaften genau erklären will, ein Problem dar; jüngere Schüler dagegen bewältigen Aufgaben, in denen die Ordnung eine Rolle spielt, ohne Schwierigkeiten.

Wichtig sind die *beiden folgenden Bemerkungen*

1) In Wirklichkeit sind die Ordnungsbegriffe aus Vergleichstätigkeiten hervorgegangen, wenn man aber Vergleiche über eine Menge von Objekten anstellt, weiß man nicht von vornherein, ob man auf eine Ordnung oder eine Äquivalenz kommen wird; im allgemeinen ist beides gleichzeitig im Spiel, weil man es mit einer Quasiordnungsrelation zu tun hat.

2) Es ist nicht etwa eine natürliche Idee, einen Gegenstand mit sich selbst zu vergleichen (das ist sogar praktisch unmöglich: wie könnte man denselben Gegenstand auf die beiden Schalen einer Waage legen?). Die Reflexivität unserer Überlegungen muß also ausgeschaltet werden, d.h. man muß für die antireflexive (strikte) Ordnung optieren.

Schwache und strikte Ordnung

Sei $\mathfrak{R}$ eine schwache Ordnungsrelation auf E und ϕ die assoziierte strikte Ordnungsrelation; die entsprechenden Axiome sind:

1) $\forall x \quad x \,\mathfrak{R}\, x \qquad \forall x$ nicht $x \,\phi\, x$

2) $\forall x\, \forall y\, \forall z \quad x \,\mathfrak{R}\, y$ und $y \,\mathfrak{R}\, z \Longrightarrow x \,\mathfrak{R}\, z$; $\forall x\, \forall y\, \forall z \quad x \,\phi\, y$ und $y \,\phi\, z \Longrightarrow x \,\phi\, z$

3) die Antisymmetrie der schwachen Ordnung schreibt man für gewöhnlich
$\forall x\, \forall y \quad x \,\mathfrak{R}\, y$ und $y \,\mathfrak{R}\, x \Longrightarrow x = y$, was man wie folgt schreiben kann: $\forall x\, \forall y \quad x \neq y \Longrightarrow$ nicht ($x \,\mathfrak{R}\, y$ und $y \,\mathfrak{R}\, x$), man erhält also für die strikte Ordnung
$\forall x\, \forall y$ nicht ($x \,\phi\, y$ und $y \,\phi\, x$)

In dieser Form sind die Axiome für die Kinder leicht handhabbar.

Das erste versteht sich von selbst und dient praktisch zu nichts.

Das zweite wird spontan von den Schüler der CM zur Vereinfachung ihrer Arbeit verwendet.

Das dritte wird beim Kontrollieren zum Feststellen der Fehler verwendet (oft zusammen mit dem zweiten), und das Beweisen durch Herbeiführen eines Widerspruches kann von den Schülern explizit dargelegt werden.

Ordnung und Quasiordnung

Wenn eine strikte Halbordnung ϕ auf E gegeben ist, dann kann man jedem Element die Menge seiner Minoranten und die Menge seiner Majoranten assoziieren.

Man definiert dann eine Äquivalenzrelation $\mathfrak{C}$, die mit der Ordnung kompatibel ist, indem man schreibt:

$x \,\mathfrak{C}\, y \iff x$ und y haben die gleiche Menge an Minoranten und die gleiche Menge an Majoranten

Die Relation ϕ oder $\mathfrak{C}$ ist eine Quasiordnungsrelation und erlaubt es, $E_{/\mathfrak{C}}$ mit der assoziierten Ordnung zu versehen, so daß die natürliche Abbildung $E \longrightarrow E_{/\mathfrak{C}}$ strikt wächst.

So verfährt man, wenn ein Ordnen durch aufeinanderfolgende Etappen durchgeführt wird und insbesondere dann, wenn man bei Meßtätigkeiten bestimmte Gegenstände mit Hilfe einer Reihe von Standardmaßen vergleicht.

VARIABLE, FUNKTIONEN, GRAPHISCHE DARSTELLUNG IN DER KLASSE CE 1 (7- BIS 8-JÄHRIGE SCHÜLER)[1]

von R. Douady, IREM Paris

Das Experiment zeigt, daß die graphische Interpretation einer Aufgabe (aus der Mathematik, Physik, Chemie, Volkswirtschaft ...) häufig zu einer Lösung führt oder es zumindest erlaubt, einen Fortschritt zu einer Lösung hin zu erreichen. Die Konstruktion geeigneter Kurven, die das Phänomen veranschaulichen, erlaubt es, abstrakte Überlegungen zu überprüfen und Fehler zu vermeiden.

In welchem Alter kann mit dem Konstruieren von Kurven begonnen werden; welchen Einfluß übt dieses graphische Werkzeug auf das Begreifen, das Aneignen mathematischer Begriffe aus?

Die Beobachtungen, die im Hinblick darauf in einer CE 1 (7- bis 8-jährige Schüler) gemacht worden sind, lassen auf Ansätze für Antworten hoffen. Hierzu müßte das Beobachtungsfeld erweitert werden.

Wir werden Situationen beschreiben, in denen das graphische Werkzeug zunächst zur Überprüfung der Situation und später als Grundlage für Prognosen dienen. Da die Kinder nur mit ganzen Zahlen rechnen konnten, bestand der erste Abschnitt im Kodieren eines Gitternetzes.

Kodieren des Gitternetzes: im CP [2] haben die Kinder hierzu mehrere Aktivitäten durchgeführt: sie machten verschiedene

1) Der Versuch wurde im Jahr 1973/74 durchgeführt. Die Dauer der Unterrichtsstunden betrug 1 und 1 1/2 Stunden. CE 1 = cours élémentaire 1, 2. Pflicht-Schuljahr.

2) Cours preparatoire: erstes Pflichtschuljahr im französischen Schulsystem.

Spiele auf dem Schulhof, studierten den Plan einer amerikanischen Stadt (Anlaß: Reise des Vaters einer der Schüler in die USA), haben den Plan einer imaginären Stadt angefertigt, schließlich ihrer eigenen. Dieser Plan war nichts anderes als ein Gitternetz. Sie haben sich Nachrichten übermittelt, sich zu Treffen verabredet. Hierzu mußten sie die Straßen, die Kreuzungen benennen. Dabei stießen sie auf Schwierigkeiten. [1] Zur Kommunikation und für das gegenseitige Verstehen mußten alle dieselben Zeichen verwenden. Nun ist es nicht immer leicht, die von den anderen erfundenen Zeichen zu reproduzieren, selbst wenn man es kann, geht es oft langsam. Irrtümer müssen vermieden werden. Am Ende des Vorbereitungskurses hatten sie die Straßen in der einen Richtung mit Tierzeichnungen, in der anderen mit Zeichnungen von Blumen gekennzeichnet.

In der CE 1 haben wir uns nochmals mit der Frage beschäftigt. Sie verwarfen die von ihnen erfundenen Zeichen, die Buchstaben des Alphabetes. "Es gibt nicht genug, man kann c und C, C und G verwechseln". Sie entscheiden sich für Zahlen für beide Richtungen: auf diese Weise ist jede Kreuzung durch zwei Zahlen markiert, "die Zahl der sich schneidenden Linien". Alle sind zufrieden. Die Kinder übermitteln sich Nachrichten, erwarten jetzt, richtig verstanden zu werden, und dennoch gibt es zahlreiche Enttäuschungen. Man stellt fest, daß die Art der Liniennumerierung nicht präzisiert worden ist und daß es, selbst bei gleichartiger Numerierung zwei Kreuzungen 1.4 gab. ("der Punkt soll eine Verwechslung mit der Zahl 14 ausschließen".)

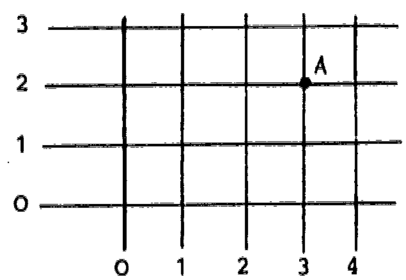
Zur Lösung des letzteren Problems schlagen sie folgendes vor:

- jede Richtung zu benennen und neben die Zahl die Bezeichnung der Richtung zu schreiben, in der sie gelesen werden muß;
- die Zahlen mit verschiedenen Farben waagerecht und senk-

1) Es gab Diskussionen über die Art und die Anzahl von Angaben, die zur Bestimmung einer Kreuzung notwendig sind.

recht zu schreiben;
- die eine Richtung mit Buchstaben, die andere mit Zahlen zu kennzeichnen;
- eine Reihenfolge festzulegen und die 2 Zahlen für einen Schnittpunkt stets in derselben Reihenfolge zu schreiben.

Nach einer Diskussion sind sie sich darin einig, daß es mehrere mögliche Kodierungen gibt, daß man sich entscheiden muß: folgende soll die Standardmarkierung sein:



der Schnittpunkt A wird durch das Paar (3,2) markiert

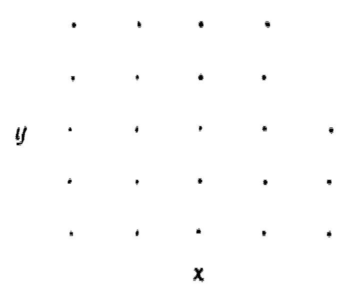
die erste Zahl wird in der Waagerechten, die zweite in der Senkrechten abgelesen.

Die Kinder führten die folgenden Handlungen aus: auf dem Gitternetz eine Zeichnung anzufertigen, die telefonisch beschrieben werden kann; einem Partner die Beschreibung, die man telefonisch übermittelt erhalten hatte, schriftlich mitzuteilen, wobei der Empfänger der Nachricht die Aufgabe hat, die Zeichnung neu anzufertigen und sie dem Absender zur Kontrolle zurückzuschicken. Im weiteren Verlauf traten im großen und ganzen keine Fehler auf, wenn die Kinder einen Punkt, dessen Koordinaten bekannt waren, suchen oder umgekehrt, die Koordinaten eines Punktes angeben sollten.

UNTERRICHTSSTUNDE VOM 9. NOVEMBER 1973
(nach einem in Exeter gezeigten polnischen Film)

1. Großes Gitternetz: Gemeinsame Tätigkeit

Die Kinder haben sich so aufgestellt, daß sie ein Gitternetz bilden, wie das Schema unten darstellt:

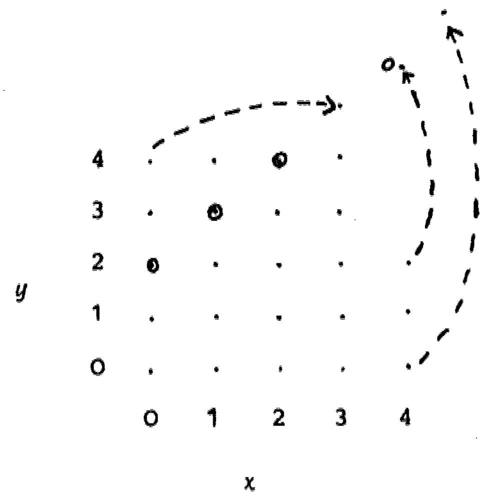


Sie knien. Jedes von ihnen kennt seine Koordinaten. Die Lehrerin nennt eine Gleichung[1)]

$$y = x + 2$$

Ein Kind setzt für x einen Wert ein und der Schüler, dessen Koordinaten $(x, x + 2)$ für den für x gewählten Wert sind, steht auf und bleibt stehen. Jeder schlägt nun einen Wert für x vor. Sie sind im allgemeinen nicht aufeinanderfolgend, sie sind oft zu groß und entsprechen deshalb nicht den Koordinaten eines Kindes. Um die Möglichkeiten zu erweitern, schlagen einige Kinder Werte von x vor, die knapp die Grenzen überschreiten und lösen das Gitternetz auf, um die Reihe der bereits stehenden Kinder zu verlängern.

1) Ich weiß nicht, wie diese Schreibweise aufgekommen ist, aber sie wurde ohne weiteres von allen benutzt.



Andere bitten darum, eine Gleichung vorschlagen zu dürfen und finden sich aufgrund der von ihnen vorgeschlagenen Gleichung wieder stehend. Ich unterstelle ihnen gern, daß sie die Gleichung gewählt haben, um auch ganz sicher aufstehen zu dürfen.
Diese beiden aufgetretenen Reaktionen

- Verlängerung der Reihe
- Suche nach einer Gleichung, die lösbar ist

lassen daran denken, daß die Begriffe "Variable" und "Funktionen" aufgetreten sind.

2. *Mittleres Gitternetz: Arbeit in Zweiergruppen*

Gleiche Art von Spiel wie das obige, mit in Form von Gitternetzen zusammengenagelten Brettchen und Gummiringen zum Einkreisen der Lösungen.

3. *Gitternetz im Zentimeterformat: Einzelarbeit*

Aufgabe: auf Rechenpapier die Paare (x,y) oder $y = x + 2$ zu finden.

Anmerkung: Während die Kinder beim Spiel mit den zusammengenagelten Brettchen soviele Lösungen, wie nur möglich, mit dem Gummiring eingekreist hatten, ergeben sich beim Rechenpapier unterschiedliche Resultate (was nicht verwunderlich ist, da es sich um Einzelarbeit handelt): einige markieren eine große Anzahl von Punkten, andere nur zwei oder drei. Die einen haben so viele Linien wie möglich numeriert und zu diesem Zweck die x-Achse ganz unten auf dem Blatt und die y-Achse ganz links gezeichnet. Andere verlegen die Achsen in die Mitte, was sie zu der Frage führen wird, wie die Schnittpunkte in den anderen Quadranten benannt werden sollen.

4. *Gemeinsame Auswertung*

An die Tafel wird ein großes Stück Rechenpapier geheftet. Darauf werden zwei rechtwinklig aufeinanderstehende Achsen gezeichnet, die benannt werden, und man teilt wie üblich ein.
Die Lehrerin markiert einen Punkt, bezeichnet ihn z.B. mit A.

Fragen:
1) Welches sind die Koordinaten von A?
2) Eine Gleichung finden, die von den Koordinaten von A erfüllt wird.
3) Andere Paare angeben, die die gefundene Gleichung erfüllen.
4) Beobachtungen aufschreiben.

Antworten:

* Es gibt nur eine auf die Frage 1), alle geben sie.
* Viele Gleichungen sind als Antwort auf Frage 2) möglich, aber die Kinder kennen nur eine Art. Es ist nicht verwunderlich, daß sie für (3,9) $y = x + 6$ vorgeschlagen haben.
* Sie haben viele Lösungen aufgezählt; sie wählten ferner der Reihe nach einen Punkt und beantworteten die Fragen in Bezug auf die neuen Punkte. Ein Kind wählte die Punkte (7,3). Ein Mitschüler gibt

die Gleichung $y = x - 4$ an. Es werden mehrere Lösungen für diese Gleichung vorgeschlagen und im Koordinatensystem markiert. Ein kleines Mädchen schlägt (O,4 unter O) vor; sie liefert den Beweis, indem sie mit Hilfe des Lineals die in derselben Reihe liegenden Punkte miteinander verbindet, bis sie die y-Achse trifft. Ein anderes Kind nennt dann das Paar (1, minus 3).

Anmerkung: Zu diesem Zeitpunkt war nur der positive Quadrant bezeichnet, die Ausdrücke "4 unter O" oder "minus 3" entstammen der Beobachtung des Thermometers und der Feststellung der Temperatur an einem sehr kalten Tag.

UNTERRICHTSSTUNDE VOM 16. NOVEMBER 1973

Ziel: Aufgabe in die Form einer Gleichung bringen; graphische Darstellung.

Situation: Marie-Anne, ein kleines Mädchen aus der Klasse, hat einen Bruder Stéphane. Sie ist drei Jahre jünger als er. Wie alt war Marie-Anne, als Stéphane 3 Jahre, 4 Jahre ... alt war?

Zunächst erfolgen die Antworten mündlich, dann schriftlich: die Lehrerin stellt die Aufgabe, die Beziehung zwischen den Lebensaltern von Stéphane und Marie-Anne aufzuschreiben und sie graphisch darzustellen (siehe Abbildung Nr. 1), $\frac{0}{1}$ wird "1 unter null" gelesen).

Gegenständliche Arbeit: an die Tafel wird ein großes Stück Rechenpapier geheftet, auf das zwei senkrecht aufeinanderstehende, wie üblich eingeteilte Achsen gezeichnet werden.

* Man überzeugt sich davon, daß alle Kinder die Koordinaten eines gegebenen Punktes bestimmen und einen Punkt, dessen Koordinaten bekannt sind, auffinden können.

* Die Kinder beobachten das Koordinatensystem und sagen alles dazu, was ihnen gerade einfällt; folgendes etwa:
  - Alle Punkte, deren zweite Koordinate 3 ist, liegen auf dieser Geraden (dabei zeigen sie die Waagerechte im Abstand 3).
  - Es gibt unendlich viele Punkte, deren y-Wert 3 ist. Alle Punkte mit $x = 5$ liegen auf dieser Geraden (dabei zeigen sie die Senkrechte, die durch (5,3) verläuft).

Die letzte gezeichnete Gerade schneidet die x-Achse. Dies erlaubt es einem Kind, einen Punkt unter dieser Achse zu wählen: es gibt die Koordinaten $x = 5$, $y =$ (2 unter O) an. Dieses Beispiel regt die Kinder sehr an, jedes von ihnen möchte einen Punkt in einem Quadranten wählen, und weil dieser Bereich übervoll ist, wählt ein Pfiffiger einen Punkt links von der y-Achse. Eine Schwierigkeit:
Wie soll x für diesen Punkt bezeichnet werden? Man könnte sagen "links von O".

Einen Augenblick lang erhält man eine Unmenge von Punkten, alle Azimute begleitet von ihren jeweiligen Koordinaten. *Die vier Quadranten des Koordinatensystems sind bekannt.* Als man daran ging, diese guten Ideen aufzuschreiben, schlugen einige Kinder vor, den Ausdruck "links von O" durch ein weniger umständliches Zeichen zu ersetzen. Patrice, der das Zeichen "-" bereits für die Temperaturen unter O benutzte, schlug vor, ein "-" vor die betreffende Zahl zu setzen. Gesagt, und in der allgemeinen Begeisterung angenommen: so hat man $\mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z}$ als Index für das Koordinatensystem.

Nach der Pause werden die Kinder auf ihre Bitte hin mit einer neuen Situation konfrontiert:
Vor einem Supermarkt steht ein Hol ferd, das die Kinder gut kennen. Eine Runde kostet eine kleine Münze, zwei kleine Münzen entsprechen einem Franc.

Arbeit in einer Zweiergruppe

Manuelle Tätigkeit: Jede Gruppe verfügt über einen Kasten mit kleinen Münzen sowie über einen Kasten mit 1 Franc-Münzen. Die beiden Partner tauschen untereinander Münzen aus und führen darüber Buch. Man erhält dann solche Listen, wie nachstehend aufgeführt:

Francs		kleine Münzen
1	$\longrightarrow$	2
7	$\longrightarrow$	14
8	$\longrightarrow$	16 .....

Die Listen werden länger, ohne Unterstützung durch manuelle Tätigkeit, denn die Zahlen im Spiel werden größer als die Anzahl der verfügbaren Münzen.

Wieviele Runden kann man mit 2 Franc, 4 Franc, 7 Franc ... bestreiten, andere Beispiele angeben.

Die Beziehung zwischen den Francs und den Runden ist graphisch darzustellen. Wenn möglich soll eine Gleichung angegeben werden, die diese Beziehung darstellt.

Reaktion der Kinder:

- Sie haben lange Listen mit Beispielen geschrieben, in denen kleine, große, ungerade Zahlen für alle die Runden vorkommen, was so geschrieben wurde:

7,50 Francs $\longrightarrow$ 15 Runden... Es gab auch:

0 $\longrightarrow$ 0.

- Sie übertrugen einige der Paare in das Koordinatensystem, indem sie die Francs auf der x-Achse, die Runden auf der y-Achse eintrugen.

Dorice überträgt in ihr Koordinatensystem mehrere Koordinatenpaare, u.a. (5,8); als sie die Punkte miteinander verbinden will, stellt sie fest, daß sie alle bis auf einer in derselben Reihe liegen; sie kontrolliert $2 \cdot 5 = 10$, und nicht 8.

Aufgrund von manueller Ungeschicklichkeit zeichnen manche Kinder Geraden, die nicht immer so verlaufen, wie sie es wollen. Jedoch unterscheiden sie im allgemeinen zwischen einem Zeichen-, Übertragungs- und Rechenfehler.

Von den Kindern vorgeschlagene Gleichungen:

1) y = das Doppelte von x
2) $y = 2\ x$
3) $y = x + x$

10 Kinder schlugen die Formel 1 vor,
2 Kinder schlugen die Formel 2 vor,
6 Kinder schlugen die Formel 3 vor.
Von den 10 Kindern, die die Formel 1 geschrieben haben,

schrieb	1 die Formel 2 und 3	auf die Graphik,
schrieb	1 die Formel 2	auf die Graphik,
schrieben	2 die Formel 3	auf die Graphik.

Eine falsche Formulierung $y = x$ + das Doppelte von x, aber eine richtige Graphik.

Zwei machten gar keinen Vorschlag.

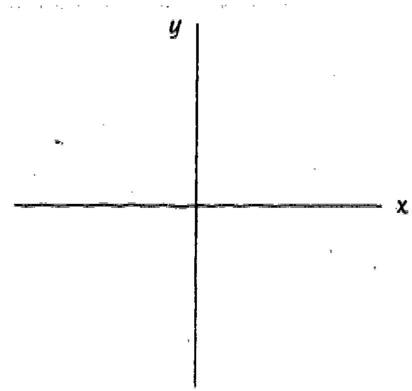
Zwei fehlten.

Bemerkung zur Schreibweise (x,y)

Jeder Schnittpunkt im Koordinatensystem wird durch ein Paar (x,y) bezeichnet, wobei x und y Elemente von $\mathbb{Z}$ sind. Tatsächlich spielte die Schreibweise "x" (bzw. "y") zwei Rollen:

- diejenige der Variablen
- diejenige der ersten (bzw. zweiten) Koordinate

Diese Doppelrolle führte in der folgenden Situation zu Schwierigkeiten:



In dieser schematischen Darstellung bezeichnen *x* und *y* Spiegelachsen.

1. *Abschnitt:*

Aufgabe:
- Punkte im Koordinatensystem zu wählen,
- sie zu bezeichnen,
- sie zu verbinden, damit eine Zeichnung entsteht,
- die Spiegelung an der *y*-Achse zu zeichnen,
- das Bild zu bezeichnen,
- Bemerkungen dazu aufzuschreiben (siehe Abbildung Nr. 2 der Schülerlösungen)

2. *Abschnitt:*

Man kommt wieder auf die obigen Aufgaben zurück, dieses Mal mit *x* als Achse der Spiegelung.

Die Kinder, die eine Zeichnung quer über beide Quadranten gemacht haben, verlangten ein neues Blatt Rechenpapier, um eine neue Zeichnung anfertigen zu können.

Einige Kinder, die ihre Zeichnung in einen einzigen Quadranten gelegt hatten, benutzten dieselbe Zeichnung, um die Reflexion an der Spiegelachse *x* zu zeichnen. Diese Situation regte sie dazu an, "das Symmetrische des Symmetrischen" zu zeichnen.
(siehe Abbildung Nr. 2)

Die Kinder bemerkten, daß:

- die Spiegelung an der y-Achse x in $-x$ überführte und y unverändert ließ,
- die Spiegelung an der x-Achse y in $-y$ überführte und x unverändert ließ.

Als sie die Spiegelungen zusammensetzten, gab es zwei Arten von Vermutungen:

für die einen: $(x,y) \xrightarrow{M_y} (-x,y) \xrightarrow{M_x} (-x,-y)$

für die anderen: $(x,y) \xrightarrow{M_y} (-x,y) \xrightarrow{M_x} (x,-y)$

Andere nahmen die Bilder von Zahlenpaaren, indem sie der Zeichnung folgten. Die Vermutungen der ersteren wurden durch die Zeichnung bestätigt, während bei denjenigen der zweiten ein Widerspruch auftauchte (ausgenommen einige Fälle, was eine Diskussion über das Verhalten der Punkte bei der Spiegelung, bei "0" und "-0" auslöste).
Die zweiten argumentierten:

- die Spiegelung an der x-Achse ändert nur y und nicht x.

Die anderen antworteten:

- x ist hier $-x$.

Die Lehrerin schlägt dann vor, die Koordinaten des Punktes, der an der Achse Y gespiegelt wurde, anders als x und y zu bezeichnen. Man einigt sich auf a und b. Die Kinder präzisieren jetzt:

- das x von (a,b) ist a
- das y von (a,b) ist b

Sie fahren fort:

$$(a,b) \xrightarrow{M_y} (-a,b)$$

- das x von $(-a,b)$ ist $-a$
- das y von $(-a,b)$ ist b

Es handelt sich hier um eine ganz klare Art und Weise, die Bezeichnung "x" für die erste Projektion $(a,b) \longrightarrow a$ und "*y*" für die zweite Projektion zu reservieren. Somit wurde die Unklarheit ausgeräumt.

Als die Kinder später neue Spiegelungen hinzufügten und auch "Züge mit mehreren Waggons", d.h. verschiedene Zusammensetzungen von Symmetrien realisierten, gab es im großen und ganzen keine Fehler.

Am Ende jedes Abschnittes wurde ein Test durchgeführt. Beispiel: siehe Abbildung Nr. 2

Wenige Fehler.

AUS DER ARBEIT MIT DER CE 2 [1] IN DIESEM JAHR

Wir untersuchten neue Funktionen unter den folgenden Bedingungen:

I. *Zahlensystem*

Die ersten Gruppen werden jeweils mit "Stab", "Plättchen", "Würfel" bezeichnet. Die Kinder verlängerten die Reihe mit "Stab aus Würfeln", "Plättchen aus Würfeln" usw...

In einer festgelegten Basis *b* verglichen wir die Zahl der Einheiten in einem Stab mit derjenigen in einem Plättchen, einem Würfel usw... Die Kinder arbeiteten im allgemeinen in Vierergruppen; jede Gruppe hatte eine Basis gewählt: 3,4,5... Die mutigsten Kinder führten Rechnungen bis zur Basis 6 durch. Wir schlugen die folgende Übung vor: die Zahl 32000130021 ist in der Basis 4 geschrieben. Wieviele Einheiten hat sie?
Ein Kind überträgt die Formulierung:
"Diese Zahl muß auf die Basis 10 umgeschrieben werden".

Ein einziges Kind konnte die Frage beantworten; die Schwie-

1) CE 2: cours élémentaire 2, 3. Pflichtschuljahr

rigkeiten rührten vor allem von der Länge der Zahl her: Einige Kinder teilten die Zahl in 130021 und 32000 und fügten die Resultate hinzu, viele wandelten 130021 um, ohne weiter zu gehen. Mehrere stellten Berechnungen an und machten Rechenfehler bei 4^7. Die Situation schien festgefahren zu sein, während es bei Zahlen mit 4 oder 5 Stellen keinerlei Schwierigkeiten gab. Die Kinder wollten keine Rechnungen aufstellen, ohne sie durchzuführen; $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$ war nur durch das Ergebnis vorhanden. Dann zogen wir eine Bilanz der Resultate, über die wir verfügten

1	4
2	$4 \cdot 4 = 16$
3	$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

Wir fuhren weiter fort bis 6.

Die Kinder wollten dann die Schreibweise verkürzen. Nach mehreren Vorschlägen akzeptierten sie schließlich

$$4 \Delta 5 \quad \text{für } 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$$

Δ heißt, daß 4 mit sich selbst multipliziert wird, die nachfolgende Zahl zeigt an, wieviel mal.

Die Paare $(x, 4 \Delta x)$ sollten graphisch dargestellt werden. Die Kinder rechneten bis $4 \Delta 10$, $4 \Delta 11$.

Problem: der Platz auf dem Papier reicht nicht aus.
Vorschläge: Blätter müßten angeklebt werden,
man könnte die Y-Achse in Vierer-Einheiten einteilen,
man kann in $4 \Delta 1$, $4 \Delta 2$, ... einteilen
und schreibt die wirklichen Zahlen neben den Punkt.

Im folgenden konnten mehrere Kinder die vorgeschlagene lange Zahl umwandeln. Die graphische Motivation scheint die Situation geklärt zu haben.

Andere Funktionen

Es wurde die Basis b gewählt.

1) Wieviele Einheiten sind in 1 Stab, 2 Stäben, 3 Stäben, ... x Stäben?
   Dieselbe Frage bezogen auf 1 Plättchen, 2 Plättchen, ... x Plättchen.

   Die Beziehungen sind graphisch darzustellen.
   Die Kinder beantworteten die Fragen und nahmen andere Funktionen derselben Art in Angriff (siehe Abbildung Nr.

Sie machten verschiedenartige Bemerkungen:
Beispiel: $y = (2 \cdot 2)\ x$ ist die "Plättchen-Funktion" in der Basis 2, ist die "Stab-Funktion" in der Basis 4, usw....

2) Wie variiert die Anzahl der Einheiten mit der Basis:
   in einem Stab,
   in einem Plättchen,
   in einem Würfel; usw....

Die Kinder schrieben die Paare für jede der Situationen auf und stellten die Funktionen in demselben Koordinatensystem dar:

$b \longrightarrow b$

$b \longrightarrow b \cdot b = b \,\Delta\, 2$

$b \longrightarrow b \cdot b \cdot b = b \,\Delta\, 3$ usw. ...

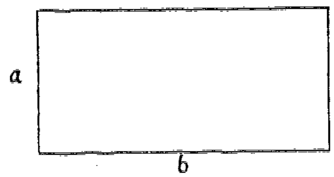
Sie nahmen im allgemeinen nicht den gleichen Maßstab für x und y. Wir haben alle diese Kurven (die Punkte werden stets paarweise mithilfe des Lineals verbunden) auf einem großen Blatt Millimeterpapier nochmals aufgezeichnet und dort wurden als Einheiten

10 cm für x
1 mm für y

gewählt, "um viele Kurven unterbringen zu können, andernfalls liegen sie zu eng an der y-Achse".

II. *Geometrie auf Gitternetzen*

Ausschneiden von Vierecken und Rechtecken aus Rechenpapier nach verschiedenen Regeln:



1)

a	konstant
b	variabel

Berechnung des Flächeninhaltes, des Umfangs.

* Für jedes Rechteck die Anzahl der in ihm enthaltenen Kästchen auszurechnen.

Graphische Darstellung

- Jede Gruppe wählte einen Wert für "a", schrieb die Relation $b \longrightarrow a \cdot b$ auf und stellte sie graphisch dar.

* Für jedes Rechteck den Umfang zu berechnen, wobei als Einheit die Länge einer Kästchenseite des Gitternetzes genommen werden soll.

Anmerkung: Das Aufschreiben der Gleichung $S = a \cdot b$ verursachte keinerlei Schwierigkeiten; beim Aufschreiben der Relation bezüglich des Umfangs tauchten verschiedene Reaktionen auf:

- einige Kinder fertigten Listen an

a	b	P	
3	1	8	
3	2	10	usw....,

übertrugen die Paare (b,P) auf Rechenpapier. Sie beobachteten die Ausrichtung der Punkte; indem sie kontrollierten, ob ein durch Ausrichten gefundener Punkt tatsächlich ein Paar (b,P) darstellte, wurden sie sich über den Prozeß klar, der es erlaubte, von b nach P überzugehen, und sie schrieben

$P = 2b + 6$

- andere Kinder gingen mehr ins Detail

a	b	P
3	1	$(2 \cdot 1) + (2 \cdot 3)$
3	2	$(2 \cdot 2) + (2 \cdot 3)$ usw....

und schrieben dann

3	b	$(2 \cdot b) + (2 \cdot 3)$ und $P = 2b + 6$

oder

a	b	$a + b$	P
3	1	4	8
3	2	5	10 usw.
3	b	$3 + b$	$2(3 + b)$

2)

$\boxed{a = b}$ Berechnung von $S = a \cdot a$

Graphische Darstellung von $a \longrightarrow a \cdot a$

.Überlegungen: "die Gerade ist nicht gerade,
"sie dreht sich, sie muß durch 0 gehen, $0 \cdot 0 = 0$,
"bei den y-Werten ist nicht der gleiche Abstand zwischen 0 und 1 wie zwischen 1 und 2, 2 und 3".

Mit den Fingern zeigten sie den Zuwachs der y-Werte für einen Zuwachs von 1 der Variable. Das ist übrigens das Kriterium, das sie herausgefunden haben, um zu kontrollieren, ob eine Gleichung eine "ungerade Gerade" ergibt oder eine "gekrümmte Gerade".

* Berechnung des Umfangs.
Graphische Darstellung der Funktion $a \longrightarrow 4a$.

3)

$\boxed{a + b = 12}$ Berechnung des Flächeninhaltes der Rechtecke, die dieser Aufgabe entsprechen.

Die Kinder schnitten alle Rechtecke aus, die ganzen Werten von a und b entsprechen, wobei sie von $a = 1$ ausgingen. "Für $a = 0$ gibt es keine Rechtecke". Dann berechneten sie die Fläche:

a	b	$a \cdot b$	
1	11	11	
2	10	20	usw. ...

Sie stellten fest, daß das Vertauschen von b und a einer Betrachtungsweise des Rechtecks in anderer Richtung entspricht und keine Änderung seiner Fläche zur Folge hat. Nur ein Kind bemerkte, daß $a \cdot b = b \cdot a$, und daß durch das Vertauschen von b und a folglich S nicht verändert wird.

Bei der graphischen Darstellung der Situation tauchten Probleme auf.
Überlegungen: "Es sind 3 Variable vorhanden, wir haben nur 2 Achsen, wir können diese Funktion nicht darstellen.

"Wenn wir 3 Achsen hätten, dann ginge es,
"Wir brauchen eine Konstante,
"b ist die Konstante,
"Wenn man b festlegt, kann man nur noch ein Rechteck ausschneiden.
"Nein, zwei: (a,b) und (b,a) ergeben dasselbe Rechteck".

Einige schrieben auf ihr Papier

$$b = 12 - a \qquad\qquad S = a \cdot b = a \cdot (12 - a),$$

aber wir wollen auf diese Aufgabe im Augenblick nicht näher eingehen. Es wird der Vorschlag gemacht, mehrere Kurven zu zeichnen, da es zu viele Variable gibt.
Somit erscheinen

- die Paare (a,b) in der Form, daß $a + b = 12$
- die Paare (a,S)
- die Paare (b,S)

Sie stellen beim Durchsehen ihrer Listen, ihrer Rechnung oder beim Prüfen ihrer Kurven fest, daß, wenn a bekannt ist, b das Komplement zu 12 ist, und schreiben

$$S = a \cdot (12 - a) \quad \text{oder} \quad S = b \cdot (12 - b),$$

je nachdem, was sie als Variable gewählt hatten.

Bemerkungen:

- Sie bemerken dann, daß die Kurve bis zu 36 steigt und dann abfällt.
"Das ist normal, wenn die Aufgabe $a + b = 14$ gelautet hätte, wäre sie bis zu 49 angestiegen.
"Wenn man höher als 36 kommen will, muß man mit $6 \cdot 7 = 42$ arbeiten, aber $6 + 7 = 13$", erwidert ein anderes Kind.

- Sie versichern, daß die Senkrechte, die durch (6,36) verläuft, eine Symmetrieachse ist:
"Wenn man O anstelle von 6 setzt, ändert sich y nicht und x wird $-x$.
"Der Abstand der Achse von der Kurve ist rechts und links dergleiche.
"Wir werden die Kurve um negative Werte von a, um Werte von $a > 12$ verlängern".

Tatsächlich führen sie im Fall von $a > 12$ die Rechnungen durch, finden negative Werte für $a \cdot (12 - a)$, tragen die Paare ein. Einige führten die Rechnung für $a < 0$ durch, die meisten plazierten die Punkte (a,S) für $a < 0$ durch Symmetrie, lasen die Koordinaten auf dem Rechenpapier ab (englisches Papier, das in Zoll eingeteilt und unterteilt war) und prüften, ob die Koordinaten die Relation $S = a \cdot (12 - a)$ erfüllten.

- Man kann neue Aufgaben stellen

$$a + b = 14$$
$$a + b = 15$$

153

4)

$\boxed{a \cdot b = 24}$

Ausschneiden, Rechnungen und graphische Darstellung der Paare (a,b) wurden sehr schnell durchgeführt.

Überlegungen: "Die Spiegelachse W ist eine Symmetrieachse". Es handelt sich um die erste Winkelhalbierende.
"Wenn $a \cdot b = 24$, dann: $b \cdot a = 24$ und die Spiegelung an W vertauscht x und y".

Die Kinder wollen eine Gleichung für diese Kurve auffinden.

"Alle a passen nicht, nur diejenigen, für die 24 ein Vielfaches von a ist.
"Um b zu finden, muß man 24 durch a teilen

Sie schlagen vor: $b = 24 : a$

$b = 24/a$

"Wenn $a = \frac{1}{2}$, dann $b = 48$", das finden sie heraus, indem sie den Streifen (1,24) der Länge nach zerschneiden.

"Man kann ihn in 3, in 4, in 5 Teile schneiden, wie man will".

Man sieht folgende Schreibweisen:

$\frac{1}{3} \cdot 36 = 12$ $\quad$ $\frac{1}{4} \cdot 96 = 24$ usw. ...

"Gibt es Zahlen, die von keiner Zahl, außer von sich selbst, ein Vielfaches sind?"

... ein wenig später

"1 zählt nicht, das ist wie es selbst, es gibt vielleicht keine Zahlen in meiner Liste"

Es kommen Vorschläge:

"5" ja
"11" ja

"17"	ja
"41"	ja
"31"	ja

"Vielleicht findet man die Zahlen der Liste, wenn man zu den Zehnern 1 hinzufügt."

"Nein, denn: $21 = 3 \cdot 7$,
$81 = 9 \cdot 9$"

Somit stellte sich heraus, daß sich die Kinder der Klasse

teilweise

nach den Brüchen

teilweise

nach den Primzahlen

richteten.

Schlußfolgerung: Die hier berichteten Beobachtungen sind ermutigend. Die behandelten Themen erweckten offensichtlich das Interesse der Kinder, erlaubten es, der natürlichen Leidenschaft für Zahlen in diesem Alter freien Lauf zu lassen. Die Klasse bewies eine aktive, kritische, konstruktive Einstellung.

Ein wichtiger Punkt: Die Einstellung der Lehrerin

1) Sie lernte gleichzeitig mit den Kindern;
"Wenn ich etwas gut verstehe, dann bin ich sicher, daß es auch die Kinder verstehen werden".

2) Zwischen den Unterrichtsstunden, in denen neue Gebiete entdeckt wurden, fanden Routineübungen statt, d.h. das, was entdeckt oder entwickelt worden ist, wurde ca. hundert Mal praktisch geübt.

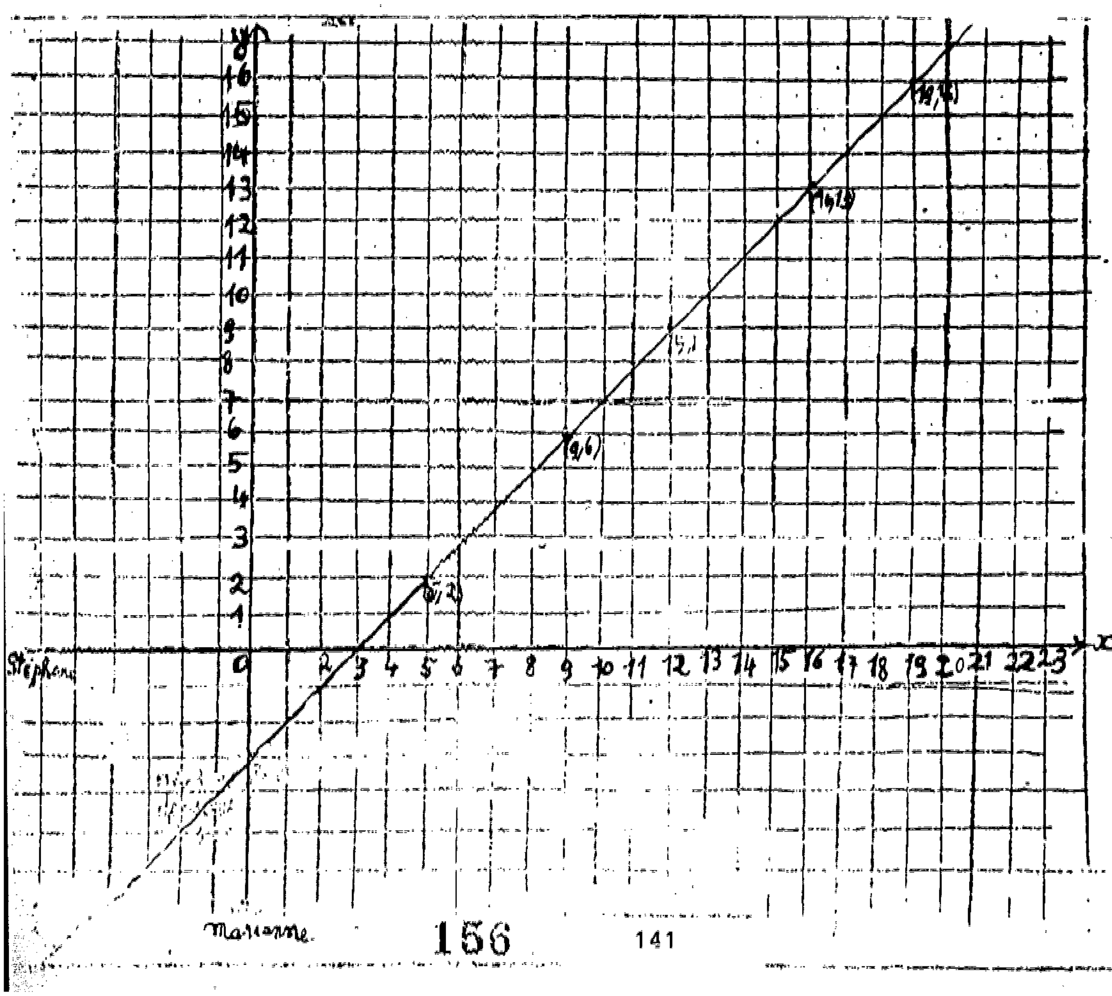
Abb. 1

Marie-Anne	Stéphane 0
1 an	4 ans
3 ans	6 ans
$\frac{0}{1}$	2 ans
5 ans	8 ans
11 ans	14 ans

Stéphane 28 13 40 52 62

Marianne 25 10 37 49 59

$x - 3 = y$



Valérie Gunni
Lundi 17 Décembre

Dessin $\boxed{x}$ → Symétrique par rapport à l'axe des x → Symétrique par rapport à l'axe du y.

(5, 3) → (5, -3) → (-5, -3)

(3, 5) → (3, -5) → (-3, -5)

(6, 8) → (6, -8) → (-6, -8)

(9, 5) → (9, -5) → (-9, -5)

(6, 2) → (6, -2) → (-6, -2)

(5, 1) → (5, -1) → (-5, -1)

(3, 3) → (3, -3) → (-3, -3)

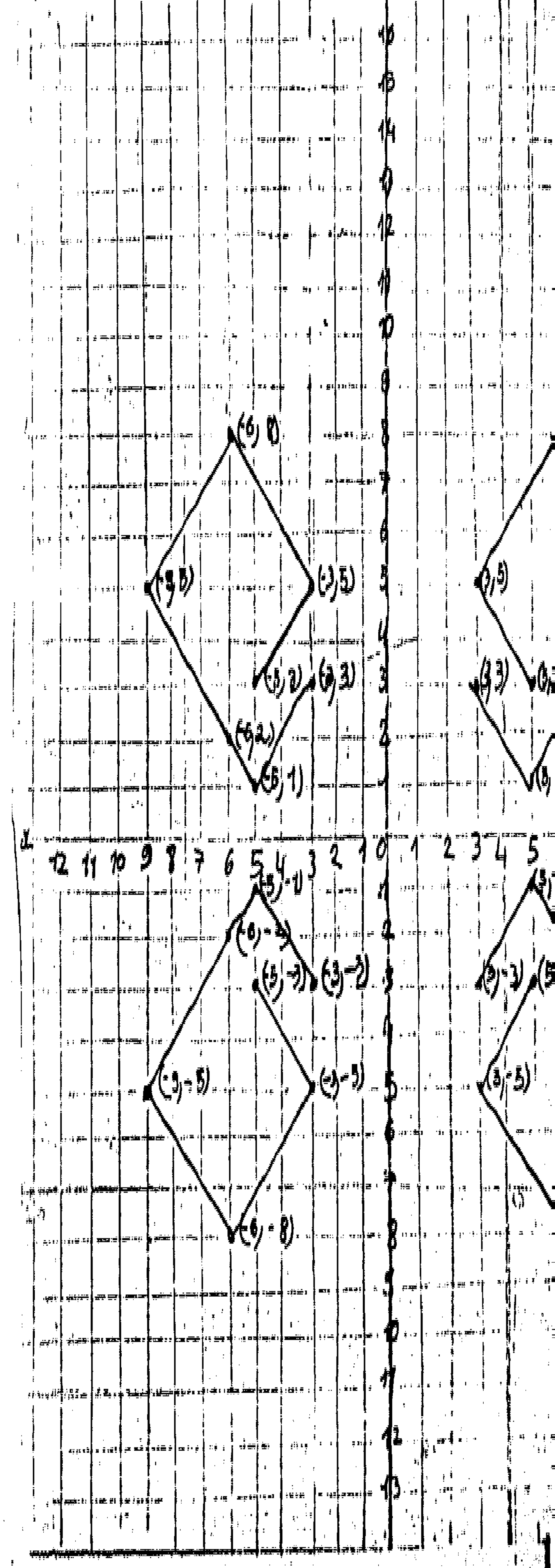
(x, y) — a (=) a y →

J'ai remarqué que quand un dessin passait dans les miroirs x, y et x c'était y la machine, x et x font rien (el) et il reste y.

Quand je prends les miroirs x, y le couple devient (-x, -y).

x, ", "

Quand je prends les miroirs x, y, y, le couple devient (x, -y).



...métrique par rapport à l'axe — Symétrique par rapport à l'axe des y.

-3) → (-5, -3)

-5) → (-3, -5)

-8) → (-6, -8)

-5) → (-9, -5)

-2) → (-6, -2)

-1) → (-5, -1)

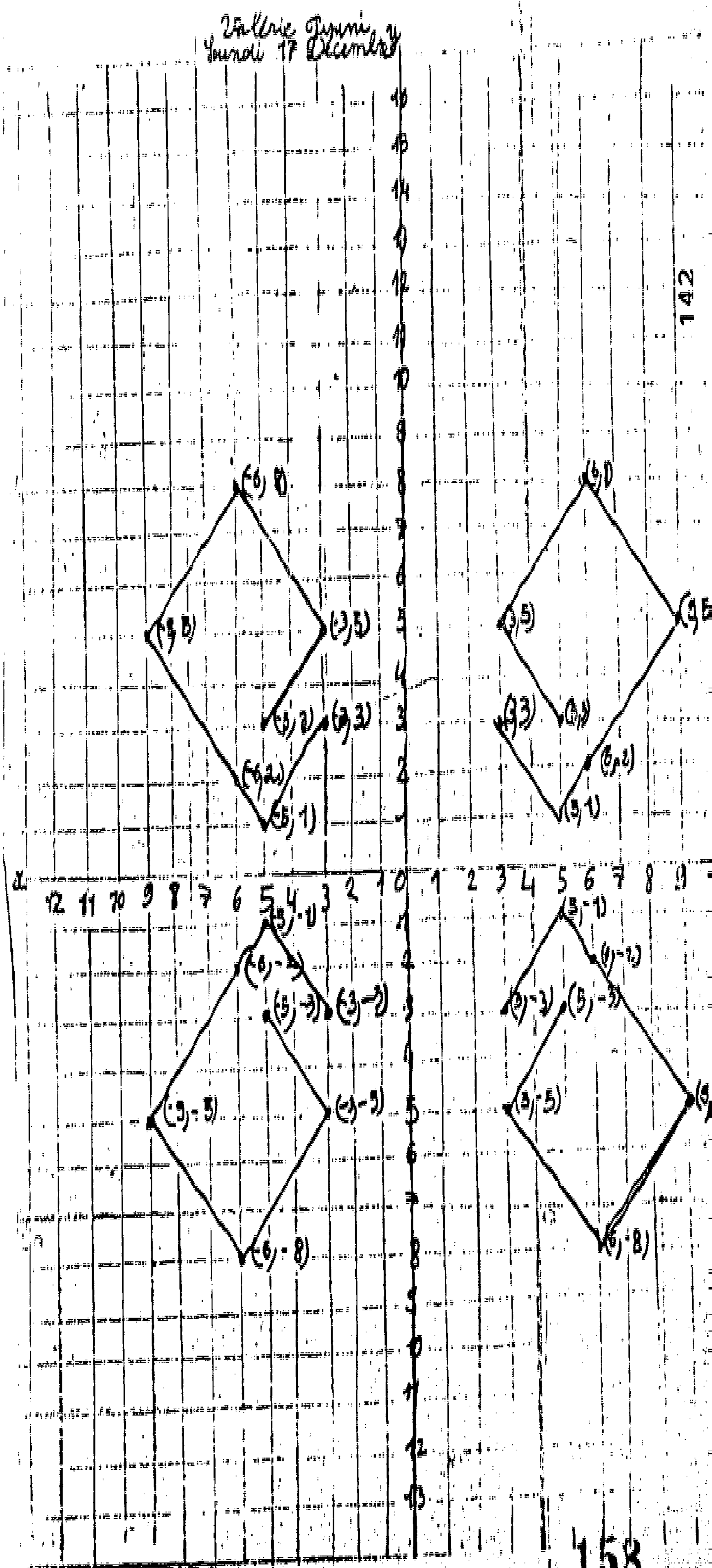
-3) → (-3, -3)

a (=) x y →

...que quand un dessin passait
...oirs x, y et x c'était y la machine
... rien (el) et il reste y.
...nds les miroirs x, y le couple devient

x, y, '

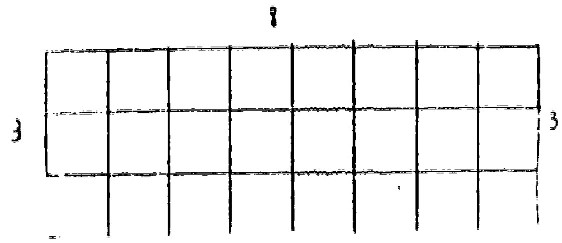
...nds les miroirs x, y, y, le couple devient



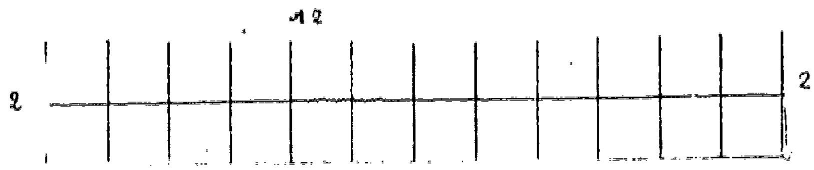
Série V Samedi 7 Décembre

$a \times b = 24$

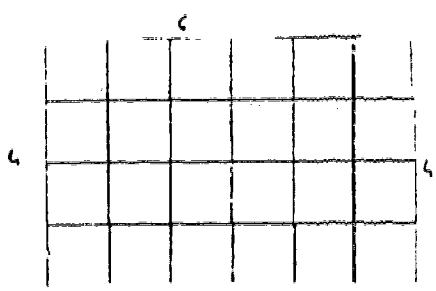
Abb. 3



$S = 3 \times 8 = 24$

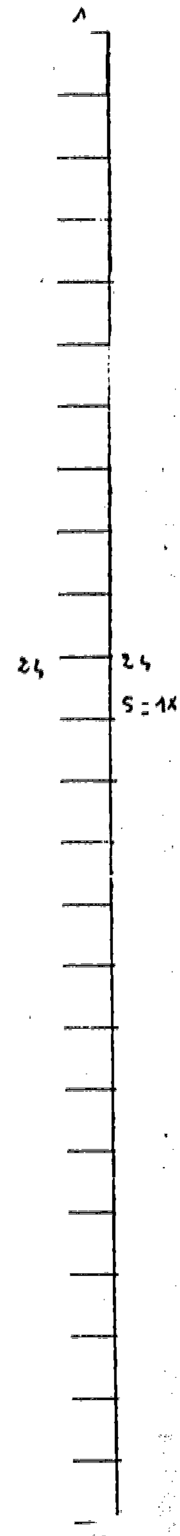


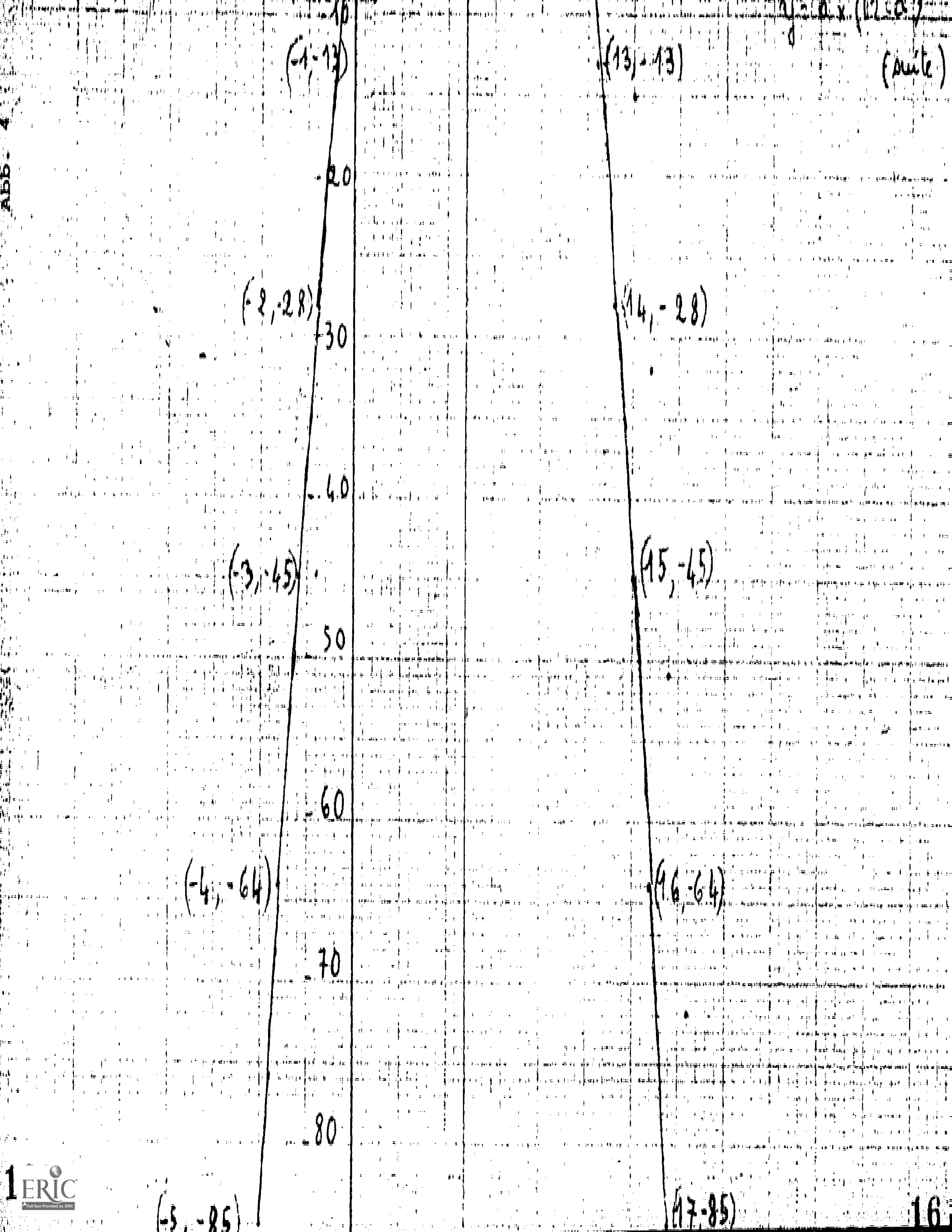
$S = 12 \times 2 = 24$

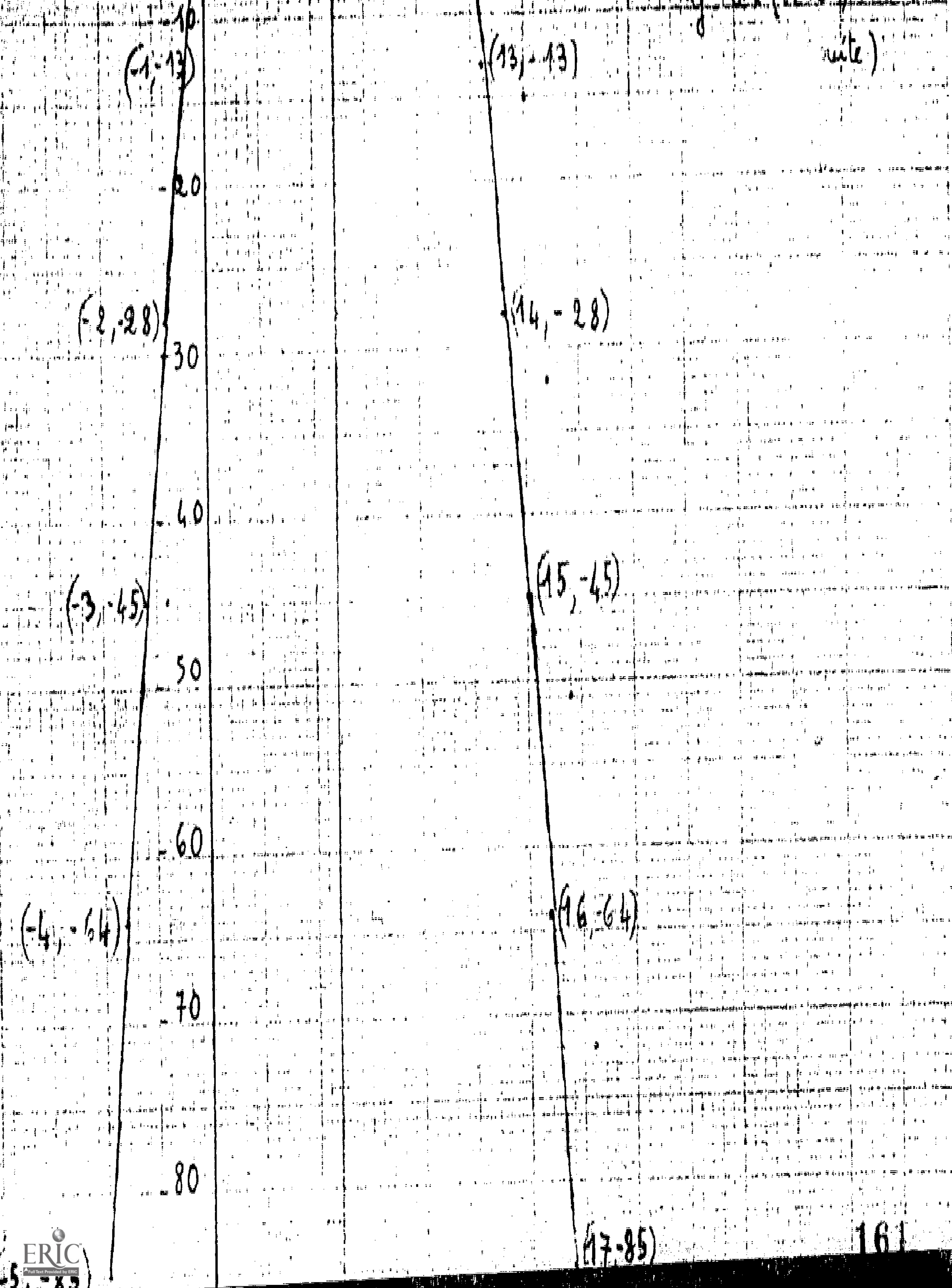


$S = 6 \times 4 = 24$

a	b	S
1	24	24
2	12	$2 \times 12 = 24$
3	8	$3 \times 8 = 24$
4	6	$4 \times 6 = 24$

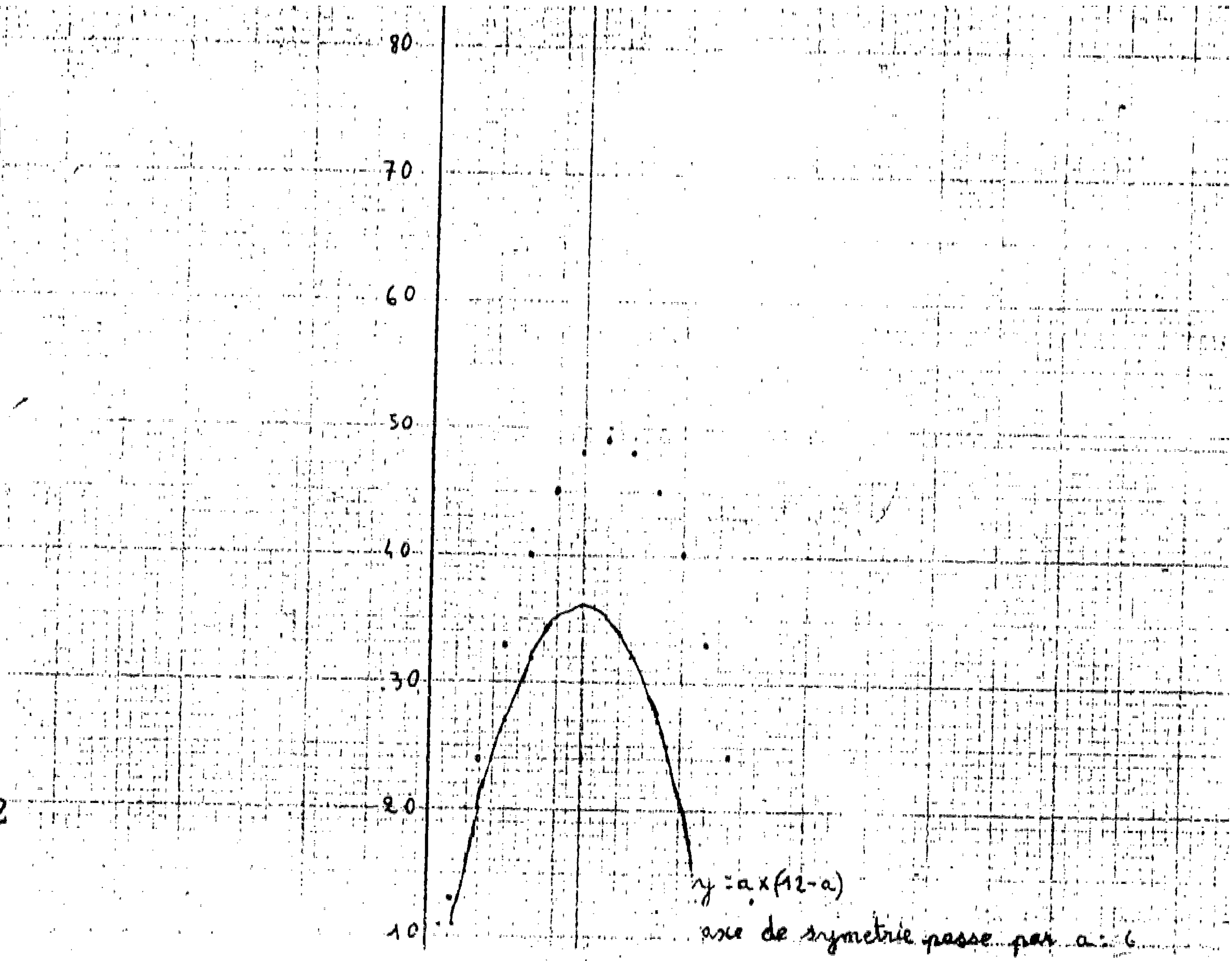


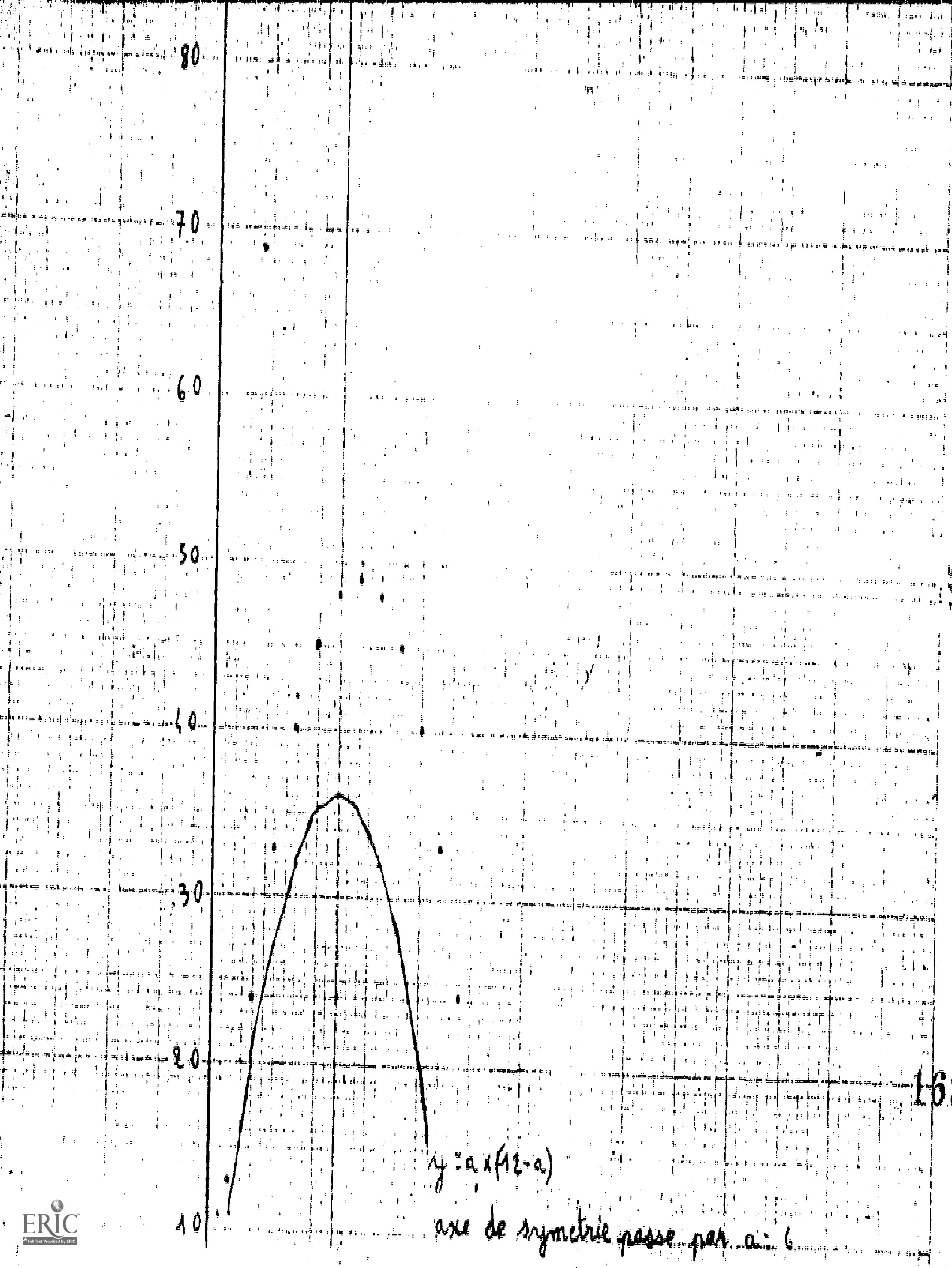

(suite)
(-1,-13)
(13,-13)
20
(-2,-28)
(14,-28)
30
40
(-3,-45)
(15,-45)
50
60
(-4,-64)
(16,-64)
70
80
(-5,-85)
(17,-85)

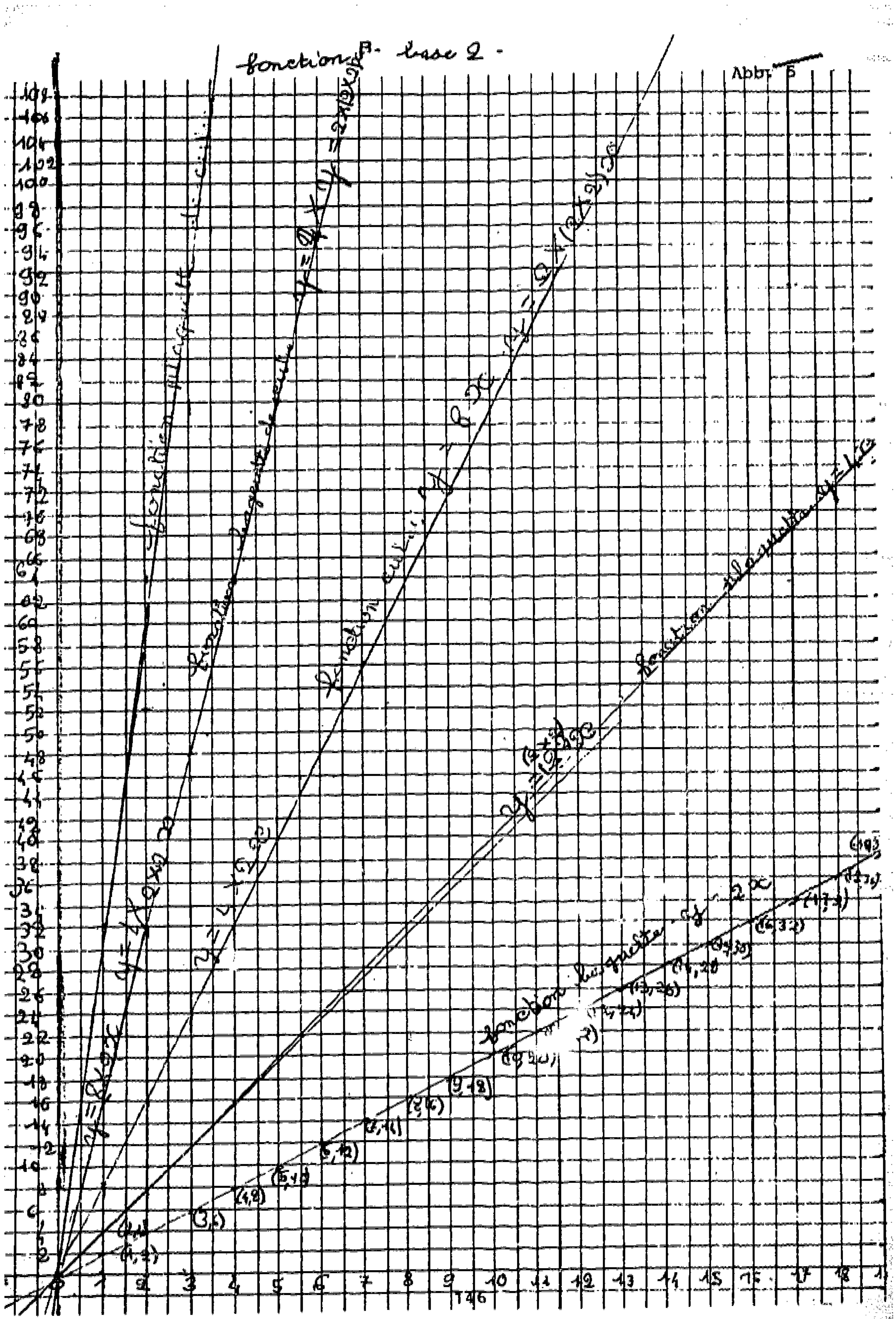


(-1,-13)
(13,-13)
uite)
20
(-2,-28)
(14,-28)
30
40
(-3,-45)
(15,-45)
50
60
(-4,-64)
(16,-64)
70
80
(17,-85)
(-5,-85)

Abb. 4

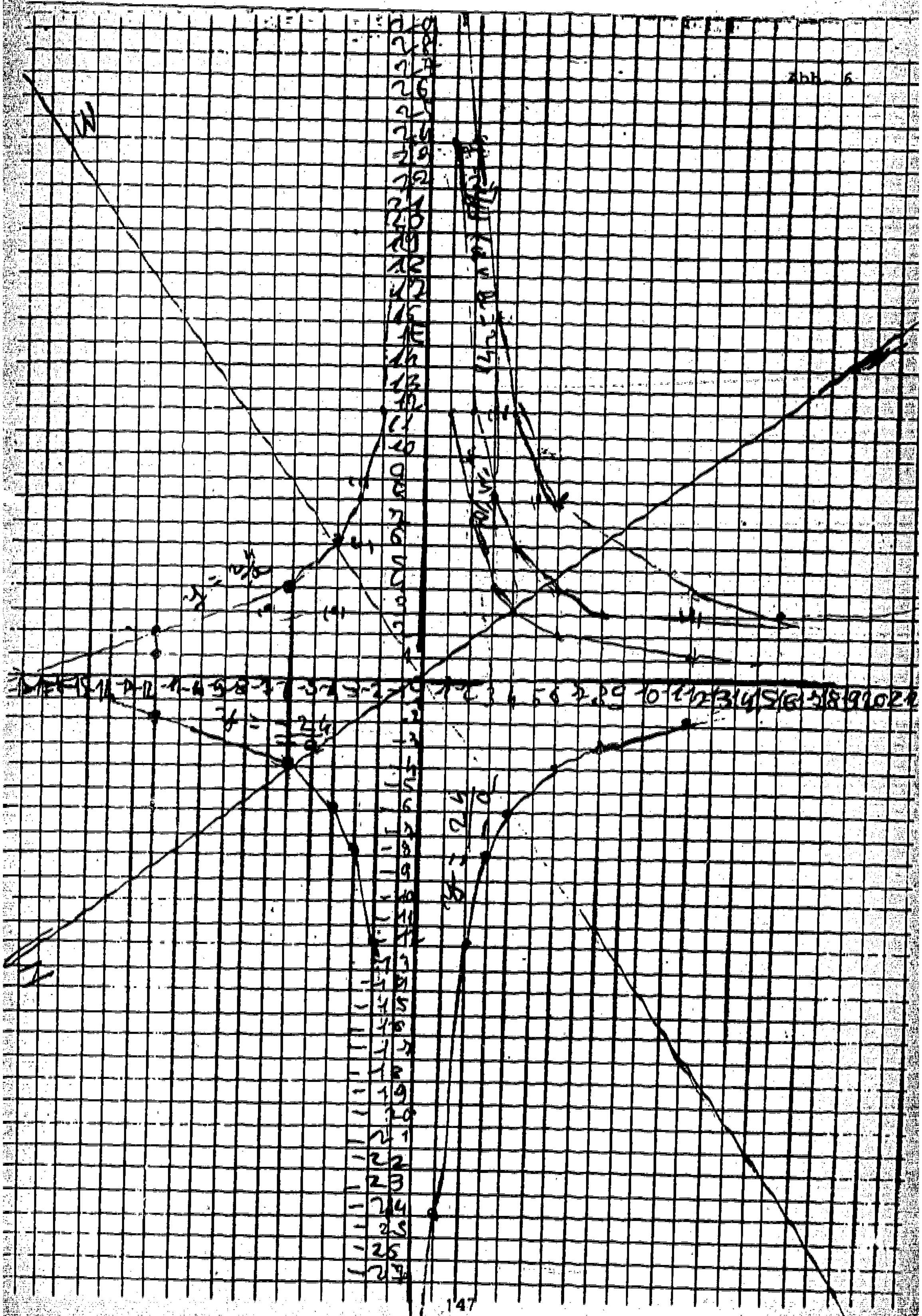



80
70
60
50
40
30
20
10
y = a x(12-a)
axe de symetrie passe par a = 6



fonction B - base 2 -
Abb. 5
fonction logarithme y = 2x
fonction multiplicative y = kx
146

Abb. 6



147

KOORDINIERUNG MATHEMATIK/FRANZÖSISCH
6. UND 5. KLASSE DES ERSTEN ZYKLUS DER SEKUNDARSTUFE

von Geneviève Lambelin, IREM Bordeaux

I. *Ziele*

Französisch und Mathematik sind die Grundpfeiler des gegenwärtig bei uns praktizierten allgemeinbildenden Unterrichts. Beide Fächer spielen eine ausschlaggebende Rolle bei der Ausbildung der Kinder. Man kann sich darüber wundern, daß sie getrennt, vollkommen isoliert unterrichtet werden; denn dies hat zur Folge, daß man vom Kind verlangt, es solle die notwendigen Synthesen selbst durchführen und somit ganz allein und ohne irgendwelche Hilfe die Einheit der gelehrten Unterrichtsinhalte erkennen.

Heißt dies nicht, sich auf Kosten des Schülers einer Aufgabe zu entledigen, die wir nicht übernehmen können, da wir uns - die einen wie die anderen - auf Positionen festgefahren haben, die gar zu oft ohne Beziehung zueinander sind.

Zweifellos darf nicht vernachlässigt werden, was die Geisteswissenschaftler von den Mathematikern trennt. Zunächst einmal ist an die stark belastende Entwicklung zu erinnern, in der die beiden Disziplinen oft im Gegensatz zueinander gestanden haben; ferner ist in der Mathematik eine Strenge, eine Objektivität vorhanden, die sich mit dem Empfinden für Nuancen wie dem Gehalt des Subjektiven, die der Gebrauch der Sprache impliziert, schlecht vereinbaren lassen.

Das Lehren der Sprache ermöglicht es weitgehend, sich selbst, einen Teil seines Erlebens auszudrücken, wohingegen man sich beim Lehren von Mathematik eher um die Mathematisierung, die Modellierung von erlebten Situationen bemüht. In beiden

Fällen geht es um den Ausdruck einer bestimmten Vorstellung, die man sich von seiner Umgebung macht.

Wenige Situationen jedoch sind wirklich mathematisierbar, und diejenigen, die mathematisch erfaßt werden können, wie nützlich das auch sein mag, sind im Grunde ziemlich armselig. Wenn wir von einer gleichen Situation ausgehen, werden wir mit dem Werkzeug Mathematik bestimmte objektive und wiederholbare Tatsachen herausarbeiten können. Wenn wir die Sprache benutzen, dann werden wir die Beziehung zwischen der Situation und einem Teil unseres Erlebens ausdrücken können und über die Worte hinaus wird es uns mit Hilfe der Kunst möglich sein, das auszudrücken, was in unserer Beziehung zu der Situation nicht in Worte gefaßt werden kann. Wir müssen also nach einer gewissen Komplementarität unserer beiden Unterrichtsfächer streben.

Zunächst ist es notwendig, die Gemeinsamkeiten der beiden Disziplinen zu erkennen und demgemäß einen einheitlichen Unterricht zu konzipieren. Zweitens müssen die manchmal widersprüchlichen Aspekte der beiden Disziplinen erkannt werden, und drittens muß man sie, da die eine das Gegengift der anderen ist, harmonisch entwickeln, so wie man zwei gegenläufige Muskeln entwickelt, um das Skelett gerade zu halten.

In einem ersten Ansatz wollen wir drei Aspekte untersuchen, die uns fundamental erscheinen:

1 - *Die Arten des Denkens*

Die mathematische Ausbildung strebt an, die Beherrschung bestimmter Werkzeuge des Denkens zu vermitteln, wie: wiedererkennen, klassifizieren, assoziieren, benennen, ordnen, Beziehungen herstellen usw. ...

Die natürliche Sprache ist Träger derselben Arten des Denkens, jedoch inmitten anderer, die umfassender, differenzierter, aber auch verschwommener sind, und die implizit bleiben. Aus dieser natürlichen Sprache lassen sich die vorgenannten Werkzeuge nur mühsam herauslösen, und man muß oft solange damit warten, bis das Kind die Sprache in einem hohen Maße beherrscht.

Es scheint uns, daß der Mathematikunterricht die Beherrschung dieser elementaren Werkzeuge rasch und ohne großen Aufwand vermitteln könnte. Diese könnten beim Französischunterricht wiederum eingesetzt und den differenzierteren Werkzeugen gegenübergestellt werden, denen man beim Gebrauch der Sprache begegnet.

2 - Sprache

Die mathematische Sprache ist ein wichtiges Werkzeug, dessen Handhabung sehr früh gelehrt wird. Der Mathematiklehrer ist in bestimmter Hinsicht ein Sprachlehrer. Leider benutzt er die Umgangssprache auf verschiedenen Niveaus, ohne sie übrigens immer zu unterscheiden.

Er verwendet sie erstens als Metasprache der Mathematik, zweitens als pädagogische Sprache - "Kommunikationsmittel zwischen ihm und den Schülern" -, und drittens, um die mathematische Ausdrucksweise, die nur eine Schriftsprache ist, ins mündliche zu übersetzen. Wir befinden uns in ziemlicher Konfusion, und es ist wahrscheinlich, daß dies eine wichtige Ursache für das Scheitern von Schülern ist.

Es wäre vielleicht nützlich zu unterscheiden, was sich von der Benutzung der gewöhnlichen Sprache auf die Sprache der Mathematik anwenden läßt, dies könnte zu einer besseren Kenntnis der einen wie der anderen führen.

3 - Die Grammatik

Die Grammatik will Rechenschaft geben über die Funktionsweise der Sprache, sie ist in gewisser Weise eine Mathematisierung der Sprache. Wenn sich ein Schüler mit ihr beschäftigt, sollte es ihm möglich sein, Regeln der

Funktionsweise herauszuarbeiten, die bisher implizit blieben.

Bei dieser Untersuchung kann man versuchen, diejenigen mathematischen Werkzeuge und Methoden einzusetzen, deren Handhabung den Schülern vertraut ist. Wir erhoffen uns selbstverständlich nicht die Konstruktion eines Funktionsmodells der Sprache. Aber es scheint uns möglich, lokal anwendbare Modelle zu konstruieren, indem wir bestimmten Phänomenen Rechnung tragen. Die Untersuchung der Grenzen dieser Modelle, das Erkennen der Tatsache, daß sie nicht alle Fakten der Sprache beleuchten können, scheint uns pädagogisch gesehen ein gutes Mittel zu sein, um in die Komplexität der Sprache eindringen zu können.

II. *Methodologie*

Die Verfolgung der oben aufgeführten Ziele setzt eine bestimmte Art von pädagogischen Beziehungen und die Förderung der Kommunikation innerhalb der Gruppen und der Klasse voraus. Außerdem sollten die Mathematik- und der Französischlehrer der Klasse manchmal gegenseitig an ihren Unterrichtsstunden teilnehmen, oder sogar gemeinsam unterrichten, je nach der Situation. Die Harmonisierung im pädagogischen Vorgehen scheint realisierbar zu sein.

In der Forschungsgruppe bereiten wir gemeinsam "Unterrichtsstunden" vor. Zunächst ist ein Ziel zu bestimmen, danach muß man sich in bezug auf die Theorie des Problems auf den neuesten Stand bringen; in einem zweiten Abschnitt geht es darum, das gewählte Ziel im Hinblick auf die Verhaltensweise der Kinder zu beschreiben, eine bestimmte Anzahl von Übungen, Eigen-Aktivitäten vorzusehen, ... und gleichzeitig damit einen bestimmten Aufbau des Unterrichts, von dem wir hoffen, daß er das angestrebte Verhalten mit hoher Wahrscheinlichkeit hervorruft. Selbstverständlich nimmt diese Unterrichtsbeschreibung a priori nicht das vorweg, was tatsächlich geschehen wird, und ihr Ziel ist es auch nicht, den Lehrer in Ketten zu legen, die ihn die Reaktionen der Schüler vernachlässigen lassen. Im Gegenteil, dieser abgesteckte Rahmen sollte ihm die Beobachtung dessen, was sich tatsächlich im Unterricht abspielt, erleichtern und es ihm erlauben, besser darauf zu reagieren. Wir halten es für unbedingt erforderlich, daß man den Schülern im Rahmen jeder vorgesehenen Unterrichtsstunde die größtmögliche Freiheit hinsichtlich der Reflektion, der Organisation und der Phantasie läßt.

Bemerkungen

1 - Im folgenden ist jede Unterrichtsstunde so konzipiert, daß sie eine abgeschlossene Einheit bildet; sie muß nicht notwendigerweise eine Stunde dauern.

2 - Bestimmte Studien sind erst grob skizziert und werden noch vertieft. Es handelt sich hier darum, den Stand der Arbeit darzustellen, den wir gegenwärtig erreicht haben.

III. *Überblick über die Tätigkeiten der Gruppe*

Das Jahr 71/72 war der Fortbildung gewidmet, und zwar wurden die Französischlehrer in Mathematik und die Mathematik- und Französischlehrer in Linguistik fachlich weitergebildet. Es ging auch darum, die Ziele unserer Forschungen zu präzisieren und eine Arbeitsmethode zu bestimmen.

Für das Jahr 72/73 waren Unterrichtseinheiten, in denen das Vorhandensein verschiedenartiger Kommunikationssysteme gezeigt werden sollte, vorgesehen, und diese wurden auch in einer 6. Klasse erprobt, ebenso Übungen zur Grammatik. Die während des Unterrichts gemachten Beobachtungen sind dann von der Gruppe analysiert worden.

Im Jahr 73/74 erprobte man in 6 Klassen auf der Grundlage der unten wiedergegebenen Struktur eine neue Unterrichtsreihe über die Begriffe von Nachricht und Kode. Die Lehrveranstaltungen über die Grammatik wurden in eine neue Form gebracht und man hat die Untersuchung der Determinanten und der Junktoren "und", "oder" in Angriff genommen. Letztere bilden die Grundlage für Lehrveranstaltungen, die vorgeschlagen worden sind und im nächsten Jahr in einer 5. Klasse erprobt werden sollen.

Bemerkung

Die mit diesem pädagogischen Forschungsprojekt befaßten Lehrer sind sich alle darüber klar, daß es notwendig ist, zu versuchen, den den Schülern erteilten Unterricht zu vereinheitlichen.

Die Tatsache, daß sie jedoch unterschiedliche Ausbildungen durchlaufen haben, ist zweifellos der Hauptgrund für die Schwierigkeiten, mit denen sie zu kämpfen haben.

Die gemeinsame Arbeit von Lehrern geisteswissenschaftlicher Fächer und von Mathematiklehrern erfordert von jedem einzelnen, daß er sich in einem gewissen Maße darum bemüht, die Methode des Denkens zu verstehen und die gestellten Probleme klar zu erfassen.

Die dabei aufgetretenen Schwierigkeiten sind nicht unerheblich; sie erfordern ein hohes Maß an Reflektion, Verständnis, viele Diskussionen und anschließend die Erarbeitung von Lösungsvorschlägen innerhalb der Gruppe.

Insgesamt gesehen erscheint uns diese gemeinsame Arbeit sehr gewinnbringend und sehr interessant für alle, und vor allem für die Schüler.

NACHRICHT, KODE UND SPRACHE

Ziel der Unterrichtseinheiten:

- Bewußtmachen, daß jedes Zeichensystem auf Konvention beruht, wie der Kohärenz jedes Zeichensystems.

- Das Vorhandensein verschiedenartiger Kommunikationssysteme aufzeigen.

- Herausarbeiten, daß jede Sprache eine Konvention ist und von daher die verschiedenen Niveaus der Sprache zu betrachten.

In der Mathematik führt die Untersuchung einer Situation meistens zu einem Kodierungsproblem, und mit Hilfe dieser Kodierung führt man dann die begonnene Studie weiter.

Jede Sprache ist ein Kommunikationssystem:

Mit sich selbst:	dann ist es ein Hilfsmittel zur Analyse, ein heuristisches Werkzeug, um z.B. die Kodierungen zu erkennen, die Werkzeuge zur Forschung werden.
Mit den anderen Menschen:	Ein Hilfsmittel für den Vergleich seiner eigenen Analysen, seiner eigenen Vorstellungen mit denjenigen der anderen.

- Einführung in das Studium einer zweiten natürlichen Sprache.

EIN ZUGANG ZUR GRAMMATIK

Ziel der Unterrichtseinheiten

- Das Vorhandensein einer bestimmten "Struktur" in der Linguistik bewußt machen
    - den Vorteil einer Formalisierung aufzeigen
    - die Schüler gegenüber der Distributionsmethode und den Methoden der generativen und Transformationsgrammatiken aufgeschlossen machen
- den Aufbau eines "Modells" untersuchen

- die Unzulänglichkeit des Modells hinsichtlich der Erfassung der linguistischen Tatbestände, die es darstellen soll, aufzeigen.

ZUM VERHÄLTNIS VON WISSENSCHAFT UND UNTERRICHT

von Michael Otte

Inhalt

ZUM VERHÄLTNIS VON WISSENSCHAFT UND UNTERRICHT

von Michael Otte

I. *Einleitung*

Jede durchgreifende Reform der Inhalte und Methoden des Unterrichts impliziert zwangsläufig eine Konzeption des Verhältnisses von Wissenschaft und pädagogischer Praxis, die unterschiedlich elaboriert und differenziert ausformuliert sein kann, die aber in jedem Falle die Richtung und Realisierungsformen der angestrebten Innovationen entscheidend bestimmt. Es ist daher ein durchaus praktisches Interesse, das zur Behandlung dieses so scheinbar abstrakten und praxisfernen Problems zwingt. Diesem praktischen Interesse kann auch nicht mit dem Einwand begegnet werden, daß jede angemessene Konzeption des im Titel angesprochenen Verhältnisses eine Fülle sehr komplexer Beziehungen ins Spiel bringen muß und zu ihrer Behandlung auch der Erörterung von Fragen allgemein erkenntnistheoretischer Natur bedarf.

Als eine der zentralen Fragen erscheint die folgende: Wie kann der Lehrer als Nichtwissenschaftler (im Sinne eines forschenden Spezialisten) ein wissenschaftliches Verhältnis zur gesamten - ungeteilten Wirklichkeit seiner Berufsproblematik gewinnen und somit zum maßgeblichen Akteur der Entwicklung und Gestaltung eines wissenschaftlichen Unterrichts werden, eines Unterrichts der bestimmt ist von einer wissenschaftlichen Weltanschauung.

Natürlich wird man sagen, dies ist in erster Linie eine Frage der Organisation, ein Problem der Organisierung adäquater Kooperationsbeziehungen. Kooperation hat jedoch eine Fülle von Nebenaspekten und konzeptionellen Voraussetzungen, deren sich die Didaktik annehmen muß. Nun hat im Bereich der Wissenschaft allenthalben eine große Veränderung des Verhältnisses von Erkenntnissubjekt und -objekt stattgefunden. Indem man sieht, daß der Erkenntnisakt selbst notwendigerweise Veränderungen am Objekt hervorruft (Heisenberg'sche Unschärferelationen, Hawthorne-Effekt), ergibt sich die Undurchführbarkeit einer schematischen Trennung von Subjekt und Objekt. Man sieht, daß man beide vielmehr als Aspekte eines Gesamtsystems auffassen muß, welches durch die gegenständliche Tätigkeit konstituiert wird. Die Tätigkeit ist das Wesen der Subjekt-Objekt-Beziehung. Denken wird aufgefaßt als ideelles Experiment. Begriffe und Theorien bedeuten gezogene Folgerungen, gegangene Wege, bedachte Alternativen. Begriffe, Theorien und selbst Technologien kann man nicht erfinden, sie ergeben sich beim Bewältigen von Aufgaben. Niels Bohr hat in einer lebenslangen Arbeit, ausgehend von seinem Begriff der "Komplementarität" versucht, die Konsequenzen daraus für das Wissen, für seine Struktur, wenigstens phänomenologisch zu beschreiben. Mag man nun seine erkenntnistheoretischen Erörterungen im einzelnen bewerten wie man will, entscheidend ist, daß die damit angesprochene Entwicklung der Subjekt-Objekt-Beziehung auch für den Lernprozeß und damit für die Didaktik von großer Relevanz ist und daß, will man sich mit dem in der Überschrift angesprochenen Verhältnis auseinandersetzen, eine diesen Entwicklungen der Subjekt-Objekt-Beziehung in der wissenschaftlichen Arbeit entsprechende Charakterisierung des theoretischen Wissers nötig ist.

Wir werden im folgenden zunächst ein Resümee der curriculumtheoretischen Diskussion zu dem angesprochenen Problemkreis zu ziehen versuchen und einige Überlegungen formulieren, wie den konzeptionellen Mängeln dieser Diskussion beizukommen sein könnte. Dies wird uns schließlich auch der oben formulierten Anforderung näherbringen.

II. *Die Diskussion um die "Struktur der Disziplin".*

Fragen des Verhältnisses von Wissenschaft und Unterricht wurden vor allem akzentuiert von jener einflußreichen Gruppe von Curriculumreformern, die sich von einem neuen, dem gegenwärtigen Entwicklungsstand der relevanten Fachdisziplinen angemessenen Verständnis ihrer Grundlagen und ihres Aufbaus die entscheidenden Impulse für eine Neugestaltung der Lehrpläne erhofften. Ihr Leitthema war die "Struktur der Disziplin". Impliziert war damit zugleich eine bestimmte Vorstellung von der Zuordnung von Wissens- und Lernstruktur. Bestimmender Bezugspunkt der ganzen Diskussion war und ist Jerome Bruner's Buch "Der Prozeß der Erziehung", das die Protokollierung einer im September 1959 in Woods Hole abgehaltenen Konferenz zu Fragen der Curriculumplanung darstellt, an der 35 Wissenschaftler der verschiedenen Disziplinen (Physiker, Biologen, Mathematiker, Historiker, Pädagogen und Psychologen) teilgenommen haben. In diesem Buch wird die Existenz von "basalen Ideen" postuliert, "die Kern aller Naturwissenschaft und Mathematik bilden". "Das entscheidende Unterrichtsprinzip in jedem Fach oder jeder Fächergruppe ist die Vermittlung der Struktur, der 'fundamental ideas', der jeweils zugrundeliegenden Wissenschaften ...". Das Lernen schließlich beruht "auf dem intuitiven Erfassen und Gebrauchen dieser grundlegenden Ideen". Lernen bedeutet also die Struktur lernen und dies heißt wiederum zu lernen, "wie die Dinge aufeinander bezogen sind". (Vgl. 7, S. 14; 22,26) "Dem Denkansatz einer wissenschaftlichen Disziplin", meint Bruner, "liegt einer Reihe von Sätzen zugrunde, die wechselseitig zusammenhängen, die in wechselnder Weise implizit ineinander enthalten sind und als generativ gekennzeichnet werden können. In der Physik und der Mathematik sind die meisten zugrundeliegenden generativen Sätze, wie das Erhaltungstheorem, die Axiome der Geometrie oder die assoziativen, distributiven und kommutativen Regeln der Analysis mittlerweile klar herausgearbeitet worden (vgl. 7, S. 89)".

Implizit oder explizit sind alle didaktischen Konzeptionen, die sich auf die "Struktur der Disziplin" orientieren, mit der Frage konfrontiert, wie das Verhältnis von objektiven und subjektiven Momenten in der Begründung und Aneignung dieser basalen Ideen zu gewichten ist. Wie wenig dabei mit einer säuberlichen Trennung dieser Momente zu gewinnen ist, zeigt sich sehr deutlich an dem Dilemma, in das sich Ausubel mit seiner Unterscheidung von "logischer Bedeutung" und "psychologischer Bedeutung" verstrickt. Der sich dabei aufdrängende Widerspruch, daß einerseits Bedeutungen ihre Existenz im Bewußtsein einzelner oder vieler Individuen haben, ihnen aber andererseits eine Bestimmtheit und Objektivität über die individuelle Vielfalt und Zufälligkeit hinaus eigen ist, wird bei ihm schließlich dadurch gelöst, daß eine der beiden Seiten, - die logische Bedeutung -, in der anderen aufgeht, wobei er aber gleichfalls eine feste Struktur fixieren will, die allerdings bei ihm psychologistisch begründet wird. "On strictly logical grounds it might be argued that the various disciplines should be introduced in the order of their relative phenomenological complexity - that the phenomenologically more fundamental and simple laws of physics and chemistry should be mastered before the phenomenologically more complex and variable data of biology are studied. Psychologically, however, the logically simple laws of physics and chemistry are more abstract and difficult than the logically complex laws of biology, which are both more descriptive in nature and closer to everyday, concrete experience" (vgl. 16, S. 230).

Ein festes Gebäude braucht Fundamente, eine feste Struktur benötigt letzte Grundlagen. Im allgemeinen überwiegen dabei in der hier referierten Diskussion zum Problem der Struktur des Wissens die Ansätze, die subjektive und objektive Seite des Wissens trennen, und eine davon zur letzten Erklärungsinstanz machen. Man postuliert letzte feste Grundlagen von entweder a-priorischer oder von empiristischer Art. Unseres Erachtens darf dagegen dieses Problem der Grundlagen des Wissens nicht eklektisch behandelt werden. Die Aufgabe solcher einseitigen Begründungsversuche führt nun zu einer relativ hohen Komplexität der Beziehungen, die mit "Struktur des Wissens" bezeichnet werden. Daher ist es nicht unnütz, unsere Frage nach den Grundlagen der Wissenschaft auf der Basis einer systemtheoretischen Analyse etwas weiter zu verfolgen. Diese systemtheoretische Analyse (vgl. 15, Kap. 3, S. 45-61) zeigt nun, daß Logik und Beobachtung nur dann zur Grundlegung der Wissenschaften beitragen können, wenn sie im Rahmen des Gesamtsystems menschlicher Tätigkeit, sowohl seiner sozialen als auch seiner gegenständlichen Bezüge, betrachtet werden. Logik "ist bestenfalls ein Fundament, das auf dem Konzept des ganzen Systems ruht" (a.a.O. S. 51). Und der Empiriker gerät meistens "in trübe Gewässer, wenn er die Herausforderung an seine Fundamente ernsthaft in Betracht zieht. Er versucht nun zu behaupten, daß es gewisse "einfache" Sinneseindrücke gibt, die sich dem Geist so mächtig einprägen, daß es über die Wahrhaftigkeit des Sinneseindrucks keinen Zweifel geben könne. .. Dies ist eine sehr merkwürdige und alarmierende Antwort auf den rationalen Zweifel. Sie bedeutet, daß die empirischen Fundamente überhaupt keine Fundamente sind" (a.a.O. S. 54). Churchman kommt zu dem Ergebnis, "daß weder Logik noch Beobachtung als die 'letzten' Fundamente der Wissenschaft angesehen werden können. ... Die Bedeutung von Logik und Beobachtung hängen von schw igen und oft ungelösten Problemen des Managements der Wissenschaft ab. ... Wie immer wir das Problem der Fundamente der Wissenschaft anpacken, auf dem Wege der Logik oder der Beobachtung oder eines anderen Garanten, wir enden unvermeidlicherweise bei der gleichen Schlußfolgerung, daß die Fundamente der Wissenschaft als einer Art von Management aufgefaßt werden können ... Denn Management ist schließlich die Aktivität des Auswählens unter Alternativen in der Verfolgung von Zielen und besonders von Zielen umf greicher Organisationen, von denen die Wissenschaft zweifellos eine ist". (S. 56 und 59)

Nun bliebe an dieser Konzeption, so wie sie hier dargelegt worden ist, einiges zu kritisieren. Gegenüber dem Protest gegen die Verwendung des Wortes "Management" meint Churchman zwar richtigerweise, "daß dieser Ausdruck mit Recht in der Wissenschaft angewendet wird. Der Wissenschaftler ist Mitglied eines großen, komplexen Systems und er besitzt die Verantwortung und die Autorität, in diesem System wichtige Entscheidungen zu treffen". (a.a.O.) Es gelingt Churchman aber nicht, den

Begriff der Entscheidung zu objektivieren. Nichtsdestoweniger ist diese systemtheoretische Betrachtung nützlich, weil aus ihr zwei wichtige Einsichten zur Grundlagenproblematik folgen:

1. Können die begrifflichen Strukturen einer Disziplin nur im Zusammenhang mit den Aktivitäten, die für das System Wissenschaft bestimmend sind, verstanden und produktiv eingesetzt werden.
2. Gibt es Objektivität, Begründung einer "Struktur der Disziplin", nicht durch die isolierten Momente, sondern durch den Gesamtzusammenhang des Wissenschaftsprozesses.

A. Wilson verdeutlicht diese zweite Einsicht und die Dringlichkeit von systemtheoretischen Konzepten, die sie sich zu eigen machen, wenn er schreibt: Während das inverse Problem der analytischen Auflösung eines Systems in Teilsysteme gründlich und ausgedehnt durch solche top-down Verfahren, wie Deduktion behandelt wird und weiter Ein-Niveau-Systeme vermöge Induktion oder mithilfe statistischer Prozeduren behandelbar sind, existiert auf der anderen Seite keine entsprechende Technik für die vertikale bottom-up Organisation. Diese Lücke stellt eine Aufgabe für neue Epistemologien dar". Die alltäglichen Probleme im Unterricht verlangen gerade eine solche Erkenntnistheorie des Aufbaus von vielstufigen Gesamtzusammenhängen des Wissens[5].

Das Problem, die Objektivität der Entscheidungen, ihre gegenständliche und soziale Determination zu begründen, welches Churchmans Analyse nicht löste, bleibt auch bei einer anderen Gruppe von Kritikern der Strukturkonzeption ungelöst. Sie bestehen ebenfalls darauf, daß die Wissensstrukturen nicht als fixe permanente Ecksteine existieren, daß die die Struktur der Disziplin konstituierenden Hierarchien nicht unabhängig von der kognitiven bzw. praktisch gegenständlichen Tätigkeit existieren. Sie verabsolutieren im allgemeinen jedoch die Aktionen des Subjekts, und schieben damit das von Churchman zwar ungenügend, aber doch sehr eingehend behandelnde Problem der Objektivität des Wissens beiseite.

"To these (following mainly here the work ob Schwab), substantive structures are heuristic devices, constructs which determine the questions that are to be asked in the first place, the data that are to be sought, and the interpretation that is to be given this data. Every discipline may have its own kind of conceptual structures, but this diversity is unified in terms of the way they function in all the disciplines as heuristic devices". (vgl. 6, S. 19).

Bei aller Unzulänglichkeit der Lösungsvorschläge, hat die Diskussion zumindestens drei Ergebnisse gebracht:

1. Der enge Zusammenhang zwischen Interdisziplinarität und Strukturalismus hat sich gezeigt. "An epistemology which wants to be scientific that is to say, capable of being communicated independently of the traditional schools of thought, can only be the product of an interdisciplinary colloboration" (vgl. (8) S. 309, vgl. auch (10) S. 129).
2. Die Diskussion, insbesondere in ihrer "heuristischen Wendung" zeigt die eminente Bedeutung wissenschaftshistorischer Betrachtungen.
3. Die Diskussion hat den inneren Zusammenhang aller Ebenen der geistigen Tätigkeit vom Schulkind bis zum Wissenschaftler betont. Nach Bruners Überzeugung (und nicht nur seiner) ist die geistige Tätigkeit überall dieselbe, an den Fronten des Wissens ebenso wie in einer 3. Klasse. Was ein Naturwissenschaftler an seinem Arbeitstisch oder in seinem Laboratorium, was ein Literaturkritiker beim Lesen eines Gedichtes tut, ist nicht grundsätzlich verschieden von dem was irgendein anderer tut, der sich mit der gleichen Tätigkeit beschäftigt - wenn er dabei zu einem Verständnis gelangen will. Der Unterschied liegt im Niveau, nicht in der Art der Tätigkeit" (vgl. 7, S. 27).

In Analogie zu dem in diesen drei Punkten zusammengefaßten Diskussionsergebnis sieht, allerdings mit der seinem Standpunkt entsprechenden heuristisch-subjektivistischen Akzentuierung, J. Schwab das Problem: "Zusammenfassend gesagt bilden drei verschiedene Problembereiche das allgemeine Problem der

Organisation der Wissenschaften: Wieviele gibt es, welche sind es und in welcher Beziehung stehen sie zueinander? Zweitens gibt es das Problem der von jeder Wissenschaft verwendeten grundlegenden begrifflichen Strukturen". Damit sind grundlegende heuristische Strategien gemeint, die insbesondere einen "revisionären Charakter" des Wissens begründen, der von großer "curricularer Relevanz" ist. "Drittens gibt es das Problem der Syntax der Wissenschaft: Welche Regeln in der Beweisführung und Prüfung gibt es und wie gut kann man sie anwenden?" (15, S. 37). Die Syntax kann nur durch Rückbezug auf den Forschungskontext bestimmt werden. "Die Notwendigkeit eines Forschungskontextes, auch für die Erhellung des Lehr- und Lernprozesses, wurde ... bei der stofflichen Vorbereitung der Lehrer fast allgemein übersehen". (a.a.O. S. 48). Die Entwicklung dieser Ergebnisse steht und fällt m.E. mit einer Theorie des wissenschaftlichen Begriffs. Hier liegen die entscheidenden Mängel der Diskussion.

III. Wissenschaftlicher Unterricht und die Natur des wissenschaftlichen Begriffs

Die Geschichte der Wissenschaft kann als eine Überwindung des Empirismus aufgefaßt werden, eine Überwindung der Vorstellungen vom Begriff als einem Ding, das unmittelbar gegeben sei. Der Inhalt des theoretischen Begriffs ist nicht in Dingen zu sehen, sondern in den Beziehungen zwischen solchen, nicht im einzelnen Verhalten, sondern in den Verhältnissen. Auch im Unterricht muß man lernen, daß der Begriff weder ein a-priori gegebenes Ding ist, noch ein Name für einen empirischen Gegenstand, und man muß Vorstellungen überwinden, die den Begriffsinhalt mit den Zeichen identifizieren, welche den Begriff vorstellen bzw. mit den Operationen, die ihn anwenden (z.B. Messvorschriften). Bruner sieht deutlich, daß dies das Hauptproblem eines wissenschaftlichen Unterrichts ist. Er sagt, daß der Realitätsbezug der Wissenschaft indirekt sei, "daß wir über Dinge wie Druck oder chemische Bindung sprechen, obwohl wir diesen Dingen niemals direkt begegnen". Er schreibt weiter: "Einem Schüler, der daran gewöhnt ist, Dinge für entweder existent oder nicht-existent zu halten, ist es schwer, die Wahrheit zu sagen, wenn er fragt, ob Druck 'wirklich' existiert". Ich möchte diese These vom Antiempirismus als einer bestimmenden Tendenz der Wissenschaftsentwicklung an einigen Beispielen aus einer Fachdisziplin, der Mathematik, erläutern, bevor ich auf die didaktischen Konsequenzen einer solchen These eingehen werde.

Zur Geschichte des Raumbegriffes schreibt Albert Einstein: "Es scheint, die Entwicklung des Raumbegriffs an folgendes Schema gebunden zu sein: körperliches Objekt; Lagebeziehungen körperlicher Objekte; Zwischenraum; Raum. Der Raum erscheint bei dieser Betrachtungsweise als etwas in demselben Sinne reales wie die körperlichen Objekte.

Es ist klar, daß in der außerwissenschaftlichen Begriffswelt, der Begriff des Raumes als eines realen Dinges wohl vorhanden war. Die Mathematik Euklids aber kannte diesen Begriff als solchen nicht, sondern behalf sich ausschließlich mit den Begriffen Objekt, Lagebeziehungen zwischen Objekten. Punkt, Ebene, Gerade, Strecke sind die idealisierten körperlichen Objekte. ... Der Raum als Kontinuum kommt im Begriffssystem überhaupt nicht vor. Dieser Begriff wurde erst durch Descartes eingeführt, indem er den Raumpunkt durch seine Koordinaten beschrieb. ... Die große Überlegenheit der Descart'schen Behandlung des Raumes liegt keineswegs nur darin, daß sie die Analysis in den Dienst der Geometrie stellt. Der Hauptpunkt scheint vielmehr folgender zu sein. Die Geometrie der Griechen bevorzugt besondere Gebilde (Gerade, Ebene) in der geometrischen Beschreibung; andere Gebilde (z.B. Ellipse) sind ihr nur dadurch zugänglich, daß sie jene Gebilde mithilfe der Gebilde Punkt, Gerade und Ebene konstruiert bzw. definiert. In der Descart'schen Behandlung dagegen sind z.B. alle Flächen im Prinzip gleichwertig vertreten ...". Insofern die Geometrie als die Lehre von den Gesetzmäßigkeiten der gegenseitigen Lagerung praktisch starrer Körper aufgefaßt wird, vermochte sie" ... ohne den Raumbegriff als solchen auszukommen, indem sie mit den idealen Körpergebilden Punkt, Gerade, Ebene, Strecke aus-kommen konnte. Hingegen hatte die Newton'sche Physik das Raumganze im Sinne Descartes unbedingt nötig" (22, S. 141).

Sehr schön arbeitet Einstein die Loslösung von der anschaulich gegebenen Objektwelt als das Geheimnis der Entwicklung eines wissenschaftlichen Raumbegriffs heraus. An der Leistung Descartes hebt er besonders die Schaffung eines neuen Begriffs als Voraussetzung der Indienstnahme der technischen Errungenschaften der Analysis durch die Geometrie. Eine Ebene im Raum kann nunmehr durch eine lineare Gleichung, d.h. durch eine Formel charakterisiert werden. Dies setzt aber eine Vorstellung vom Raum als solchen, einen Raumbegriff voraus. Formeln setzen den Begriff als Modell voraus. Wobei sich dieses begriffliche Modell, weil es Beziehungen abbildet, nicht in Isomorphie zu Dingen der empirischen Realität befindet. Zugleich muß gesehen werden, daß das technische Instrumentarium der Mathematik konstitutives Moment für die Begriffsbildung selbst ist. Bourbaki notiert zu dem gleichen Problem, den Schranken der griechischen Geometrie, daß den Griechen ein handlicher algebraischer Kalkül gefehlt habe und somit die "Konstruktionen mit Zirkel und Lineal" eine besondere Bedeutung erhalten. Es fehlt bei den Griechen jede "Spur eines Versuches, die Probleme, die sie nicht mit Zirkel und Lineal lösen konnten, zu klassifizieren". (vgl. (19), S. [illegible]).
Wir betrachten die Einschätzungen Einsteins und Bourbakis zum gleichen Problem, obwohl sie auf den ersten Blick widersprüchlich zu sein scheinen, indem die eine d[illegible] [illegible]eutung des begrifflichen, die andere die des technischen Aspekts des Fortschritts in der Wissenschaft akzentuiert, als komplementär. Wir glauben, daß die Komplementarität einen Schlüssel zur positiven Beantwortung der Frage nach der Natur des wissenschaftlichen Begriffs abgibt und zugleich damit einen Zugang zur radikalen Kritik seiner empiristischen Mißdeutung eröffnet. Wir wollen diese These an einem weiteren, für den Laien vielleicht etwas schwierigen Beispiel aus der Geschichte der Mathematik erläutern. Jahrhundertelang beschäftigte die Mathematiker die Frage nach der Lösbarkeit algebraischer Gleichungen, bzw. nach der expliziten Darstellung der einzelnen Null-

stellen. Erst im 19. Jahrhundert wurde das Problem gelöst. Wesentlich dabei war, daß Lagrange und schließlich Galois nicht unmittelbar nach den einzelnen Lösungen und deren Darstellung fragten, sondern die Existenz der Lösungen unterstellend und die ihnen damit gegebenen Bewegungsmöglichkeiten ausnutzend, begannen, die Struktur der Beziehungen zwischen den Lösungen aufzudecken.

Bourbaki schreibt dazu: "Mit den grundlegenden Abhandlungen von Lagrange und von Vandermonde beginnt im Jahre 1770 eine neue und entscheidende Periode in der Geschichte der Theorie der algebraischen Gleichungen. Bis hierher hatte unangefochten der Empirismus, der mehr oder weniger glücklichen Versuche geherrscht, Lösungsformeln zu finden; jetzt erfolgt eine systematische Analyse der gestellten Aufgaben und der zu ihrer Lösung geeigneten Methoden" (vgl. 20, S. 94).

Die in diesem Zusammenhang benutzte algebraische Methode der Auflösung der Gleichung durch Radikale, bedingt nun einen prinzipiellen Unterschied zwischen den Gleichungen 1. bis 4. Grades und den Gleichungen 5. und höheren Grades insofern, als die Lösungen der einen sich mithilfe von Wurzelausdrücken, aus den Koeffizienten der Gleichung berechnen lassen und die Gleichungen höheren Grades im allgemeinen algebraisch nicht lösbar sind. Dieser Unterschied, und damit die Lösung eines sehr alten Problems, wurde jedoch, wie gesagt, erst im 19. Jahrhundert von E. Galois (1811-1832) auf der Grundlage neuer konzeptioneller Vorstellungen herausgearbeitet. (Die Resultate von Galois begründeten ein für die Mathematik und Naturwissenschaft zentrales Gebiet, die 'Gruppentheorie').

Andererseits gestattet es nun ein schon im Jahre 1829 von dem französischen Mathematiker Sturm bewiesener Satz, auf ziemlich einfache Weise, die Nullstellen eines beliebigen Polynoms mit beliebiger Genauigkeit zu berechnen. Auch im Fall der quadratischen Gleichung haben wir eigentlich nichts besseres, denn wenn wir die Nullstellen eines quadratischen Polynoms durch Wurzelausdrücke hinschreiben, so bringen wir damit in Wirklichkeit nur zum Ausdruck, daß wir diese Nullstellen aufgrund der Kenntnis der Verfahren, mit Wurzeln umzugehen, beliebig genau berechnen können. Wiederum haben wir den Widerspruch zwischen begrifflichen und algorithmischen Aspekten, diesmal in der Theorie der algebraischen Gleichungen: Unter dem algorithmischen Gesichtspunkt erscheint etwas als vollkommen einheitlich, was unter begrifflichem Gesichtspunkt grundsätzlich verschieden ist. Die sich daraus ergebende mögliche Favorisierung eines einseitigen algorithmischen Standpunktes wird heute in für die Didaktik höchst relevanter Weise durch folgende Tatsache unterstützt: In den Zeitungen und Warenhauskatalogen in der Bundesrepublik kann man im Augenblick eine Flut von Angeboten billiger Taschenrechner aus den USA finden, die tatsächlich demnächst so billig sein sollen (sie kosten $ 10,-), daß praktisch jeder Schüler mit einem derartigen Rechner ausgerüstet werden könnte. Die ungeheure Verbreitungsmöglichkeit bzw. Verbreitung derartiger Rechner hat natürlich gewaltige Rückwirkung; insbesondere werden alle Sorten von Approximationsverfahren in der Mathematik und damit auch im Unterricht stark an Bedeutung gewinnen. Wie verhält sich aber gegenüber dieser scheinbar eindeutigen Tendenz zur Favorisierung des algorithmischen Standpunktes im Zuge der Entwicklung der modernen Mathematik die folgende Aussage Freudenthals, die auf dem internationalen Kongreß über aktuelle Probleme des Mathematikunterrichts in Exeter gemacht wurde, (vgl. (14) S. 110): "Die Bevorzugung begrifflicher gegenüber algorithmischen Zugängen ist eines der auffallendsten Merkmale dessen, was wirklich modern an der modernen Mathematik ist." Verständlich wird dieser Widerspruch unseres Erachtens nur, wenn die algorithmischen und begrifflichen Aspekte unseres Wissens in ihrem inneren, allerdings widersprüchlichen Zusammenhang begriffen werden. Es gibt dazu eine Analogie aus den Sozialwissenschaften, die durch die kommunikative und generalisierende Funktion des Begriffs nahegelegt wird. Wie im Bereich der materiellen Produktion, die Entwicklung des technischen Repertoires mit einer Tendenz zur Universalisierung und Verallgemeinerung der sozialen Beziehungen einhergeht, so treiben sich wechselweise die Erweiterung der rechnerischen bzw. algorithmischen Möglichkeiten und die begriffliche Durchdringung mathematischer Gegenstände vorwärts. Und dieser Widerspruch als Triebkraft ist von Anfang an bei der Begriffs-entwicklung wirksam: Man denke etwa an die Funktion von Stellenwertsystemen für die Entwicklung des Rechnens und des Zahlbegriffs. Wir haben oben nur von einer Analogie der Beziehung zwischen Werkzeug und sozialer Organisation auf der einen, zwischen algorithmischen und begrifflichen Aspekten auf der anderen Seite gesprochen, weil die präzise Erörterung des damit angedeuteten Zusammenhangs den Rahmen dieser Arbeit übersteigen würde.[1)]

Aus der Kritik des empiristischen Mißverständnisses des wissenschaftlichen Begriffs und der angedeuteten positiven Alternative ergibt sich, daß die "Struktur der Disziplin" weder invariant ist noch so geschlossen und evident, wie das viele Vertreter dieser curriculumtheoretischen Position zu glauben scheinen (allerdings ist sie auch nicht 'subjektiv'). Die wirklichen historischen Fortschritte in der Wissenschaft müssen gerade als Weiterentwicklung ihrer "basalen Ideen" aufgefaßt werden. Die Newton'sche Physik ist nicht einfach ein Teilgebiet bzw. ein Spezialfall der Einstein'schen Relativitätstheorie, sondern Einsteins eigentliche Leistung bestand gerade in der Weiterentwicklung der fundamentalen Begriffe von Raum und Zeit, die zu einem grundlegenden Wandel auch im Verständnis der Newton'sche Konzepte führt. Und welchen Widerstand etwas scheinbar so Einfaches und Grundlegendes wie der Begriff der "natürlichen Zahlen" der begrifflichen Analyse seit Dede-

---

1) Es ist klar, daß dieser Parallelismus für eine Reihe weiterer didaktischer Fragen von großer Bedeutung ist, die wir hier nicht weiter verfolgen wollen. Man denke etwa an die Diskussion um die Möglichkeit der Motivierung durch Anwendungen im Mathematikunterricht. Diese Motivierungskonzeption sieht sich früher oder später vor das Problem gestellt, daß die meisten Anwendungssituationen immer nur einzelne Schüler mit bestimmten Berufsperspektiven betreffen, während für die Mehrzahl ganz andere Situationen relevant sind. Die Anforderung, die T. Fletcher an die Mathematikdidaktik formuliert hat: "We have to show, why mathematics matters to people.", kann nur eingelöst werden, wenn die soziale Natur auch der scheinbar ganz wirklichkeits- und anwendungsfremder mathematischen Abstraktionen herausgearbeitet wird. Daher scheint mir die Beziehung der Mathematik zu den nichtmathematischen Bereichen auch für den Unterricht so wesentlich. Erst die sogenannte angewandte Mathematik hat etwa Zeitparameter, Prioritätsfragen, Optimierungsgesichtspunkte, Strategieauswahlprinzipien und ähnliches systematisch, wenn auch, wie man sagt, nicht zureichend entwickelt. Man spricht in diesem Zusammenhang von der Krise der Statistik, von der Krise der mathematischen Ökonomie, von der Krise der mathematischen Physik (vgl. 30, S. 289ff).

kind und Cantor entgegensetzt, ist jedem Mathematiker hinreichend geläufig. Die wissenschaftlichen Grundbegriffe sind in der Tat das zentrale Problem der Wissenschaftsgeschichte und eines wissenschaftlichen Unterrichts, nur ist ihre Aneignung ungleich schwieriger und widerspruchsvoller, als es eine empiristische Begriffstheorie suggeriert.

Bei der historischen Entwicklung des Begriffs, die ich als Überwindung des Empirismus zu kennzeichnen versucht habe, findet gleichzeitig die Erweiterung des Bereichs der Bestimmtheit und damit Begrenztheit des Wissens als auch eine Ausdehnung der gegenständlichen Beziehungsmöglich... der intuitiven Vorstellungen und eine Verallgemeiner... des Wissens statt. Im Rahmen der hier referierten Diskussi... Struktur der Disziplin interessiert man sich nur für die "...fachheit und Allgemeinheit der Wissensstruktur" und dementsprechend auch in erster Linie für die vereinheitlichenden Momente in der Geschichte der Wissenschaft (vgl. (21) S. 68 f). Man müßte sich meines Erachtens auch mit den historischen Perioden, wo die Divergenz zunimmt, auseinandersetzen, mit den Perioden, wo Kalkül und Algorithmus in ein scheinbar unübersehbares Unbekanntes vorstoßen (vgl. (30), insbesondere S. 9-12). Es müßte bei einer differenzierten Betrachtung der Geschichte der Wissenschaft auch um die Perioden gehen, wo die integrierenden Prinzipien und Leitvorstellungen ihre Kraft zu verlieren scheinen. Ohne dieses Korrektiv zu einer strukturellen Betrachtungsweise läßt sich, - da die Begriffe als nominale Definition einzelner Termini die vorhin erwähnte Widersprüchlichkeit ihrer Entwicklung nicht zeigen -, auch die für die referierte Diskussion zentrale Frage, wie sind Begriffe lehr- und lernbar, wo ihr Inhalt doch in Beziehungen besteht und somit nicht einfach vorzeigbar ist, nicht adäquat beantworten.

Der Sinn dieser Ausführungen zur Natur des wissenschaftlichen Begriffs für den Unterricht scheint der folgende zu sein: Gegenstände sind nur in ihrer Veränderung erkennbar und Begriffe als sich entwickelnde lehr- und lernbar. Dieses ist ganz unabhängig davon, ob man einen genetischen oder einen sogenannten deduktiven Unterrichtsstil bevorzugt. Nur in der Erfahrung seiner Entwicklungsmöglichkeit kann der Begriff für den Lernenden seine Funktion als Koordinator und Regulator aller Momente der Subjekt-Objekt-Beziehung in der gei.. igen Tätigkeit entfalten. Daraus gewinne ich Parameter seiner Unterrichtung (Charakter der Erklärungen, der Fehler usw.). Allerdings muß ich beachten, daß die Kategorie der "Entwicklung" eines Begriffs, die alle diese Parameter bestimmt, im oben erläuterten Sinne sehr differenziert ist und sich gleichermaßen auf seine inhaltlichen wie technischen Aspekte, sich auf die kategoriale Ebene genauso wie auf die Ebene der konkreten Gegenständlichkeit bezieht. Wenn man die Begriffe als sich entwickelnde lehren will, muß man sie vorher in ihrer historischen Entwicklung studieren. Und wenn dies Studium der geschichtlichen Entwicklung irgendeinen Wert für die Probleme des Unterrichts haben soll, dann muß es diesen Entwicklungsprozeß nicht nur kinematisch in seinen Abläufen, sondern auch dynamisch, von seinen Triebkräften her und in seinen strukturellen Sprüngen beschreiben. Dies setzt voraus, daß die Widersprüche, die zur Weiterentwicklung der Theorie führen ("ein Phänomen kann nicht eingeordnet werden, kann im Rahmen der alten Theorie nicht erklärt werden"; "es ergeben sich formallogische Widersprüche" usw.), als im Begriff angelegte Möglichkeit und damit als seine eigenen Entwicklungsmomente begriffen werden. Im Begriff wird sozusagen die Regel und das noch Unbestimmte, das Wesentliche zugleich mit anderen Aspekten gedacht. Ich glaube daher, daß die zentrale didaktische Forderung folgendermaßen formuliert werden kann: Der theoretische Charakter des wissenschaftlichen Begriffs muß selbst als Ziel des wissenschaftlichen Unterrichts erscheinen. Und es ist, wie gesagt, unsere These, daß dies nur möglich ist, wenn man den Begriff als Einheit und [illegible]spruch von Reflexion und Aktion faßt, zugleich seine [illegible]itlichenden und seine divergierenden Momente, seinen konst[illegible]iven und seinen unbestimmten Aspekt sieht.

Die in II. angesprochenen Konsequenzen der curriculumtheoretischen Diskussion erscheinen nun in einem inneren Zusammenhang und können weiter bestimmt werden:

1. Es zeigt sich die eminente Bedeutung wissenschaftshistorischer Betrachtungen. Man kann ja das Verhältnis von Wissenschaft und Unterricht auch auffassen als das Verhältnis heutiger Wissenschaft zu ihrer klassischen Form, in der sie in den Unterricht eingegangen ist. Eine ausschließlich psychologisch argumentierende Curriculumtheorie, die die historische Dimension ignoriert, scheitert schlicht an folgendem für die pädagogische Praxis äußerst relevanten, meist aber unreflektierten Tatbestand: "... Was eine gegebene operative Ausstattung (z.B. einer Generation von Heranwachsenden) betrifft, so werden die aufgrund der Geschichte einer Wissenschaft vorhandenen Entwicklungen historisch ausgedrückt augenblicklich auf den Schüler übertragbar". (vgl. (18) Abschn. 5) Was es heißt, einen Gegenstand zu begreifen, d.h. die Bestimmung von Lernzielen ist historisch determiniert und läßt sich nur aufgrund einer intimen Vertrautheit mit der jeweiligen Wissenschaft in ihrer historischen Dimension bestimmen. Fragen der Motivation, der Ausdauer, des realistischen Verhaltens im Lernprozeß sind ebenfalls aus dieser Perspektive zu diskutieren.

2. Aus der angedeuteten Dynamik des wissenschaftlichen Begriffs, der Vorläufigkeit und permanenten Revidierbarkeit der "basalen Ideen" ergibt sich ein enger Zusammenhang zwischen einer strukturellen Betrachtungsweise und einem interdisziplinären Herangehen an die Fragen der Integration der Fachinhalte in den Unterricht. Es hat sich gezeigt, daß sich die Wissenschaften nur insgesamt und entsprechend dem Entwicklungsstand ihrer interdisziplinären Beziehungen zum Problem des Lernens - und man könnte hinzufügen, zur gesellschaftlichen Praxis überhaupt - verhalten können und nicht als voneinander isolierte einzelne Fachdisziplinen. "... Structuralism is neccessarily interdisciplinary; in the domains of logic and mathematics, which are wholly self-sufficient disciplines, the fact remains that, to establish the full epistemology of the structures, and not stop short at their technical aspects, they must be compared with the structures whose psychogenetic construction can be followed. However, the study of this construction sooner

or later calls into play our know[illegible] of physical, biological and social structures, and reciprocally, comprehension of these three sorts of structure requires recourse as much to psychogenetic analysis as to the formal methods of construction. In a word, any structure is always located at the intersection of a multiplicity of disparate disciplines so that no general theory of structures can possibly escape the requirement that it be not simply multidisciplinary but authentically interdisciplinary (vgl. (9) S. 53f).

3. Die dritte Frage, das Problem der Kontinuität (und Diskontinuität) des Lernprozesses, läßt sich ebenfalls nur auf d. Grundlage jener (didaktischen) Umkehrung des Verhältn[illegible] von Psychologischem und (inhaltlicher) Logik [illegible] die in dem folgenden Zitat von A. Morf zum Ausdr[illegible]mmt: "Die Wirklichkeit, auf die der Lehrer einwirkt, ist nicht in erster Linie ein psychologisches Wesen, sondern ein epistemologisches Wesen: Er befaßt sich vielmehr mit dem Wissen als mit den Personen. Die psychologischen Gegebenheiten erscheinen in diesem Falle als Aspekte der betreffenden Kenntnisse" (vgl. 18). Nur wenige Psychologen bzw. Pädagogen, so beispielsweise S.L. Rubinstein, W.W. Davidov, P. v. Hiele und insbesondere J. Piaget mit seiner Hypothese, "daß zwischen dem Fortschritt in der logischen und rationalen Organisation der Erkenntnis und den entsprechenden psychologischen Formationsprozessen ein Parallelismus besteht" (vgl. (41) S. 20f), sind von einer Beziehung zwischen psychologischer und inhaltlich-gegenständlicher Entwicklung ausgegangen.

Für sie alle wird diese Beziehung in der gegenständlichen Tätigkeit hergestellt. Somit wird es nötig, ein Verständnis der Differenziertheit und des inneren Zusammenhangs der kognitiven Tätigkeit zu gewinnen. Dieser Standpunkt stellt zweifellos einen großen Fortschritt dar.

Ich möchte mich in diesem Sinne und auf der Grundlage der bisher entwickelten Auffassung zur Natur des wissenschaftlichen Begriffs mit J. Piaget und P. van Hiele auseinandersetzen, weil sie auf die Didaktik (insbesondere die Didaktik der Mathematik) großen Einfluß gehabt haben und noch haben.

Zentrales Konzept in der Piaget'schen Epistemologie ist die Unterscheidung von "reflektiver Abstraktion" (welche von den Aktionen und Operationen des Erkenntnissubjekts ausgeht) und "empirische Abstraktion", welche sich auf die Gegenstände der empirischen Realität richtet, und zwar in dem Sinn, daß die reflektive Abstraktion notwendigerweise konstruktiv ist.

"In fact, as opposed to empirical abstraction, which consists merely of deriving the common characteristics from a class of objects (by a combination of abstraction and simple generalisation), reflective abstraction consists in deriving from a system of actions or operations at a lower level, certain characteristics whose reflection (in the quasi-physical sense of the term) upon actions or operations of a higher level it guarantees; for it is only possible to be conscious of the processes of an earlier construction through a reconstruction on a new plane. This fact is not peculiar to scientific thought, and it already characterises the whole development of intelligence during the transition from a hierarchical stage to the one following it. In short, reflective abstraction proceeds by reconstructions which transcend, whilst integrating, previous constructions" (vgl. 8, S. 189).

Problematisch ist nun nicht diese Unterscheidung, die im Gegenteil eine Differenzierung der Subjekt-Objekt Relation im Sinne des genetischen Strukturalismus zum Ausdruck bringt (vgl. z.B. 11p. 39f) Und die Differenzierung von reflektiver und empirischer Abstraktion erscheint in Parallelität zum erwähnten komplementären Charakter des wissenschaftlichen Begriffs. Problematisch ist in Piagets Auffassung lediglich die Tatsache, daß diese Unterscheidung in Folge einer zu primitiven Vorstellung von der empirischen Abstraktion zur unvermittelten Trennung wird. Damit wird nun genau das, was Piaget für den Vorzug des operativen Ansatzes hält, nämlich die Einheit von Subjekt und Objekt in der gegenständlichen Tätigkeit, zerschnitten.

Wir sind in unserer Beschreibung der Natur des wissenschaftlichen Begriffs davon ausgegangen, daß der Zusammenhang zwischen den begrifflich-reflexiven und algorithmisch-logischen Momenten der geistigen Tätigkeit nur denkbar ist als Wechselwirkung zweier Pole einer Beziehung. Der Begriff ist sowohl Grundlage des Einsatzes der Logik und der "logischen Techniken", und seine Entwicklung und strukturelle Entfaltung ist gleichzeitig ihr Ziel. Insbesondere im Hinblick auf die Logik kennzeichnet sich ein voll entfaltetes begriffliches Denken dadurch, daß es permanent die Möglichkeit und Voraussetzung des Einsatzes der strikten logischen Argumentation schafft. Dabei entwickelt dieses konstruktive Moment gleichzeitig die Bestimmtheit der begrifflichen Bedeutungen.
Piaget scheint diese Symmetrie einerseits zu akzeptieren. So charakterisiert er etwa die Rolle der formalen Logik am Beispiel des Widerspruchsprinzips folgendermaßen: "Tatsächlich reduziert sich das Prinzip des Widerspruchs darauf, die gleichzeitige Bedeutung und Verneinung einer und derselben Eigenschaft zu verbieten. A und Nicht-A sind unverträglich. Für das tatsächliche Denken eines Menschen jedoch beginnt die Schwierigkeit erst dann, wenn er sich fragt, ob er das Recht habe, gleichzeitig A und B zu behaupten, denn die Logik schreibt niemals ausdrücklich vor, ob B Nicht-A impliziert oder nicht. Kann man z.B. von einem Berg, der weniger als 100 m hoch ist sprechen, oder ist das ein Widerspruch?" (vgl. (8), S. 35f) Andererseits drückt sein Konzept der reflektiven Abstraktion gerade die überragende Bedeutung der logisch-mathematischen Strukturen für die Herausbildung des operativen Standpunktes aus.

Da Piaget aber die physikalische Abstraktion im Unterschied zur logisch-mathematischen für nicht-konstruktiv hält, wird die Spannung zwischen den beiden Polen: "konstruktiver" und "inhaltlicher" Aspekt aller wissenschaftlichen, auch der logisch-mathematischen Begriffe aufgelöst und beide Aspekte stehen als Merkmale zweier unterschiedlicher Klassen von wissenschaftlichen Begriffen unverbunden nebeneinander. Präzise zeigt sich dies an Piagets Verwendung der Kategorie "Möglichkeit".

Piaget meint, daß "jede Struktur, mag sie noch so elementar sein, wenn sie nur von logisch-mathematischer Natur ist, ein ganzes System möglicher Entwicklungen besitzt", während die Physik zwar "in gewissen Fällen das Konzept des Möglichen" benutzt, "z.B. bei dem wohl bekannten Prinzip der virtuellen Verschiebungen. Aber in diesem Fall bleibt das Mögliche bezogen auf den Geist des Theoretikers, der mögliche Transformationen voraussagt, aber das Objekt als solches nicht beeinflußt" (vgl. 8, S. 301f).

Wie schon eingangs erwähnt, hat die Physik heute ganz andere, tiefere Vorstellungen vom Erkenntnisgegenstand hervorgebracht. "Die Wirklichkeit des Elektrons ist die Möglichkeit von Welle und Korpuskel", formuliert dies beispielsweise der Wissenschaftshistoriker V.S. Bibler (vgl. auch 35, S. 137-159). Ungelöst bleibt nach Piagets eigenen Worten in seiner Theorie "das Problem der Beziehungen zwischen der deduktiven Mathematik und dem experimentell gegebenen Inhalt: welche Wechselwirkungen entstehen, wenn das Subjekt deduktiv zu überlegen und gleichzeitig zu experimentieren beginnt?" (vgl. 11, S. 117).

Gegen eine im Konzept der reflektiven Abstraktion nur ungenügend begründete Kontinuität des Lernprozesses wendet sich P. van Hiele, wenn er sagt, "... unser erstes Bedenken gegen die Theorie Piagets gilt seiner Verwendung des Wortes 'logisch'; er suggeriert damit, das Denken verliefe auf *einem* Niveau" (28, S. 123f). Der Niveaubegriff versteht sich hier im Sinne einer fixen Hierarchisierung des Wissens. "Der Kern des Niveaubegriffs ist ..., daß die Objekte in einer und derselben Wissenschaft auf verschiedenen Niveaus etwas ganz verschiedenes sind, und dieses hat zur Folge, daß Personen, die auf verschiedenen Niveaus reden, sich oft nicht verstehen können" (a.a.O. S. 109).
Indem van Hiele zu einseitig die Diskontinuitäten im Lernprozeß betont, sieht er am Ende "verschiedene Objekte", wo er doch die Entwicklung des Objekts als Moment des menschlichen Lern- und Erkenntnisprozesses sehen sollte. D.h. seine Stufentheorie führt ihn zu der Hypostasierung seiner Niveaus in einer fixen Struktur des Wissens. "Es ist z.B. deutlich, daß

'Katze', 'Rose' und 'Ei' auf dem Grundniveau der Biologie angetroffen werden können, daß aber 'Erblichkeit', 'Instinkt' und 'Stoffwechsel' im Relationsnetz eines höheren Niveaus eine Stelle finden werden" (28, S. 110). Dies ist nun meines Erachtens durchaus nicht so. Das Wissen ist kein Ding mit einer festen hierarchischen Struktur: Konkretes und Abstraktes wechseln permanent die Plätze. Der Ausgangspunkt ("Katze"), also das Konkrete wird zum Ziel der Erkenntnis, zur Aufgabe, wodurch es sich als Abstraktes zeigt, und umgekehrt, das Abstrakte (etwa "Instinkt") wird zum Instrument, zum Mittel, um jenes Erkenntnisziel zu erreichen, jene Aufgabe zu bewältigen, das Problem zu lösen, d.h. also zum Konkreten. Einen Begriff zu definieren heißt eben letzten Endes, ihn entwickeln. Und das Wissen als ein Moment in diesem Prozeß verändert sich dauernd.

Auch bei van Hiele fallen letztlich gegenständlich-inhaltliches und psychologisches Moment in Form eines bloßen "einerseits-andererseits" auseinander, wobei er sich als der erfahrende Pädagoge, der er wohl ist, eigentlich rein phänomenologisch an dem letzten orientiert.

IV. *Begriff und Tätigkeit*

In diesem Abschnitt wollen wir eine relativ kurze Zusammenfassung einiger der bisher entwickelten Fragen geben.

Es gibt keine von der Aktivität des Erkenntnissubjekts bzw. des Lernenden unabhängige, eindeutig und fest fixierte Struktur des Wissens; sie müßte notwendigerweise auf a-priorisch oder empiristisch gegebenen letzten Fundamenten ruhen; und ihre Vollendung ihre höchste Entwicklungsstufe in der Logik finden. Die mit dieser Vorstellung gegebene Trennung von Subjekt und Objekt machte es unmöglich, Lernen als einen Entwicklungsprozeß, d.h. als einen Prozeß qualitativer (diskontinuierlicher) und quantitativer Umstrukturierung zu verstehen. Es ist aber bekannt, daß neue Erkenntnisse, neue Informationen usf. auch das Gesamtsystem der schon vorhandenen Kenntnisse und Fähigkeiten verändern, es in neuem Licht bzw.

in neuen Zusammenhängen erscheinen lassen. Das Wissen muß dementsprechend als Medium einer möglichen Bewegung des Subjekts entsprechend dem zu erkennenden Objekt charakterisiert werden. Das gibt nun eine Fülle äußerst schwieriger Probleme auf.

Benutzen wir zur Verdeutlichung den Vergleich zwischen Wissen, bzw. dem wissenschaftlichen Begriff einerseits und dem Werkzeug andererseits. Auch das Werkzeug kann unabhängig und außerhalb der gegenständlichen Tätigkeit nicht vernünftig charakterisiert werden. Abgesehen von ihrer Funktion und außerhalb ihres Gebrauchs ist etwa eine Axt nicht viel mehr als etwas Holz und etwas Eisen. Erst der Gebrauch bringt ihre Struktur als Axt, d.h. als Werkzeug hervor. Nichtsdestoweniger ist andererseits dieser Gebrauch nicht beliebig, nicht willkürlich. Eine Axt läßt sich beispielsweise nicht zum Geschirrabtrocknen benutzen.

Es besteht aber nun ein zwar relativer aber doch so bedeutsamer Unterschied zwischen Begriff und Werkzeug, daß darin das ganze Problem zu liegen scheint und zugleich die überragende Bedeutsamkeit des wissenschaftlichen Begriffs und seiner Entwicklung. Diese Differenz resultiert aus der Tatsache, daß Begriffe selbst nur als Beziehungen verstanden werden können, ihr Wesen damit niemals in *einer* Beziehung zu sehen ist, sondern es sich in jedem Fall, selbst bei maximaler Vereinfachung, um ein System von Beziehungen (und noch dazu auf ganz unterschiedlichen Ebenen mit ganz unterschiedlichen Bestimmtheitsgraden) handelt, während in Differenz dazu das Material des Werkzeugs konkret gegenständlich ist, es sich darum handelt, diese konkrete Gegenständlichkeit zu beherrschen und somit das Wesen des Werkzeugs gerade auf der Feststellung *einer* heraushebbaren Beziehung ruht. Die Beherrschung kann eben nur gelingen, indem die interferierende Komplexität herausgehalten wird. Der Begriff ist bestimmt *und* unbestimmt zugleich, das Werkzeug ist *nur* bestimmt. In der Bewegung des begrifflichen Denkens gibt es immer ungefähr die folgenden Aspekte: Zunächst hat eine Vorstellung ihr Maß gefunden, hat eine gewisse Eingrenzung und Bestimmtheit erlangt im Begriff, und der Begriff, der diesem Prozeß zugrundeliegt, fungiert in diesem Augenblick als Werkzeug der Ausarbeitung dieser Vorstellung, der Ableitung von Konsequenzen, der Ausarbeitung von Zusammenhängen. Gleichzeitig kann der Begriff aber nur dann wirklich verstanden werden, wenn die Bedingungen seines Einsatzes mitgekannt, wenn seine Grenzen und möglichen Beziehungen (Veränderungen) mitgesehen werden. Erst dann wird er zur Grundlage der Vorstellung und des Operierens mit einzelnen Konsequenzen. Es ist unmöglich, das Verstehen auf das Operieren zu beschränken. Das macht gerade die Sache so widersprüchlich und kompliziert und gibt den Begriffen ihren komplementären Charakter. Gliche der Begriff vollkommen einem Werkzeug, dann würde jeder, der in die Situation käme, die gerade dieses Werkzeug erforderte, seinen Gebrauch ohne allzu große Mühe und ohne weitere Reflexion erlernen. Für Begriffe gilt, wie gesagt, eine derartige Vorstellung nicht. Wir sagen deshalb, sie sind Wissen (Aufgabe) und Werkzeug zugleich. Wobei die Doppelbezeichnung des einen Pols dieser Beziehung darauf hinweisen soll, daß man sich hüten muß, die Entwicklung dieses Verhältnisses nur in einer Richtung zu sehen. Gerade darauf haben wir mehrmals hingewiesen.

Begriffe sind nicht einfach Widerspiegelungen der Situationen und Verhältnisse, sie weisen stets über sie hinaus, sie enthalten stets Elemente der Verallgemeinerung. Angesichts der Tatsache, daß es dies ist, was den theoretischen Begriff unentbehrlich macht, weil eben nur mit seiner Hilfe Entwicklungen analysierbar, vorstellbar und gestaltbar sind, kann man sagen, die Entwicklung des wissenschaftlichen Begriffs stellt eine Form der "psychologisch-historischen" Bewegung des Wissens dar.

Verstehen heißt, Begriffe bilden. Eine mehr oder minder ziellose Aktivität wird zur kognitiven Tätigkeit, indem die Begriffe zum eigentlichen Gegenstand (Inhalt) werden. Dies ist nur möglich, wenn sich der gesamte Lehr- und Lernprozeß auf den theoretischen Charakter des wissenschaftlichen Begriffs richtet und ihn nicht lediglich als einen speziellen

Gegenstand betrachtet. Dadurch entsteht das System der Tätigkeit. Das System der Tätigkeit ist also zunächst die *begriffliche* Widerspiegelung eines realen Prozesses. Man muß betonen, daß dieser theoretische Charakter nicht in bloßen Leitvorstellungen, heuristischen Strategien und ähnlichem besteht, sondern an die Gegenstände des Denkens gebunden ist.

Da somit das oben genannte Ziel des Unterrichts sich nur über die Aneignung von Gegenständen ansteuern läßt, tritt ein Paradox auf, daß es nämlich einerseits gleichgültig ist, mit welchen Gegenständen ich mich in welcher Reihenfolge im Unterricht befasse und andererseits nicht gleichgültig ist. Zwei Schulklassen mögen dasselbe tun, z.B. "aussondern von Teilmengen", "vergleichen", "ordnen" usf. und es kann seinem Wesen nach doch etwas grundsätzlich verschiedenes sein, insofern nämlich letzteres davon abhängt, ob der Lehrer die Logik der Entwicklung, die erst auf der Ebene der begrifflichen Beziehungen sichtbar wird, d.h. dann, wenn das implizierte Wissen in seiner Bewegung und Entwicklung (z.B. hin auf Verallgemeinerung oder Spezialisierung oder Transferierung oder als Basis von Analyse und Synthese) gesehen wird, d.h. also, ob der Lehrer eine entsprechende inhaltliche Logik der Entwicklung im Kopf hat oder nicht und wenn nicht, nur völlig zusammenhanglos und phänomenologisch die konkreten Handlungen vor sich sieht.
Wie sehen didaktische Formen des Problems aus, das sich aus der Komplexität und Komplementarität des wissenschaftlichen Begriffs, aus seiner Rolle als eine elementare, ganz allgemeine Form der psychologisch-historischen Bewegung des Wissens ergeben hat?

Wenn ich den Entwicklungsstand eines Schülers feststellen will, dann würde ich das Niveau und den Grad der Zielgerichtetheit, Organisiertheit, der Kontinuität usf. des Systems seiner Tätigkeit zum Anhaltspunkt nehmen, weil mir dies Indiz für den Grad seiner *Lernfähigkeit* zu sein scheint, für den Grad seiner Fähigkeit, Informationen aufzunehmen, sich anleiten zu lassen, zu kooperieren, zu kommunizieren usw.

Ich könnte natürlich auch bestimmte Tests mit ihm durchführen. Ich könnte als Indiz das Lösen bestimmter Aufgaben nehmen; usw. Doch ist das unter Umständen technisch sehr aufwendig und darüber hinaus nicht zureichend, denn der "Unterricht soll der Entwicklung vorauseilen" und muß sich daher auf die "Zone der nächsten Entwicklung" (Wygotski) richten. Nach Wygotski zeigt sich, "daß die Zone der nächsten Entwicklung für die Dynamik der intellektuellen Entwicklung und den Leistungsstand eine unmittelbarere Bedeutung besitzt als das gegenwärtige Niveau der Entwicklung ... Die größere oder kleinere Möglichkeit dafür, daß das Kind von dem, was es selbständig tun kann, zu dem übergeht, was es gemeinschaftlich tun kann, ist das sicherste Symptom, das die Dynamik der Entwicklung des Leistungsstandes des Kindes charakterisiert. Sie stimmt völlig mit seiner Zone der nächsten Entwicklung überein" (vgl. 38).
Das ist die eine Seite. Andererseits wird aber diese Entwicklung über die Gegenstände des Unterrichts gesteuert. In ihrer Gesamtheit sind sie in Umrissen durch den Lehrplan aufgegeben. Das Problem besteht nun darin, den wissenschaftlichen Begriff entsprechend dieser Steuerungsanforderung zu charakterisieren. Sein Wesen zunächst auf kategorialer Ebene, d.h. relativ allgemein, und weiterhin dann in den entsprechenden methodischen Konsequenzen so herauszuarbeiten, daß sich darüber die Entwicklung der kognitiven Tätigkeit realisieren läßt.

Dies ist insgesamt die eigentliche Aufgabe der Fachdidaktik, während sich die pädagogische Forschung mehr auf den allgemeinen Charakteristika der kognitiven Tätigkeit befaßt.

Die Praxis begegnet diesem Problem mit dem Hinweis auf die Notwendigkeit einer "Einheit von Lehren und Lernen" auf Seiten des Unterrichtenden und mit dem Versuch, hierfür Strategien zu entwickeln, die von der Forderung ausgehen, daß es gilt, permanent "das Alte in neuem Licht" zu sehen.
Der Bericht von Michéle Artigue (40) ist ein hervorragendes Beispiel für einen derartigen praktischen Versuch.

V. *Didaktische Analyse und "Begriffsfeld": eine exemplarische Problemskizze*

zusammen mit H. Steinbring

Kürzlich hat Kapadia (vgl. 27) sich ziemlich kritisch über Piagets Vorstellungen zur psychogenetischen Entwicklung des Raumbegriffs bei Kindern geäußert.

Diese Kritik ist in vielerlei Hinsicht recht interessant und weist meines Erachtens doch auf einige ungelöste Probleme und einige Widersprüche in der Theorie Piagets hin (vgl. 43). Unter anderem akzeptieren wir, wie oben dargelegt, keine fixen Hierarchien des Wissens, an die sich das lernende Subjekt im Vollzug einer Parallelität bzw. einer Umkehrung von Phylogenese und Ontogenese anzupassen habe (Piaget glaubt an die Umkehrung von Phylogenese und Ontogenese).

Darüber hinaus würden wir einigen kritischen Anmerkungen Kapadia's zu Piagets Gebrauch des Begriffs des 'Topologischen' zustimmen. Dennoch scheinen uns in dieser Arbeit Unklarheiten zu bestehen, die denen Piagets ziemlich genau entsprechen. Wir möchten hier nicht in eine Kritik der Arbeit Kapadias eintreten, sondern uns vielmehr mit Hilfe einiger von ihm aufgeworfener Fragen unser Problem der didaktischen Analyse der Entwicklung wissenschaftlicher Begriffe etwas weiter verfolgen. Kapadia unterstellt Piaget ein Mißverstehen von Poincaré, welcher über einen Eindruck von Stetigkeit und nicht über den Begriff der Stetigkeit gesprochen habe. Er fährt dann fort: "Diese offensichtlich geringere Unterscheidung ist wesentlich, da sie uns zu verschiedenen Theorien der Mathematik - fuzzy geometry bzw. Topologie führt". Die Frage stellt sich hier natürlich sofort, wie werden diese beiden verschiedenen Dinge, Vorstellung und Begriff eigentlich vergleichbar aufeinander beziehbar? Wir sind auf diese Frage im Verlauf dieser Arbeit schon mehrmals gestoßen, zuletzt bei der

Charakterisierung des Problems der Koordination von reflektiver und empirischer Abstraktion als dem zentralen Problem in der Theorie Piagets. Diese Unklarheit in der Arbeit Kapadias bzgl. der Unterscheidung von Vorstellung und Begriff beherrscht auch den zentralen Punkt seiner Auseinandersetzungen mit Piaget. Es geht dabei um die Frage, ob der Begriff des 'Kontinuums' ein ursprünglicher Begriff im Bewußtsein ist oder nicht. Kapadia schreibt dazu: "Wir glauben im Gegensatz zu Piaget und Inhelder, daß Stetigkeit einer der frühesten Aspekte der Raumvorstellung ist". Kapadia beschreibt zur Begründung einige eigene Tests mit Kindern, die zum Ausgangspunkt die durch die Bewegung vermittelte Raumerfahrung haben.

Nun ist jedoch die Vorstellung der Bewegung, wie alle Vorstellungen bestimmt durch *sämtliche* möglichen Beziehungen des Subjekts zu diesem Phänomen. Dazu gehört im vorliegenden Fall von Anfang an nicht nur der sinnliche Eindruck des Kontinuierlichen, des endlosen Ablaufs, die Vorstellung des Dichten und Dauernden, sondern ebenso die Erfahrung der Ruhe, d.h. die Erfahrung möglicher Anfänge und Beendigungen der Bewegung.
Das nämliche gilt von der Zeiterfahrung, deren Projektion in den Raum die Bewegung ja darstellt: Die ganze Vergangenheit, die ganze Zukunft, die Zeit als endloser Strom einerseits und der Augenblick, das Jetzt, das einzelne Ereignis, der Herzschlag oder der Schlag der Uhr auf der anderen Seite. Das Diskrete und das Kontinuierliche in ihrer gegensätzlichen Beziehung erscheinen als der Ausgangspunkt der psychogenetischen Entwicklung der Vorstellung von der Bewegung und vom Raum.

In der bloßen Kontemplation sind die gegensätzlichen Momente nicht zu ordnen, nicht in einen strukturierten Zusammenhang zu bringen, sie erscheinen bloß zusammenhanglos gegensätzlich, widersprüchlich, ja paradox in ihrer Entgegensetzung. Erst die Tätigkeit gibt einen möglichen Bezugsrahmen und daher Piagets Vorstellung von der reflektiven

Abstraktion. Piaget schreibt zum Begriff des Kontinuums, "daß er tatsächlich die Synthese der elementaren topologischen Relationen, die sich an der Wurzel der Raumkonstruktion befinden, ist. Vom wahrnehmungsmäßigen Kontinuum an, das die elementarsten Nachbarschaften charakterisiert, entwikkelt sich der Begriff Kontinuum in der Tat in zwei komplementäre Richtungen. Die erste ist die fortschreitende Zerlegung ..., die zweite Richtung ist die der immer weiter ausgedehnten Koordinierung". Unseres Erachtens geht es bei der Entwicklung der Erkenntnis nicht nur um die Koordinierung von Operationen, sonst wäre beispielsweise ein Problem, wie die Frage nach der Bedeutung der Gegenstände im Unterricht gar nicht beantwortbar. Sondern es geht auch um die Genese des gegenständlichen Inhalts des Denkens (sowohl in der Geschichte als auch im Unterricht). Damit steht die Frage nach einer genetischen Auffassung vom Begriff, d.h. nach einer Auffassung vom Begriff als eines sich entwickelnden Systems. Diese Frage ist in den ersten Teilen der vorliegenden Arbeit auf allgemeiner kategorieller Ebene, wo "Begriff" im Sinn von "Grundbegriff einer Theorie" und somit die Worte "Begriff" und "Theorie" synonym benutzt wurden, andiskutiert worden. In der didaktischen Analyse geht es entsprechend dem gerade gestellten Problem um die Frage der Differenzierung und des Zusammenhangs der einzelnen Begriffe im Unterricht.

Wir machen dementsprechend den Vorschlag, die angeschnittenen Fragen im Rahmen einer Analyse des Begriffsfeldes "Bewegung - Funktion - Raum" zu diskutieren. Das Gedankenexperiment, welches nun die Entwicklungsgeschichte (auch die didaktische Entwicklung betreffend) dieses Begriffsfeldes beschreibt, ist in Zenons Paradoxie des Wettlaufes von Achill und der Schildkröte gegeben.

Zunächst zur Grundlage der Diskussion, die Paradoxie selbst, wie sie in einem beliebigen Schulbuch ((47), S. 15) zu finden ist: "Sophisma des Philosophen Zeno von Elea (um 450 v. Chr.): Achilles verfolgt eine Schildkröte, die einen

Vorsprung von 1 Stadion hat, mit 10-facher Geschwindigkeit. Wenn Achilles dahin gelangt, wo die Schildkröte anfangs war, so ist diese um $\frac{1}{10}$ Stadion voraus; hat Achilles diese Strecke durchlaufen, so ist die Schildkröte um $\frac{1}{100}$ Stadion weitergekrochen usw. Achilles kann also die Schildkröte nie einholen. Worin liegt der Trugschluß? Wo holt Achilles die Schildkröte wirklich ein?"

Wäsche hat unseres Erachtens recht, daß "diese Paradoxie ... zur Veranschaulichung oder zur Erläuterung der Bedeutung des Grenzwertbegriffs im mathematischen Unterricht nicht herangezogen werden (kann)" ((45), S. 19), sie ist vielmehr zu verstehen als Paradoxie der Bewegung ((45), S. 17). Wobei die Faktizität des Phänomens der Bewegung dazu dient, die "Begriffe" von Bewegung, Raum und Funktion wechselseitig über bestimmte Widersprüche auseinander hervorzutreiben. Grundzusammenhang ist die Beziehung von 'Diskret', und 'Kontinuierlich' auf den verschiedenen Ebenen der Vorstellung und des Denkens. Wäsche schreibt: "Man findet z.B. in einem bekannten Schulbuch nach einer Darstellung der Paradoxie folgendes bemerkt: 'Zenon hatte die Vorstellung, daß die Summe einer unendlichen Zahlenfolge nicht einen endlichen Wert haben könne. Tatsächlich aber braucht Achilles nur die endliche Strecke 1 $\frac{1}{9}$ Stadion zurückzulegen, bis er die Schildkröte erreicht'. Was ist hier eigentlich gesagt?

Die (endlichen) Partialsummen S_n haben einen 'Häufungspunkt', der als Summe der 'unendlichen Summation' definiert ist, und der übrigens nicht erreicht wird. Wie kann durch diese logisch-mathematische Überlegung, die durch Definition den Summenbegriff verallgemeinert, die Paradoxie, die doch eine Paradoxie der Bewegung ist, getroffen werden? In den Auflösungsargumenten spielt die Zeit keine Rolle ..." Insbesondere ist das Postulat, das das Cauchy-Konvergenzkriterium ausspricht, nur denkbar auf der Grundlage eines vorgestellten Raumkontinuums als Ganzem, welches nicht selbstverständlich gegeben ist und wie Einstein schreibt, beispielsweise den Griechen nicht zur Verfügung stand. Wäsche's Auflösung der Paradoxie, die in der Konsequenz darauf beruht, die Existenz "eines räumlichen und zeitlichen Kontinuums fallen zu lassen", wobei er sich an Bernays und Hilbert anlehnt, stellt sich auf die andere, die "atomistische" Seite und auch das erscheint uns weder wissenschaftstheoretisch noch psychogenetisch die ganze Lösung zu sein.

Auch wir werden uns lediglich auf einen Aspekt beschränken müssen: Zenons Problem als Paradoxon der Bewegung. Wie sieht es nun damit aus? Bewegung ist diskret und kontinuierlich zugleich. Darauf hatten wir bereits hingewiesen. In der Physik werden Bewegungen als stetige Funktionen der Zeit im dreidimensionalen Raum verstanden ($g(t) = (x(t), y(t), z(t))$, mit t als Zeitparameter: "Wir sprechen von einer Bewegung, wenn im Ablauf der Zeit die (Raum-)Koordinaten des Körpers sich ändern", heißt es in einem beliebigen Lehrbuch der Physik ((46), S. 6). Die stetige Funktion als Modell der Bewegung spiegelt tatsächlich sehr klar den Doppelcharakter dieses Begriffs wider: Einerseits enthält sie diskrete Aspekte, etwa wenn sie als Formel geschrieben mir ermöglicht, einzelne Werte zu berechnen, andererseits bringt sie, im Bild des Funktionsgraphen etwa, kontinuierliche Aspekte hervor, die mir eine qualitative Gesamtvorstellung der Funktion (=Bewegung) erlauben. Die Funktion ist qualitativ und quantitativ zugleich, reflexiv und konstruktiv. Sie ist Wissen (Gesamtvorstellung) und Werkzeug (Berechnungsformel) in einem.

Zeno möchte die Bewegung wahrgenommen und "gemessen" wissen, an fest vorgegebenen Stellen, an Orten, deren Abstände gegen Null konvergieren. (Komplementarität als Widersprüchlichkeit zwischen kalkülmäßiger Fixierung im Begriff (Diskret) und der sinnlichen Vorstellung gleichförmiger Bewegung (Kontinuum).)

$$x_0 = 0$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{10} x_n + 1 \text{ Stadion}$$

für $n = 0, 1, \ldots$

Diesen Bewegungs"mess"vorgang kleidet er in die obige Geschichte: Wenn sich Achilles bei x_n befindet, dann ist die Schildkröte schon bei $x_{n+1} > x_n$!

Hier setzt er den Zuhörer nun dem Trugschluß aus, der sich zusammen mit der einseitigen diskreten Sicht von Bewegung in Widerspruch zum Wissen über den kontinuierlichen Ablauf einstellt, zum Wissen darüber, daß der Langsamere trotz noch so großen Vorsprungs schließlich doch vom Schnelleren eingeholt wird.

Akzeptiert man diesen ausschließlich diskreten Zugang, bejaht man, daß Achilles *erst* alle von der Schildkröte schon erreichten Punkte aufsuchen muß, (wobei sich dann die Schildkröte natürlich schon wieder ein Stückchen weiter fort befindet!), so sagt man eigentlich, Achilles könne *nur* diese Punkte erreichen, dies seien quasi die *einzigen* Stellen, an die er gelangen könne. Doch wer oder was hindert Achilles 2 oder 3 Stadien weit zu laufen? "Beliebig" weit zu laufen; oder auch 10 Stadien weit (dann hat die Schildkröte offensichtlich erst ein Stadion und eines als Vorsprung durchkrochen und ist weit zurückgeblieben) zu laufen? Die doppelte Sicht von Bewegung, die das Problem offenbar machte, wird es auf eine neue Ebene heben. Genau genommen lautete die Aufgabe ja: Achill läuft 10 mal so schnell wie die Schildkröte, die jedoch ein Stadion Vorsprung hat. Zu *jeder* von Achill zurückgelegten Strecke $x (x \geq 0)$ hat die Schildkröte also die Strecke

$$f(x) = \frac{1}{10}x + 1 \text{ Stadion}$$

durchkrochen. Diese Funktion als Modell der Bewegung (besser der Relativbewegung von Schildkröte zum "Stand"ort Achills') gibt uns nun die Möglichkeit, ihres Doppelcharakters wegen die Paradoxie auf einem neuen Niveau zu reproduzieren (andere "Lösungen" von Paradoxien gibt es sowieso nicht): Der kontinuierliche Aspekt der Bewegung steht nicht im Widerspruch zur diskreten Sicht. Es bleibt richtig, daß die Schildkröte bei x_{n+1} ist, sobald Achill x_n erreicht hat, doch die Darstellung mit Hilfe des Funktionsbegriffs hat es uns erst möglich gemacht, Achills Bewegung von der einseitigen Fixierung auf die diskreten x_i ($i = 0, 1, \ldots$) zu lösen, und die Bewegung auch als Gesamtes zu sehen, d.h. zu akzeptieren, daß Achill, wenn auch erst zu allen x_i, zu *jedem* Ort laufen kann!

Die Relativbewegung von Achill und Schildkröte ist eine lineare Funktion, da beide Bewegungen gleichförmig sind: $f(x) = ax + b$ (d.h. wenn Achill sich bei x befindet, ist die Schildkröte bei $f(x)$).

Die Aufgabe: "Wo holt Achilles die Schildkröte wirklich ein?" lautet nun: "Welches ist der Fixpunkt von $f(x)$?".

Die Fixpunkte von f kann man nun in Abhängigkeit von den Konstanten a, b einfach rechnerisch feststellen:

$$x = f(x) = ax + b$$
$$x - ax = b$$
$$x\,(1-a) = b$$

Sei

$$a \neq 1$$

$$\Longrightarrow \qquad x = \frac{b}{1-a}$$

(Für $a = 1$, also $f(x) = x + b$ gibt es natürlich keinen Fixpunkt (wenn $b \neq 0$); in dem Paradoxon bedeutet dies, daß sich die Schildkröte immer in einer Entfernung b von Achill befindet).

In welchem Sinn ist dies nun eine Lösung? Aus der Paradoxie der Bewegung wurde eine Komplementarität im Begriff der 'Funktion'. Um diese Transformation wissenschaftstheoretisch und didaktisch zu analysieren und zu beschreiben (die tatsächliche Historie steht nicht im Mittelpunkt des Interesses) bedürfte es einer genauen Aufzeichnung aller Beziehungen in dem Begriffsfeld "Bewegung - Funktion - Raum", was nicht Absicht dieser ersten Skizze unseres Ansatzes sein kann. Wir werden das in einer anderen Arbeit nachholen und werden insbesondere zeigen, wie sich damit der Karcher'sche Vorschlag zur Analysis (vgl. 49) analysieren läßt. Aber zunächst zurück zu unserem Problem.

Die erwähnte Transformation zeigt die Notwendigkeit, den Begriff des funktionalen Zusammenhangs, den Begriff der Funktion als Vorstellung, als intuitives Gesamtmodell zu haben, - "das Neue, schreibt M. Atiyah, am mathematischen Begriff der Funktion war, sie als ein einziges mathematisches Objekt anzusehen" (vgl. (30), S. 206) - ; und zweitens über die Wirksamkeit des symbolischen Kalküls (von Vieta und Descartes herstammend) zu verfügen, der es erlaubt, den gesuchten Treffpunkt einfach und was die Bedeutung betrifft, beinahe postulatorisch hinzuschreiben. Dadurch werden aber nicht nur neue Gegenstände des Denkens, sondern auch neue Realitäten für Anschauung und Vorstellung geschaffen. Und das ist das wesentliche, wenn man sich drittens um den Zusammenhang dieser komplementären Aspekte bemüht, so wie wir es in den Zitaten von Albert Einstein und Bourbaki zur Entwicklung des Raumbegriffs und der Geometrie bereits in III. festzuhalten versucht haben. Wir wollen kurz die dabei angesprochenen Aspekte im Zusammenhang des Funktionsbegriffs nochmals aufnehmen. Dazu ein Zitat von T. Dantzig: "Before the introduction of literal notation, it was possible to speak of individual expressions only; each expression, such as $2x + 3$; $3x - 5$; $x^2 + 4x + 7$; $3x^2 - 4x + 5$, had an individuality all its own and had to be handled on its own merits. The literal notation made it possible to pass from the individual to the collective, from the 'some' to the 'any' and the 'all'. The linear form $ax + b$, the quadratic form $ax^2 + bx + c$, each of these forms is regarded now as a single species. It is this that made possible the general theory of functions, which is the basis of all applied mathematics. ... To me, the tremendous importance of this symbolism lies not in these sterile attempts to banish intuition from the realm of human thought, but in its unlimited power to *aid intuition* in creating new forms of thought." (vgl. 44, S. 87 und 97).

Aber man muß hinzufügen, es geht nicht nur um neue Denkformen. Die Vereinheitlichung der Vorstellung und damit die Entwicklung der Vorstellung als Ziel ist nur die eine Seite. Auf der anderen Seite wird die Vorstellung auch zur Triebkraft, insofern nämlich gegensätzliche Vorstellungen im Bereich der Anschauung und der Kontemplation nicht sinnvoll nebeneinander existieren können, daß sie aber im Rahmen einer Beziehung zwischen dem Kalkül, der Logik auf der einen Seite und der Intuition, der Anschauung auf der anderen Seite produktiv werden. Es handelt sich um das nämliche Problem, was bei der Diskussion der Piaget'schen Theorie angesprochen war: Nur in ihrer Beziehung zur empirischen Abstraktion entwickelt sich die reflektive Abstraktion konstruktiv und sinnvoll, und nicht in absoluter Loslösung davon. Dagegen schreibt Piaget: "Auf der Stufe, wo das Denken hypothetisch - deduktiv wird, d.h. wo die Operationen sich von ihrem konkreten Inhalt lösen und nur noch ihrer formalen Komposition gemäß funktionieren, überschreitet die Versuchsperson die Begriffe wahrnehmbare Teilung und wahrnehmbarer Punkt und setzt die Mechanismen der Zerlegung und Zusammensetzung bis über jegliche effektive Grenze hinaus fort. Eben dadurch wird eine operatorische Synthese des Kontinuums möglich." (S. 184)

Dem können wir, wie gesagt, nicht zustimmen. Die Operationen allein geben keinen ausreichenden Bezugsrahmen für die Orientierung ab. Wie diese einseitige Ausrichtung an der je augenblicklich gegebenen technischen Erscheinungsform von Funktionen vielmehr unter Umständen zur Konfusion führt, erläutert Cauchy. Cauchy schreibt:"'In the works of Euler and Lagrange, ... a function is called *continuous* or *discontinuous*, according as the diverse values of that function, corresponding to diverse values of the variable ... are or are not produced by one and same equation .... Nevertheless

the definition that we have just recalled is far from offering mathematical precision; for the analytical laws to which functions can be subjected are generally expressed by algebraic or transcendental formulae (that is, by the Eulerian range of algebraic expressions), and it can happen that various formulae represent, for certain values of a variable x, the same function; then, for other values of x, different functions.'
As an example of a "misbehaving" algebraic expression Cauchy chose precisely the kind of integral representation with which he had struggled in 1814:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{x^2}{t^2 + x^2}\, dt = \begin{cases} x \text{ if } x \geq 0 \\ -x \text{ if } x \leq 0 \end{cases} \qquad (3.1)$$

In Euler's theory the left-hand side of (3.1) is "continuous" while the right-hand side is "discontinuous": 'but the indeterminacy ceases if for Euler's definition we substitute that which I have given (in the *Cours d'analyse*).'" (vgl. (48), S. 50 f.)

* * *

Abschließend einige Bemerkungen zu dem, was wir *Begriffsfeld* genannt haben, wenn auch keine detaillierte Darstellung des zitierten Begriffsfeldes: "Bewegung - Funktion - Raum" angestrebt wird. Versucht man, einen neuen unbekannten Gegenstand zu verstehen, so wird man einerseits versuchen, ihn aus sich selbst heraus wirken zu lassen (Passivität und Spontaneität des Geistes), andererseits wird es darum gehen, jede neue Information sofort zu den schon vorhandenen eigenen Kenntnissen in Beziehung zu setzen, jedes neue Faktum in das eigene System von Wissen und Erfahrung zu integrieren (Aktivität und Operativität des Denkens). Dementsprechend muß der Begriff einerseits auf sich selbst bezogen werden, er muß Vorstellung und Maß der Vorstellung in einem sein. Er muß unbestimmt sein, in dem Sinn, daß er nicht durch einen einzelnen Kontext oder eine endliche Anzahl von Zusammenhängen und Beziehungen erschöpfbar ist. Es gilt unter diesem Aspekt eine Definition des Begriffs zu finden, "bei welcher der Begriff durch sich selbst und nicht durch andere Begriffe definiert wird." (Bibler) Anderenfalls wäre man nämlich unfähig, Neues zu erlernen, Unbekanntes sich anzueignen, weil als einziger Maßstab übrig bliebe, zu sehen, ob die neuen Ideen und die neuen Gegenstände den alten ähnlich sind oder nicht (weshalb der Mathematiker Whitehead den gesunden Menschenverstand als schlechten Lehrmeister, im Bereich des schöpferischen Denkens kennzeichnet).

Andererseits kann etwas, das keinerlei Beziehungen über sich selbst hinaus hat, das also in absoluter Isolation und Selbstbezogenheit existiert nicht verstanden werden. (Selbst die Entwicklung der formalen Logik vermag dies zu erhärten.)

Diesen beiden Aspekten der Problematik des Verstehens muß das, was wir *Begriffsfeld* genannt haben, gerecht werden und durch diese Bedingungen wird es konstituiert. Daher schließt jeder Begriff eines derartigen Begriffsfeldes gleichzeitig die anderen Begriffe als Momente seiner Definition und Entwicklung in sich ein. In dieser Aufspaltung der Einheitlichkeit des Wissens, in der Komplementarität erscheint es möglich, den Inhalt des Denkens auf das System der Tätigkeit und der Kommunikation zu beziehen. Letzteres ist gerade die Aufgabe der didaktischen Analyse. Eine Ausführung dieses Ansatzes im einzelnen muß, wie gesagt, einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben.

LITERATUR

(1) M. Otte: Didaktik der Mathematik als Wissenschaft; Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Heft 3/1974

(2) H. Hahn: Nachdenken über Lehrerbildung IPTS-Schriften 4, Kiel 1974

(3) Th. Mies, M. Otte: Interdisziplinarität der wissenschaftlichen Arbeit und Dialektik, Hegel Jahrbuch, Köln 1974

(4) N. Bohr: Atomphysik und menschliche Erkenntnis I und II, Vieweg, Braunschweig 1964

(5) G. Holton: Thematic origins of scientific thought, Cambridge (USA) 1973

(6) J.S. Lukinsky: 'Structure' in educational theory, Educ. Phil. and Theory, vol 2 (No 2) and vol 3 (No 1) 1970/71

(7) J. Bruner: Der Prozeß der Erziehung, Düsseldorf 1970

(8) E. Beth/J. Piaget: Mathematic. Epistemology and Psychology, Dordrecht 1966

(9) J. Piaget: The concept of structure, in: "scientific thought", UNESCO 1972

(10) J. Piaget: The Epistemology of interdisciplinary 2 relationships; in: Interdisciplinarity OECD 1972

(11) J. Piaget: Abriß der genetischen Epistemologie, Freiburg 1974

(12) H. Bussmann, Th. Mies: Rezension zu Piaget/Inhelder, Die Entwicklung der elementaren logischen Strukturen, Zeitschrift für Pädagogik, Heft 1/1975

(13) A. Wilson: Systems Epistemology in: Laszlo (Hrgb.): The World System, N.Y. 1973

(14) C.W. Churchman: Philosophie des Managements, Freiburg 1973 (englisch: Challenge to Reason)

(15) G.W. Ford/L. Pugno: Wissensstruktur und Curriculum, Düsseldorf 1972 (englisch: The

structure of knowledge and the Curriculum).

(16) D. Ausubel: A Cognitive Structure Theory of School learning, in: Siegel (Hrgb): Instruction San Francisco 1967

(17) R. Skemp: The Psychology of Learning Mathematics. Peaguin Books 1971

(18) A. Morf: La Recherche en Didactique, in: IREM de Bordeaux, vol. 12/1972-1973

(19) H. Weyl: Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft, München 1966

(20) N. Bourbaki: Elemente der Mathematikgeschichte, Göttingen 1971

(21) J. Bruner: On Learning Mathematics, in: Mc Intosh (Hrgb), Perspectives on Secondary Mathematics Education, Englewood Cliffs 1971

(22) A. Einstein: Mein Weltbild, Ullstein Buch 65

(23) J. Bruner: Relevanz der Erziehung, Ravensburg 1973 (englisch: The Relevance of Education 1971)

(24) M. Otte/Th. Neumann: Über formale und inhaltiche Logik in der Didaktik, Studium Generale 24(1971), 1121-1130

(25) H. Freudenthal: Soviet Research on Teaching Algebra ... Educ. Stud. in Mathematics 5(1974), 391-412

(26) H. Freudenthal: Mathematik als pädagogische Aufgabe I, Stuttgart 1973

(27) R. Kapadia: A critical Examination of Piaget/Inhelders View on Topology, Educ. Stud. in Math. 5(1974), 419-424

(28) P. van Hiele: Piagets Beitrag zu unserer Einsicht in die kindliche Zahlbegriffsbildung, in: Rechenunterricht und Zahlbegriff, Westermann Braunschweig 1970

(29) M. Otte, u.a.: Zu einigen Hauptaspekten der Mathematikdidaktik, Schriftenreihe des IDM 1(1974)

(30) M. Otte (Hrgb): Mathemtiker über die Mathematik, Vorwort, Heidelberg 1974

(31) Th. Kuhn: Die Struktur wissenschaftlicher Revolutionen, Frankfurt 1967

(32) A.S. Arsenjev/ W.S. Bibler: Analyse des sich entwickelnden Begriffs (russ.), Moskau 1967

(33) J. Piaget: Lebendige Entwicklung, Zeitschrift für Pädagogik, Heft 1(1974)

(34) G. Pickert: Wissenschaftliche Grundlagen des Funktionsbegriffs, MU Heft 3(1969)

(35) W. Heisenberg: Physik und Philosophie, Stuttgart 1972

(36) A. Howson (Hrgb): Developments in Mathematical Education, Cambridge 1973

(37) A. Bishop: Trends in Research in Math. Education, Mathematics Teacher, Spring 1972

(38) L.S. Wygotski: Denken und Sprechen, Stuttgart 1969

(39) P. Damerow, u.a.: Elementarmathematik: Lernen für die Praxis? Stuttgart 1974

(40) Michèle Artigue: Numeration, Schriftenreihe des IDM, Heft 3/1974

(41) J. Piaget: Einführung in die genetische Erkenntnistheorie, Frankfurt 1973

(42) J. Piaget: Psychologie der Intelligenz, Zürich 1947

(43) J. Piaget/B. Inhelder: Die Entwicklung des räumlichen Denkens beim Kinde, Stuttgart 1971

(44) T. Dantzig: Number, the Language of Science, Allen and Unwin, London 1938

(45) H. Wäsche: Eine Bemerkung zur Paradoxie des Zeno von Elea über "Achilles und die Schildkröte", Beiträge zum Mathematikunterricht 1969, S. 17-20

(46) Gerthsen/Kneser: Physik, Heidelberg 1969

(47) Lambacher-Schweizer: Analysis, Stuttgart 1966

(48) J. Grattan-Guiness: The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Rieman, Cambridge/USA 1970

(49) H. Karcher: Analysis auf der Schule, in: Didaktik der Mathematik 1, 1973, S. 46-69

KONKRETE BEISPIELE, DIE ZEIGEN, WIE PÄDAGOGISCHE FEHLER DURCH EINE UNGENÜGENDE FACHWISSENSCHAFTLICHE AUSBILDUNG VON GEWISSEN LEHRERN HERAUSGEFORDERT WERDEN.

von Joelle Pichaud, IREM Paris Süd

Diese Beispiele sind der Beobachtung von zwei Klassen der ersten Stufe der Oberschule entnommen, wo seit 1971 nach neuen Lehrplänen gelehrt wird. Sie sind bedeutsam hinsichtlich dessen, was man von einer Weiterbildung von Lehrern mit ungenügender Ausbildung erwarten kann, und, in gewissen Fällen, hinsichtlich der Nützlichkeit einer mit Experimenten in der Klasse verbundenen Weiterbildung.

* * * * * * * *

Während des Schuljahrs 72/73 haben wir, Herr Revuz und ich, eine Quarta und eine Tertia beobachtet.
Für diese zwei Klassen besteht der Mathematiklehrplan aus zwei Teilen:

- der erste ist der Rechnung mit Dezimalzahlen, der Approximation der reellen Zahlen durch Dezimalzahlen und der Rechnung mit reellen Zahlen gewidmet;
- der zweite ist der affinen Geometrie, dann der euklidischen affinen Geometrie der Ebene und dem Studium von ebenen Vektoren gewidmet.

In diesem letzten Teil werden die Begriffe von affiner Gerade und affiner Ebene mithilfe von Axiomen eingeführt, deren Wahl den Schülern durch physische Beobachtung begründet wird.

Der Zusammenhang zwischen den beiden Teilen des Lehrplans wird über die Verwendung von Skalierungen affiner Geraden hergestellt, das sind Abbildungen affiner Geraden in $\mathbb{R}$, die gewissen Verträglichkeitsbedingungen genügen.

Diese Lehrpläne sind für die Quarta seit 1971 und für die

Tertia seit 1972 gültig. Die Einwände, die sie herausgefordert haben, besonders wegen des geometrischen Teils, haben meiner Meinung nach ihre wesentliche Ursache in der unzulänglichen Ausbildung zahlreicher Lehrer der ersten Stufe.

Zum ersten Mal sollten die Schüler mit einer axiomatischen Theorie, in diesem Fall die Geometrie, bekannt gemacht werden, was mehr die Lehrer, deren mathematische Bildung ungenügend war, als die Schüler verängstigte. Unter diesen Umständen bewahrheitete sich oft der folgende Satz: Wenn ein Lehrer erklärt: "Das ist für meine Schüler zu schwer!", heißt das oft, daß er es selbst nicht richtig verstanden hat.

Die Lehrer der beiden beobachteten Klassen hatten jeweils zwei Jahre Weiterbildung bei der I.R.E.M. bekommen, allerdings mit, wie man sehen wird, unterschiedlichem Erfolg.

* * *

Den Tertianern schienen algebraische Rechnungen keine Schwierigkeiten zu bereiten, obwohl gewisse Schüler sie nur langsam ausführten. Der der Geometrie gewidmete Teil war in dieser Klasse am interessantesten. Die Klasse war sehr lebendig. Die Lehrerin, manchmal fast ein bißchen zu dynamisch, hatte fleißig und ausdauernd die Weiterbildung besucht. Sie bedauerte, nicht zu wissen, was ihre Schüler das nächste Jahr lernen sollten. Ihr war es gelungen, ihren Unterricht zu verbessern, und doch stolperte sie manchmal über wichtige Einzelheiten. Ich gebe dafür zwei Beispiele, die mir zu den interessantesten zu gehören scheinen.

1. Das erste bezieht sich auf eine klassische Übungsaufgabe aus der ebenen Vektorrechnung:
Man gibt vier Punkte A, B, C, D der Ebene vor und nimmt an, daß ein fünfter, M, der Gleichung

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}$$

genügt. Gefragt ist nach der Lage von M.
Nachdem die Schüler eine zeitlang Gleichungen wie $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$

in zufälliger Weise benutzt hatten, fanden sie nach einer im allgemeinen zu langen Rechnung $M = D$.

Eine Schülerin erhielt dieses Resultat auf folgende Weise: Sie schrieb

$$\overrightarrow{(M-A)} + \overrightarrow{(C-B)} + \overrightarrow{(M-D)} = \overrightarrow{(M-B)} + \overrightarrow{(C-D)} + \overrightarrow{(D-A)}$$

strich dann Pfeile und Klammern aus

$$M - A + C - B + M - D = M - B + C - D + D - A$$

und erhielt durch Vereinfachung

$$M = D.$$

Es ist klar, daß die Lehrerin ihre Methode nicht akzeptiert hätte, wäre das Resultat wegen eines Rechenfehlers falsch gewesen; das Resultat war aber richtig. Die ratlose Lehrerin fragte mich, wie ich darüber dächte. Es war unmöglich, ihr zu erklären, daß es sich um eine einfache barycentrische Rechnung mit Punkten einer affinen Ebene handele und daß die Rechnung richtig sei, weil die Summe der Koeffizienten Null sei; so bemerkte ich, es genüge, irgendeinen Punkt O der Ebene zu wählen und $\vec{AM} = \vec{OM} - \vec{OA}$ anstatt $M - A$ zu schreiben, um $\vec{OM} = \vec{OD}$ zu gewinnen und somit die Rechnung der Schülerin zu rechtfertigen.

Es scheint mir jedoch viel interessanter, einmal anders vorzugehen und zu versuchen, den Schülern zu erklären, wie die Schreibweise $\overrightarrow{(M-A)}$, bzw. dann $M - A$, für den Vektor $\vec{AM}$ zustande kam. Dabei trifft sich gut, daß im Lehrplan das Studium der Vektoren der affinen Gerade vor dem der Vektoren der affinen Ebene beginnt.

Durch eine Skalierung g einer affinen Geraden wird jedem Punkt M der Geraden eine Abzisse $m = g(M)$ zugeordnet. Durch $(A,B) \sim (C,D) \Longleftrightarrow b - a = d - c$ ist dann eine Äquivalenzrelation auf g gegeben. Man zeigt, daß diese von der gewählten Skalierung unabhängig ist und definiert anschließend den Vektor $\vec{AB}$ als die Äquivalenzklasse des Paares (A,B). Geht man so vor, so gewöhnen sich die Schüler schnell daran, Rechnungen statt mit den Vektoren der Geraden mit den Abzissen der Endpunkte ihrer Repräsentanten auszuführen, d.h. $\overrightarrow{AB}$ durch $b-a$ zu ersetzen. Es würde daher wahrscheinlich genügen, wenn man den Schülern an dieser Stelle sagen würde, daß die Schreibweise $\overrightarrow{AM} = M - A$ lediglich eine Übertragung dieser Verhältnisse in die Ebene darstellt.

Man kann häufig beobachten, daß die Schüler die Punkte der affinen Gerade mit ihren Abzissen identifizieren. Dies ist eine Unsitte, die sehr schwer zu vermeiden ist, aber im Geist der Schüler keine Verwirrung zu stiften scheint (es genügt, die Skalierung zu verändern, um davor sicher zu sein) und sich schließlich als sehr nützlich erweist.

Hier kann eine andere Bemerkung angeführt werden. Es wird oft behauptet, es sei sinnvoller, die Vektoren in der Ebene vor den Vektoren auf der Gerade einzuführen, weil es auf der Geraden schwieriger sei, Vektoren, Punkte und Zahlen zu unterscheiden. Das eben gegebene Beispiel beweist das Gegenteil: Bei Vektoren auf der Geraden haben die Schüler letztlich nur mit Zahlen zu rechnen, und das verlangt keine große Änderung ihrer Gewohnheiten; die Übertragung von der Rechnung mit Zahlen (oder mit Vektoren auf der Geraden) auf die Rechnung mit Vektoren in der Ebene mag ihnen natürlicher erscheinen als die direkte Behandlung der Vektoren der Ebene.

2. Das zweite Beispiel zeigt, was passieren kann, wenn man Quantoren nicht explizit macht.

Neuerdings werden die Quantoren und ihre Symbole in der Sekunda explizit eingeführt. Gute Lehrwerke verwenden sie jedoch von Anfang an, allerdings zunächst nur in umgangssprachlicher Form. So findet sich in einem Lehrbuch der folgende Satz:

> Für je vier Punkte A, B, C, D der affinen Gerade Δ sind die drei folgenden Sätze äquivalent:

(1) Es gibt eine Translation, die A in B und C in D überführt.

(2) Es gibt eine Skalierung g von Δ mit der Eigenschaft $g(B) - g(A) = g(D) - g(C)$.

(3) Für jede Skalierung g von Δ gilt $g(B) - g(A) = g(D) - g(C)$.

(4) (A,D) und (B,C) haben denselben Mittelpunkt.

Natürlich muß es statt "die drei folgenden Sätze" "die vier folgenden Sätze" heißen. Leider führte dieser an sich belanglose Fehler die Lehrerin zu einem folgenschweren anderen. Zwar hatte sie in den Vorlesungen zur Weiterbildung von Quantoren gehört, doch aus Mangel an Übung war ihr Verständnis oberflächlich geblieben. Deshalb sagte sie den Schülern, die Sätze zwei und drei wären identisch, und sie ließ den einen von beiden im Lehrbuch streichen. Es ist klar, daß in diesem bestimmten Fall die Verwendung des Symbolismus der Quantoren diese Verwirrung verhindert hätte. Würden aber die Lehrpläne seine Verwendung bindend vorschreiben, so würden manche Lehrer und Eltern heftige Einsprüche gegen die Inflation der Symbole erheben; viele Ungenauigkeiten, insbesondere auch in den Lehrbüchern, würden jedoch vermieden.

Obwohl sich die Schüler vor Symbolen nicht fürchten, denke ich, daß es eine gute Methode wäre, jeden mathematischen Satz und jede mathematische Definition systematisch und explizit mithilfe der Ausdrücke "für jeden" und "es gibt mindestens ein" genau zu formulieren und jedesmal vollständig an die Tafel zu schreiben und die Schüler daran zu gewöhnen, sie auch in ihren mathematischen Aufgaben zu verwenden. Natürlich zwingt ein solches Vorgehen die Lehrer zu einer Genauigkeit, die der Mathematik ihrer Natur nach unentbehrlich ist, bei manchen Lehrern jedoch leider ungewöhnlich ist oder sogar völlig fehlt.

* * *

In der Quarta war die Lage wesentlich schlimmer. Die Lehrerin gab ihren Unterricht mit dem Buch in der Hand und schrieb seinen Inhalt, einschließlich der Druckfehler, an die Tafel. Mit den Schülern war keine Diskussion möglich; sie waren, wie leicht zu verstehen, total passiv.

In dieser Klasse beobachteten wir den algebraischen Teil des Unterrichts. Die wenigen Geometriestunden, denen wir beiwohnten, waren eine totale Pfuscherei. Der Lehrerin, die dem Ruhestand nahe war, machte es offenbar nichts aus, daß sie wenig von dem verstand, was sie erklärte; sie glaubte aber, eine große pädagogische Erfahrung zu haben.

Ihr Unterricht über das algebraische Rechnen in $\mathbb{D}$ oder $\mathbb{R}$ hatte den Charakter einer Gerichtssitzung. Das schlagendste Beispiel dafür ist das folgende: Die Lehrerin fragte: "Warum hat 0 kein Inverses?" Eine Schülerin antwortete richtig, daß, hätte 0 ein Inverses x, $0 \cdot x = 1$ wäre, was unmöglich sei, weil $0 \cdot x = 0$. Die nicht überzeugte Lehrerin erklärte: "Es ist besser zu sagen: Hätte 0 ein Inverses, so würde man es $\frac{1}{0}$ (eins durch null) schreiben, während man doch durch 0 nicht dividieren kann".

Auf Französisch sagte die Lehrerin: "On ne peut pas diviser par zéro", und ihrem Benehmen nach vermute ich, daß sie mehr an "darf" als an "kann" dachte. Andere, nicht so treffende Beispiele beweisen, daß es für diese Lehrerin zwischen Axiomen, Sätzen, Definitionen keinen Unterschied gab.

Es drängt sich daher die Frage nach der Wirksamkeit der Weiterbildung auf, denn immerhin war diese Lehrerin zwei Jahre lang weitergebildet worden. Es ist klar, daß in ihrem Fall die erste Ausbildung nicht ausgereicht hatte und daß das fehlende Verständnis und die Zuflucht zu Automatismen später zu einer echten Blockierung führten.

* * *

Es besteht - und damit kommen wir zum Schluß - kein Zweifel, daß die Beobachtung der Tertia und unsere Zusammenarbeit mit ihrer Lehrerin interessant, nutzbringend und ermutigend war. Dies war in der Quarta nicht der Fall, wo eine Verständigung nur schwer möglich war. Diese Erfahrung führt uns im Schuljahr 73/74 im I.R.E.M. Paris dazu, eine neue Art der Weiterbildung zu organisieren.

Wir haben Gruppen gebildet, die aus zwölf bis fünfzehn in benachbarten Schulen tätigen Lehrern bestanden, und in welchen unter der Führung eines sorgfältig gewählten guten Lehrers die Mitglieder der Gruppe zusammenarbeiteten: gemeinsame Vorbereitung des Unterrichts, gegenseitige Beobachtung der Klassen, gemeinsame Diskussion und Herausarbeitung mathematischer und pädagogischer Einsichten.

Diese Organisation begegnete zahlreichen praktischen Schwierigkeiten, sie erwies sich jedoch als besonders wirksam. Die Lehrer waren eher bereit und in der Lage, sich dem Studium mathematischer Fragen zu widmen, als bei einer Vorlesung, und die Beobachtung des Unterrichts ihrer Kollegen brachte für manche eine Enthüllung von Verhaltensweisen und Ideen, wovon sie zuvor keine Ahnung hatten. Dies bewirkte einen Bruch ihrer starren und falsch begründeten Gewohnheiten. Manche waren höchst erstaunt, wenn ein Kollege andere Notationen als die, welche sie kannten, benutzte, besonders, wenn sie feststellen mußten, daß die Schüler sie gern und richtig handhabten. Diese Art Weiterbildung, die interessant und bereichernd ist, beansprucht jedoch viele gute Lehrkräfte und kann auch nicht alle Lücken einer unzulänglichen ersten Ausbildung füllen.

Hinter den Fragen der Qualität der ersten Ausbildung verbergen sich letztlich politische Fragen und politische Standpunkte, die nicht in die unmittelbare Zuständigkeit der Didaktik fallen, ihre Wirksamkeit aber stark beeinflussen.

DAS LEHREN DER STETIGKEIT UND DER DIFFERENZIERBARKEIT IN DER SCHULE

von André Revuz, IREM Paris

Der nachfolgende Text war die Grundlage für den Vortrag von Herrn Revuz, in dem zusätzlich noch exemplarisch aus den Erfahrungen mit der praktischen Umsetzung dieses Konzepts an Pariser Schulen berichtet wurde.

In fast allen Lehrplänen für die Oberschulen liest man Worte wie Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Grenzwert usw. Wie ist aber die wahre Lage des Unterrichtens dieser Begriffe in den meisten Schulen? Ich glaube, es ist nicht sehr weit von der Realität, wenn ich sage, daß in manchen Fällen der Stetigkeitsbegriff sehr oberflächlich studiert wird. Man begnügt sich oft mit einer wenig motivierten Definition und gibt ohne Beweis einige Eigenschaften der stetigen Funktionen. Was die Ableitungen betrifft, ist es üblich, die algebraischen Aspekte des Rechnens mit Ableitungen zu betonen, und die grundlegenden Ideen im Schatten zu lassen, die die Bedeutung und die Nützlichkeit des Begriffs erklären.

Nun muß man zuerst die Frage stellen: Ist es wünschenswert, echte Analysis in der Schule zu lehren?
Diese Frage kann man leicht bejahen, denn Analysis ist sicher unter allen Zweigen der Mathematik derjenige, der am reichsten an Anwendungen ist. Diese Anwendungen findet man sowohl in der Mathematik selbst als auch in anderen Wissenschaften: Physik, Mechanik, Ökonomie usw. Seit dem XVII.Jahrhundert ist Analysis das Zentrum der Mathematik und die neuesten Entwicklungen haben ihr Gebiet eher verbreitert als verengt. Was in den Anwendungen am schwersten

ist, ist nicht so sehr die technische Benutzung der Analysis als das tiefe Verständnis davon, was die Grundbegriffe der Analysis bedeuten, und wie sie in konkreten Verhältnissen verwandt werden können. Darum ist es so wichtig, sich nicht auf die technischen Aspekte zu begrenzen, sondern schon zu Anfang eine wirklich vernünftige Motivation zur Einführung der Grundbegriffe zu geben.

Wenn man darüber einig ist, daß es gut wäre, echte Analysis in der Schule zu lehren, so bleibt noch die Frage, ob es möglich ist. Die allgemeine Erfahrung könnte diese Möglichkeit in Zweifel ziehen. Jedoch nach sorgfältiger Beobachtung davon, was sich in den Klassen beim Lehren aller Arten von Rechnen ereignet, nach Lokalisierung der wichtigsten Schwierigkeiten und Erforschung ihrer Herkunft, nach systematischer Experimentierung eines vernünftigen Unterrichts des Rechnens in der Quarta und Tertia, und der Grundbegriffe in der Unterprima und Oberprima, bin ich sicher, daß es möglich ist, einen wirklichen und tiefgehenden Unterricht der Begriffe der Stetigkeit, der Differenzierbarkeit und der Integration zu geben.

Die Hauptbemerkung besteht aus den beiden folgenden, offensichtlichen Feststellungen:

a) Der Grundbegriff der Analysis ist die Idee der Annäherung.

b) Die klassische Schulmathematik hat diese Idee niemals eingeführt, sie hat sich verhalten, als ob diese Idee in der Mathematik nichts zu suchen hätte, und hat sich sogar geweigert, sie zu betrachten, wenn sie von der natürlichen Problemstellung dazu gezwungen gewesen wäre, sie zur Kenntnis zu nehmen. Man denke an das Lehren der dezimalen Zahlen und an die falschen Gleichheiten, die man in manchen Büchern für Kinder finden kann, wie $\sqrt{3} = 1{,}732$; $1/3 = 0{,}33$; $\pi = 3{,}14$ und den Kindern auferlegt werden, um die Gefahr des Begriffs der Annäherung zu vermeiden.

Was klassischerweise in der Schule gemacht wird, ist, angenähertes Rechnen als genaues Rechnen hinzustellen. Man darf daher nicht erstaunen, wenn einige Jahre später bei der sehr schüchternen Einführung des Annäherungsbegriffs die Lehrer so viel Mißverständnisse bei den Schülern finden. So möchte ich als ersten Grundsatz folgendes betonen: Wenn man in den letzten Jahres des Gymnasiums (und auch in den ersten Jahren der Universität) erfolgreich Analysis lehren will, so muß man diesen Unterricht in den ersten Jahren sorgfältig vorbereiten.

In dieser Hinsicht haben die letzten französischen Lehrpläne einen entscheidenden Fortschritt gemacht, indem sie in der Quarta und Tertia eine gründliche Beschäftigung mit den Eigenschaften der dezimalen Zahlen vorgeschrieben haben. Anstatt dem Rechnen mit Brüchen eine große Wichtigkeit zu geben, entschied man sich, den dezimalen Zahlen den Vorrang einzuräumen. Die Gründe dafür sind: Zuerst die Tatsache, daß diese Zahlen diejenigen sind, die von den Physikern und den Ingenieuren verwendet werden, und zweitens, daß sie besonders geeignet sind, um angenäherte Ergebnisse auszudrücken. Diese Bequemlichkeit liegt sicher daran, daß die natürliche Ordnung der Menge $\mathbb{D}$ der dezimalen Zahlen mit Hilfe der üblichen dezimalen Vorstellung sehr leicht erkennbar ist. In Quarta und Tertia wird herausgearbeitet, daß in manchen Fällen ein numerisches Ergebnis korrekt nicht durch die Angabe einer einzigen Zahl wie z.B. $\pi = 3,14$ beschrieben werden kann, sondern die Angabe von zwei Zahlen, wie z.B. $3,14 < \pi < 3,15$ erfordert.

Die wesentlichen Inhalte der oben angeführten Lehrpläne (Geometrie ausgeschlossen) für Quarta und Tertia sind die folgenden:

I. Die Menge $\mathbb{D}$ der dezimalen Zahlen. Addition, Multiplikation. $(\mathbb{D}, +, \times)$ ist ein Ring.

II. Ordnung auf $\mathbb{D}$. $\mathbb{D}$ ist ein totalgeordneter Ring. Intervalle und angenähertes Rechnen (u.a. wenn $a < x < b$, $c < y < d$, was kann man über $x + y$, $x - y$, x/y sagen?) Absolutbetrag auf $\mathbb{D}$. Die Abbildung $x \mapsto |x| = \sup(x, -x)$ und ihre Eigenschaften, insbesondere $|x - y| < |x|+|y|$.

Distanz als: $d(x, y) = |x - y|$.
Gleichheit $\{x | a<x<b\} = \{x | \; |x - \frac{a+b}{2}| < \frac{b-a}{2}\}$
III. Idee eines unendlichen Annäherungsprozesses und der unendlichen dezimalen Entwicklungen.
Reelle Zahlen. Axiome von $\mathbb{R}$. Rechnen in einem Körper; $\mathbb{Q}$ als Unterkörper von $\mathbb{R}$.
IV. Lineare, affine, teilweise affine Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

Nach einer solchen Vorbereitung wird es leichter sein, die Begriffe Stetigkeit und der Differenzierbarkeit einzuführen. Es gibt jedenfalls noch Schwierigkeiten, die man genau lokalisieren muß. Was beim Unterricht des Stetigkeitsbegriffs am schwersten scheint, ist, den Schülern eine gute Motivation ihrer Einführung zu geben, und nicht die technischen Einzelheiten, die leicht beherrscht werden, sobald die Zweckmäßigkeit des Begriffs erkannt wird.

Nun muß man hier sehr vorsichtig fortschreiten. Einen solchen Begriff wie die Stetigkeit einzuführen, ist keine rein mathematische Frage; denn hier handelt es sich um die Bildung eines Modells, das z.B. von den Physikern benutzt werden kann, um die Verbindung zwischen den Maßen verschiedener physikalischer Größen vorzustellen. Was man die Schüler verstehen lassen soll, ist, daß es vernünftig ist, stetige Funktionen zu betrachten. Und hier darf man Vernünftigkeit und Notwendigkeit nicht verwechseln.

Zuerst muß man betonen, daß die Benutzung des Körpers $\mathbb{R}$ sehr bequem ist, wegen der guten algebraischen und topologischen Eigenschaften von $\mathbb{R}$, aber gar nicht notwendig ist. Man könnte denken, daß für Physiker nur ein Teil der Menge $\mathbb{D}$ der dezimalen Zahlen nützlich ist; und in der Tat brauchen die Physiker nicht die ganze Menge $\mathbb{D}$; man könnte eben sagen, daß sie bei einer geeigneten Wahl der Einheiten nur ganze Zahlen brauchen. Das ist wahr, aber es ist sicher bequemer, einen Körper anstatt eines Ringes zu benutzen, und insbesondere einen Körper wie $\mathbb{R}$: Es ist bequem, aber nicht notwendig.

Angenommen wir benutzen $\mathbb{R}$ und Funktionen von $\mathbb{R}$ (oder einem Intervall U von $\mathbb{R}$) nach $\mathbb{R}$, um die physikalischen Gesetze darzustellen, so bleibt die Frage: Welche Funktionen? Hier muß man zuerst die Schüler den Reichtum der Menge aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ erkennen lassen, indem man ihnen genügend zahlreiche, verschiedene Beispiele von stetigen und unstetigen Funktionen zeigt: Übliche Polynomfunktionen; Treppenfunktionen; Funktionen, die mit Treppenfunktionen gebildet werden; trigonometrische Funktionen, charakteristische Funktionen von Mengen, die in ihrem Komplement überall dicht sind, usw.

Dann kommt die Bedingung: Ein Physiker kann nicht sagen, daß das Maß einer Größe genau den Wert x annimmt, sondern daß es in einem gewissen Intervall liegt, und er weiß, daß wenn das Maß in diesem Intervall liegt, so kann der Wert das Maß einer anderen Größe nicht zu stark ändern. Daher kommen keine Funktionen mit Sprüngen in Frage. Es gibt aber noch Schwierigkeiten, die nicht umgangen werden dürfen: Der Physiker kann unter wohl definierten experimentellen Umständen mit Recht von einer kleinen Variation eines Maßes sprechen, der Mathematiker kann es nicht. Was in der Realität sinnvoll ist, wäre im Modell durchaus sinnlos! Auf der anderen Seite ist das mathematische Modell so beschaffen, daß es fähig ist, die experimentellen Ergebnisse nicht nur mit ihrer heutigen Präzision darzustellen, sondern mit aller denkbaren Präzision. Wenn man ein gutes Verständnis gewinnen will, so ist es wichtig, die Ähnlichkeiten wie die Verschiedenheiten zwischen Modell und Realität völlig klar zu machen.

Nun, was für Funktionen können wir den Physikern anbieten? Es gibt mehrere verschiedene mögliche Antworten. In allen Fällen, in denen die Verbindung zwischen den Maßen x und y zweier Größen durch eine Funktion f dargestellt wird, ist die Antwort auf die folgende Frage wichtig: Da man x nicht ganz genau kennt, was für eine Auskunft wird von der Funktion über der Wert y gegeben?

Von diesem Standpunkt aus gibt es sehr angenehme Funktionen, und zwar diejenigen, die eine Lipschitzbedingung erfüllen: Es gibt $k > 0$ so daß für alle x und y gilt:
$|f(x) - f(y)| < k\,|x - y|$.
Das ist eine sehr gute Antwort auf unsere Fragen, und in der Tat genügen praktisch fast alle üblichen Funktionen in ihrem Anwendungsbereich einer solchen Bedingung.

Man sollte aber bemerken, daß eine solche Bedingung sehr einschränkend ist, und von so einfachen Funktionen wie $x \mapsto \sqrt{x}$ nicht erfüllt wird.

Im Fall der Funktionen, die eine Lipschitz-Bedingung erfüllen, kann man die Genauigkeit des Wertes $f(x)$ ganz leicht aus der Genauigkeit von x herleiten. Am wichtigsten ist aber, daß die Funktion f ihrer Konstruktion nach nicht verhindert, $f(x)$ mit einer beliebigen Genauigkeit zu kennen, wenn die Bestimmung von x es gestattet. Mit anderen Worten: Man kann vernünftigerweise von einer Funktion verlangen, daß sie eine beliebig genaue Bestimmung von $f(x)$ ermöglicht, falls man x mit einer genügend großen Genauigkeit kennt. Hier sind wir nicht sehr weit von der Definition der Stetigkeit entfernt. Man kann aber noch in zwei verschiedene Richtungen fortschreiten.

Die Genauigkeit kann nämlich an einem gewissen Punkt x_0 über den Radius r eines Intervalls $]x_0 - r, x_0 + r[$ definiert werden. Sie kann auch in einem Intervall $]a,b]$ über die Distanz $x - y$ von irgend zwei Punkten des Intervalls definiert werden.

Im ersten Fall erhält man die Definition der Stetigkeit in einem Punkt x_0: Für jedes Intervall I mit Zentrum $f(x_0)$ gibt es mindestens ein Intervall J mit Zentrum x_0, so daß $f(J) \subset I$.

Im zweiten Fall erhält man die Definition der gleichmäßigen Stetigkeit: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ so daß für alle x und y in $]a,b[$ aus $|x - y| < \delta$ folgt $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Es gibt keinen vernünftigen Grund dafür, daß man nur Stetigkeit in einem Punkt, und danach Stetigkeit in jedem Punkt, und nicht gleichmäßige Stetigkeit einführt. Es lohnt sich, früh zu zeigen, daß die gleichmäßige Stetigkeit eine strengere Bedingung als die Stetigkeit in jedem Punkt ist, daß beide Begriffe sehr wichtig sind, und daß man nicht glauben darf, wie es oft bei Anfängern vorkommt, daß eine überall stetige Funktion notwendig eine gleichmäßige stetige Funktion ist.

Ich will hier nicht entwickeln, wie man anschließend die Eigenschaften der stetigen Funktionen ableiten kann: Es ergeben sich dort noch Schwierigkeiten, die auch sorgfältig studiert werden müssen, wenn man sie wirklich überwinden will. Aber meine Erfahrung, die auf systematischem Experimentieren in sechs Primen beruht, hat mir gezeigt, daß der allerwichtigste Schritt die Einführung des Begriffs ist, und daß - nachdem man ehrlich und sorgfältig den Schülern gezeigt hat, warum man besondere Klassen von Funktionen betrachtet - es relativ viel leichter war, die eventuell schwieriger erscheinenden technischen Einzelheiten zu lehren. Ich will nur einige Worte sagen über den Plan, dem ich gefolgt bin:

1) Satz über die Zusammensetzung stetiger Funktionen.
2) Beweis, daß gegebene Funktionen (rationale Funktionen) in gegebenen Punkten stetig sind.
3) Einführung des allgemeinen Begriffs der Distanz und der Stetigkeit einer Abbildung von einem metrischen Raum in einen anderen. Die üblichen Distanzen auf $\mathbb{R}^2$.
4) Stetige Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^2$, von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$, von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$. Anwendung: Die Addition und die Multiplikation von $\mathbb{R}$ sind stetig. Wenn die Abbildungen f und g von einem Intervall U nach $\mathbb{R}$ stetig sind, so sind auch $f + g$ und fg stetig.

Bei der Einführung des Differenzierbarkeitsbegriffs müssen noch die Grundideen klargemacht werden, und zwar die Begriffe Annäherung und Linearität.

Der Gedankengang kann wie folgt zusammengefaßt werden:

1. Lineare Interpolation, d.h. eine Funktion f, die an den Endpunkten die Werte $f(a)$ und $f(b)$ annimmt, wird in dem Intervall $[a,b]$ durch die Funktion
$x \mapsto f(a) = \frac{x-a}{b-a} \cdot (f(b) - f(a))$
ersetzt. Man muß die Nützlichkeit dieser linearen Interpolation betonen, eben weil sie nur eine grobe Annäherung ergibt. Beispiel: Die Durchschnittsgeschwindigkeit eines Verkehrsmittels ist der Koeffizient einer linearen interpolierenden Funktion.

2. Man mag wünschen, diese Annäherung zu verbessern, indem man das Intervall $[a,b]$ in mehrere Intervalle unterteilt. Man kann mit einfachen Beispielen feststellen, daß es Funktionen gibt, für die dadurch die Annäherung verbessert wird und andere, für die sie schlecht bleibt. Man entscheidet sich dann, sich nur für die ersten zu interessieren, und spezieller für die Funktionen, für die es eine beste lokale lineare Annäherung gibt.
Von dieser besten lokalen linearen Annäherung kann man drei verschiedene äquivalente Definitionen geben:

1. Eine sehr natürliche, wenn auch nicht übliche, ist die folgende: Die Funktion f hat eine beste lokale lineare Annäherung in dem Punkt x_0, wenn es eine lineare Abbildung gibt mit der Eigenschaft, daß jeder linearen Abbildung k ein Intervall U mit Zentrum 0 entspricht, wo die Annäherung durch ℓ besser ist als die Annäherung durch k, d.h.
$\forall h \in U \quad |f(x_0+h) - f(x_0) - \ell(h)| < |f(x_0+h) - f(x_0) - k(h)|$

2. Es gibt eine lineare Abbildung ℓ und eine in einem Intervall U mit Zentrum 0 definierte in 0 stetige Funktion ω, mit $\omega(0) = 0$, so daß
$\forall h \in U \quad f(x_0+h) - f(x_0) = \ell(h) + \omega(h)h$
Man nennt ℓ das Differential von f in x.

3. Die Funktion $h \mapsto \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, die für $0<|h|<\alpha$ definiert ist, hat einen Limes in 0, den man die Ableitung von f in x_0 nennt, und der der Koeffizient von ℓ ist.

Für ein gutes Verständnis der Differenzierbarkeit scheint es mir unentbehrlich, diese drei Definitionen mit dem Beweis (oder mindestens mit dem Hinweis) ihrer Äquivalenz im Unterricht zu behandeln. Die erste ist wahrscheinlich diejenige, die am besten die Idee der linearen Annäherung ausdrückt, die zweite ist die bequemste für die Anwendung und für die Verallgemeinerung des Begriffs, die dritte, die fast überall im Oberstufen-Unterricht als einzige gelehrt wird, gibt ein technisches Hilfsmittel, den Koeffizienten des Differentials ℓ zu bestimmen.

Als Schlußwort möchte ich noch einmal sagen, man kann meiner Erfahrung nach den mathematischen Unterricht mit kurzsichtigen Maßnahmen nicht verbessern. Die so oft benutzte Politik, die darin besteht, alles was ein wenig schwierig erscheint, um einige Jahre in dem Unterrichtskursus zu verschieben, ist ein großer Fehler. Auf diese Art gewöhnen sich die Schüler daran, Worte zu benutzen, Rechnungen auszuführen, ohne den wahren Sinn dessen zu kennen, was sie betreiben. Daraus entsteht großer Schaden nicht nur für ihre wissenschaftliche Bildung, sondern vielleicht auch noch mehr für ihre gesellschaftliche Bildung.

Der andere Weg, den ich empfehle, mag auf den ersten Blick nicht so leicht erscheinen. Aber ohne Mühe kann man nichts bekommen, und in der Tat ist dieser Weg viel leichter als er scheint, und was ich erfahren habe, ist, daß er das Interesse, die Tätigkeit, die Forschungsbereitschaft der Schüler weckt, daß er die gewöhnlich langweiligen Teile des Mathematikunterrichts entscheidend erleichtern kann und endlich, daß er der einzige Weg ist, den man gehen kann, wenn man echte Mathematik lehren will.

PROGRAMM DER TAGUNG

Montag, 3o.9.1974

Vormittag:

G. Schubring: Die Organisation des Schulsystems in der BRD und in Frankreich

R. Stowasser: Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II - Plan und Wirklichkeit

F. Colmez : Grundlinien der Grundschulreform in Mathematik in Frankreich

Nachmittag: Plenumsdiskussion

Dienstag, 1.1o.1974

Vormittag:

R. Douady : Variable, Funktionen, graphische Darstellung in der Klasse CE 1 (7- bis 8-jährige Schüler)

R. Grünig/ M.F. Gouzou : Einführung der Dezimalzahlen in der Grundschule

M.Rouquairol: Erfahrungen mit Lehrerkooperation im Unterricht von Abschlußklassen der Sekundarstufe II

F. Colmez : Zur Kritik der Stoffdidaktik: Drei Beispiele

A. Rêvuz : Das Lehren der Stetigkeit und der Differenzierbarkeit in der Schule

M. Otte : Zum Verhältnis von Wissenschaft und Unterricht

Nachmittag:

M. Artigue : Das Zahlsystem im Elementarunterricht

Plenumsdiskussion

Mittwoch, 2.10.74

Vormittag:

H. Bussmann :	Elemente von Unterricht im System und mögliche Kriterien der Beurteilung des Unterrichtsprozesses
J. Carrier :	Zur Entwicklung des Mathematik-Didaktiker-Teams "E. Galion"
J. Pichaud :	Konkrete Beispiele, die zeigen, wie pädagogische Fehler durch eine ungenügende fachwissenschaftliche Ausbildung von gewissen Lehrern herausgefordert werden
Th. Mies/ D. Vogel :	Zur Problematik der Begründung von Lehrerentscheidungen
G. Brousseau:	Bericht über die Forschungsarbeiten

Nachmittag: Plenumsdiskussion

Donnerstag, 3.10.74

Vormittag:

J. Bertheas :	Die Arbeit des IREM Lyon
G. Lambelin :	Koordinierung Mathematik/Französisch 6. und 5. Klasse des ersten Zyklus der Sekundarstufe
G. Brousseau:	Kann man die Methoden der Berechnung von Produkten natürlicher Zahlen verbessern?

Nachmittag: Plenumsdiskussion
Zusammenfassung

AUSWÄRTIGE TEILNEHMER :

IREM Paris

M. Artigue
F. Colmez
R. Douady
M.F. Gouzou
R. Grünig
A. Révuz
M. Rouquairol

IREM Paris-Süd

J. Pichaud

IREM Bordeaux

G. Brousseau
G. Lambelin

IREM Lyon

J. Bertheas
J. Carrier

232